2007/2008
57. ročník MO *Riešenia úloh domáceho kola kategórie A*

1. *Nájdite všetky také trojice reálnych čísel a, b, c, že každá z rovníc*

$$x^3 + (a+1)x^2 + (b+3)x + (c+2) = 0,$$
$$x^3 + (a+2)x^2 + (b+1)x + (c+3) = 0,$$
$$x^3 + (a+3)x^2 + (b+2)x + (c+1) = 0$$

má v obore reálnych čísel tri rôzne korene, spolu je to však iba päť rôznych čísel.

(Jaromír Šimša)

Riešenie. Označme zadané rovnice postupne (1), (2), (3). Predpokladajme, že čísla a, b, c majú požadovanú vlastnosť. Všimneme si najskôr, že každé dve z daných rovníc musia mať spoločný koreň, inak by mali spolu šesť rôznych koreňov.

Spoločné korene dvoch z daných troch kubických rovníc sú korene kvadratických rovníc, ktoré dostaneme ich odčítaním. Vypíšme všetky tri „rozdielové“ rovnice, ktoré sú nezávislé od parametrov a, b, c (to je pre vyriešenie pozitívne zistenie), a rozložme hneď ich ľavé strany na koreňové činitele:

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0, \qquad (2–1)$$
$$2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1) = 0, \qquad (3–1)$$
$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2) = 0. \qquad (3–2)$$

Vidíme, že rovnice (1) a (2) majú jediný spoločný koreň $x = 1$, takže majú spolu práve päť rôznych koreňov. Preto musí byť každý z koreňov rovnice (3) koreňom aspoň jednej z rovníc (1) alebo (2). Z uvedených rozkladov vyplýva, že číslo $x = 1$ je aj koreňom rovnice (3).

Vysvetlime, prečo ostatné dva korene rovnice (3) nemôžu byť zároveň aj korene jednej z rovníc (1) alebo (2). V opačnom prípade by jedna z rovníc (1), (2) mala s rovnicou (3) rovnakú trojicu koreňov, a preto by museli mať rovnaké koeficienty nielen pri kubickom člene. To však neplatí, lebo pre ľubovoľnú hodnotu parametra c sú čísla $c+1$, $c+2$, $c+3$ (t. j. absolútne členy rovníc) všetky navzájom rôzne.

Rovnica (3) má teda okrem koreňa $x = 1$ ešte jeden spoločný koreň s rovnicou (1) a jeden spoločný koreň s rovnicou (2); podľa rozkladov (3–1) a (3–2) vidíme, že sa jedná o čísla $x = -\frac{1}{2}$ a $x = -2$. Ľavá strana rovnice (3) má preto rozklad

$$(x-1)(x+2)\left(x+\frac{1}{2}\right) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 1.$$

Odtiaľ už porovnaním s koeficientmi zapísanými v (3) dostaneme $a = -\frac{3}{2}$, $b = -\frac{7}{2}$, $c = -2$.

Z nášho postupu vyplýva, že pre nájdené hodnoty a, b, c má rovnica (3) trojicu koreňov 1, $-\frac{1}{2}$ a -2, že čísla 1, $-\frac{1}{2}$ sú korene rovnice (1) a že čísla 1, -2 sú korene rovnice (2). Musíme sa ešte presvedčiť, že tretie korene rovníc (1) a (2) sú ďalšie dve (rôzne) čísla. Tieto tretie korene môžeme výhodne nájsť pomocou Viètových vzťahov. Keďže súčin troch koreňov rovnice (1) je číslo opačné k absolútnemu členu $c+2$ rovnému nule, je číslo nula tretí koreň rovnice (1). Podobne súčin troch koreňov rovnice (2) je rovný -1, takže tretí koreň je číslo $x = \frac{1}{2}$.

Záver. Jediným riešením úlohy sú čísla $a = -\frac{3}{2}$, $b = -\frac{7}{2}$, $c = -2$.

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Nájdite (ak existujú) všetky spoločné korene kubických rovníc

$$x^3 + \left(2\sqrt{2} - 1\right)x^2 - \left(9\sqrt{2} + 10\right)x + 10\sqrt{2} + 16 = 0,$$
$$x^3 + \left(2\sqrt{2} - 3\right)x^2 + \left(\sqrt{2} - 6\right)x - 10\sqrt{2} + 16 = 0.$$

[Spoločné korene musia vyhovovať kvadratickej rovnici $x^2 - \left(5\sqrt{2} + 2\right)x + 10\sqrt{2} = 0$, ktorú dostaneme, keď dané rovnice od seba odčítame a výsledok vydelíme dvoma. Táto rovnica má diskriminant $54 - 20\sqrt{2}$ rovný $\left(5\sqrt{2} - 2\right)^2$, takže jej korene sú čísla 2 a $5\sqrt{2}$. Dosadením sa presvedčíme, že spoločný koreň je iba číslo 2. Na precvičenie je možné dopočítať aj zvyšné korene daných kubických rovníc po znížení ich stupňa zvyčajnou metódou vydelením koreňovým činiteľom (v našom prípade rovným $x - 2$). Pri prvej z nich sú to čísla $\sqrt{2} + 1$ a $-2 - 3\sqrt{2}$, pri druhej čísla $\sqrt{2} - 1$ a $2 - 3\sqrt{2}$. Náročnejším miestom výpočtu je odmocňovanie diskriminantov tvaru $a + b\sqrt{2}$ cestou riešenia rovnice $a + b\sqrt{2} = \left(u + v\sqrt{2}\right)^2$ s neznámymi celými číslami u, v.]

