1999/2000
49. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie B*

(*Termín odovzdania: v utorok 11. januára 2000.*)

1. Pre ktoré reálne čísla t má funkcia $f(x) = 5x + 44 + t \cdot |x - 2| - 3 \cdot |x - t|$ maximum rovné 0? (*P. Černek*)

2. Označme S stred kružnice vpísanej ľubovoľnému trojuholníku ABC. Dokážte, že rovnosť $|AS| \cdot |BS| = |CS| \cdot |AB|$ platí práve vtedy, keď je uhol ACB pravý. (*J. Švrček*)

3. Určte reálne čísla a, b, pre ktoré má sústava

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2z^2 &= 16, \\ xyz^2 + xy + z^2 &= a, \\ x + y + 2z &= b \end{aligned}$$

v obore reálnych čísel práve jedno riešenie. (*J. Bábeľa*)

4. Sú dané kružnice k a l s rôznymi polomermi, ktoré sa dotýkajú zvonku v bode T. Priesečníkom M dvoch ich spoločných dotyčníc veďme sečnicu s oboch kružníc. Označme X ten z oboch priesečníkov kružnice k so sečnicou s, ktorý je vzdialenejší od bodu M. Podobne označme Y ten z oboch priesečníkov kružnice l so sečnicou s, ktorý je vzdialenejší od bodu M. Nech P je taký bod, že $XTYP$ je rovnobežník. Určte množinu bodov P zodpovedajúcich všetkým takým sečniciam s. (*J. Zhouf*)

5. Deväťsten $ABCDEFGHV$ vznikol zlepením kocky $ABCDEFGH$ a pravidelného štvorbokého ihlana $EFGHV$. Na každú stenu tohto deväťstena sme napísali číslo. Štyri z napísaných čísel sú 25, 32, 50 a 57. Pre každý vrchol deväťstena $ABCDEFGHV$ sčítame čísla na všetkých stenách, ktoré ho obsahujú. Dostaneme tak deväť rovnakých súčtov. Určte zvyšných päť čísel napísaných na stenách tohto telesa. (*K. Černeková*)

6. Daný je rovnostranný trojuholník XYZ s ťažiskom T a stranou dĺžky 5 cm. Zostrojte rovnobežník $ABCD$ s obsahom $8\,\mathrm{cm}^2$ a stranou AB dĺžky 2 cm tak, aby body X, Y, Z, T ležali postupne na priamkach AB, BC, CD, DA. (*M. Krállová*)