2000/2001
50. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie A*

(*Termín odovzdania: v pondelok 27. novembra 2000.*)

1. V urne sú len biele a čierne guľôčky, ktorých počet zaokrúhlený na stovky je 1 000. Pravdepodobnosť vytiahnutia dvoch čiernych guľôčok je o $\frac{17}{43}$ väčšia ako pravdepodobnosť vytiahnutia dvoch bielych guľôčok. Koľko bielych a koľko čiernych guľôčok je v urne? (Pravdepodobnosť vytiahnutia ktorejkoľvek guľôčky je rovnaká.) (*P. Černek*)

2. Nech a_1, a_2 sú prirodzené čísla a nech pre každé prirodzené $n \geqq 2$ je číslo a_{n+1} o 1 väčšie ako najväčší nepárny deliteľ súčtu $a_n + a_{n-1}$. Dokážte, že postupnosť $a_1, a_2, a_3, \ldots$ je od určitého člena počínajúc periodická. Nájdite všetky také postupnosti, ktoré sú periodické už od prvého člena. (*J. Bábeľa*)

3. V rovine je daný ostrouhlý trojuholník ABC. Päty výšok z vrcholov A, B označme postupne A_1, B_1. Dotyčnice kružnice opísanej trojuholníku CA_1B_1 zostrojené v bodoch A_1, B_1 sa pretínajú v bode M. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom AMB_1, BMA_1, CA_1B_1 prechádzajú jedným bodom. (*J. Švrček*)

4. V obore reálnych čísel riešte sústavu nerovníc

$$\begin{aligned} \sin x + \cos y &\geqq \sqrt{2}, \\ \sin y + \cos z &\geqq \sqrt{2}, \\ \sin z + \cos x &\geqq \sqrt{2}. \end{aligned}$$

(*J. Švrček*)

5. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x, y platí

$$x^2 + y^2 + 2f(xy) = f(x+y) \cdot \bigl(f(x) + f(y)\bigr).$$

(*E. Kováč*)

6. Zostrojte lichobežník $ABCD$, ak sú dané dĺžky jeho ramien $|BC| = 4{,}5\,\mathrm{cm}$, $|DA| = 3\,\mathrm{cm}$ a veľkosť $75°$ uhla, ktorý zvierajú priamky BC a AD, a ak navyše platí $|AB| \cdot |CD| = |AC|^2$. (*E. Kováč*)