

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

M A T E M A T I C K Á O L Y M P I Á D A PRE ŽIAKOV ZÁKLADNÝCH ŠKÔL A NIŽŠÍCH ROČNÍKOV VIACROČNÝCH GYMNÁZIÍ

66. ročník, školský rok 2016/2017

Domáce kolo

Kategórie **Z5, Z6, Z7, Z8, Z9** – zadania úloh (maďarská verzia)



Kedves Diákok!

Kedvelitek az érdekes matematikai feladatokat és szívesen versenyeznétek ezek megoldásában? Ha így van, kapcsolódjatok be a matematikai olimpia (MO) versenybe!

A verseny önkéntes, független a matematikában elért osztályzattól. A matematikai olimpia egyes kategóriáinak feladatai közül ebben a füzetben azokat találjátok meg, amelyeket az alapiskolás tanulóknak (AI), valamint a nyolcosztályos gimnáziumok (NyG) első négy osztályát látogató diákoknak szántunk.

A **Z5** kategóriában az AI 5. osztályos tanulói versenyeznek.

A **Z6** kategóriában az AI 6. osztályos tanulói és a NyG 1. osztályos tanulói versenyeznek.

A **Z7** kategóriában az AI 7. osztályos tanulói és a NyG 2. osztályos tanulói versenyeznek.

A **Z8** kategóriában az AI 8. osztályos tanulói és a NyG 3. osztályos tanulói versenyeznek.

A **Z9** kategóriában az AI 9. osztályos tanulói és a NyG 4. osztályos tanulói versenyeznek.

Ebben a kategóriában részt vehetnek az ötéves kétnyelvű gimnáziumok első („előkészítő“) évfolyamának tanulói is.

Matematika-tanárotok jóváhagyásával a felsőbb osztályos tanulóknak szánt kategóriák valamelyikében vagy a középiskolások részére kiírt A, B, C kategóriák egyikében is versenyezhettek (a középiskolásoknak szánt feladatok külön füzetben jelentek meg).

A verseny menete

A Z5, Z6, Z7 és Z8 kategóriákban házi és járási forduló van. A Z9 kategóriában a házi és a járási fordulót a kerületi forduló követi.

A házi fordulóban kategóriánként 6-6 feladatot kell megoldanotok, ezeket a feladatokat tartalmazza ez a füzet. *A megoldásokat adjátok át matematika-tanárotoknak a következő határidők betartásával:*

kategória	az első feladathármas	a második feladathármas
Z5, Z9	2016 november 14	2016 december 12
Z6, Z7, Z8	2016 december 12	2017 február 27

Tanáraitok ellenőrzik és az alábbi jegyekkel értékelik a feladatok megoldását: 1 – *kitűnő*, 2 – *jó*, 3 – *nem felelt meg*. A házi fordulóban az a diák minősül sikeres megoldónak, aki legalább négy megoldására jó vagy kitűnő osztályzatot kapott. A Z5 – Z9 kategóriák esetében a házi fordulók sikeres megoldóinak feladatmegoldásait az értékeléssel együtt az iskola elküldi a matematikai olimpia járási versenybizottságának. A versenybizottság a legjobb megoldókat meghívja a járási fordulóra. A járási fordulóban a versenyzők hasonló jellegű feladatokat kapnak, mint amilyeneket a házi fordulóban oldottak meg, ám a zárthelyi megoldásra csak meghatározott időtartam áll rendelkezésükre (a Z5, Z6, Z7, Z8 kategóriákban 2 óra, a Z9 kategóriában 4 óra), a versenyzők külső segítséget sem vehetnek igénybe. A Z9 kategória járási fordulójának legjobb megoldóit a szervezők meghívják a kerületi fordulóra.

A sorrendről a járási, ill. kerületi fordulóban az egyes feladatokban elért pontok összege dönt. Például, ha pontosan 5 diák ér el több pontot, mint az X nevű diák és pontosan három diák (beleértve X -et) ér el éppen annyi pontot, mint X , akkor X diáknak a sorrendben a 6.–8. helyezés jár, vagy rövidebben a 6. helyezés. Hasonló eljárással határozzuk meg az összes diák helyezését. Semmilyen egyéb kritériumok nem használhatók.

