2001/2002
51. ročník MO *Zadania úloh krajského kola kategórie B*

(*Súťaž sa konala v utorok 26. marca 2002.*)

1. Nájdite všetky prirodzené čísla n, ktoré sú menšie ako 100 a majú tú vlastnosť, že druhé mocniny čísel $7n+5$ a $4n+3$ sa končia rovnakým dvojčíslím. (*J. Šimša*)

2. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned}(x^2+1)(y^2+1)+24xy&=0\\ \frac{12x}{x^2+1}+\frac{12y}{y^2+1}+1&=0.\end{aligned}$$

(*J. Šimša*)

3. Vo vnútri strán AB, BC, CD a DA konvexného štvoruholníka $ABCD$ sú postupne zvolené body K, L, M a N. Označme S priesečník priamok KM a LN. Ak je možné vpísať kružnice štvoruholníkom $AKSN$, $BLSK$, $CMSL$ a $DNSM$, potom je možné vpísať kružnicu aj štvoruholníku $ABCD$. Dokážte. (*J. Zhouf*)

4. Je daných n nezáporných čísel. Môžeme vybrať ľubovoľné dve z nich, napríklad a a b, $a \leqq b$, a zameniť ich číslami 0 a $b-a$. Dokážte, že opakovaním tejto operácie je možné všetky dané čísla zmeniť na nuly práve vtedy, keď pôvodné čísla je možné rozdeliť do dvoch skupín tak, že súčty čísel v oboch skupinách sú rovnaké. (*J. Földes*)