2009/2010
59. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie B*

(*Termín odovzdania: v pondelok 11. januára 2010.*)

1. Na stole ležia tri kôpky zápaliek: v jednej 2 009, v druhej 2 010 a v poslednej 2 011. Hráč, ktorý je na ťahu, zvolí dve kôpky a z každej z nich odoberie po jednej zápalke. V hre sa pravidelne striedajú dvaja hráči. Hra končí, akonáhle niektorá kôpka zmizne. Vyhráva ten hráč, ktorý urobil posledný ťah. Popíšte stratégiu jedného z hráčov, ktorá mu zaručí výhru. (*Ján Mazák*)

2. Na tabuli je napísané štvorciferné číslo, ktoré má presne šesť kladných deliteľov, z ktorých práve dva sú jednociferné a práve dva dvojciferné. Väčší z dvojciferných deliteľov je druhou mocninou prirodzeného čísla. Určte všetky čísla, ktoré môžu byť na tabuli napísané. (*Peter Novotný*)

3. V rovine je daná úsečka AB. Zostrojte rovnobežník $ABCD$, pre ktorého stredy strán AB, CD, DA označené postupne K, L, M platí: body A, B, L, D ležia na jednej kružnici a aj body K, L, D, M ležia na jednej kružnici. (*Jaroslav Švrček*)

4. Nájdite 2 009 po sebe idúcich štvorciferných čísel, ktorých súčet je súčinom troch po sebe idúcich prirodzených čísel. (*Radek Horenský*)

5. Vnútri kratšieho oblúka AB kružnice opísanej rovnostrannému trojuholníku ABC je zvolený bod D. Tetiva CD pretína stranu AB v bode E. Dokážte, že trojuholník so stranami dĺžok $|AE|$, $|BE|$, $|CE|$ je podobný s trojuholníkom ABD. (*Pavel Leischner*)

6. Reálne čísla a, b majú túto vlastnosť: rovnica $x^2-ax+b-1=0$ má v množine reálnych čísel dva rôzne korene, ktorých rozdiel je kladným koreňom rovnice $x^2-ax+b+1=0$.

a) Dokážte nerovnosť $b>3$.

b) Pomocou b vyjadrite korene oboch rovníc. (*Jaromír Šimša*)