2007/2008
57. ročník MO *Riešenia úloh celoštátneho kola kategórie A*

---

1. *Určte koeficienty p, q, r polynómu $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$, ak viete, že sú to nenulové navzájom rôzne celé čísla a že $f(p) = p^3$, $f(q) = q^3$.* (Vojtech Bálint)

Riešenie. Predpokladajme, že koeficienty p, q, r spĺňajú zadané podmienky. Úpravou vzťahov $f(p) = p^3$, $f(q) = q^3$ získame

$$p^3 + p^3 + pq + r = p^3, \qquad q^3 + pq^2 + q^2 + r = q^3,$$
$$p^3 + pq + r = 0, \qquad pq^2 + q^2 + r = 0.$$

Odčítaním oboch výsledných rovností a ďalšou úpravou máme postupne

$$p^3 - pq^2 + pq - q^2 = 0,$$
$$p(p-q)(p+q) + q(p-q) = 0,$$
$$(p-q)(p^2 + pq + q) = 0.$$

Podľa zadania $p \neq q$, po vydelení nenulovým výrazom $(p - q)$ preto ďalej dostaneme

$$p^2 + pq + q = 0,$$
$$q(p+1) = -p^2,$$

odkiaľ vyplýva, že $p \neq -1$. Za tohto predpokladu môžeme vyjadriť

$$q = -\frac{p^2}{p+1} = -\frac{p^2 - 1 + 1}{p+1} = 1 - p - \frac{1}{p+1}.$$

Keďže p aj q sú celé čísla, musí byť aj zlomok $1/(p+1)$ celé číslo, teda $p+1 \in \{1, -1\}$. Vzhľadom na podmienku $p \neq 0$ nutne $p = -2$. Potom $q = 1 - (-2) - 1/(-2+1) = 4$ a ľahko dopočítame, že $r = 16$. Skúškou overíme, že trojica $(p, q, r) = (-2, 4, 16)$ spĺňa zadané podmienky.

---

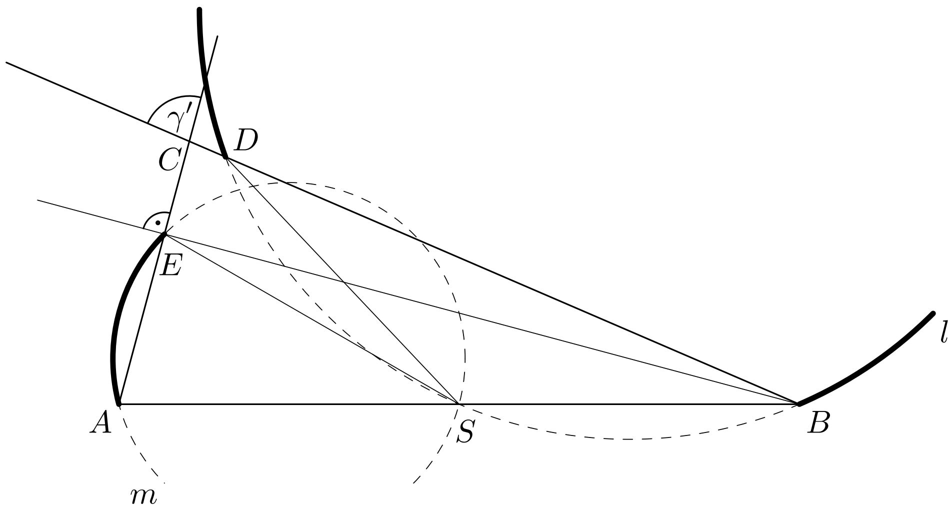
2. *V ostrouhlom trojuholníku ABC, v ktorom $|AC| \neq |BC|$, označme D a E päty výšok z vrcholov A a B. Nech V je priesečník výšok trojuholníka ABC, bod F je priesečník priamok AB a DE a bod S je stred strany AB. Ďalej nech K je priesečník kružníc opísaných trojuholníkom BDS a AES rôzny od bodu S.*

a) Dokážte, že body D, E, V, K ležia na jednej kružnici.

b) Dokážte, že body F, V, K ležia na jednej priamke. (Ján Mazák)

Riešenie. Označme vnútorné uhly trojuholníka ABC zvyčajným spôsobom. Ďalej označme l kružnicu opísanú trojuholníku BDS a m kružnicu opísanú trojuholníku AES. Body D a E ležia na Tálesovej kružnici k so stredom S a priemerom AB, preto trojuholníky BSD, ASE sú rovnoramenné so základňami BD, AE. Aby sme nemuseli rozoberať rôzne prípady, dokážeme najskôr, že bod K leží vždy vnútri trojuholníka ABC.

