65. ročník Matematickej olympiády
2015/2016 *Riešenia úloh krajského kola kategórie B*

1. *Určte všetky trojice celých kladných čísel k, l a m, pre ktoré platí*

$$\frac{3l+1}{3kl+k+3}=\frac{lm+1}{5lm+m+5}.$$

(*Jaromír Šimša*)

Riešenie. Najskôr zlomky v zadanej rovnici prevrátime (v oboch čitateľoch sú kladné čísla) a čiastočne vydelíme:

$$\frac{3kl+k+3}{3l+1}=\frac{5lm+m+5}{lm+1},$$
$$\frac{k(3l+1)+3}{3l+1}=\frac{5(lm+1)+m}{lm+1},$$
$$k+\frac{3}{3l+1}=5+\frac{m}{lm+1}.$$

Keďže pre prirodzené čísla l a m platí $3<3l+1$ aj $m<lm+1$, ležia hodnoty oboch zlomkov z poslednej rovnice v intervale $(0,1)$. Dostávame tak

$$k=5 \quad \text{a zároveň} \quad \frac{3}{3l+1}=\frac{m}{lm+1}. \tag{1}$$

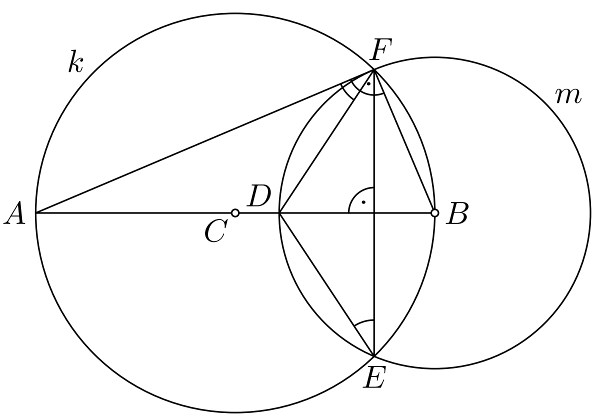
Z druhej rovnice po roznásobení vyplýva $3lm+3=3lm+m$, preto $m=3$, zatiaľ čo l môže byť ľubovoľné.

Úlohe vyhovujú všetky trojice $(k,l,m)=(5,l,3)$, kde l je ľubovoľné prirodzené číslo.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za odvodenie $k=5$ dajte 3 body, za $m=3$ dva body a ďalší bod dajte za zistenie, že hodnota l môže byť ľubovoľná. Ak riešiteľ uhádne iba konečný počet riešení (k,l,m), napríklad iba jediné riešenie $(5,1,3)$, dajte 1 bod, ak uhádne a overí riešenie $(5,l,3)$ pre ľubovoľné prirodzené číslo l, dajte ďalší bod.

2. *Daná je úsečka AB, jej stred C a vnútri úsečky AB bod D. Kružnice $k(C,|BC|)$ a $m(B,|BD|)$ sa pretínajú v bodoch E a F. Zdôvodnite, prečo je polpriamka FD osou uhla AFE.* (*Šárka Gergelitsová*)

Riešenie. Kružnica k je Tálesovou kružnicou nad priemerom AB, takže trojuholník ABF je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole F. Inými slovami, priamka AF je kolmá



Obr. 1

na polomer BF kružnice m, a preto sa priamka AF dotýka kružnice m v bode F (obr. 1). Z rovnosti úsekového uhla zovretého tetivou DF s dotyčnicou AF a obvodového uhla nad tou istou tetivou máme (ako už je vyznačené na obrázku)

$$|\angle AFD| = |\angle DEF|.$$

Zo súmernosti úsečky EF podľa osi AB tak vyplýva

$$|\angle AFD| = |\angle DEF| = |\angle DFE|,$$

čo znamená, že FD je osou uhla AFE.

