SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

66. ročník, školský rok 2016/2017

Domáce kolo

Kategórie A, B, C – zadania úloh

Milí žiaci stredných škôl,

Slovenská komisia Matematickej olympiády vás pozýva zúčastniť sa 66. ročníka Matematickej olympiády – súťaže pre žiakov stredných škôl v našej republike.

Kategória **A** je určená žiakom maturitných a predmaturitných ročníkov.
Kategória **B** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 2 roky.
Kategória **C** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 3 roky.
Pre žiakov prvých, prípravných ročníkov bilingválnych gymnázií (s päťročným štúdiom) je určená kategória **Z9**.

Organizácia súťaže v kategóriách **A, B, C**:

V **domácom kole** na vás čaká **6 úloh**, ktoré nájdete v tomto letáku. Ich riešenia (nie nutne všetkých úloh) odovzdajte svojmu učiteľovi matematiky do **28. novembra 2016** (kategória **A**) a do **20. januára 2017** (kategórie **B** a **C**). Ten ich opraví, ohodnotí podľa stupnice 1 – *výborne*, 2 – *dobre*, 3 – *nevyhovuje*. Potom ich s vami rozoberie, vysvetlí vám prípadné nedostatky a oboznámi vás so správnym riešením. Ak budú vaše riešenia aspoň štyroch úloh ohodnotené ako výborné alebo dobré, budete pozvaní do **školského kola**. Tam budete v stanovenom čase samostatne riešiť ďalšie tri úlohy. Opravené riešenia školského aj domáceho kola úspešných riešiteľov školského kola potom váš učiteľ matematiky pošle na príslušnú krajskú komisiu MO. Tá na základe výsledkov pozve najlepších účastníkov školského kola do **krajského kola**, v ktorom budú v priebehu štyroch hodín samostatne riešiť štyri úlohy. O poradí v krajských kolách rozhoduje súčet bodov získaných za jednotlivé úlohy. Napríklad ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X a práve traja žiaci (vrátane X) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X, tak žiakovi X patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom určujeme umiestnenie všetkých žiakov. Žiadne iné kritériá nie sú prípustné.

V kategórii **A** budú ešte najlepší riešitelia krajského kola z celej republiky súťažiť v **celoštátnom kole**, kde budú dva dni (po 4,5 hodinách) riešiť dve trojice úloh. Z úspešných riešiteľov celoštátneho kola sa (na výberovom sústredení) vyberá družstvo Slovenskej republiky na Medzinárodnú matematickú olympiádu (ktorá bude v júli 2017 v Brazílii), na medzištátne stretnutie s Českou republikou a Poľskom (bude v júni 2017 v Poľsku) a na Stredoeurópsku matematickú olympiádu (bude v auguste alebo septembri 2017 v Litve).

Pre najlepších riešiteľov MO kategórie **C** sa v máji 2017 uskutoční Česko-poľsko-slovenské stretnutie juniorov. Výber slovenského družstva prebehne nasledovne: Riešenia najlepších riešiteľov krajského kola kategórie C budú centrálne zozbierané a jednotne ohodnotené. Podľa poradia po tomto ohodnotení budú oslovení prví šiesti s ponukou účasti na súťaži (v prípade rovnosti bodov sa ako doplňujúce kritérium môže brať do úvahy účasť vo vyššej kategórii MO, účasť v korešpondenčnom seminári, či účasť v Z9 v predošlom šk. roku).

Termíny 66. ročníka Matematickej olympiády:

	školské kolo	krajské kolo	celoštátne kolo
Kategória A	06. 12. 2016	10. 01. 2017	26. – 29. marca 2017
Kategórie B, C	31. 01. 2017	11. 04. 2017	—

Matematickú olympiádu vyhlasuje *Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu SR* v spolupráci s *Jednotou slovenských matematikov a fyzikov* a *Slovenskou komisiou Matematickej olympiády*. Súťaž riadi *Slovenská komisia MO* a v krajoch ju riadia *krajské komisie MO*. Na jednotlivých školách ju zaisťujú učitelia matematiky. Vy sa obracajte na svojho učiteľa matematiky. Celoštátne kolo MO, tlač materiálov MO a ich distribúciu po organizačnej stránke zabezpečuje IUVENTA v tesnej súčinnosti so Slovenskou komisiou Matematickej olympiády.

