65. ročník Matematickej olympiády
2015/2016 *Riešenia úloh okresného kola kategórie Z8*

Informácia pre okresnú komisiu MO:

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie výsledkových listín okresných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu okresného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: skmo.sk. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu skmo@skmo.sk v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke skmo.sk/dokument.php?id=429 nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X. Y. a práve traja žiaci (vrátane X. Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X. Y., tak žiakovi X. Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov. Inými slovami, napr. nepíšte pri žiakovi, že skončil na 2. mieste, ak pred ním skončili traja žiaci s plným počtom bodov a on má o jeden bod menej – v takom prípade mu patrí 4. miesto.

---

1. *Janko má v komore na chalupe krabicu s pastelkami, v ktorej je 5 modrých, 9 červených, 6 zelených a 4 žlté pastelky. Je tma, svetlo v komore nesvieti a Janko pri sebe nemá žiadny zdroj osvetlenia. Farbu pasteliek teda nedokáže rozlíšiť.*

a) *Koľko najmenej pasteliek musí vziať, aby mal istotu, že prinesie aspoň jednu pastelku z každej farby?*
b) *Koľko najviac pasteliek môže vziať, aby mal istotu, že v krabici zostane z každej farby aspoň jedna pastelka?*
c) *Koľko najviac pasteliek môže vziať, aby mal istotu, že v krabici zostane aspoň päť červených pasteliek?*

(*Marta Volfová*)

Riešenie. Uvažujme vždy tú najmenej vhodnú situáciu:

a) Keby Janko vzal všetky pastelky zo všetkých farieb okrem jednej, táto farba by mu stále chýbala. Najnepriaznivejšia situácia nastáva, keď mu chýba žltá, pretože týchto pasteliek je najmenej. Počet všetkých modrých, červených a zelených pasteliek je $9 + 6 + 5 = 20$, Janko preto musí vziať aspoň 21 pasteliek.
b) Keby Janko vzal všetky pastelky jednej farby, táto farba by potom v krabici chýbala. Najnepriaznivejšia situácia nastáva, keď vyberá samé žlté, pretože tých je najmenej. Žlté pastelky sú 4, Janko preto môže vziať najviac 3 pastelky.
c) Najnepriaznivejšia situácia nastáva, keď Janko berie len červené pastelky. Tých je spolu 9, môže teda vziať najviac 4 pastelky.

Návrh hodnotenia. Po 1 bode za každú správnu odpoveď; 3 body podľa kvality vysvetlenia.

2. *Dedo chová husi, prasatá, kozy a sliepky – celkom 40 kusov. Na každú kozu pripadajú 3 husi. Keby bolo sliepok o 8 menej, bolo by ich rovnako ako husí a prasiat dokopy. Keby dedo vymenil štvrtinu husí za sliepky v pomere 3 sliepky za 1 hus, mal by celkom 46 kusov zvierat. Koľko ktorých zvierat dedo chová?* (Marta Volfová)

Riešenie. Počty jednotlivých druhov zvierat označíme ich počiatočnými písmenami. Informácie zo zadania môžeme postupne zapísať takto:

$$\begin{aligned} h+p+k+s&=40,\\ h&=3k,\\ s-8&=h+p,\\ 40-\frac{1}{4}h+\frac{3}{4}h&=46. \end{aligned}$$

Z poslednej rovnice vyplýva $\frac{1}{2}h=6$, teda $h=12$. Z druhej rovnice zisťujeme, že $k=4$. Dosadením týchto hodnôt do zvyšných dvoch rovníc dostávame

$$\begin{aligned} 12+p+4+s&=40, \quad \text{teda} \quad p+s=24,\\ s-8&=12+p, \quad \text{teda} \quad s=p+20. \end{aligned}$$

Z toho ďalej vyplýva

$$\begin{aligned} p+(p+20)&=24,\\ 2p&=4,\\ p&=2, \quad \text{a teda} \quad s=22. \end{aligned}$$

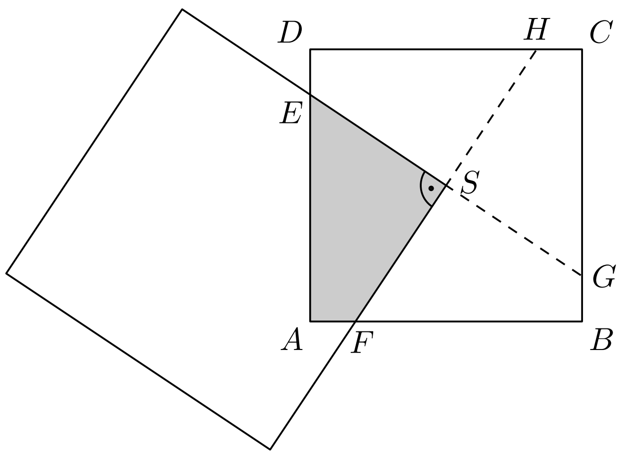
Dedo chová 12 husí, 2 prasatá, 4 kozy a 22 sliepok.

