2001/2002

51. ročník MO *Zadania úloh krajského kola kategórie A*

(*Súťaž sa konala v utorok 15. januára 2002.*)

1. Dokážte, že pre ľubovoľné čísla $\alpha, \beta \in \langle 0, \pi/2)$ platí nerovnosť

$$\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta} \geqq 2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}.$$

Zistite, kedy nastane rovnosť. (*E. Kováč*)

2. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel x a y, pre ktoré platí

$$x^2 = 4y + 3 \cdot n(x, y),$$

kde $n(x, y)$ značí najmenší spoločný násobok čísel x a y. (*P. Černek*)

3. Do kružnice k je vpísaný štvoruholník $ABCD$, ktorého uhlopriečka BD nie je priemerom. Dokážte, že priesečník priamok, ktoré sa kružnice k dotýkajú v bodoch B a D, leží na priamke AC práve vtedy, keď platí $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$. (*E. Kováč*)

4. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= p(y + z), \\ y^2 - 1 &= p(z + x), \\ z^2 - 1 &= p(x + y) \end{aligned}$$

s neznámymi x, y, z a parametrom p. Vykonajte diskusiu počtu riešení. (*E. Kováč*)