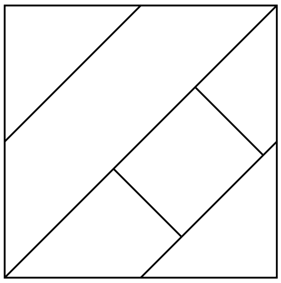
**65. ročník Matematickej olympiády**
**2015/2016** *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z6*

---

**1.** *Archeológovia zistili, že vlajka bájneho matematického kráľovstva bola rozdelená na šesť políčok, tak ako na obrázku. V skutočnosti bola vlajka trojfarebná a každé políčko bolo vyfarbené jednou farbou. Vedci už vybádali, že na vlajke bola použitá červená, biela*



*a modrá farba, že vnútorné obdĺžnikové políčko bolo biele a že spolu nesusedili dve políčka rovnakej farby. Určte, koľko možností vzhľadu vlajky musia archeológovia v tejto fáze výskumu zvažovať.* (*Veronika Hucíková*)

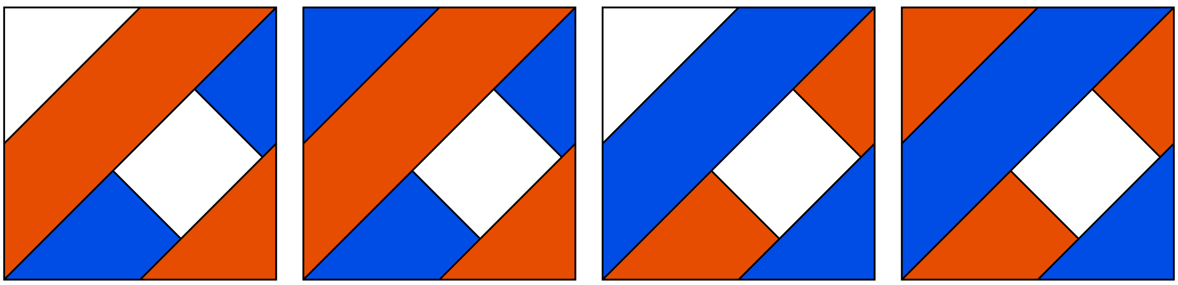
**Nápad.** Začnite vyfarbovať a zvažujte, kedy je následný postup jednoznačný a kedy existuje viac možností.

**Riešenie.** Trojuholníkové políčko susediace s bielym obdĺžnikom môže byť buď červené, alebo modré:

Ak je červené, potom pravouhlé lichobežníky musia byť modré (susedia s bielym obdĺžnikom a červeným trojuholníkom) a posledné lichobežníkové políčko musí byť červené (susedí s bielym obdĺžnikom a modrými lichobežníkmi). Zvyšné trojuholníkové políčko potom môže byť buď biele, alebo modré (susedí s červeným lichobežníkom).

Ak je trojuholníkové políčko susediace s bielym obdĺžnikom modré, tak príslušná diskusia je veľmi podobná predošlej, akurát sú vymenené farby červená a modrá.

Celkom teda dostávame $2 + 2 = 4$ možnosti, ktoré musia archeológovia zvažovať.



---

**2.** *Juraj išiel do služby k čarodejníkovi. Ten mal v prvej pivnici viac múch ako pavúkov, v druhej naopak. V každej pivnici mali muchy a pavúky dokopy 100 nôh. Určte, koľko mohlo byť múch a pavúkov v prvej a koľko v druhej pivnici.* (*Marie Krejčová*)

**Nápad.** Uvedomte si, koľko má ktorý z tvorov nôh za predpokladu, že žiadnemu z nich žiadna noha nechýba.

**Riešenie.** Musíme zistiť, aké počty múch a pavúkov dajú dokopy 100 nôh. V nasledujúcej tabuľke postupne uvažujeme rôzne počty pavúkov ($p$), určíme, koľko majú celkom nôh ($P = 8p$) a koľko nôh ostáva na muchy ($M = 100 - P$); ak je tento počet deliteľný šiestimi, dostávame možné riešenie ($m = M : 6$). Keďže všetky čísla musia byť kladné, stačí vyskúšať len niekoľko možností:

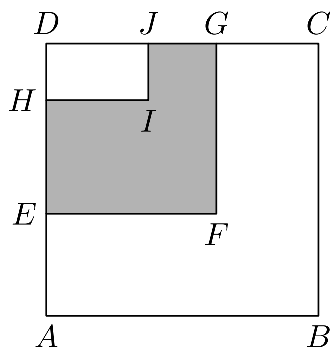
| $p$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 | 80 | 88 | 96 |
| $M$ | 92 | 84 | 76 | 68 | 60 | 52 | 44 | 36 | 28 | 20 | 12 | 4 |
| $m$ | – | 14 | – | – | 10 | – | – | 6 | – | – | 2 | – |

Odtiaľ vidíme štyri možnosti: v prvej pivnici mohlo byť 14 múch a 2 pavúky, alebo 10 múch a 5 pavúkov; v druhej pivnici mohlo byť 8 pavúkov a 6 múch, alebo 11 pavúkov a 2 muchy.

*Poznámka.* Vzhľadom na to, že všetky počty nôh sú párne, je možné si trochu ušetriť počítanie v tabuľke tým, že tieto počty delíme dvoma. To je to isté, akoby sme počítali iba ľavé (alebo iba pravé) nohy jednotlivých tvorov. Inými slovami, namiesto hľadania $p$ a $m$ takých, aby platilo $8p + 6m = 100$, riešime $4p + 3m = 50$.

---

**3.** *Na obrázku je štvorec $ABCD$, štvorec $EFGD$ a obdĺžnik $HIJD$. Body $J$ a $G$ ležia na strane $CD$, pričom platí $|DJ| < |DG|$, a body $H$ a $E$ ležia na strane $DA$, pričom platí $|DH| < |DE|$. Ďalej vieme, že $|DJ| = |GC|$. Šesťuholník $ABCGFE$ má obvod* 96 cm, *šesťuholník $EFGJIH$ má obvod* 60 cm *a obdĺžnik $HIJD$ má obvod* 28 cm. *Určte obsah šesťuholníka $EFGJIH$.* (*Libor Šimůnek*)




**Nápad.** Dokážete určiť dĺžku niektorej úsečky bez toho, aby ste použili viac ako jeden zadaný rozmer?

**Riešenie.** Zistíme rozmery štvorca $EFGD$ a obdĺžnika $HIJD$, aby sme stanovili ich obsahy. Rozdiel týchto obsahov predstavuje želaný obsah šesťuholníka $EFGJIH$.

Zadaný obvod šesťuholníka $EFGJIH$ je rovný obvodu štvorca $EFGD$, pretože $|JI| = |DH|$ a $|HI| = |DJ|$. Strana $GD$ má teda veľkosť $60 : 4 = 15\,(\mathrm{cm})$. Podobne zadaný obvod šesťuholníka $ABCGFE$ je rovný obvodu štvorca $ABCD$, veľkosť strany $CD$ je teda $96 : 4 = 24\,(\mathrm{cm})$. Rozdiel dĺžok strán týchto dvoch štvorcov je rovný dĺžke úsečky $GC$, ktorá je podľa zadania rovná dĺžke úsečky $DJ$:

$$|DJ| = |GC| = 24 - 15 = 9\,(\mathrm{cm}).$$

Pomocou známeho obvodu obdĺžnika $HIJD$ a dĺžky strany $DJ$ stanovíme aj druhý rozmer tohto obdĺžnika:

$$|JI| = (28 - 2 \cdot 9) : 2 = 5\,(\mathrm{cm}).$$

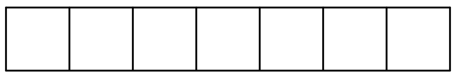
Už máme všetky údaje potrebné na stanovenie obsahov štvorca $EFGD$ a obdĺžnika $HIJD$:

$$S_{EFGD} = 15 \cdot 15 = 225\,(\mathrm{cm}^2), \quad S_{HIJD} = 9 \cdot 5 = 45\,(\mathrm{cm}^2).$$