N2. Zistite, pre ktoré reálne číslo p majú rovnice

$$x^3 + x^2 - 36x - p = 0,$$
$$x^3 - 2x^2 - px + 2p = 0$$

spoločný koreň v obore reálnych čísel. [52–A–S–3]

D1. Zistite, pre ktoré reálne čísla p má sústava

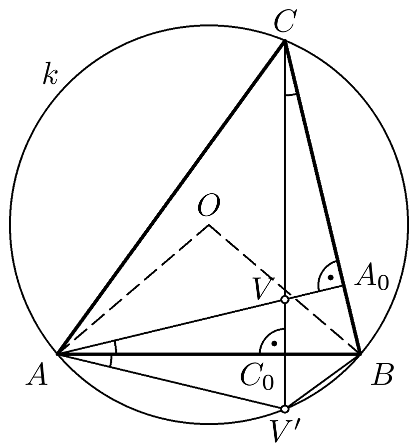
$$x^2y - 2x = p,$$
$$y^2x - 2y = 2p - p^2$$

práve tri riešenia v obore reálnych čísel. [B–51–I–5]

---

2. *V rovine je daná úsečka AV a ostrý uhol veľkosti α. Určte množinu stredov kružníc opísaných všetkým tým trojuholníkom ABC s vnútorným uhlom α pri vrchole A, ktorých výšky sa pretínajú v bode V.* (Pavel Leischner)

Riešenie. Najskôr dokážme jedno všeobecne užitočné tvrdenie o priesečníku V výšok ľubovoľného ostrouhlého trojuholníka ABC. Označme V' priesečník priamky obsahujúcej výšku CC_0 s kružnicou opísanou trojuholníku ABC (obr. 1). Pravouhlé trojuholníky



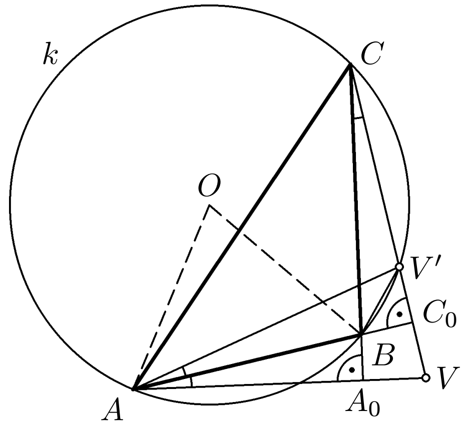
Obr. 1

C_0VA a A_0VC sú podobné (zhodujú se ešte v uhle pri vrchole V), preto $|\angle BAA_0| = |\angle BCC_0|$. Uhly BCC_0 a $V'AB$ sú zhodné obvodové uhly nad oblúkom $V'B$, takže *body V a V' sú súmerne združené podľa priamky AB.*

Ak označíme uhly v trojuholníku ABC zvyčajným spôsobom, tak $|\angle ACV'| = |\angle ACC_0| = 90^\circ - \alpha$, takže pre dĺžku úsečky AV vďaka uvedenej súmernosti dostaneme

$$|AV| = |AV'| = 2r \sin(90^\circ - \alpha) = 2r \cos\alpha, \tag{1}$$

pričom r je veľkosť polomeru kružnice k opísanej trojuholníku ABC (a zároveň aj trojuholníku $AV'C$). Rovnaký vzťah (1) platí pre trojuholník ABC s ostrým vnútorným uhlom α pri vrchole A aj v prípade, keď jeden z ostatných dvoch vnútorných uhlov (napr. pri vrchole B) je pravý alebo tupý (obr. 2). Celú úvahu môžeme doslova zopakovať.



Obr. 2

Teraz sa už pustíme do riešenia úlohy so zadanými bodmi A, V a danou veľkosťou ostrého uhla α. Vzťah (1) nás privádza k záveru, že kružnice opísané všetkým uvažovaným trojuholníkom ABC budú mať rovnaký polomer

$$r = \frac{|AV|}{2\cos\alpha}, \tag{2}$$

takže ich stredy O budú mať od daného bodu A pevnú, práve určenú vzdialenosť r. Je však potrebné určiť, akú časť kružnice $l(A, r)$ stredy O vyplnia; určite to bude množina súmerná podľa priamky AV, pretože súmernosť podľa osi AV zobrazuje vyhovujúci trojuholník na vyhovujúci trojuholník. S týmto cieľom vyjadríme veľkosť uhla VAO pomocou vnútorných uhlov $\beta = |\angle ABC|$ a $\gamma = |\angle ACB|$. Budeme pritom predpokladať, že $\beta \geqq \gamma$ (v opačnom prípade môžeme od úplného začiatku označenie vrcholov B, C navzájom vymeniť).

Predpokladajme najskôr, že $\beta < 90^\circ$, takže trojuholník ABC je ostrouhlý a môžeme opäť pracovať s obr. 1. Z rovnoramenného trojuholníka ABO s vnútorným uhlom 2γ pri hlavnom vrchole O vidíme, že $|\angle BAO| = 90^\circ - \gamma$, z pravouhlého trojuholníka BAA_0 zasa vyplýva $|\angle BAV| = 90^\circ - \beta$. Vzhľadom na to, že oba body O, V ležia v polrovine ABC, dostávame pre uhol VAO vyjadrenie

$$|\angle VAO| = |\angle BAO| - |\angle BAV| = (90^\circ - \gamma) - (90^\circ - \beta) = \beta - \gamma$$

(pripomeňme, že $\beta \geqq \gamma$).

V prípade $\beta \geqq 90°$ podľa obr. 2 podobne zistíme, že $|\measuredangle BAO| = 90° - \gamma$ a $|\measuredangle BAV| = \beta - 90°$, teda

$$|\measuredangle VAO| = |\measuredangle BAO| + |\measuredangle BAV| = (90° - \gamma) + (\beta - 90°) = \beta - \gamma.$$

Vidíme, že $|\measuredangle VAO| = \beta - \gamma$ bez ohľadu na to, či je trojuholník ABC ostrouhlý, pravouhlý alebo tupouhlý.