Riešenia súťažných úloh vypracujte čitateľne na listy formátu A4. Každú úlohu začnite na novom liste a uveďte vľavo hore záhlavie podľa vzoru:

```
Emil Kruh
I.C, Gymnázium L. Eulera, Okrúhle nám. 5, 940 01 Nové Zámky
Kraj Nitra
2016/2017
C - I - 3
```

Posledný údaj je označenie úlohy podľa tohto letáka. Zadania úloh nemusíte opisovať. Ak sa vám riešenie nezmestí na jeden list, uveďte na ďalších listoch vľavo hore svoje meno a označenie úlohy a strany očíslujte. **Riešenie píšte ako výklad, v ktorom sú uvedené všetky podstatné úvahy tak, aby bolo možné sledovať váš myšlienkový postup.**

Veľa radosti z úspešného riešenia úloh vám všetkým praje

Mgr. Peter Novotný, PhD.
predseda Slovenskej komisie MO

Informácie o MO a archív zadaní a riešení úloh nájdete na internetových stránkach:
`http://www.olympiady.sk` `http://skmo.sk` `http://www.imo-official.org`

Radi by sme upozornili učiteľov a žiakov na Korešpondenčný matematický seminár (KMS) organizovaný združením Trojsten. Táto súťaž je veľmi efektívnou formou prípravy na MO a tiež zdokonaľovania sa v matematickom myslení ako takom. K tomu prispievajú aj záverečné sústredenia pre najlepších riešiteľov. Pre riešiteľov MO kategórií B a C je v KMS určená kategória ALFA. Pre lepších a skúsenejších z kategórie B a pre kategóriu A je kategória BETA. Pre tých, ktorí majú ambície uspieť na celoštátnom kole MO kategórie A, je určený korešpondenčný seminár *i*KS, ktorý organizuje KMS v spolupráci s Matematickým korešpondenčným seminárom v Prahe. Viac informácií o KMS a o *i*KS nájdete na `http://kms.sk` a `http://iksko.org`.

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

66. ročník Školský rok 2016 / 2017 Domáce kolo

****

KATEGÓRIA A

A – I – 1

Nájdite všetky prvočísla p, pre ktoré existuje prirodzené číslo n také, že p^n+1 je treťou mocninou niektorého prirodzeného čísla. (*Ján Mazák, Róbert Tóth*)

A – I – 2

Máme n^2 prázdnych škatúľ; každá z nich má štvorcové dno. Výška aj šírka každej škatule je prirodzené číslo z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Každé dve škatule sa líšia aspoň v jednom z týchto dvoch rozmerov. Jednu škatuľu je dovolené vložiť do druhej, ak má oba rozmery menšie a aspoň jeden z rozmerov má aspoň o 2 menší. Takto môžeme vytvoriť postupnosť škatúľ vložených navzájom do seba (t. j. prvá škatuľa je vnútri druhej, druhá škatuľa je vnútri tretej atď.). Každú takúto sadu uložíme na inú poličku. Určte najmenší možný počet poličiek potrebný na uskladnenie všetkých n^2 škatúľ. (*Peter Novotný*)

A – I – 3

Daný je ostrouhlý trojuholník ABC s výškami AK, BL, CM. Dokážte, že trojuholník ABC je rovnoramenný práve vtedy, keď platí rovnosť

$$|AM| + |BK| + |CL| = |AL| + |BM| + |CK|.$$

(*Jaromír Šimša*)

A – I – 4

Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ktoré majú pre každé prirodzené číslo m nasledujúcu vlastnosť: ak označíme $d_1, d_2, \dots, d_n$ všetky delitele čísla m, platí

$$f(d_1) \cdot f(d_2) \cdot \ldots \cdot f(d_n) = m.$$

(*Pavel Calábek*)

A – I – 5

Vnútri základne AB rovnoramenného trojuholníka ABC leží bod D. Zvoľme bod E tak, aby $ADEC$ bol rovnobežník. Na polpriamke opačnej k ED leží bod F taký, že $|EB| = |EF|$. Dokážte, že dĺžka tetivy, ktorú vytína priamka BE na kružnici opísanej trojuholníku ABF, je dvojnásobkom dĺžky úsečky AC. (*Jan Kuchařík, Patrik Bak*)

A – I – 6

Vyriešte v obore reálnych čísel sústavu rovníc

$$\begin{aligned} k - x^2 &= y,\\ k - y^2 &= z,\\ k - z^2 &= u,\\ k - u^2 &= x \end{aligned}$$

s reálnym parametrom k z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. (*Jaroslav Švrček*)

KATEGÓRIA B

B – I – 1

Každému vrcholu pravidelného 66-uholníka priradíme jedno z čísel 1 alebo -1. Ku každej úsečke spájajúcej dva jeho vrcholy (strane či uhlopriečke) potom pripíšeme súčin čísel v jej krajných bodoch a všetky čísla pri jednotlivých úsečkách sčítame. Určte najmenšiu možnú a najmenšiu nezápornú hodnotu takéhoto súčtu. (*Pavel Calábek*)

B – I – 2

Určte všetky dvojice (a, b) reálnych parametrov, pre ktoré má sústava rovníc

$$\begin{aligned} |x| + y &= a, \\ 2|y| - x &= b \end{aligned}$$

práve tri riešenia v obore reálnych čísel, a pre každú z nich tieto riešenia určte.

