2007/2008
57. ročník MO *Riešenia úloh školského kola kategórie A*

1. *V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc*

$$x^2 - y = z^2,$$
$$y^2 - z = x^2,$$
$$z^2 - x = y^2.$$

(*Ján Mazák*)

Riešenie. Sčítaním všetkých troch rovníc po zrušení kvadratických členov dostaneme

$$x + y + z = 0. \tag{1}$$

Odtiaľ vyjadríme $z = -x - y$ a dosadíme do prvej rovnice sústavy. Obdržíme $x^2 - y = (-x-y)^2$, čo po úprave dá rovnicu $y(2x+y+1) = 0$. Rozoberieme preto dva prípady podľa toho, ktorý z oboch činiteľov na jej ľavej strane je rovný nule.

V prípade $y = 0$ z rovnice (1) obdržíme $z = -x$ a po dosadení y, z do pôvodnej sústavy dostaneme pre neznámu x jedinú podmienku $x(x-1) = 0$, ktorú spĺňa iba $x = 0$ a $x = 1$. Tomu zodpovedajú riešenia (x, y, z) tvaru $(0, 0, 0)$ a $(1, 0, -1)$.

V prípade, keď $2x + y + 1 = 0$, čiže $y = -2x - 1$, z (1) máme $z = -x - y = x + 1$. Po dosadení y, z do pôvodnej sústavy dostaneme pre neznámu x jedinú podmienku $x(x+1) = 0$, ktorú spĺňajú iba $x = 0$ a $x = -1$. Tomu zodpovedajú riešenia (x, y, z) tvaru $(0, -1, 1)$ a $(-1, 1, 0)$.

Záver. Daná sústava má práve štyri riešenia (x, y, z): trojice $(0, 0, 0)$, $(1, 0, -1)$, $(0, -1, 1)$ a $(-1, 1, 0)$.

Iné riešenie. Sčítaním dvoch prvých rovníc danej sústavy eliminujeme neznámu x a dostaneme rovnicu $y^2 - z^2 = y + z$, ktorú možno zapísať v tvare súčinu

$$(y + z)(y - z - 1) = 0. \tag{2}$$

Rozoberieme opäť dva prípady podľa toho, ktorý z dvoch činiteľov v poslednej rovnici sa rovná nule.

V prípade $y + z = 0$ z tretej rovnice danej sústavy vyjde $x = 0$ a z prvých dvoch rovníc po dosadení $x = 0$ a $z = -y$ dostaneme pre neznámu y jedinú podmienku $y(y+1) = 0$, teda $y = 0$ alebo $y = -1$. Zodpovedajúce riešenia (x, y, z) sú $(0, 0, 0)$ a $(0, -1, 1)$.

V prípade, keď $y - z - 1 = 0$, čiže $z = y - 1$, získame z tretej rovnice sústavy $x = z^2 - y^2 = (y-1)^2 - y^2 = 1 - 2y$. Dosadením x, z dostaneme pre neznámu y jedinú podmienku $y(y-1) = 0$, teda $y = 0$ alebo $y = 1$. Zodpovedajúce riešenia (x, y, z) sú $(1, 0, -1)$ a $(-1, 1, 0)$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Odvodenie rovnice (1) alebo aspoň jednej z troch analogických rovníc v tvare súčinu (2) oceňte 2 bodmi.

2. *Podstavy hranola sú tvorené dvoma zhodnými konvexnými n-uholníkmi. Počet v vrcholov tohto telesa, počet s jeho stenových uhlopriečok a počet t jeho telesových uhlopriečok tvoria v istom poradí prvé tri členy aritmetickej postupnosti. Pre ktoré n to platí?*
(Poznámka: Steny hranola sú bočné steny aj podstavy. Telesová uhlopriečka je úsečka spájajúca dva vrcholy hranola, ktoré neležia v rovnakej stene.) (*Vojtech Bálint*)

Riešenie. Každý n-boký hranol má práve n vrcholov v každej zo svojich podstáv, takže $v = 2n$. Z každého vrcholu vychádza $n-3$ uhlopriečok ležiacich v podstave a dve uhlopriečky ležiace v bočných stenách, celkom je to $n-1$ stenových uhlopriečok. Z $2n$ vrcholov teda vychádza $2n(n-1)$ stenových uhlopriečok, každá z nich je však započítaná dvakrát, preto $s = n(n-1)$. Podobne určíme počet t telesových uhlopriečok: z každého vrcholu ich vychádza $n-3$ (do všetkých vrcholov druhej podstavy s výnimkou tých troch vrcholov, s ktorými je daný vrchol spojený hranou alebo uhlopriečkou v bočnej stene), preto $t = 2n(n-3)/2 = n(n-3)$.