Teraz už ľahko dokončíme riešenie úlohy. Z odvodenej veľkosti uhla VAO vyplýva odhad

$$|\measuredangle VAO| = \beta - \gamma < \beta + \gamma = 180° - \alpha,$$

takže bod O leží vnútri oblúka kružnice $l(A, r)$ určeného nerovnosťou

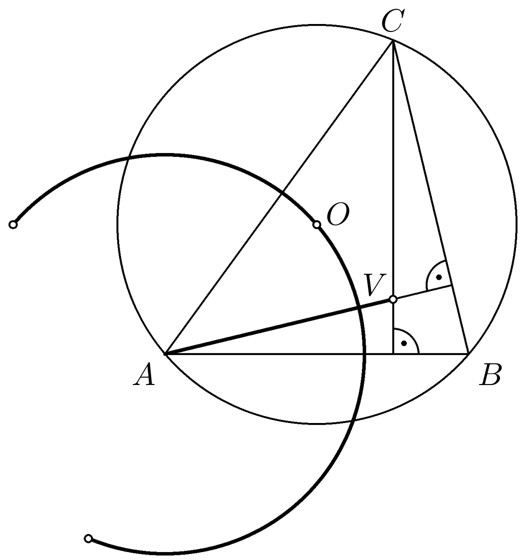
$$|\measuredangle VAO| < 180° - \alpha.$$

Ak naopak zvolíme uhol ε, $0° \leqq \varepsilon < 180° - \alpha$, jednoducho vypočítame, akú veľkosť musia mať vnútorné uhly β a γ, aby platilo $|\measuredangle VAO| = \varepsilon$:

$$\beta = \frac{180° - \alpha + \varepsilon}{2}, \quad \gamma = \frac{180° - \alpha - \varepsilon}{2}.$$

Ak teda vpíšeme do akejkoľvek kružnice s polomerom r zo vzťahu (2) pomocný trojuholník $A'B'C'$ s daným uhlom α pri vrchole A' a vypočítanými uhlami β, γ pri vrcholoch B', resp. C', pre jeho ortocentrum V' a stred O' opísanej kružnice budú splnené rovnosti $|A'V'| = |AV|$ a $|\measuredangle V'A'O'| = \varepsilon$. V zhodnom zobrazení, ktoré zobrazí úsečku $A'V'$ na úsečku AV, sa potom trojuholník $A'B'C'$ zobrazí na vyhovujúci trojuholník ABC, ktorého stred O opísanej kružnice bude ležať na kružnici l a vyhovovať rovnosti $|\measuredangle VAO| = \varepsilon$.

Záver. Hľadanou množinou stredov O opísaných kružníc je oblúk kružnice so stredom A a polomerom $r = \frac{1}{2}|AV|/\cos\alpha$ určený nerovnosťou $|\measuredangle VAO| < 180° - \alpha$ (krajné body tohto oblúka teda do výslednej množiny nepatria, obr. 3).



Obr. 3

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Ukážte, že dve priamky, na ktorých ležia osi vnútorných uhlov (resp. výšky, resp. spojnice vrcholov so stredom kružnice opísanej) trojuholníka, zvierajú uhol, ktorého veľkosť závisí iba od veľkosti vnútorného uhla pri zostávajúcom vrchole. Platí také tvrdenie aj pre priamky, na ktorých ležia ťažnice trojuholníka?

N2. Dokážte, že body súmerne združené s priesečníkom výšok podľa priamok, na ktorých ležia strany ostrouhlého trojuholníka, ležia na kružnici trojuholníku opísanej. [Viď riešenie súťažnej úlohy.] Odvoďte odtiaľ zaujímavé tvrdenie o troch kružniciach, ktoré sú obrazmi opísanej kružnice v spomenutých troch osových súmernostiach. [Tieto tri kružnice prechádzajú jedným bodom, totiž priesečníkom výšok.]

N3. Vyjadrite vzdialenosti priesečníka výšok ostrouhlého trojuholníka od jeho vrcholov v závislosti od kosínusov jeho vnútorných uhlov a polomeru kružnice opísanej. [Viď riešenie súťažnej úlohy.]

D1. Ukážte, že z úlohy N2 vyplýva rovnaké tvrdenie aj pre tupouhlý trojuholník pomocou tejto úvahy: Ak je V priesečník výšok trojuholníka ABC s tupým uhlom pri vrchole C, tak je bod C priesečníkom výšok ostrouhlého trojuholníka ABV.

---

3. *Množinu* M *tvorí* $2n$ *rôznych kladných reálnych čísel, pričom* $n \geqq 2$. *Uvažujme* n *obdĺžnikov, ktorých rozmery sú čísla z množiny* M, *pričom každý prvok z* M *je použitý práve raz. Určte, aké rozmery majú tieto obdĺžniky, ak je súčet ich obsahov*

a) najväčší možný; *b) najmenší možný.* (Jaroslav Švrček)

Riešenie. Venujme sa najskôr najjednoduchšej situácii, keď $n = 2$. Danú množinu M tak tvoria štyri kladné čísla, ktoré označíme podľa veľkosti

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4.$$

Máme iba tri možnosti, ako požadovaným spôsobom zostaviť dvojicu obdĺžnikov. Vypíšme na troch riadkoch ich rozmery:

$$\begin{aligned} &a_1 \times a_2 \quad \text{a} \quad a_3 \times a_4,\\ &a_1 \times a_3 \quad \text{a} \quad a_2 \times a_4,\\ &a_1 \times a_4 \quad \text{a} \quad a_2 \times a_3, \end{aligned}$$

a ukážme, že súčty obsahov týchto obdĺžnikov sú v uvedenom poradí klesajúce, t. j. že platí

$$a_1a_2 + a_3a_4 > a_1a_3 + a_2a_4 > a_1a_4 + a_2a_3. \tag{1}$$

Namiesto dvoch jednoduchých dôkazov (urobte sami) poznamenajme, že obe nerovnosti sú rovnakého typu a možno ich zdôvodniť všeobecným pravidlom

$$a < b,\ c < d \quad\Longrightarrow\quad ac + bd > ad + bc, \tag{2}$$

ktoré platí pre ľubovoľnú štvoricu reálnych čísel a, b, c, d vďaka rovnosti

$$(ac + bd) - (ad + bc) = (b - a)(d - c).$$

Naozaj, ľavú nerovnosť z (1) dostaneme z pravidla (2) voľbou

$$a = a_1,\quad b = a_4,\quad c = a_2,\quad d = a_3 \quad (\text{platí } a_1 < a_4 \text{ a } a_2 < a_3),$$

pravú nerovnosť zasa voľbou

$$a = a_1, \quad b = a_2, \quad c = a_3, \quad d = a_4 \quad (\text{platí } a_1 < a_2 \text{ a } a_3 < a_4).$$