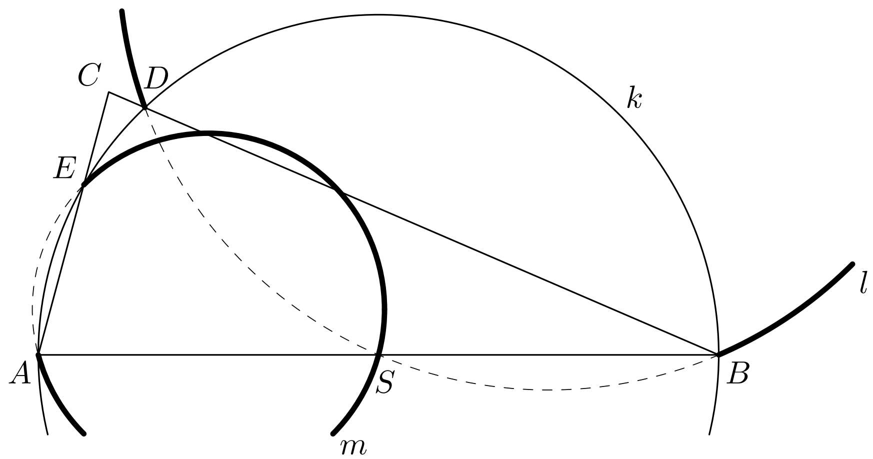
Zrejme oblúk BD kružnice l *neobsahujúci* bod S sa nepretína s oblúkom AE kružnice m *neobsahujúcim* bod S. Totiž prvý z nich leží celý v polrovine opačnej k polrovine BCA, druhý leží celý v polrovine opačnej k polrovine ACB, takže pretínať by sa mohli len v uhle γ', ktorý je vrcholovým uhlom k vnútornému uhlu γ trojuholníka ABC (obr. 1). Avšak aspoň jeden z uhlov BSD, ASE je ostrý (keďže ich súčet je menej



Obr. 1

ako 180°), nech je to napríklad uhol ASE. Potom je sledovaný oblúk AE „kratším" oblúkom svojej kružnice (lebo k nemu prislúcha tupý obvodový uhol) a teda leží celý v polrovine BEA, ktorá nemá s uhlom γ' žiadny spoločný bod.

Oblúk BD kružnice l *neobsahujúci* bod S sa nepretína ani s oblúkom AE kružnice m *obsahujúcim* bod S, lebo prvý z nich leží zvonka kružnice k, zatiaľ čo druhý leží vnútri kružnice k (obr. 2). Z podobných dôvodov sa nepretínajú ani oblúk BD kružnice l



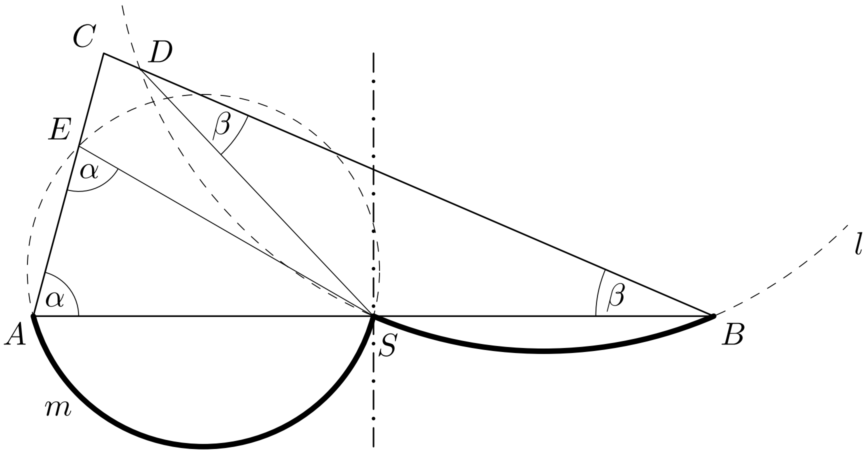
Obr. 2

obsahujúci bod S s oblúkom AE kružnice m *neobsahujúcim* bod S.

Kružnice l, m sa teda musia pretínať na tých oblúkoch BD a AE, ktoré obsahujú bod S. Prvý z nich leží v polrovine BCA, druhý v polrovine ABC, takže ich priesečník musí ležať v uhle γ. Z rovnoramennosti trojuholníkov BSD, ASE vyplýva

$$|\measuredangle BDS| = \beta, \qquad |\measuredangle AES| = \alpha, \tag{1}$$

takže uhly BDS, AES sú ostré. Preto oblúky BS, AS kružníc l, m neobsahujúce postupne body D, E sú „kratšími" oblúkmi svojich kružníc (prislúcha im tupý obvodový uhol) a nemôžu sa pretínať (oddeľuje ich os strany AB, obr. 3). Kružnice l, m sa teda



