SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

66. ročník, školský rok 2016/2017

Domáce kolo

Kategórie A, B, C – zadania úloh

Milí žiaci stredných škôl,

Slovenská komisia Matematickej olympiády vás pozýva zúčastniť sa 66. ročníka Matematickej olympiády – súťaže pre žiakov stredných škôl v našej republike.

Kategória **A** je určená žiakom maturitných a predmaturitných ročníkov.
Kategória **B** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 2 roky.
Kategória **C** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 3 roky.
Pre žiakov prvých, prípravných ročníkov bilingválnych gymnázií (s päťročným štúdiom) je určená kategória **Z9**.

Organizácia súťaže v kategóriách **A, B, C**:

V **domácom kole** na vás čaká **6 úloh**, ktoré nájdete v tomto letáku. Ich riešenia (nie nutne všetkých úloh) odovzdajte svojmu učiteľovi matematiky do **28. novembra 2016** (kategória **A**) a do **20. januára 2017** (kategórie **B** a **C**). Ten ich opraví, ohodnotí podľa stupnice 1 – *výborne*, 2 – *dobre*, 3 – *nevyhovuje*. Potom ich s vami rozoberie, vysvetlí vám prípadné nedostatky a oboznámi vás so správnym riešením. Ak budú vaše riešenia aspoň štyroch úloh ohodnotené ako výborné alebo dobré, budete pozvaní do **školského kola**. Tam budete v stanovenom čase samostatne riešiť ďalšie tri úlohy. Opravené riešenia školského aj domáceho kola úspešných riešiteľov školského kola potom váš učiteľ matematiky pošle na príslušnú krajskú komisiu MO. Tá na základe výsledkov pozve najlepších účastníkov školského kola do **krajského kola**, v ktorom budú v priebehu štyroch hodín samostatne riešiť štyri úlohy. O poradí v krajských kolách rozhoduje súčet bodov získaných za jednotlivé úlohy. Napríklad ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X a práve traja žiaci (vrátane X) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X, tak žiakovi X patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom určujeme umiestnenie všetkých žiakov. Žiadne iné kritériá nie sú prípustné.

V kategórii **A** budú ešte najlepší riešitelia krajského kola z celej republiky súťažiť v **celoštátnom kole**, kde budú dva dni (po 4,5 hodinách) riešiť dve trojice úloh. Z úspešných riešiteľov celoštátneho kola sa (na výberovom sústredení) vyberá družstvo Slovenskej republiky na Medzinárodnú matematickú olympiádu (ktorá bude v júli 2017 v Brazílii), na medzištátne stretnutie s Českou republikou a Poľskom (bude v júni 2017 v Poľsku) a na Stredoeurópsku matematickú olympiádu (bude v auguste alebo septembri 2017 v Litve).

Pre najlepších riešiteľov MO kategórie **C** sa v máji 2017 uskutoční Česko-poľsko-slovenské stretnutie juniorov. Výber slovenského družstva prebehne nasledovne: Riešenia najlepších riešiteľov krajského kola kategórie C budú centrálne zozbierané a jednotne ohodnotené. Podľa poradia po tomto ohodnotení budú oslovení prví šiesti s ponukou účasti na súťaži (v prípade rovnosti bodov sa ako doplňujúce kritérium môže brať do úvahy účasť vo vyššej kategórii MO, účasť v korešpondenčnom seminári, či účasť v Z9 v predošlom šk. roku).

Termíny 66. ročníka Matematickej olympiády:

	školské kolo	krajské kolo	celoštátne kolo
Kategória A	06. 12. 2016	10. 01. 2017	26. – 29. marca 2017
Kategórie B, C	31. 01. 2017	11. 04. 2017	—

Matematickú olympiádu vyhlasuje *Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu SR* v spolupráci s *Jednotou slovenských matematikov a fyzikov* a *Slovenskou komisiou Matematickej olympiády*. Súťaž riadi *Slovenská komisia MO* a v krajoch ju riadia *krajské komisie MO*. Na jednotlivých školách ju zaisťujú učitelia matematiky. Vy sa obracajte na svojho učiteľa matematiky. Celoštátne kolo MO, tlač materiálov MO a ich distribúciu po organizačnej stránke zabezpečuje IUVENTA v tesnej súčinnosti so Slovenskou komisiou Matematickej olympiády.