Tým je úloha v prípade $n = 2$ vyriešená. Táto skúsenosť nás iste privedie k odhadu výsledku pre všeobecné $n \geqq 2$:

Ak $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2n}$ sú prvky danej množiny M, tak v súčte najväčší obsah má jediná n-tica obdĺžnikov s rozmermi $a_1 \times a_2, a_3 \times a_4, \ldots, a_{2n-1} \times a_{2n}$; v súčte najmenší obsah má jediná n-tica obdĺžnikov s rozmermi $a_1 \times a_{2n}, a_2 \times a_{2n-1}, \ldots, a_n \times a_{n+1}$.

Pre dôkaz prvého záveru predpokladajme, že vyhovujúca n-tica obdĺžnikov je zostavená tak, že čísla a_1, a_2 nie sú rozmery toho istého obdĺžnika. Potom v takej n-tici sú obdĺžniky $a_1 \times a_i$ a $a_2 \times a_j$, kde $i, j > 2$. Nahraďme ich obdĺžnikmi $a_1 \times a_2$ a $a_i \times a_j$. Dostaneme (inú) vyhovujúcu n-ticu obdĺžnikov, ktorá bude mať oproti pôvodnej n-tici v súčte väčší obsah, lebo platí

$$a_1a_2 + a_ia_j > a_1a_i + a_2a_j,$$

a to opäť vďaka pravidlu (2) pre čísla $a_1 < a_j$ a $a_2 < a_i$. Z tejto úvahy vyplýva, že v súčte najväčší obsah môže mať len taká n-tica uvažovaných obdĺžnikov, medzi ktorými je obdĺžnik $a_1 \times a_2$. Tento obdĺžnik môžeme teda dať bokom a uvažovať úlohu o najmenšom obsahu pre redukovanú množinu M' s $2n-2$ prvkami $a_3 < a_4 < \ldots < a_{2n}$. Opakovaním predchádzajúceho postupu vytvoríme obdĺžnik $a_3 \times a_4$ a urobíme ďalšiu redukciu množiny atď. (formálne môžeme využiť matematickú indukciu). Hypotéza o zostave obdĺžnikov v súčte s najväčším obsahom je tak dokázaná.

Veľmi podobne dokážeme záver o zostave v súčte s najmenším obsahom. Ak a_1, a_{2n} nie sú rozmery toho istého obdĺžnika, sú medzi uvažovanými obdĺžnikmi aj obdĺžniky $a_1 \times a_i$ a $a_j \times a_{2n}$ (pričom $1 < i, j < 2n$), ktoré nahradíme obdĺžnikmi $a_1 \times a_{2n}$ a $a_i \times a_j$. Tým sa v súčte obsah obdĺžnikov zmenší, lebo podľa pravidla (2) pre čísla $a_1 < a_j$ a $a_i < a_{2n}$ platí

$$a_1a_i + a_ja_{2n} > a_1a_{2n} + a_ia_j.$$

V súčte najmenší obsah preto môže mať len taká vyhovujúca n-tica obdĺžnikov, medzi ktorými je obdĺžnik $a_1 \times a_{2n}$. Tento obdĺžnik dáme bokom a uvažujeme úlohu o najmenšom obsahu pre redukovanú množinu M' s $2n - 2$ prvkami $a_2 < a_3 < \ldots < a_{2n-1}$. Všetko ostatné je už zbytočné opakovať.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte pravidlo (2) z riešenia úlohy. [Dôkaz je v uvedenom riešení.]

D1. Pravidlo (2) spomenuté v úlohe N1 využite na dôkaz tzv. *nerovností usporiadania*: Ak sú $a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n$ a $b_1 \leqq b_2 \leqq \ldots \leqq b_n$ dve n-tice reálnych čísel a $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, resp. $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ich ľubovoľné permutácie, tak pre súčet $S = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ platí $S_{\min} \leqq S \leqq S_{\max}$, kde $S_{\min} = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_n$ a $S_{\max} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$. [Návod: Ako v riešení súťažnej úlohy ukážte, že súčet S možno zväčšiť, ak sú medzi jeho sčítancami x_ky_k členy a_1b_i a a_jb_1, pričom $a_j > a_1$ a $b_i > b_1$. Podobne možno súčet S zmenšiť v prípade sčítancov a_1b_i a a_jb_n, pokiaľ $a_j > a_1$ a $b_n > b_i$. Takých zväčšení (zmenšení) možno opakovane urobiť len konečne veľa.]

D2. Nerovnosť usporiadania z úlohy D1 využite na dôkaz nerovností

$$a^3b + b^3c + c^3a \leqq a^4 + b^4 + c^4 \quad \text{a} \quad \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geqq a^2 + b^2 + c^2$$

pre ľubovoľné kladné čísla a, b, c. [Ak $p \leqq q \leqq r$ je neklesajúce poradie čísel a, b, c, tak $p^3 \leqq q^3 \leqq r^3$ a $p^{-1} \geqq q^{-1} \geqq r^{-1}$.]

