63. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Správa o riešení úloh zo súťaže konanej v školskom roku 2013/2014

55. MEDZINÁRODNÁ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA
8. STREDOEURÓPSKA MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

JEDNOTA SLOVENSKÝCH MATEMATIKOV A FYZIKOV

S pomocou spolupracovníkov spracovali
Mgr. Peter Novotný, PhD., RNDr. Karel Horák, CSc.,
RNDr. Róbert Hajduk, PhD., Mgr. Tomáš Kocák,
Bc. Filip Sládek, Ľudmila Šimková,
členovia Úlohovej komisie MO, vedúci seminára *i*KS.

Tlač publikácie bola podporená Ministerstvom školstva, vedy, výskumu a športu SR.

ISBN 978-80-89829-00-2

Obsah

O priebehu 63. ročníka Matematickej olympiády

Matematická olympiáda (MO) je najstaršia súťaž spomedzi predmetových olympiád a ostatných postupových súťaží žiakov základných a stredných škôl v SR. Každý rok sa jej zúčastňujú tisícky riešiteľov od piatakov ZŠ až po maturantov. Vyhlasovateľmi MO sú Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky (MŠVVŠ SR) v spolupráci s Jednotou slovenských matematikov a fyzikov (JSMF). V školskom roku 2013/14 sa uskutočnil 63. ročník MO.

Súťaž riadi Slovenská komisia Matematickej olympiády (SKMO), ktorá na prelome 62. a 63. ročníka pracovala v nasledovnom zložení:

Mgr. Peter Novotný, PhD., FMFI UK Bratislava, predseda
doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., mim. prof., F-PEDAS ŽU Žilina, podpredseda
Mgr. Ján Brajerčík, PhD., FHPV PU Prešov, predseda KKMO PO
prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc., FPV UKF Nitra, predseda KKMO NR
Mgr. Martin Kollár, PhD., FMFI UK Bratislava, predseda KKMO BA
doc. RNDr. Stanislav Krajči, PhD., PF UPJŠ Košice, predseda KKMO KE
doc. RNDr. Mária Lucká, CSc., PF TU Trnava, predsedníčka KKMO TT
doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc., F-PEDAS ŽU Žilina, predseda KKMO ZA
RNDr. Eva Oravcová, Gymn. J. G. T. Banská Bystrica, predsedníčka KKMO BB
RNDr. Soňa Pavlíková, CSc., FCHPT STU Bratislava, predsedníčka KKMO TN
RNDr. Monika Dillingerová, PhD., FMFI UK Bratislava
Mgr. Štefan Gyürki, PhD., FCHPT STU, Bratislava
RNDr. Róbert Hajduk, PhD., PF UPJŠ Košice
Ing. RNDr. František Kardoš, PhD., PF UPJŠ Košice
doc. RNDr. Mária Kmeťová, PhD., FPV UKF Nitra
RNDr. Ján Mazák, PhD., PF TU Trnava
Mgr. Martin Potočný, Trojsten, FMFI UK Bratislava
RNDr. Oliver Ralík, CSc., Nitra
doc. RNDr. Roman Soták, PhD., PF UPJŠ Košice
prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc., FPV UKF Nitra
Mgr. Mária Gajarová, Iuventa, Bratislava, tajomník

V úvode ročníka oznámili ukončenie predsedníctva predsedovia krajských komisií v krajoch Trnava a Žilina. Agendu v Trnave prebral doc. RNDr. Dušan Holý, CSc. z Pedagogickej fakulty Trnavskej univerzity a v Žiline doc. Mgr. Ivan Cimrák, Dr. z Fakulty riadenia a informatiky Žilinskej univerzity. Obom predošlým predsedom patrí veľké poďakovanie za dlhoročnú činnosť vykonávanú v prospech MO – Mária Lucká pôsobila ako predsedníčka krajskej komisie od roku 2000, Pavel Novotný od roku 2001.

*

Jednotlivé kolá MO prebiehali rovnako ako v minulých ročníkoch – všetky kategórie začínali domácim kolom, ktorého zadania boli zverejnené v úvode školského roka. Stredoškolské kategórie A, B, C pokračovali školským a krajským kolom, najvyššia kategória A bola ukončená celoštátnym kolom. Kategórie pre základné školy Z5 – Z9 po domácom kole mali okresné kolo, ktorým súťaž pre kategórie Z5 – Z8 končila; kategória Z9 končila krajským kolom.

Celoštátne kolo MO (CK MO) sa konalo v dňoch 23. – 26. 3. 2014 v Bratislave v priestoroch Inštitútu pre verejnú správu, teda v mieste, kde sa tento rok konali takmer všetky celoštátne kolá (CK) predmetových olympiád. Dôvodom jednotného dejiska konania CK bola zmena v prístupe zo strany Iuventy, ktorá v priebehu uplynulých rokov začala miesta pre ne vyberať na základe výsledkov verejných obstarávaní. To značne narušilo zaužívaný zvyk z minulých rokov, keď si organizovanie CK MO s osemročnou periódou posúvali jednotlivé kraje. Keďže viaceré olympiády preferujú konanie CK každý rok na inom mieste, na konci ročníka na spoločnom stretnutí predsedov komisií predmetových súťaží na Iuvente padla dohoda, že tie olympiády, ktoré nechcú mať CK v Bratislave, spoločne určia kraj, v ktorom sa budú ich CK v nasledujúcom roku konať a tento kraj bude špecifikovaný aj vo verejnom obstarávaní. Pre rok 2015 tak bola určená Nitra (zhodou okolností práve v Nitre namiesto Bratislavy by sa konalo CK tento rok, ak by sme pokračovali v tradičnom poradí). Ostáva veriť, že sa podarí v nasledujúcich rokoch zaviesť novú osemročnú periódu a na organizovaní CK MO sa budú opäť podieľať krajské komisie a vzdelávacie inštitúcie vo všetkých krajoch.

Keďže do organizovania CK MO sa (aj vzhľadom na skutočnosti uvedené v predošlom odseku) tento rok SKMO de facto zapojila len dodaním zadaní úloh a ohodnotením žiackych riešení, jediným sponzorom súťaže bola ALBI s. r. o., ktorá poskytla tradičné ceny – spoločenské hry. Poďakovanie náleží okrem tejto spoločnosti najmä členke SKMO Monike Dillingerovej, ktorá každý rok s ALBI o poskytnutí cien komunikuje a okrem samotných cien „zásobuje“ CK spoločenskými hrami formou požičiavania účastníkom počas voľných večerov po súťažných dňoch.

O týždeň po CK MO sa začalo výberové sústredenie, na ktorom sa rozhodlo o zložení družstiev pre Medzinárodnú matematickú olympiádu (IMO) a Stredoeurópsku matematickú olympiádu (MEMO). Následne sa v júni uskutočnilo prípravné sústredenie pre obe družstvá. Z medzinárodných akcií sa popri tradičnom Česko-poľsko-slovenskom stretnutí (konalo sa v Poľsku) a spoločnom prípravnom sústredení IMO-družstiev ČR a SR (v Uherskom Hradišti) uskutočnilo v Poľsku tretíkrát aj Česko-poľsko-slovenské stretnutie juniorov.

Na 55. IMO v Južnej Afrike sme získali jednu striebornú a päť bronzových medailí, na 8. MEMO v Nemecku jednu striebornú medailu a jedno čestné uznanie. Každej súťaži je v ročenke venovaná osobitná kapitola.

*

Matematická olympiáda by neexistovala bez zaujímavých a originálnych úloh. O ich prípravu sa stará Úlohová komisia MO, ktorú máme spoločnú s Českou republikou. Každoročne sa konajú dve zasadnutia komisie, jedno v ČR, jedno na Slovensku. V 63. ročníku sa uskutočnili v novembri 2013 v Bílovci a v máji 2014 v Bratislave. Úlohová komisia má dve sekcie, jednu pre stredoškolské kategórie (sekcia ABC), druhú pre kategórie pre ZŠ (sekcia Z). Zo Slovenska jej členmi v školskom roku 2013/14 boli:

doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., mim. prof., F-PEDAS ŽU Žilina, sekcia ABC
PaedDr. Svetlana Bednářová, PhD., Gymn. I. Kraska, Rimavská Sobota, sekcia Z
RNDr. Monika Dillingerová, PhD., FMFI UK Bratislava, sekcia Z
Mgr. Miroslava Farkas-Smitková, PhD., FEI STU Bratislava, sekcia Z
Mgr. Veronika Hucíková, SvF STU Bratislava, sekcia Z
RNDr. Tomáš Jurík, PhD., VSE Košice, sekcia ABC
RNDr. Ján Mazák, PhD., PF TU Trnava, sekcia ABC
Mgr. Erika Novotná, PhD., Datavard Bratislava, sekcia Z
doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc., F-PEDAS ŽU Žilina, sekcia ABC
Mgr. Peter Novotný, PhD., FMFI UK Bratislava, sekcia ABC
Alžbeta Bohiniková, FMFI UK Bratislava, sekcia Z
Katarína Jasenčáková, FMFI UK Bratislava, sekcia Z

Posledné dve menované (obe sú študentky na FMFI UK) začali v komisii pracovať práve na májovom zasadnutí v Bratislave.

Vymýšľať nové úlohy do MO nie je jednoduché, úlohová komisia preto uvíta zaslanie zaujímavých návrhov na úlohy aj od autorov, ktorí nie sú jej členmi. Návrhy je možné posielať napríklad na adresu *skmo@skmo.sk*, najlepšie aj s menom autora, s riešením a s odhadom, do ktorej kategórie sa úloha hodí.

*

SKMO má od roku 2009 oficiálnu internetovú stránku. Jej adresa je *skmo.sk* a zverejňujeme na nej všetky termíny a dokumenty týkajúce sa MO (archív zadaní a riešení úloh, poradia všetkých krajských a vyšších kôl, posledné roky aj poradia okresných kôl z väčšiny okresov). Na internete možno nájsť viacero ďalších stránok súvisiacich s MO. Spomeňme aspoň niektoré z nich:

skmo.sk – oficiálna stránka SKMO,
www.olympiady.sk – stránka Iuventy,
www.imo2014.org.za – stránka 55. IMO v Južnej Afrike,
imo-official.org – oficiálna stránka IMO,
kms.sk – stránka korešpondenčného seminára KMS,
iksko.org – stránka korešpondenčného seminára *i*KS,
artofproblemsolving.com – stránka pre komunitu matematicky nadaných študentov z celého sveta.

Chceme sa poďakovať všetkým učiteľom a nadšencom, ktorí pripravujú žiakov na MO často nad rámec svojich pracovných povinností a podieľajú sa na propagácii a organizácii MO na školách. Uznanie patrí tiež pracovníkom okresných a krajských komisií MO, školských úradov a centier voľného času, ktorí zabezpečujú jednotlivé kolá. Napokon, ďakujeme pracovníkom Iuventy podieľajúcim sa na organizácii CK MO, distribúcii úloh, komunikácii s MŠVVŠ SR a administratíve súvisiacej s financovaním MO.

Peter Novotný, predseda SKMO

Výsledky

Celoštátne kolo kategórie A

Víťazi

1.	BUI Truc Lam	3 G Grösslingová, Bratislava	6 7 7 6 7 6	39
2.	Patrik BAK	3 G Sobrance	7 7 0 7 7 7	35
3.	Zhen Ning David LIU	3 G Jura Hronca, Bratislava	7 7 7 5 7 1	34
4.	Eduard BATMENDIJN	3 Cirk. g. sv. Mikuláša, St. Ľubovňa	7 7 7 7 0 0	28
5.	Zuzana FRANKOVSKÁ	2 G Grösslingová, Bratislava	7 3 7 7 0 1	25
6.	Miroslav PSOTA	4 G Hlinská, Žilina	5 3 7 7 0 1	23

Ďalší úspešní riešitelia

7.	Ľudmila ŠIMKOVÁ	4 G Párovská, Nitra	7 3 0 7 0 1	18
8.	Matúš HALAJ	4 G J. G. Tajovského, B. Bystrica	0 3 0 7 0 7	17
9.	Jakub DARGAJ	4 G Poštová, Košice	7 1 0 7 0 1	16
	Jozef RAJNÍK	4 G Ľ. Štúra, Trenčín	5 5 0 5 0 1	16
11.	Irena BAČINSKÁ	4 ŠPMNDaG, Bratislava	2 0 5 6 0 1	14
	Ondrej BOHDAL	3 G Jura Hronca, Bratislava	7 0 0 5 1 1	14
13.	Ondrej BÍNOVSKÝ	3 G A. Merici, Trnava	7 0 0 6 0 0	13
	Silvia NEPŠINSKÁ	3 G Jura Hronca, Bratislava	1 0 7 5 0 0	13
	Samuel SLÁDEK	2 G A. Bernoláka, Námestovo	5 1 0 7 0 0	13
16.	Šimon JURINA	4 G Grösslingová, Bratislava	1 4 0 6 0 1	12
	Henrieta MICHEĽOVÁ	2 G Alejová, Košice	3 1 0 7 0 1	12
18.	Dominik GRIGĽÁK	4 G P. O. Hviezdoslava, Kežmarok	5 1 0 5 0 0	11
	Samuel HORVÁTH	4 G Párovská, Nitra	1 3 0 5 1 1	11
	Tatiana MATEJOVIČOVÁ	4 G Jura Hronca, Bratislava	5 0 0 6 0 0	11

Ostatní riešitelia

21.	Ádám MARKÓ	4 G H. Selyeho, Komárno	4 0 0 0 0 6	10
22.	Tamás BALOGH	4 G P. Pázmáňa, Nové Zámky	0 3 0 0 0 6	9
	Filip POKRÝVKA	4 G J. Jesenského, Bánovce n. Bebr.	4 0 0 4 0 1	9
24.	Roman KLUVANEC	3 G Párovská, Nitra	1 1 0 6 0 0	8
	Mário LIPOVSKÝ	4 G Jura Hronca, Bratislava	0 0 0 7 0 1	8
	Samuel SUČÍK	3 G Jura Hronca, Bratislava	0 3 0 4 0 1	8
	Peter SÚKENÍK	2 G Varšavská, Žilina	1 0 0 7 0 0	8
28.	Juraj BODÍK	2 G Grösslingová, Bratislava	0 0 0 7 0 0	7
	Dávid BUGÁR	3 G H. Selyeho, Komárno	1 0 0 5 0 1	7
	Michal KORBELA	4 G J. Jesenského, Bánovce n. Bebr.	0 0 2 5 0 0	7
	Štefan STANKO	3 G A. Vrábla, Levice	0 1 0 5 0 1	7
	Emanuel TESAŘ	2 G B. S.-Timravy, Lučenec	0 1 0 6 0 0	7

33.	Hana KRAKOVSKÁ	4 G Grösslingová, Bratislava	0 0 0 5 0 0	5
	Kristína PREŠINSKÁ	3 G Párovská, Nitra	0 0 0 5 0 0	5
	Martin RAPAVÝ	4 G Alejová, Košice	0 1 0 3 0 1	5
36.	Lukáš SADLEK	3 G J. M. Hurbana, Čadca	0 0 0 4 0 0	4
37.	Matej KRÁLIK	3 G Jura Hronca, Bratislava	0 0 0 3 0 0	3
38.	Jozef LUKÁČ	4 G L. Stöckela, Bardejov	0 0 0 2 0 0	2
39.	Jozef BUCKO	3 G P. de Coubertina, Piešťany	0 0 0 1 0 0	1

Úspešnosť jednotlivých úloh je zaznamenaná v tabuľke.

Počet bodov	**Spolu**	**Číslo úlohy**					
		1.	2.	3.	4.	5.	6.
7 bodov	35	8	4	6	12	3	2
6 bodov	11	1	0	0	7	0	3
5 bodov	18	5	1	1	11	0	0
4 body	6	2	1	0	3	0	0
3 body	10	1	7	0	2	0	0
2 body	3	1	0	1	1	0	0
1 bod	34	6	8	0	1	2	17
0 bodov	117	15	18	31	2	34	17
Priemer	2,12	2,72	1,69	1,26	5,18	0,59	1,26

Krajské kolá

Z príslušného kraja a v príslušnej kategórii A, B, C a Z9 sú uvedení všetci, resp. aspoň prvých 10 úspešných riešiteľov.

Kraj Bratislava

Kategória A

1.	BUI Truc Lam	3 Gymnázium Grösslingová
2.	Zhen Ning David LIU	3 Gymnázium Jura Hronca
3.	Zuzana FRANKOVSKÁ	2 Gymnázium Grösslingová
	Šimon JURINA	4 Gymnázium Grösslingová
	Hana KRAKOVSKÁ	4 Gymnázium Grösslingová
6.	Irena BAČINSKÁ	4 ŠpMNDaG Skalická
	Ondrej BOHDAL	3 Gymnázium Jura Hronca

	Matej KRÁLIK	3 Gymnázium Jura Hronca
	Mário LIPOVSKÝ	4 Gymnázium Jura Hronca
	Samuel SUČÍK	3 Gymnázium Jura Hronca

Kategória B

1.	Zuzana FRANKOVSKÁ	Gymnázium Grösslingová
	Juraj HALABRIN	Gymnázium Jura Hronca
3.	Simona VESELÁ	Gymnázium Jura Hronca
4.	Marek MURIN	Gymnázium Jura Hronca
5.	Martin GAŽO	ŠpMNDaG Skalická
6.	Arthur PETRÁŠ	ŠpMNDaG Skalická
7.	Juraj BODÍK	Gymnázium Grösslingová
	Adam ŠKRLEC	Gymnázium Jura Hronca
9.	Matej CHOMA	Gymnázium Grösslingová
	Jakub Jozef KOJDA	Cambridge International School
	Daniel LISÝ	Gymnázium Grösslingová
	Juraj MÁJEK	Gymnázium Grösslingová
	Jakub ŠMAHOVSKÝ	Gymnázium Pezinok

Kategória C

1.	Juraj HALABRIN	Gymnázium Jura Hronca
2.	Samuel KARABA	Gymnázium Jura Hronca
3.	Alexander MACINSKÝ	Gymnázium Jura Hronca
	Kristián RIGÁSZ	Gymnázium Jura Hronca

Kategória Z9

1.	Magdaléna BEČKOVÁ	Gymnázium Jura Hronca
	Samuel KARABA	Gymnázium Jura Hronca
	Dávid MIŠIAK	Gymnázium Jura Hronca
	Barbara PULMANNOVÁ	Gymnázium Grösslingová
5.	Marco SAMUEL FABUŠ	Gymnázium Malacky
	Juraj OLEJÁR	Gymnázium L. Novomeského
	Mária PAPRSKÁROVÁ	Spojená škola sv. Františka z Assisi
8.	Pavol KEBIS	Gymnázium Pezinok
	Lucia KRAJČOVIECHOVÁ	Gymnázium Jura Hronca
	Sára KUŤKOVÁ	Gymnázium Grösslingová

Kraj Nitra

Kategória A

1.	Samuel HORVÁTH	4	Gymnázium Párovská, Nitra
2.	Tamás BALOGH	4	Gymnázium P. Pázmáňa, Nové Zámky
	Dávid BUGÁR	3	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
4.	Ľudmila ŠIMKOVÁ	4	Gymnázium Párovská, Nitra
5.	Kristína PREŠINSKÁ	3	Gymnázium Párovská, Nitra
6.	Roman KLUVANEC	3	Gymnázium Párovská, Nitra
7.	Ádám MARKÓ	4	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	Štefan STANKO	3	Gymnázium A. Vrábla, Levice
9.	Tomáš ŠARAI	3	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
10.	Viktor DOLNÍK	3	Gymnázium A. Vrábla, Levice
	Róbert OROSZ	4	Gymnázium H. Selyeho, Komárno

Kategória B

1.	Mihály KOTIERS	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
2.	Tamás VARGA	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
3.	Tomáš DANIŠ	Spojená škola Nové Zámky
4.	Tamara BARUSOVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
	Michal PORUBSKÝ	Gymnázium sv. Cyrila a Metoda, Nitra
6.	Peter BABKA	Gymnázium Párovská, Nitra
	Gergely BUKOVSZKY	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
8.	Tomáš KVAŠŠAY	Gymnázium J. Kráľa, Zlaté Moravce
	Peter TRUBÁČIK	Gymnázium Párovská, Nitra

Kategória C

1.	Tamás PIVODA	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	Árpád TARICS	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
3.	Matej MACÁK	Gymnázium A. Vrábla, Levice
	Simona ORAVECOVÁ	Gymnázium Ľ. J. Šuleka, Komárno
5.	Géza CSENGER	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	Kata FODOR	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
7.	Zoltán ANDRUSKÓ	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	György BARÁTH	SPŠ Komárno
	Márk RANCSÓ	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
10.	Matej NOVÁK	Gymnázium Golianova, Nitra
	Linda VALKOVIČOVÁ	Gymnázium Vráble

Kategória Z9

1.	Ramóna LÉVAI	ZŠ Marcelová
	Dávid MACEJKO	ZŠ s VJM, Sokolce
	Jarmila ŠIMKOVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
	Ákos ZÁHORSKÝ	ZŠ L. Pongrácza s VJM, Šahy
5.	Filip ČERMÁK	Gymnázium Golianova, Nitra
	Daniel MAGULA	Piaristické gymn. sv. J. Kalazanského, Nitra
	Alan MARKO	Gymnázium M. R. Štefánika, Nové Zámky
	Tomáš ŠVIHORÍK	Gymnázium Párovská, Nitra
9.	Dóra CZIBOROVÁ	ZŠ Práce, Komárno
10.	Lili ÉDES	Spojená cirk. škola Marianum, Komárno

Kraj Trnava

Kategória A

1.	Ondrej BÍNOVSKÝ	3 Gymnázium A. Merici, Trnava
2.	Dávid FODOR	3 Gymnázium Á. Vámbéryho, D. Streda
	Tamás RÓZSA	3 Súkr. gymnázium s VJM, D. Streda
	Alexander TURAN	3 Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany
5.	Zsolt BOGNÁR	3 Gymnázium Á. Vámbéryho, D. Streda
	Jozef BUCKO	3 Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany
	Samuel KERN	3 Gymnázium J. Hollého, Trnava
	Emese SÁHA	4 Súkr. gymnázium s VJM, D. Streda
9.	Gábor KRÁLIK	3 Gymnázium Z. Kodálya, Galanta

Kategória B

1.	Pál SOMOGYI	Gymnázium I. Madácha s VJM, Šamorín
2.	Erzsébet TÓTH	Súkr. gymnázium s VJM, D. Streda
3.	Ádám LUKOVICS	Gymnázium Á. Vámbéryho, D. Streda
4.	Dominika ĎUROVČÍKOVÁ	Gymnázium I. Kupca, Hlohovec
5.	Matej BENKO	Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany
	Roman SOBKULIAK	Gymnázium I. Kupca, Hlohovec

Kategória C

1.	Ádám BAJCZÁR	Súkr. gymnázium s VJM, D. Streda
	Gergely LENGYEL	Súkr. gymnázium s VJM, D. Streda
	Martin MAJTÁN	Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany

	Péter ÖLLŐS	Gymnázium Á. Vámbéryho, D. Streda
5.	Juraj MEČÍR	Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany
	Ján VAVRO	Gymnázium J. Hollého, Trnava

Kategória Z9

1.	Bence BÁNKI	ZŠ Á. Vámbéryho s VJM, D. Streda
	Ernö MOLNÁR	ZŠ M. Kóczána s VJM, Čiližská Radvaň
	Kristóf NOGELY	ZŠ I. Széchenyiho s VJM, Horné Saliby
	Máté PSZOTA	ZŠ B. Bartóka s VJM, Veľký Meder
	Tomáš SÁSIK	ZŠ Vančurova, Trnava
6.	Laura BARCZIOVÁ	Gymnázium J. Matúšku, Galanta
	Bence KIS LÁZÁR	Reformovaná ZŠ, Dolný Štál
8.	Anna MARKÓ	ZŠ I. Széchenyiho s VJM, Horné Saliby
	Nikolas MÉSZÁROS	ZŠ Komenského, Gabčíkovo
	Barnabás MÓROCZ	ZŠ Jahodná

Kraj Trenčín

Kategória A

1.	Jozef RAJNÍK	4 Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
2.	Filip POKRÝVKA	4 Gymnázium J. Jesenského, Bánovce n. Bebr.
3.	Michal KORBELA	4 Gymnázium J. Jesenského, Bánovce n. Bebr.
4.	Nina HRONKOVIČOVÁ	3 Gymnázium Partizánske
5.	Filip AYAZI	3 Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
6.	Adam MEČIAR	3 Gymnázium V. B. Nedožerského, Prievidza
	Jaromír MIKULEC	3 Gymnázium sv. Jozefa, Nové Mesto n. V.

