65. ročník Matematickej olympiády
2015/2016 *Riešenia úloh krajského kola kategórie C*

---

1. *Nájdite najmenšiu možnú hodnotu výrazu*

$$3x^2 - 12xy + y^4,$$

v ktorom x a y sú ľubovoľné celé nezáporné čísla. (Jaromír Šimša)

Riešenie. Označme daný výraz V a upravme ho dvojakým použitím úpravy nazývanej *doplnenie na štvorec*:

$$V = 3x^2 - 12xy + y^4 = 3(x-2y)^2 - 12y^2 + y^4 = 3(x-2y)^2 + (y^2-6)^2 - 36.$$

Zrejme platí $(x-2y)^2 \geqq 0$, takže najmenšiu hodnotu výrazu V *pri pevnom* y dostaneme, keď položíme $x = 2y$. Ostáva preto nájsť najmenšiu možnú hodnotu mocniny $(y^2-6)^2$ s nezápornou celočíselnou premennou y. Keďže $y^2 \in \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$ a číslo 6 padne medzi čísla 4 a 9 tejto množiny, platí pre každé celé číslo y nerovnosť

$$(y^2-6)^2 \geqq \min\bigl((4-6)^2, (9-6)^2\bigr) = \min\{4, 9\} = 4.$$

Pre ľubovoľné celé čísla x a y tak dostávame odhad

$$V \geqq 3 \cdot 0 + 4 - 36 = -32,$$

pritom rovnosť $V = -32$ nastáva pre $y = 2$ a $x = 2y = 4$.

Odpoveď. Hľadaná najmenšia možná hodnota daného výrazu je -32.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 3 body za potrebnú úpravu výrazu, 1 bod za určenie minima mocniny $(y^2-6)^2$ (stačí konštatovať, že 2^2 je druhá mocnina najbližšia k číslu 6), 1 bod za určenie hľadanej hodnoty -32 a 1 bod za uvedenie dvojice (x, y), pre ktorú sa táto hodnota dosahuje.

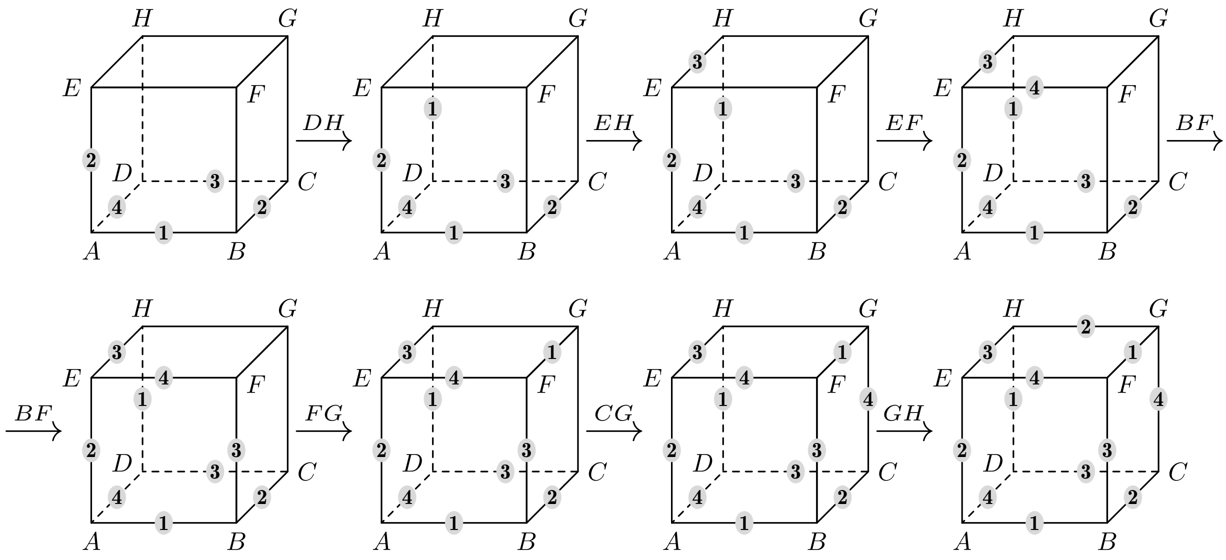
---

2. *Určte, koľkými spôsobmi možno všetky hrany kocky $ABCDEFGH$ ofarbiť štyrmi danými farbami (celú hranu bez krajných bodov vždy jednou farbou), aby pritom každá stena kocky mala hrany všetkých štyroch farieb.* (Jaroslav Švrček)