D3. Zachovajme predpoklady a označenie z úlohy D2. Ukážte, že sčítaním n vhodných nerovností usporiadania možno odvodiť tzv. *Čebyševove nerovnosti*

$$n \cdot S_{\min} \leqq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \leqq n \cdot S_{\max}.$$

S ich pomocou potom dokážte, že pre ľubovoľné kladné a, b, c platí

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a^3 + b^3 + c^3) \leqq 3(a^5 + b^5 + c^5) \leqq (a^7 + b^7 + c^7)(a^{-2} + b^{-2} + c^{-2}).$$

D4. Čísla od 1 do 2 000 boli rozdelené na 1 000 (disjunktných) dvojíc (a_i, b_i) tak, že pre každé $i = 1, 2, \ldots, 1\,000$ je rozdiel $|a_i - b_i|$ rovný jednému z čísel 1 alebo 6. Určte, akou číslicou končí desiatkový zápis čísla

$$S = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots + |a_{1000} - b_{1000}|.$$

[Nulou. Platí $S = 1\,000 + 5p$, kde p je počet dvojíc (a_i, b_i) s vlastnosťou $|a_i - b_i| = 6$. Počet tých dvojíc, v ktorých sú obe čísla nepárne, sa musí rovnať počtu tých dvojíc, kde sú obe párne. Preto je číslo p párne.]

D5. Pre dané prirodzené $n \geqq 2$ rozdeľme množinu $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ ľubovoľným spôsobom na dve (disjunktné) n-prvkové množiny A a B. Prvky z A označme v rastúcom poradí $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, prvky z B v klesajúcom poradí $b_1 > b_2 > \ldots > b_n$. Nájdite všetky možné hodnoty súčtu

$$S = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots + |a_n - b_n|.$$

[Všetky súčty majú rovnakú hodnotu $(n+1)+(n+2)+\ldots+2n-(1+2+\ldots+n) = n^2$. Návod: Pre každé i je menšie z čísel a_i, b_i menšie než $n - i$ čísel z jednej množiny a i čísel z druhej množiny, čo dokopy znamená, že je menšie ako niektorých n čísel z celej množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$, musí preto ležať v množine $\{1, 2, \ldots, n\}$. Podobne väčšie z čísel a_i, b_i musí ležať v množine $\{n + 1, n + 2, \ldots, 2n\}$.]

---

4. *Určte počet konečných rastúcich postupností prirodzených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_k$ všetkých možných dĺžok k, pre ktoré platí $a_1 = 1$, $a_i \mid a_{i+1}$ pre $i = 1, 2, \ldots, k-1$ a $a_k = 969\,969$.* (*Martin Panák*)

Riešenie. Zo zadania úlohy vyplýva, že všetky členy uvažovaných postupností budú deliteľmi ich posledného člena, rovného číslu 969 969. Nájdime preto najskôr rozklad tohto čísla na súčin prvočísel:

$$969\,969 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19. \tag{1}$$

Teraz už ľahko môžeme vytvárať príklady vyhovujúcich postupností rôznych dĺžok. Vypíšme napríklad tú najkratšiu, jednu z najdlhších a ešte jednu ďalšiu:

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) &= (1, 969\,969),\\ (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) &= (1, 13, 91, 1\,729, 5\,187, 57\,057, 969\,969),\\ (a_1, a_2, a_3, a_4) &= (1, 21, 4\,641, 88\,179, 969\,969).\end{aligned}$$

(Skontrolujte uvedené príklady výpočtom podielu a_{i+1}/a_i pre všetky prípustné i).

Experimentovaním s konkrétnymi postupnosťami dôjdeme k poznaniu ich spoločných vlastností, ktoré ich úplne charakterizujú:

Ľubovoľný člen a_i každej vyhovujúcej postupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_k$ je súčinom niekoľkých (v prípade $i = 1$ žiadneho, v prípade $i = k$ všetkých) z šiestich rôznych prvočísel z rozkladu (1), pritom (v prípade $i < k$) člen a_{i+1} má okrem všetkých činiteľov člena a_i ešte aspoň jedného nového činiteľa navyše (postupnosť má byť rastúca!). Naopak, každá takáto konečná postupnosť je vyhovujúca.

Z uvedeného vyplýva spôsob, ako „úsporne" zadať každú vyhovujúcu postupnosť; stačí len uviesť, ako sa nové činitele postupne objavujú, t. j. zadať postupnosť podielov

$$\frac{a_2}{a_1},\ \frac{a_3}{a_2},\ \frac{a_4}{a_3},\ \ldots,\ \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}},\ \frac{a_k}{a_{k-1}}, \tag{2}$$

do ktorých rozkladov na súčin prvočísel je šesť prvočísel z (1) rozdelených (v každom aspoň jedno). Preto je hľadaný počet vyhovujúcich postupností rovný počtu rozdelení šiestich daných prvočísel do jednej alebo niekoľkých *očíslovaných* neprázdnych skupín (zodpovedajúcich prvočiniteľom podielov (2), takže na poradí prvočísel v skupine nezáleží). Slovo „očíslovaných" znamená, že na poradí skupín záleží. Napríklad pre rozdelenie do dvoch skupín $\{3, 11, 19\}$, $\{7, 13, 17\}$ dostaneme podľa toho, v akom poradí obe skupiny vezmeme, dve vyhovujúce postupnosti $(1, u, uv)$ a $(1, v, uv)$, pričom $u = 3 \cdot 11 \cdot 19$ a $v = 7 \cdot 13 \cdot 17$.

Dospeli sme tak ku kombinatorickej úlohe určenia hodnoty $P(6)$, pričom $P(n)$ označuje počet rozdelení n-prvkovej množiny X na ľubovoľný počet očíslovaných neprázdnych podmnožín X_1, X_2, X_3, … Nie je ľahké hodnotu $P(6)$ vypočítať *priamo*, avšak bude možné hodnoty $P(n)$ počítať *postupne* pre $n = 1$, $n = 2$, atď. až po potrebné $n = 6$. Takému spôsobu výpočtu hovoríme *rekurentný*. V našej úlohe bude výpočet založený na rekurentnom vzťahu

$$P(n) = \binom{n}{1}P(n-1) + \binom{n}{2}P(n-2) + \ldots + \binom{n}{n-1}P(1) + 1 \tag{3}$$

platnom pre každé $n \geqq 2$, ako teraz ukážeme.

