2007/2008
57. ročník MO *Riešenia úloh krajského kola kategórie A*

1. *Nájdite všetky štvorice p, q, r, s navzájom rôznych reálnych čísel, pre ktoré sú p, q koreňmi rovnice*

$$x^2 + rx + s - 1 = 0$$

a r, s koreňmi rovnice

$$px^2 + p(q-1)x + 12 = 0.$$

(*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Ak $p = 0$, druhá rovnica má tvar $12 = 0$, nemá teda žiadne riešenie. Pre všetky hľadané štvorice je teda $p \neq 0$ a obe rovnice sú kvadratické.

Rôzne čísla p, q sú koreňmi kvadratickej rovnice $x^2 + rx + s - 1 = 0$ práve vtedy, keď spĺňajú Viètove vzťahy

$$p + q = -r, \qquad pq = s - 1. \tag{1}$$

Podobne sú *rôzne* čísla r, s koreňmi kvadratickej rovnice $px^2 + p(q-1)x + 12 = 0$ práve vtedy, keď spĺňajú Viètove vzťahy

$$r + s = -\frac{p(q-1)}{p}, \qquad rs = \frac{12}{p}. \tag{2}$$

Z (1) vyjadríme $r = -p - q$, $s = pq + 1$ a dosadíme do (2). Postupnými úpravami dostaneme rovnosti

$$\begin{aligned} -p - q + pq + 1 &= -\frac{p(q-1)}{p}, \\ -p + pq + 1 - q &= 1 - q, \\ pq &= p, \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} (-p-q)(pq+1) &= \frac{12}{p}, \\ -p(p+q)(pq+1) &= 12. \end{aligned}$$

Keďže $p \neq 0$, z rovnosti naľavo máme $q = 1$ a po dosadení do rovnosti napravo získame rovnicu $-p(p+1)^2 = 12$, ktorá po úprave prejde na rovnicu tretieho stupňa

$$p^3 + 2p^2 + p + 12 = 0. \tag{3}$$

Tá má koreň $p = -3$ a po vyňatí výrazu $(p+3)$ pred zátvorku ju upravíme na súčinový tvar $(p+3)(p^2 - p + 4) = 0$. Keďže kvadratická rovnica $p^2 - p + 4 = 0$ nemá žiadne reálne riešenie (jej diskriminant je -15), je $p = -3$ jediným riešením rovnice (3). Podľa (1) potom $r = -(-3) - 1 = 2$, $s = (-3) \cdot 1 + 1 = -2$. Skúškou ľahko overíme, že štvorica $(p, q, r, s) = (-3, 1, 2, -2)$ spĺňa Viètove vzťahy (1), (2) a je teda jedinou štvoricou vyhovujúcou zadaniu.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Z toho 2 body za zostavenie Viètových vzťahov (1), (2) alebo podobných rovností umožňujúcich priame vyjadrenie dvoch premenných v závislosti od iných dvoch. Také rovnosti možno získať napr. vhodnou úpravou sústavy

$$\begin{aligned} p^2 + rp + s - 1 &= 0, \\ q^2 + rq + s - 1 &= 0, \\ pr^2 + p(q-1)r + 12 &= 0, \\ ps^2 + p(q-1)s + 12 &= 0 \end{aligned}$$

vyplývajúcej zo zadania (len za zostavenie tejto sústavy body nedajte), prípadne zo známeho vzorca na výpočet koreňov kvadratických rovníc. Ďalší 1 bod dajte za vyjadrenie $q = 1$, resp. inú redukciu sústavy na rovnicu s jedinou neznámou (taká rovnica bude spravidla kubická). Úplné vyriešenie tejto rovnice ohodnoťte ďalšími 2 bodmi (z týcho 2 bodov nedajte žiadny, ak žiak iba uhádne riešenie uvedenej kubickej rovnice a nevysvetlí, prečo iné reálne riešenie neexistuje). Posledný 1 bod dajte za dokončenie riešenia.

Posúďte, či v riešeniach ašpirujúcich na úplnosť nechýba skúška (pokiaľ sú úpravy ekvivalentné, nie je nutná), jej absenciu penalizujte stratou 1 bodu.

Pokiaľ žiak nezíska za úlohu iné body, za nájdenie (uhádnutie) štvorice $(-3, 1, 2, -2)$ bez zdôvodnenia, prečo žiadne ďalšie riešenie neexistuje, dajte 1 bod.