Iné riešenie. Označme β veľkosť uhla ABF a dopočítajme veľkosti uhlov DFE a AFE. Trojuholník DBF je rovnoramenný, lebo jeho ramená BD a BF sú polomery kružnice m, preto

$$|\angle DFB| = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta) = 90^\circ - \frac{\beta}{2}.$$

Keďže podobne aj trojuholník EBF je rovnoramenný s osou BD, platí

$$|\angle EFB| = 90^\circ - \beta.$$

Spojením oboch predchádzajúcich rovností tak dostávame

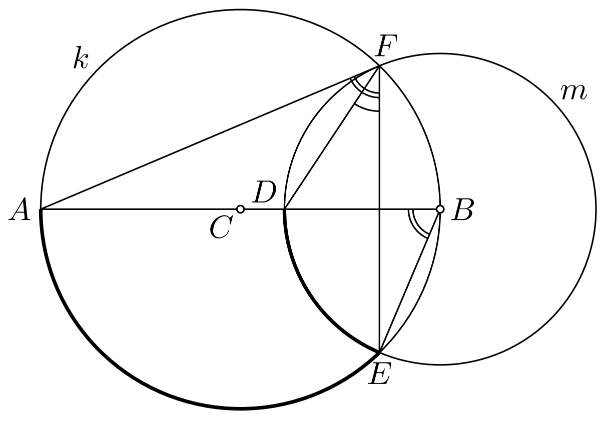
$$|\angle DFE| = |\angle DFB| - |\angle EFB| = \frac{\beta}{2}.$$

Z vlastností Tálesovej kružnice k nad priemerom AB vieme, že uhol AFB je pravý. Pritom jeho časť uhol EFB má, ako sme už zistili, veľkosť $90^\circ - \beta$, takže jeho druhá časť uhol AFE má veľkosť β, čo je presne dvojnásobok veľkosti uhla DFE. Tým sme dokázali, že priamka FD je osou uhla AFE.

Iné riešenie. Nad oblúkom AE kružnice k sa zhodujú uhly ABE a AFE (obr. 2). Oblúku DE kružnice m prislúcha obvodový uhol DFE a stredový uhol DBE. Spolu tak dostávame

$$|\angle DFE| = \frac{1}{2}|\angle DBE| = \frac{1}{2}|\angle ABE| = \frac{1}{2}|\angle AFE|,$$

čo dokazuje, že FD je osou uhla AFE.



Obr. 2

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Pri neúplnom riešení sa snažte úmerne oceniť užitočnosť dokázaných vlastností, napr. v prvom postupe dajte 3 body za objav rovnosti $|\angle AFD| = |\angle DEF|$ a zvyšné 3 body za využitie súmernosti. Samotné úvahy o symetrii oceňte nanajvýš dvoma bodmi. Ak študent urobí zásadný pokrok, ale nedokáže všetko spojiť a dôjsť k požadovanému záveru, strhnite 1 bod.

3. *Nájdite všetky prirodzené čísla n, ktoré majú práve šesť deliteľov, pričom súčet druhého najväčšieho a druhého najmenšieho z nich je 54.* (*Pavel Novotný*)

Riešenie. Najskôr zistíme, ako vyzerajú čísla n, ktoré majú práve šesť deliteľov.

Ak je číslo n deliteľné tromi rôznymi prvočíslami p, q, r, má aspoň osem rôznych deliteľov: 1, p, q, r, pq, pr, qr, pqr. Číslo n môže teda mať nanajvýš dva prvočíselné delitele p a q.

Ak je číslo n deliteľné dvoma rôznymi prvočíslami a jeden z prvočiniteľov v prvočíselnom rozklade čísla n je aspoň v tretej mocnine, teda keď p^3q delí číslo n, má opäť číslo n aspoň osem deliteľov: 1, p, p^2, p^3, q, pq, p^2q, p^3q. Ostáva rozobrať čísla deliteľné dvoma prvočíslami, každým nanajvýš v druhej mocnine. Číslo $n = pq$ má iba štyri delitele (1, p, q a pq), číslo $n = p^2q^2$ má deväť deliteľov (1, p, p^2, q, q^2, pq, p^2q, q^2p, p^2q^2), jedine číslo tvaru $n = p^2q$ má práve šesť deliteľov (1, p, p^2, q, pq, p^2q).