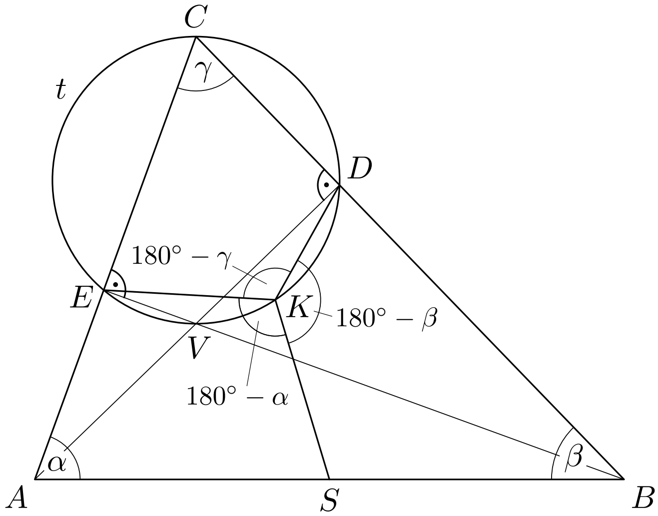
Obr. 3

nemôžu pretínať v polrovine opačnej k polrovine ABC. Spolu s predošlým zistením dostávame, že ich priesečník (rôzny od S) musí ležať vnútri trojuholníka ABC.

a) Aby sme dokázali, že body D, E, V, K ležia na jednej kružnici, stačí dokázať, že bod K leží na kružnici prechádzajúcej bodmi D, E, V, ktorou je zrejme Tálesova kružnica t s priemerom CV. Z tetivových štvoruholníkov $BSKD$, $ASKE$ vyplýva $|\measuredangle SKD| = 180° - \beta$, $|\measuredangle SKE| = 180° - \alpha$. Preto

$$|\measuredangle EKD| = 360° - |\measuredangle SKD| - |\measuredangle SKE| = 360° - (180° - \beta) - (180° - \alpha) = \alpha + \beta = \\ = 180° - \gamma = 180° - |\measuredangle DCE|.$$

Takže štvoruholník $CEKD$ je tetivový a bod K naozaj leží na kružnici t (obr. 4).



Obr. 4

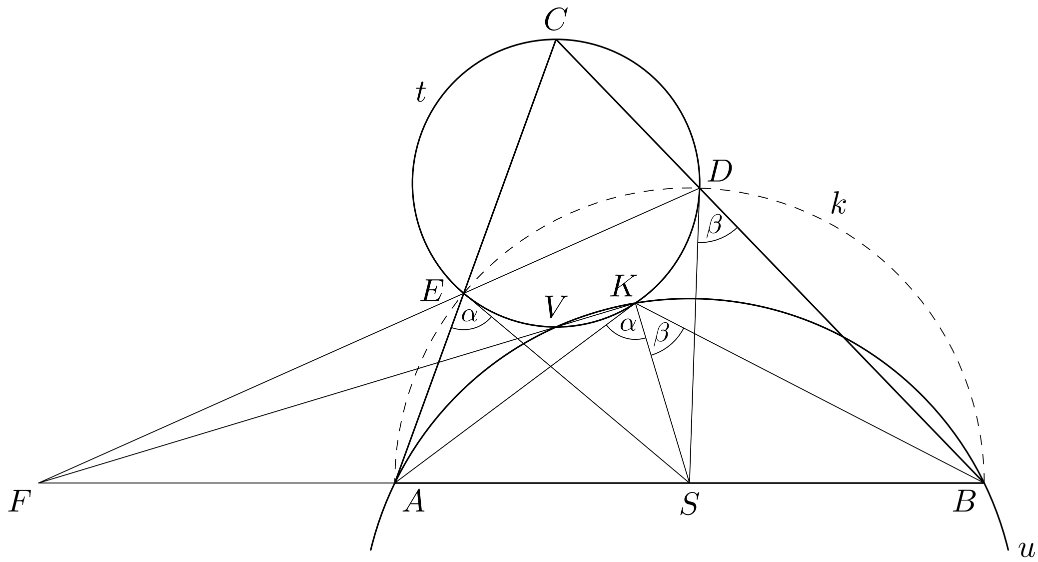
b) Ak $V = K$, Tak body F, V, K celkom určite ležia na jednej priamke. Zaoberajme sa ďalej len prípadom $V \neq K$[1]. Ukážeme najprv, že body A, V, K, B ležia na jednej kružnici. Z pravouhlých trojuholníkov ABD, ABE dostávame $|\measuredangle BAD| = 90° - \beta$, $|\measuredangle ABE| = 90° - \alpha$, preto z trojuholníka ABV máme

$$|\measuredangle AVB| = 180° - (90° - \beta) - (90° - \alpha) = \alpha + \beta$$

(uvedený vzťah možno odvodiť aj z tetivového štvoruholníka $CEVD$ na obr. 4). Podľa (1) a z vlastností obvodových uhlov v tetivových štvoruholníkoch $BSKD$, $ASKE$ máme

$$|\measuredangle AKS| = |\measuredangle AES| = \alpha, \qquad |\measuredangle BKS| = |\measuredangle BDS| = \beta.$$

Takže $|\measuredangle AKB| = \alpha + \beta = |\measuredangle AVB|$ a body A, V, K, B naozaj ležia na jednej kružnici, označme ju u (obr. 5).