Riešenie. Rôzne farby musia mať nielen štyri hrany každej steny kocky, ale aj každé tri hrany, ktoré vychádzajú z rovnakého vrcholu kocky (keďže každé dve z nich patria jednej stene). Tento úvodný postreh budeme v celom riešení mlčky opakovane využívať.

Začneme ofarbením hrán steny $ABCD$, farby jej hrán AB, BC, CD, DA označíme postupne číslami 1, 2, 3, 4. Pre výber farby 1 máme 4 možnosti, pre výber farby 2 už iba 3 možnosti atď., takže počet všetkých ofarbení hrán steny $ABCD$ je rovný $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Vyberieme jedno z nich a ďalej budeme uvažovať o možnostiach ofarbenia zvyšných ôsmich hrán kocky.

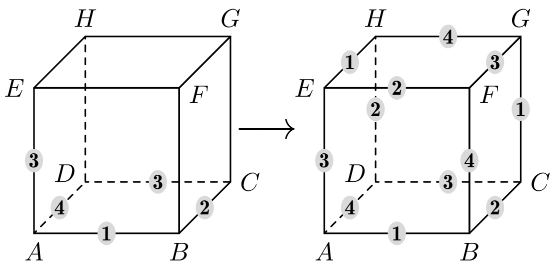
Podľa farby 1 hrany AB a farby 4 hrany AD vidíme, že hrana AE môže mať farbu 2 alebo 3. Rozoberme podrobne prvý prípad, keď AE má farbu 2. Poznáme teda ofarbenie piatich hrán, ako je vyznačené na prvej kocke zo série na obr. 1, ktorý ukazuje,



Obr. 1

ako postupne určiť (už jednoznačne dané) ofarbenie zvyšných siedmich hrán. V každom kroku nad šípkou uvádzame hranu, ktorej farbu práve určujeme. Opíšeme prvý krok: hrana DH nemôže mať ani farby 3 a 4 (kvôli hranám DC a DA), ani farbu 2 (kvôli stene $ADHE$), má teda farbu 1. Takto argumentujeme aj v ďalších krokoch; na poslednej kocke dostávame ofarbenie všetkých jej hrán, ktoré naozaj vyhovuje podmienke úlohy.

Obdobným postupom možno získať (jediné) vyhovujúce ofarbenie všetkých hrán kocky aj v druhom prípade, keď hrana AE má farbu 3 (obr. 2). Podrobnú sériu sme vynechali, najmä preto, že počiatočnú kocku z obr. 2 (vrátane určených farieb) možno previesť na počiatočnú kocku z obr. 1, keď ju najskôr zobrazíme v súmernosti podľa roviny $ACGE$ a potom navzájom vymeníme farby $1 \leftrightarrow 4$, $2 \leftrightarrow 3$ (a označenie vrcholov $B \leftrightarrow D$, $F \leftrightarrow H$).

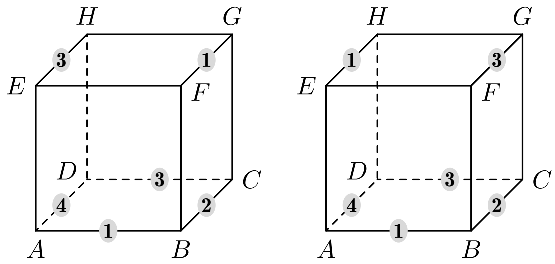


Obr. 2

Overili sme, že každé z 24 možných ofarbení hrán steny $ABCD$ sa dá rozšíriť práve dvoma spôsobmi na vyhovujúce ofarbenie všetkých 12 hrán kocky. Preto je ich celkový počet rovný $2 \cdot 24 = 48$.