Napokon ak je číslo n mocninou jediného prvočísla, $n = p^k$, má $k + 1$ deliteľov: $1, p, p^2, \dots, p^k$. V tomto prípade tak vyhovuje iba $k = 5$.

Zistili sme, že číslo n so šiestimi deliteľmi má jeden z tvarov p^5 alebo p^2q, pričom p a q sú rôzne prvočísla. Obe tieto možnosti ďalej preskúmame.

Ak $n = p^5$, dajú sa delitele čísla n usporiadať podľa veľkosti: $1 < p < p^2 < p^3 < p^4 < p^5$, takže má podľa zadania úlohy platiť $p + p^4 = p(p^3 + 1) = 54 = 2 \cdot 3^3$. Prvočíslo p je deliteľom čísla 54, preto $p \in \{2, 3\}$. Zároveň aj bez počítania vidíme, že $2(2^3 + 1) < 2 \cdot 3^3 < 3(3^3 + 1)$, takže ani jedno $p \in \{2, 3\}$ požadovanému vzťahu nevyhovuje.

Ak $n = p^2q$, rozlíšime dva prípady, $p < q$ a $q < p$.

Ak je $p < q$, je p druhý najmenší deliteľ čísla n (najmenšia je jednotka). Najväčším deliteľom čísla n je samo číslo p^2q a druhým najväčším je pq, lebo pq je väčšie ako každý z ostatných štyroch deliteľov 1, p, q aj p^2. Hľadáme teda riešenie rovnice $p + pq = p(1 + q) = 2 \cdot 3^3$. Navyše vieme, že q je nepárne (je väčšie ako prvočíslo p), takže $1 + q$ je párne, a teda musí byť $p = 3$. Potom $q = 17$, čo vedie na riešenie $n = 3^2 \cdot 17 = 153$.

Ak je $q < p$, dajú sa delitele čísla $n = p^2q$ usporiadať podľa veľkosti: $1 < q < p < pq < p^2 < p^2q$. Hľadáme teda riešenie rovnice $q + p^2 = 54$. Keďže p aj q sú prvočísla, je $q \geqq 2$, $p \geqq 3$ a tiež $p^2 \leqq 52$, čiže $p \leqq 7$, preto $p \in \{3, 5, 7\}$. Zároveň však vidíme, že $q = 54 - p^2$ môže byť prvočíslo menšie ako p iba pre $p = 7$, potom $q = 5$ a $n = 49 \cdot 5 = 245$, čo je ďalšie riešenie.

Odpoveď. Úloha má dve riešenia $153 = 3^2 \cdot 17$ (s deliteľmi $1 < \mathbf{3} < 9 < 17 < \mathbf{51} < 153$) a $245 = 7^2 \cdot 5$ (s deliteľmi $1 < \mathbf{5} < 7 < 35 < \mathbf{49} < 245$).

Poznámka. Úvodný rozbor možno podstatne skrátiť, ak využijeme známe tvrdenie, že číslo n s rozkladom na súčin prvočísel $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$ má práve

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_m + 1)$$

deliteľov. Číslo 6 sa dá takto napísať iba dvoma spôsobmi $6 = 2 \cdot 3$, ktorým zodpovedajú buď $m = 1$ a $\alpha_1 = 5$, teda $n = p^5$, alebo $m = 2$ a $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, teda $n = p^2q$.