Kategória B

1.	Lukáš KOTLABA	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
2.	Ľubica JANČOVÁ	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
3.	Milan ZONGOR	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín

Kategória C

1.	Ján HUNÁK	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
	Lenka VRÁBLOVÁ	Gymnázium 1. mája, Púchov
3.	Mária RAJNÍKOVÁ	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
	Mária VRONKOVÁ	Gymnázium Dubnica nad Váhom

5.	Paulína PODSKUBOVÁ	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
6.	Marek BORIK	Gymnázium J. Jesenského, Bánovce n. Bebr.
7.	Zdenko ČEPAN	Gymnázium Partizánske
	Samuel MATLOVIČ	Gymnázium Dubnica nad Váhom

Kategória Z9

1.	Jakub JEŠÍK	ZŠ Dolná Mariková
	Marcel ZVERBÍK	ZŠ Bezručova, Trenčín
3.	Matej KURTIN	ZŠ Mládežnícka, Púchov
4.	Alba M. HERNÁNDEZ	ZŠ Dlhé Hony, Trenčín
5.	Martin BAKOŠ	Gymnázium Považská Bystrica
	Peter KOŠŤÁL	ZŠ Školská, Bánovce nad Bebravou
7.	Jana Viktória KOVÁČIKOVÁ	Gymnázium Dubnica nad Váhom
	Ján PAVLECH	ZŠ sv. Jozefa, Nové Mesto nad Váhom
	Štefan SCHINDLER	ZŠ Stará Turá
	Tomáš VAKOŠ	ZŠ Dlhé Hony, Trenčín

Kraj Žilina

Kategória A

1.	Lukáš SADLEK	3	Gymnázium J. M. Hurbana, Čadca
2.	Samuel SLÁDEK	2	Gymnázium A. Bernoláka, Námestovo
3.	Miroslav PSOTA	4	Gymnázium Hlinská, Žilina
4.	Peter SÚKENÍK	2	Gymnázium Varšavská, Žilina
5.	Michaela SANTROVÁ	3	Gymnázium M. Hattalu, Trstená
6.	Ivona HRIVOVÁ	4	Gymnázium Veľká okružná, Žilina

Kategória B

1.	Samuel SLÁDEK	Gymnázium A. Bernoláka, Námestovo
2.	Michal SLÁDEČEK	Gymnázium Varšavská, Žilina
	Peter SÚKENÍK	Gymnázium Varšavská, Žilina
4.	Adam KRÁL	Gymnázium Varšavská, Žilina

Kategória C

1.	Patrik LAMOŠ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
2.	Filip KULLA	Bilingválne gymnázium M. Hodžu, Sučany
3.	Martin PIALA	Gymnázium Veľká okružná, Žilina

	Marek SKLENKA	Bilingválne gymnázium M. Hodžu, Sučany
5.	Róbert DRUSKA	Gymnázium Ružomberok
6.	Matej JURČÍK	Gymnázium V. Paulínyho-Tótha, Martin
7.	Erik WETTER	Bilingválne gymnázium M. Hodžu, Sučany
8.	Milan ŠNAPKO	Gymnázium M. Hattalu, Trstená
9.	Martin BAZGER	Gymnázium Turzovka
	Tomáš MUCHA	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
	Petra POLÁKOVÁ	Gymnázium Hlinská, Žilina

Kategória Z9

1.	Kristína SZABOVÁ	Gymnázium Varšavská, Žilina
2.	Michal SANDANUS	Bilingválne gymnázium T. Ružičku, Žilina
	Filip ŠUŠKA	ZŠ Slnečná, Námestovo
4.	Maximilián MOLNÁR	Ev. gymnázium J. Tranovského, Lipt. Mikuláš
	Katarína STUDENIČOVÁ	ZŠ P. Škrabáka, D. Kubín
6.	Samuel BABIC	ZŠ Čs. brigády, Lipt. Mikuláš
	Michal KYSELICA	Cirk. ZŠ R. Zaymusa, Žilina
	Samuel ŠKODA	Gymnázium Varšavská, Žilina
9.	Martin MIŠKOVSKÝ	Cirk. ZŠ R. Zaymusa, Žilina
	Eva MORESOVÁ	Gymnázium Varšavská, Žilina

Kraj Banská Bystrica

Kategória A

1.	Matúš HALAJ	4 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
2.	Emanuel TESAŘ	2 Gymnázium B. S.-Timravy, Lučenec
3.	Adam KŇAZE	3 Gymnázium J. Chalupku, Brezno

Kategória B

1.	Pavol ZAŤKO	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
2.	Bence BIAL	Gymnázium Fiľakovo
3.	Emanuel TESAŘ	Gymnázium B. S.-Timravy, Lučenec
4.	Tomáš TEREM	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
5.	Milan KUBALA	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
6.	Samuel SCHNEIDER	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica

Kategória C

1.	Jozef LIPTÁK	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
2.	Mátyás PELLE	Gymnázium I. Kraska, Rimavská Sobota
3.	Ľubica HLADKÁ	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
4.	Adam DOBROVIČ	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Tomáš KANCKO	Gymnázium Ľ. Štúra, Zvolen

Kategória Z9

1.	Maroš GREGO	ZŠ Ďumbierska, B. Bystrica
2.	Anna VOSKÁROVÁ	ZŠ Radvanská, B. Bystrica
3.	Samuel ARPÁŠ	ZŠ SSV, B. Bystrica
4.	Ľuboslav HALAMA	ZŠ M. B. Funtíka, Očová
	Matúš SEČI	ZŠ M. R. Štefánika, Lučenec
	Branislav SCHWARZ	ZŠ SSV, B. Bystrica
7.	Kristína KOZELEKOVÁ	ZŠ Badín
	Marek ŠPITALSKÝ	ZŠ Ďumbierska, B. Bystrica
9.	Mária MOJŠOVÁ	Kat. gymnázium Š. Moyzesa, B. Bystrica
	Richard NAGY	ZŠ B. Balassiho, Vinica

Kraj Košice

Kategória A

1.	Jakub DARGAJ	4 Gymnázium Poštová, Košice
2.	Patrik BAK	3 Gymnázium Sobrance
	Miroslav STANKOVIČ	4 Gymnázium Poštová, Košice
4.	Martin RAPAVÝ	4 Gymnázium Alejová, Košice
5.	Katarína KRAJČIOVÁ	3 Gymnázium Alejová, Košice
	Henrieta MICHEĽOVÁ	2 Gymnázium Alejová, Košice
	Matúš PORÁZIK	4 Gymnázium Alejová, Košice
8.	Tomáš KEKEŇÁK	2 Gymnázium S. Máraiho, Košice
9.	Marko PUZA	4 Gymnázium Poštová, Košice
	Roman STAŇO	3 Gymnázium Poštová, Košice
	Alexander TÉNAI	3 Gymnázium Poštová, Košice

Kategória B

1.	Henrieta MICHEĽOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
2.	Kristína MIŠLANOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice

3.	Michaela BREZINOVÁ	Gymnázium Trebišov
	Tomáš KEKEŇÁK	Gymnázium S. Máraiho, Košice
	Žaneta SEMANIŠINOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
6.	Patrik LENÁRT	Gymnázium Park mládeže, Košice
7.	Petra PLŠKOVÁ	Gymnázium Poštová, Košice
8.	Martin BOSÁK	Gymnázium Poštová, Košice
9.	René Michal CEHLÁR	Gymnázium Poštová, Košice
	Viktor PRISTAŠ	Gymnázium S. Máraiho, Košice

Kategória C

1.	Pavol DROTÁR	Gymnázium Poštová, Košice
	Jakub MACH	Gymnázium Poštová, Košice
3.	Pavol PETRUŠ	Gymnázium Poštová, Košice
4.	Juraj MIČKO	Gymnázium Poštová, Košice
5.	Jakub GENČI	Gymnázium Poštová, Košice
	Zoltán HANESZ	Gymnázium Poštová, Košice
7.	Ivan GREGA	Ev. gymnázium J. A. Komenského, Košice
	Samuel KRAJČI	Gymnázium Alejová, Košice
	Martin SPIŠÁK	Gymnázium Alejová, Košice
	Adam URBÁN	Gymnázium Poštová, Košice

Kategória Z9

1.	Ján GERČÁK	Gymnázium Javorová, Spišská Nová Ves
	Samuel KRAJČI	Gymnázium Alejová, Košice
	Martin MASRNA	ZŠ Krosnianska, Košice
	Jakub POHLY	ZŠ Grundschule, Gelnica
5.	Anna KÖTELESOVÁ	ZŠ Bruselská, Košice
	Rudolf LUKÁČ	Gymnázium Opatovská, Košice
	Peter ONDUŠ	Gymnázium Alejová, Košice
	Nikola SVETOZAROV	ZŠ Krosnianska, Košice
	Rastislav ŠPAKOVSKÝ	ZŠ Tomášikova, Košice
10.	Sára BELEJOVÁ	ZŠ Švermova, Michalovce
	Viktória BREZINOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
	František KATONA	Gymnázium sv. E. Steinovej, Košice
	Marek KOMAN	Gymnázium Alejová, Košice

Kraj Prešov

Kategória A

1.	Eduard BATMENDIJN	3	Cirk. gymnázium sv. Mikuláša, St. Ľubovňa
2.	Dominik GRIGĽÁK	4	Gymnázium P. O. Hviezdoslava, Kežmarok
3.	Jozef LUKÁČ	4	Gymnázium L. Stöckela, Bardejov
4.	Marek BIROŠ	3	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
	Jaroslav HOFIERKA	4	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
6.	Peter JEVČÁK	3	Gymnázium arm. gen. L. Svobodu, Humenné
	Maroš POLOVKA	4	Gymnázium Kukučínova, Poprad
	Martin ŠIPKA	4	Gymnázium P. O. Hviezdoslava, Kežmarok

Kategória B

1.	Slavomír HANZELY	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
2.	Róbert KLUČÁR	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
3.	Samuel STAŠKO	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
4.	Samuel MOLČAN	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
5.	Antónia IHNÁTOVÁ	Gymnázium arm. gen. L. Svobodu, Humenné
6.	Dávid JAVORSKÝ	Gymnázium P. O. Hviezdoslava, Kežmarok
	Jakub ŠEVČÍK	Gymnázium Kukučínova, Poprad
	Katarína ŠIMKOVÁ	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov

Kategória C

1.	Miroslava BARANOVÁ	Gymnázium D. Tatarku, Poprad
2.	Martin PAŠEN	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
3.	Angelika FEDÁKOVÁ	Cirk. gymnázium sv. Mikuláša, Stará Ľubovňa
4.	Daniel AZZAM	Gymnázium D. Tatarku, Poprad
5.	Oliver PITOŇÁK	Gymnázium D. Tatarku, Poprad
	Patrik PROKOP	Gymnázium L. Stöckela, Bardejov
7.	Alexander KLING	Gymnázium D. Tatarku, Poprad
	Jakub KOLŠOVSKÝ	Súkr. gymnázium Prešov

Kategória Z9

1.	Peter BELCÁK	ZŠ Hrnčiarska, Humenné
	Karol GRILLING	Gymnázium D. Tatarku, Poprad
	Katarína KUĽKOVÁ	ZŠ Drienov
4.	Natália ČESÁNKOVÁ	ZŠ Hviezdoslavova, Lipany
	Matej HOCKICKO	Gymnázium sv. Františka Assiského, Levoča

	Róbert KARPIEL	Gymn. a ZŠ sv. Cyrila a Metoda, Humenné
	Ján SLANINKA	Cirk. ZŠ sv. Jána Krstiteľa, Sabinov
8.	Miriam FABIANOVÁ	Cirk. gymn. sv. Františka z Assisi, Vranov n. T.
	Benedikt FEŤKO	ZŠ Kapušany
	Silvia KOSTÁROVÁ	ZŠ Komenského, Bardejov
	Jakub LUKAČÍN	ZŠ J. Švermu, Humenné
	Zuzana POKLEMBOVÁ	Gymnázium sv. Mikuláša, Prešov

Zadania súťažných úloh

Kategória Z5

Z5 – I – 1

Medzi dvoma tyčami je napnutá šnúra dlhá 3,8 m, na ktorú chce mamička zavesiť vypraté vreckovky. Všetky vreckovky majú tvar štvorca so stranou 40 cm. Na šnúre však už visia dve vreckovky rovnakého tvaru od susedky a tie chce mamička nechať na svojich miestach. Pritom ľavý roh jednej z týchto vreckoviek je 60 cm od ľavej tyče a ľavý roh tej druhej je 1,3 m od pravej tyče. Koľko najviac vreckoviek môže mamička na šnúru zavesiť? Vreckovky sa vešajú natiahnuté za dva susedné rohy tak, aby sa žiadne dve neprekrývali. (*Martin Mach*)

Z5 – I – 2

Vojto má dve rovnaké sklíčka tvaru rovnostranného trojuholníka, ktoré sa líšia iba svojou farbou – jedno je červené, druhé modré. Keď sa sklíčka položia cez seba, vznikne útvar fialovej farby. Uveďte príklad prekrývania sklíčok, pri ktorom mohol Vojto dostať:

a) fialový trojuholník,
b) fialový štvoruholník,
c) fialový päťuholník,
d) fialový šesťuholník. (*Erika Novotná*)

Z5 – I – 3

Palindróm je také číslo, ktoré je rovnaké, či už ho čítame spredu alebo zozadu. (Napr. číslo 1881 je palindróm.) Nájdite taký dvojciferný a trojciferný palindróm, aby ich súčet bol štvorciferný palindróm. (*Marta Volfová*)

Z5 – I – 4

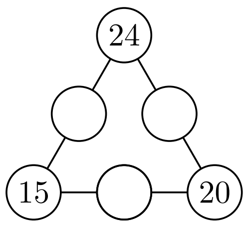
Eve sa páčia čísla deliteľné šiestimi, Zdenke čísla obsahujúce aspoň jednu šestku a Jane čísla, ktorých ciferný súčet je 6.

a) Ktoré dvojciferné čísla sa páčia všetkým trom dievčatám?
b) Ktoré dvojciferné čísla sa páčia práve dvom dievčatám? (*Michaela Petrová*)

Z5 – I – 5

Doplňte do prázdnych krúžkov na obr. 1 prirodzené čísla tak, aby súčet čísel na každej strane trojuholníka bol rovnaký a aby súčet všetkých šiestich čísel bol 100.

(*Libor Šimůnek*)



Obr. 1

Z5 – I – 6

Recepčná v hoteli si vykladala karty a dostala nasledujúcu postupnosť:

5, 9, 2, 7, 3, 6, 8, 4.

Presunula dve susedné karty na iné miesto tak, že táto dvojica opäť susedila, a to v rovnakom poradí. Tento krok urobila celkom trikrát, kým neboli karty usporiadané vzostupne podľa svojej hodnoty. Zistite, ako recepčná postupovala. (*Libuše Hozová*)

Z5 – II – 1

Na kraji cesty je za sebou niekoľko rovnako dlhých parkovacích miest. Jeden autobus stál na piatom až siedmom mieste zľava, druhý autobus zaberal ôsme až desiate miesto sprava, inak bolo parkovisko prázdne. Neskôr tu zaparkovali ďalšie štyri autobusy a žiadny ďalší autobus už sa na parkovisko nezmestil. Určte, koľko najviac parkovacích miest mohlo byť na parkovisku, ak každý autobus zaberá presne tri parkovacie miesta.

(*Eva Patáková*)

Z5 – II – 2

Ľuboš rozdelil obdĺžnik jednou čiarou na dva menšie obdĺžniky. Obvod veľkého obdĺžnika je 76 cm, obvody menších obdĺžnikov sú 40 cm a 52 cm. Určte rozmery veľkého obdĺžnika. (*Libor Šimůnek*)

Z5 – II – 3

Juraj a Peter spustili stopky a niekedy v priebehu prvých 15 sekúnd od spustenia každý z nich začal tlieskať. Juraj po svojom prvom tlesknutí tlieskal pravidelne každých

7 sekúnd, Peter po svojom prvom tlesknutí tlieskal pravidelne každých 13 sekúnd. V 90. sekunde tleskli obaja naraz. Určte všetky možnosti, kedy mohol začať tlieskať Juraj a kedy Peter. (*Lenka Dedková*)

KATEGÓRIA Z6

Z6 – I – 1

V továrni na výrobu plyšových hračiek majú dva stroje. Prvý vyrobí štyroch zajacov za rovnaký čas, za ktorý vyrobí druhý päť medveďov. Aby bolo ich ovládanie jednoduchšie, oba stroje sa spúšťajú a vypínajú naraz spoločným vypínačom. Navyše sú stroje nastavené tak, že prvý po spustení najskôr vyrobí troch ružových zajacov, potom jedného modrého, potom zasa troch ružových atď. Druhý po spustení najskôr vyrobí štyroch modrých medveďov, potom jedného ružového, potom opäť štyroch modrých atď. Po istom čase bolo na týchto dvoch strojoch vyrobených celkom 220 modrých hračiek. Koľko bolo vtedy vyrobených ružových zajacov? (*Michaela Petrová*)

Z6 – I – 2

Juro, Mišo, Peter, Filip a Samo skákali do diaľky. Samo skočil 135 cm, Peter skočil o 4 cm viac ako Juro, Juro o 6 cm menej ako Mišo a Mišo o 7 cm menej ako Filip. Navyše Filipov skok bol presne v polovici medzi Petrovým a Samovým. Zistite, koľko cm skočili jednotliví chlapci. (*Monika Dillingerová*)

Z6 – I – 3

Koľko musíme napísať cifier, ak chceme vypísať všetky prirodzené čísla od 1 do 2013? (*Marta Volfová*)

Z6 – I – 4

Správne vyplnená tabuľka na obr. 2 má obsahovať šesť prirodzených čísel, pričom v každom sivom políčku má byť súčet čísel z dvoch bielych políčok, ktoré s ním susedia.

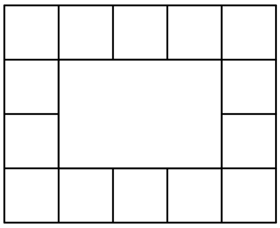
Obr. 2

Určte čísla správne vyplnenej tabuľky, ak viete, že súčet prvých dvoch čísel zľava je 33, súčet prvých dvoch čísel sprava je 28 a súčet všetkých šiestich čísel je 64. (*Libor Šimůnek*)

Z6 – I – 5

Adam dostal od deda drevené kocky. Všetky boli rovnaké a mali hranu dlhú 4 cm. Rozhodol sa, že z nich bude stavať komíny, a to také:

- aby boli použité všetky kocky,
- aby komín pri pohľade zhora vyzeral ako „dutý obdĺžnik“ alebo „dutý štvorec“ ohraničený jedným radom kociek (podobne ako na obr. 3),
- aby ani v najvyššej vrstve žiadna kocka nechýbala.



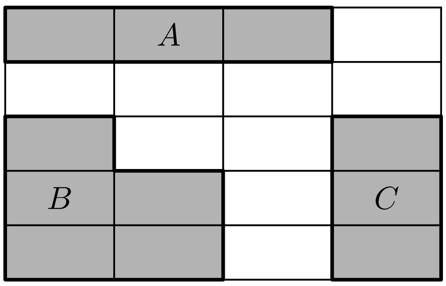
Obr. 3

Adam zistil, že komín vysoký 16 cm, 20 cm aj 24 cm sa podľa týchto pravidiel určite dá z jeho kociek postaviť.

a) Aký najmenší počet kociek mohol Adam dostať od deda?
b) Aký vysoký je najvyšší komín, ktorý môže Adam s týmto najmenším počtom kociek postaviť podľa uvedených pravidiel? (*Michaela Petrová*)

Z6 – I – 6

Na obr. 4 je sieť zložená z 20 zhodných obdĺžnikov, do ktorej sme zakreslili tri útvary a vyfarbili ich. Obdĺžnik označený písmenom A a šesťuholník označený písmenom B majú zhodné obvody, a to 56 cm. Vypočítajte obvod tretieho útvaru označeného písmenom C. (*Libor Šimůnek*)



Obr. 4

Z6 – II – 1

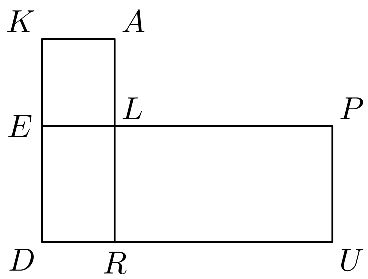
Keď kráčame pozdĺž plota zo severu na juh, sú rozstupy medzi jeho stĺpikmi zozačiatku zhodné. Od určitého stĺpika sa rozstup zmenší na 2,9 metra a taký zostáva až po južný koniec plota. Medzi 1. a 16. stĺpikom (počítané od severu) sa rozstupy nemenia a vzdialenosť medzi týmito dvoma stĺpikmi je 48 metrov. Vzdialenosť medzi 16. a 28. stĺpikom je 36 metrov. Koľký stĺpik má od svojich susedných stĺpikov rôzne rozstupy? (*Libor Šimůnek*)

Z6 – II – 2

Ivana, Majka, Lucka, Saša a Zuzka pretekali v čítaní tej istej knihy. Za jednu hodinu stihla Lucka prečítať 32 strán, čo bolo presne v strede medzi počtami strán, ktoré stihli prečítať Saša a Zuzka. Ivana prečítala o 5 strán viac ako Zuzka a Majka prečítala o 8 strán menej ako Saša. Ivanin výsledok bol presne v strede medzi Majkiným a Zuzkiným. Určte, koľko strán prečítali jednotlivé dievčatá. (*Monika Dillingerová*)

Z6 – II – 3

Na obr. 5 je znázornených niekoľko pravouholníkov s niekoľkými spoločnými vrcholmi. Ich dĺžky strán zapísané v centimetroch sú celé čísla. Obsah pravouholníka $DRAK$ je rovný $44\,\mathrm{cm}^2$, obsah pravouholníka $DUPE$ je rovný $64\,\mathrm{cm}^2$ a obsah mnohouholníka $DUPLAK$ je rovný $92\,\mathrm{cm}^2$. Určte dĺžky strán mnohouholníka $DUPLAK$.
(*Monika Dillingerová*)



Obr. 5

KATEGÓRIA Z7

Z7 – I – 1

Na lavičke v parku sedia vedľa seba Anička, Barborka, Cilka, Dominik a Edo. Anička má 4 roky, Edo má 10 rokov, súčin vekov Aničky, Barborky a Cilky je 140, súčin vekov Barborky, Cilky a Dominika je 280 a súčin vekov Cilky, Dominika a Eda je 560. Koľko rokov má Cilka? (*Libuše Hozová*)

Z7 – I – 2

K starej mame prišli na prázdniny vnuci – päť rôzne starých bratov. Stará mama im povedala, že pre nich má celkom 60 € ako vreckové, ktoré si majú rozdeliť tak, aby:

- najstarší dostal najviac,
- každý mladší dostal o určitú čiastku menej ako jeho starší vekom najbližší súrodenec,
- táto čiastka bola stále rovnaká,
- najmladší dostal sumu, ktorá sa dá vyplatiť v jednoeurovkách a ktorá nie je menšia ako 5 €, ale nie je väčšia ako 8 €.