Všetky uvažované rozdelenia n-prvkovej množiny X rozdelíme na n skupín podľa počtu j prvkov prvej podmnožiny X_1 ($1 \leqq j \leqq n$). Prvú podmnožinu X_1 s j prvkami možno vybrať práve $\binom{n}{j}$ spôsobmi, práve $P(n-j)$ spôsobmi potom možno zvyšnú množinu $X' = X \setminus X_1$ rozdeliť na neprázdne očíslované podmnožiny X_2, X_3, X_4, … (Platí to aj v prípade $j = n$, keď položíme $P(0) = 1$, keďže už nie je čo rozdeľovať.) Podľa pravidla súčinu je preto počet všetkých rozdelení pôvodnej množiny X s prvou množinou X_1 majúcou j prvkov rovný $\binom{n}{j}P(n-j)$. Tým je vzťah (3), na ktorého pravej strane posledný člen 1 zodpovedá hodnote $j = n$, dokázaný.

Zo zrejmej hodnoty $P(1) = 1$ vypočítame opakovaným použitím vzťahu (3) ďalšie hodnoty $P(2) = 3$, $P(3) = 13$, $P(4) = 75$, $P(5) = 541$ a $P(6) = 4\,683$.

Záver. Existuje práve 4 683 vyhovujúcich postupností.

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Koľkými spôsobmi možno číslo 49 000 rozložiť na súčin dvoch celých čísel väčších ako 1, keď na poradí činiteľov nezáleží? [23 spôsobov. Návod: číslo $49\,000 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2$ má $(3+1) \cdot (3+1) \cdot (2+1) = 48$ deliteľov, z ktorých môžeme utvoriť 24 neusporiadaných dvojíc $\{a, b\}$ s vlastnosťou $ab = 49\,000$. Jedna z nich je nevyhovujúca dvojica $\{1, 49\,000\}$.]

N2. Určte počet $P(n)$ spôsobov, ako si rozdeliť vianočnú zásobu n rovnakých cukríkov na zjedenie v priebehu niekoľkých prvých dní nového roku. (V každom z daných dní musíme mať aspoň jeden cukrík. Je možné aj také „rozdelenie", keď všetky cukríky zjeme na Nový rok.) Ako sa zmení odpoveď, keď každé dva z daných n cukríkov budú rôzne? [Pre prípad rovnakých cukríkov platí $P(n) = 2^{n-1}$ podľa pravidla súčinu použitého na postupné rozdeľovanie cukríkov: prvý predelíme na Nový rok a každý nasledujúci cukrík buď na rovnaký deň ako predchádzajúci cukrík, alebo na deň nasledujúci. Pre prípad rôznych cukríkov je situácia zložitejšia a vedie na rekurentný vzťah (3) z riešenia súťažnej úlohy.]

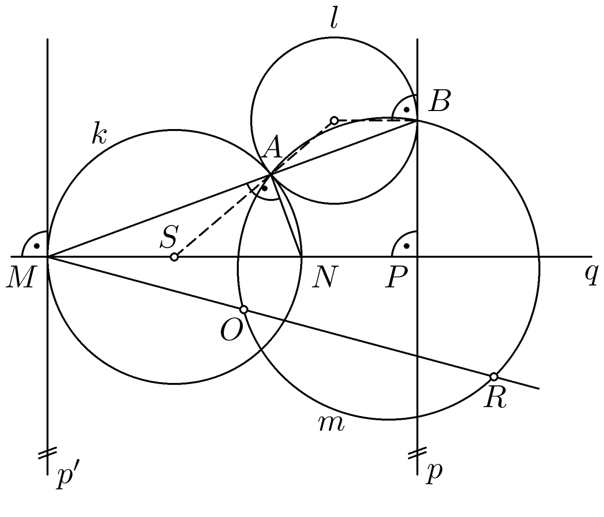
D1. Určte, koľko čísel môžeme vybrať z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 75\,599, 75\,600\}$ tak, aby medzi nimi bolo číslo 75 600 a aby pre ľubovoľné dve vybrané čísla a, b platilo, že a je deliteľom b alebo b deliteľom a. (Uveďte všetky možnosti.) [51–B–I–2]

D2. Uvažujme množinu $\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 32, 40, 80, 160\}$ a všetky jej trojprvkové podmnožiny. Rozhodnite, či je viac tých, ktoré majú súčin svojich prvkov väčší ako 2006, alebo tých, ktoré majú súčin svojich prvkov menší ako 2006. [56–A–S–2]

---

5. *Je daná kružnica k, bod O, ktorý na nej neleží, a priamka p, ktorá ju nepretína. Uvažujme ľubovoľnú kružnicu l, ktorá má vonkajší dotyk s kružnicou k a dotýka sa aj priamky p. Príslušné body dotyku označme A a B. Pokiaľ body O, A, B neležia na jednej priamke, zostrojíme kružnicu m opísanú trojuholníku OAB. Dokážte, že všetky také kružnice m prechádzajú spoločným bodom rôznym od bodu O, alebo sa dotýkajú jednej priamky.* (*Ján Mazák*)

Riešenie. Jedna z vyhovujúcich kružníc l je znázornená na obr. 4. Bod A vonkajšieho dotyku kružníc k, l je ich (vnútorným) stredom rovnoľahlosti, v ktorej dotyčnici p kružnice l zodpovedá s ňou rovnobežná dotyčnica p' kružnice k. Jej bod dotyku M s kružnicou k leží na osi q kružnice k, ktorá je kolmá na priamku p. Pritom z dvoch priesečníkov M, N priamky q s kružnicou k je bod M ten vzdialenejší od priamky p, lebo úsečka spájajúca rovnoľahlé body dotyku M a B pretína kružnicu k v bode A (v strede príslušnej rovnoľahlosti).