---

2. *V tabuľke $n \times n$, pričom $n \geqq 2$, sú po riadkoch napísané všetky čísla $1, 2, \ldots, n^2$ v tomto poradí (v prvom riadku sú za sebou napísané čísla $1, 2, \ldots, n$, v druhom riadku $n+1, n+2, \ldots, 2n$, atď.). V jednom kroku môžeme zvoliť ľubovoľné dve čísla na susedných políčkach (t. j. na takých, ktoré majú spoločnú stranu), a ak je ich aritmetický priemer celé číslo, obe nahradíme týmto priemerom. Pre ktoré n možno po konečnom počte krokov dostať tabuľku, v ktorej sú všetky čísla rovnaké?* (Peter Novotný)

Riešenie. Po vypísaní uvedenej tabuľky 3×3, prípadne 5×5, ihneď zistíme, že pre tieto hodnoty n nemožno urobiť žiadny krok, ktorý by čísla zmenil. Totiž v každej dvojici čísel na susedných políčkach je jedno párne a jedno nepárne číslo, takže ich súčet je nepárny a aritmetický priemer nie je celé číslo.

Takáto situácia nastáva pri všetkých nepárnych hodnotách n: Ak ofarbíme tabuľku ako šachovnicu (pričom číslo 1 bude na bielom políčku), bude každý riadok začínať opačnou farbou ako má prvé políčko predošlého riadku. To má pri nepárnom n rovnakú farbu ako posledné políčko v riadku. Takže čísla $1, 2, 3, \ldots, n^2$ budú v tomto poradí napísané striedavo na políčkach s farbou biela, čierna, biela, $\ldots$, biela, teda nepárne čísla budú na bielych políčkach a párne na čiernych. Keďže v každej dvojici susedných políčok je jedno biele a jedno čierne, nie je aritmetický priemer žiadnych dvoch susedných čísel celým číslom.

Fakt, že pre nepárne n sú na ľubovoľných dvoch susedných políčkach čísla s opačnou paritou, možno zdôvodniť aj inak: Každé číslo k susedí v tabuľke s číslami $k-1$, $k+1$, $k-n$ a $k+n$ (prípadne len s niektorými z nich, ak leží na okraji tabuľky). Všetky tieto čísla majú opačnú paritu ako k.

Ukážeme, že ani žiadne párne n nespĺňa podmienky zadania. Súčet S všetkých čísel v tabuľke sa zrejme po žiadnom kroku nezmení. Stále má rovnakú hodnotu ako na začiatku, t. j.

$$S = 1 + 2 + \cdots + n^2 = \frac{(n^2+1)n^2}{2}.$$

Ak by bolo po niekoľkých krokoch všetkých n^2 čísel rovnakých, museli by sa rovnať číslu

$$\frac{S}{n^2} = \frac{n^2+1}{2}.$$

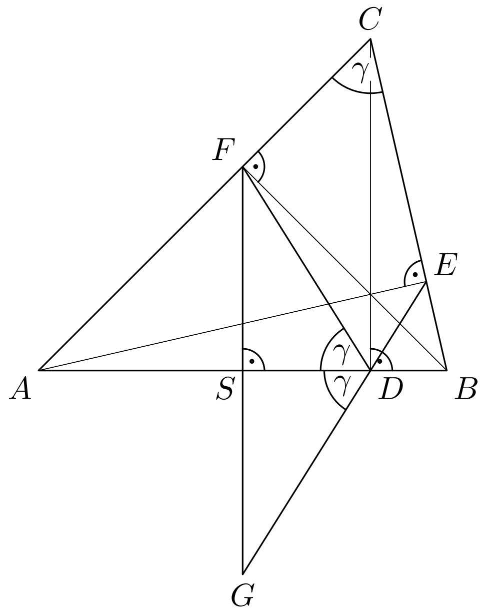
Avšak pre párne n je čitateľ n^2+1 nepárny a uvedený zlomok nie je celým číslom.

Záver. Tabuľku, v ktorej sú všetky čísla rovnaké, nemožno dostať pre žiadne n.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Vylúčenie nepárnych hodnôt n so správnym zdôvodnením oceňte 1 bodom. Za pozorovanie, že súčet čísel v tabuľke sa nemení, dajte 3 body, ďalší 1 bod za určenie hodnoty $(n^2+1)/2$, ktorá by musela byť na všetkých políčkach a posledný bod za zdôvodnenie, že pre párne n to nie je celé číslo. Za úvahy, v ktorých žiak iba konštatuje, že párne hodnoty n nevyhovujú, lebo na políčkach by na konci muselo byť necelé číslo (bez argumentov o nemeniacom sa súčte) dajte 1 bod. Za vylúčenie konečného počtu hodnôt n nedajte žiadne body.