Hľadáme tie celé $n \geqq 3$, pre ktoré čísla

$$v = 2n, \quad s = n(n-1) \quad \text{a} \quad t = n(n-3)$$

tvoria vo vhodnom poradí trojicu x, y, z s vlastnosťou $y - x = z - y$, čiže $y = \frac{1}{2}(x+z)$. Jednoduchým dosadením zistíme, že pre $n = 3$ máme nevyhovujúcu trojicu čísel 6, 6, 0, zatiaľ čo pre $n = 4$ vychádza vyhovujúca trojica 8, 12, 4 (platí $8 = \frac{1}{2}(4+12)$). Pre ľubovoľné $n \geqq 5$ máme $n-1 > n-3 \geqq 2$, odkiaľ po násobení číslom n dostaneme $s > t \geqq v$, takže požadovaná rovnosť s aritmetickým priemerom musí byť tvaru $t = \frac{1}{2}(v+s)$. Po dosadení dostávame rovnicu

$$n(n-3) = \frac{2n + n(n-1)}{2}$$

s jediným prípustným koreňom $n = 7$ (koreň $n = 0$ nemá reálny zmysel).

Záver. Vyhovujú jedine $n = 4$ a $n = 7$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 1 bod za vyjadrenie počtu s a 2 body za vyjadrenie počtu t (v závislosti od premennej n), ďalšie body podľa úplnosti diskusie, v akom poradí môžu čísla v, s, t tvoriť aritmetickú postupnosť. Pokiaľ riešiteľ zabudne na riešenie $n = 4$ (napr. prehlási za zrejmé nerovnosti $s > t > v$), dajte najviac 5 bodov.

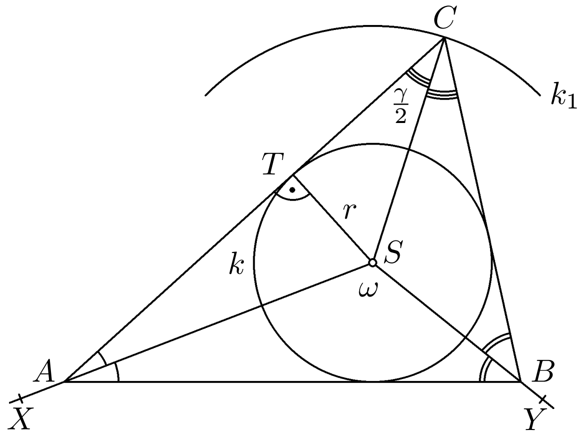
3. *V rovine je daný uhol XSY a kružnica k so stredom S. Uvažujme ľubovoľný trojuholník ABC s vpísanou kružnicou k, ktorého vrcholy A a B ležia postupne na polpriamkach SX a SY. Určte množinu vrcholov C všetkých takých trojuholníkov ABC.*
(*Jaromír Šimša*)

Riešenie. Označme r polomer danej kružnice k a ω veľkosť daného (konvexného) uhla XSY. V ľubovoľnom vyhovujúcom trojuholníku ABC označme zvyčajným spôsobom vnútorné uhly. V trojuholníku ABS platí (obr. 1)

$$\omega = |\measuredangle ASB| = 180^\circ - |\measuredangle SAB| - |\measuredangle SBA| = 180^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2} = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}.$$

Odtiaľ vyplýva, že hľadaná množina je prázdna, ak $\omega \leqq 90°$ alebo $\omega = 180°$, a že všetky vyhovujúce trojuholníky ABC majú vnútorný uhol γ, pre ktorého veľkosť platí

$$\gamma = 2\omega - 180°.$$



Obr. 1

Z pravouhlého trojuholníka CST, pričom T je bod dotyku kružnice k so stranou AC (obr. 1), vyjadríme dĺžku prepony SC vzťahom

