65. ročník Matematickej olympiády
2015/2016 *Riešenia úloh celoštátneho kola kategórie A*

---

1. *Nech $p > 3$ je dané prvočíslo. Určte počet všetkých usporiadaných šestíc (a, b, c, d, e, f) kladných celých čísel, ktorých súčet je rovný $3p$, a pritom všetky zlomky*

$$\frac{a+b}{c+d}, \quad \frac{b+c}{d+e}, \quad \frac{c+d}{e+f}, \quad \frac{d+e}{f+a}, \quad \frac{e+f}{a+b}$$

majú celočíselné hodnoty. (Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček)

Riešenie. Zo súčinu 1., 3. a 5. zlomku vidíme, že ich hodnoty sa rovnajú 1, takže platí

$$a + b = c + d = e + f = p. \tag{1}$$

Z tvaru 2. a 4. zlomku potom vyplýva

$$f + a \mid d + e \qquad \text{a} \qquad d + e \mid b + c. \tag{2}$$

Z toho jednak vyplýva, že číslo $f + a$ nie je väčšie ako aritmetický priemer svojich násobkov,

$$f + a \leqq \tfrac{1}{3}\big((f + a) + (d + e) + (b + c)\big) = p, \tag{3}$$

a zároveň

$$f + a \mid (f + a) + (d + e) + (b + c) = 3p.$$

Číslo $f + a$ je teda deliteľom čísla $3p$ a navyše leží v intervale $\langle 2, p\rangle$. Preto $f + a = p$ alebo $f + a = 3$. Oba prípady preskúmame osobitne.

(i) Nech $f + a = p$. Vzhľadom na (3) potom platí $f + a = d + e = b + c = p$, čo spolu s (1) dáva $p - 1$ riešení v tvare

$$(a, b, c, d, e, f) = (a, p - a, a, p - a, a, p - a), \quad \text{pričom } a \in \{1, 2, \ldots, p - 1\}.$$

(ii) Nech $f + a = 3$. V tomto prípade je $\{a, f\} = \{1, 2\}$.

Nech najskôr $a = 1$ a $f = 2$. Podľa (1) potom $b = p - 1$ a $e = p - 2$ a relácie (2) majú tvar

$$3 \mid d + (p - 2) \qquad \text{a} \qquad d + (p - 2) \mid (p - 1) + c. \tag{4}$$

Pri rozbore (4) rozlíšime, či $d = 1$, alebo $d \geqq 2$.

Pre $d = 1$ je $c = p - 1$ a vzťahy (4) majú v takom prípade tvar

$$3 \mid p - 1 \qquad \text{a} \qquad p - 1 \mid 2(p - 1).$$

Zatiaľ čo pravá relácia platí vždy, ľavej relácii vyhovujú jedine prvočísla p tvaru $p = 3q + 1$ (q je vhodné prirodzené číslo). Pre také prvočísla dostávame s využitím (1) riešenie

$$(a, b, c, d, e, f) = (1, p - 1, p - 1, 1, p - 2, 2).$$

Pre $d \geqq 2$ najskôr ukážeme, že pravá relácia v (4) je splnená práve vtedy, keď platí $d+(p-2) = (p-1)+c$, čiže $d = c+1$. Zo vzťahu $d \geqq 2$ totiž vyplýva $c = p-d \leqq p-2$, a tak číslo $(p-1)+c$ nemôže byť netriviálnym násobkom čísla $d+(p-2)$, lebo

$$d + (p-2) \geqq p \qquad \text{a} \qquad (p-1) + c \leqq 2p - 3 < 2p.$$

Preto sa obe čísla rovnajú. Z rovností $c+d = p$ a $d = c+1$ potom máme $c = \frac{1}{2}(p-1)$ a $d = \frac{1}{2}(p+1)$. Keďže $d+(p-2) = \frac{3}{2}(p-1)$, je splnená aj ľavá relácia v (4), a dostávame tak ďalšiu vyhovujúcu šesticu prirodzených čísel