Obr. 5

Body V, K sú teda priesečníkmi kružnice u s kružnicou t z časti a). Priamka VK je preto chordálou kružníc t, u. Aby sme ukázali, že na nej leží bod F, stačí ukázať, že jeho mocnosť k obom kružniciam je rovnaká. To je však pravda, lebo z mocnosti bodu F ku kružnici k vyplýva

$$|FE| \cdot |FD| = |FA| \cdot |FB|.$$

Pravá strana tejto rovnosti je zároveň mocnosťou bodu F ku kružnici t, ľavá strana je jeho mocnosťou ku kružnici u. Tým je časť b) dokázaná[2].

Poznámka. Pomocou mocnosti bodu C ku kružniciam k, l, m možno podobne odvodiť, že K leží na priamke CS. Tento fakt môže jednak pomôcť dokázať, že K leží vnútri trojuholníka ABC (iným postupom, ako sme to urobili tu), jednak poskytuje alternatívne možnosti na dôkaz časti a) (dá sa ukázať, že priamky VK a CS sú na seba kolmé).

[1] Dá sa ukázať, že predpoklady zadania vylučujú prípad $V = K$, ale pri riešení to nepotrebujeme.

[2] Možno argumentovať aj priamejšie: priamky ED, VK, AB sú chordálami kružníc k, t, u (každá priamka prislúcha jednej dvojici kružníc) preto sa pretínajú v jednom bode.

3. *V tabuľke $n \times n$, pričom $n \geqq 2$, sú po riadkoch napísané všetky čísla $1, 2, \dots, n^2$ v tomto poradí (v prvom riadku sú za sebou napísané čísla $1, 2, \dots, n$, v druhom riadku $n+1, n+2, \dots, 2n$, atď.). V jednom kroku môžeme zvoliť ľubovoľné dve čísla na susedných políčkach (t. j. na takých, ktoré majú spoločnú stranu) a buď obidve súčasne zväčšiť o 1 alebo obidve súčasne zmenšiť o 1. Pre ktoré n možno po konečnom počte krokov dostať tabuľku, v ktorej sú všetky čísla rovné 365?* (Peter Novotný)

Riešenie. Najskôr dokážeme, že pre ľubovoľné párne n je možné dostať požadovanú tabuľku. Ukážeme jeden z mnohých možných postupov. Zrejme ak sú na dvoch susedných políčkach celé čísla líšiace sa práve o 1, po konečnom počte krokov vieme dostať (bez zmeny ostatných políčok) tabuľku, v ktorej väčšie z oboch čísel bude nahradené číslom 365 a menšie číslom 364: Ak sú na daných dvoch susedných políčkach čísla k a $k+1$, stačí $|364-k|$-krát spraviť krok, v ktorom na oboch týchto políčkach čísla o 1 zväčšíme (keď $k \leqq 364$), resp. zmenšíme (keď $k > 364$). Na začiatku sú na susedných políčkach v každom riadku čísla líšiace sa práve o 1 (pričom číslo „napravo“ je vždy väčšie), navyše v každom riadku je párne veľa políčok. Môžeme teda políčka každého riadku rozdeliť do dvojíc a každú dvojicu čísel na nich po konečnom počte krokov zmeniť na dvojicu $(364, 365)$. Dostaneme tak tabuľku, v ktorej sú na políčkach v nepárnych stĺpcoch len čísla 364 a v párnych stĺpcoch len čísla 365. Teraz už stačí rozdeliť do dvojíc políčka v nepárnych stĺpcoch a každú dvojicu čísel $(364, 364)$ nahradiť po jednom kroku dvojicou $(365, 365)$. Pre hodnotu $n = 6$ je postup načrtnutý na obr. 6.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

→

364	365	364	365	364	365
364	365	364	365	364	365
364	365	364	365	364	365
364	365	364	365	364	365
364	365	364	365	364	365
364	365	364	365	364	365

→

364	365	364	365	364	365
364	365	364	365	364	365
364	365	364	365	364	365
364	365	364	365	364	365
364	365	364	365	364	365
364	365	364	365	364	365

→

365	365	365	365	365	365
365	365	365	365	365	365
365	365	365	365	365	365
365	365	365	365	365	365
365	365	365	365	365	365
365	365	365	365	365	365

