

65. ročník Matematickej olympiády
2015/2016

Riešenia úloh okresného kola kategórie Z6

Informácia pre okresnú komisiu MO:

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideluje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie výsledkových listín okresných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu okresného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: skmo.sk. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu skmo@skmo.sk v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke skmo.sk/dokument.php?id=429 nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X.Y. a práve traja žiaci (vrátane X.Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X.Y., tak žiakovi X.Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skráteno len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov. Inými slovami, napr. nepíšete pri žiakovi, že skončil na 2. mieste, ak pred ním skončili traja žiaci s plným počtom bodov a on má o jeden bod menej – v takom prípade mu patrí 4. miesto.

1. Pani učiteľka napísala na tabuľu dve čísla pod seba a vyvolala Adama, aby ich sčítal. Adam ich správne sčítal a výsledok 39 napísal pod zadané čísla. Pani učiteľka zotrela najvrchnejšie číslo, a tak zvyšné dve čísla vytvorili nový príklad na sčítanie. Tentoraz správny výsledok zapísala pod čísla Barbora. Pani učiteľka opäť zotrela najvrchnejšie číslo, novo vzniknutý príklad na sčítanie správne vypočítal Cyril a vyšlo mu 96. Určte dve čísla, ktoré boli pôvodne napísané na tabuli. (Libor Šimůnek)

Riešenie. Znázorníme všetkých päť čísel v poradí, ako boli písané na tabuľu (hviezdičky označujú zatiaľ neznáme cifry):

$$\begin{array}{r} * * \\ * * \\ 3 9 \\ * * \\ 9 6 \end{array}$$

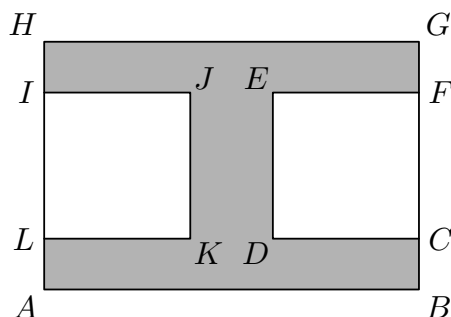
V naposledy riešenom príklade na sčítanie $39 + ** = 96$ chýba iba jeden člen; číslo v 4. riadku je teda $96 - 39 = 57$.

Tým dostávame podobnú situáciu v príklade $** + 39 = 57$; číslo v 2. riadku je teda $57 - 39 = 18$. Podobne doplníme chýbajúci člen prvého príkladu: $39 - 18 = 21$.

Na tabuli boli pôvodne napísané čísla 21 a 18.

Návrh hodnotenia. Po 1 bode za každé neznáme číslo; 2 body podľa kvality vysvetlenia; 1 bod za správne formulovaný záver.

2. Vnútri obdĺžnika $ABGH$ sú dva zhodné štvorce $CDEF$ a $IJKL$. Strana CF prvého štvorca leží na strane BG obdĺžnika a strana IL druhého z nich leží na strane HA obdĺžnika. Obvod osemuholníka $ABCDEFGH$ je 48 cm, obvod dvanásťuholníka $ABCDEFGHIJKL$ je 58 cm. Tento dvanásťuholník je súmerný podľa vodorovnej osi a dĺžky všetkých jeho strán sú v centimetroch vyjadrené celými číslami. Určte dĺžky strán obdĺžnika $ABGH$. (Libor Šimůnek)



Riešenie. Značné časti obvodov osemuholníka $ABCDEFGH$ a dvanásťuholníka $ABCDEFGHIJKL$ sú obom útvarom spoločné. Zato úsečky IJ , JK a KL sú súčasťou iba obvodu dvanásťuholníka a úsečka IL je súčasťou iba obvodu osemuholníka. Tieto štyri úsečky sú navzájom zhodné, ich dĺžku označíme a . Rozdiel obvodov útvarov $58 - 48 = 10$ (cm) teda zodpovedá dvom a ; tzn. $a = 5$ cm.

Podobne rozdiel medzi obvodom osemuholníka $ABCDEFGH$ a obvodom obdĺžnika $ABGH$ je rovný dvom a , čiže 10 cm. Preto je obvod obdĺžnika rovný $48 - 10 = 38$ (cm) a súčet dĺžok jeho strán je $38 : 2 = 19$ (cm).