Určte všetky možnosti, ako si mohli vnuci vreckové rozdeliť. (*Marta Volfová*)

Z7 – I – 3

Juro, Mišo, Peter, Filip a Samo skákali do diaľky. Samo skočil 135 cm, Peter skočil o 4 cm viac ako Juro a Mišo o 7 cm menej ako Filip. Navyše Filipov skok bol presne v polovici medzi tým Petrovým a Samovým a najkratší skok meral 127 cm. Zistite, koľko cm skočili jednotliví chlapci. (*Monika Dillingerová*)

Z7 – I – 4

V hostinci U troch prasiatok obsluhujú Pašík, Rašík a Sašík. Pašík je nečestný, takže každému hosťovi pripočíta k celkovej cene 6 grajciarov. Rašík je poctivec, každému vyúčtuje presne to, čo zjedol a vypil. Sašík je dobrák, takže každému hosťovi dá zľavu z celkovej ceny vo výške 20 %. Prasiatka sa na seba tak podobajú, že žiadny hosť nepozná, ktoré práve obsluhuje. Koza Lujza zašla v pondelok, v utorok aj v stredu do tohto hostinca na čučoriedkovú buchtu. Napriek tomu, že vedela, že v pondelok bol Rašík chorý a neobsluhoval, utratila za svoju pondelkovú, utorkovú aj stredajšiu buchtu dokopy rovnako, ako keby ju vždy obsluhoval Rašík. Koľko grajciarov účtuje Rašík za jednu čučoriedkovú buchtu? Nájdite všetky možnosti. (Ceny uvádzané v jedálnom lístku sa v tieto dni nemenili.) (*Michaela Petrová*)

Z7 – I – 5

Mamička delí čokoládu, ktorá má 6×4 rovnakých dielikov, svojim trom deťom. Ako môže mamička čokoládu rozdeliť na práve tri časti s rovnakým obsahom tak, aby jeden útvar bol trojuholník, jeden štvoruholník a jeden päťuholník? (*Erika Novotná*)

Z7 – I – 6

Keď Cézar stojí na psej búde a Dunčo na zemi, je Cézar o 70 cm vyšší ako Dunčo. Keď Dunčo stojí na psej búde a Cézar na zemi, je Dunčo o 90 cm vyšší ako Cézar. Aká vysoká je psia búda? (*Libuše Hozová*)

Z7 – II – 1

Tabuľka na obr. 6 má obsahovať sedem prirodzených čísel, pričom v každom sivom políčku má byť súčin čísel z dvoch bielych políčok, ktoré s ním susedia. Čísla v bielych políčkach sú navzájom rôzne a súčin čísel v sivých políčkach je rovný 525. Aký je súčet čísel v sivých políčkach? Nájdite všetky možnosti. (*Eva Patáková*)

Obr. 6

Z7 – II – 2

Ivana, Majka, Lucka, Saša a Zuzka pretekali v čítaní tej istej knihy. Za jednu hodinu stihla Lucka prečítať 32 strán, čo bolo presne v strede medzi počtami strán, ktoré stihli prečítať Saša a Zuzka. Ivana prečítala o 5 strán viac ako Zuzka a Majka prečítala o 8 strán menej ako Saša. Žiadne dve dievčatá neprečítali rovnaký počet strán a najhorší výsledok bol 27 strán. Určte, koľko strán prečítali jednotlivé dievčatá.
(*Monika Dillingerová*)

Z7 – II – 3

Po náraze kamienka praskla sklenená tabuľa tak, že vznikli štyri menšie trojuholníky so spoločným vrcholom v mieste nárazu. Pritom platí, že:

- sklenená tabuľa mala tvar obdĺžnika, ktorý bol 8 dm široký a 6 dm vysoký,
- trojuholník vpravo mal trikrát väčší obsah ako trojuholník vľavo,
- trojuholník vľavo mal dvakrát menší obsah ako trojuholník dole.

Určte vzdialenosti bodu nárazu od strán obdĺžnika. (*Erika Novotná*)

Kategória Z8

Z8 – I – 1

Po okružnej linke v meste ide električka, v ktorej je 300 cestujúcich. Na každej zastávke sa odohrá jedna z nasledujúcich situácií:

- ak je v električke aspoň 7 cestujúcich, tak ich 7 vystúpi,
- ak je v električke menej ako 7 cestujúcich, tak 5 nových cestujúcich pristúpi.

Vysvetlite, prečo v istom okamihu v električke neostane žiadny cestujúci. Potom zistite, koľko by malo byť na začiatku v električke cestujúcich, aby sa električka nikdy nevyprázdnila. (*Ján Mazák*)

Z8 – I – 2

Mamička delí čokoládu, ktorá má 6×4 rovnakých dielikov, svojim štyrom deťom. Ako môže mamička čokoládu rozdeliť na práve štyri časti s rovnakým obsahom tak, aby jeden útvar bol trojuholník, jeden štvoruholník, jeden päťuholník a jeden šesťuholník?

(*Erika Novotná*)

Z8 – I – 3

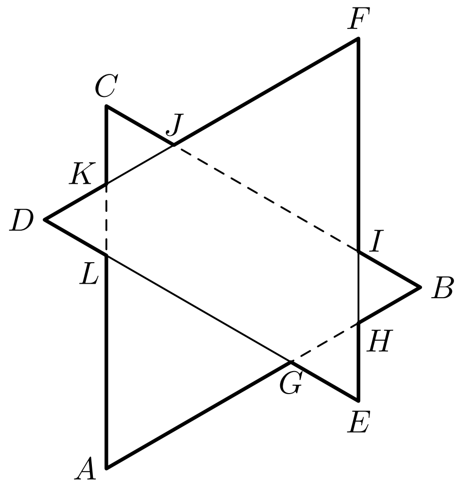
Zmeňte v každom z troch čísel jednu cifru tak, aby bol príklad na odčítanie bez chyby:

$$\begin{array}{r} 7\ 2\ 4 \\ -\ 3\ 0\ 7 \\ \hline 1\ 8\ 8 \end{array}$$

Nájdite všetky riešenia. (*Michaela Petrová*)

Z8 – I – 4

Trojuholníky ABC a DEF sú rovnostranné s dĺžkou strany 5 cm. Tieto trojuholníky sú položené cez seba tak, aby strany jedného trojuholníka boli rovnobežné so stranami druhého a aby prienikom týchto dvoch trojuholníkov bol šesťuholník (na obr. 7 označený ako $GHIJKL$). Je možné určiť obvod dvanásťuholníka $AGEHBIFJCKDL$ bez toho,



Obr. 7

aby sme poznali presnejšie informácie o polohe trojuholníkov? Ak áno, spočítajte ho; ak nie, vysvetlite prečo. (*Eva Patáková*)

Z8 – I – 5

Zákazník privážajúci odpad do zberných surovín je povinný zastaviť naloženým autom na váhe a po vykládke odpadu znova. Rozdiel nameraných hmotností tak zodpovedá privezenému odpadu. Pat a Mat spravili chybu. Pri vážení naloženého auta sa na váhu priplietol Pat a pri vážení vyloženého auta sa tam namiesto Pata ocitol Mat. Vedúci zberných surovín si tak zaznamenal rozdiel 332 kg. Následne sa na prázdnu váhu postavili spolu vedúci a Pat, potom samotný Mat a váha ukázala rozdiel 86 kg. Ďalej sa spolu zvážili vedúci a Mat, potom samotný Pat a váha ukázala rozdiel 64 kg. Koľko v skutočnosti vážil privezený odpad? (*Libor Šimůnek*)

Z8 – I – 6

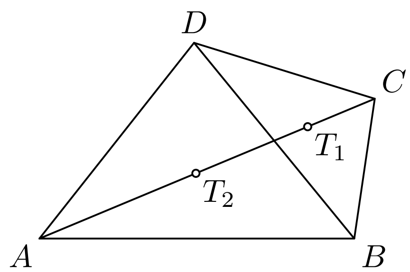
V dome máme medzi dvoma poschodiami dve rôzne schodiská. Na každom z týchto schodísk sú všetky schody rovnako vysoké. Jedno zo schodísk má každý schod vysoký 10 cm, druhé má o 11 schodov menej ako to prvé. Behom dňa som išiel päťkrát nahor a päťkrát nadol, pričom som si medzi týmito dvoma schodiskami vyberal náhodne. Celkom som na každom zo schodísk zdolal rovnaký počet schodov. Aký je výškový rozdiel medzi poschodiami? (*Martin Mach*)

Z8 – II – 1

Angela, Barbora, Jano, Vlado a Matúš súťažili v hode papierovým lietadielkom. Každý hádzal raz a súčet dĺžok ich hodov bol 41 metrov. Matúš hodil najmenej, čo bolo o 90 cm menej ako hodila Angela, a tá hodila o 60 cm menej ako Vlado. Jano hodil najďalej a trafil lietadielkom do pásky označujúcej celé metre. Ak by súťažili iba Matúš, Vlado a Angela, priemerná dĺžka hodu by bola o 20 cm kratšia. Určte dĺžky hodov všetkých menovaných detí. (*Lenka Dedková*)

Z8 – II – 2

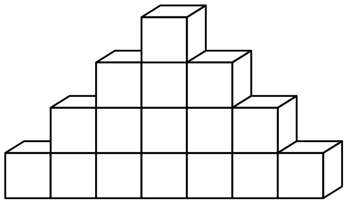
Daný je štvoruholník $ABCD$ (obr. 8). Bod T_1 je ťažiskom trojuholníka BCD, bod T_2 je ťažiskom trojuholníka ABD a body T_1 a T_2 ležia na úsečke AC. Dĺžka úsečky T_1T_2 je 3 cm a bod D má od úsečky AC vzdialenosť 3 cm. Určte obsah štvoruholníka $ABCD$. (*Eva Patáková*)



Obr. 8

Z8 – II – 3

V meste rekordov a kuriozít postavili pyramídu z kociek. V hornej vrstve je jedna kocka a počty kociek v jednotlivých vrstvách sa smerom nadol zväčšujú vždy o dve (niekoľko horných vrstiev stavby je znázornených na obr. 9). Prvá, teda najspodnejšia vrstva má čiernu farbu, druhá sivú, tretia bielu, štvrtá opäť čiernu, piata sivú, šiesta bielu a takto sa farby pravidelne striedajú až k hornej vrstve. Určte, koľko má pyramída vrstiev, ak viete, že čiernych kociek je použitých o 55 viac ako bielych. (*Libor Šimůnek*)



Obr. 9

Kategória Z9

Z9 – I – 1

Peter si myslí dvojciferné číslo. Keď toto číslo napíše dvakrát za sebou, vznikne štvorciferné číslo deliteľné deviatimi. Keď to isté číslo napíše trikrát za sebou, vznikne šesťciferné číslo deliteľné ôsmimi. Zistite, aké číslo si môže Peter myslieť.

(*Erika Novotná*)

Z9 – I – 2

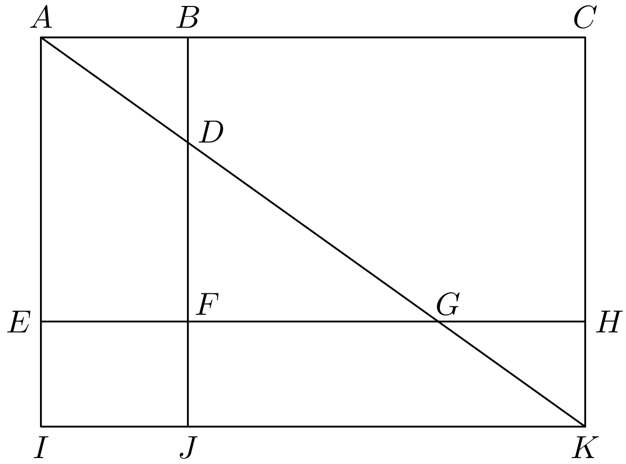
Daný je rovnoramenný lichobežník s dĺžkami strán $|AB| = 31\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 26\,\mathrm{cm}$ a $|CD| = 11\,\mathrm{cm}$. Na strane AB je bod E určený pomerom vzdialeností $|AE| : |EB| = 3 : 28$. Vypočítajte obvod trojuholníka CDE. (*Lenka Dedková*)

Z9 – I – 3

Podlahu tvaru obdĺžnika so stranami 360 cm a 540 cm máme pokryť (bez medzier) zhodnými štvorcovými dlaždicami. Môžeme si vybrať z dvoch typov štvorcových dlaždíc, ktorých strany sú v pomere 2 : 3. V oboch prípadoch sa dá pokryť celá plocha jedným typom dlaždíc bez pílenia. Menších dlaždíc by sme potrebovali o 30 viac ako väčších. Určte, ako dlhé sú strany dlaždíc. (*Karel Pazourek*)

Z9 – I – 4

V pravouholníku $ACKI$ sú vyznačené dve rovnobežky so susednými stranami a jedna uhlopriečka (obr. 10). Pritom trojuholníky ABD a GHK sú zhodné. Určte pomer obsahov pravouholníkov $ABFE$ a $FHKJ$. (*Vojtěch Žádník*)



Obr. 10

Z9 – I – 5

Eva riešila experimentálnu úlohu Fyzikálnej olympiády. Dopoludnia od 9:15 robila v trojminútových odstupoch 4 merania. Získané hodnoty zapisovala do tabuľky, ktorú si pripravila v počítači:

hodín	minút	hodnota
9	15	
9	18	
9	21	
9	24	

Popoludní v experimente pokračovala. Tentoraz urobila v trojminútových odstupoch 9 meraní a hodnoty zapisovala do podobnej tabuľky. Omylom do počítača zadala, aby sa zobrazil súčet deviatich čísel z prostredného stĺpca. Tento zbytočný výpočet vyšiel 258. Ktoré čísla boli v danom stĺpci? (*Libor Šimůnek*)

Z9 – I – 6

V hostinci U troch prasiatok obsluhujú Pašík, Rašík a Sašík. Pašík je nečestný, takže každému hosťovi pripočíta k celkovej cene 10 grajciarov. Rašík je poctivec, každému vyúčtuje presne to, čo zjedol a vypil. Sašík je dobrák, takže každému hosťovi dá zľavu z celkovej ceny vo výške 20 %. Prasiatka sa na seba tak podobajú, že žiadny hosť nepozná, ktoré práve obsluhuje. Baránok Vendelín si v pondelok objednal tri koláčiky a džbánok džúsu a zaplatil za to 56 grajciarov. Bol spokojný, takže hneď v utorok zjedol päť koláčikov, vypil k nim tri džbánky džúsu a platil 104 grajciarov. V stredu zjedol osem koláčikov, vypil štyri džbánky džúsu a zaplatil 112 grajciarov.

a) Kto obsluhoval Vendelína v pondelok, kto v utorok a kto v stredu?

b) Koľko grajciarov účtuje Rašík za jeden koláčik a koľko za jeden džbánok džúsu?

(Všetky koláčiky sú rovnaké, rovnako tak všetky džbánky džúsu. Ceny uvádzané v jedálnom lístku sa v uvedených dňoch nemenili.) (*Michaela Petrová*)

Z9 – II – 1

Jana mala za domácu úlohu vypočítať súčin dvoch šesťciferných čísel. Pri prepisovaní druhého z nich z tabule zabudla odpísať jednu cifru a tak namiesto celého šesťciferného čísla napísala iba päťciferné číslo 85522. Keď bola doma, zistila svoj omyl. Pamätala si však, že číslo, ktoré zle odpísala, bolo deliteľné tromi. Rozhodla sa, že sa pokúsi určiť, aké mohlo byť pôvodné číslo. Zistite, koľko takých šesťciferných čísel existuje.

(*Monika Dillingerová*)

Z9 – II – 2

Renáta zostrojila lichobežník $PRST$ so základňami PR a ST, v ktorom súčasne platí:

- lichobežník $PRST$ nie je pravouhlý,
- trojuholník TRP je rovnostranný,
- trojuholník TRS je pravouhlý,
- jeden z trojuholníkov TRS a TRP má obsah $10\,\mathrm{cm}^2$.

Určte obsah druhého z týchto dvoch trojuholníkov; nájdite všetky možnosti.

(*Michaela Petrová*)

Z9 – II – 3

Lenka mala papierový kvietok s ôsmimi okvetnými lístkami. Na každom lístku bola napísaná práve jedna cifra a žiadna z cifier sa na žiadnom inom lístku neopakovala. Keď sa Lenka s kvietkom hrala, uvedomila si niekoľko vecí:

- Z kvietka bolo možné odtrhnúť štyri lístky tak, že súčet na nich napísaných čísel by bol rovnaký ako súčet čísel na neodtrhnutých lístkoch.
- Tiež bolo možné odtrhnúť štyri lístky tak, že súčet na nich napísaných čísel by bol dvakrát väčší ako súčet čísel na neodtrhnutých lístkoch.
- Dokonca bolo možné odtrhnúť štyri lístky tak, že súčet na nich napísaných čísel by bol štyrikrát väčší ako súčet čísel na neodtrhnutých lístkoch.

Určte, aké cifry mohli byť napísané na okvetných lístkoch. (*Erika Novotná*)

Z9 – II – 4

V hostinci U temného lesa obsluhujú obrie dvojčatá Pravdoslav a Krivomír. Pravdoslav je poctivý a účtuje vždy presne, Krivomír je nečestný a ku každému koláču a každému džbánku medoviny vždy pripočíta dva grajciare. Raz tento hostinec navštívilo sedem trpaslíkov, ktorí si sadli k dvom stolom. Trpaslíci zaplatili za štyri koláče u jedného obra rovnako veľa ako za tri džbánky medoviny u druhého. Inokedy trpaslíci platili za štyri džbánky medoviny u Pravdoslava o 21 grajciarov viac ako za tri koláče u Krivomíra. Určte, koľko stál jeden koláč a koľko jeden džbánok medoviny. Všetky ceny sú v celých grajciaroch a medzi oboma návštevami sa tieto ceny nijako nemenili.

(*Michaela Petrová, Monika Dillingerová*)

Z9 – III – 1

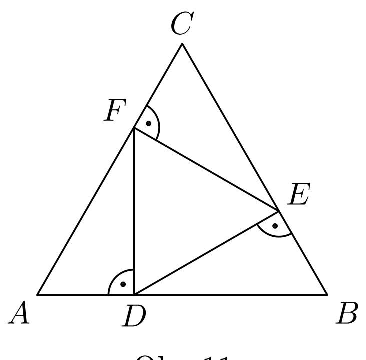
Hviezdičky v schéme predstavujú 16 bezprostredne po sebe idúcich prirodzených násobkov čísla tri napísaných zľava doprava od najmenšieho po najväčší. Pritom čísla v prvom rámiku majú rovnaký súčet ako čísla v druhom rámiku. Určte najmenšie z týchto 16 čísel.

$$\boxed{*,\ *,\ *,\ *,\ *,\ *},\ *,\ *,\ *,\ *,\ *,\ \boxed{*,\ *,\ *,\ *,\ *}$$

(*Libor Šimůnek*)

Z9 – III – 2

V rovnostrannom trojuholníku ABC je vpísaný rovnostranný trojuholník DEF. Vrcholy D, E a F ležia na stranách AB, BC a AC tak, že strany trojuholníka DEF sú kolmé na strany trojuholníka ABC (tak ako na obr. 11). Ďalej platí, že úsečka DG je ťažnicou v trojuholníku DEF a bod H je priesečníkom priamok DG a BC. Určte pomer obsahov trojuholníkov HGC a DBE. (*Eva Patáková*)



Obr. 11

Z9 – III – 3

Danka mala papierový kvietok s desiatimi okvetnými lístkami. Na každom lístku bola napísaná práve jedna cifra a žiadna z cifier sa na žiadnom inom lístku neopakovala. Danka odtrhla dva lístky tak, že súčet čísel na zvyšných lístkoch bol násobkom deviatich. Potom odtrhla ďalšie dva lístky tak, že súčet čísel na zvyšných lístkoch bol násobkom ôsmich. Nakoniec odtrhla ďalšie dva lístky tak, že súčet čísel na zvyšných lístkoch bol násobkom desiatich. Určte, aké mohli byť súčty čísel po každom odtrhávaní; nájdite všetky možnosti. (*Erika Novotná*)

Z9 – III – 4

Štyri dievčatá hrali na sústredení niekoľko zápasov. Keď sčítame počty výhier dvoch dievčat dokopy (pre všetky možné dvojice dievčat), dostaneme čísla 8, 10, 12, 12, 14 a 16. Určte, koľko výhier vybojovalo každé z dievčat. (*Marta Volfová*)

Kategória C

C – I – 1

Určte, akú najmenšiu hodnotu môže nadobúdať výraz $V = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$, ak reálne čísla a, b, c spĺňajú dvojicu podmienok

$$\begin{aligned} a + 3b + c &= 6, \\ -a + b - c &= 2. \end{aligned}$$

(*Jaroslav Švrček*)

C – I – 2

V rovine sú dané body A, P, T neležiace na jednej priamke. Zostrojte trojuholník ABC tak, aby P bola päta jeho výšky z vrcholu A a T bod dotyku strany AB s kružnicou jemu vpísanou. Uveďte diskusiu o počte riešení vzhľadom na polohu daných bodov. (*Pavel Leischner*)

C – I – 3

Číslo n je súčinom troch rôznych prvočísel. Ak zväčšíme dve menšie z nich o 1 a najväčšie ponecháme nezmenené, zväčší sa ich súčin o 915. Určte číslo n. (*Pavel Novotný*)

C – I – 4

Vo štvorci $ABCD$ označme K stred strany AB a L stred strany AD. Úsečky KD a LC sa pretínajú v bode M a rozdeľujú štvorec na dva trojuholníky a dva štvoruholníky. Vypočítajte ich obsahy, ak úsečka LM má dĺžku 1 cm. (*Leo Boček*)

C – I – 5

Dokážte, že pre každé nepárne prirodzené číslo n je súčet $n^4 + 2n^2 + 2\,013$ deliteľný číslom 96. (*Jaromír Šimša*)

C – I – 6

Šachového turnaja sa zúčastnilo 8 hráčov a každý s každým odohral jednu partiu. Za víťazstvo získal hráč 1 bod, za remízu pol bodu, za prehru žiadny bod. Na konci turnaja mali všetci účastníci rôzne počty bodov. Hráč, ktorý skončil na 2. mieste, získal rovnaký počet bodov ako posledné štyria dokopy. Určte výsledok partie medzi 4. a 6. hráčom v celkovom poradí. (*Vojtech Bálint*)

C – S – 1

Určte, aké hodnoty môže nadobúdať výraz $V = ab + bc + cd + da$, ak reálne čísla a, b, c, d spĺňajú dvojicu podmienok

$$\begin{aligned} 2a - 5b + 2c - 5d &= 4,\\ 3a + 4b + 3c + 4d &= 6. \end{aligned}$$

(*Jaroslav Švrček*)

C – S – 2

Čísla 1, 2, …, 10 rozdeľte na dve skupiny tak, aby najmenší spoločný násobok súčinu všetkých čísel prvej skupiny a súčinu všetkých čísel druhej skupiny bol čo najmenší. (*Ján Mazák*)

C – S – 3

Daný je trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C. Stredom I kružnice trojuholníku vpísanej vedieme rovnobežky so stranami CA a CB, ktoré pretnú preponu postupne v bodoch X a Y. Dokážte, že platí $|AX|^2 + |BY|^2 = |XY|^2$. (*Michal Rolínek*)

C – II – 1

Nájdite všetky trojice (nie nutne rôznych) cifier a, b, c také, že päťciferné čísla $\overline{6abc3}$ a $\overline{3abc6}$ sú v pomere 63 : 36. (*Jaromír Šimša*)

C – II – 2

Šachového turnaja sa zúčastnilo 5 hráčov a každý s každým odohral jednu partiu. Za prvenstvo získal hráč 1 bod, za remízu pol bodu, za prehru žiadny bod. Poradie hráčov na turnaji sa určuje podľa počtu získaných bodov. Jediným ďalším kritériom rozhodujúcim o konečnom umiestnení hráčov v prípade rovnosti bodov je počet výhier (kto má viac výhier, je na tom v umiestnení lepšie). Na turnaji získali všetci hráči rovnaký počet bodov. Vojto porazil Petra a o prvé miesto sa delil s Tomášom. Ako dopadla partia medzi Petrom a Martinom? (*Martin Panák*)

C – II – 3

Pre kladné reálne čísla a, b, c platí $c^2 + ab = a^2 + b^2$. Dokážte, že potom platí aj $c^2 + ab \leqq ac + bc$. (*Michal Rolínek*)

C – II – 4

Daný je konvexný štvoruholník $ABCD$ s bodom E vnútri strany AB tak, že platí $|\measuredangle ADE| = |\measuredangle DEC| = |\measuredangle ECB|$. Obsahy trojuholníkov AED a CEB sú postupne $18\,\mathrm{cm}^2$ a $8\,\mathrm{cm}^2$. Určte obsah trojuholníka ECD. (*Ján Mazák*)

Kategória B

B – I – 1

Každému vrcholu pravidelného 63-uholníka priradíme jedno z čísel 1 alebo -1. Ku každej jeho strane pripíšeme súčin čísel v jej vrcholoch a všetky čísla pri jednotlivých stranách sčítame. Nájdite najmenšiu možnú nezápornú hodnotu takého súčtu. (*Pavel Calábek*)

B – I – 2

Určte všetky dvojice (x, y) reálnych čísel, pre ktoré platí nerovnosť

$$(x+y)\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\Big) \geqq \Big(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\Big)^2.$$

(*Jaroslav Švrček*)

B – I – 3

Nech D je ľubovoľný vnútorný bod strany AB trojuholníka ABC. Na polpriamkach BC a AC zvoľme postupne body E a F tak, aby platilo $|BD| = |BE|$ a $|AD| = |AF|$.