Iné riešenie. Opäť budeme opakovane využívať postreh z úvodu prvého riešenia, tentoraz však v odlišnom postupe založenom na poznatku, že *žiadne dve rovnobežné hrany kocky nemôžu mať rovnakú farbu.* Stačí to dokázať iba pre dve rovnobežné hrany, ktoré neležia v jednej stene kocky, bez ujmy na všeobecnosti napríklad pre hrany AB a GH. Keby naopak mali rovnakú farbu, nemohla by ju mať už žiadna z hrán BC, BF, GC, GF, čiže by ju nemala žiadna z hrán steny $BCGF$, a to je spor.

Ak označíme farby hrán AB, BC, CD, DA opäť postupne číslami 1, 2, 3, 4, tak podľa dokázaného poznatku majú v hornej stene $EFGH$ farbu 1 a 3 hrany FG a EH – nevieme však v akom poradí; obe možnosti sú vykreslené na obr. 3. V akom poradí sú



Obr. 3

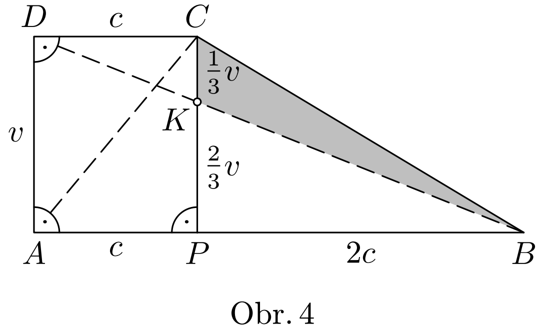
farby 2 a 4 zvyšných hrán EF a GH hornej steny? Na ľavej kocke podľa farieb AB, AD a EH vidíme, že AE má farbu 2, takže v hornej podstave má EF farbu 4 a GH farbu 2. Podobne na pravej kocke má BF farbu 4, takže EF má farbu 2 a GH farbu 4. Jednoznačné ofarbenie zvyšných „zvislých" hrán oboch kociek je už jednoduché; pre ľavú kocku dostaneme výsledné ofarbenie z obr. 1, pre pravú kocku ofarbenie z obr. 2. Týmto postupom znova prichádzame k záveru, že hľadaný počet vyhovujúcich ofarbení danej kocky $ABCDEFGH$ je rovný dvojnásobku počtu výberov farieb pre hrany steny $ABCD$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za určenie počtu 24 všetkých ofarbení jednej steny dajte 1 bod, rovnako tak ohodnoťte postreh o rôznych farbách ľubovoľných troch hrán so spoločným krajným bodom. Pri neúplnom postupe z prvého riešenia dajte 1 bod za rozbor dvoch možností pre farbu (piatej) hrany AE, určovanie farieb zvyšných siedmich hrán môže byť v úplnom riešení opísané iba pre prvú z týchto hrán a pre ďalšie bez postupných obrázkov. Pri neúplnom postupe z druhého riešenia dajte 2 body za zdôvodnenie poznatku o farbách ľubovoľných dvoch rovnobežných hrán.

---

3. *V pravouhlom lichobežníku $ABCD$ s pravým uhlom pri vrchole A základne AB je bod K priesečníkom výšky CP lichobežníka s jeho uhlopriečkou BD. Obsah štvoruholníka $APCD$ je polovicou obsahu lichobežníka $ABCD$. Určte, akú časť obsahu trojuholníka ABC zaberá trojuholník BCK.* (Lucie Růžičková)

Riešenie. V pravouholníku $APCD$ označme $c = |CD| = |AP|$ a $v = |AD| = |CP|$ (obr. 4, pričom sme už vyznačili ďalšie dĺžky, ktoré odvodíme v priebehu riešenia).[1]



Obr. 4

[1] Keďže podľa zadania uhlopriečka BD pretína výšku CP, musí jej päta P ležať medzi bodmi A a B, takže sa jedná o „zvyčajný" lichobežník $ABCD$ s dlhšou základňou AB a kratšou základňou CD.

Z predpokladu $S_{APCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ vyplýva pre druhú polovicu obsahu $ABCD$ vyjadrenie $\frac{1}{2}S_{ABCD} = S_{PBC}$, takže $S_{APCD} = S_{PBC}$ čiže $cv = \frac{1}{2}|PB|v$, odkiaľ vzhľadom na to, že $v \neq 0$, vychádza $|PB| = 2c$, v dôsledku čoho $|AB| = 3c$.