Obr. 6

Zaoberajme sa ďalej prípadom, keď n je nepárne. Ofarbime celú tabuľku striedavo čiernou a bielou farbou ako šachovnicu, pričom prvé políčko (t. j. to, na ktorom je na začiatku číslo 1) bude biele. Čísla, ktoré sú na bielych políčkach, nazývajme *biele*, čísla na čiernych políčkach nazývajme *čierne.* Keďže susedné políčka majú opačnú farbu, v každom kroku zmeníme jedno biele a jedno čierne číslo. Ak teda označíme B súčet všetkých bielych čísel a C súčet všetkých čiernych čísel, rozdiel $R = B - C$ sa po žiadnom kroku nezmení (v každom kroku sa buď B aj C zväčšia o 1, alebo sa obe zmenšia o 1). Na začiatku sú biele čísla všetky nepárne a čierne všetky párne, takže

$$R = (1 + 3 + \dots + n^2) - \bigl(2 + 4 + \dots + (n^2 - 1)\bigr) =$$

$$= 1 + (3-2) + (5-4) + \dots + \bigl(n^2 - (n^2-1)\bigr) = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{(n^2+1)/2\text{-krát}} = \frac{n^2+1}{2}.$$

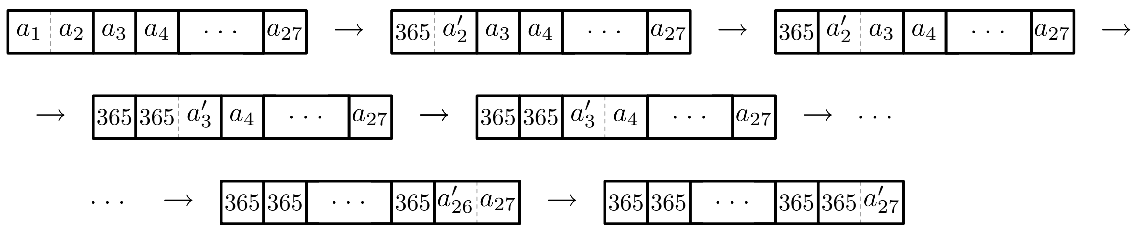
Bielych políčok je o jedno viac ako čiernych. Ak by teda bolo po nejakom počte krokov na všetkých políčkach číslo 365, mal by rozdiel R hodnotu 365. To znamená, že nutnou podmienkou, aby sa tabuľka dala zmeniť na požadovaný tvar, je rovnosť

$$\frac{n^2+1}{2} = 365,$$

ktorá nastáva jedine pre $n = 27$.

Dokázali sme, že pre nepárne čísla rôzne od 27 nie je možné dostať tabuľku so všetkými číslami rovnými 365. Zostáva ukázať, že pre $n = 27$ to možné je. Zrejme nech sú na dvoch susedných políčkach ľubovoľné celé čísla, vieme po konečnom počte krokov (bez zmeny ostatných políčok) dosiahnuť, že jedno z nich bude rovné 365 (stačí čísla na oboch políčkach príslušný počet krát zväčšiť alebo zmenšiť).

Ukážeme, že týmto postupom dokážeme tabuľku zmeniť tak, že na všetkých políčkach okrem posledného (v pravom dolnom rohu) bude číslo 365. Môžeme to urobiť napríklad nasledovne: Najprv číslo na prvom políčku zmeníme pomocou druhého políčka na 365, potom číslo na druhom políčku pomocou tretieho, atď. Tak dostaneme v celom prvom riadku až na jeho posledné políčko číslo 365. Rovnaký postup aplikujeme v každom riadku (obr. 7). Tým dostaneme číslo 365 na všetkých políčkach okrem posledného



Obr. 7

stĺpca. Keď teraz rovnaký „riadkový“ postup aplikujeme na posledný stĺpec, získame číslo 365 všade okrem posledného políčka.

Nech na poslednom políčku vzniklo uvedeným postupom číslo k. Ako sme dokázali už skôr, rozdiel $R = B - C$ nikdy nemení svoju hodnotu. Keďže na začiatku bola jeho hodnota $(27^2+1)/2 = 365$, musí byť rovnaká aj teraz, čiže

$$365 = B - C = (\underbrace{365+365+\dots+365}_{\text{364-krát}} + k) - (\underbrace{365+365+\dots+365}_{\text{364-krát}}) = k.$$

Teda na poslednom políčku muselo pri uvedenom postupe vzniknúť číslo 365 a dostali sme priamo požadovanú tabuľku.

Záver. Tabuľku, v ktorej sa všetky čísla rovnajú 365, možno dostať pre všetky párne n a pre $n = 27$.

---

4. *Dokážte, že pre žiadne prirodzené číslo n nie je číslo $27^n - n^{27}$ prvočíslom.*

(*Ján Mazák*)

Riešenie. Podľa známeho vzťahu pre rozklad rozdielu dvoch tretích mocnín na súčin máme

$$27^n - n^{27} = (3^n)^3 - (n^9)^3 = (3^n - n^9)(9^n + 3^n \cdot n^9 + n^{18}).$$

Druhá zátvorka je zrejme väčšia ako 1. Stačí teda dokázať, že prvá zátvorka nie je nikdy rovná 1.