Dokážte, že body C, E, F a stred I kružnice vpísanej trojuholníku ABC ležia na jednej kružnici. (*Jaroslav Švrček*)

B – I – 4

Dana napísala na papier trojciferné číslo, ktoré po delení siedmimi dáva zvyšok 2. Prehodením prvých dvoch cifier vzniklo trojciferné číslo, ktoré po delení siedmimi dáva zvyšok 3. Číslo, ktoré vznikne prehodením posledných dvoch cifier pôvodného čísla, dáva po delení siedmimi zvyšok 5. Aký zvyšok po delení siedmimi bude mať číslo, ktoré vznikne prehodením prvej a poslednej cifry Daninho čísla? (*Pavel Novotný*)

B – I – 5

V rovine sú dané body A, T, U tak, že uhol ATU je tupý. Zostrojte trojuholník ABC, v ktorom T, U sú postupne body dotyku strany BC s kružnicou trojuholníku vpísanou a pripísanou. (Pripísanou kružnicou tu rozumieme kružnicu, ktorá sa okrem strany BC dotýka aj polpriamok opačných k polpriamkam BA a CA.) (*Šárka Gergelitsová*)

B – I – 6

Nájdite najmenšie reálne číslo r také, že tyč s dĺžkou 1 možno rozlámať na štyri časti dĺžky nanajvýš r tak, že sa zo žiadnych troch týchto častí nedá zložiť trojuholník. (*Ján Mazák*)

B – S – 1

V obore reálnych čísel vyriešte rovnicu

$$2^{|x+1|} - 2^x = 1 + |2^x - 1|.$$

(*Vojtech Bálint*)

B – S – 2

Množina M obsahuje 2014 rôznych reálnych čísel. Súčet každých dvoch rôznych čísel z množiny M je celé číslo.

a) Rozhodnite, či existuje taká množina M, ktorá neobsahuje žiadne celé číslo.
b) Rozhodnite, či existuje taká množina M, ktorá obsahuje iracionálne číslo.

(*Ján Mazák*)

B – S – 3

Na priamke a, na ktorej leží strana BC trojuholníka ABC, sú dané body dotyku všetkých troch jemu pripísaných kružníc (body B a C nie sú známe). Nájdite na tejto priamke bod dotyku kružnice vpísanej. (*Šárka Gergelitsová*)

B – II – 1

V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc

$$x^2+6(y+z)=85,$$
$$y^2+6(z+x)=85,$$
$$z^2+6(x+y)=85.$$

(*Pavel Novotný*)

B – II – 2

Janko napísal na tabuľu niekoľko rôznych prvočísel (aspoň tri). Keď sčítal ľubovoľné dve z nich a tento súčet zmenšil o 7, bolo výsledné číslo medzi napísanými. Ktoré čísla mohli na tabuli byť? (*Tomáš Jurík*)

B – II – 3

Nad stranami BC a AB ostrouhlého trojuholníka ABC sú zvonka zostrojené polkružnice k a l. Označme postupne D a E priesečníky výšok z vrcholov A a C s polkružnicami k a l (výškami rozumieme priamky). Dokážte, že platí $|BE|=|BD|$.
(*Veronika Hucíková*)

B – II – 4

V každom políčku tabuľky 8×8 je napísané jedno nezáporné celé číslo tak, že každé dve čísla, ktoré sú na políčkach súmerne združených podľa jednej či druhej uhlopriečky, sú rovnaké. Súčet všetkých 64 čísel je 1 000, súčet 16 čísel na uhlopriečkach je 200. Dokážte, že súčet čísel v každom riadku aj stĺpci tabuľky je nanajvýš 300. Platí rovnaký záver aj pre číslo 299? (*Jaromír Šimša*)

Kategória A

A – I – 1

Číslo n je súčinom troch (nie nutne rôznych) prvočísel. Keď zväčšíme každé z nich o 1, zväčší sa ich súčin o 963. Určte pôvodné číslo n. (*Pavel Novotný*)

A – I – 2

Pre ľubovoľné kladné reálne čísla x, y, z dokážte nerovnosť

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \leqq m^2, \quad \text{pričom } m = \min\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}, \frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right).$$

Zistite tiež, kedy v dokázanej nerovnosti nastane rovnosť.

(*Jaroslav Švrček, Jaromír Šimša*)

A – I – 3

Označme I stred kružnice vpísanej do daného trojuholníka ABC. Predpokladajme, že kolmica na priamku CI vedená bodom I pretína priamku AB v bode M. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku ABC pretína úsečku CM v jej vnútornom bode N a že priamky NI a MC sú navzájom kolmé. (*Peter Novotný*)

A – I – 4

Označme $l(n)$ najväčšieho nepárneho deliteľa čísla n. Určte hodnotu súčtu

$$l(1) + l(2) + l(3) + \ldots + l(2^{2013}).$$

(*Michal Rolínek*)

A – I – 5

Koľkými rôznymi spôsobmi možno vydláždiť plochu 3×10 dlaždicami 2×1, ak je dovolené klásť ich v oboch navzájom kolmých smeroch? (*Stanislava Sojáková*)

A – I – 6

V rovine daného trojuholníka ABC určte všetky body, ktorých obrazy v osových súmernostiach podľa priamok AB, BC, CA tvoria vrcholy rovnostranného trojuholníka.

(*Pavel Calábek*)

A – S – 1

Dokážte, že pre každé celé číslo $n \geqq 3$ je $2n$-ciferné číslo s dekadickým zápisom

$$\underbrace{1\ldots1}_{n-1}2\underbrace{8\ldots8}_{n-2}96$$

druhou mocninou niektorého celého čísla. (*Vojtech Bálint*)

A – S – 2

Označme M stred strany AB ľubovoľného trojuholníka ABC. Dokážte, že rovnosť $|\angle ABC| + |\angle ACM| = 90°$ platí práve vtedy, keď je trojuholník ABC rovnoramenný so základňou AB alebo pravouhlý s preponou AB. (*Pavel Novotný*)

A – S – 3

Dĺžky strán pravouholníka sú celé čísla x a y väčšie ako 1. V pravouholníku vyznačíme rozdelenie na $x \cdot y$ jednotkových štvorcov a potom z neho zvinutím a zlepením dvoch protiľahlých strán zhotovíme plášť rotačného valca. Každé dva vrcholy jednotkových štvorcov na plášti spojíme úsečkou. Koľko z týchto úsečiek prechádza vnútornými bodmi tohto valca? V prípade $x > y$ rozhodnite, kedy bude tento počet väčší – keď bude obvod podstavy valca rovný x, alebo y? (*Vojtech Bálint*)

A – II – 1

Nájdite všetky celé kladné čísla, ktoré nie sú mocninou čísla 2 a ktoré sa rovnajú súčtu trojnásobku svojho najväčšieho nepárneho deliteľa a päťnásobku svojho najmenšieho nepárneho deliteľa väčšieho ako 1. (*Tomáš Jurík*)

A – II – 2

V rovine sú dané dve kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$, pričom $|S_1S_2| > r_1 + r_2$. Nájdite množinu všetkých bodov X, ktoré neležia na priamke S_1S_2 a majú tú vlastnosť, že úsečky S_1X, S_2X pretínajú postupne kružnice k_1, k_2 v bodoch, ktorých vzdialenosti od priamky S_1S_2 sa rovnajú. (*Jaromír Šimša*)

A – II – 3

Nájdite všetky trojice reálnych čísel x, y a z, pre ktoré platí

$$x\bigl(y^2 + 2z^2\bigr) = y\bigl(z^2 + 2x^2\bigr) = z\bigl(x^2 + 2y^2\bigr).$$

(*Michal Rolínek*)

A – II – 4

Volejbalového turnaja sa zúčastnilo šesť družstiev, každé hralo proti každému práve raz. V jednotlivých piatich kolách prebiehali v tom istom čase vždy tri zápasy na troch kurtoch 1, 2 a 3. Koľko bolo možností pre rozpis takého turnaja? Rozpisom rozumieme tabuľku 3×5, v ktorej pre $i \in \{1, 2, 3\}$ a $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ je na pozícii (i, j) uvedená dvojica družstiev (bez určenia poradia), ktoré hrali proti sebe v j-tom kole na kurte číslo i. Namiesto dekadického zápisu výsledného čísla stačí uviesť jeho rozklad na súčin prvočísel. (*Martin Panák*)

A – III – 1

Nech n je celé kladné číslo. Označme všetky jeho kladné delitele $d_1, d_2, \ldots, d_k$ tak, aby platilo $d_1 < d_2 < \ldots < d_k$ (čiže $d_1 = 1$ a $d_k = n$). Určte všetky také hodnoty n, pre ktoré platí $d_5 - d_3 = 50$ a $11d_5 + 8d_7 = 3n$. (*Matúš Harminc*)

A – III – 2

V rovine, v ktorej je daná úsečka AB, uvažujme trojuholníky XYZ také, že X je vnútorným bodom úsečky AB, trojuholníky XBY a XZA sú podobné ($\triangle XBY \sim \sim \triangle XZA$) a body A, B, Y, Z ležia v tomto poradí na kružnici. Nájdite množinu stredov všetkých úsečiek YZ. (*Michal Rolínek, Jaroslav Švrček*)

A – III – 3

Majme šachovnicu 8×8 a ku každej „hrane“, ktorá oddeľuje dve jej políčka, napíšme prirodzené číslo, ktoré udáva počet spôsobov, ako možno celú šachovnicu rozrezať na obdĺžničky 2×1 tak, aby dotyčná hrana bola súčasťou rezu. Určte poslednú cifru súčtu všetkých takto napísaných čísel. (*Michal Rolínek*)

A – III – 4

Do kina prišlo 234 divákov. Určte, pre ktoré $n \geqq 4$ sa mohlo stať, že divákov bolo možné rozsadiť do n radov tak, aby každý divák v i-tom rade sa poznal práve s j divákmi v j-tom rade pre ľubovoľné $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$. (Vzťah známosti je vzájomný.) (*Tomáš Jurík*)

A – III – 5

Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Označme k kružnicu s priemerom AB. Kružnica, ktorá sa dotýka osi uhla BAC v bode A a prechádza bodom C, pretína kružnicu k v bode P, $P \neq A$. Kružnica, ktorá sa dotýka osi uhla ABC v bode B a prechádza bodom C, pretína kružnicu k v bode Q, $Q \neq B$. Dokážte, že priesečník priamok AQ a BP leží na osi uhla ACB. (*Peter Novotný*)

A – III – 6

Pre ľubovoľné nezáporné reálne čísla a a b dokážte nerovnosť

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+1}} \geqq \frac{a+b}{\sqrt{ab+1}}$$

a zistite, kedy nastáva rovnosť. (*Tomáš Jurík, Jaromír Šimša*)

Riešenia súťažných úloh

Kategória C

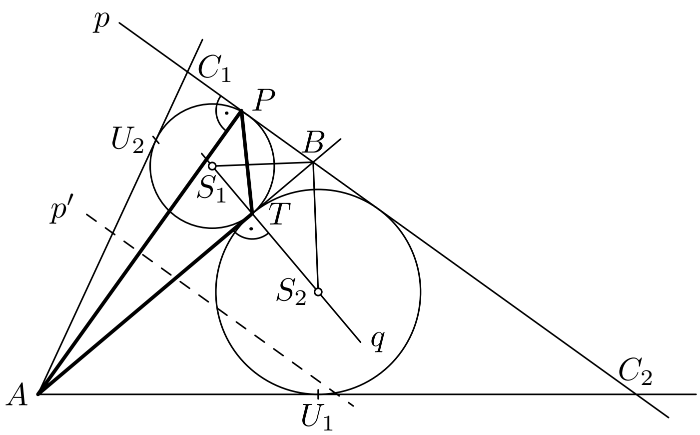
C – I – 1

Sčítaním oboch rovníc zistíme, že $b = 2$. Dosadením za b do niektorej z nich vyjde $c = -a$. Platí teda $V = (a-2)^2 + (2+a)^2 + (-2a)^2$. Po umocnení a sčítaní zistíme, že $V = 6a^2 + 8 \geqq 8$. Rovnosť nastane práve vtedy, keď $a = 0$, $b = 2$ a $c = 0$.

Hľadaná najmenšia hodnota výrazu V je teda rovná 8.

C – I – 2

Vrchol B je určený polpriamkou AT a kolmicou p na výšku AP v bode P (obr. 12), na ktorej leží strana BC. Pritom bod T musí byť vnútorným bodom úsečky AB. Stred S kružnice vpísanej trojuholníku ABC potom dostaneme ako priesečník kolmice q na



Obr. 12

priamku AT v bode T s osou uhla ohraničeného priamkou p a polpriamkou BA. Jej polomer bude mať veľkosť $|ST|$.

Ostáva zostrojiť vrchol C hľadaného trojuholníka ABC. Ten bude ležať jednak na priamke p, jednak na druhej dotyčnici vpísanej kružnice z vrcholu A, ktorá je súmerne združená so stranou AB podľa priamky AS. Stačí teda zostrojiť bod U dotyku strany AC s kružnicou vpísanou ako obraz bodu T v uvedenej osovej súmernosti.

Odtiaľ vyplýva *konštrukcia*:

1. p: $P \in p$ a $p \perp AP$;
2. B: $B \in AT \cap p$, bod B musí ležať na polpriamke AT za bodom T;
3. q: $T \in q$ a $q \perp AT$;
4. u_1, u_2: dve (navzájom kolmé) osi rôznobežiek AB, p;

5. S_1, S_2: $S_1 \in q \cap u_1$, $S_2 \in q \cap u_2$;
6. U_1, U_2: obrazy bodu T v súmernostiach podľa priamok AS_1 a AS_2;
7. C_1, C_2: priesečníky priamky p s polpriamkami AU_1 a AU_2;
8. trojuholníky ABC_1 a ABC_2.

Diskusia. Bod B konštruovaný v 2. kroku existuje, len ak uhol PAT je ostrý (inak ani polpriamka AT nepretne priamku p) a zároveň bod T leží vnútri polroviny pA, čo je ekvivalentné s tým, že aj uhol APT je ostrý. Body S_1, S_2 existujú vždy a sú rôzne, lebo ležia v opačných polrovinách určených priamkou AB. Kružnica vpísaná leží celá v trojuholníku ABC, a teda i v páse určenom priamkou p a priamkou s ňou rovnobežnou, ktorá prechádza vrcholom A, takže stred S vpísanej kružnice musí padnúť do pásu tvoreného priamkou p a priamkou p' s ňou rovnobežnou, ktorá rozpoľuje výšku AP. V takom prípade dotyčnica ku kružnici $(S; |ST|)$ (súmerne združená s dotyčnicou AB podľa priamky AS) určite pretne priamku p v hľadanom vrchole C.

Diskusiu zhrnieme takto: Ak pre vnútorné uhly trojuholníka APT platí $|\measuredangle PAT| \geqq 90°$ alebo $|\measuredangle APT| \geqq 90°$, nemá úloha riešenie. Ak platí $|\measuredangle PAT| < 90°$ a zároveň $|\measuredangle APT| < 90°$, je počet riešení 0 až 2 podľa toho, koľko zo zostrojených bodov S_1 a S_2 leží medzi rovnobežkami p a p'.

C – I – 3

Nech $n = pqr$, $p < q < r$. Rovnosť $(p+1)(q+1)r = pqr + 915$ ekvivalentne upravíme na tvar $(p+q+1)\cdot r = 915 = 3\cdot 5\cdot 61$, z ktorého vyplýva, že prvočíslo r môže nadobudnúť len niektorú z hodnôt 3, 5 a 61. Pre $r = 3$ ale z poslednej rovnice dostávame $(p + q + 1) \cdot 3 = 3 \cdot 5 \cdot 61$, čiže $p + q = 304$. To je spor s tým, že r je najväčšie. Analogicky zistíme, že nemôže byť ani $r = 5$. Je teda $r = 61$ a $p + q = 14$. Vyskúšaním všetkých možností pre p a q vyjde $p = 3$, $q = 11$, $r = 61$ a $n = 3 \cdot 11 \cdot 61 = 2\,013$.

C – I – 4

Platí $|AK| = |DL|$ a $|AD| = |DC| = 2|AK|$ (obr. 13), takže pravouhlé trojuholníky AKD a DLC sú zhodné podľa vety *sus*. Okrem toho sú trojuholníky MLD a AKD podobné podľa vety *uu*, lebo $|\measuredangle LDM| = |\measuredangle KDA|$ a $|\measuredangle DLM| = |\measuredangle DLC| = |\measuredangle AKD|$. Analogicky sa dá overiť i podobnosť trojuholníkov MDC a AKD. Z podobnosti trojuholníkov AKD, MLD a MDC vyplýva, že $|MD| = 2|ML| = 2\,\text{cm}$ a $|MC| = 2|MD| = 4\,\text{cm}$. Obsahy útvarov MLD, MDC a $AKML$ sú

$$S_{MLD} = \frac{1\cdot 2}{2} = 1\,\text{cm}^2, \qquad S_{MDC} = \frac{2\cdot 4}{2} = 4\,\text{cm}^2$$

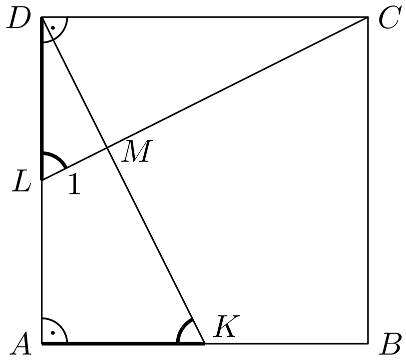
a

$$S_{AKML} = S_{AKD} - S_{MLD} = S_{DLC} - S_{MLD} = S_{MDC} = 4\,\text{cm}^2.$$

Nakoniec pomocou Pytagorovej vety dostávame $S_{ABCD} = |DC|^2 = |DM|^2 + |CM|^2 = 20\,\text{cm}^2$, takže

$$S_{KBCM} = S_{ABCD} - (S_{MLD} + S_{MDC} + S_{AKML}) = 11\,\text{cm}^2.$$

Záver. Obsahy trojuholníkov MLD, MDC a štvoruholníkov $AKML$, $KBCM$ sú postupne $1\,\mathrm{cm}^2$, $4\,\mathrm{cm}^2$, $4\,\mathrm{cm}^2$ a $11\,\mathrm{cm}^2$.



Obr. 13

C – I – 5

Keďže $96 = 3 \cdot 32 = 3 \cdot 2^5$, budeme dokazovať deliteľnosť súčtu $S = n^4 + 2n^2 + 2\,013$ dvoma nesúdeliteľnými číslami 3 a 32.

Deliteľnosť tromi: Pretože číslo 2 013 je deliteľné tromi, stačí dokázať deliteľnosť tromi zmenšeného súčtu

$$S - 2\,013 = n^4 + 2n^2 = n^2(n^2 + 2).$$

V prípade $3 \mid n$ je všetko jasné, v opačnom prípade je $n = 3k \pm 1$ pre vhodné celé k, takže platí $3 \mid n^2 + 2$, lebo $n^2 + 2 = 3(3k^2 + 2k + 1)$.

Deliteľnosť číslom 32: Keďže $2\,016 = 32 \cdot 63$, stačí dokázať deliteľnosť číslom 32 zmenšeného súčtu

$$S - 2\,016 = n^4 + 2n^2 - 3 = (n^2 + 1)^2 - 2^2 = (n^2 + 3)(n^2 - 1).$$

Predpokladáme, že n je nepárne, teda $n = 2k + 1$ pre vhodné celé k, preto platí

$$n^2 + 3 = (2k + 1)^2 + 3 = 4(k^2 + k + 1) \quad \text{a} \quad n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k(k + 1).$$

Odtiaľ vyplýva, že $32 \mid (n^2 + 3)(n^2 - 1)$, lebo číslo $k(k + 1)$ je párne.

Poznámka. Deliteľnosť číslom 32 sa dá dokazovať i bez vykonaného algebraického rozkladu trojčlena $n^4 + 2n^2 - 3$, z ktorého po dosadení $n = 2k + 1$ roznásobením dostaneme

$$n^4 + 2n^2 - 3 = 16k^4 + 32k^3 + 32k^2 + 16k = 16k(k^3 + 2k^2 + 2k + 1).$$

Pre párne k je deliteľnosť takto upraveného výrazu číslom 32 zrejmá. Pre nepárne k je zase párny súčet $k^3 + 1$, takže je párny i druhý činiteľ $k^3 + 2k^2 + 2k + 1$.

C – I – 6

Posledné štyria hráči odohrali medzi sebou 6 partií, takže počet bodov, ktoré dokopy získali, je aspoň 6. Hráč, ktorý skončil na 2. mieste, teda získal aspoň 6 bodov. Keby získal viac ako 6, teda aspoň 6,5 bodov, musel by najlepší hráč (vďaka podmienke rôznych počtov) získať všetkých 7 možných bodov; porazil by tak i hráča na 2. mieste, ktorý by v dôsledku toho získal menej ako 6,5 bodov, a to je spor. Hráč v poradí druhý preto získal práve 6 bodov. Presne toľko ale získali dokopy i posledné štyria, a tak mohli tieto body získať len zo vzájomných partií, čo znamená, že prehrali všetky partie s hráčmi z prvej polovice výsledného poradia. Hráč, ktorý skončil na 6. mieste, preto prehral partiu s hráčom, ktorý skončil na 4. mieste.

C – S – 1

Pre daný výraz V platí

$$V = a(b+d) + c(b+d) = (a+c)(b+d).$$

Podobne môžeme upraviť aj obe dané podmienky:

$$2(a+c) - 5(b+d) = 4 \qquad \text{a} \qquad 3(a+c) + 4(b+d) = 6. \tag{1}$$

Ak teda zvolíme substitúciu $m = a + c$ a $n = b + d$, dostaneme riešením sústavy (1) $m = 2$ a $n = 0$. Pre daný výraz potom platí $V = mn = 0$.

Záver. Za daných podmienok nadobúda výraz V iba hodnotu 0.

Iné riešenie. Podmienky úlohy si predstavíme ako sústavu rovníc s neznámymi a, b a parametrami c, d. Vyriešením tejto sústavy (sčítacou alebo dosadzovacou metódou) vyjadríme $a = 2 - c$, $b = -d$ ($c, d \in \mathbb{R}$) a po dosadení do výrazu V dostávame

$$V = (2-c)(-d) - dc + cd + d(2-c) = 0.$$

C – S – 2

Pre uvažované súčiny a a b určite platí $a \cdot b = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 10 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$. Aspoň jedno z čísel a, b je preto deliteľné 2^4, aspoň jedno deliteľné 3^2, aspoň jedno deliteľné 5 a práve jedno deliteľné 7. Pre najmenší spoločný násobok n čísel a, b preto platí $n \geqq 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 5\,040$, pritom rovnosť tu nastane práve vtedy, keď ani jedno z čísel a, b nebude deliteľné žiadnym z čísel 2^5, 3^3 a 5^2.

Ak zvolíme napríklad $a = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ a $b = 1 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5\,040$, bude najmenší spoločný násobok oboch čísel práve 5 040. Tým je ukázané, že 5 040 je naozaj najmenšia zo všetkých možných hodnôt n.

