2015/2016
65. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh IMO*

(*Súťaž sa konala 10. – 16. 7. 2016.*)

1. Trojuholník BCF má pravý uhol pri vrchole B. Nech A je bod priamky CF taký, že $|FA| = |FB|$ a bod F leží medzi bodmi A a C. Nech bod D je taký, že $|DA| = |DC|$ a priamka AC je osou uhla DAB. Nech bod E je taký, že $|EA| = |ED|$ a priamka AD je osou uhla EAC. Nech bod M je stred úsečky CF. Nech bod X je taký, že $AMXE$ je rovnobežník (pričom $AM \parallel EX$ a $AE \parallel MX$). Dokážte, že priamky BD, FX a ME prechádzajú tým istým bodom. (*Belgicko*)

2. Nájdite všetky kladné celé čísla n, pre ktoré sa dá do každého políčka tabuľky $n \times n$ napísať práve jedno z písmen *I*, *M* a *O* tak, že platia obe nasledujúce podmienky:

- V každom riadku aj v každom stĺpci obsahuje jedna tretina políčok písmeno *I*, jedna tretina políčok písmeno *M* a jedna tretina políčok písmeno *O*.
- V každom šikmom rade, ktorého počet políčok je násobkom troch, obsahuje jedna tretina políčok písmeno *I*, jedna tretina políčok písmeno *M* a jedna tretina políčok písmeno *O*.

Poznámka. Riadky a stĺpce tabuľky $n \times n$ sú označené kladnými celými číslami od 1 do n v obvyklom poradí, takže každé jej políčko zodpovedá dvojici kladných celých čísel (i, j), kde $1 \leqq i, j \leqq n$. Ak $n > 1$, tak tabuľka má $4n - 2$ *šikmých radov* dvoch typov. Šikmý rad prvého typu obsahuje práve všetky políčka (i, j) také, že $i + j$ je konštanta, a šikmý rad druhého typu obsahuje práve všetky políčka (i, j) také, že $i - j$ je konštanta. (*Austrália*)

3. Nech $\mathcal{P}$, kde $\mathcal{P} = A_1A_2 \ldots A_k$, je konvexný mnohouholník v rovine. Jeho vrcholy A_1, A_2, …, A_k majú celočíselné súradnice a ležia na kružnici. Nech S je obsah mnohouholníka $\mathcal{P}$. Nech n je nepárne kladné celé číslo také, že druhé mocniny dĺžok strán mnohouholníka $\mathcal{P}$ sú celé čísla deliteľné n. Dokážte, že $2S$ je celé číslo deliteľné n. (*Rusko*)

4. Množinu kladných celých čísel nazveme *voňavá*, ak obsahuje aspoň dva prvky a každý jej prvok má s nejakým iným jej prvkom aspoň jedného spoločného prvočíselného deliteľa. Nech $P(n) = n^2 + n + 1$. Nájdite najmenšie kladné celé číslo b také, že existuje nezáporné celé číslo a také, že množina

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

je voňavá. (*Luxembursko*)

5. Na tabuli je napísaná rovnica

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

s 2016 lineárnymi dvojčlenmi na každej strane. Nájdite najmenšiu hodnotu k, pre ktorú je možné vymazať práve k z týchto 4032 dvojčlenov tak, že na každej strane ostane aspoň jeden dvojčlen a výsledná rovnica nebude mať žiaden reálny koreň. (*Rusko*)

6. V rovine leží n úsečiek, kde $n \geqq 2$, a to tak, že každé dve majú spoločný vnútorný bod, ale žiadne tri rôzne nemajú spoločný bod. Bohuš pre každú z nich vyberie jeden jej koncový bod, položí naň žabu a otočí ju smerom k druhému koncovému bodu tejto úsečky. Potom bude $(n-1)$-krát tlieskať. Vždy keď tleskne, každá žaba okamžite skočí na nasledujúci priesečník na svojej úsečke. Žaba nikdy nemení smer svojich skokov. Bohuš si želá umiestniť žaby tak, aby žiadne dve z nich nikdy neboli v tom istom okamihu na tom istom priesečníku.

a) Dokážte, že ak n je nepárne, Bohuš si toto svoje želanie splniť môže.
b) Dokážte, že ak n je párne, Bohuš si toto svoje želanie splniť nemôže.

(*Česká rep., Josef Tkadlec*)