2001/2002
51. ročník MO *Zadania úloh celoštátneho kola kategórie A*

(*Súťaž sa konala 7. – 10. 4. 2002.*)

1. V obore celých čísel riešte sústavu rovníc

$$(4x)_5 + 7y = 14,$$
$$(2y)_5 - (3x)_7 = 74,$$

kde $(n)_k$ značí násobok čísla k najbližší k číslu n. (*P. Černek*)

2. Uvažujme ľubovoľný rovnostranný trojuholník KLM, ktorého vrcholy K, L a M ležia postupne na stranách AB, BC a CD daného štvorca $ABCD$. Nájdite množinu stredov strán všetkých takých trojuholníkov KLM. (*J. Zhouf*)

3. Dokážte, že prirodzené číslo A je druhou mocninou niektorého prirodzeného čísla práve vtedy, keď pre každé prirodzené n je aspoň jeden z rozdielov

$$(A+1)^2 - A,\ (A+2)^2 - A,\ (A+3)^2 - A,\ \dots,\ (A+n)^2 - A$$

deliteľný číslom n. (*P. Kaňovský*)

4. Nájdite všetky dvojice reálnych čísel a, b, pre ktoré má rovnica

$$\frac{ax^2 - 24x + b}{x^2 - 1} = x$$

v obore reálnych čísel práve dve riešenia, pričom ich súčet je 12. (*P. Černek*)

5. V rovine je daný trojuholník KLM a bod A ležiaci na polpriamke opačnej k polpriamke KL. Zostrojte pravouholník $ABCD$, ktorého vrcholy B, C a D ležia postupne na priamkach KM, KL a LM. (*P. Calábek*)

6. Nech $\mathbb{R}^+$ je množina všetkých kladných reálnych čísel. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ spĺňajúce pre ľubovoľné $x, y \in \mathbb{R}^+$ rovnosť

$$f\bigl(xf(y)\bigr) = f(xy) + x.$$

(*P. Kaňovský*)