I keď bolo úlohou nájsť iba jeden príklad, pre úplnosť uvedieme všetky rozdelenia s minimálnou hodnotou $n = 5\,040$:

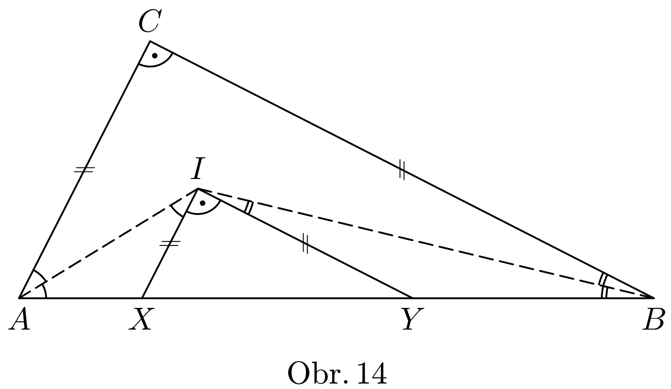
Prvá skupina čísel	Druhá skupina čísel
2, 3, 4, 5, 6	1, 7, 8, 9, 10
3, 5, 6, 8	1, 2, 4, 7, 9, 10
2, 5, 8, 9	1, 3, 4, 6, 7, 10
1, 2, 3, 4, 5, 6	7, 8, 9, 10
1, 3, 5, 6, 8	2, 4, 7, 9, 10
1, 2, 5, 8, 9	3, 4, 6, 7, 10
2, 3, 4, 5, 6, 7	1, 8, 9, 10
3, 5, 6, 7, 8	1, 2, 4, 9, 10
2, 5, 7, 8, 9	1, 3, 4, 6, 10
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	8, 9, 10
1, 3, 5, 6, 7, 8	2, 4, 9, 10
1, 2, 5, 7, 8, 9	3, 4, 6, 10

Nájsť ich nie je ťažké, keď si uvedomíme, že čísla 1 a 7 môžeme dať do ľubovoľnej z oboch skupín, zatiaľ čo v tej istej skupine spolu nemôžu byť 4 s 8, 5 s 10, 3 s 9 ani 6 s 9; s 8 spolu môže byť práve jedno z párnych čísel 2, 6 a 10. Získame tak iba tri základné rozdelenia (prvé tri riadky tabuľky), z ktorých možno každé štyrmi spôsobmi doplniť číslami 1 a 7.

Poznámka. Úlohu možno vyriešiť aj bez výpočtu súčinu $a \cdot b$. Deliteľnosť n číslami 3^2, 5 a 7 vyplýva z ich priameho zastúpenia medzi rozdeľovanými číslami, deliteľnosť číslom 2^4 z jednoduchej úvahy o rozdelení všetkých piatich párnych čísel: ak nie je číslo 8 vo svojej skupine ako párne jediné, je všetko jasné, v opačnom prípade sú v rovnakej skupine čísla 2, 4 a 6 (aj 10, ale to už ani nepotrebujeme).

C – S – 3

Trojuholník AIX je rovnoramenný, pretože $|\measuredangle IAX| = |\measuredangle IAC| = |\measuredangle AIX|$ (prvá rovnosť vyplýva z podmienky, že bod I leží na osi uhla BAC, druhá potom z vlastností striedavých uhlov, obr. 14). Preto $|AX| = |IX|$. Analogicky zistíme, že $|BY| = |YI|$.



Obr. 14

Keďže úsečky IX a IY zvierajú (rovnako ako s nimi rovnobežné úsečky CA a CB) pravý uhol, podľa Pytagorovej vety pre pravouhlý trojuholník XIY platí

$$|AX|^2 + |BY|^2 = |IX|^2 + |YI|^2 = |XY|^2,$$

čo sme mali dokázať.

C – II – 1

Zostavíme a vyriešime rovnicu pre neznáme cifry a, b, c, ktorú vďaka tvaru zadaných čísel môžeme zapísať rovno pre jedinú neznámu $x = 100a + 10b + c$:

$$\begin{aligned} \frac{60\,000 + 10x + 3}{30\,000 + 10x + 6} &= \frac{63}{36} = \frac{7}{4}, \\ 40x + 240\,012 &= 70x + 210\,042, \\ 30x &= 29\,970, \\ x &= 999. \end{aligned}$$

Záver. Nájdenému x zodpovedá trojica cifier $a = b = c = 9$. Úloha má jediné riešenie.

C – II – 2

Každý hráč odohral po jednej partii so zvyšnými štyrmi. Bolo teda odohraných celkom $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10$ partií, takže každý hráč získal práve 2 body. Sú len tri možnosti, ako získať odohraním štyroch partií 2 body, a podľa toho obsahovala celková tabuľka nanajvýš tri rovnocenné skupiny hráčov. Tieto skupiny, A, B a C, uvádzame v poradí, v ktorom by sa v konečnej tabuľke umiestnili:

Skupina A obsahuje všetkých hráčov, ktorí majú po dvoch výhrach a dvoch prehrách. Skupina B pozostáva z hráčov s jednou výhrou, jednou prehrou a dvoma remízami. Skupina C obsahuje hráčov so štyrmi remízami.

Vojto a Tomáš sú jediní víťazi, preto nepatria do skupiny C. Nepatria ani do skupiny B, pretože v opačnom prípade by s nimi museli všetci traja hráči zo skupiny C s horším výsledkom remizovať (a každý hráč skupiny B má len dve remízy).

Z toho vyplýva, že Vojto a Tomáš majú po dvoch výhrach a dvoch prehrách a skupina C je prázdna. Zvyšní traja hráči tak majú po jednej výhre, jednej prehre a dvoch remízach, ktoré museli uhrať navzájom medzi sebou.

Záver. Peter a Martin spolu remizovali.

Iné riešenie. Využijeme (nadbytočný) údaj, že Vojto porazil Petra: Keby mali Vojto a Tomáš po jednej výhre, jednej prehre a dvoch remízach, musel by aj Peter patriť medzi víťazov turnaja. Jediný v poradí nižší celkový výsledok sú totiž štyri remízy, Peter však jednu partiu prehral, a tak musel aj jednu vyhrať. Vojto a Tomáš majú preto po dvoch výhrach a dvoch prehrách. Ak Peter prehral s Vojtom, musel poraziť Tomáša. (Nemohol mať dve prehry, keďže bol v poradí nižšie ako Tomáš a Vojto. Ani nemohol s Tomášom, ktorý žiadnu remízu nemá, remizovať.) Potrebný druhý bod získal dvoma remízami – s Martinom a nepomenovaným piatym hráčom.

Záver. Peter a Martin spolu remizovali.

C – II – 3

Vzhľadom na podmienku $c^2+ab=a^2+b^2$ stačí dokázať nerovnosť $a^2+b^2 \leqq ac+bc$. Tá je ekvivalentná so vzťahom $(a^2+b^2)^2 \leqq c^2(a+b)^2$, ktorý vzhľadom na danú podmienku prepíšeme na tvar

$$(a^2+b^2)^2 \leqq (a^2+b^2-ab)(a+b)^2. \tag{1}$$

Po roznásobení a zlúčení rovnakých členov zistíme, že máme dokázať nerovnosť

$$0 \leqq a^3b+ab^3-2a^2b^2 = ab(a-b)^2,$$

ktorá pre kladné čísla a, b zrejme platí. Vzhľadom na to, že všetky úpravy boli ekvivalentné, môžeme celý postup obrátiť. Nerovnosť je tak dokázaná.

Iné riešenie. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $0<b \leqq a$ (dané vzťahy sa výmenou čísel a a b nemenia). Nerovnosť $c^2+ab \leqq ac+bc$ je ekvivalentná s nerovnosťou $(a-c)(c-b) \geqq 0$, takže stačí dokázať, že $b \leqq c \leqq a$. Platí

$$c^2 = b^2+a^2-ab = b^2+a(a-b) \geqq b^2,$$

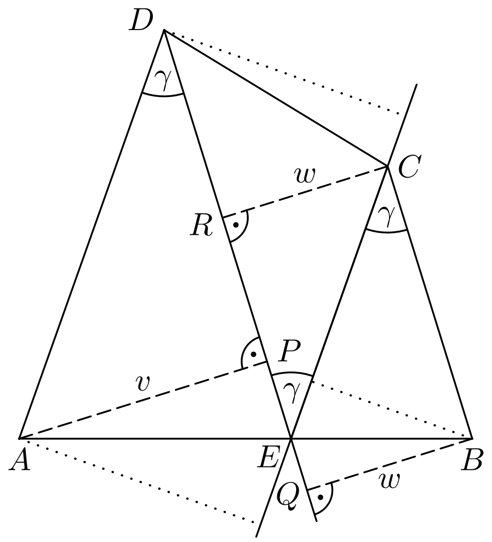
teda $b \leqq c$. Analogicky zistíme, že

$$c^2 = a^2+b^2-ab = a^2+b(b-a) \leqq a^2,$$

a odtiaľ $c \leqq a$. Tým je dôkaz prevedený.

C – II – 4

Hľadaný obsah trojuholníka ECD označme S. Uhol DEC je striedavý s uhlami ADE a ECB, odtiaľ $AD \parallel EC$ a $ED \parallel BC$ (obr. 15). Trojuholníky EDA a EDC majú



Obr. 15

spoločnú stranu ED, pomer ich obsahov je teda rovný pomeru prislúchajúcich výšok. Ak navyše postupne označíme P, Q a R kolmé priemety vrcholov A, B a C na priamku DE a označíme $v = |AP|$, $w = |BQ| = |CR|$, dostaneme z podobných pravouhlých trojuholníkov AEP a BEQ úmeru

$$\frac{18}{S} = \frac{v}{w} = \frac{|AE|}{|EB|}.$$

Analogicky pre trojuholníky ECD a ECB zistíme, že

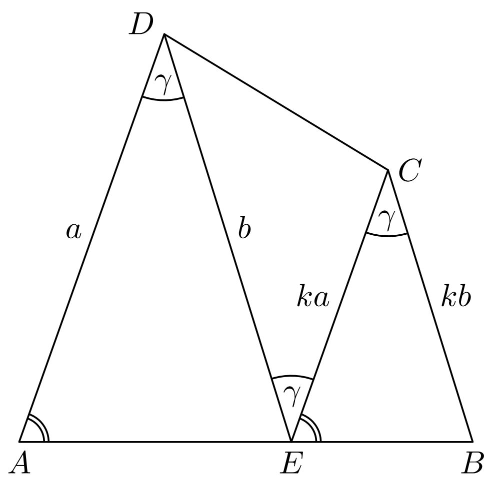
$$\frac{8}{S} = \frac{|EB|}{|AE|}.$$

(V obr. 15 sú prislúchajúce priemety iba naznačené, ale jedná sa o ten istý výpočet ako v predošlom odseku, len v ňom zameníme zodpovedajúce body $A \leftrightarrow B$, $C \leftrightarrow D$ a prislúchajúce obsahy trojuholníkov AED a BEC.) Dokopy teda je $S : 8 = 18 : S$ čiže $S^2 = 144$, takže trojuholník ECD má obsah $S = 12\,\mathrm{cm}^2$.

Iné riešenie. Rovnako ako v prvom riešení zistíme, že $AD \parallel EC$ a $ED \parallel BC$. Z toho vyplýva podobnosť trojuholníkov AED a EBC. Ak označíme k príslušný pomer podobnosti (obr. 16), platí pre obsahy dotyčných trojuholníkov

$$18 = \tfrac{1}{2}ab\sin\gamma, \quad S = \tfrac{1}{2}ka\cdot b\sin\gamma, \quad 8 = \tfrac{1}{2}ka\cdot kb\sin\gamma,$$

takže zrejme platí $18\cdot 8 = S^2$. Pre obsah trojuholníka ECD tak dostávame $S = 12\,\mathrm{cm}^2$.



Obr. 16

KATEGÓRIA B

B – I – 1

Označme S skúmanú hodnotu, t. j. súčet čísel na stranách 63-uholníka. Ak priradíme každému vrcholu 63-uholníka číslo 1, dostaneme $S = 63$, pretože ku každej jeho strane bude pripísané číslo 1. Pritom je zrejmé, že ku každému zvolenému očíslovaniu vrcholov možno dôjsť postupnou zmenou 1 na -1.

Teraz skúmajme, ako sa bude meniť hodnota S, keď zmeníme hodnotu v niektorom vrchole 63-uholníka z 1 na -1. Hodnoty v susedných vrcholoch označme a a b (na ich poradí nezáleží). Spravenou zmenou zrejme zmeníme zodpovedajúce čísla na dvoch stranách, ktoré z tohto vrcholu vychádzajú (a na žiadnych iných). Pri výpočte hodnoty S sa tak zmenia hodnoty práve dvoch sčítancov.

Ak $a = b = 1$, zmenší sa súčet S o 4 (pred zmenou prispievali čísla a, b hodnotou $a+b = 1\cdot1+1\cdot1 = 2$ a po zmene bude ich príspevok $1\cdot(-1)+(-1)\cdot1 = -2$). Podobne rozoberieme aj ostatné možnosti:

a	b	zmena $a+b$	rozdiel v hodnote S
1	1	$2 \to -2$	-4
1	-1	$0 \to 0$	0
-1	1	$0 \to 0$	0
-1	-1	$-2 \to 2$	4

Vidíme teda, že zmena jedného čísla vo vrchole nemení zvyšok čísla S po delení štyrmi. V úvode sme zistili, že jedna z dosiahnuteľných hodnôt je $S = 63$, ktorá dáva po delení štyrmi zvyšok 3, preto aj najmenšia nezáporná hodnota musí dávať rovnaký zvyšok 3, takže najmenšiu možnú hodnotu súčtu S budeme hľadať medzi číslami $\{3, 7, 11, \ldots\}$.

Ako sa ľahko presvedčíme, dá sa dosiahnuť hodnota $S = 3$: stačí do vrcholov 63-uholníka umiestniť nasledujúcich 63 čísel v uvedenom poradí

$$\underbrace{1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, \ldots, 1, 1, -1, -1}_{60 \text{ čísel}}, 1, 1, 1$$

a dostaneme $S = 3$. Ten istý súčet možno dosiahnuť aj inou voľbou čísel.

B – I – 2

Zrejme x ani y nesmie byť nula, pretože sa nachádzajú v menovateli zlomkov v zadanej nerovnici. V zadaní nie je zmienka o znamienku čísel x a y, preto nesmieme pri úpravách zabúdať na to, že tieto čísla môžu byť aj záporné.

Pokúsime sa najskôr zjednodušiť výrazy v zadaní. Prenásobením nerovnice kladným číslom x^2y^2 sa ekvivalentne zbavíme menovateľov:

$$\begin{aligned} (x+y)\frac{x+y}{xy} &\geqq \left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right)^2, \qquad \Big| \cdot x^2y^2 \\ xy(x+y)^2 &\geqq (x^2+y^2)^2. \end{aligned}$$

Teraz je vidno, že roznásobením výrazov v získanej nerovnici dostaneme člen $2x^2y^2$ na oboch stranách – ten v prvom kroku zrušíme a nerovnicu ďalej upravíme na súčinový tvar:

$$\begin{aligned} x^3y+2x^2y^2+xy^3 &\geqq x^4+2x^2y^2+y^4, \\ x^3y+xy^3 &\geqq x^4+y^4, \\ 0 &\geqq x^4-x^3y+y^4-xy^3, \\ 0 &\geqq x^3(x-y)-y^3(x-y), \\ 0 &\geqq (x^3-y^3)(x-y). \end{aligned} \tag{1}$$

Na pravej strane poslednej nerovnice máme súčin dvoch dvojčlenov, a keďže ho porovnávame s nulou, stačí skúmať znamienka jednotlivých zátvoriek.

Ak $x \geqq y$, je aj $x^3 \geqq y^3$ a podobne pre $x \leqq y$ platí, že $x^3 \leqq y^3$ (je to dôsledok toho, že funkcia tretej mocniny je na celom obore reálnych čísel rastúca). Výrazy v zátvorkách majú teda rovnaké znamienka pre ľubovoľné hodnoty x a y, preto platí opačná nerovnosť $(x^3-y^3)(x-y) \geqq 0$. Nerovnica (1) tak môže byť splnená iba v prípade, keď je jedna zo zátvoriek nulová. Rovnice $x=y$ a $x^3=y^3$ sú ekvivalentné, a preto nerovnosť (1) platí práve vtedy, keď $x=y$.

Riešením sú všetky dvojice reálnych čísel (x,y), kde $x=y \neq 0$. Pri úpravách sme použili iba ekvivalentné úpravy, preto nie je skúška správnosti nutná.

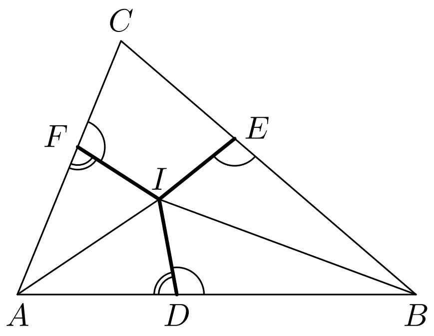
Poznámka. Súčin na pravej strane (1) sme mohli upraviť aj pomocou vzorca $x^3-y^3=$ $=(x-y)(x^2+xy+y^2)$ na súčin dvoch nezáporných mnohočlenov:

$$(x^3-y^3)(x-y)=(x-y)^2(x^2+xy+y^2).$$

Trojčlen v druhej zátvorke má totiž ako kvadratická funkcia jednej neznámej (napr. x) pre ľubovoľné y nekladný diskriminant $D(y)=y^2-4y^2=-3y^2 \leqq 0$. Preto rovnosť $x^2+xy+y^2=0$ nastane iba v prípade $x=y=0$.

B – I – 3

Ak niektorý z takto zostrojených bodov E a F splynie s vrcholom C, je tvrdenie úlohy triviálne. Ďalej teda budeme mlčky predpokladať, že to tak nie je a že používané uhly majú zmysel.



Obr. 17

Najskôr predpokladajme, že body E a F ležia postupne na *úsečkách* BC a AC. Keďže $|BD| = |BE|$ a bod I leží na osi uhla ABC, sú trojuholníky DBI a EBI zhodné podľa vety *sus*. Podobne to platí aj pre trojuholníky DAI a FAI, a preto platí (obr. 17)

$$|\measuredangle IDB| = |\measuredangle IEB| \quad \text{a} \quad |\measuredangle IFA| = |\measuredangle IDA|. \tag{1}$$

Tvrdenie úlohy, že body C, E, F a I ležia na jednej kružnici, je v takom prípade ekvivalentné s tým, že súčet veľkostí uhlov CFI a CEI je 180°. S využitím rovností (1) dostávame

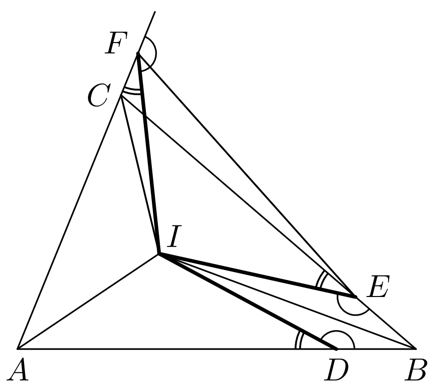
$$|\measuredangle CFI| = 180° - |\measuredangle IFA| = 180° - |\measuredangle IDA| = |\measuredangle IDB| = |\measuredangle IEB| = 180° - |\measuredangle CEI|,$$

teda súčet protiľahlých uhlov v štvoruholníku $CFIE$ je naozaj 180°.

Ak je jeden z bodov E, F vnútorným a druhý vonkajším bodom strán BC a AC, môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že bod E leží na úsečke BC a bod F leží na polpriamke opačnej k polpriamke CA. Pre takú polohu bodov C, E, F a I nám stačí ukázať rovnosť uhlov IFC a IEC. Znova využijeme rovnosti (1) a dostaneme podobne (obr. 18)

$$|\measuredangle IFC| = |\measuredangle IFA| = |\measuredangle IDA| = 180° - |\measuredangle IDB| = 180° - |\measuredangle IEB| = |\measuredangle IEC|,$$

odkiaľ vyplýva, že uhly IFC a IEC sú zhodné.



Obr. 18

Tretia možnosť, že by oba body E aj F ležali zvonka prislúchajúcich strán trojuholníka ABC, zrejme nemôže nastať. V tom prípade by totiž muselo pre jednotlivé dĺžky platiť

$$|AB| = |AD| + |BD| = |BE| + |AF| \geqq |BC| + |AC|,$$

čo odporuje trojuholníkovej nerovnosti pre strany trojuholníka ABC.

B – I – 4

Označme cifry Daninho čísla postupne a, b, c. Informáciu o zvyškoch po delení siedmimi zo zadania môžeme prepísať na rovnice

$$100a + 10b + c = 7x + 2, \tag{1}$$
$$100b + 10a + c = 7y + 3, \tag{2}$$
$$100a + 10c + b = 7z + 5. \tag{3}$$

Cifry a a b nesmú byť nulové, pretože ako prvé, tak aj druhé číslo v zadaní je trojciferné; preto $a, b \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, $c \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ a x, y a z sú celé čísla.

Teraz sa pokúsime postupne zistiť zvyšok cifier a, b, c po delení siedmimi. To nám dá pre samotné cifry nanajvýš dve možnosti. Keď sa pozrieme na koeficienty v rovniciach (1) – (3), vidíme, že vhodným odčítaním sa dokážeme zbaviť dvoch cifier a aj c naraz – keď od desaťnásobku rovnice (2) odčítame rovnicu (3). Výsledok postupne upravíme tak, aby sme zistili zvyšok cifry b po delení siedmimi:

$$\begin{aligned}
10(100b + 10a + c) - (100a + 10c + b) &= 10(7y + 3) - (7z + 5),\\
999b &= 70y - 7z + 25,\\
5b &= 70y - 7z - 7 \cdot 142b + 7 \cdot 3 + 4,\\
15b &= 3\,(70y - 7z - 7 \cdot 142b + 7 \cdot 3) + 3 \cdot 4,\\
b &= 3\,(70y - 7z - 7 \cdot 142b + 7 \cdot 3) - 7 \cdot 2b + 12.
\end{aligned}$$

Keďže na pravej strane v poslednej rovnici sú všetky členy okrem čísla 12 deliteľné siedmimi, dáva b rovnaký zvyšok po delení siedmimi ako číslo 12, a jediná vyhovujúce cifra b je tak $b = 5$.

Odčítaním rovníc (3) a (1) dostaneme rovnicu $9c - 9b = 7(z - x) + 3$, odkiaľ po dosadení $b = 5$ dostávame

$$\begin{aligned}
9c - 9 \cdot 5 &= 7(z - x) + 3,\\
2c &= 7\,(z - x - c) + 48,\\
8c &= 4 \cdot 7(z - x - c + 6) + 4 \cdot 6,\\
c &= 4 \cdot 7(z - x - c + 6) - 7c + 7 \cdot 3 + 3.
\end{aligned}$$

Z deliteľnosti jednotlivých členov siedmimi tak dostávame $c = 3$.

Nakoniec dosadením $b = 5$ a $c = 3$ napríklad do prvej rovnice ľahko dopočítame hodnotu a:

$$\begin{aligned} 100a + 10b + c &= 7x + 2, \\ 100a + 53 &= 7x + 2 \qquad (53 = 7 \cdot 8 - 3,\ 98 = 7 \cdot 14), \\ 2a &= 7x + 2 - 7 \cdot 8 + 3 - 7 \cdot 14a, \\ a &= 4(7x - 7 \cdot 8 - 7 \cdot 14a) + 4 \cdot 5 - 7a, \end{aligned}$$

odkiaľ vyplýva, že cifra a dáva rovnaký zvyšok po delení siedmimi ako číslo $20 = 7 \cdot 2 + 6$, a preto $a = 6$.

Dana teda napísala na papier číslo 653, takže číslo vzniknuté prehodením prvej a poslednej cifry je $356 = 7 \cdot 50 + 6$ a dáva po delení siedmimi zvyšok 6.

Iné riešenie. Predošlé riešenie môžeme zapísať prehľadnejšie pomocou kongruencií.[1] Hovoríme, že dve prirodzené čísla k a l sú kongruentné modulo m, ak dávajú po delení číslom m rovnaký zvyšok, t. j. ak je číslo $k - l$ deliteľné číslom m. Uvedenú kongruenciu zapisujeme ako $k \equiv l \pmod{m}$.