$$(a, b, c, d, e, f) = (1, p-1, \tfrac{1}{2}(p-1), \tfrac{1}{2}(p+1), p-2, 2).$$

Ostáva posúdiť prípad $a = 2$ a $f = 1$. V tomto prípade potom platí $b = p-2$ a $e = p-1$, takže relácie (2) majú tvar

$$3 \mid d + (p-1) \qquad \text{a} \qquad d + (p-1) \mid (p-2) + c. \tag{5}$$

Keďže

$$d + (p-1) \geqq p \qquad \text{a} \qquad (p-2) + c < 2p,$$

je pravá relácia v (5) splnená práve vtedy, keď $d+(p-1) = (p-2)+c$, t. j. práve vtedy, keď $c = d+1$. To spolu s rovnosťou $c+d = p$ vedie na $c = \frac{1}{2}(p+1)$ a $d = \frac{1}{2}(p-1)$, takže aj ľavá relácia v (5) platí, a dostávame tak poslednú vyhovujúcu šesticu prirodzených čísel

$$(a, b, c, d, e, f) = (2, p-2, \tfrac{1}{2}(p+1), \tfrac{1}{2}(p-1), p-1, 1).$$

Záver. Všetky nájdené riešenia sú zrejme rôzne a ich počet závisí od toho, aký zvyšok po delení tromi dáva dané prvočíslo $p > 3$: Pre prvočísla p tvaru $p = 3q+1$ existuje $p+2$ šestíc a pre prvočísla p tvaru $p = 3q+2$ existuje $p+1$ šestíc.

---

2. *Označme postupne r a r_a polomery kružnice vpísanej a kružnice pripísanej k strane BC trojuholníka ABC. Dokážte, že ak platí*

$$r + r_a = |BC|,$$

tak trojuholník ABC je pravouhlý. (*Michal Rolínek*)

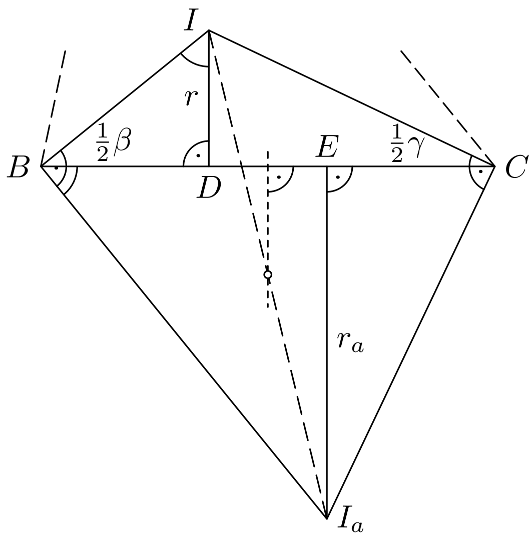
Riešenie. Pri zvyčajnom označení strán a vnútorných uhlov trojuholníka ABC označme v nasledujúcom texte ešte I stred kružnice vpísanej, I_a stred kružnice pripísanej k strane BC a body dotyku spomenutých kružníc so stranou BC označme postupne D a E. Keďže osi BI a BI_a oboch susedných uhlov pri vrchole B sú navzájom kolmé, čo samozrejme platí aj pre osi CI a CI_a, ležia body B, C, I a I_a na kružnici s priemerom II_a. Z toho zrejme vyplýva, že body D a E ako kolmé priemety oboch krajných bodov priemeru II_a na tetivu BC sú súmerne združené podľa stredu strany BC.

1. postup. Pravouhlé trojuholníky BID a I_aBE sú podobné, lebo oba uhly BID a I_aBE dopĺňajú uhol CBI do $90°$ (obr. 1). Platí teda

$$|BD| : |ID| = |I_aE| : |BE|, \quad \text{čiže} \quad |BD| \cdot |BE| = |ID| \cdot |I_aE|$$