A Matematikai Olimpia 66. évfolyamának időrendje:

kategória	járási forduló	kerületi forduló
Z5	2017 január 24	—
Z6, Z7, Z8	2017 április 4	—
Z9	2017 január 24	2017 március 21

Útmutató és tanácsok

A versenyfeladatok megoldását A4-es lapokra írástok olvashatóan! Minden feladatot új lapon kezdjétek kidolgozni, a bal felső sarokba az alábbi minta szerint írástok a fejléctet:

Nagy János, 7.C

Harmat Utcai Alapiskola, 979 01 Dunaszerdahely

Z7-I-2 feladat

Az utolsó adat a fejlécten a feladatnak a füzetben megadott száma. A megoldást úgy írástok le, hogy gondolatmenetek követhető legyen. Tudnotok kell, hogy nemcsak a feladatok megoldását értékeljük, hanem főleg következtetéseitek helyességét, azt a módot, ahogyan a megoldáshoz eljutottatok. A fenti feltételeket nem teljesítő vagy a határidőn túl leadott munkákat a versenyben nem vesszük figyelembe.

Örömteli és sikeres versenyzést kívánnak

RNDr. Monika Dillingerová, PhD.
SKMO, úlohová komisia pre kategórie Z

Mgr. Peter Novotný, PhD.
predseda Slovenskej komisie MO

A MO feladatainak és azok megoldásainak archívuma a következő internetoldalakon található:

<http://www.olympiady.sk>

<http://skmo.sk>

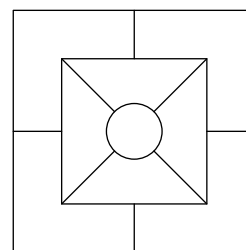
Z5 KATEGÓRIA

Z5 – I – 1

A főtéren harangjáték játszik minden egész órában 8-tól 22 óráig. Összesen 18 rövid zenedarab közül minden órában egy hangzik el, a lejátszás sorrendje nem változik. A 18. zenedarab után az első következik, és így tovább változatlan sorrendben. Olga és Lubos hétfőn 15 órakor a főtéren voltak. Egyszer délben ugyanazon a héten elmentek megint meghallgatni a harangjátékot, de legnagyobb csalódásukra azt a melódiát játszotta, amit hétfőn hallottak. Melyik napon volt Olga és Lubos másodszor a főtéren? *(Libor Šimůnek)*

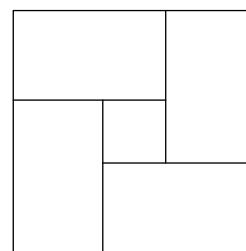
Z5 – I – 2

Az ábrán látható nagyobb négyzet csúcsait tartalmazó mezők mindegyikébe a 2, 4, 6, 8 számok egyike van beírva, minden csúcsnál más-más szám van. A belső négyzet négy mezőjében a vele szomszédos külső mező számainak szorzata található. A körben a belső négyzet számainak összege szerepel. Milyen számok lehetnek a körben? Határozzátok meg az összes lehetőséget! *(Monika Dillingerová)*



Z5 – I – 3

Az ábrán egy 10 dm oldalhosszúságú négyzet alakú talajcsempe látható, amely négy egybevágó téglalapból és egy kis négyzetből áll. A kis négyzet kerülete ötször kisebb, mint az egész talajcsempe kerülete. Határozzátok meg a téglalapok méreteit! *(Karel Pazourek)*



Z5 – I – 4

A karácsonyfaárus 22 euróért lucfenyőt, 25 euróért erdeifenyőt és 33 euróért jegenyefenyőt árult. Reggel egyenlő számú lucfenyője, erdeifenyője és jegenyefenyője volt. Estére minden fát eladott és ezekért összesen 3600 eurót kapott. Hány fát adott el ezen a napon a karácsonyfaárus? *(Marie Krejčová)*

Z5 – I – 5

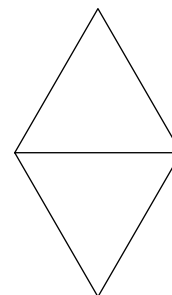
A csillagok helyett írjatok be olyan számjegyeket, melyek összege páratlan, és amelyekre igaz a következő egyenlőség:

$$42 \cdot *8 = 2 ***$$

(Libuše Hozová)

Z5 – I – 6

Jarka két egybevágó egyenlő oldalú háromszöget szerkesztett, ahogyan az ábra mutatja. Továbbá meg szeretné szerkeszteni az összes olyan kört, amelyek középpontja a háromszögek valamelyik csúcsában van és áthalad egy másik csúcson. Szerkesszétek meg és számoljátok meg az összes Jarka feltételeinek megfelelő kört. *(Karel Pazourek)*



