1999/2000
49. ročník MO *Zadania úloh krajského kola kategórie A*

(*Súťaž sa konala v utorok 18. januára 2000.*)

1. Nech $P(x)$ je kvadratický trojčlen. Určte všetky korene rovnice

$$P(x^2 + 4x - 7) = 0,$$

ak viete, že medzi nimi je číslo 1 a aspoň jeden koreň je dvojnásobný. (*P. Černek*)

2. Daný je rovnoramenný lichobežník $UVST$, v ktorom $3|ST| < 2|UV|$. Zostrojte rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB tak, aby body B, C ležali na priamke VS, bod U na priamke AB a bod T bol ťažiskom trojuholníka ABC. (*P. Černek*)

3. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné čísla a, b platí nerovnosť

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \leqq \sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}.$$

Zistite, kedy nastane rovnosť. (*J. Šimša*)

4. Určte všetky konvexné štvoruholníky $ABCD$ s nasledujúcou vlastnosťou: Vnútri štvoruholníka $ABCD$ existuje bod E taký, že každá priamka, ktorá prechádza týmto bodom a pretína strany AB a CD vo vnútorných bodoch, delí štvoruholník $ABCD$ na dve časti s rovnakým obsahom. Svoju odpoveď zdôvodnite. (*P. Černek, J. Švrček*)