a vzhľadom na uvedenú symetriu aj

$$|BD| + |BE| = |BD| + |CD| = |BC| = r + r_a = |ID| + |I_aE|.$$



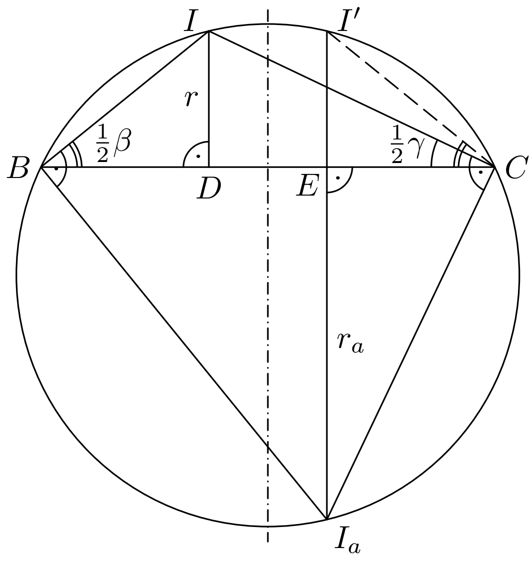
Obr. 1

Z oboch rovností tak vyplýva, že dvojice čísel $(|ID|, |EI_a|)$ a $(|BD|, |BE|)$ sú korene tej istej kvadratickej rovnice, a tak je $|ID| = |BD|$ alebo $|ID| = |BE|$.

Zrejme $|ID| = |BD|$ práve vtedy, keď je trojuholník BID pravouhlý rovnoramenný, čiže $\beta = 90°$. A podobne $|ID| = |BE|$, čiže $|ID| = |CD|$ (opäť vďaka uvedenej symetrickej polohe bodov D a E) práve vtedy, keď je pravouhlý rovnoramenný trojuholník CID. V tom prípade je $\gamma = 90°$.

Tak či tak je trojuholník ABC pravouhlý.

2. postup. Os tetivy BC kružnice k nad priemerom II_a je osou pásu medzi rovnobežkami ID a I_aE (opäť vďaka symetrickej polohe bodov D a E na BC). Ak označíme I' obraz bodu I v tejto súmernosti (obr. 2), je zrejme $|I'I_a| = |I'E| + |EI_a| = |ID| + |EI_a| = r + r_a$, takže podľa predpokladu $|BC| = r + r_a = |I_aI'|$. Zhodným tetivám BC a $I'I_a$ jednej kružnice prislúchajú zhodné obvodové uhly.



Obr. 2

Ako ľahko spočítame (pozri napr. obr. 1), je $|\measuredangle BIC| = 90° - \frac{1}{2}\beta + 90° - \frac{1}{2}\gamma = 90° + \frac{1}{2}\alpha$ a $|\measuredangle I'CI_a| = |\measuredangle I'CB| + |\measuredangle BCI_a| = \frac{1}{2}\beta + (90° - \frac{1}{2}\gamma) = \beta + \frac{1}{2}\alpha$. Preto buď $90° + \frac{1}{2}\alpha = \beta + \frac{1}{2}\alpha$, čiže $\beta = 90°$, alebo $(90° + \frac{1}{2}\alpha) + (\beta + \frac{1}{2}\alpha) = 180°$, čiže $\gamma = 90°$. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

3. postup. Ak označíme P obsah trojuholníka ABC, s polovicu jeho obvodu a ak položíme $x = s - a$, $y = s - b$, $z = s - c$, dajú sa známe vzorce pre obsah P zapísať zjednodušene takto:

$$P^2 = xyzs, \quad P = rs, \quad P = r_a x.$$

Z toho vypočítame

$$r^2 = \frac{xyz}{s} \qquad \text{a} \qquad r_a^2 = \frac{yzs}{x}.$$

Zadanú podmienku $r + r_a = y + z$ umocníme a pomocou predchádzajúceho prepíšeme ako

$$x^2yz + yzs^2 = y^2xs + z^2xs,$$

čiže

$$(zs - xy)(ys - xz) = 0.$$

Po spätnej substitúcii na a, b, c získame po chvíli ekvivalentných úprav očakávané

$$(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2) = 0,$$

a tvrdenie úlohy tak vyplýva z Pytagorovej vety.

