

65. ročník Matematickej olympiády 2015/2016

Riešenia úloh okresného kola kategórie Z7

Informácia pre okresnú komisiu MO:

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideluje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie výsledkových listín okresných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.

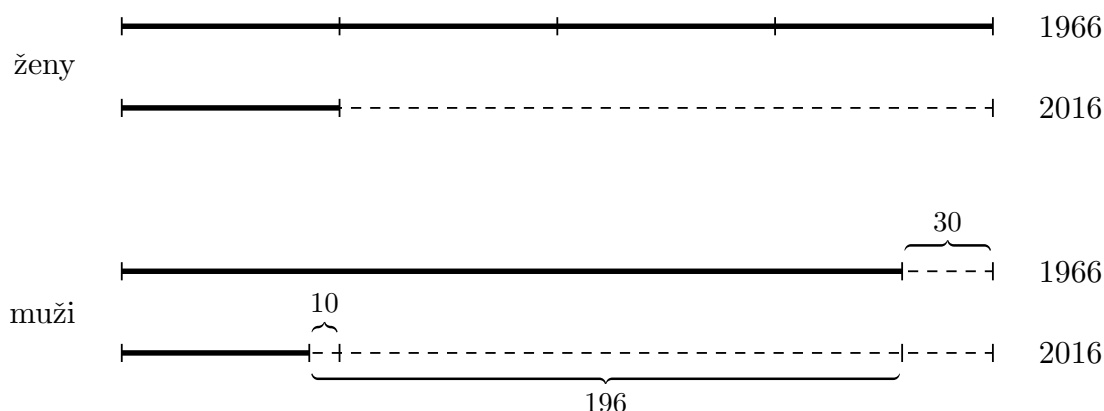
Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu okresného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: skmo.sk. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu skmo@skmo.sk v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke skmo.sk/dokument.php?id=429 nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X.Y. a práve traja žiaci (vrátane X.Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X.Y., tak žiakovi X.Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skráteno len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov. Inými slovami, napr. nepíšete pri žiakovi, že skončil na 2. mieste, ak pred ním skončili traja žiaci s plným počtom bodov a on má o jeden bod menej – v takom prípade mu patrí 4. miesto.

1. V roku 1966 žilo v obci Bezdíkov o 30 žien viac ako mužov. Do súčasnosti sa počet žien žijúcich v obci zmenšil štyrikrát a počet mužov žijúcich v obci klesol o 196. Teraz je v Bezdíkovke o 10 žien viac ako mužov. Koľko žien a mužov dokopy žije v súčasnosti v Bezdíkovke? (Libor Šimůnek)

Riešenie. Rozdiel pôvodného počtu žien a súčasného počtu mužov je $30 + 196 = 226$, čo je o 10 viac ako rozdiel pôvodného a súčasného počtu žien. To znamená, že tri štvrtiny pôvodného počtu žien sú rovné $226 - 10 = 216$. Zvyšná jedna štvrtina zodpovedajúca aktuálnemu počtu žien je teda $216 : 3 = 72$. Mužov je teraz $72 - 10 = 62$.

V obci teraz žije spolu $62 + 72 = 134$ mužov a žien.

Predchádzajúce úvahy môžeme graficky znázorniť takto:



Poznámka. Aktuálny počet žien možno určiť algebraicky riešením rovnice. Ak tento počet označíme z , tak pôvodný počet žien bol $4z$, aktuálny počet mužov je $z - 10$

a pôvodný počet mužov bol $4z - 30$. Rozdiel pôvodného a súčasného počtu mužov je 196, teda:

$$\begin{aligned}(4z - 30) - (z - 10) &= 196, \\ 3z - 20 &= 196, \\ z &= 72.\end{aligned}$$

Návrh hodnotenia. 2 body za aktuálny počet žien; 1 bod za správny záver; 3 body podľa kvality vysvetlenia.

2. Pani učiteľka napísala na tabuľu dve čísla pod seba a vyvolala Kláru, aby ich sčítala. Klára správny výsledok zapísala pod zadané čísla. Pani učiteľka zotrela najvrchnejšie číslo, a tak zvyšné dve čísla vytvorili nový príklad na sčítanie. Tentoraz správny výsledok zapísal pod čísla Lukáš. Pani učiteľka opäť zotrela najvrchnejšie číslo, novo vzniknutý príklad na sčítanie správne vypočítala Magda a vyšlo jej 94. Jedno z dvoch čísel, ktoré pani učiteľka pôvodne napísala na tabuľu, bolo 14, ale neprezradíme, ktoré. Aké mohlo byť druhé z pôvodne napísaných čísel? Určte všetky možnosti. (Libor Šimůnek)