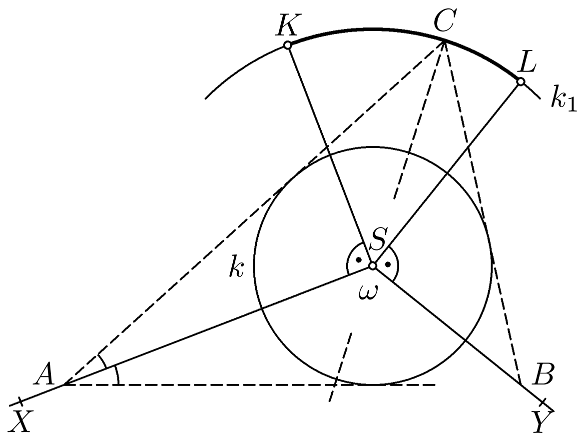
$$|SC| = \frac{|ST|}{\sin \frac{1}{2}\gamma} = \frac{r}{\sin(\omega - 90°)}.$$

Bod C preto leží na kružnici k_1 so stredom S a polomerom $r_1 = r/\sin(\omega - 90°)$.

Rovnako ako uhol ASB sú aj uhly ASC a BSC (čiže uhly XSC a YSC) tupé, lebo

$$|\measuredangle ASC| = 90° + \frac{\beta}{2} \quad \text{a} \quad |\measuredangle BSC| = 90° + \frac{\alpha}{2}. \tag{1}$$

Spolu tak dostávame, že bod C je vnútorným bodom oblúka KL kružnice k_1, ktorý leží zvonka daného uhla XSY a ktorého krajné body K, L sú určené pravými uhlami XSK a YSL (obr. 2).



Obr. 2

Ak naopak vyberieme ľubovoľný vnútorný bod C oblúka KL, polpriamky SX, SY a SC rozdelia rovinu na tri tupé uhly, pričom polpriamka CS oddelí body X a Y. Z rovnosti $|SC| = r_1$ vyplýva, že dotyčnica z bodu C ku kružnici k zostrojená v polrovine CSX zviera s polpriamkou CS ostrý uhol $\omega - 90°$, takže pretne polpriamku SX v bode, ktorý označíme A. Analogicky dotyčnica z bodu C ku kružnici k zostrojená v polrovine CSY pretne polpriamku SY v bode, ktorý označíme B.

Zvoľme teraz hodnoty α, β, γ tak, aby $\omega - 90° = \frac{1}{2}\gamma$, $|\measuredangle CSK| = \frac{1}{2}\beta$, $|\measuredangle CSL| = \frac{1}{2}\alpha$, potom z plného uhla pri vrchole S vyplýva

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 180° - \omega = 90° - \frac{\gamma}{2} \quad \text{čiže } \alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Ako ľahko spočítame, dotyčnica z nájdeného bodu A ku kružnici k súmerne združená s dotyčnicou AC podľa priamky SX pretína polpriamku CS pod uhlom $\frac{1}{2}\gamma + \alpha$, a podobne vyjde, že analogická dotyčnica z nájdeného bodu B pretne tú istú polpriamku pod uhlom $\frac{1}{2}\gamma + \beta$. Súčet oboch uvedených uhlov je však $180°$, preto sú obe dotyčnice ku kružnici k rovnobežné, a teda totožné (oba príslušné body dotyku musia totiž ležať vnútri konvexného uhla XSY). Nájdený trojuholník ABC má preto požadované vlastnosti.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za určenie uhla γ dajte 1 bod, ďalšie 2 body za určenie polomeru $r_1 = |SC|$ kružnice k_1 a 2 body za vymedzenie jej oblúka KL. Ak chýba záverečné zdôvodnenie, že každý vnútorný bod C oblúka KL je vrcholom vyhovujúceho trojuholníka ABC, môže riešiteľ získať najviac 5 bodov.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe tak, aby zásielka bola doručená pred Vianocami. Odporúča sa odoslať najneskôr do 17. decembra 1. triedou.