2001/2002
51. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie C*

(*Termín odovzdania: v utorok 15. januára 2002.*)

1. Dokážte, že existuje jediná číslica c, pre ktorú možno nájsť jediné prirodzené číslo n končiace číslicou c a majúce vlastnosť, že číslo $2n+1$ je druhou mocninou prvočísla. (*M. Koblížková*)

2. V štvoruholníku $ABCD$ sa uhlopriečky pretínajú v bode P, uhlopriečka AC je rozdelená bodmi P, N a M na štyri zhodné úseky ($|AP| = |PN| = |NM| = |MC|$) a uhlopriečka BD je rozdelená bodmi L, K a P na štyri zhodné úseky ($|BL| = |LK| = |KP| = |PD|$). Určte pomer obsahov štvoruholníkov $KLMN$ a $ABCD$. (*J. Zhouf*)

3. Určte všetky dvojice (x, y) celých čísel, ktoré sú riešením nerovnice

$$\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{6}{y\sqrt{x}} < \frac{5\sqrt{y}}{y}.$$

(*J. Zhouf*)

4. Jožko sa vracal z výletu. Najprv cestoval vlakom a potom pokračoval zo zastávky na bicykli. Celá cesta mu trvala presne 1 hodinu 30 minút a prešiel pri nej vzdialenosť 60 km. Vlak išiel priemernou rýchlosťou 50 km/h. Určte, ako dlho išiel Jožko na bicykli, keď jeho rýchlosť v km/h je vyjadrená prirodzeným číslom rovnako ako vzdialenosť meraná v km, ktorú prešiel na bicykli. (*E. Kováč*)

5. Zostrojte rovnoramenný trojuholník ABC so základňou BC danej dĺžky a, ak je daný stred P strany AB a bod Q ($Q \neq P$), ktorý je pätou výšky z vrcholu B. (*J. Švrček*)

6. Istý panovník pozval na oslavu svojich narodenín 28 rytierov. Každý z rytierov mal medzi ostatnými práve troch nepriateľov.

a) Ukážte, že panovník môže rytierov rozsadiť k dvom stolom tak, aby každý rytier sedel pri rovnakom stole najviac s jedným nepriateľom.

b) Ukážte, že v prípade ľubovoľného takéhoto rozsadenia sedí pri každom stole najviac 16 rytierov.

(Nepriateľstvo je vzájomný vzťah: Ak A je nepriateľom B, tak aj B je nepriateľom A.) (*J. Šimša*)