Návrh hodnotenia. 2 body za určenie počtu husí; 1 bod za určenie počtu kôz; 3 body za určenie počtu prasiat a sliepok.

3. *Dobrákovci pestovali tulipány na štvorcovom záhone so stranou 6 metrov. Neskôr pristavali k svojmu domu štvorcovú terasu so stranou 7 metrov. Jeden vrchol terasy ležal presne uprostred tulipánového záhona a jedna strana terasy delila stranu tulipánového záhona v pomere* $1:5$. *V akom pomere delila druhá strana terasy druhú stranu záhona? O koľko metrov štvorcových sa stavbou terasy zmenšil záhon tulipánov?*

(Libuše Hozová)

Riešenie. Vrcholy štvorca tulipánového záhona označíme A, B, C, D, stred tohto štvorca S a priesečníky strán štvorca so stranami terasy E, F, pozri obrázok.

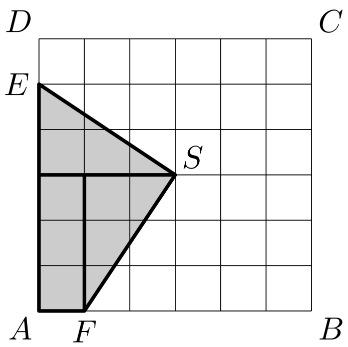


Pri otáčaní okolo stredu S o celočíselné násobky uhla $90°$ sa štvorec $ABCD$ zobrazuje sám na seba. Uvažujme napr. otočenie, pri ktorom sa vrchol A zobrazuje na vrchol B, a teda strana DA na stranu AB. Body E a F ležia práve na týchto stranách, uhol ESF je podľa zadania pravý, a preto sa bod E zobrazuje na bod F. Obe strany záhona sú teda stranami terasy rozdelené v rovnakom pomere, t. j.

$$|DE| : |EA| = |AF| : |FB| = 1 : 5.$$

Ešte označme G a H priesečníky priamok SE a SF so zvyšnými stranami štvorca $ABCD$. Pri uvažovanom otočení sa bod B zobrazuje na bod C, bod F sa zobrazuje na bod G atď. Preto všetky štvoruholníky $SEAF$, $SFBG$, $SGCH$ a $SHDE$ sú navzájom zhodné. Tieto štyri štvoruholníky tvoria celý štvorec $ABCD$, ktorého obsah je $6 \cdot 6 = 36\,(\mathrm{m}^2)$. Obsah každého z nich je tak rovný $36 : 4 = 9\,(\mathrm{m}^2)$. Stavbou terasy sa záhon tulipánov zmenšil o $9\,\mathrm{m}^2$.

Iné riešenie. Pri rovnakom označení ako vyššie rozdeľme štvorec $ABCD$ pomocnou štvorčekovou sieťou na štvorčeky so stranami $1\,\mathrm{m}$ a predpokladajme, že bod E delí stranu DA v pomere $1 : 5$. Body E a S sú mrežovými bodmi štvorčekovej siete, pozri obrázok.



Uhol ESF je pravý práve vtedy, keď vyznačené pravouhlé trojuholníky sú zhodné, čo nastáva práve vtedy, keď F je mrežovým bodom deliacim stranu AB v pomere $1 : 5$. Obe strany záhona sú teda stranami terasy rozdelené v rovnakom pomere.

Obsah štvoruholníka $SEAF$ je rovný súčtu obsahov troch vyznačených častí, z ktorých každá má obsah $3\,\mathrm{m}^2$. Stavbou terasy sa záhon tulipánov zmenšil o $9\,\mathrm{m}^2$.

Návrh hodnotenia. 1 bod za určenie pomeru, v akom druhá strana terasy delila druhú stranu záhona; 2 body za obsah časti záhona obsadeného stavbou terasy; 3 body podľa kvality komentára.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, Filip Hanzely, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Martin Kollár, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, E. Semerádová, Miroslava Smitková, L. Šimůnek, Renáta Tóthová, M. Volfová, V. Žádník
Recenzenti:	Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný, Ľudmila Šimková
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2016