Riešenia súťažných úloh vypracujte čitateľne na listy formátu A4. Každú úlohu začnite na novom liste a uveďte vľavo hore záhlavie podľa vzoru:

```
Emil Kruh
I.C, Gymnázium L. Eulera, Okrúhle nám. 5, 940 01 Nové Zámky
Kraj Nitra
2016/2017
C - I - 3
```

Posledný údaj je označenie úlohy podľa tohto letáka. Zadania úloh nemusíte opisovať. Ak sa vám riešenie nezmestí na jeden list, uveďte na ďalších listoch vľavo hore svoje meno a označenie úlohy a strany očíslujte. **Riešenie píšte ako výklad, v ktorom sú uvedené všetky podstatné úvahy tak, aby bolo možné sledovať váš myšlienkový postup.**

Veľa radosti z úspešného riešenia úloh vám všetkým praje

Mgr. Peter Novotný, PhD.
predseda Slovenskej komisie MO

Informácie o MO a archív zadaní a riešení úloh nájdete na internetových stránkach:
`http://www.olympiady.sk` `http://skmo.sk` `http://www.imo-official.org`

Radi by sme upozornili učiteľov a žiakov na Korešpondenčný matematický seminár (KMS) organizovaný združením Trojsten. Táto súťaž je veľmi efektívnou formou prípravy na MO a tiež zdokonaľovania sa v matematickom myslení ako takom. K tomu prispievajú aj záverečné sústredenia pre najlepších riešiteľov. Pre riešiteľov MO kategórií B a C je v KMS určená kategória ALFA. Pre lepších a skúsenejších z kategórie B a pre kategóriu A je kategória BETA. Pre tých, ktorí majú ambície uspieť na celoštátnom kole MO kategórie A, je určený korešpondenčný seminár *i*KS, ktorý organizuje KMS v spolupráci s Matematickým korešpondenčným seminárom v Prahe. Viac informácií o KMS a o *i*KS nájdete na `http://kms.sk` a `http://iksko.org`.

MATEMATIKA OLIMPIA

66-ik évfolyam 2016/2017-es tanév Házi forduló

****

KATEGÓRIA A

A – I – 1

Keressétek meg az összes olyan p prímszámot, amelyre létezik olyan n természetes szám, hogy $p^n + 1$ egy természetes szám köbe. (*Ján Mazák, Róbert Tóth*)

A – I – 2

Van n^2 darab üres skatulyánk, amelyeknek az alja négyzet alakú. Az összes skatulya magassága és szélessége egy természetes szám az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazból. Bármely két skatulya legalább az egyik méretben különbözik egymástól. Egy skatulyát egy másikba helyezhetünk, ha mindkét mérete kisebb a másikénál és legalább az egyik méret 2-vel kisebb. Ily módon egymásba helyezett skatulyák sorozatát hozhatjuk létre (azaz az egyik skatulyát belehelyezzük egy másikba, ezt egy harmadikba, stb.). Az összes ilyen sorozatot külön polcra helyezünk. Határozzátok meg az n^2 darab skatulya tárolásához szükséges polcok számának lehet legkisebb értékét!

(*Peter Novotný*)

A – I – 3

Adott egy hegyesszög ABC háromszög AK, BL és CM magasságokkal. Bizonyítsátok be, hogy az ABC háromszög pontosan akkor egyenl szárú, amikor fennáll az

$$|AM| + |BK| + |CL| = |AL| + |BM| + |CK|$$

egyenlség. (*Jaromír Šimša*)

A – I – 4

Keressétek meg az összes olyan $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényt, amelyek minden m természetes számra rendelkeznek a következ tulajdonsággal: ha $d_1, d_2, \ldots, d_n$ jelöli az m összes osztóját, akkor

$$f(d_1) \cdot f(d_2) \cdot \ldots \cdot f(d_n) = m.$$

(*Pavel Calábek*)

A – I – 5

Az egyenl szárú ABC háromszög AB alapjának belsején fekszik a D pont. Vegyük fel az E pontot úgy, hogy $ADEC$ parallelogramma legyen. Az ED-vel ellentétes félegyenesen fekszik az az F pont, amelyre $|EB| = |EF|$. Bizonyítsátok be, hogy a BE egyenes az ABF háromszög körülírt körébl olyan húrt szel ki, amelynek hossza az AC szakasz hosszának kétszerese!

(*Jan Kuchařík, Patrik Bak*)

A – I – 6

A valós számok halmazában oldjátok meg a

$$\begin{aligned} k - x^2 &= y, \\ k - y^2 &= z, \\ k - z^2 &= u, \\ k - u^2 &= x \end{aligned}$$

egyenletrendszert, ahol k valós paraméter a $\langle 0, 1 \rangle$ intervallumból. (*Jaroslav Švrček*)

KATEGÓRIA B

B – I – 1

Egy szabályos 66-szög minden csúcsához hozzárendeljük az 1 és -1 számok valamelyikét. Ezután az összes szakaszhoz, amely két csúcsot köt össze (oldal vagy átló) hozzáírjuk a végpontjaiban található számok szorzatát, majd összeadjuk ezeket a szorzatokat. Határozzátok meg ezen összeg lehet legkisebb értékét, valamint a lehet legkisebb nemnegatív értékét. (*Pavel Calábek*)

B – I – 2

Határozzátok meg az összes (a, b) valós paraméterekbl álló számpárt, amelyekre a

$$\begin{aligned} |x| + y &= a, \\ 2|y| - x &= b \end{aligned}$$

egyenletrendszernek pontosan három valós megoldása van és ebben az esetben írjátok is fel ezeket a megoldásokat! (*Jaroslav Švrček*)