Teraz pri rovnakom označení ako v prvom riešení môžeme rovnice (1) – (3) s využitím vzťahov $100x \equiv 2x \pmod 7$ a $10x \equiv 3x \pmod 7$ zapísať ako

$$(100a + 10b + c \equiv) \quad 2a + 3b + c \equiv 2 \pmod 7, \tag{4}$$

$$(100b + 10a + c \equiv) \quad 2b + 3a + c \equiv 3 \pmod 7, \tag{5}$$

$$(100a + 10c + b \equiv) \quad 2a + 3c + b \equiv 5 \pmod 7. \tag{6}$$

S kongruenciami môžeme prevádzať podobné ekvivalentné úpravy ako s obyčajnými rovnicami – napríklad vynásobiť kongruenciu celým číslom alebo odčítať dve kongruencie. Budeme postupovať podobne ako v predošlom riešení a pokúsime sa získať kongruenciu iba pre cifru b. Od trojnásobku kongruencie (5) odčítame kongruenciu (6) a dostaneme

$$\begin{aligned} 3(2b + 3a + c) - (2a + 3c + b) &\equiv 3 \cdot 3 - 5 \pmod 7, \\ 5b &\equiv 4 \pmod 7, \qquad (7) \\ 15b &\equiv 12 \pmod 7, \\ b &\equiv 5 \pmod 7, \end{aligned}$$

odkiaľ máme $b = 5$, pretože to je jediná cifra dávajúca zvyšok 5 po delení siedmimi. Kongruenciu (7) sme vynásobili tromi, aby sme na ľavej strane dostali číslo, ktoré je kongruentné s 1 modulo 7. Dá sa ukázať, že ak čísla k a m sú nesúdeliteľné, existuje vždy násobok čísla k, ktorý je kongruentný s 1 modulo m.

[1] Využijeme pritom iba základné vlastnosti kongruencií, ktoré v texte spomenieme bez dôkazu. Ďalšími zdrojmi pre štúdium tejto problematiky môžu byť napr. Alois Apfelbeck: *Kongruence*, ŠMM č. 21, alebo dokumenty *thales.doa.fmph.uniba.sk/cincura/public/Element.%20teoria%20cisel.pdf* či *mks.mff.cuni.cz/library/KongruenceMS/KongruenceMS.pdf*

Odčítaním kongruencií (6) a (4) dostaneme

$$(2a + 3c + b) - (2a + 3b + c) \equiv 5 - 2 \pmod 7,$$
$$2c \equiv 3 + 2b \pmod 7$$

a po dosadení $b = 5$ vyjde

$$2c \equiv 13 \equiv 6 \pmod 7,$$
$$8c \equiv 24 \pmod 7,$$
$$c \equiv 3 \pmod 7.$$

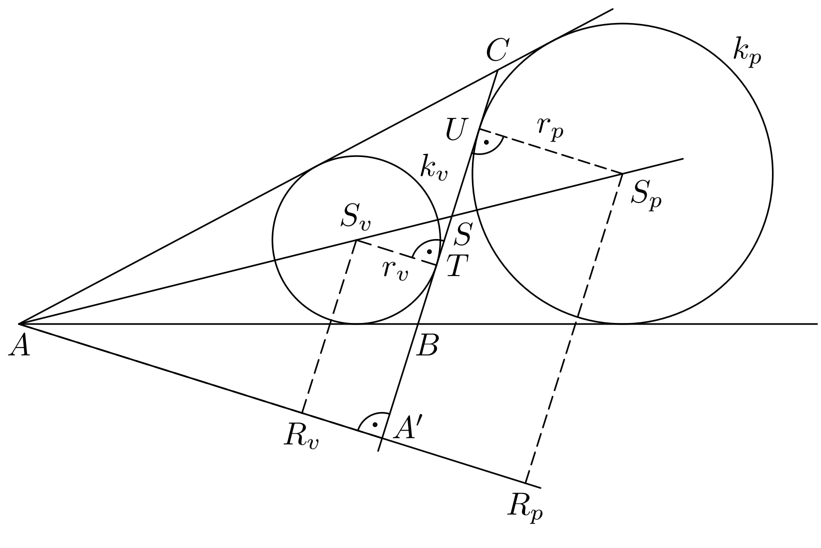
Jediná cifra dávajúca zvyšok 3 po delení siedmimi je $c = 3$, pričom sme prvú kongruenciu vynásobili číslom 4, aby sme dostali $2 \cdot 4 = 8 \equiv 1 \pmod 7$. Nakoniec dosadením $b = 5$ a $c = 3$ napríklad do štvornásobku kongruencie (4) dostaneme

$$4(2a + 3b + c) \equiv 4 \cdot 2 \pmod 7,$$
$$8a + 12b + 4c \equiv 1 \pmod 7,$$
$$a + 5b + 4c \equiv 1 \pmod 7,$$
$$a + 25 + 12 \equiv 1 \pmod 7,$$
$$a \equiv 6 \pmod 7.$$

riešením sústavy kongruencií sme dospeli k rovnakej trojici cifier a, b, c ako v predošlom riešení so sústavou rovníc.

B – I – 5

Označme $k_v(S_v; r_v)$ kružnicu vpísanú do hľadaného trojuholníka ABC a $k_p(S_p; r_p)$ kružnicu pripísanú k jeho strane BC. Stredy S_v a S_p ležia na osi uhla BAC, ktorej priesečník so stranou BC ešte označíme S. Priamky AB, AC a BC sú spoločnými dotyčnicami kružníc k_v a k_p, ktoré sú teda rovnoľahlé podľa stredov A a S (obr. 19). Bod S je pritom stredom vnútornej rovnoľahlosti, v ktorej si zodpovedajú aj body T



Obr. 19

a U dotyku kružníc k_v a k_p s úsečkou BC. Podľa zadania je ale $T \neq U$ (predpokladá sa totiž existencia uhla ATU), takže stred S vnútornej rovnoľahlosti kružníc k_v, k_p je tým bodom úsečky TU, ktorý ju delí v pomere $r_v : r_p$, a ten je podľa vonkajšej rovnoľahlosti rovný pomeru $|AS_v| : |AS_p|$. Platí teda

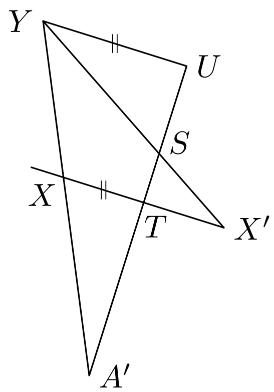
$$\frac{|ST|}{|SU|} = \frac{|AS_v|}{|AS_p|}.$$

Označme teraz A' kolmý priemet bodu A na priamku BC a R_v a R_p kolmé priemety stredov S_v a S_p na priamku AA'. Keďže A, S_v, S, S_p je poradie bodov na jednej priamke, majú ich kolmé priemety na priamky BC a AA' poradie A', T, S, U, respektíve A, R_v, A', R_p (obr. 19).[2] Z pravouholníkov $S_vR_vA'T$ a $S_pR_pA'U$ zrejme vyplýva

$$\frac{|A'T|}{|A'U|} = \frac{|R_vS_v|}{|R_pS_p|} = \frac{|AS_v|}{|AS_p|}.$$

Porovnaním odvodených rovností dostaneme úmeru $|ST| : |SU| = |A'T| : |A'U|$. Podľa nej neznámy bod S delí zadanú úsečku TU v pomere určenom bodom A', ktorého polohu na polpriamke UT zvonka úsečky UT poznáme. A akonáhle zostrojíme bod S, môžeme zostrojiť aj stred S_v, ktorý leží na priamke AS a na kolmici na priamku TU vedenej bodom T. Vrcholy B a C potom získame ako priesečníky dotyčníc z vrcholu A ku kružnici $k_v(S_v; r_v = |S_vT|)$ s priamkou TU.

Na zostrojenie bodu S využijeme napr. nasledujúci postup (obr. 20): V polrovine



Obr. 20

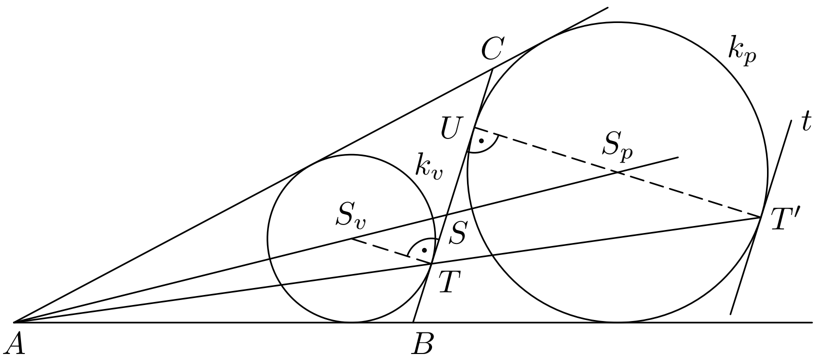
TUA zvoľme nejaký bod Y a k nemu vnútri úsečky $A'Y$ zostrojme bod X tak, aby úsečky TX, UY boli rovnoľahlé podľa stredu A'. Označme X' bod súmerne združený s bodom X podľa stredu T. Priesečník priamok TU a $X'Y$ je potom hľadaným bodom S, lebo je stredom rovnoľahlosti úsečiek TX' a UY, takže podľa oboch spomenutých rovnoľahlostí platí

$$\frac{|ST|}{|SU|} = \frac{|TX'|}{|UY|} = \frac{|TX|}{|UY|} = \frac{|A'T|}{|A'U|}.$$

[2] Všimnime si, že z poradí bodov A', T, U a kolmosti $AA' \perp TU$ vyplýva, že uhol ATU je tupý (bez tejto podmienky by úloha nemala riešenie).

Vďaka podmienke tupého uhla ATU padne bod S_v vyššie uvedenou konštrukciou na priamku AS do polohy medzi bodmi A a S, teda celá úloha bude mať jediné riešenie (ak neberieme do úvahy možnosť vymeniť označenie vrcholov B a C).

Iné riešenie. Použijeme rovnaké označenie ako v predošlom riešení. V rovnoľahlosti so stredom v bode A a koeficientom r_p/r_v sa bod $T \in k_v$ zobrazí na bod $T' \in k_p$ (obr. 21). Z vlastnosti použitej rovnoľahlosti vieme, že dotyčnica t ku kružnici k_p



Obr. 21

vedená bodom T' je rovnobežná s dotyčnicou ku kružnici k_v vedenou bodom T, čo je priamka BC. Priamka S_pU je teda kolmá nielen na priamku TU, ale aj na dotyčnicu t, takže úsečka $T'U$ je priemerom kružnice k_p. Odtiaľ vyplýva nasledujúca *konštrukcia*:

1. Bod T' je priesečníkom priamky AT a kolmice z bodu U na priamku UT. Keďže uhol ATU je tupý, leží bod T' v opačnej polrovine určenej priamkou TU ako bod A.
2. Kružnica k_p je kružnica s priemerom UT'.
3. Body B a C sú priesečníky dotyčníc z bodu A ku kružnici k_p s priamkou TU.

Úloha má jediné riešenie.

B – I – 6

Jediným kritériom, či dokážeme zostrojiť trojuholník so stranami daných dĺžok, je trojuholníková nerovnosť. Na zostrojenie trojuholníka stačí, aby *najväčšia dĺžka bola menšia ako súčet zvyšných dvoch.* Ak platí táto nerovnosť, platia aj ostatné trojuholníkové nerovnosti a trojuholník sa dá zostrojiť. Ak to neplatí, trojuholník sa zostrojiť nedá, pretože neplatí trojuholníková nerovnosť. *Trojuholník sa nedá z troch strán daných dĺžok zostrojiť práve vtedy, keď najväčšia dĺžka je aspoň taká ako súčet zvyšných dvoch.*

Predpokladajme, že r je hľadané najmenšie číslo. To znamená, že vieme tyč rozlomiť na štyri časti dĺžky nanajvýš r tak, že zo žiadnych troch týchto častí sa nedá zložiť trojuholník. Najdlhšia z častí musí mať dĺžku r, pretože inak by r nebolo najmenšie číslo s požadovanou vlastnosťou. Dĺžky ostatných častí označme x, y, z tak, že $x \leqq y \leqq$ $\leqq z \leqq r$ a $x + y + z + r = 1$, a predpokladajme stále, že zo žiadnych troch takých častí sa nedá zostrojiť trojuholník, čo teraz vyjadríme príslušnými nerovnosťami.

Z trojice dĺžok (x, y, z) nie je možné zostrojiť trojuholník práve vtedy, keď $x + y \leqq z$. Keďže $z \leqq r$, vyplýva odtiaľ aj príslušná nerovnosť $x + y \leqq r$ pre trojicu (x, y, r), takže ani z týchto troch dĺžok nie je možné zostrojiť trojuholník. Podobne pre trojicu dĺžok (y, z, r) platí, že z nich nemožno zostrojiť trojuholník práve vtedy, keď $y+z \leqq r$, a keďže $x \leqq y$, vyplýva odtiaľ príslušná nerovnosť $x + z \leqq r$ aj pre trojicu dĺžok (x, z, r).

Zo žiadnych troch častí teda nedokážeme zložiť trojuholník práve vtedy, keď budú okrem rovnosti $x + y + z + r = 1$ splnené aj obe podmienky

$$x + y \leqq z \qquad \text{a} \qquad y + z \leqq r. \tag{1}$$

Keď do prvej nerovnosti z (1) dosadíme $x + y = 1 - z - r$, dostaneme

$$\begin{aligned} 1 - z - r &\leqq z, \\ 1 - r &\leqq 2z. \end{aligned} \tag{2}$$

Keďže $y \geqq x$, má druhá nerovnosť z (1) nasledujúci dôsledok:

$$r \geqq y + z = \frac{y + y + z}{2} + \frac{z}{2} \geqq \frac{x + y + z}{2} + \frac{z}{2} = \frac{1 - r}{2} + \frac{z}{2}.$$

V získanej nerovnosti ešte pomocou nerovnosti (2) odhadneme z, takže dostaneme

$$r \geqq \frac{1 - r}{2} + \frac{z}{2} \geqq \frac{1 - r}{2} + \frac{1 - r}{4} \geqq \frac{3}{4}(1 - r),$$

z ktorej už porovnaním pravej a ľavej strany vyplýva požadovaný odhad hodnoty r:

$$4r \geqq 3(1 - r) \quad \text{čiže} \quad r \geqq \frac{3}{7}.$$

Ostáva ukázať, že existuje rozlámanie tyče dĺžky 1 na štyri časti dĺžky nanajvýš $3/7$ tak, že zo žiadnych troch týchto častí sa potom nedá zložiť trojuholník – vyhovujú napríklad dĺžky $(1/7, 1/7, 2/7, 3/7)$.

Iné riešenie. K hodnote $r = 3/7$ sa dá dôjsť aj intuitívnym prístupom, najmä pokiaľ sa najskôr pokúsime vyriešiť úlohu pre rozlámanie tyče na tri časti. Podobne ako v predošlom riešení označme dĺžky jednotlivých častí ako $x \leqq y \leqq z \leqq r$. Úlohu si zjednodušíme tak, že sa obmedzíme na prípad $y = x$. Aby sa z dĺžok (x, y, z) nedal zostrojiť trojuholník, musí platiť $z \geqq x + y = 2x$; vezmime teda $z = 2x$. Napokon, aby sa nedal zostrojiť trojuholník ani z dĺžok (y, z, r), stačí, keď bude platiť $r = z + y = 2x + x = 3x$. Odtiaľ vychádza $x + y + z + r = x + x + 2x + 3x = 7x = 1$, a teda $r = 3x = 3/7$.

Naozaj, zo žiadnej trojice z dĺžok $(1/7, 1/7, 2/7, 3/7)$ sa trojuholník nedá zostrojiť.

Ostáva ešte ukázať, že táto hodnota r je najmenšia. Inými slovami, keď rozlámeme tyč dĺžky 1 na ľubovoľné štyri časti, pričom každá z nich bude mať dĺžku menšiu ako $3/7$, tak sa z niektorých troch častí trojuholník zložiť dá. Označme dĺžky jednotlivých častí ako $a \leqq b \leqq c \leqq d < 3/7$, pričom $a + b + c + d = 1$. Skúmajme dve možnosti pre hodnotu a.

Ak by platilo $a < 1/7$, dostali by sme z nerovnosti $d < 3/7$ a rovnosti $1 = a + b + c + d$, že $1 - 1/7 - 3/7 < b + c$. V tom prípade by ale bolo $d < 3/7 < b + c$, a preto by sa z dĺžok $b \leqq c \leqq d$ dal zostrojiť trojuholník. Ak by platilo $1/7 \leqq a$, bolo by $1/7 \leqq a \leqq b$. Keby za týchto podmienok ani jedna z trojíc (a, b, c), (a, c, d) nespĺňala trojuholníkové nerovnosti, muselo by platiť $2/7 \leqq a + b \leqq c$ a následne $3/7 = 1/7 + 2/7 \leqq a + c \leqq d$, čo je v spore s tým, že $d < 3/7$.

B – S – 1

Os reálnych čísel rozdelíme podľa nulových bodov, teda podľa čísel, pre ktoré sú hodnoty výrazov s absolútnou hodnotou v danej rovnici rovné nule. Výrazu $|x + 1|$ zodpovedá $x = -1$ a výrazu $|2^x - 1|$ zodpovedá $x = 0$. Dostávame tak nasledujúce tri možnosti:

1) V prípade $x \leqq -1$ vyjde $|x + 1| = -(x + 1)$ a $|2^x - 1| = -(2^x - 1) = 1 - 2^x$. Rovnica zo zadania má potom tvar

$$2^{-(x+1)} - 2^x = 1 + 1 - 2^x, \quad \text{čiže} \quad 2^{-(x+1)} = 2$$

a má jediné riešenie $x = -2$. Spätným dosadením sa presvedčíme, že je to naozaj riešenie danej rovnice.

2) V prípade $-1 < x \leqq 0$ vyjde $|x + 1| = x + 1$ a $|2^x - 1| = -(2^x - 1) = 1 - 2^x$. Rovnica zo zadania má potom tvar

$$2^{x+1} - 2^x = 1 + 1 - 2^x, \quad \text{čiže} \quad 2^{x+1} = 2$$

a má jediné riešenie $x = 0$. Spätným dosadením sa presvedčíme, že je to naozaj riešenie danej rovnice.

3) Nakoniec pre $0 < x$ vyjde $|x + 1| = x + 1$ a $|2^x - 1| = 2^x - 1$ a po dosadení do danej rovnice dostaneme

$$2^{x+1} - 2^x = 1 + 2^x - 1, \quad \text{čiže} \quad 2^{x+1} = 2 \cdot 2^x,$$

čo je identita, ktorá platí pre ľubovoľné reálne číslo x. Všetky $x > 0$ sú teda riešením danej rovnice.

Odpoveď. Riešeniami danej rovnice sú $x = -2$ a ľubovoľné $x \geqq 0$.

Poznámka. Namiesto kontroly riešenia dosadením do danej rovnice stačí overiť, že nájdené riešenie padne do vyšetrovaného intervalu.

Iné riešenie. Rozoberieme dva prípady:

Ak $x + 1 \geqq 0$, tak $|x + 1| = x + 1$ a danú rovnicu možno zjednodušiť na rovnicu

$$2^{x+1} - 2^x = 1 + |2^x - 1|, \quad \text{čiže} \quad 2^x - 1 = |2^x - 1|.$$

Tá je splnená práve vtedy, keď $2^x - 1 \geqq 0$, čo platí práve vtedy, keď $x \geqq 0$. V tomto prípade sú riešeniami všetky x také, že $x + 1 \geqq 0$ a zároveň $x \geqq 0$, čiže všetky nezáporné čísla x.

Ak naopak $x+1<0$, je tiež $2^x-1<0$ (lebo $x<0$), takže daná rovnica dostane tvar

$$2^{-(x+1)}-2^x=1-(2^x-1), \quad \text{čiže} \quad 2^{-(x+1)}=2.$$

Táto rovnica má jediné riešenie $x=-2$ a to podmienku $x+1<0$ spĺňa.

Riešením danej rovnice je množina $\langle 0,\infty)\cup\{-2\}$.

B – S – 2

Na vyriešenie časti a) stačí uviesť príklad množiny, ktorá neobsahuje žiadne celé číslo, pričom súčet ľubovoľných dvoch jej prvkov je celé číslo. Množina $M = \{1/2, 3/2, \dots, 4027/2\}$ je jedným z príkladov takej 2014-prvkovej množiny.

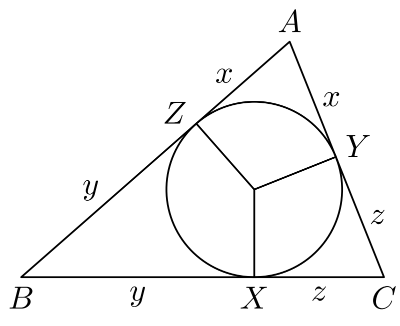
Označme a, b, c ľubovoľné tri čísla danej množiny M. Ukážeme, že dvojnásobok čísla a je celé číslo. Čísla $a+b$ aj $b+c$ sú podľa zadania celé, preto aj ich rozdiel $a-c$ je celé číslo. Zo zadania vieme, že aj číslo $a+c$ je celé, preto aj súčet $(a+c)+(a-c)=2a$ je celé číslo. Dvojnásobok každého čísla v množine M teda musí byť celé číslo, a preto množina M nemôže obsahovať žiadne iracionálne číslo.

Iné riešenie. Časť a) vyriešime rovnako ako v predchádzajúcom riešení.

Pripusťme, že sa v množine M nájde iracionálne číslo a, a označme α, $0<\alpha<1$, jeho desatinnú časť. Všetky ostatné čísla z množiny M (a takých je tam 2013) musia mať desatinnú časť $1-\alpha$, lebo súčet každého z nich s číslom a dáva celé číslo. Ale súčet každých dvoch čísel s kladnou desatinnou časťou $1-\alpha$ tiež musí dať celé číslo. To je možné jedine v prípade, že $1-\alpha=1/2$ čiže $\alpha=1/2$, čo je však v spore s tým, že číslo a je iracionálne. Množina M, ktorá by obsahovala iracionálne číslo, teda neexistuje.

B – S – 3

V danom trojuholníku ABC označme X, Y, Z body dotyku vpísanej kružnice s jeho stranami a $x=|AY|=|AZ|$, $y=|BX|=|BZ|$, $z=|CX|=|CY|$ zhodné úseky dotyčníc k vpísanej kružnici z jednotlivých vrcholov (obr. 22). Ak označíme zvyčajným



Obr. 22

spôsobom a, b, c dĺžky jednotlivých strán, platí

$$a=y+z, \quad b=z+x, \quad c=x+y.$$

Sčítaním týchto troch rovníc dostaneme (pomocou s ako zvyčajne označujeme polovičný obvod trojuholníka)

$$2s = a + b + c = 2x + 2y + 2z,$$

takže nám vyjde

$$x + y + z = s, \quad x = s - a, \quad y = s - b, \quad z = s - c. \tag{1}$$

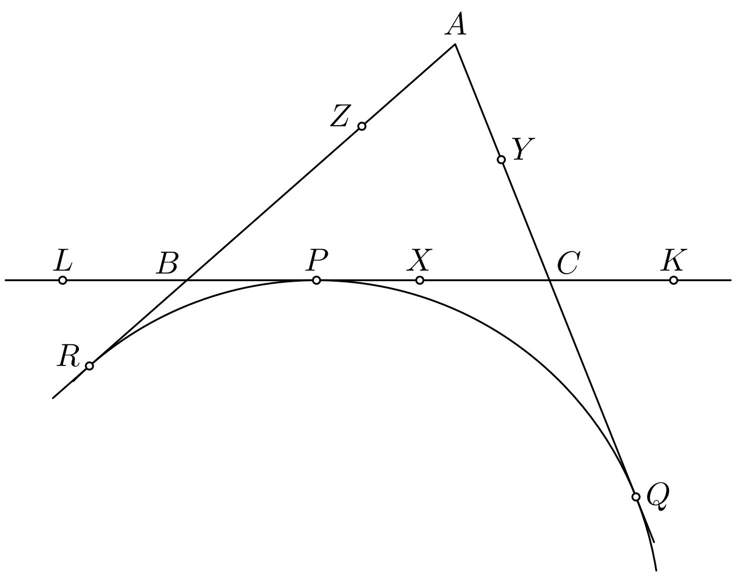
Pozrime sa teraz na pripísanú kružnicu trojuholníku ABC, ktorá sa dotýka jeho strany BC v bode P a polpriamok AB a AC v bodoch R a Q (obr. 23). Zo zhodnosti úsekov príslušných dotyčníc k tejto kružnici máme

$$|AR| = |AQ|, \quad |BR| = |BP|, \quad |CP| = |CQ|,$$

odkiaľ vychádza

$$\begin{aligned}2|AR| = |AR| + |AQ| = |AB| + |BR| + |AC| + |CQ| =\\ = |AB| + |BP| + |AC| + |CP| = a + b + c = 2s,\end{aligned}$$

čiže $|AR| = |AQ| = s$. Z tejto rovnosti ale vyplýva, že $|BP| = |BR| = s - c$, čo je podľa (1) zároveň dĺžka z úsečky CX, teda $|BP| = |CX|$. To znamená, že body P a X sú súmerne združené podľa stredu úsečky BC.