3. *Daný je ostrouhlý trojuholník ABC s pätami výšok D, E, F ležiacimi postupne na stranách AB, BC, CA. Obraz bodu F v stredovej súmernosti podľa stredu strany AB leží na priamke DE. Určte veľkosť uhla BAC.* (Ján Mazák)

Riešenie. Označme S stred strany AB a G obraz bodu F v stredovej súmernosti podľa stredu S. Veľkosť uhla BCA označme γ. Z ostrouhlosti trojuholníka ABC je zrejmé, že bod G leží v polrovine opačnej k polrovine ABC (obr. 1).



Obr. 1

Štvoruholník $ADEC$ je tetivový (body D, E ležia na Tálesovej kružnici nad priemerom AC), preto

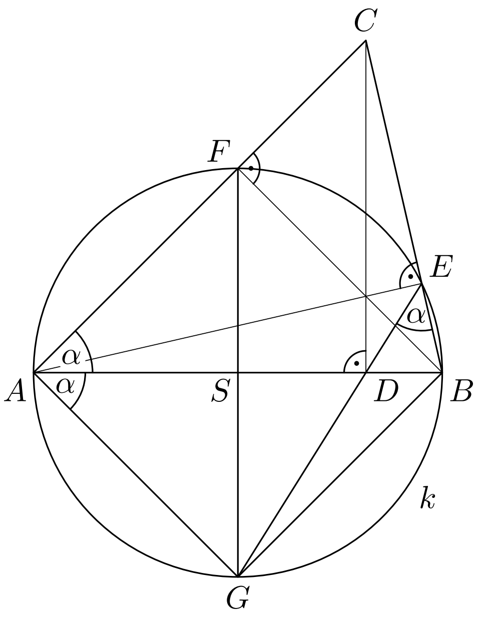
$$|\measuredangle ADE| = 180^\circ - \gamma \quad \text{a} \quad |\measuredangle ADG| = 180^\circ - |\measuredangle ADE| = \gamma.$$

Aj štvoruholník $BDFC$ je tetivový (body D, F ležia na Tálesovej kružnici nad priemerom BC), preto

$$|\measuredangle BDF| = 180^\circ - \gamma \quad \text{a} \quad |\measuredangle ADF| = 180^\circ - |\measuredangle BDF| = \gamma.$$

V trojuholníku FDG teda splývajú ťažnica a os uhla z vrcholu D a ten je preto rovnoramenný. Takže úsečka FS je kolmá na úsečku AS. Keďže bod F leží na Tálesovej kružnici nad priemerom AB, ktorá má stred v bode S, je trojuholník SFA rovnoramenný a pravouhlý, a teda veľkosť uhla BAC je 45°.

Iné riešenie. Podobne ako v prvom riešení označme body S a G. Veľkosť uhla BAC označme α.



Obr. 2

Bod S je stredom Tálesovej kružnice k nad priemerom AB. Na tejto kružnici ležia zrejme okrem bodov A, B aj body E, F, a G – pri pätách výšok sú pravé uhly a bod G je od stredu súmernosti S rovnako vzdialený ako bod F (obr. 2). Štvoruholník $ADEC$ je tetivový (body D, E ležia na Tálesovej kružnici nad priemerom AC), preto

$$|\measuredangle DEC| = 180^\circ - \alpha \quad \text{a} \quad |\measuredangle GEB| = 180^\circ - |\measuredangle DEC| = \alpha.$$

Keďže uhly GEB a GAB sú obvodové uhly nad tetivou GB kružnice k, aj uhol GAB má veľkosť α. Preto uhol FAG má veľkosť 2α. Tento uhol je však pravý, lebo úsečka FG je priemerom kružnice k. Z toho dostávame, že hľadaná veľkosť uhla α je 45°.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov.

Za prvé uvedené riešenie prideľte body takto: výpočet veľkostí uhlov ADF a ADG (so zdôvodnením) po 1 bode, kolmosť FS na AS 1 bod, zdôvodnenie rovnoramennosti trojuholníka ASF 1 bod, výpočet veľkosti uhla BAC 1 bod a nakoniec za spojenie čiastkových úvah dokopy 1 bod.