Obr. 4

Bod M teda od voľby kružnice l nezávisí. Body $A \in k$ a $B \in p$ pochopiteľne áno, ukážme však, že ich vzájomná poloha na polpriamke s počiatkom M je viazaná podmienkou

$$|MA| \cdot |MB| = |MN| \cdot |MP|, \tag{1}$$

kde P je priesečník kolmíc p a q. To jednoducho vyplýva z podobnosti

$$|MA| : |MN| = |MP| : |MB|$$

pravouhlých trojuholníkov AMN, PMB. Vzťah (1) možno tiež zdôvodniť pomocou mocnosti bodu M ku kružnici zostrojenej nad priemerom NB (ktorá prechádza bodmi P, A podľa Tálesovej vety).

Až teraz vstúpi do našich úvah daný bod O. Na obr. 4 je kružnica l vybraná tak, že zodpovedajúca priamka AB bodom O neprechádza, takže existuje kružnica m opísaná trojuholníku OAB. Podľa zadania $O \notin k$, a teda $O \neq M$, takže je určená polpriamka MO, ktorá okrem bodu O bude mať s kružnicou m spoločný ešte jeden bod, ktorý označíme R (v prípade, keď MO je dotyčnica kružnice m, položíme $R = O$).[1] Dvojakým vyjadrením mocnosti bodu M ku kružnici m potom dostaneme

$$|MA| \cdot |MB| = |MO| \cdot |MR|,$$

odkiaľ porovnaním s (1) zistíme, že úsečka MR má dĺžku

$$|MR| = \frac{|MN| \cdot |MP|}{|MO|},$$

ktorá zrejme nezávisí od voľby kružnice l. Keďže bod R navyše leží na pevnej polpriamke MO, je v prípade $|MR| \neq |MO|$ bod R spoločným bodom všetkých kružníc m ($R \neq O$), v prípade $|MR| = |MO|$ je priamka MO ich spoločná dotyčnica. Tým je riešenie úlohy na konci.

Návodné a doplňajúce úlohy:

Zopakujte si najskôr učebnicové poznatky o rovnoľahlosti dvoch kružníc (obzvlášť prípad, keď sa kružnice dotýkajú) a ich rovnobežných (špeciálne spoločných) dotyčníc. Pripomeňte si tiež vlastnosť všetkých sečníc danej kružnice prechádzajúcich daným bodom, vyjadrenú mocnosťou bodu ku kružnici.

N1. V rovine je daná kružnica k, priamka p a bod $B \in p$. Zostrojte kružnicu l, ktorá sa dotýka ako kružnice k, tak priamky p, a to v bode B. [Jedna zo známych tzv. *Pappových úloh.*]

D1. V rovine sú dané kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ tak, že $S_2 \in k_1$ a $r_1 > r_2$. Spoločné dotyčnice oboch kružníc sa dotýkajú kružnice k_1 v bodoch P a Q. Dokážte, že priamka PQ sa dotýka kružnice k_2. [52–A–S–2]

D2. Sú dané kružnice k a l s rôznymi polomermi, ktoré sa zvonka dotýkajú v bode T. Priesečníkom M ich spoločných vonkajších dotyčníc veďme sečnicu s oboch kružníc. Označme X ten z oboch priesečníkov kružnice k so sečnicou s, ktorý je vzdialenejší od bodu M. Podobne označme Y ten z oboch priesečníkov kružnice l so sečnicou s, ktorý je vzdialenejší od bodu M. Nech P je taký bod, že $XTYP$ je rovnobežník. Určte množinu bodov P zodpovedajúcich všetkým takým sečniciam s. [49–B–I–2]

D3. Je daný rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB. Na jeho výške CD je zvolený bod P tak, že kružnice vpísané trojuholníku ABP a štvoruholníku $PECF$ sú zhodné; pritom bod E je priesečník priamky AP so stranou BC a F priesečník priamky BP so stranou AC. Dokážte, že aj kružnice vpísané trojuholníkom ADP a BCP sú zhodné. [49–A–III–2]

[1] Zdôraznime, že vzhľadom na vzájomnú polohu bodov M, A, B leží bod M vo vonkajšej oblasti *každej* kružnice prechádzajúcej bodmi A, B, teda aj kružnice m. Polpriamka MO má teda s kružnicou m, ak nie je jej dotyčnicou, spoločné skutočne dva rôzne body.

6. *Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n existuje celé číslo a $(1 < a < 5^n)$ také, že platí $5^n \mid a^3 - a + 1$.* (*Ján Mazák*)

Riešenie. Začneme trochu obšírnejšie prípadom $n = 1$. Nájdeme *všetky* celé čísla a s vlastnosťou $5 \mid a^3 - a + 1$. Najskôr zostavíme tabuľku hodnôt $r^3 - r + 1$ pre všetky možné zvyšky r po delení piatimi, teda pre $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$:

r	0	1	2	3	4
$r^3 - r + 1$	1	1	7	25	61

Pre ostatné celé čísla a už hodnoty $a^3 - a + 1$ počítať nemusíme. Ak je totiž r zvyšok čísla a po delení piatimi, teda $a = 5q + r$ pre vhodné celé q, tak čísla $a^3 - a + 1$ a $r^3 - r + 1$ dávajú po delení piatimi rovnaký zvyšok, lebo ich rozdiel

$$(a^3 - a + 1) - (r^3 - r + 1) = (a^3 - r^3) - (a - r) = (a - r)(a^2 + ar + r^2 - 1)$$

je deliteľný číslom $a - r = 5q$, je teda násobkom piatich.[2] Z uvedenej tabuľky vidíme, že pre celé a platí $5 \mid a^3 - a + 1$ práve vtedy, keď $a = 5q + 3$.

Zadanú úlohu vyriešime tak, že indukciou vzhľadom na číslo n dokážeme existenciu celého čísla a_n z intervalu $(1, 5^n)$, ktoré vyhovuje podmienke $5^n \mid a_n^3 - a_n + 1$. Pre $n = 1$ podľa prvého odstavca dokazované tvrdenie spĺňa (v intervale $(1, 5)$!) jediné číslo $a_1 = 3$.

