**2015/2016**
**65. ročník Matematickej olympiády** *Zadania úloh MEMO*

(*Súťaž sa konala 22. – 28. 8. 2016.*)

**Súťaž jednotlivcov:**

**I-1.** Nech $n \geqq 2$ je kladné celé číslo a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú reálne čísla spĺňajúce obidve podmienky
i) $x_j > -1$ pre $j = 1, 2, \ldots, n$;
ii) $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$.
Dokážte nerovnosť

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+x_j} \geqq \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{1+x_j^2}$$

a určte, kedy nastáva rovnosť. (*Rakúsko*)

**I-2.** Majme na tabuli napísaných $n \geqq 3$ kladných celých čísel. Ťah pozostáva z výberu troch čísel $a$, $b$, $c$ napísaných na tabuli, ktoré sú stranami nedegenerovaného nerovnostranného trojuholníka, a nahradením ich číslami $a+b-c$, $b+c-a$ a $c+a-b$. Dokážte, že nemôže existovať nekonečná postupnosť takýchto ťahov. (*Švajčiarsko*)

**I-3.** Nech $ABC$ je ostrouhlý trojuholník so stredom opísanej kružnice $O$, pričom $|\measuredangle BAC| > 45°$. Bod $P$ leží v jeho vnútri tak, že body $A$, $P$, $O$, $B$ ležia na kružnici a priamka $BP$ je kolmá na $CP$. Bod $Q$ leží na úsečke $BP$ tak, že $AQ$ a $PO$ sú rovnobežky. Dokážte, že $|\measuredangle QCB| = |\measuredangle PCO|$. (*Slovensko, Patrik Bak*)

**I-4.** Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že $f(a) + f(b)$ delí $2(a + b - 1)$ pre všetky $a, b \in \mathbb{N}$. (*Chorvátsko*)

**Súťaž družstiev:**

**T-1.** Určte všetky trojice reálnych čísel $(a, b, c)$, spĺňajúce sústavu rovníc

$$\begin{aligned} a^2 + ab + c &= 0, \\ b^2 + bc + a &= 0, \\ c^2 + ca + b &= 0. \end{aligned}$$

(*Chorvátsko*)

**T-2.** Nech $\mathbb{R}$ je množina reálnych čísel. Určte všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pre ktoré

$$f(x)f(y) = xf(f(y-x)) + xf(2x) + f(x^2)$$

platí pre všetky reálne čísla $x$ a $y$. (*Litva*)

**T-3.** Územie tvaru štvorca $8 \times 8$, ktorého strany majú orientáciu sever-juh a východ-západ, je tvorené 64 menšími štvorcovými pozemkami $1 \times 1$. Na každom jednotlivom pozemku môže stáť najviac jeden dom. Každý dom môže stáť len na jednom štvorcovom pozemku $1\times 1$. Hovoríme, že dom je *blokovaný od slnka*, ak stoja tri domy na pozemkoch bezprostredne na východ, západ a juh od neho. Aký je maximálny počet domov, ktoré môžu naraz stáť v tomto území tak, že žiaden z nich nie je blokovaný od slnka?

*Poznámka.* Podľa definície, domy na východnej, západnej a južnej hranici územia nie sú nikdy blokované od slnka. (*Chorvátsko*)

**T-4.** Trieda stredoškolských študentov písala test. Každá otázka bola bodovaná buď 1 bodom za správnu odpoveď, alebo 0 bodmi inak. Každá otázka bola správne zodpovedaná aspoň jedným študentom a nie všetci študenti dosiahli rovnaký celkový počet bodov. Dokáže, že v teste bola otázka s nasledujúcou vlastnosťou: Študenti, ktorí zodpovedali túto otázku správne, dosiahli vyšší priemerný celkový počet bodov ako tí, čo na túto otázku neodpovedali správne. (*Rakúsko*)

**T-5.** Nech $ABC$ je ostrouhlý trojuholník, pričom $|AB| \neq |AC|$. Označme $O$ stred jeho opísanej kružnice $\omega$. Priamka $AO$ pretína kružnicu $\omega$ druhýkrát v bode $D$ a priamku $BC$ v bode $E$. Kružnica opísaná trojuholníku $CDE$ pretína priamku $CA$ druhýkrát v bode $P$. Priamka $PE$ pretína priamku $AB$ v bode $Q$. Priamka cez bod $O$ rovnobežná s $PE$ pretína výšku trojuholníka $ABC$ z bodu $A$ v bode $F$. Dokážte, že $|FP| = |FQ|$. (*Chorvátsko*)

**T-6.** Daný je trojuholník $ABC$, pričom $|AB| \neq |AC|$. Body $K$, $L$, $M$ sú postupne stredmi strán $BC$, $CA$, $AB$. Kružnica so stredom $I$ vpísaná trojuholníku $ABC$ sa dotýka strany $BC$ v bode $D$. Priamka $g$, ktorá prechádza stredom úsečky $ID$ a je kolmá na $IK$, pretína priamku $LM$ v bode $P$. Dokážte, že $|\angle PIA| = 90°$. (*Poľsko*)

**T-7.** Kladné celé číslo $n$ nazveme *mozartovské číslo*, ak je v postupnosti $1, 2, \ldots, n$ napísaná každá cifra párny počet krát (v desiatkovej sústave). Dokážte nasledujúce tvrdenia:

a) Všetky mozartovské čísla sú párne.
b) Existuje nekonečne veľa mozartovských čísel.

(*Slovensko, Patrik Bak*)

**T-8.** Uvažujme rovnicu $a^2 + b^2 + c^2 + n = abc$, kde $a$, $b$, $c$ sú kladné celé čísla. Dokážte nasledujúce tvrdenia:

a) Pre $n = 2017$ rovnica nemá riešenie $(a, b, c)$.
b) Pre $n = 2016$ v každom riešení $(a, b, c)$ musí byť $a$ deliteľné tromi.
c) Pre $n = 2016$ má rovnica nekonečne veľa riešení $(a, b, c)$.

(*Rakúsko*)