Z6 KATEGÓRIA

Z6 – I – 1

Jana és Dávid a tizedes számok összeadását gyakorolják úgy, hogy mindegyikük felír egy számot, majd ezt a két számot összeadják. A legutóbbi végeredmény 11,11 lett. Dávid számában a tizedesvessző előtt ugyanannyi számjegy állt, mint a tizedesvessző után, Jana számában úgyszintén. Dávid száma különböző számjegyekből állt, Jana számában pontosan két számjegy megegyezett. Határozzátok meg a lehető legnagyobb számot, amit Dávid felírhatott. (Michaela Petrová)

Z6 – I – 2

Koczka úr téglalap alakú kertjében sorra ösvényeket épített az egyik oldalról a másikra. Az ösvények egyenlő szélesek voltak és két helyen keresztezték egymást, ahol a már lekövezett részt a következő kövezésnél átugrották. Amikor Koczka úr a hosszabb oldallal párhuzamos ösvényt kövezte le, 228 m^2 burkolókőre volt szüksége. Ezután a rövidebb oldallal párhuzamos ösvényt kövezte le, ehhez 117 m^2 burkolókő kellett. Végül kikövezett még egy ösvényt az elsővel párhuzamosan, ezúttal 219 m^2 burkolókőre volt szüksége. Milyenek Koczka úr kertjének méretei? (Michaela Petrová)

Z6 – I – 3

Soklábú Férgecske fejből és néhány részből (ízből) áll, mindegyiken egy-egy pár lábbal. Mikor hideg lett, Soklábú Férgecske elhatározta, hogy felöltözik. Hátulról a harmadik ízén és utána minden harmadik ízén zoknit húzott a bal lábára. Hasonlóan, hátulról az ötödik ízén és utána minden ötödik ízén zoknit húzott a jobb lábára. Végül látta, hogy 14 ízén minkét lába mezítláb maradt. Hány lába lehetett összesen Soklábú Férgecskének? Adjátok meg az összes lehetőséget! (Erika Novotná)

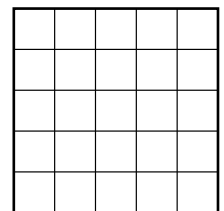
Z6 – I – 4

Négy család egy közös kiránduláson vett részt. Az első családban három testvér volt, Aliz, Betti és Cirill. A második családban négy testvér volt, Dávid, Erika, Filip és Gabika. A harmadik családban két testvér volt, Hugo és Ivett. A negyedik családban három testvér volt, Jani, Karcsi és Lukács. Útközben a gyerekek csoportokra szakadtak úgy, hogy mindegyik csoportban az összes gyereknek azonos számú fiútestvére volt. Hogyan alkothattak ilyen csoportokat? Határozzátok meg az összes lehetőséget! (Veronika Hucíková)

Z6 – I – 5

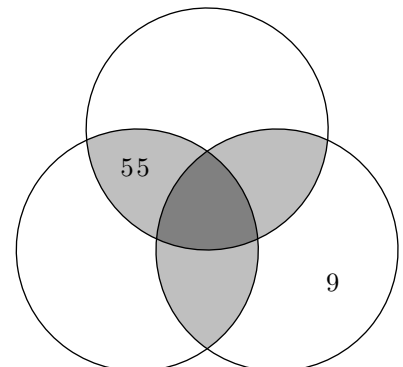
Gyuri egy 25 négyzetből álló négyzethálót rajzolt (lásd az ábrát). A kis négyzeteket úgy akarta kifesteni, hogy az azonos színűre festett négyzeteknek ne legyen közös csúcsa. Legkevesebb hány színre volt Gyurinak szüksége?

(Monika Dillingerová)



Z6 – I – 6

A következő ábra üres mezőibe írjatok 1 -nél nagyobb egész számokat úgy, hogy minden sötétebb mezőben a szomszédos világosabb mezők számainak szorzata legyen! (T. Salčák)



Z8 KATEGÓRIA

Z8 – I – 1

Három kismókus együtt indult földimogyorót szedni. Vöröske kétszer annyit talált, mint Fogacska, Fülecske pedig háromszor annyit, mint Fogacska. Hazafelé menet beszélgettek, közben pedig eszegették a földimogyorójukat. Fogacska megette az általa összegyűjtött mogyoró felét, Vöröske a saját földimogyorója egyharmadát, Fülecske pedig a saját földimogyorója egynegyedét. Otthon aztán a kismókusok megszámozták, hogy együttvéve 196 mogyorójuk maradt. Hány földimogyorót találtak a kismókusok egyenként? *(Michaela Petrová)*