Za druhé uvedené riešenie prideľte body takto: zdôvodnenie, že body A, G, B, E, F ležia na kružnici 2 body, výpočet veľkosti uhla GEB (so zdôvodnením) 1 bod, určenie veľkosti uhla GAB 1 bod, výpočet veľkosti uhla α 2 body.

Neúplné riešenie, v ktorom nie je určená veľkosť uhla BAC, môže byť ohodnotené nanajvýš 4 bodmi.

---

4. *Dokážte, že pre nezáporné reálne čísla x, y spĺňajúce vzťah $x^2 + y^6 = 2$ platí*

$$x^2 + 2 \geqq 3xy.$$

(*Ján Mazák*)

Riešenie. Z nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom trojice (nezáporných) čísel x^2, 1, 1 vyplýva odhad

$$\frac{x^2 + 1 + 1}{3} \geqq \sqrt[3]{x^2 \cdot 1 \cdot 1},$$

čiže $x^2+2 \geqq 3\sqrt[3]{x^2}$. Stačí teda dokázať nerovnosť $3\sqrt[3]{x^2} \geqq 3xy$. Po vykrátení a umocnení na šiestu dostaneme ekvivalentnú nerovnosť $x^4 \geqq x^6y^6$ a po dosadení zadanej rovnosti $y^6 = 2 - x^2$ a prevedením na jednu stranu postupne získame

$$\begin{aligned} x^4 &\geqq x^6(2-x^2), \\ x^4 - 2x^6 + x^8 &\geqq 0, \\ x^4(x^2-1)^2 &\geqq 0. \end{aligned}$$

Ostatná nerovnosť zjavne platí, platí teda aj zadaná nerovnosť.

Iné riešenie. Z nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom šestice (nezáporných) čísel y^6, x^2, x^2, x^2, 1, 1 vyplýva

$$\frac{y^6 + x^2 + x^2 + x^2 + 1 + 1}{6} \geqq \sqrt[6]{y^6 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot 1 \cdot 1} = xy.$$

Odtiaľ po dosadení zadanej rovnosti máme $(2x^2 + 4)/6 \geqq xy$. Vynásobením tromi získame dokazovanú nerovnosť.

Iné riešenie. Keď (ekvivalentne) umocníme dokazovanú nerovnosť na šiestu, budeme sa môcť dosadením zadanej rovnosti zbaviť premennej y:

$$(x^2+2)^6 \geqq 3^6 \cdot x^6y^6 = 3^6 \cdot x^6(2-x^2).$$

Po substitúcii $t = x^2$ a úprave dostaneme polynomickú nerovnosť s jednou premennou

$$t^6 + 12t^5 + 789t^4 - 1298t^3 + 240t^2 + 192t + 64 \geqq 0.$$

Mnohočlen na ľavej strane má dvojnásobný koreň 1, preto ho vieme rozložiť na súčin dvoch činiteľov (napríklad použijeme známy postup pre delenie mnohočlena koreňovým činiteľom). Nerovnosť má potom tvar

$$(t-1)^2 \cdot (t^4 + 14t^3 + 816t^2 + 320t + 64) \geqq 0.$$

Druhý činiteľ je pre $t = x^2 \geqq 0$ zjavne nezáporný, z čoho vidíme, že ostatná nerovnosť platí, a preto platí aj s ňou ekvivalentná dokazovaná nerovnosť.

Za úplný dôkaz dajte 6 bodov. (Žiaci môžu bez dôkazu používať známe nerovnosti, ako napr. váženú AG-nerovnosť alebo Cauchyho-Schwarzovu nerovnosť.)

V prípade neúplného riešenia prideľte body takto (uvedené body sa nesčítajú!): Za zredukovanie nerovnosti na polynomickú nerovnosť v jednej premennej dajte 3 body, ak je možné túto nerovnosť vyriešiť uhádnutím koreňa a rozkladom na súčin podobne ako v treťom riešení. Ak žiak použije AG-nerovnosť spôsobom, ktorý vedie k riešeniu (v takej AG-nerovnosti musí nastávať rovnosť pre $x = y = 1$), dajte nanajvýš 3 body (podľa náročnosti nedokončených úvah). Za objavenie prípadu $x = y = 1$, kedy nastáva rovnosť, dajte 1 bod.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov. Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala so schémami uvedenými v tomto letáku.