Najprv matematickou indukciou dokážeme, že pre $n \geqq 30$ je $3^n > n^9 + 1$.

1. krok. Pre $n = 30$ máme

$$3^{30} = 3^{10} \cdot (3^5)^4 > 3^{10} \cdot (2 \cdot 10^2)^4 = 3^9 \cdot 48 \cdot 10^8 > 3^9(10^9 + 1) > 30^9 + 1.$$

2. krok. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre hodnotu $n = k$, pričom $k \geqq 30$. Máme teda $3^k > k^9 + 1$. Potom

$$3^{k+1} = 3 \cdot 3^k > 3 \cdot (k^9 + 1) = 3k^9 + 3 = (\sqrt[9]{3}k)^9 + 3 > (k+1)^9 + 3 > (k+1)^9 + 1,$$

čiže tvrdenie platí aj pre hodnotu $n = k + 1$. Pri úprave sme okrem indukčného predpokladu použili nerovnosť $\sqrt[9]{3}k > k + 1$. Tá naozaj platí, lebo

$$1{,}1^9 = (1{,}1^3)^3 = 1{,}331^3 < 1{,}4^3 = 2{,}744 < 3,$$

a teda $\sqrt[9]{3}k > 1{,}1k > k + 1$ (keďže $k \geqq 30$).

Ostáva dokázať, že $V = 3^n - n^9 \neq 1$ aj pre $n < 30$. Nebolo by ťažké pre každé zostávajúce n hodnotu V priamo vypočítať[3]. Uvedieme však rýchlejší postup používajúc zvyšky po delení rôznymi číslami.

Ak n je nepárne, tak V je rozdielom dvoch nepárnych čísel, teda párne, a preto rôzne od 1.

Ak n je deliteľné tromi, tak $3 \mid 3^n$ a súčasne $3 \mid n^9$, čiže aj V je deliteľné tromi, a preto rôzne od 1.

Ak n dáva po delení tromi zvyšok 1, tak $3 \mid 3^n$ a n^9 dáva po delení tromi zvyšok 1. Teda $V = 3^n - n^9$ dáva zvyšok 2 a je rôzne od 1.

Ostáva preveriť čísla, ktoré sú párne a dávajú zvyšok 2 po delení tromi, t. j. čísla z množiny $\{2, 8, 14, 20, 26\}$. Pre $n = 2$ a pre $n = 8$ je zrejme $3^n - n^9 < 0$. Podobne

$$3^{14} - 14^9 = 9^7 - 14^9 < 0,$$
$$3^{20} - 20^9 = 9^{10} - 2^9 \cdot 10^9 < 10^{10} - 512 \cdot 10^9 < 0.$$

Napokon aj $3^{26} - 26^9 \neq 1$, lebo zápis čísla $3^{26} = 81^6 \cdot 9$ končí cifrou 9, zápis čísla 26^9 končí cifrou 6, teda číslo $3^{26} - 26^9$ dáva po delení desiatimi zvyšok 3 a je rôzne od 1.

---

5. *Nech x, y, z sú kladné reálne čísla, ktorých súčin je 1. Dokážte, že ak k, m sú kladné celé čísla, pričom $k > m$, tak*

$$x^k + y^k + z^k \geqq x^m + y^m + z^m.$$

(*Pavel Novotný*)

Riešenie. Pokúsme sa dokazovanú nerovnosť zapísať ako súčet niekoľkých nerovností, o ktorých vieme, že platia. Podľa AG-nerovnosti[4] pre ľubovoľné prirodzené čísla r, s platí

$$\frac{rx^k + sy^k + sz^k}{r + 2s} \geqq \sqrt[r+2s]{(x^k)^r(y^k)^s(z^k)^s} = \sqrt[r+2s]{x^{k(r-s)}(xyz)^{ks}}, \tag{1}$$

---

[3] Dá sa ukázať, že pre $n \geqq 28$ je $V > 1$, pre $n = 27$ je $V = 0$, pre $2 \leqq n \leqq 26$ je $V < 0$ a pre $n = 1$ je $V = 2$.

[4] AG-nerovnosť je skrátené označenie známej nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom. Podľa nej pre ľubovoľné prirodzené číslo n a nezáporné čísla $a_1, \dots, a_n$ platí

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}.$$

a keďže podľa zadania $xyz = 1$, máme

$$rx^k + sy^k + sz^k \geqq (r+2s)x^{\frac{(r-s)k}{r+2s}}. \tag{2}$$

Cyklickou zámenou dostaneme podobné nerovnosti

$$sx^k + ry^k + sz^k \geqq (r+2s)y^{\frac{(r-s)k}{r+2s}} \quad \text{a} \quad sx^k + sy^k + rz^k \geqq (r+2s)z^{\frac{(r-s)k}{r+2s}}. \tag{3}$$