(*Jaroslav Švrček*)

B – I – 3

Na kružnici k sú zvolené body A, B, C, D, E (v tomto poradí) tak, že platí $|AB| = |CD| = |DE|$. Dokážte, že ťažiská trojuholníkov ABD, ACD a BDE ležia na kružnici sústrednej s kružnicou k.

(*Tomáš Jurík*)

B – I – 4

Nájdite všetky osemciferné čísla $*2*0*1*6$ so štyrmi neznámymi *nepárnymi* ciframi vyznačenými hviezdičkami, ktoré sú deliteľné číslom 2 016. (*Jaromír Šimša*)

B – I – 5

Daný je pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB. Označme D pätu jeho výšky z vrcholu C a M, N priesečníky osí uhlov ADC, BDC so stranami AC, BC. Dokážte, že platí

$$2|AM| \cdot |BN| = |MN|^2.$$

(*Jaroslav Švrček*)

B – I – 6

Určte všetky reálne čísla r také, že nerovnosť $a^3 + ab + b^3 \geqq a^2 + b^2$ platí pre všetky dvojice reálnych čísel a, b, ktoré sú väčšie alebo rovné r. (*Ján Mazák*)

KATEGÓRIA C

C – I – 1

Dokážte, že pre ľubovoľné reálne číslo a platí nerovnosť

$$a^2 + \frac{1}{a^2 - a + 1} \geqq a + 1.$$

Určte, kedy nastáva rovnosť. (*Jaroslav Švrček*)

C – I – 2

Nájdite najväčšie prirodzené číslo d, ktoré má tú vlastnosť, že pre ľubovoľné prirodzené číslo n je hodnota výrazu $V(n) = n^4 + 11n^2 - 12$ deliteľná číslom d. (*Aleš Kobza*)

C – I – 3

Päta výšky z vrcholu C v trojuholníku ABC delí stranu AB v pomere $1 : 2$. Dokážte, že pri zvyčajnom označení dĺžok strán trojuholníka ABC platí nerovnosť $3|a - b| < c$.

(*Jaroslav Švrček*)

C – I – 4

Nájdite všetky trojčleny $P(x) = ax^2 + bx + c$ s celočíselnými koeficientmi a, b, c, pre ktoré platí $P(1) < P(2) < P(3)$ a zároveň $\big(P(1)\big)^2 + \big(P(2)\big)^2 + \big(P(3)\big)^2 = 22$. (*Tomáš Jurík*)

C – I – 5

V danom trojuholníku ABC zvoľme vnútri strany AC body K, M a vnútri strany BC body L, N tak, že

$$|AK| = |KM| = |MC|, \quad |BL| = |LN| = |NC|.$$

Ďalej označme E priesečník uhlopriečok lichobežníka $ABLK$, F priesečník uhlopriečok lichobežníka $KLNM$ a G priesečník uhlopriečok lichobežníka $ABNM$. Dokážte, že body E, F a G ležia na ťažnici trojuholníka ABC z vrcholu C a určte pomer $|GF| : |EF|$. (*Šárka Gergelitsová*)

C – I – 6

a) Marienka rozmiestni do vrcholov pravidelného osemuholníka rôzne počty od jedného po osem cukríkov. Peter si potom môže vybrať, ktoré tri kôpky cukríkov dá Marienke, ostatné si ponechá. Jedinou podmienkou je, že tieto tri kôpky ležia vo vrcholoch rovnoramenného trojuholníka. Marienka chce rozmiestniť cukríky tak, aby ich dostala čo najviac, nech už Peter trojicu vrcholov vyberie akokoľvek. Koľko ich tak Marienka zaručene získa?

b) Rovnakú úlohu vyriešte aj pre pravidelný deväťuholník, do ktorého vrcholov rozmiestni Marienka 1 až 9 cukríkov. (Medzi rovnoramenné trojuholníky zaraďujeme aj trojuholníky rovnostranné.)

(*Jaromír Šimša*)

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

66. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Leták kategórií A, B, C – domáce kolo

Autori úloh:	Patrik Bak, RNDr. Pavel Calábek, PhD., RNDr. Šárka Gergelitsová, PhD., RNDr. Tomáš Jurík, PhD., Mgr. Aleš Kobza, PhD., Jan Kuchařík, RNDr. Ján Mazák, PhD., Mgr. Peter Novotný, PhD., doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., Mgr. Róbert Tóth
Recenzenti:	Patrik Bak, doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., RNDr. Tomáš Jurík, PhD., RNDr. Ján Mazák, PhD., Mgr. Peter Novotný, PhD.
Redakčná úprava:	RNDr. Ján Mazák, PhD., Mgr. Peter Novotný, PhD.
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2016