Vzhľadom na to, že útvar je súmerný podľa vodorovnej osi, musia byť úsečky AL , BC , FG a IH zhodné. Vzhľadom na to, že dĺžky všetkých strán dvanásťuholníka sú v centimetroch vyjadrené celými číslami, môžu dĺžky strán obdĺžnika $ABGH$ nadobúdať iba nasledujúce hodnoty (v cm):

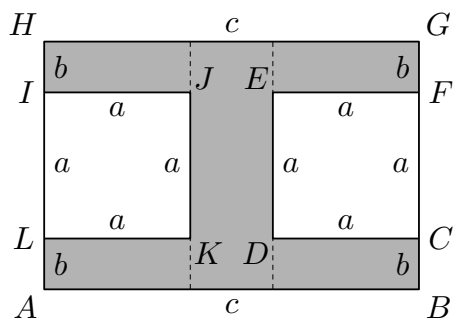
$$\begin{aligned} |AB| &= 11, 12, 13, \dots, \\ |BG| &= 7, 9, 11, \dots \end{aligned}$$

Aby bol súčet týchto dĺžok rovný 19, musia byť dĺžky strán obdĺžnika $ABGH$ 12 cm a 7 cm.

Poznámka. Ak dĺžku zhodných úsečiek AL , BC , FG a IH označíme b a dĺžku zhodných úsečiek KD a EJ označíme c , tak možno obvod dvanásťuholníka vyjadriť takto:

$$\begin{aligned} 10a + 4b + 2c &= 58, \\ 4b + 2c &= 8. \end{aligned}$$

Dĺžky všetkých strán dvanásťuholníka (v cm) sú celočíselné, preto sú b a c celočíselné a zrejme aj kladné. Úloha má teda jediné riešenie: $b = 1$ a $c = 2$. Dĺžky strán obdĺžnika $ABGH$ sú $2a + c = 12$ (cm) a $2b + a = 7$ (cm).



Návrh hodnotenia. 3 body za dĺžku strany štvorca a (z toho 1 bod za zdôvodnenie); 2 body za vzťah $|AB| + |BG| = 19$ cm alebo jeho obdobu (napr. $4b + 2c = 8$); 1 bod za vyčíslenie a správny záver.

3. Na Černíčkovom statku mali tri sliepky. Prvá znášala každý deň jedno vajce, druhá znášala každý druhý deň jedno vajce a tretia každý tretí deň jedno vajce. Pán Černíček prikúpil na trhu dve nové sliepky, ktoré tiež znášali vajčička úplne pravidelne – vždy jedno po niekoľkých dňoch, pričom jedna z nich znášala dvakrát viac ako druhá. Pani Černíčková spočítala, že všetkých päť sliepok znieslo za 60 dní spolu 155 vajec. Ako často znášali nové sliepky? (Libuše Hozová)

Riešenie. Prvá stará sliepka znášala každý deň jedno vajce, t. j. za 60 dní 60 vajec. Druhá stará sliepka znášala každý druhý deň jedno vajce, t. j. za 60 dní 30 vajec. Tretia stará sliepka znášala každý tretí deň jedno vajce, t. j. za 60 dní 20 vajec. Staré sliepky zniesli za 60 dní spolu $60 + 30 + 20 = 110$ vajec.

Staré aj nové sliepky zniesli za 60 dní spolu 155 vajec, takže iba nové sliepky zniesli za 60 dní spolu $155 - 110 = 45$ vajec. Pritom jedna z nových sliepok znášala dvakrát viac ako tá druhá. Rozdelením 45 na tri rovnaké diely zistujeme, že jedna nová sliepka zniesla za 60 dní 15 vajec, tzn. jedno vajce každý štvrtý deň ($60 : 15 = 4$). Druhá nová sliepka tak zniesla za 60 dní 30 vajec, tzn. jedno vajce každý druhý deň.

Návrh hodnotenia. 2 body za celkový počet vajec, ktoré zniesli tri staré sliepky za 60 dní; 1 bod za celkový počet vajec, ktoré zniesli dve nové sliepky za 60 dní; 1 bod za rozdelenie vajec od nových sliepok na tri rovnaké diely; 2 body za určenie znášky nových sliepok.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, Filip Hanzely, L. Hozová, Veronika Huciková, Katarína Jasenčáková, Martin Kollár, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, E. Semerádová, Miroslava Smitková, L. Šimůnek, Renáta Tóthová, M. Volfová, V. Žádník

Recenzenti: Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Huciková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný, Ludmila Šimková

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2016