1999/2000
49. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie A*

(*Termín odovzdania: v utorok 23. novembra 1999.*)

1. Nech $P(x)$, $Q(x)$ sú kvadratické mnohočleny také, že čísla -22, 7, 13 sú tri z koreňov rovnice $P(Q(x)) = 0$. Určte štvrtý koreň tejto rovnice. (*P. Černek*)

2. Nech K, L, M sú po rade vnútorné body strán BC, CA, AB daného trojuholníka ABC také, že kružnice vpísané dvojiciam trojuholníkov ABK a CAK, BCL a ABL, CAM a BCM majú vonkajší dotyk. Potom platí

$$|BK| \cdot |CL| \cdot |AM| = |CK| \cdot |AL| \cdot |BM|.$$

Dokážte.
Poznámka. Z uvedenej rovnosti vyplýva na základe Cèvovej vety, že priamky AK, BL, CM prechádzajú spoločným bodom. (*J. Švrček*)

3. V obore kladných reálnych čísel riešte sústavu

$$\begin{aligned} \sqrt{xy} + \sqrt{xz} - x &= a, \\ \sqrt{yz} + \sqrt{yx} - y &= b, \\ \sqrt{zx} + \sqrt{zy} - z &= c, \end{aligned}$$

kde a, b, c sú dané kladné čísla. (*R. Horenský*)

4. V rovine je daných 1 999 zhodných trojuholníkov s obsahom 1, ktoré sú obrazmi jedného trojuholníka v rôznych posunutiach. Ak je prienikom všetkých daných trojuholníkov množina $\mathcal{M}$, ktorá obsahuje ťažisko každého z nich, je obsah množiny $\mathcal{M}$ aspoň $\frac{1}{9}$. Dokážte. (*M. Beneš*)

5. Daná je funkcia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taká, že $f(n) = 1$, ak je n nepárne, a $f(n) = k$ pre každé párne číslo $n = 2^k l$, kde k je prirodzené číslo a l číslo nepárne. Určte najväčšie prirodzené číslo n, pre ktoré platí

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) \leqq 123\,456.$$

(*S. Trávníček*)

6. Daný je štvorboký ihlan $ABCDV$ s podstavou $ABCD$. Jeho hrany AB, CD sú rovnobežné a roviny ABV a CDV navzájom kolmé. Označme P pätu výšky z vrcholu V na stranu AB v trojuholníku ABV a Q pätu výšky z vrcholu V na stranu CD v trojuholníku CDV. Dokážte nerovnosť

$$|AV|^2 + |BV|^2 + |CV|^2 + |DV|^2 \geqq |PQ|^2 + 2(S_{ABV} + S_{CDV} + S_{PQV}),$$

kde S_{XYZ} označuje obsah trojuholníka XYZ. Zistite tiež, kedy platí rovnosť.
(*J. Bábeľa*)