1999/2000
49. ročník MO *Zadania úloh celoštátneho kola kategórie A*

(*Súťaž sa konala 9. – 12. 4. 2000.*)

1. Nech n je prirodzené číslo. Dokážte, že súčet $4 \cdot 3^{2^n} + 3 \cdot 4^{2^n}$ je deliteľný trinástimi práve vtedy, keď n je párne. (*J. Šimša*)

2. Daný je rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB. Na jeho výške CD je zvolený bod P tak, že kružnice vpísané trojuholníku ABP a štvoruholníku $PECF$ sú zhodné; pritom bod E je priesečník priamky AP so stranou BC a F priesečník priamky BP so stranou AC. Dokážte, že aj kružnice vpísané trojuholníkom ADP a BCP sú zhodné. (*J. Šimša, K. Horák*)

3. V rovine je daných 2 000 zhodných trojuholníkov s obsahom 1, ktoré sú obrazmi toho istého trojuholníka v rôznych posunutiach. Každý z týchto trojuholníkov obsahuje ťažiská všetkých zostávajúcich. Dokážte, že obsah zjednotenia týchto trojuholníkov je menší ako $\frac{22}{9}$. (*P. Calábek*)

4. Pre ktoré kvadratické funkcie $f(x)$ existuje taká kvadratická funkcia $g(x)$, že korene rovnice $g(f(x)) = 0$ sú štyri rôzne po sebe idúce členy aritmetickej postupnosti a súčasne sú aj koreňmi rovnice $f(x)g(x) = 0$? (*P. Černek*)

5. Monika zhotovila papierový model trojbokého ihlana, ktorého podstavou bol pravouhlý trojuholník. Keď model rozrezala pozdĺž odvesien podstavy a pozdĺž ťažnice jednej zo stien, vznikol po rozvinutí do roviny štvorec so stranou a. Určte objem tohto ihlana. (*P. Leischner*)

6. Nájdite všetky štvormiestne čísla $\overline{abcd}$ (v desiatkovej sústave), pre ktoré platí rovnosť

$$\overline{abcd} + 1 = (\overline{ac} + 1)(\overline{bd} + 1).$$

(*J. Zhouf*)