Z8 – I – 2

Egy szabályos oktaéder minden lapjára rá van írva az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 és 8 számok egyike, különböző lapokon különböző számok vannak. Jani minden laphoz hozzárendelte a rajta szereplő és a három vele szomszédos lapon szereplő számok összegét. Az így kapott nyolc összeget ismét összeadta. Milyen értékeket vehet fel ez az összeg? *(Jaroslav Zhouf)*

Z8 – I – 3

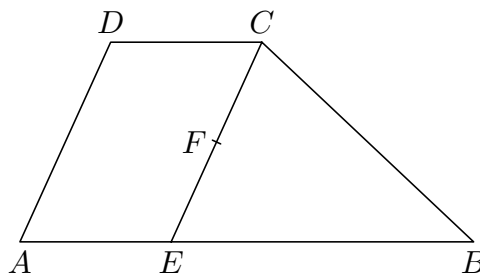
Az íjászatban többek között követik a versenyző teljesítményét is. Ezt úgy számítják ki, hogy az összes lövés közül kihagynak egy legjobbat és egy legrosszabbat, majd kiszámítják a megmaradt lövések pontértékeinek számtani közepét. Péter, Gyuri, Misi és Zoli négy körben lőttek egy-egy nyilat. Minden lövés egy egész számmal volt értékelve 0-tól 10-ig. Minden körben 32 pont lett a fiúk értékelésének összege, de egyik körben se lett semelyik két fiú értékelése egyenlő. A következő táblázatban csak néhány adat van kitöltve, egészítsétek ki a többbit.

	1. kör	2. kör	3. kör	4. kör	teljesítmény
Péter				5	10
Gyuri			9	10	7,5
Misi			5		8
Zoli					8,5
összesen	32	32	32	32	–

(Monika Dillingerová)

Z8 – I – 4

Az $ABCD$ trapézt a CE szakasz egy háromszögre és egy paralelogrammára osztja, lásd az ábrát. Az F pont a CE szakasz felezőpontja, a DF egyenes pedig áthalad a BE szakasz felezőpontján. A CDE háromszög területe 3 cm^2 . Mennyi az $ABCD$ trapéz területe? *(Eva Semerádová)*

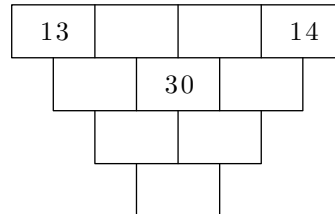


Z8 – I – 5

Anya 10 süteményt vett: kevesebb kókuszgolyó volt mint tortaszelet, karamellkockából volt a legtöbb. Józsi elvett két különböző süteményt, Jakab ugyanúgy, ezután Janinak csak egyfajta sütemény maradt. Hány kókuszgolyót, hány tortaszeletet és hány karamellkockát vett anya?
(Veronika Hucíková)

Z8 – I – 6

A következő piramis minden tégláján szerepel egy-egy szám. Minden esetben, amikor csak lehetséges, a téglán szereplő szám a közvetlenül felette levő számok legkisebb közös többszöröse. Milyen szám lehet a legalsó téglán? Határozzátok meg az összes lehetőséget.



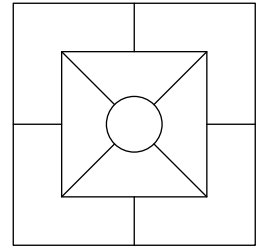
(Alžbeta Bohiniková)

Z9 KATEGÓRIA

Z9 – I – 1

Az itt látható alakzat kilenc mezőjét úgy kell kitölteni, hogy mindegyikben legyen egy természetes szám, és érvényes legyen, hogy

- a 2, 4, 6 és 8 számok mindegyike legalább egyszer szerepel,
- a belső négyzet négy mezeje a külső négyzet szomszédos mezőinek szorzatát tartalmazza,
- a körben a vele szomszédos mezők számainak összege szerepel.



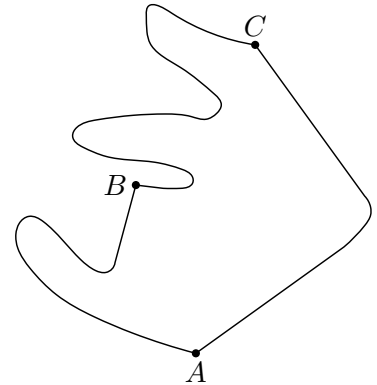
Határozzátok meg, melyik legkisebb és melyik legnagyobb szám lehet a körbe írva!

