2014/2015
64. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh výberového sústredenia*

(*Sústredenie sa konalo 19. – 26. 4. 2015.*)

1. Nájdite všetky celočíselné riešenia rovnice

$$(m^2 - n^2)^2 = 16n + 1.$$

2. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f\left(f(x)^2 + f(y)\right) = xf(x) + y.$$

3. Na tabuľke veľkosti $1 \times n$ ($n \geqq 2$) sa dvaja hráči striedajú v ťahoch, v ktorých vpisujú krížiky a krúžky do prázdnych políčok tabuľky. Prvý hráč vpisuje krížiky, druhý krúžky. Nie je dovolené, aby sa v tabuľke nachádzali dva rovnaké znaky na susedných políčkach. Hráč, ktorý už nemá ťah, prehráva. Ktorý z hráčov má víťaznú stratégiu?

4. Na strane BC trojuholníka ABC leží bod M taký, že ťažisko trojuholníka ABM leží na kružnici opísanej trojuholníku ACM a zároveň ťažisko trojuholníka ACM leží na kružnici opísanej trojuholníku ABM. Dokážte, že ťažnice trojuholníkov ABM a ACM z bodu M sú rovnako dlhé.

5. Nech n, k sú dané prirodzené čísla. Na stole je $2n$ listov papiera a na každom je napísané číslo 1. V jednom kroku vyberieme dva papiere a ak na nich sú čísla a, b, tak na oba z nich napíšeme $a + b$. Dokážte, že po nk krokoch bude súčet čísel na všetkých papieroch aspoň $n \cdot 2^{k+1}$.

6. Je daný ostrouhlý trojuholník ABC, pričom $|AC| > |AB|$. Stred jeho opísanej kružnice označme O. Os uhla BAC pretína opísanú kružnicu tomuto trojuholníku v bode $M \neq A$. Nech Γ je kružnica s priemerom AM. Osi uhlov AOB a AOC pretínajú Γ v bodoch P a Q. Na priamke PQ je zvolený bod R tak, že $|MR| = |AR|$. Dokážte, že $AR \parallel BC$. (Os uhla chápeme ako polpriamku.)

7. Nech $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ sú po dvoch nesúdeliteľné prirodzené čísla také, že a_1 je prvočíslo a $a_1 \geqq n + 2$. Na reálnej osi na intervale mm$I = \langle 0, a_1 a_2 \ldots a_n \rangle$ vyznačíme všetky celé čísla, ktoré sú deliteľné aspoň jedným z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Tieto body rozdelia mm$I$ na niekoľko menších úsečiek. Dokážte, že ak sčítame druhé mocniny ich dĺžok, tak dostaneme číslo deliteľné a_1.

8. Majme pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole B. Nech BD je výška z vrcholu B na stranu AC (bod D leží na AC). Ďalej označme P, Q a I postupne stredy kružníc vpísaných trojuholníkom ABD, CBD a ABC. Ukážte, že stred kružnice opísanej trojuholníku PIQ leží na priamke AC.

9. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky x z definičného oboru platí

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 + \frac{1}{x(1-x)}.$$

10. Nech a, b, c sú prirodzené čísla. Dokážte, že ak

$$(abc)^n \mid \left((a^n-1)(b^n-1)(c^n-1)+1\right)^3$$

pre každé prirodzené číslo n, tak potom nutne $a = b = c$.

11. Mucha a k pavúkov stoja v nejakých mrežových bodoch mriežky 2015×2015. Mucha a pavúky sa hýbu v ťahoch: najprv ide mucha, a buď ostane na svojom mieste, alebo sa pohne do susedného mrežového bodu. Potom idú naraz všetky pavúky, a každý z nich môže ostať na svojom mieste alebo sa pohnúť do susedného bodu (v jednom bode môže byť aj viac pavúkov). Pavúky a mucha poznajú vždy pozície všetkých ostatných.

a) Nájdite najmenšie k také, že k pavúkov dokáže vždy chytiť v konečnom čase muchu, bez ohľadu na ich počiatočné rozmiestnenie.

b) Odpovedzte na rovnakú otázku pre trojrozmernú mriežku $2015 \times 2015 \times 2015$.