Hľadaný obsah šesťuholníka teda je

$$S_{EFGJIH} = 225 - 45 = 180\,(\mathrm{cm}^2).$$

**4.** *Na obrázku je obdĺžnik rozdelený na 7 políčok. Na každé políčko sa má napísať práve jedno z čísel 1, 2 a 3. Miro tvrdí, že sa to dá spraviť tak, aby súčet dvoch vedľa seba*



*napísaných čísel bol zakaždým iný. Zuzka naopak tvrdí, že to nie je možné. Rozhodnite, kto z nich má pravdu.* (*Veronika Hucíková*)

**Nápad.** Zistite, ktoré rôzne súčty možno získať.

**Riešenie.** Všetky možné dvojice, ktoré možno z daných čísel zložiť, sú

$$(1,1);\ (1,2),(2,1);\ (1,3),(2,2),(3,1);\ (2,3),(3,2);\ (3,3).$$

Tieto možnosti dávajú 5 rôznych súčtov, a to 2, 3, 4, 5, 6 (dvojice s rôznymi súčtami sú oddelené bodkočiarkami). Na uvedenom obrázku však potrebujeme 6 dvojíc s rôznymi súčtami, pravdu má teda Zuzka.

*Poznámky.* Na určenie možných súčtov nie je nutné vypisovať všetky prípustné dvojice: najmenší súčet je $1 + 1 = 2$, najväčší je $3 + 3 = 6$. Z toho vyplýva, že možných súčtov nie je viac ako 5, čo je menej ako požadovaných 6.

Riešenie úlohy pomocou všetkých možných vyplnení tabuľky a kontrolou takto získaných súčtov je extrémne prácne. Ak však také riešenie je úplné, musí sa považovať za správne.

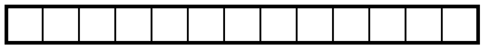
**5.** *Pán Cuketa mal obdĺžnikovú záhradu, ktorej obvod bol 28 metrov. Obsah celej záhrady vyplnili práve štyri štvorcové záhony, ktorých rozmery v metroch boli vyjadrené celými číslami. Určte, aké rozmery mohla mať záhrada. Nájdite všetky možnosti.*

(*Libuše Hozová*)

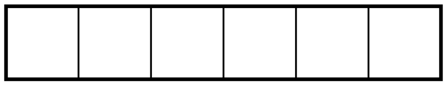
**Nápad.** Uvedomte si, že štvorce nemusia mať rovnaké rozmery.

**Riešenie.** Obvod $28 = 2 \cdot 14$ metrov možno pomocou kladných celých čísel vyjadriť iba niekoľkými spôsobmi. Postupne všetky preberieme a zistíme, či možno zodpovedajúci záhon rozdeliť na štyri štvorce s celočíselnými rozmermi:

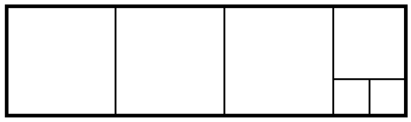
- $28 = 2 \cdot (13 + 1)$, v takom prípade potrebujeme 13 štvorcov:



- $28 = 2 \cdot (12 + 2)$, v takom prípade potrebujeme aspoň 6 štvorcov:

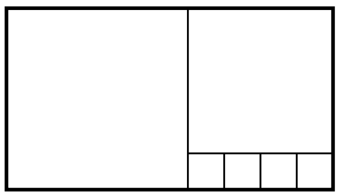


- $28 = 2 \cdot (11 + 3)$, v takom prípade potrebujeme aspoň 6 štvorcov:

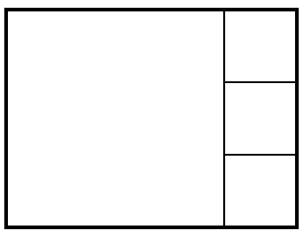


- $28 = 2 \cdot (10 + 4)$, v takom prípade stačia 4 štvorce:

- $28 = 2 \cdot (9 + 5)$, v takom prípade potrebujeme aspoň 6 štvorcov:



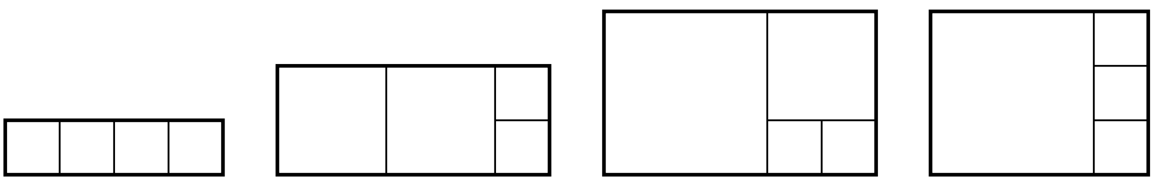
- $28 = 2 \cdot (8 + 6)$, v takom prípade stačia 4 štvorce:



- $28 = 2 \cdot (7 + 7)$, v takom prípade by bol záhon štvorcový a nie obdĺžnikový.

  Záhrada mohla mať rozmery $10 \times 4$ alebo $8 \times 6$ metrov.

**Iné riešenie.** Uvažujme, ako možno zložiť jeden obdĺžnik zo štyroch štvorcov (vo všeobecnosti s rôznymi celočíselnými rozmermi). To možno urobiť len nasledujúcimi spôsobmi:



Ak veľkosť strany najmenšieho štvorca v metroch označíme $a$, tak obvod obdĺžnika v jednotlivých prípadoch je:

- $2 \cdot (4a + a) = 10a$, čo nie je rovné 28 pre žiadne celé $a$.
- $2 \cdot (5a + 2a) = 14a$, čo je rovné 28 práve vtedy, keď $a = 2$; obdĺžnik má v takom prípade rozmery $10 \times 4$ metrov.
- $2 \cdot (5a + 3a) = 16a$, čo nie je rovné 28 pre žiadne celé $a$.
- $2 \cdot (4a + 3a) = 14a$, čo je rovné 28 práve vtedy, keď $a = 2$; obdĺžnik má v takom prípade rozmery $8 \times 6$ metrov.

---

**6.** *V zámockej kuchyni pripravujú rezancovú polievku v hrncoch a kotloch. V pondelok uvarili 25 hrncov a 10 kotlov polievky. V utorok uvarili 15 hrncov a 13 kotlov. V stredu uvarili 20 hrncov a vo štvrtok 30 kotlov. Pritom v pondelok a v utorok uvarili rovnaké množstvo polievky. Koľkokrát viac polievky uvarili vo štvrtok ako v stredu?*

(*Karel Pazourek*)

**Nápad.** Zistite, ako sa líšili počty hrncov, resp. kotlov polievky uvarených v pondelok a utorok.

**Riešenie.** V pondelok uvarili o 10 hrncov polievky viac ako v utorok, zatiaľ čo v utorok uvarili o 3 kotly viac ako v pondelok. Keďže v tieto dni uvarili rovnaké množstvo polievky, má 10 hrncov rovnaký objem ako 3 kotly.

V stredu uvarili $20 = 2 \cdot 10$ hrncov polievky, čo zodpovedá $2 \cdot 3 = 6$ kotlom. Vo štvrtok potom uvarili $30 = 5 \cdot 6$ kotlov polievky, čo je päťkrát viac ako v stredu.

---

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

| | |
|---|---|
| Autori: | Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, E. Patáková, K. Pazourek, M. Petrová, Miroslava Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník |
| Recenzenti: | Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný |
| Redakčná úprava: | Róbert Hajduk, Erika Novotná, Peter Novotný |
| Vydal: | IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015 |