Riešenie. Prvé číslo napísané na tabuli označíme x , druhé y . Klára napísala súčet

$$x + y,$$

Lukáš doplnil

$$y + (x + y) = x + 2y$$

a nakoniec Magda pridala

$$(x + y) + (x + 2y) = 2x + 3y.$$

Hodnota naposledy uvedeného súčtu je 94. Zadanie nestanovuje, ktorá z neznámych x a y je 14, rozoberieme obe možnosti:

a) Ak $x = 14$, tak

$$\begin{aligned}2 \cdot 14 + 3y &= 94, \\ 3y &= 66, \\ y &= 22.\end{aligned}$$

b) Ak $y = 14$, tak

$$\begin{aligned}2x + 3 \cdot 14 &= 94, \\ 2x &= 52, \\ x &= 26.\end{aligned}$$

Na začiatku mohlo byť na tabuli okrem čísla 14 napísané číslo 22 alebo 26.

Poznámka. Predchádzajúce dve možnosti môžeme uvažovať od samého začiatku. Potom súčty, ktoré boli postupne písané na tabuľu, sú vyjadrené takto:

a) $14 + y$, $14 + 2y$ a $28 + 3y$, čo vedie na rovnicu $28 + 3y = 94$, ktorej riešením je $y = 22$.

b) $x + 14$, $x + 28$ a $2x + 42$, čo vedie na rovnicu $2x + 42 = 94$, ktorej riešením je $x = 26$.

Návrh hodnotenia. Po 1 bode za každé riešenie; 3 body podľa kvality a úplnosti vysvetlenia; 1 bod za správne formulovaný záver.

3. V obdĺžniku $ABCD$ so stranou AD majúcou dĺžku 5 cm leží bod P tak, že trojuholník APD je rovnostranný. Polpriamka AP pretína stranu CD v bode E , úsečka CE meria 5 cm. Aká dlhá je úsečka AE a aká je veľkosť uhla AEB ? (Libuše Hozová)

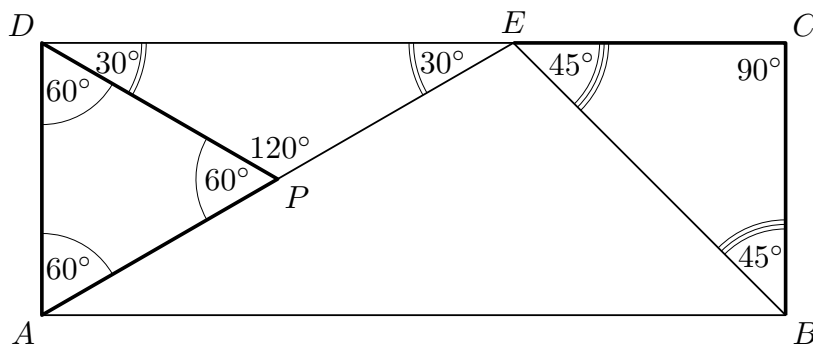
Riešenie. Trojuholník APD je rovnostranný, teda dĺžky všetkých jeho strán sú 5 cm a veľkosti všetkých vnútorných uhlov sú 60° .

Vnútorné uhly obdĺžnika $ABCD$ sú pravé, takže veľkosti uhlov PDE a PAB sú 30° . Uhol PED je tretím uhlom trojuholníka AED (alebo tiež striedavým uhlom k uhlu EAB), preto je jeho veľkosť 30° . Uhly PDE a PED sú zhodné, teda trojuholník DEP je rovnoramenný a $|PD| = |PE| = 5$ cm. Úsečka AE je dlhá

$$|AE| = |AP| + |PE| = 5 + 5 = 10 \text{ (cm)}.$$

Úsečka CE je zhodná s úsečkou CB , takže trojuholník EBC je rovnoramenný s pravým uhlom pri vrchole C . Zvyšné dva vnútorné uhly sú preto zhodné s veľkosťou 45° . Veľkosť uhla AEB je rovná

$$|\angle AEB| = 180^\circ - |\angle AED| - |\angle BEC| = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ.$$



Návrh hodnotenia. Po 1 bode za poznatky o rovnoramennosti trojuholníkov DPE a EBC ; po 1 bode za vyčíslenie veľkosti úsečky AE a uhla AEB ; 2 body podľa kvality komentára.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, Filip Hanzely, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Martin Kollár, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, E. Semerádová, Miroslava Smitková, L. Šimůnek, Renáta Tóthová, M. Volfová, V. Žádník

Recenzenti: Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný, Ludmila Šimková

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2016