Hľadajme také prirodzené čísla r, s, aby súčtom uvedených troch nerovností bola dokazovaná nerovnosť, resp. nejaký jej násobok. Keďže na pravej strane potrebujeme dostať m-té mocniny, nutnou podmienkou je rovnosť

$$m = \frac{(r-s)k}{r+2s}. \tag{4}$$

Po sčítaní nerovností budú koeficienty na ľavej aj pravej strane rovné $r + 2s$, čo nám vyhovuje (po vydelení výrazom $r + 2s$ dostaneme priamo dokazovanú nerovnosť). Stačí teda splniť rovnosť (4). Tá platí napríklad pre hodnoty $m = r - s$, $k = r + 2s$, odkiaľ ľahko vyjadríme $r = \frac{1}{3}(2m + k)$, $s = \frac{1}{3}(k - m)$. Keďže však chceme, aby r, s boli prirodzené[5], zoberme hodnoty $r = 2m + k$, $s = k - m$ (keďže k, m sú prirodzené čísla a $k > m$, sú takéto r, s naozaj prirodzené). Pre ne platí

$$\frac{(r-s)k}{r+2s} = \frac{3m \cdot k}{3k} = m,$$

teda tiež spĺňajú (4). Sčítaním troch nerovností (2), (3) pre uvedené hodnoty r, s tak dostaneme

$$(r+2s)(x^k + y^k + z^k) \geqq (r+2s)(x^m + y^m + z^m),$$

Z čoho už priamo vyplýva zadaná nerovnosť.

Iné riešenie. Podľa známej nerovnosti medzi mocninovými priemermi platí

$$\sqrt[k]{\frac{x^k + y^k + z^k}{3}} \geqq \sqrt[m]{\frac{x^m + y^m + z^m}{3}},$$

Z čoho po jednoduchých ekvivalentných úpravách dostávame

$$x^k + y^k + z^k \geqq (x^m + y^m + z^m)^{\frac{k}{m}} \cdot 3^{1-\frac{k}{m}}. \tag{5}$$

Podľa AG-nerovnosti (s využitím zadaného predpokladu $xyz = 1$) platí

$$x^m + y^m + z^m \geqq 3\sqrt[3]{x^m y^m z^m} = 3,$$

a keďže $k > m$, čiže $\frac{k}{m} - 1 > 0$, tak aj

$$(x^m + y^m + z^m)^{\frac{k}{m}-1} \geqq 3^{\frac{k}{m}-1}.$$

Odtiaľ

$$(x^m + y^m + z^m)^{\frac{k}{m}} \cdot 3^{1-\frac{k}{m}} \geqq x^m + y^m + z^m,$$

čo spolu s (5) dáva dokazovanú nerovnosť.

[5] V skutočnosti to nepotrebujeme, nerovnosť (1) totiž podľa všeobecnejšie sformulovanej AG-nerovnosti platí pre ľubovoľné kladné reálne čísla r, s.

6. *Označme zvyčajným spôsobom dĺžky strán a ťažníc daného trojuholníka. Nájdite všetky možné hodnoty výrazu*

$$\text{a)}\quad \frac{t_a^2 - t_b^2}{b^2 - a^2}; \qquad\qquad \text{b)}\quad \frac{t_a - t_b}{b - a}.$$

(*Pavel Novotný*)

Riešenie. Ak $a = b$, ani jeden z výrazov nenadobúda žiadnu hodnotu (menovatele sú nulové). Zaoberajme sa preto len trojuholníkmi, ktorých strany a, b majú rôzne dĺžky.

a) Podľa známych vyjadrení dĺžok ťažníc pomocou dĺžok strán (ktoré možno ľahko odvodiť pomocou kosínusových viet) platí

$$t_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}, \qquad t_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}. \tag{1}$$

Takže priamym dosadením dostávame

$$\frac{t_a^2 - t_b^2}{b^2 - a^2} = \frac{(2b^2 + 2c^2 - a^2) - (2a^2 + 2c^2 - b^2)}{4(b^2 - a^2)} = \frac{3b^2 - 3a^2}{4(b^2 - a^2)} = \frac{3}{4}.$$

Teda jediná možná hodnota prvého výrazu je $\frac{3}{4}$.

b) Skúmaním rôznych „degenerovaných“ prípadov najskôr uhádneme výsledok. Napríklad ak $b = 1$ a bod B sa nachádza „blízko“ stredu strany AC, tak $t_a \approx \frac{3}{4}$, $t_b \approx 0$, $a \approx \frac{1}{2}$, čiže

$$\frac{t_a - t_b}{b - a} \approx \frac{\frac{3}{4} - 0}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3}{2}.$$

Ak $b = 1$ a bod B sa nachádza „blízko“ bodu C, tak $t_a \approx 1$, $t_b \approx \frac{1}{2}$, $a \approx 0$, čiže

$$\frac{t_a - t_b}{b - a} \approx \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - 0} = \frac{1}{2}.$$

