2015/2016
65. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh výberového sústredenia*

(*Sústredenie sa konalo 17. – 24. 4. 2016.*)

1. Určte všetky hodnoty n, pre ktoré je možné rozdeliť trojuholník na n menších trojuholníkov, pričom žiadne tri vrcholy neležia na priamke a z každého bodu vychádza rovnaký počet úsečiek.

2. V ostrouhlom trojuholníku ABC leží bod D na strane BC. Nech body O_1, O_2 označujú stredy opísaných kružníc trojuholníkom ABD a ACD. Dokážte, že priamka spájajúca stred opísanej kružnice ABC a ortocentrum trojuholníka O_1O_2D je rovnobežná s BC.

3. Pre dané $a \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$, dokážte:

a) Existuje práve jedna postupnosť reálnych čísel $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ spĺňajúca

$$x_0 = x_{n+1} = 0 \qquad \text{a} \qquad \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}) = x_i + x_i^3 - a^3, \quad \text{pre } i = 1, 2, \ldots, n.$$

b) Postupnosť $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ z a) spĺňa $|x_i| \leqq |a|$ pre $i = 0, 1, \ldots, n+1$.

4. Nech n je kladné celé číslo a S_n je množina všetkých kladných deliteľov čísla n (vrátane 1 a n). Dokážte, že najviac polovica čísel v S_n má ako poslednú cifru 3.

5. Nech $ABCD$ je tetivový štvoruholník vpísaný do kružnice so stredom O. Nech E, F sú postupne stredy oblúkov AB, CD, ktoré neobsahujú zvyšné vrcholy štvoruholníka. Bodmi E, F veďme priamky rovnobežné s uhlopriečkami štvoruholníka $ABCD$. Tieto štyri priamky sa pretínajú v bodoch E, F, K, L. Dokážte, že body K, O, L ležia na jednej priamke.

6. Nech funkcia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ spĺňa pre všetky pätice reálnych čísel a, b, c, d, e rovnosť

$$f(a,b,c) + f(b,c,d) + f(c,d,e) + f(d,e,a) + f(e,a,b) = a + b + c + d + e.$$

Dokážte, že pre všetky reálne čísla x_1, x_2, $\ldots$, x_n, kde $n \geqq 5$, platí

$$f(x_1,x_2,x_3) + f(x_2,x_3,x_4) + \ldots + f(x_{n-1},x_n,x_1) + f(x_n,x_1,x_2) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

7. Nech $M_0 \subset \mathbb{N}$ je neprázdna a konečná množina. Vytvárame postupne množiny M_1, M_2, $\ldots$ nasledujúcim spôsobom: V n-tom kroku zvolíme ľubovoľné prirodzené číslo b_n a definujeme

$$M_n = \{b_n m + 1;\ m \in M_{n-1}\}.$$

Dokážte, že existuje prirodzené číslo k také, že v množine M_k sa nenachádzajú dve rôzne prirodzené čísla také, že jedno z nich delí druhé.

8. Nesmrteľná žaba skáče po reálnej číselnej osi. Začína na čísle 0 a v n-tom skoku skočí o 2^n+1, a to ľubovoľným smerom. Zistite, či žaba vie skákať tak, aby na každé prirodzené číslo niekedy doskočila.

9. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC, ktorého priesečník výšok označme H. Nech D je taký bod, že štvoruholník $HABD$ je rovnobežníkom (t. j. $AB \parallel HD$ a $AH \parallel BD$). Označme E ten bod ležiaci na priamke DH, pre ktorý priamka AC prechádza stredom úsečky HE. Bod F je ďalším priesečníkom priamky AC s kružnicou opísanou trojuholníku DCE. Dokážte, že $|EF| = |AH|$.

10. Postupnosť $a_1, a_2, \ldots$ kladných reálnych čísel spĺňa nerovnosť

$$a_{k+1} \geqq \frac{ka_k}{a_k^2 + k - 1}$$

pre každé kladné celé číslo k. Dokážte, že

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqq n$$

pre každé $n \geqq 2$.

11. Pre danú konečnú množinu A kladných celých čísel nazveme jej rozdelenie na dve disjunktné neprázdne množiny A_1, A_2 *pekné*, ak najmenší spoločný násobok všetkých prvkov množiny A_1 je rovný najväčšiemu spoločnému deliteľovi všetkých prvkov množiny A_2. Určte najmenšiu hodnotu n takú, že existuje n-prvková množina A majúca práve 2015 pekných rozdelení.

12. Po štvorcovej tabuľke $(4n + 2) \times (4n + 2)$ sa pohybuje korytnačka len medzi štvorčekmi susediacimi hranou. Korytnačka spraví nasledovnú prechádzku: začne v rohovom štvorčeku tabuľky, prejde každým štvorčekom práve raz a skončí na mieste kde začala. V závislosti od n určte najväčšie prirodzené číslo k také, že v tabuľke musí existovať riadok alebo stĺpec, do ktorého korytnačka vstúpila aspoň k-krát (vstúpiť do riadku/stĺpca znamená presunúť sa z iného riadku/stĺpca do tohto riadku/stĺpca).

13. Nájdite všetky n také, že pre ľubovoľnú n-ticu nezáporných reálnych čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí

$$\max_{i=1,\ldots,n} \{2x_i x_{i+1}\} \geqq \min_{j=1,\ldots,n} \{x_j^2 + x_{j+1}^2\},$$

pričom $x_1 = x_{n+1}$.

14. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ také, že
- ▷ $f(n) = n$ pre $0 \leqq n \leqq 2016$,
- ▷ $f(n^2 + m^2) = f(n)^2 + f(m)^2$ pre $m, n \in \mathbb{N}_0$.

15. V tetivovom štvoruholníku $ABCD$ sa dotyčnice k jeho opísanej kružnici v bodoch A, C pretínajú na priamke BD. Označme M stred AC. Rovnobežka s BC cez D pretína priamku BM v bode E a kružnicu opísanú $ABCD$ v bode F, $F \neq D$. Dokážte, že $BCEF$ je rovnobežník.

16. Nech I je stred vpísanej kružnice trojuholníka ABC, pričom $|AB| \neq |AC|$. Označme M stred strany BC a D bod dotyku vpísanej kružnice so stranou BC. Kružnica so stredom v bode M a polomerom MD pretína priamku AI v bodoch P a Q. Dokážte, že $|\measuredangle BAC| + |\measuredangle PMQ| = 180°$.

17. Nájdite všetky nepárne prirodzené čísla M, pre ktoré postupnosť $a_0, a_1, a_2, \ldots$ definovaná ako $a_0 = \frac{1}{2}(2M + 1)$ a $a_{k+1} = a_k \lfloor a_k \rfloor$ pre $k = 0, 1, 2, \ldots$ obsahuje aspoň jedno celé číslo.

18. Na párty s 2016 hosťami bolo medzi ľubovoľnými 7 hosťami najviac 12 podaní rúk. Určte najväčší možný celkový počet podaní rúk.