2000/2001
50. ročník MO *Zadania úloh celoštátneho kola kategórie A*

(Súťaž sa konala 1. – 4. 4. 2001.)

1. Určte všetky mnohočleny $P(x)$ s reálnymi koeficientmi také, že pre všetky reálne čísla x platí

$$\bigl(P(x)\bigr)^2 + P(-x) = P(x^2) + P(x).$$

(*P. Calábek*)

2. V rovine je daný trojuholník PQX, pričom $|PQ| = 3\,\mathrm{cm}$, $|PX| = 2{,}6\,\mathrm{cm}$, $|QX| = 3{,}8\,\mathrm{cm}$. Zostrojte pravouhlý trojuholník ABC tak, aby sa jeho vpísaná kružnica dotýkala prepony AB v bode P, odvesny BC v bode Q a aby bod X ležal na priamke AC.
(*J. Šimša*)

3. Nájdite všetky trojice reálnych čísel a, b, c, pre ktoré je množinou všetkých riešení nerovnice

$$\sqrt{2x^2 + ax + b} > x - c$$

s neznámou x množina $(-\infty, 0\rangle \cup (1, \infty)$. (*P. Černek*)

4. V istom jazyku je n písmen. Skupina písmen (napísaných za sebou) je slovom práve vtedy, keď sa medzi žiadnymi dvoma rovnakými písmenami nenachádzajú dve rovnaké písmená. Určte počet všetkých slov maximálnej dĺžky. (*K. Černeková*)

5. Z papiera bol vystrihnutý rovnoramenný lichobežník $C_1AB_2C_2$ s kratšou základňou B_2C_2. Pätu kolmice zo stredu D ramena C_1C_2 na základňu AC_1 označíme B_1. Po prehnutí papiera pozdĺž úsečiek DB_1, AD a AC_2 sa body C_1, C_2 premiestnili v priestore do jedného bodu C a body B_1, B_2 do bodu B. Vznikol tak model štvorstena $ABCD$ s objemom $64\,\mathrm{cm}^3$. Určte dĺžky strán pôvodného lichobežníka. (*P. Leischner*)

6. Dané sú prirodzené čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a funkcia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ taká, že $f(x) = 1$ pre každé celé $x < 0$ a

$$f(x) = 1 - f(x - a_1)\, f(x - a_2) \cdots f(x - a_n)$$

pre každé celé $x \geqq 0$. Dokážte, že existujú prirodzené čísla s a t také, že pre každé celé $x > s$ platí $f(x + t) = f(x)$. (*P. Kaňovský*)