---

3. *Medzi obyvateľmi istého mesta sú populárne matematické kluby. Každé dva z nich majú aspoň jedného spoločného člena. Dokážte, že môžeme obyvateľom mesta rozdať kružidlá a pravítka tak, že iba jeden obyvateľ dostane oboje, a pritom každý klub bude mať pri plnej účasti svojich členov k dispozícii ako pravítko, tak kružidlo.*

(*Josef Tkadlec*)

Riešenie. Uvažujme klub K s najmenším počtom členov (ak je takých klubov viac, vyberme ktorýkoľvek). Jednému jeho členovi (nazývajme ho Jakub) dáme oba nástroje a ostatným členom kružidlo. Všetci zvyšní obyvatelia dostanú pravítko. Tvrdíme, že také rozdelenie rysovacích potrieb vyhovuje podmienkam úlohy.

Každý klub, ktorého je Jakub členom, je určite vybavený. Aj keď do nejakého klubu Jakub nepatrí, tak má tento klub s K nejakého spoločného člena, a teda je vybavený aspoň kružidlom. Ak by v tomto klube nebolo žiadne pravítko, znamenalo by to, že je celý obsiahnutý v K a má pritom aspoň o jedného člena menej (neobsahuje Jakuba). To je spor s voľbou K, a vidíme tak, že je skutočne každý klub riadne vybavený.

Poznámka. Nie je ťažké si uvedomiť, že bez možnosti dať jednému obyvateľovi oboje by záver úlohy neplatil. Uveďme tu pre zaujímavosť dva také (a pritom veľmi odlišné) prípady.

Jeden obyvateľ je členom všetkých klubov a zároveň má aj svoj jednočlenný klub. Tento klub potom samozrejme nebude oboma nástrojmi vybavený.

Pre $2n+1$ obyvateľov povedzme, že každých $n+1$ z nich tvorí klub. Potom naozaj nie sú žiadne dva kluby disjunktné, a pritom akokoľvek rozdáme pravítka a kružidlá, tak keďže od jedného nástroja sme rozdali aspoň $n+1$ kusov, nájdeme klub vlastniaci iba tento nástroj.

---

4. *Pre kladné čísla a, b, c platí*

$$(a+c)(b^2+ac) = 4a.$$

Určte maximálnu hodnotu výrazu $b+c$ *a nájdite všetky trojice čísel* (a, b, c), *pre ktoré výraz túto hodnotu nadobúda.* (*Michal Rolínek*)

Riešenie. Zadanú rovnosť šikovne upravíme a odhadneme pomocou známej nerovnosti $a^2 + b^2 \geqq 2ab$ takto:

$$4a = (a+c)(b^2+ac) = a(b^2+c^2) + c(a^2+b^2) \geqq a(b^2+c^2) + 2abc = a(b+c)^2.$$

Z toho jednak vidíme, že $b + c \leqq 2$, a tiež, že rovnosť nastane práve vtedy, keď $0 < a = b < 2$ a $c = 2 - b > 0$. To je všetko.

Iné riešenie. Uvažujme kvadratickú rovnicu

$$4t = (t+c)(b^2+tc)$$

s neznámou t. Vďaka vzťahu zo zadania vieme, že táto rovnica má koreň $t = a$. Rovnicu upravíme na tvar

$$ct^2 + (b^2+c^2-4)t + cb^2 = 0$$

a všimneme si, že musí platiť $b^2+c^2-4 < 0$. Inak by totiž ľavá strana bola pre ľubovoľné kladné t kladná, čo je v spore s faktom, že rovnica má kladný koreň.

Skutočnosť, že uvedená rovnica má nezáporný diskriminant, zapíšeme takto:

$$(2bc)^2 \leqq (4-b^2-c^2)^2.$$

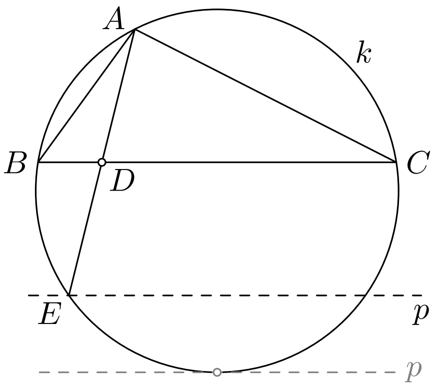
Keďže sú oba základy mocnín kladné, môžeme nerovnosť odmocniť a následne upraviť na tvar $(b+c)^2 \leqq 4$, čiže $b+c \leqq 2$.