Iné riešenie. Najmenší deliteľ čísla n je 1, druhý najmenší deliteľ je najmenší prvočíselný deliteľ čísla n – označme ho p. Najväčší deliteľ čísla n je samotné číslo n a druhý najväčší deliteľ je n/p. Máme teda riešiť rovnicu

$$p + \frac{n}{p} = 54.$$

Keďže číslo n má šesť deliteľov, musí platiť $p < n/p$, takže $p < 54/2 = 27$. Stačí teda vyskúšať prvočísla p menšie ako 27. Pre každé také prvočíslo dopočítame $n = p(54-p)$ a overíme počet jeho deliteľov:

p	$n = p(54-p)$	delitele čísla n	počet deliteľov
2	$104 = 2^3 \cdot 13$	1, 2, 4, 8, 13, 26, 52, 104	8
3	$\mathbf{153} = 3^2 \cdot 17$	1, 3, 9, 17, 51, 153	**6**
5	$\mathbf{245} = 5 \cdot 7^2$	1, 5, 7, 35, 49, 245	**6**
7	$329 = 7 \cdot 47$	1, 7, 47, 329	4
11	$473 = 11 \cdot 43$	1, 11, 43, 473	4
13	$533 = 13 \cdot 41$	1, 13, 41, 533	4
17	$629 = 17 \cdot 37$	1, 17, 37, 629	4
19	$665 = 5 \cdot 7 \cdot 19$	1, 5, 7, 19, 35, 95, 133, 665	8
23	$713 = 23 \cdot 31$	1, 23, 31, 713	4

Z tabuľky vidíme, že práve šesť deliteľov majú iba čísla 153 a 245.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Ak riešiteľ postupuje podľa prvého riešenia, dajte prvý bod za odvodenie oboch možných prvočíselných rozkladov čísla n, ďalšie dva body dajte za vyriešenie prípadu $n = p^5$ a tri body za vyriešenie prípadu $n = p^2q$, z toho 1 bod za rozbor prípadov $p < q$ a $p > q$ a zostavenie oboch rovníc a po 1 bode za ich vyriešenie. Ak riešiteľ postupuje podľa druhého riešenia, dajte 2 body za odvodenie rovnice $n + n/p = 54$, za ohraničenie hodnoty p zhora dajte ďalšie dva body a zvyšné dva body dajte za korektné preverenie všetkých prípustných hodnôt p.

---

4. *Dané je prirodzené číslo k, $4 \leqq k \leqq 900$. Adam a Braňo hrajú hru: Adam napíše na tabuľu k rôznych trojciferných čísel, Braňo si z nich vyberie štyri rôzne. Ak rozdiel medzi dvoma najmenšími aj rozdiel medzi dvoma najväčšími vybranými číslami je nanajvýš 22, vyhráva Braňo, inak vyhráva Adam. V závislosti od hodnoty k určte, kto má vyhrávajúcu stratégiu.* (*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Adamovi na výhru stačí, aby rozdiel dvoch najmenších čísel, ktoré Braňo vyberie, bol aspoň 23. Ak teda Adam napíše na tabuľu niektoré z čísel

$$a_1 = 100,\ a_2 = 123,\ a_3 = 146,\ \ldots,\ a_{40} = 997\ (= 100 + 39 \cdot 23), \tag{1}$$

Braňo určite prehrá, pretože každé dve čísla z postupnosti (1) majú rozdiel aspoň 23, lebo ich rozdiely sú násobkami čísla 23. Vidíme teda, že v prípade $k \leqq 40$ stačí Adamovi na výhru napísať na tabuľu ľubovoľných k čísel z postupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_{40}$.

Avšak Adamovi na výhru stačí, aby len jeden z rozdielov medzi dvoma najmenšími a medzi dvoma najväčšími z vybraných štyroch čísel bol aspoň 23. Ukážeme, že Adam dokáže vyhrať aj v prípadoch $k = 41$ a $k = 42$.

Doplňme k číslam $a_1, a_2, \ldots, a_{40}$ z (1) ešte $a_{41} = 998$ a $a_{42} = 999$. Aj pre $k \in \{41, 42\}$ stačí, keď Adam napíše na tabuľu čísla $a_1, \ldots, a_k$. Bez ohľadu na to, aké štyri čísla Braňo vyberie, budú dve najmenšie nutne z množiny $\{a_1, a_2, \ldots, a_{40}\}$, ktorej každé dva prvky sa líšia aspoň o 23, preto vyhrá Adam.