V druhom indukčnom kroku predpokladajme, že pre niektoré prirodzené k poznáme číslo a_k z intervalu $(1, 5^k)$ s vlastnosťou $5^k \mid a_k^3 - a_k + 1$, a na základe znalosti a_k zostrojme vyhovujúce číslo a_{k+1}. Zvyškom čísla $a_k^3 - a_k + 1$ po delení číslom 5^{k+1} musí byť číslo deliteľné 5^k, teda jedno z čísel

$$0,\ 5^k,\ 2 \cdot 5^k,\ 3 \cdot 5^k,\ 4 \cdot 5^k.$$

Zapíšme preto tento zvyšok v tvare $r \cdot 5^k$, pričom $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, a hľadajme číslo a_{k+1} v tvare $a_{k+1} = a_k + s \cdot 5^k$ pre vhodné $s \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. (Je hneď jasné, že v prípade $r = 0$ môžeme zobrať $a_{k+1} = a_k$, teda $s = 0$). Aj keď hodnotu s vyberieme až za chvíľu, z podmienky $1 < a_k < 5^k$ a nerovností $a_k \leqq a_{k+1} \leqq a_k + 4 \cdot 5^k$ už teraz vyplýva, že podmienka $1 < a_{k+1} < 5^{k+1}$ bude splnená (nech dopadne výber s akokoľvek). Pre číslo a_{k+1} zvoleného tvaru dostávame

$$\begin{aligned}\frac{a_{k+1}^3 - a_{k+1} + 1}{5^{k+1}} &= \frac{\left(a_k + s \cdot 5^k\right)^3 - \left(a_k + s \cdot 5^k\right) + 1}{5^{k+1}} = \\ &= \frac{a_k^3 + 3a_k^2 s \cdot 5^k + 3a_k s^2 \cdot 5^{2k} + s^3 \cdot 5^{3k} - a_k - s \cdot 5^k + 1}{5^{k+1}} = \\ &= 3a_k s^2 \cdot 5^{k-1} + s^3 \cdot 5^{2k-1} + \frac{\left(a_k^3 - a_k + 1\right) - r \cdot 5^k}{5^{k+1}} + \frac{\left(3a_k^2 - 1\right) s + r}{5}.\end{aligned}$$

Ak budú oba záverečné zlomky celočíselné, bude taká aj hodnota celého posledného súčtu. Prvý zlomok túto vlastnosť má vďaka tomu, ako sme zaviedli číslo $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Preto je len potrebné nájsť také $s \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, aby aj druhý zlomok

[2] Rovnako ľahko sa dokáže všeobecnejší užitočný poznatok: pre ľubovoľný mnohočlen F s celočíselnými koeficientmi a ľubovoľné celé a, b je rozdiel $F(a) - F(b)$ celočíselným násobkom rozdielu $a - b$.

bol celočíselný, teda aby číslo $\left(3a_k^2-1\right)s+r$ bolo deliteľné piatimi. Stačí ukázať, že päť čísel

$$c(s)=\left(3a_k^2-1\right)s+r,\quad \text{pričom}\quad s\in\{0,1,2,3,4\},$$

dáva po delení piatimi navzájom rôzne zvyšky (jeden z nich potom bude nula). Keby to tak nebolo, platilo by $5\mid c(s)-c(s')$ pre niektoré dve rôzne $s,s'\in\{0,1,2,3,4\}$; z vyjadrenia

$$c(s)-c(s')=\left(3a_k^2-1\right)(s-s')$$

by sme potom usúdili, že číslo $3a_k^2-1$ je deliteľné piatimi. Vzťah $5\mid 3a^2-1$ však neplatí pre žiadne celé a; podľa úvah z prvého odstavca sa stačí o tom presvedčiť pre päť hodnôt $a\in\{0,1,2,3,4\}$:

a	0	1	2	3	4
$3a^2-1$	-1	2	11	26	47

Tým je celý dôkaz matematickou indukciou ukončený. Pre zaujímavosť dodajme, že sme schopní ľahko vysvetliť, že naše číslo $3a_k^2-1$ dáva po delení piatimi vždy zvyšok 1 (takže v prípade $r\neq 0$ vyhovuje $s=5-r$). Naozaj, vzhľadom na to, že $k\geqq 1$, z podmienky $5^k\mid a_k^3-a_k+1$ vyplýva $5\mid a_k^3-a_k+1$, čo je podľa prvého odstavca splnené práve vtedy, keď $a_k=5k+3$; číslo $3a_k^2-1$ teda po delení piatimi dáva rovnaký zvyšok ako číslo $3\cdot 3^2-1=26$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n existuje celé číslo a také, že $2^n\mid a^2+2\,007$. [Indukciou nájdeme celé a_n s vlastnosťou $2^n\mid a_n^2+2\,007$. Zrejme vyhovuje $a_1=a_2=$ $=a_3=1$, a keď máme pre niektoré $k\geqq 3$ vyhovujúce a_k, tak položíme buď $a_{k+1}=a_k$, alebo $a_{k+1}=a_k+2^{k-1}$, podľa toho, či číslo $a_k^2+2\,007$ dáva po delení číslom 2^{k+1} zvyšok 0, alebo zvyšok 2^k (iný zvyšok podmienka $2^k\mid a_k^2+2\,007$ vylučuje). V druhom prípade

$$\frac{a_{k+1}^2+2\,007}{2^{k+1}}=\frac{a_k^2+2\,007-2^k}{2^{k+1}}+\frac{a_k+1}{2}+2^{k-3},$$

čo je celé číslo, lebo a_k je vzhľadom na $2^k\mid a_k^2+2\,007$ nutne nepárne.]

D1. Číslo $1\,997^{2^n}-1$ je deliteľné číslom 2^{n+2} pre každé prirodzené číslo n. Dokážte. [47–A–I–1]

D2. Číslo $1\,997^{3^n}+1$ je deliteľné číslom 3^{n+3} pre každé prirodzené číslo n. Dokážte. [47–A–II–1]