(Mrežové body sú susedné práve vtedy, keď majú práve jednu rôznu súradnicu, a rozdiel v danej súradnici je 1. Pavúky chytia muchu, ak je aspoň jeden z nich v rovnakom bode ako mucha.)

12. Slovom budeme označovať konečnú postupnosť písmen z nejakej abecedy. Slovo nazveme periodické, ak sa dá rozložiť na aspoň dve rovnaké podslová (napr. *ababab* a *abcabc* sú periodické, zatiaľ čo *ababa* a *aabb* nie sú). Dokážte, že ak slovo má takú vlastnosť, že po prehodení akýchkoľvek dvoch susedných písmen je periodické, tak potom toto slovo má všetky písmená rovnaké.

13. Zistite, či existuje nekonečná postupnosť x_1, x_2, $\ldots$ prirodzených čísel, ktorá obsahuje práve 10^{2016} rôznych čísel (napr. postupnosť 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, … obsahuje tri rôzne čísla), pričom pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$x_{n+2} = \operatorname{nsd}(x_n, x_{n+1}) + 2016.$$

14. Nech a, b, c sú kladné reálne čísla. Dokážte nerovnosť

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geqq \frac{3}{5}.$$

15. Nech ABC je trojuholník so stredom opísanej kružnice v bode O a nech D je priesečník osi uhla BAC a úsečky BC. Ďalej nech M je taký bod, že $MC \perp BC$ a $MA \perp AD$ a nech priamky BM a OA sa pretínajú v bode P. Dokážte, že priamka BC je dotyčnicou ku kružnici, ktorá má stred v bode P a prechádza bodom A.

16. Nájdite všetky dvojice (x, y) kladných celých čísel, ktoré sú riešením rovnice

$$\sqrt[3]{7x^2 - 13xy + 7y^2} = |x - y| + 1.$$

17. Pre danú n-ticu reálnych čísel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definujeme jej *cenu* ako maximum z čísel

$$|x_1|, \quad |x_1 + x_2|, \quad |x_1 + x_2 + x_3|, \quad \ldots, \quad |x_1 + x_2 + \ldots + x_n|.$$

Daných je n čísel (nie nutne rôznych). Dorota a Lucia ich chcú usporiadať do n-tice s nízkou cenou. Dôsledná Dorota vyskúša všetky možné n-tice a nájde najmenšiu možnú cenu D. Lenivá Lucia zvolí x_1 tak, že hodnota $|x_1|$ je najmenšia možná; zo zvyšných čísel zvolí x_2 tak, že hodnota $|x_1 + x_2|$ je najmenšia možná, atď. Inými slovami, v i-tom kroku Lucia spomedzi zvyšných čísel vyberie x_i tak, aby hodnota $|x_1 + x_2 + \ldots + x_i|$ bola najmenšia možná. Ak má v niektorom kroku na výber viac čísel dávajúcich najmenšiu hodnotu, zvolí jedno z nich náhodne. Takto napokon dostane n-ticu s cenou L. Nájdite najmenšiu možnú konštantu c takú, že pre každé prirodzené číslo n, pre každých n reálnych čísel a pre každú možnú n-ticu, ktorú Lucia vie dostať, platí $L \leqq cD$.

18. Daný je trojuholník ABC. Vnútri strán BC, CA a AB sú postupne zvolené body K, L a M, pričom priamky AK, BL a CM sa pretínajú v jednom bode. Dokážte, že spomedzi trojuholníkov ALM, BMK a CKL vieme vždy vybrať dva tak, že súčet polomerov im vpísaných kružníc je väčší alebo rovný polomeru kružnice vpísanej trojuholníku ABC.