Rovnosť $b+c = 2$ nastane práve vtedy, keď má spomenutá rovnica nulový diskriminant, a teda dvojnásobný koreň, ktorým ale musí byť číslo a. Keďže je však súčin koreňov (podľa Viètových vzťahov) rovný b^2, musí byť nutne $a = b$. Ľahko potom overíme, že trojice $(r, r, 2-r)$ pre ľubovoľné $r \in (0, 2)$ naozaj rovnosti zo zadania vyhovujú.

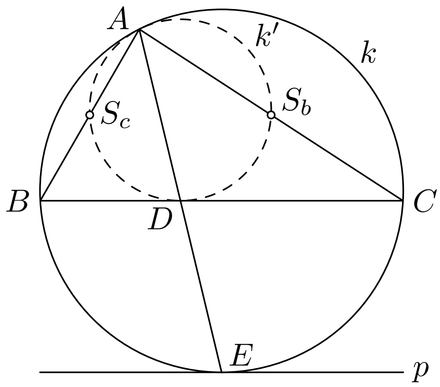
5. *V trojuholníku ABC platí $|BC| = 1$ a zároveň na strane BC existuje práve jeden bod D taký, že $|DA|^2 = |DB| \cdot |DC|$. Určte všetky možné hodnoty obvodu trojuholníka ABC.* (*Patrik Bak*)

Riešenie. Označme E druhý priesečník priamky AD s kružnicou k trojuholníku ABC opísanou. Z mocnosti bodu D ku kružnici k vyplýva, že $|DB| \cdot |DC| = |DA| \cdot |DE|$, čo porovnaním so zadanou podmienkou $|DA|^2 = |DB| \cdot |DC|$ dáva $|DA| = |DE|$. Bod E teda leží na obraze p priamky BC v rovnoľahlosti so stredom A a koeficientom 2 (obr. 3).

Aj naopak platí, že k ľubovoľnému priesečníku priamky p s kružnicou k spätne zostrojíme bod D na strane BC, ktorý bude zrejme spĺňať rovnosť $|DA|^2 = |DB| \cdot |DC|$. Aby bol taký bod určený jednoznačne, musí sa priamka p v bode E kružnice k dotýkať.



Obr. 3



Obr. 4

Označme S_b a S_c postupne stredy úsečiek AC a AB. V rovnoľahlosti so stredom A a koeficientom $\frac{1}{2}$ sa body A, B, C, E ležiace na kružnici k zobrazia na body A, S_c, S_b, D ležiace na kružnici k' (obr. 4), pritom obrazom priamky p bude dotyčnica BC kružnice k' v bode D. Z mocnosti bodov B, C k tejto kružnici potom dostávame $|BD|^2 = |BA| \cdot |BS_c| = \frac{1}{2}|BA|^2$ a $|CD|^2 = |CA| \cdot |CS_b| = \frac{1}{2}|CA|^2$. Spolu tak pre obvod trojuholníka ABC platí

$$|BC| + |AB| + |AC| = |BC| + \sqrt{2}(|BD| + |CD|) = |BC| + \sqrt{2} \cdot |BC| = 1 + \sqrt{2},$$

čo je teda (jediná možná) veľkosť obvodu trojuholníka ABC.

Iné riešenie. V trojuholníku ABC s bodom D vnútri strany BC so stranami dĺžok a, b, c označme $|BD| = m$, $|DC| = n$ a $|AD| = d$. Podľa Stewartovej vety[1] potom platí

$$b^2 m + c^2 n = a(d^2 + mn).$$

Prípad $d^2 = mn$ tak nastane práve vtedy, keď bude platiť

$$b^2 m + c^2 n = 2amn.$$

[1] Stewartovu vetu možno odvodiť použitím kosínusovej vety v trojuholníkoch BAD a CAD (v oboch prípadoch voči uhlu pri vrchole D) a následným vylúčením výrazov s kosínusom.