Teraz ukážeme, že pre $k \geqq 43$ môže vždy vyhrať Braňo bez ohľadu na to, ktoré čísla Adam na tabuľu napísal. Označme ich $a_1, a_2, \ldots, a_k$ od najmenšieho po najväčšie, teda $100 \leqq a_1 < a_2 < \ldots < a_k \leqq 999$, a pozrime sa na rozdiely dvoch susedných čísel $d_2 = a_2 - a_1$, $d_3 = a_3 - a_2$, $\ldots$, $d_k = a_k - a_{k-1}$. Označme tri najmenšie z nich ako

$d_p = a_p - a_{p-1}$, $d_q = a_q - a_{q-1}$ a $d_r = a_r - a_{r-1}$, pričom $2 \leqq p < q < r \leqq k$ (taká voľba nemusí byť jednoznačná, to však pre ďalšie úvahy nebude dôležité). Zrejme potom platí $p + 1 \leqq q < r$, z čoho $p < r - 1$, takže čísla a_{p-1}, a_p, a_{r-1} a a_r spĺňajú nerovnosti

$$a_{p-1} < a_p < a_{r-1} < a_r,$$

a preto je d_p rozdiel dvoch najmenších a d_r rozdiel dvoch najväčších z nich. Presvedčme sa, že Braňo vyhrá, keď vyberie tieto štyri čísla.

Na výhru Braňo potrebuje, aby bolo $d_p \leqq 22$ aj $d_r \leqq 22$. Pripusťme, že to tak nie je, čiže aspoň jedno z čísel d_p, d_q, d_r je najmenej 23 a zvyšné dve sú aspoň 1. Keďže d_p, d_q, d_r sú tri najmenšie rozdiely, všetky ostatné rozdiely d_i sú aspoň 23. Pre súčet všetkých rozdielov tak dostávame odhad

$$\begin{aligned} d_k + d_{k-1} + \ldots + d_2 &= (d_p + d_q + d_r) + \sum_{i \in \{2,\ldots,k\} \setminus \{p,q,r\}} d_i \geqq \\ &\geqq (1 + 1 + 23) + (k - 4) \cdot 23 = 2 + 23 \cdot (k - 3). \qquad (2) \end{aligned}$$

Na druhej strane všetky čísla a_i sú trojciferné, a teda

$$\begin{aligned} d_k + d_{k-1} + \ldots + d_2 &= (a_k - a_{k-1}) + (a_{k-1} - a_{k-2}) + \ldots + (a_2 - a_1) = \\ &= a_k - a_1 \leqq 999 - 100 = 899. \end{aligned}$$

Spojením predchádzajúcich dvoch nerovností prichádzame ku sporu, lebo pre $k \geqq 43$ je

$$922 = 2 + 23 \cdot 40 \leqq 2 + 23 \cdot (k - 3) \leqq d_k + d_{k-1} + \ldots + d_2 \leqq 899.$$

Dokázali sme, že opísaným výberom čísel a_{p-1}, a_p, a_{r-1} a a_r si Braňo zabezpečí výhru pre ľubovoľné $k \geqq 43$.

Odpoveď. Pre $k \leqq 42$ má vyhrávajúcu stratégiu Adam a pre $k \geqq 43$ Braňo.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Ak riešiteľ iba ukáže, že hodnoty $k \leqq 40$, prípadne $k \leqq 41$ umožňujú Adamovi výhru, dajte 1 bod. Dva body dajte v prípade, že riešiteľ uvedie správnu hranicu $k \leqq 42$ aj s uvedením čísel, ktoré má Adam napísať na tabuľu (čísla $100, 123, \ldots$ nie sú jedinou možnosťou). Zvyšné 4 body dajte za dôsledný popis vyhrávajúcej stratégie pre Braňa v prípade $k \geqq 43$; najťažšou časťou je dolný odhad súčtu rozdielov, preto nerovnosť (2) alebo jej ekvivalent ohodnoťte 2 bodmi, zvyšný popis nanajvýš dvoma bodmi.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Štefan Gyürki, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Stanislav Krajči, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný, Štefan Gyürki
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2016