(Monika Dillingerová)

Z9 – I – 2

Az A pontból a C pontba egy B ponton áthaladó tanösvény és egy piros jelzésű turistaösvény vezet (lásd az ábrát). Ezekon kívül lehet még használni egy 1500 m hosszúságú A pontból induló rövidítést, ami a tanösvénybe torkollik és nincs berajzolva. Béla rájött, hogy

- a piros jelzésen A -ból C -be és vissza a tanösvényen A -ba vezető túra 7700 méter hosszú,
- a tanösvényen B -ből C -be és ezután a piros jelzésen A -ba vezető túra 5600 méter hosszú,
- a rövidítést felhasználva A -ból B -be 1700 méteres úton lehet eljutni,
- a tanösvényen A -ból C -be, és vissza először a tanösvényen majd a rövidítésen A -ba vezető túra 8800 méter hosszú.



Határozzátok meg az A -ból C -be vezető tanösvény hosszát! Ha a feladatnak több megoldása is van, adjátok meg mindet!

(Libor Šimůnek)

Z9 – I – 3

Juli labdája a medencébe gurult és úszott a vízben. Legmagasabb pontja 2 cm-rel volt a vízszint felett. A víz a labdán egy 8 cm átmérőjű kört jelölt ki. Mekkora volt Juli labdájának átmérője?

(Libuše Hozová)

Z9 – I – 4

Kati egy ötjegyű természetes számra gondolt. A füzeté első sorába beírta a gondolt számnak és a gondolt szám felének az összegét. A második sorba beírta a gondolt számnak és a gondolt szám ötödének az összegét. A harmadik sorba beírta a gondolt számnak és a gondolt szám kilencedének az összegét. Legvégül összeadta ezt a három számot és az eredményt beírta a negyedik sorba. Ezután meglepődve látta, hogy a negyedik sorba egy bizonyos természetes szám harmadik hatványát írta. Határozzátok meg a legkisebb számot, amit Kati gondolhatott.

(Lucie Růžičková)

Z9 – I – 5

Az egerek egy földalatti házát építették, ami kamrákból és alagutakból áll:

- minden alagút egy kamrából egy másik kamrába vezet (nincs zsákutca)
- minden kamrából pontosan három alagút vezet három különböző kamrába,
- minden kamrából át lehet jutni bármelyik kamrába az alagutakon keresztül,
- a házban pontosan egy olyan alagút van, amelynek betemetésével a ház két különálló részre szakad.

Legkevesebb hány kamra lehetett az egérháznál? Vázoljátok fel, hogyan lehettek a kamrák összekötve? (Alžbeta Bohiniková)

Z9 – I – 6

Adott a 12 cm hosszú AB szakasz, amelyen egy 2 cm oldalhosszúságú $MRAK$ négyzet fekszik (lásd az ábrát). A $MRAK$ négyzetet fokozatosan gurítjuk az AB szakaszon, mialatt az R pont nyomot hagy a papíron. Rajzoljátok le az R pont útját, amíg a négyzet körülmegy az AB szakasz mindkét oldalán (tehát fent és lent) és visszajut az eredeti helyzetébe. (Monika Dillingerová)



Mintaként egy régebbi olimpiai feladat megoldását közöljük:

Z8 – II – 1 feladat

Adott egy olyan téglalap, melynek oldalhosszai egész számmal fejezhetőek ki. Ha egyik oldalának hosszát 4-gyel növeljük, másik oldalának hosszát pedig 5-tel csökkentjük, az eredeti téglalaphoz képest kétszer nagyobb területű téglalapot kapunk. Határozzátok meg az adott téglalap oldalhosszait! Találjátok meg az összes megoldást!

Megoldás. A téglalap oldalainak hosszát jelölje a , b . Az új téglalap oldalainak hossza $a + 4$, $b - 5$. A feladat feltétele szerint a két téglalap területére érvényes:

$$2ab = (a + 4)(b - 5).$$

Az egyenletet átalakítjuk:

$$\begin{aligned} ab - 4b + 5a &= -20, \\ ab - 4b + 5a - 20 &= -40. \end{aligned}$$

Azért vonunk le 20-at, hogy az egyenlet bal oldalát szorzattá tudjuk átalakítani:

$$(a - 4)(b + 5) = -40.$$

A megoldást a -40 szám két tényezőre való bontásával kapjuk meg. Mivel érvényes $a > 0$ és $b > 0$, ezért $a - 4 > -4$, $b + 5 > 5$.