Obr. 23

Analogicky by sme odvodili rovnosti $|BK| = s$ a $|CL| = s$ pre body dotyku K a L kružníc pripísaných stranám CA a AB (obr. 23) trojuholníka ABC s priamkou a. Z týchto posledných rovností však vidíme, že $|BL| = s - a = |CK|$, teda aj body K a L sú súmerne združené podľa stredu úsečky BC.

Body K a L sú známe (z troch daných bodov na priamke sú to tie dva krajné), poznáme teda aj stred S strany BC (je to stred úsečky KL) a bod X nájdeme ako obraz tretieho daného bodu P v stredovej súmernosti podľa stredu S.

B – II – 1

Odčítaním druhej rovnice od prvej a tretej od druhej dostaneme dve rovnice

$$(x-y)(x+y-6)=0,$$
$$(y-z)(y+z-6)=0,$$

ktoré spolu s ľubovoľnou z troch daných rovníc tvoria sústavu s danou sústavou ekvivalentnú. Pre splnenie získaných dvoch rovníc pritom máme štyri možnosti:

Ak $x=y=z$, vyjde dosadením do ktorejkoľvek zo zadaných rovníc $y^2+12y-85=0$ a odtiaľ $y=5$ alebo $y=-17$.

Ak $x=y$, $z=6-y$, dostaneme z prvej zadanej rovnice $y^2+36=85$, a teda $y=7$ alebo $y=-7$.

Ak $x=6-y$, $z=y$, dostaneme z poslednej zadanej rovnice opäť $y^2+36=85$, a teda $y=7$ alebo $y=-7$.

Ak $x=z=6-y$, dostaneme z druhej zadanej rovnice $y^2+6(12-2y)=85$ čiže $y^2-12y-13=0$ a odtiaľ $y=-1$ alebo $y=13$.

Odpoveď. Sústava rovníc má osem riešení, a to $(5,5,5)$, $(-17,-17,-17)$, $(7,7,-1)$, $(-7,-7,13)$, $(-1,7,7)$, $(13,-7,-7)$, $(7,-1,7)$, $(-7,13,-7)$.

B – II – 2

Označme prvočísla napísané na tabuli ako $p_1<p_2<\ldots<p_k$. Z týchto čísel je vďaka predpokladu $k\geqq 3$ možné vytvoriť k rôznych čísel

$$p_1+p_2-7<p_1+p_3-7<\ldots<p_1+p_k-7<p_{k-1}+p_k-7, \tag{1}$$

ktoré všetky musia byť medzi číslami napísanými na tabuli. Preto sa postupne rovnajú prvočíslam $p_1<p_2<\ldots<p_k$. Presnejšie, najmenšie z nich sa rovná p_1, t. j. $p_1+p_2-7=p_1$, a teda $p_2=7$. Následne pre druhé najmenšie číslo v nerovniciach (1) platí $p_1+p_3-7=p_2=7$, a teda $p_1+p_3=14$. Pre prvočíslo $p_1<p_2=7$ máme iba tri možnosti $p_1\in\{2,3,5\}$, ktorým zodpovedajú hodnoty $p_3=14-p_1\in\{12,11,9\}$, z ktorých iba $p_3=11$ je prvočíslo, takže $p_1=3$. Predpokladajme, že na tabuli je napísané ešte ďalšie prvočíslo p_4. Potom tretie najmenšie číslo v nerovniciach (1) musí byť $11=p_3=p_1+p_4-7$, z čoho vzhľadom na rovnosť $p_1=3$ vyplýva $p_4=15$, čo prvočíslo nie je.

Odpoveď. Na tabuli mohli byť iba tri prvočísla 3, 7 a 11.

Dodajme, že záver $k=3$ sa dá inak zdôvodniť poznámkou, že rovnakú k-ticu prvočísel v skupine (1) musíme dostať aj vtedy, keď zameníme posledné z čísel za p_2+p_k-7; musí teda platiť $p_{k-1}=p_2$ čiže $k=3$.

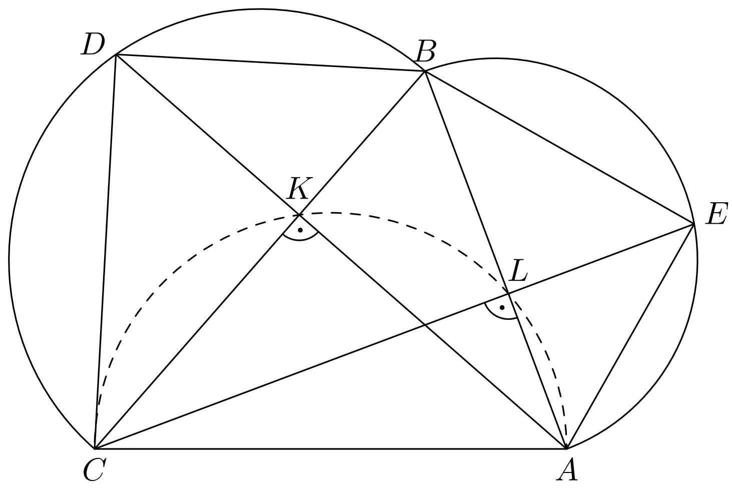
Iné riešenie. Označme prvočísla napísané na tabuli ako $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$. Ak si Janko vyberie dve najmenšie a dve najväčšie prvočísla, ich súčet zmenšený o 7 je na tabuli, a preto $p_1 + p_2 - 7 \geqq p_1$ a $p_k + p_{k-1} - 7 \leqq p_k$, z čoho vyplýva $7 \leqq p_2 < p_{k-1} \leqq 7$. Aby sme nedostali spor, musí byť $k \leqq 3$. Podľa zadania sú na tabuli aspoň tri prvočísla, teda na tabuli sú presne tri prvočísla $p_1 < p_2 < p_3$. Keďže $p_1 + p_2 < p_1 + p_3 < p_2 + p_3$, musí platiť

$$p_1 + p_2 - 7 = p_1, \qquad p_1 + p_3 - 7 = p_2, \qquad p_2 + p_3 - 7 = p_3.$$

Z prvej (a poslednej) rovnice vychádza $p_2 = 7$ a z prostrednej $p_1 + p_3 = 14$, pričom $p_1 < 7 = p_2$. Vyskúšaním všetkých možností $p_1 \in \{2, 3, 5\}$ dostaneme jediné riešenie $p_1 = 3$ a $p_3 = 11$.

B – II – 3

Označme päty výšok z vrcholov A a C na strany daného trojuholníka postupne K a L (obr. 24). Z Euklidovej vety o odvesne v pravouhlom trojuholníku BCD vieme, že $|BD|^2 = |BK| \cdot |BC|$. Podobne pre pravouhlý trojuholník ABE máme $|BE|^2 = |BL| \cdot |BA|$. Trojuholníky ACK a ACL sú pravouhlé s preponou AC, a preto body K a L ležia na kružnici s priemerom AC. Mocnosť bodu B k tejto kružnici je $|BK| \cdot |BC| = |BL| \cdot |BA|$, a tak spojením s dôsledkami Euklidových viet dostávame $|BD|^2 = |BK| \cdot |BC| = |BL| \cdot |BA| = |BE|^2$, a teda $|BE| = |BD|$.



Obr. 24

Iné riešenie. Pri označení piat výšok ako v prvom riešení (obr. 24) z Pytagorových viet v trojuholníkoch BAK, BDK, CAK a CDK dostaneme

$$\begin{aligned}|BD|^2 - |BA|^2 &= (|DK|^2 + |BK|^2) - (|AK|^2 + |BK|^2) = |DK|^2 - |AK|^2 = \\ &= (|DK|^2 + |CK|^2) - (|AK|^2 + |CK|^2) = |CD|^2 - |CA|^2.\end{aligned}$$

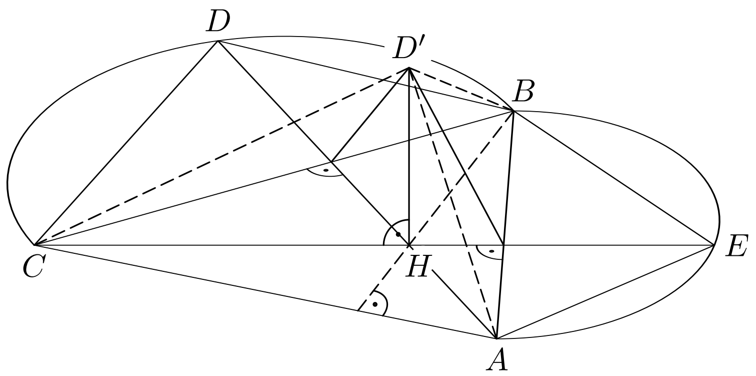
Navyše z pravouhlého trojuholníka BCD vieme, že $|CD|^2 = |BC|^2 - |BD|^2$. Dosadením do predchádzajúcej rovnosti po úprave dostaneme

$$\begin{aligned} |BD|^2 &= |BA|^2 + |CD|^2 - |CA|^2 = |BA|^2 + (|BC|^2 - |BD|^2) - |CA|^2, \\ 2|BD|^2 &= |BA|^2 + |BC|^2 - |CA|^2, \\ |BD| &= \sqrt{\frac{|BA|^2 + |BC|^2 - |CA|^2}{2}}. \end{aligned}$$

Veľkosť $|BE|$ dostaneme zo symetrie zámenou bodov $C \leftrightarrow A$ a $D \leftrightarrow E$, takže

$$|BE| = \sqrt{\frac{|BC|^2 + |BA|^2 - |AC|^2}{2}} = |BD|.$$

Iné riešenie. Označme H priesečník výšok trojuholníka ABC. Otočme trojuholník BCD v priestore okolo priamky BC do polohy BCD' tak, aby rovina BHD' bola kolmá na rovinu ABC, teda tak, aby kolmý priemet priamky BD' do roviny ABC splýval s výškou z vrcholu B v trojuholníku ABC (obr. 25). Keďže DA je výškou trojuholníka ABC, je rovina AHD' kolmá na rovinu ABC, takže priamka HD' (priesečnica rovín BHD' a AHD') je kolmá na rovinu ABC.



Obr. 25

Priamka BD' je kolmá na priamku AC aj na priamku CD' (uhol $BD'C$ sa zhoduje s pravým uhlom BDC nad priemerom BC) – je teda kolmá na rovinu ACD'. Potom je však pravý aj uhol $AD'B$. Bod D' leží v rovine CHD' kolmej na rovinu ABC, pričom priamka $CH = CE$ je výškou trojuholníka ABC. Presne tieto vlastnosti má aj bod E' trojuholníka BAE', ktorý vznikne otočením pravouhlého trojuholníka BAE okolo priamky BA tak, aby rovina BHE' bola kolmá na rovinu ABC. Body D' a E' teda splývajú, a preto $|BD| = |BD'| = |BE'| = |BE|$.

Iné riešenie. Označme H priesečník výšok trojuholníka ABC a K, M a L päty výšok postupne z vrcholov A, B a C. Rovnako ako v druhom riešení opakovaným využitím

Pytagorovej vety dostávame

$$
\begin{aligned}
&|BD|^2 - |BE|^2 = \\
&\quad = (|BD|^2 - |BH|^2) + (|BH|^2 - |BE|^2) = \\
&\quad = \big((|KD|^2 + |BK|^2) - (|BK|^2 + |HK|^2)\big) + \big((|HL|^2 + |BL|^2) - (|BL|^2 + |LE|^2)\big) = \\
&\quad = (|KD|^2 - |HK|^2) + (|HL|^2 - |LE|^2) = \\
&\quad = \big((|KD|^2 + |CK|^2) - (|CK|^2 + |HK|^2)\big) + \big((|HL|^2 + |AL|^2) - (|AL|^2 + |LE|^2)\big) = \\
&\quad = (|CD|^2 - |CH|^2) + (|AH|^2 - |AE|^2) = \\
&\quad = |CD|^2 + |AH|^2 - |CH|^2 - |AE|^2 = \\
&\quad = |CD|^2 + (|AM|^2 + |MH|^2) - (|MH|^2 + |CM|^2) - |AE|^2 = \\
&\quad = |CD|^2 + |AM|^2 - |CM|^2 - |AE|^2 = \\
&\quad = |CD|^2 + (|AB|^2 - |BM|^2) - (|BC|^2 - |BM|^2) - |AE|^2 = \\
&\quad = (|BC|^2 - |BD|^2) + |AB|^2 - |BC|^2 - (|AB|^2 - |BE|^2) = \\
&\quad = -|BD|^2 + |BE|^2,
\end{aligned}
$$

z toho vyplýva $2|BD|^2 = 2|BE|^2$, a teda $|BE| = |BD|$.

B – II – 4

Riadky a stĺpce uvažovanej tabuľky očíslujme zhora nadol, resp. zľava doprava číslami 1, 2, …, 8.

Najskôr ukážeme, že súčet čísel v každom riadku a stĺpci je nanajvýš 300. Uvedomme si, že zložením oboch súmerností podľa uhlopriečok vznikne stredová súmernosť podľa stredu danej tabuľky. To teda znamená, že pre každé $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ budú riadky i, $9-i$ a stĺpca i, $9-i$ obsahovať štyri zhodné osmice čísel. Súčet dvoch diagonálnych čísel z tejto osmice je nanajvýš $200 : 2 = 100$, pretože každé z týchto čísel je v súčte všetkých 16 (nezáporných) čísel na oboch uhlopriečkach započítané dvakrát. Súčet šiestich čísel z uvažovanej osmice, ktoré neležia na žiadnej z uhlopriečok, je nanajvýš $800 : 4 = 200$, pretože v súčte $1\,000 - 200 = 800$ všetkých 48 nediagonálnych (nezáporných) čísel je každé číslo započítané štyrikrát. Preto súčet všetkých ôsmich čísel v žiadnom riadku ani stĺpci neprevyšuje $100 + 200 = 300$.

Ostáva nájsť príklad tabuľky, pre ktorú záver s číslom 299 neplatí. Ak zapíšeme číslo 50 do štyroch rohových políčok, číslo 100 do ôsmich políčok krajných riadkov a stĺpcov, ktoré susedia s rohovými políčkami, a nuly do ostatných políčok, dostaneme vyhovujúcu tabuľku, ktorá má v krajných riadkoch a stĺpcoch súčet 300, teda viac ako posudzovaných 299. (Iný z mnohých kontrapríkladov je opísaný v závere druhého riešenia.)

Iné riešenie. Označme niektoré čísla v tabuľke podľa schémy vľavo. Týmito číslami už vieme vďaka symetrii podľa uhlopriečok vyplniť celú tabuľku (schému vpravo):

a_1	b_1	b_2	b_3	c_3	c_2	c_1	d_1
	a_2	b_4	b_5	c_5	c_4	d_2	
		a_3	b_6	c_6	d_3		
			a_4	d_4			

a_1	b_1	b_2	b_3	c_3	c_2	c_1	d_1
b_1	a_2	b_4	b_5	c_5	c_4	d_2	c_1
b_2	b_4	a_3	b_6	c_6	d_3	c_4	c_2
b_3	b_5	b_6	a_4	d_4	c_6	c_5	c_3
c_3	c_5	c_6	d_4	a_4	b_6	b_5	b_3
c_2	c_4	d_3	c_6	b_6	a_3	b_4	b_2
c_1	d_2	c_4	c_5	b_5	b_4	a_2	b_1
d_1	c_1	c_2	c_3	b_3	b_2	b_1	a_1

Označme súčty čísel v týchto skupinách zodpovedajúcim veľkým písmenom, t. j. $A = a_1 + \ldots + a_4$, $B = b_1 + \ldots + b_6$, $C = c_1 + \ldots + c_6$, $D = d_1 + \ldots + d_4$. Zo zadania tak máme $2(A + D) = 200$ a $2(A + D) + 4(B + C) = 1\,000$, z čoho úpravou dostaneme $A + D = 100$ a $B + C = 200$.

Vzhľadom na symetriu čísel v tabuľke teraz stačí ukázať, že tvrdenie platí pre každý z prvých štyroch riadkov. Všetky čísla sú nezáporné a v jednom riadku sa nevyskytujú dve rovnako označené čísla, preto ich súčet je nanajvýš

$$a_1 + \ldots + a_4 + b_1 + \ldots + b_6 + c_1 + \ldots + c_6 + d_1 + \ldots + d_4 = A + B + C + D = 300.$$

Vyhovujúcu tabuľku, pre ktorú záver s číslom 299 neplatí, dostaneme napríklad pre hodnoty $a_1 = 100$, $b_1 = 200$ a ostatné čísla nulové.

Kategória A

A – I – 1

Hľadáme $n = p \cdot q \cdot r$ s prvočíslami $p \leqq q \leqq r$, ktoré spĺňajú rovnosť

$$(p+1)(q+1)(r+1) = pqr + 963. \tag{1}$$

Jej pravá strana je v prípade najmenšieho prvočísla $p = 2$ nepárne číslo, takže potom i činitele $q+1$ a $r+1$ zo súčinu na ľavej strane musia byť nepárne čísla. Pre prvočísla q, r to znamená, že $q = r = 2$, ale trojica $p = q = r = 2$ rovnosti (1) nevyhovuje. Platí teda $p \geqq 3$.

Ukážeme teraz, že nutne platí $p = 3$. V opačnom prípade sú všetky tri prvočísla p, q, r väčšie ako 3, a preto ani súčin pqr, a teda ani pravá strana (1) nie sú čísla deliteľné tromi (číslo 963 je totiž násobkom troch). Z podmienky, že súčin $(p+1)(q+1)(r+1)$ z ľavej strany (1) nie je deliteľný tromi, ale vyplýva, že žiadne z prvočísel p, q, r nemôže dávať po delení tromi zvyšok 2. A keďže zvyšok 0 je v uvažovanom prípade vylúčený, môžu prvočísla p, q, r dávať pri delení tromi jedine zvyšok 1. Odtiaľ ďalej dostávame, že rozdiel $(p+1)(q+1)(r+1)-pqr$ dáva po delení tromi rovnaký zvyšok ako číslo $2\cdot2\cdot2-1\cdot1\cdot1 = 7$, teda zvyšok 1. To je ale spor, lebo podľa (1) platí $(p+1)(q+1)(r+1) - pqr = 963$. Rovnosť $p = 3$ je tak dokázaná.

Po dosadení $p = 3$ do (1) dostaneme rovnosť $4(q+1)(r+1) = 3qr + 963$, ktorú postupne upravíme na „súčinový“ tvar:

$$\begin{aligned} 4qr + 4q + 4r + 4 &= 3qr + 963,\\ qr + 4q + 4r &= 959,\\ (q+4)(r+4) &= 975. \end{aligned}$$

Číslo 975 má prvočíselný rozklad $975 = 3 \cdot 5^2 \cdot 13$, takže vzhľadom na nerovnosti $3 \leqq q \leqq r$ čiže $7 \leqq q+4 \leqq r+4$ pre menší činiteľ z odvodeného rozkladu musí platiť $q + 4 \leqq \sqrt{975} < 32$, preto $q + 4 \in \{13, 15, 25\}$. To spĺňa jediné prvočíslo $q = 11$, pre ktoré $q + 4 = 15$. Pre druhý činiteľ tak máme $r + 4 = 5 \cdot 13 = 65$, odtiaľ $r = 61$, čo je naozaj prvočíslo. Hľadané číslo $n = p \cdot q \cdot r$ je teda jediné a má hodnotu

$$n = 3 \cdot 11 \cdot 61 = 2\,013.$$

A – I – 2

Keďže v dokazovanej nerovnosti vystupuje minimum z dvoch kladných čísel a funkcia $y = x^2$ je na množine kladných čísel rastúca, je našou úlohou overiť dvojicu nerovností

$$(x+y+z)\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\Big) \leqq \Big(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\Big)^2 \text{ a } (x+y+z)\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\Big) \leqq \Big(\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}\Big)^2 \tag{1}$$

a zistiť, kedy v *aspoň jednej* z nich nastane rovnosť (práve vtedy totiž nastane rovnosť aj v pôvodnej nerovnosti). Druhú nerovnosť v (1) ale zrejme dostaneme z prvej, keď trojicu (x,y,z) zameníme trojicou (y,x,z). Stačí preto overiť, že pre ľubovoľnú trojicu (x,y,z) kladných čísel platí prvá nerovnosť

$$(x+y+z)\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\Big) \leqq \Big(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\Big)^2,$$

a zistiť, kedy v nej nastane rovnosť. Po roznásobení oboch strán dostaneme

$$3+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y} \leqq \frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}+2\Big(\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}\Big).$$

Takú nerovnosť bude zrejme výhodné zapísať v nových (opäť kladných) premenných $a=x/y$, $b=y/z$, $c=z/x$. Dostaneme tak ekvivalentnú nerovnosť

$$3+a+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+b+c+\frac{1}{b} \leqq a^2+b^2+c^2+2\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big),$$

ktorú ešte upravíme na tvar so súčtom troch hodnôt toho istého výrazu

$$\Big(a^2-1-a+\frac{1}{a}\Big)+\Big(b^2-1-b+\frac{1}{b}\Big)+\Big(c^2-1-c+\frac{1}{c}\Big) \geqq 0. \tag{2}$$

Vďaka tomu, že a, b, c sú kladné čísla a že uvedený výraz má vyjadrenie

$$t^2-1-t+\frac{1}{t} = (t^2-1)-\frac{t^2-1}{t} = \frac{(t^2-1)(t-1)}{t} = \frac{(t-1)^2(t+1)}{t},$$

upravená nerovnosť (2) platí a rovnosť v nej nastane práve vtedy, keď $a=b=c=1$, čo pre pôvodné premenné x, y, z znamená práve to, že $x=y=z$. Táto podmienka je ale rovnaká i pre rovnosť v druhej nerovnosti (1) (ak chceme byť dôslední, má tvar $y = x = z$). Preto i rovnosť v pôvodnej dokazovanej nerovnosti nastane jedine v prípade, keď $x=y=z$.

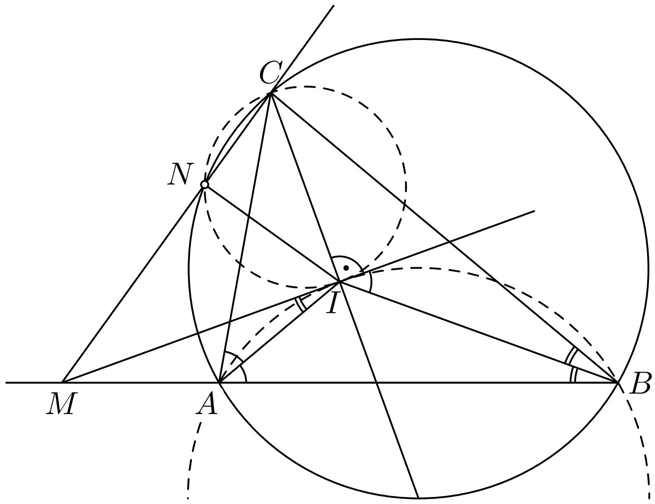
Dodajme, že na dôkaz (1) sme vlastne ani nevyužili vzťah $abc=1$, ktorý novo zavedené premenné a, b, c spĺňajú.