Skúsme teda dokázať, že

$$\frac{1}{2} < \frac{t_a - t_b}{b - a} < \frac{3}{2}. \tag{2}$$

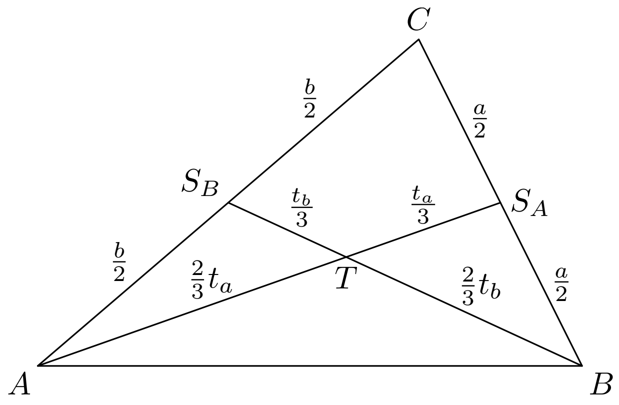
S použitím výsledku časti a) máme

$$\frac{t_a - t_b}{b - a} = \frac{t_a^2 - t_b^2}{t_a + t_b} \cdot \frac{b + a}{b^2 - a^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{a + b}{t_a + t_b}.$$

Nerovnosti (2) sú preto ekvivalentné s nerovnosťami

$$\frac{2}{3} < \frac{a + b}{t_a + t_b} < 2, \tag{3}$$

ktoré ľahko dokážeme pomocou trojuholníkových nerovností.



Obr. 8

Naozaj, ak označíme S_A, S_B postupne stredy strán BC, AC, tak z trojuholníkových nerovností v trojuholníkoch ACS_A, BCS_B máme (obr. 8)

$$b + \frac{a}{2} > t_a, \qquad a + \frac{b}{2} > t_b.$$

Odtiaľ sčítaním dostaneme $\frac{3}{2}(a+b) > t_a + t_b$, čo je ekvivalentné s prvou nerovnosťou v (3).

A ak označíme T ťažisko trojuholníka ABC, ktoré rozdeľuje každú ťažnicu v známom pomere (obr. 8), tak z trojuholníkových nerovností v trojuholníkoch ATS_B, BTS_A máme

$$\frac{2}{3}t_a + \frac{t_b}{3} > \frac{b}{2}, \qquad \frac{2}{3}t_b + \frac{t_a}{3} > \frac{a}{2}.$$

Odtiaľ sčítaním dostaneme $t_a + t_b > \frac{1}{2}(a+b)$, čo je ekvivalentné s druhou nerovnosťou v (3).

Dokázali sme teda, že platí (2). Aby sme dokončili riešenie úlohy, musíme ešte ukázať, že zadaný výraz môže nadobúdať všetky možné hodnoty z intervalu $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Na to stačí uvažovať trojuholníky so stranami dĺžok $a = 1$, $b = 2$, $c \in (1, 3)$. Potom podľa (1) máme

$$\frac{t_a - t_b}{b - a} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{8 + 2c^2 - 1} - \frac{1}{2}\sqrt{2 + 2c^2 - 4}}{2 - 1} = \frac{\sqrt{2c^2 + 7} - \sqrt{2c^2 - 2}}{2} =$$
$$= \frac{9/2}{\sqrt{2c^2 + 7} + \sqrt{2c^2 - 2}} \tag{4}$$

Tento výraz nadobúda pre $c = 1$ hodnotu $\frac{3}{2}$ a pre $c = 3$ hodnotu $\frac{1}{2}$. Ak ho teda chápeme ako funkciu premennej c, musí na intervale $(1, 3)$ nadobúdať všetky hodnoty z intervalu $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. To vyplýva zo spojitosti uvedenej funkcie. Z jej vyjadrenia dokonca vidíme, že je na skúmanom intervale klesajúca.

Záver. Druhý výraz môže nadobúdať ľubovoľnú hodnotu z intervalu $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

Poznámka. To, že výraz (4) nadobúda pre $c \in (1, 3)$ všetky hodnoty z intervalu $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, možno dokázať aj bez použitia vedomostí o spojitých funkciách. Stačí ukázať, že pre každé $h \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ má rovnica

$$\frac{\sqrt{2c^2 + 7} - \sqrt{2c^2 - 2}}{2} = h$$

s neznámou c riešenie v intervale $(1,3)$. Ľahko možno vyjadriť riešenie

$$c = \sqrt{1 + \frac{(9-4h^2)^2}{32h^2}}.$$

Tento výraz s rastúcim h pre $h \in \langle \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle$ klesá a keďže pre hodnoty $h = \frac{1}{2}$, $h = \frac{3}{2}$ nadobúda postupne hodnoty $c = 3$, $c = 1$, bude pre $h \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ riešenie c vždy v intervale $(1,3)$.