Két lehetőség van: $(-2) \cdot 20 = -40$ és $(-1) \cdot 40 = -40$.

Az első esetben olyan téglalapot kapunk, melynek oldalai $a = 2$, $b = 15$, területe $S = 30$. Az új téglalap oldalai eszerint $a' = 6$, $b' = 10$, területe pedig $S' = 60$, vagyis $S' = 2S$.

A második esetben olyan téglalapot kapunk, melynek oldalai $a = 3$, $b = 35$, területe pedig $S = 105$. Az új téglalap oldalai tehát $a' = 7$, $b' = 30$ területe pedig $S' = 210$ és megint érvényes, hogy $S' = 2S$.

A feladatnak tehát két megoldása van. Az adott téglalap oldalainak hossza vagy 2 és 15 vagy 3 és 35.

Végezetül egy jó tanács.

A feladatok nem könnyűek, ezért ne adjátok fel, ha mindjárt nem jöttök rá a megoldásra. Kísérletezzetek, rajzoljatok, „játszadozzatok el” a feladattal! Néha az segít, ha valamilyen könyvben utánanéztetek, és kerestek egy hasonló megoldott feladatot, de az is megtörténhet, hogy három nap múlva egyszer csak eszetekbe villan a helyes megoldás.

A versenyt a Szlovák Köztársaság Oktatási Minisztériuma a Szlovák Matematikusok és Fizikusok Egyesületével karöltve írja ki, és a Matematikai Olimpia Szlovákiai Bizottsága, járási szinten a járási bizottságok irányítják. Az iskolákban a versenyt a matematika-tanárok szervezik.

Kérdéseitekkel forduljatok matematika-tanároktokhoz.

Végül szeretnénk felhívni a figyelmeteket a különböző levelező szemináriumokra, amelyek az AI és a NyG diákjainak vannak szánva. Ezek a versenyek nem csak jó formái az MO-ra való felkészülésnek, hanem általában segítik tökéletesíteni a matematikai gondolkodást. Ehhez hozzájárulnak a nagyon népszerű befejező táborok a legjobb megoldók számára. Az SKMO

pl. a SEZAM szemináriumot ajánlja, amely JSMF Žilina égisze alatt működik. E szemináriumok feladatai alkotásában az MO Feladatbizottságának néhány tagja is részt vesz. Az SKMO több tagja viszont együttműködik a STROM egyesületben (UPJŠ Košice helyszínnel) a MATIK és MALYNÁR szemináriumok szervezésében. Részt vehettek a PIKOMAT szemináriumban (a P-MAT, n.o. szervezi), vagy a RIEŠKY szemináriumban (a pozsonyi Gymn. Grösslingová szervezi). Részletes információk a sezam.sk, strom.sk, www.pikomat.sk ill. riesky.sk honlapokon található.

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

66. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Leták kategórií Z5, Z6, Z7, Z8, Z9 – domáce kolo

- Autori úloh: Bc. Alžbeta Bohiníková, RNDr. Monika Dillingerová, PhD.,
PaedDr. Libuše Hozová, Mgr. Veronika Hucíková, Mgr. Marie Krejčová,
Mgr. Erika Novotná, PhD., Mgr. Karel Pazourek, Mgr. Michaela Petrová
Mgr. Lucie Růžičková, T. Salčák, PhD. Eva Semerádová,
MUDr. Libor Šimůnek, doc. PhD. Marta Volfová, CSc.,
RNDr. Jaroslav Zhouf, PhD.
- Recenzenti: Bc. Alžbeta Bohiníková, PaedDr. Svetlana Bednářová, PhD.,
RNDr. Monika Dillingerová, PhD., Mgr. Veronika Hucíková,
Bc. Katarína Jasenčáková, Mgr. Erika Novotná, PhD.,
Mgr. Peter Novotný, PhD., Mgr. Miroslava Smitková, PhD.
- Redakčná úprava: RNDr. Róbert Hajduk, PhD., RNDr. Ján Mazák, PhD.,
Mgr. Peter Novotný, PhD.
- Preklad: doc. RNDr. Mária Kmeťová, PhD., doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.
- Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2016