2008/2009
58. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie B*

(*Termín odovzdania: vo štvrtok 8. januára 2009.*)

1. Na tabuli je napísané štvorciferné číslo deliteľné ôsmimi, ktorého posledná cifra je 8. Keby sme poslednú cifru nahradili cifrou 7, získali by sme číslo deliteľné deviatimi. Keby sme však poslednú cifru nahradili cifrou 9, získali by sme číslo deliteľné siedmimi. Určte číslo, ktoré je napísané na tabuli. (*Peter Novotný*)

2. Určte všetky trojice (x, y, z) reálnych čísel, pre ktoré platí

$$x^2 + xy = y^2 + z^2,$$
$$z^2 + zy = y^2 + x^2.$$

(*Jaroslav Švrček*)

3. Na strane BC, resp. CD rovnobežníka $ABCD$ určte body E, resp. F tak, aby úsečky EF, BD boli rovnobežné a trojuholníky ABE, AEF a AFD mali rovnaké obsahy. (*Jaroslav Zhouf*)

4. Na pláne 7×7 hráme hru lode. Nachádza sa na nej jedna loď 2×3. Môžeme sa spýtať na ľubovoľné políčko plánu, a ak loď zasiahneme, hra končí. Ak nie, pýtame sa znova. Určte najmenší počet otázok, ktoré potrebujeme, aby sme s istotou loď zasiahli. (*Ján Mazák*)

5. Trojuholníku ABC je opísaná kružnica k. Os strany AB pretne kružnicu k v bode K, ktorý leží v polrovine opačnej k polrovine ABC. Osi strán AC a BC pretnú priamku CK postupne v bodoch P a Q. Dokážte, že trojuholníky AKP a KBQ sú zhodné. (*Leo Boček*)

6. Nájdite všetky dvojice celých čísel (m, n), pre ktoré je hodnota výrazu

$$\frac{m + 3n - 1}{mn + 2n - m - 2}$$

celé kladné číslo. (*Vojtech Bálint*)