B – I – 3

A k körvonalon az A, B, C, D és E pontok (ebben a sorrendben) úgy vannak felvéve, hogy $|AB| = |CD| = |DE|$. Bizonyítsátok be, hogy az ABD, ACD és BDE háromszögek súlypontjai egy olyan körvonalon helyezkednek el, amely koncentrikus a k körvonallal! (*Tomáš Jurík*)

B – I – 4

Keressétek meg az összes olyan nyolcjegy $*2*0*1*6$ számot, amelyben a csillaggal jelölt négy ismeretlen számjegy páratlan és a szám osztható 2 016-tal. (*Jaromír Šimša*)

B – I – 5

Adott az AB átfogójú ABC derékszög háromszög. Jelölje D a C csúcshoz tartozó magasság talppontját, M ill. N az ADC ill. BDC szögek szögfelezinek AC ill. BC oldallal való metszéspontját. Bizonyítsátok be, hogy

$$2|AM| \cdot |BN| = |MN|^2.$$

(*Jaroslav Švrček*)

B – I – 6

Határozzátok meg az összes olyan r valós számot, amelyre fennáll az $a^3 + ab + b^3 \geqq a^2 + b^2$ egyenltlenség az összes olyan a és b valós számra, amelyek nagyobbak vagy egyenlek, mint r. (*Ján Mazák*)

M A T E M A T I K A   O L I M P I A

66-ik évfolyam   2016/2017-es tanév   Házi forduló

****

KATEGÓRIA C

C – I – 1

Bizonyítsátok be, hogy bármely valós a számra fennáll az

$$a^2 + \frac{1}{a^2 - a + 1} \geq a + 1$$

egyenltlenség! Határozzátok meg, hogy mikor áll fenn egyenlség! (*Jaroslav Švrček*)

C – I – 2

Keressétek meg azt a legnagyobb d természetes számot, amelynek meg van az a tulajdonsága, hogy tetszleges n természetes számra a $V(n) = n^4 + 11n^2 - 12$ kifejezés osztható d-vel. (*Aleš Kobza*)

C – I – 3

Az ABC háromszög C csúcsához tartozó magasságvonalának talppontja az AB oldalat $1 : 2$ arányban osztja. Bizonyítsátok be, hogy az ABC háromszög oldalainak hagyományos jelölései mellett fennáll a $3|a - b| < c$ egyenltlenség. (*Jaroslav Švrček*)

C – I – 4

Keressétek meg az összes egész a, b és c együtthatójú $P(x) = ax^2 + bx + c$ háromtagot, amelyekre érvényes, hogy $P(1) < P(2) < P(3)$ és $\big(P(1)\big)^2 + \big(P(2)\big)^2 + \big(P(3)\big)^2 = 22$. (*Tomáš Jurík*)

C – I – 5

Az adott ABC háromszögben vegyük fel az AC oldal K és M bels pontjait, ill. a BC oldal L és N bels pontjait, amelyekre teljesül:

$$|AK| = |KM| = |MC|, \quad |BL| = |LN| = |NC|.$$

Továbbá, jelölje rendre E, F ill. G az $ABLK$, $KLNM$ ill. $ABNM$ trapéz átlóinak metszéspontját. Bizonyítsátok be, hogy az E, F és G pontok az ABC háromszög C csúcsához tartozó súlyvonalán fekszenek és határozzátok meg a $|GF| : |EF|$ arányt. (*Šárka Gergelitsová*)

C – I – 6

a) Egy szabályos nyolcszög csúcsaiba Marianna különböz számú, 1-tl 8-ig terjed, cukorkákat rak. Ezután Peti kiválaszthat 3 csúcsot és a hozzájuk tartozó cukorkákat Mariannának adja a többit pedig megtartja. Az egyetlen feltétel, hogy a kiválasztott 3 csúcs egy egyenl szárú háromszöget kell, hogy alkosson. Marianna úgy szeretné elhelyezni a cukorkákat, hogy a lehet legtöbbet kapja Peti választásától függetlenül. Hány darab cukorkát tud biztosan szerezni Marianna?

b) Oldjátok meg ugyanezt a feladatot szabályos kilencszög és 1-tl 9-ig terjed mennyiség cukorkák esetében. (A szabályos háromszögek is az egyenl szárú háromszögek közé tartoznak.)

(*Jaromír Šimša*)

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

66. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Leták kategórií A, B, C – domáce kolo

Autori úloh:	Patrik Bak, RNDr. Pavel Calábek, PhD., RNDr. Šárka Gergelitsová, PhD., RNDr. Tomáš Jurík, PhD., Mgr. Aleš Kobza, PhD., Jan Kuchařík, RNDr. Ján Mazák, PhD., Mgr. Peter Novotný, PhD., doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., Mgr. Róbert Tóth
Recenzenti:	Patrik Bak, doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., RNDr. Tomáš Jurík, PhD., RNDr. Ján Mazák, PhD., Mgr. Peter Novotný, PhD.
Redakčná úprava:	RNDr. Ján Mazák, PhD., Mgr. Peter Novotný, PhD.
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2016