Trojuholníky CDK a PBK majú pravé uhly pri vrcholoch C, P a zhodné (vrcholové) uhly pri spoločnom vrchole K, takže sú podľa vety *uu* podobné, a to s koeficientom $|PB| : |CD| = 2c : c = 2$. Preto tiež platí $|PK| : |CK| = 2 : 1$, odkiaľ $|KP| = \frac{2}{3}v$ a $|CK| = \frac{1}{3}v$.

Posudzované obsahy trojuholníkov ABC a BCK tak majú vyjadrenie

$$S_{ABC} = \frac{|AB| \cdot |CP|}{2} = \frac{3cv}{2} \quad \text{a} \quad S_{BCK} = \frac{|CK| \cdot |BP|}{2} = \frac{\frac{1}{3}v \cdot 2c}{2} = \frac{cv}{3},$$

preto ich pomer má hodnotu

$$\frac{S_{BCK}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{3}cv}{\frac{3}{2}cv} = \frac{2}{9}.$$

Odpoveď. Trojuholník BCK zaberá 2/9 obsahu trojuholníka ABC.

Za úplné riešenie úlohy dajte 6 bodov, z toho 1 bod za odvodenie $|BP| = 2|CD|$, 2 body za objav podobnosti trojuholníkov CDK a PBK s koeficientom 2, 1 bod za určenie $|CK| = \frac{1}{3}|AD|$ a zvyšné 2 body za zostavenie a výpočet hľadaného pomeru. Absenciu argumentu z poznámky pod čiarou v žiackych riešeniach tolerujte.

---

4. *Adam s Barborou hrajú so zlomkom*

$$\frac{10a + b}{10c + d}$$

takúto hru na štyri ťahy: Hráči striedavo nahrádzajú ľubovoľné z doposiaľ neurčených písmen a, b, c, d nejakou cifrou od 1 do 9. Barbora vyhrá, keď výsledný zlomok bude rovný buď celému číslu, alebo číslu s konečným počtom desatinných miest; inak vyhrá Adam (napríklad keď vznikne zlomok $\frac{11}{29}$). Ak začína Adam, ako má hrať Barbora, aby zaručene vyhrala? Ak začína Barbora, je možné poradiť Adamovi tak, aby vždy vyhral?

(*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Ak má prvý ťah Adam, môže Barbora hrať tak, aby bol výsledný zlomok rovný jednej, čo podľa zadania prinesie Barbore výhru. Taký zlomok vyjde, keď budú súčasne platiť obe rovnosti $a = c$ a $b = d$, ktoré Barbora dosiahne ťahmi „súmerne združenými“ podľa zlomkovej čiary s Adamovými ťahmi.

Ak začína Barbora, môže Adam hrať tak, aby vyšiel zlomok s menovateľom $10c + d$ deliteľným tromi, ktorého čitateľ $10a + b$ však deliteľný tromi nebude. Na to Adamovi stačí po každom z oboch Barboriných ťahov vhodne „doplniť“ čitateľ či menovateľ, napríklad podľa kritéria deliteľnosti tromi mu stačí zabezpečiť, aby sa ciferný súčet $a + b$ čitateľa rovnal 10 a aby sa ciferný súčet $c + d$ menovateľa rovnal 9 alebo 12. Adam tak vyhrá, pretože výsledný zlomok nebude možné krátiť tromi, takže sa nebude rovnať žiadnemu zlomku s mocninou čísla 10 v menovateli, akým sa dá zapísať každé číslo s konečným počtom desatinných miest.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 3 body za popis vyhrávajúcej Barborinej stratégie v prípade, keď začína Adam, a 3 body za popis vyhrávajúcej Adamovej stratégie v prípade, keď začína Barbora. Obe opísané vyhrávajúce stratégie nie sú samozrejme jediné možné, napríklad Adam môže založiť svoju stratégiu na deliteľnosti jedenástimi namiesto tromi, keď svojimi ťahmi dosiahne rovnosť $c = d$ a nerovnosť $a \neq b$.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Štefan Gyürki, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Stanislav Krajči, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný, Štefan Gyürki
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2016