2015/2016
65. ročník MO *Zadania úloh celoštátneho kola kategórie A*

(*Súťaž sa konala 3. – 6. 4. 2016.*)

1. Nech $p > 3$ je dané prvočíslo. Určte počet všetkých usporiadaných šestíc (a, b, c, d, e, f) kladných celých čísel, ktorých súčet je rovný $3p$, a pritom všetky zlomky

$$\frac{a+b}{c+d}, \quad \frac{b+c}{d+e}, \quad \frac{c+d}{e+f}, \quad \frac{d+e}{f+a}, \quad \frac{e+f}{a+b}$$

majú celočíselné hodnoty. (*Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček*)

2. Označme postupne r a r_a polomery kružnice vpísanej a kružnice pripísanej k strane BC trojuholníka ABC. Dokážte, že ak platí

$$r + r_a = |BC|,$$

tak trojuholník ABC je pravouhlý. (*Michal Rolínek*)

3. Medzi obyvateľmi istého mesta sú populárne matematické kluby. Každé dva z nich majú aspoň jedného spoločného člena. Dokážte, že môžeme obyvateľom mesta rozdať kružidlá a pravítka tak, že iba jeden obyvateľ dostane oboje, a pritom každý klub bude mať pri plnej účasti svojich členov k dispozícii ako pravítko, tak kružidlo.
(*Josef Tkadlec*)

4. Pre kladné čísla a, b, c platí

$$(a + c)(b^2 + ac) = 4a.$$

Určte maximálnu hodnotu výrazu $b + c$ a nájdite všetky trojice čísel (a, b, c), pre ktoré výraz túto hodnotu nadobúda. (*Michal Rolínek*)

5. V trojuholníku ABC platí $|BC| = 1$ a zároveň na strane BC existuje práve jeden bod D taký, že $|DA|^2 = |DB| \cdot |DC|$. Určte všetky možné hodnoty obvodu trojuholníka ABC. (*Patrik Bak*)

6. Na niektoré políčko šachovnice 6×6 postavíme figúrku kráľoviča. Tá môže v jednom ťahu poskočiť buď v zvislom, alebo vo vodorovnom smere. Dĺžka tohto skoku je striedavo jedno a dve políčka, pričom skokom dĺžky jedna (t. j. na susedné políčko) figúrka začína. Rozhodnite, či sa dá zvoliť východisková pozícia figúrky tak, aby po vhodnej postupnosti 35 skokov navštívila každé políčko šachovnice práve raz. (*Peter Novotný*)