V našom prípade, keď $a = 1$, zavedením $m = x$, $n = 1 - x$ pre $x \in (0, 1)$ získame po úprave rovnicu

$$P(x) = 2x^2 + (b^2 - c^2 - 2)x + c^2 = 0.$$

Keďže $P(0) = c^2 > 0$ a $P(1) = b^2 > 0$, nemôže mať $P(x) = 0$ dva rôzne korene, z ktorých práve jeden leží v intervale $(0, 1)$. Jediná možnosť, ako zabezpečiť jednoznačnosť bodu D, je dvojnásobný koreň v intervale $(0, 1)$. Podľa Vièteových vzťahov musí tento dvojnásobný koreň spĺňať $x^2 = \frac{1}{2}c^2$, čím sa o polohe bodu D dozvedáme, že nutne $m\sqrt{2} = c$. Úplne analogicky možno odvodiť aj rovnosť $n\sqrt{2} = b$. Obvod trojuholníka potom spočítame ako $a + b + c = 1 + (m + n)\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}$.

---

6. *Na niektoré políčko šachovnice* 6×6 *postavíme figúrku kráľoviča. Tá môže v jednom ťahu poskočiť buď v zvislom, alebo vo vodorovnom smere. Dĺžka tohto skoku je striedavo jedno a dve políčka, pričom skokom dĺžky jedna (t. j. na susedné políčko) figúrka začína. Rozhodnite, či sa dá zvoliť východisková pozícia figúrky tak, aby po vhodnej postupnosti 35 skokov navštívila každé políčko šachovnice práve raz.* (Peter Novotný)

Riešenie. Pripusťme, že vhodná východisková pozícia a postupnosť 35 skokov existuje, a očíslujme políčka šachovnice podľa nasledujúcej schémy:

1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3

Ťahy dĺžky jedna vedú z nepárneho čísla na párne a naopak. Ťahy dĺžky dva vždy vedú z párneho čísla na *iné* párne číslo a z nepárneho čísla na *iné* nepárne číslo. Ak navštívené políčka označíme P_1, P_2, ..., P_{36}, z uvedeného vyplýva, že medzi štyrmi políčkami P_2, P_3, P_4, P_5 je každé z čísel zastúpené práve raz (na P_2 a P_3 sú rôzne čísla s rovnakou paritou a podobne na P_4, P_5 s druhou paritou). Z rovnakých dôvodov je každé z čísel zastúpené práve raz vo štvoriciach políčok P_{4k+2}, P_{4k+3}, P_{4k+4}, P_{4k+5} pre každé $k \in \{0, 1, \ldots, 7\}$. Medzi číslami na políčkach P_2, P_3, ..., P_{33} je tak každé z čísel zastúpené dokopy 8-krát.

Číslo 4 je na šachovnici iba 8-krát, preto žiadne z čísel na P_1, P_{34}, P_{35}, P_{36} nemôže byť 4. Čísla na P_{34} a P_{35} majú rovnakú paritu a sú rôzne (delí ich skok dĺžky 2). Keďže na nich nie je číslo 4, musia byť obe nepárne. Potom na políčku P_{36} musí byť párne číslo a rovnako tak párne číslo vychádza aj na políčko P_1. Na oboch tak musí byť číslo 2.

Počiatočné políčko teda musí byť niektoré z vyfarbených na ľavej šachovnici. Tento argument možno ale zopakovať aj pre druhé očíslovanie vpravo, ktoré je len „otočením“ očíslovania prvého. Keďže žiadne políčko nie je vyfarbené súčasne na oboch šachovniciach, došli sme ku sporu. Šachovnicu tak žiadaným spôsobom prejsť nemožno, nech je počiatočné políčko zvolené akokoľvek.

1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3

2	3	4	1	2	3
1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1
3	4	1	2	3	4
2	3	4	1	2	3
1	2	3	4	1	2

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Ivan Cimrák, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Eva Oravcová, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2016