2000/2001
50. ročník MO *Zadania úloh krajského kola kategórie A*

(*Súťaž sa konala v utorok 16. januára 2001.*)

1. Nájdite najmenšie štvorciferné číslo n, pre ktoré má sústava

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + y^2x + x^2y &= n, \\ x^2 + y^2 + x + y &= n + 1 \end{aligned}$$

iba celočíselné riešenia. (*J. Zhouf*)

2. Určte všetky reálne čísla s a t, pre ktoré je grafom funkcie

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + s}{t|x-1| + x + 7}$$

lomená čiara zložená z dvoch polpriamok. (*P. Černek*)

3. Je daná kružnica $k(S, r)$ a na nej body M, N také, že uhol MSN je ostrý. Ľubovoľným bodom X menšieho z oblúkov MN veďme rovnobežku s priamkou MS a označme Y jej priesečník s úsečkou SN. Zostrojte taký bod X, pre ktorý je obsah trojuholníka SXY maximálny. (*P. Černek*)

4. Určte všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x a y platí

$$f\bigl(x^2 + f(y)\bigr) = (x-y)^2 \cdot f(x+y).$$

(*P. Calábek*)