A – I – 3

Ukážeme najskôr dvoma spôsobmi, že priamka MI, teda kolmica na priamku CI v bode I, je dotyčnicou ku kružnici ABI (tak budeme označovať kružnice prechádzajúce tromi danými bodmi). Prvý postup založíme na známom poznatku, že AIC a BIC sú tupé uhly veľkostí $90°+\frac{1}{2}\beta$, resp. $90°+\frac{1}{2}\alpha$. Preto skúmaná kolmica MI na priamku CI zviera s úsečkami AI a BI ostré uhly $\frac{1}{2}\beta$, resp. $\frac{1}{2}\alpha$,[3] teda uhly zhodné s obvodovými

[3] Z určených uhlov medzi priamkou MI a úsečkami AI a BI vyplýva, že bod M (ktorého existencia sa v zadaní úlohy predpokladá) skutočne existuje práve vtedy, keď platí $\frac{1}{2}\alpha \neq \frac{1}{2}\beta$ čiže $\alpha \neq \beta$. Vzhľadom na symetriu zadania môžeme predpokladať, že platí $\alpha > \beta$; bod M potom leží – ako na našom obrázku – na predĺžení strany AB za vrchol A a $|\measuredangle IMA| = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta$.

uhlami IBA, resp. IAB v kružnici ABI (obr. 26). To už podľa vety o zhodnosti obvodových a úsekových uhlov znamená práve to, že priamka MI je dotyčnicou kružnice ABI. Rovnaký záver vyplýva okamžite aj z poznatku, že stredom kružnice ABI je stred toho oblúka AB kružnice ABC, ktorý neobsahuje vrchol C a ktorým prechádza priamka CI (os vnútorného uhla pri vrchole C trojuholníka ABC).



Obr. 26

Z dokázaného dotyku priamky MI s kružnicou ABI vyplýva, že bod M leží na priamke AB mimo úsečky AB a má ku kružnici ABI kladnú mocnosť m, ktorá má dvojaké vyjadrenie $m = |MI|^2 = |MA| \cdot |MB|$. Bod M preto leží i vo vonkajšej oblasti kružnice ABC (lebo úsečka AB je jej tetiva) a má k nej takú istú mocnosť $m = |MA| \cdot |MB|$. Tá istá hodnota $m = |MI|^2$ je ale menšia ako $|MC|^2$, čo vyplýva z pravouhlého trojuholníka CMI. Nerovnosť $|MC|^2 > m$ tak znamená, že polpriamka MC má s kružnicou ABC okrem bodu C spoločný ešte jeden bod N, ktorý navyše leží medzi bodmi M a C (lebo z rovnosti $|MC| \cdot |MN| = m$ vyplýva nerovnosť $|MN| < |MC|$). Prvá časť tvrdenia úlohy je tak dokázaná.

Našou druhou úlohou je ukázať, že uhol CNI je pravý. K tomu na dokázanú rovnosť $|MC| \cdot |MN| = |MI|^2$ môžeme uplatniť nasledovné „obrátenie“ Euklidovej vety o odvesne MI pravouhlého trojuholníka CMI. Päta jeho výšky z vrcholu I na preponu CM je taký bod X úsečky CM, ktorého poloha je (vďaka Euklidovej vete) jednoznačne určená rovnosťou $|MC| \cdot |MX| = |MI|^2$. Preto $X = N$ a dôkaz je hotový. Bez použitia Euklidovej vety je možné argumentovať takto: Keďže priamka MI sa v bode I dotýka Tálesovej kružnice zostrojenej nad priemerom CI, má bod M aj k tejto kružnici mocnosť $m = |MI|^2$, a preto na nej – vďaka rovnosti $m = |MC| \cdot |MN|$ – leží i bod N, takže uhol CNI je podľa Tálesovej vety naozaj pravý.

A – I – 4

Je zrejmé, že pre každé prirodzené číslo k platia rovnosti $l(2k) = l(k)$ a $l(2k-1) = 2k-1$. Vďaka nim je možné hodnoty $l(n)$ sčítať po skupinách čísel n ležiacich vždy medzi dvoma susednými mocninami čísla 2, presnejšie určovať súčty

$$s(n) = l\big(2^{n-1}+1\big) + l\big(2^{n-1}+2\big) + l\big(2^{n-1}+3\big) + \ldots + l\big(2^n\big)$$

postupne pre jednotlivé $n = 1, 2, 3, \ldots$. Pre názornosť najskôr uveďme postup určenia konkrétneho súčtu

$$s(4) = l(9) + l(10) + l(11) + l(12) + l(13) + l(14) + l(15) + l(16).$$

Vklad jeho sčítancov $l(2k-1)$ je rovný

$$l(9) + l(11) + l(13) + l(15) = 9 + 11 + 13 + 15 = \frac{4}{2}\cdot(9+15) = 48$$

(naznačili sme použitie vzorca pre súčet niekoľkých členov aritmetickej postupnosti), vklad sčítancov $l(2k)$ má hodnotu

$$l(10) + l(12) + l(14) + l(16) = l(5) + l(6) + l(7) + l(8).$$

To je ale „predošlý“ súčet $s(3)$, ktorý sme už skôr mohli určiť zo súčtu $s(1) = 1$ podobným, teraz stručnejšie zapísaným postupom:

$$s(3) = l(5) + l(6) + l(7) + l(8) = 5 + 7 + s(2) = 12 + 3 + s(1) = 15 + 1 = 16.$$

Teraz už ľahko dopočítame $s(4) = 48 + s(3) = 64$.

Vykonaný výpočet nás privádza k hypotéze, že pre každé n platí $s(n) = 4^{n-1}$. Dokážeme ju matematickou indukciou. Ak platí $s(n) = 4^{n-1}$ pre určité n (ako to je pre $n = 1, 2, 3$), potom pre súčet $s(n+1)$ podľa nášho postupu dostaneme

$$\begin{aligned} s(n+1) &= l\big(2^n+1\big) + l\big(2^n+2\big) + l\big(2^{n-1}+3\big) + \ldots + l\big(2^{n+1}\big) = \\ &= \big[(2^n+1) + (2^{n-1}+3\big) + \ldots + \big(2^{n+1}-1)\big] + s(n) = \\ &= \frac{2^{n-1}}{2}\big(2^n + 1 + 2^{n+1} - 1\big) + 4^{n-1} = 2^{n-2}\cdot 3\cdot 2^n + 4^{n-1} = 4^n. \end{aligned}$$

(Využili sme to, že počet nepárnych čísel od 2^n+1 do $2^{n+1}-1$ vrátane je rovný 2^{n-1}.) Dôkaz indukciou je hotový.

Podľa dokázaného vzorca $s(n) = 4^{n-1}$ pre súčet zo zadania úlohy platí

$$\begin{aligned} l(1) + l(2) + l(3) + \ldots + l\big(2^{2013}\big) &= l(1) + s(2) + s(3) + \ldots + s(2\,013) = \\ &= 1 + 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^{2012} = 1 + \frac{4^{2013}-1}{3} = \frac{4^{2013}+2}{3}. \end{aligned}$$

Poznámka. Za pozornosť stojí, že vzorec $s(n) = 4^{n-1}$ z podaného riešenia je špeciálnym prípadom celkom prekvapivého vzťahu

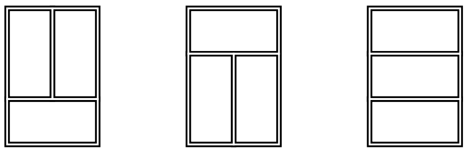
$$l(k+1) + l(k+2) + l(k+3) + \ldots + l(2k) = k^2, \tag{1}$$

ktorý sa dá pre každé prirodzené číslo k dokázať bez použitia indukcie nasledujúcou elegantnou úvahou: Všetkých k sčítancov na ľavej strane (1) sú zrejme čísla z k-prvkovej množiny $\{1, 3, 5, \ldots, 2k-1\}$ a sú po dvoch rôzne, lebo podiel žiadnych dvoch čísel z množiny príslušných argumentov $\{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$ nie je mocninou čísla 2. Preto je (až na poradie sčítancov) na ľavej strane (1) súčet $1+3+5+\ldots+(2k-1)$, ktorý má skutočne hodnotu k^2.

A – I – 5

Namiesto plochy 3×10 uvažujme všeobecnú plochu $3 \times 2n$, kde n je prirodzené číslo, a označme a_n počet všetkých spôsobov vydláždenia tejto plochy dlaždicami 2×1 (ktorých potrebujeme $3n$ kusov).[4] Hoci je našou úlohou nájsť z čísel a_n iba jediné, totiž číslo a_5, nie je uvažované zovšeobecnenie samoúčelné. Ukáže sa totiž, že každú jednotlivú hodnotu a_n bude možné vypočítať podľa jednoduchého vzorca, ak budeme poznať dve predchádzajúce hodnoty a_{n-1} a a_{n-2}.[5] Tak je možné zo „začiatočných" hodnôt a_1, a_2 vypočítať najprv a_3, potom a_4 atď. až po hľadané a_n. Takému postupu (bežnému v rade kombinatorických situácií) hovoríme *rekurentná metóda* alebo tiež *procedúra rekurzie.*

Hodnotu $a_1 = 3$ je síce ľahké určiť nakreslením všetkých možných vydláždení plochy 3×2 (obr. 27), ale podobný postup na určenie hodnoty $a_2 = 11$ by bol dosť prácny. Namiesto toho ešte zavedieme i pre naše ďalšie rekurentné úvahy vhodné čísla b_n: každé číslo b_n bude označovať počet všetkých spôsobov neúplného vydláždenia plochy $3 \times (2n-1)$ dlaždicami 2×1 v počte $3n-2$ kusov, pri ktorom ostane jedno nepokryté políčko 1×1 v *konkrétne zvolenom* rohu celej plochy, povedzme vpravo dole. Vďaka osovej súmernosti vyjde rovnaký počet b_n spôsobov i pri požiadavke, aby nepokryté pole ostalo v pravom hornom rohu.



Obr. 27

K hodnote $a_1 = 3$ pripojme zrejmú hodnotu $b_1 = 1$ a prejdime k vlastnej rekurentnej metóde. Odvodíme pri nej, že pre každé celé $n > 1$ platia rovnosti

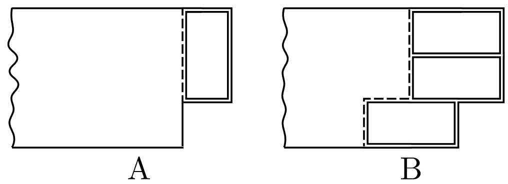
$$b_n = a_{n-1} + b_{n-1} \quad \text{a} \quad a_n = a_{n-1} + 2b_n. \tag{1}$$

Prvú rovnosť z (1) dokážeme tak, že všetky vydláždenia plochy $3 \times (2n-1)$ s „odseknutým" rohom 1×1 vpravo dole rozdelíme do dvoch disjunktných skupín podľa

[4] Určite je zrejmé, prečo uvažujeme iba plochy $3 \times k$ s párnym parametrom k.

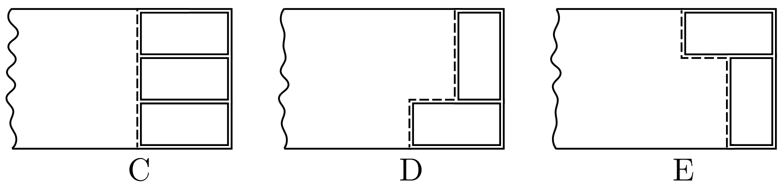
[5] Spomenutý jednoduchý vzorec nájdete pod číslom (2) až v poznámke za skončeným riešením. V ňom totiž budeme počítať rekurentne čísla a_n súčasne s istými vhodnými číslami b_n, bez ktorých by výklad našej rekurentnej metódy bol menej prehľadný.

toho, či je pravý horný roh 1×1 pokrytý zvislou dlaždicou (vydláždenie typu A na obr. 28), alebo vodorovnou dlaždicou (vydláždenie typu B, pri ktorom je vynútená poloha ďalších dvoch, spolu teda troch vodorovných dlaždíc, nakreslených na obr. 28). Počet vydláždení typu A je zrejme rovný počtu vydláždení zvyšnej plochy $3 \times (2n-2)$, teda číslu a_{n-1}. Podobne počet vydláždení typu B je rovný počtu vydláždení plochy $3 \times (2n-3)$ s odseknutým pravým dolným rohom 1×1, teda číslu b_{n-1}. Tým je prvá rovnosť z (1) dokázaná.



Obr. 28

Druhú rovnosť z (1) overíme podobne so stručnejším komentárom: všetky vydláždenia plochy $3 \times 2n$ rozdelíme do troch disjunktných skupín – vydláždenia typov C, D a E znázornených na obr. 29. Všetkých vydláždení typu C je zrejme a_{n-1}, počty vydláždení typov D a E sa rovnajú tomu istému číslu b_n (to sme zdôraznili už skôr). Tým je i dôkaz druhej rovnosti z (1) skončený.



Obr. 29

Máme všetko pripravené na výpočet hľadaného čísla a_5. Z hodnôt $a_1 = 3$, $b_1 = 1$ a rovností (1) postupne dostaneme

$$b_2 = a_1 + b_1 = 4,\ a_2 = a_1 + 2b_2 = 11,\ b_3 = a_2 + b_2 = 15,\ a_3 = a_2 + 2b_3 = 41,$$
$$b_4 = a_3 + b_3 = 56,\ a_4 = a_3 + 2b_4 = 153,\ b_5 = a_4 + b_4 = 209,\ a_5 = a_4 + 2b_5 = 571.$$

Odpoveď. Hľadaný počet spôsobov vydláždenia plochy 3×10 je rovný 571.

Poznámka. Ako sme sľúbili v úvode riešenia, ukážeme teraz, že skúmané počty a_n všetkých vydláždení plochy $3 \times 2n$ dlaždicami 2×1 vyhovujú rekurentnej rovnici

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n \quad \text{pre každé } n \geqq 1, \tag{2}$$

takže ich môžeme počítať „samostatne“, teda bez súčasného výpočtu čísel b_n, ktorými sme si pomohli v podanom riešení. Odvodenie (2) urobíme algebraicky, totiž vylúčením čísel b_n zo vzťahov (1). Podľa nich platí

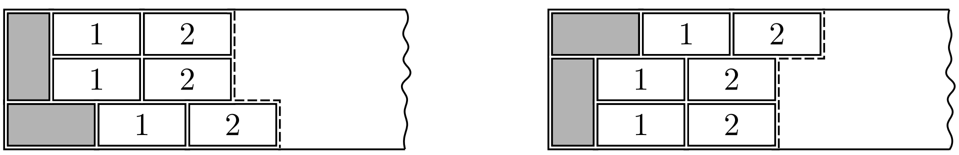
$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_{n+1} + 2b_{n+2} = a_{n+1} + 2(a_{n+1} + b_{n+1}) = \\ &= 3a_{n+1} + 2b_{n+1} = 3a_{n+1} + (a_{n+1} - a_n) = 4a_{n+1} - a_n. \end{aligned}$$

Dodajme ešte, že zo základov diskrétnej matematiky je známe, že každá postupnosť čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ktorá vyhovuje (2), má vyjadrenie $a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$, kde $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$ sú korene kvadratickej rovnice $\lambda^2 = 4\lambda - 1$ a $C_{1,2}$ sú ľubovoľné konštanty. Tie je možné pre našu situáciu určiť z hodnôt $a_1 = 3$ a $a_2 = 11$ a dostať sa tak ku konečnému vzorcu pre počet a_n všetkých vydláždení plochy $3 \times 2n$ s všeobecným n v tvare

$$a_n = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \cdot \bigl(2+\sqrt{3}\bigr)^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6} \cdot \bigl(2-\sqrt{3}\bigr)^n.$$

Iné riešenie. Opíšeme ešte jednu rekurentnú metódu na určovanie počtov a_n všetkých spôsobov vydláždenia plochy $3 \times 2n$ dlaždicami 2×1. Bude nás teraz zaujímať, či také vydláždenie je „zlepené“ z vydláždení dvoch plôch $3 \times k$ a $3 \times (2n-k)$ pre vhodné $k = 1, 2, \ldots, 2n-1$, ktoré musí byť zrejme párne. Obe plochy vzniknú z pôvodnej plochy $3 \times 2n$ jedným priamym rezom dĺžky 3; pýtame sa teda, či pri niektorom takom reze žiadnu uloženú dlaždicu nerozpolíme. Pokiaľ sa to nestane, teda pokiaľ pri každom takom reze aspoň jednu dlaždicu rozpolíme, povieme, že pôvodné vydláždenie plochy $3 \times 2n$ je *celistvé*.

Je zrejmé, že každé z troch vydláždení plochy 3×2 je celistvé (obr. 27). Vysvetlíme, prečo pri každom $n \geqq 2$ existujú práve dve celistvé vydláždenia plochy $3 \times 2n$. Pri jej ľavom okraji musia byť umiestnené dlaždice jedným z dvoch spôsobov nakreslených na obr. 30. Pokrytie prvého stĺpca 3×1 totiž nemôže byť zabezpečené tromi vodorovnými dlaždicami, ale jednou zvislou a jednou vodorovnou dlaždicou, ktoré sú v oboch možných situáciách vyfarbené na sivo. Tieto dve dlaždice vynucujú vodorovné umiestnenie ďalších troch dlaždíc s vpísanou cifrou 1 (inak by skúmané vydláždenie nebolo celistvé, bolo by totiž zlepené z vydláždení plôch 3×2 a $3 \times (2n-2)$). Ak je $n = 2$, sme s celým rozborom hotoví; v prípade $n \geqq 3$ je vynútené vodorovné umiestnenie ďalších troch dlaždíc s vpísanou cifrou 2. Opakovaním tejto úvahy nakoniec získame (jediné) dve celistvé vydláždenia celej plochy $3 \times 2n$ pre ľubovoľné dané $n \geqq 2$.



Obr. 30

Zaoberajme sa teraz dlážděniami plochy $3 \times 2n$, ktoré nie sú celistvé. Každé z nich je teda zlepením vydláždení dvoch plôch $3 \times 2k$ a $3 \times (2n-2k)$ pre vhodné $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Také k ale nemusí byť pre dané vydláždenie jediné, a tak vyberieme vždy „najväčšie“ vyhovujúce k; bude to práve také k, pri ktorom už je vyššie spomenuté vydláždenie „pravej“ plochy $3 \times (2n-2k)$ celistvé (pre najväčšie $k = n-1$ je to splnené automaticky), pričom vydláždenie „ľavej“ plochy $3 \times 2k$ je ľubovoľné.

Práve opísaným spôsobom sme všetky „necelistvé“ vydláždenia plochy $3\times 2n$ s daným $n \geqq 2$ rozdelili do $n-1$ disjunktných skupín. Ich celkový počet je rovný, ak počítame po skupinách,

$$a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2 + \ldots + a_{n-2} \cdot 2 + a_{n-1} \cdot 3,$$

lebo prvý činiteľ v k-tom sčítanci udáva vždy počet (všetkých) vydláždení „ľavej“ plochy $3 \times 2k$ a druhý činiteľ udáva počet celistvých vydláždení „pravej“ plochy $3 \times (2n - 2k)$. Ak pridáme k tomuto súčtu ešte sčítanec 2 za dve celistvé vydláždenia celej plochy $3 \times 2n$, dostaneme pre každé $n \geqq 2$ hľadaný rekurentný vzťah

$$a_n = 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2}) + 3a_{n-1} + 2. \tag{3}$$

Odtiaľ sa od hodnoty $a_1 = 3$ postupne dostaneme až k hľadanej hodnote a_5, a tak skončíme alternatívne riešenie celej zadanej úlohy:

$$a_2 = 3a_1 + 2 = 11,\ a_3 = 2a_1 + 3a_2 + 2 = 41,\ a_4 = 2(a_1 + a_2) + 3a_3 + 2 = 153,$$
$$a_5 = 2(a_1 + a_2 + a_3) + 3a_4 + 2 = 571.$$

Poznámka. Ukážme ešte, že pomerne zložito zapísanú rekurentnú závislosť (3) je možné podobne ako v prvom riešení zjednodušiť na tvar rovnice (2) uvedenej v prvej poznámke. Naozaj, podľa (3) pre ľubovoľné $n \geqq 1$ platí

$$a_{n+2} = 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + 3a_{n+1} + 2,$$
$$a_{n+1} = 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) + 3a_n + 2$$

a po odčítaní druhej rovnosti od prvej vychádza

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 3a_{n+1} - a_n \quad \text{čiže} \quad a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n.$$

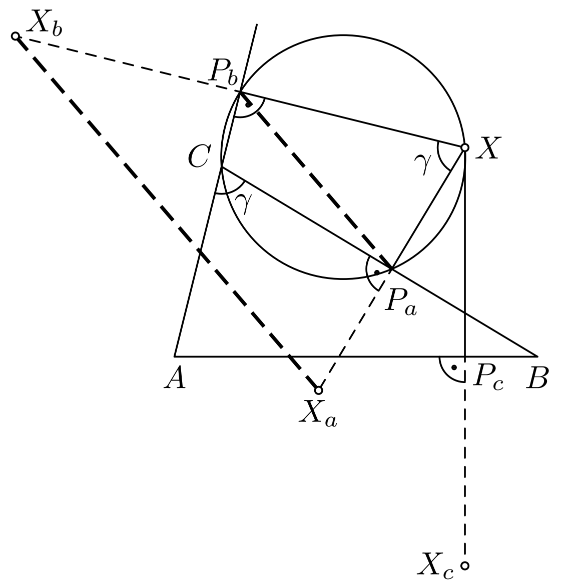
A – I – 6

Zvolíme akýkoľvek bod X roviny ABC a zostrojíme jeho obrazy X_a, X_b, X_c v osových súmernostiach podľa priamok BC, CA, AB (obr. 31). Aby sme mohli posúdiť otázku, kedy dostaneme rovnostranný trojuholník $X_aX_bX_c$, dokážeme najprv, že pre vzájomné vzdialenosti jeho vrcholov platia všeobecne (t. j. bez ohľadu na voľbu bodu X) vzorce

$$|X_aX_b| = 2|XC|\sin\gamma, \quad |X_aX_c| = 2|XB|\sin\beta, \quad |X_bX_c| = 2|XA|\sin\alpha, \tag{1}$$

v ktorých α, β, γ je zvyčajné označenie vnútorných uhlov trojuholníka ABC.

Stačí dokázať iba prvú rovnosť v (1). Tá je zrejmá v prípade $X = C$, lebo vtedy platí $X_a = X_b$ $(= X)$. V prípade $X \neq C$ je XC priemerom Tálesovej kružnice z obr. 31, na ktorej ležia vyznačené kolmé priemety P_a, P_b bodu X na priamky BC, CA. Keďže tetive P_aP_b prislúchajú obvodové uhly γ a $180° - \gamma$, zo sínusovej vety vyplýva rovnosť $|P_aP_b| = |XC|\sin\gamma$. Vzhľadom na to, že úsečka X_aX_b je zrejme obrazom tetivy P_aP_b v rovnoľahlosti so stredom v bode X a koeficientom 2, platí $|X_aX_b| = 2|P_aP_b|$, čím sú rovnosti (1) dokázané.



Obr. 31

Zo vzorcov (1) vyplýva, že našou úlohou je nájsť práve tie body X roviny ABC, pre ktoré platí

$$2|XA|\sin\alpha = 2|XB|\sin\beta = 2|XC|\sin\gamma > 0$$

(práve vtedy je totiž trojuholník $X_aX_bX_c$ rovnostranný). Inak vyjadrené, hľadáme body X, ktorých vzdialenosti od vrcholov A, B, C sú kladné a spĺňajú úmeru

$$|XA| : |XB| : |XC| = \frac{1}{\sin\alpha} : \frac{1}{\sin\beta} : \frac{1}{\sin\gamma} = \frac{1}{|BC|} : \frac{1}{|AC|} : \frac{1}{|AB|}$$

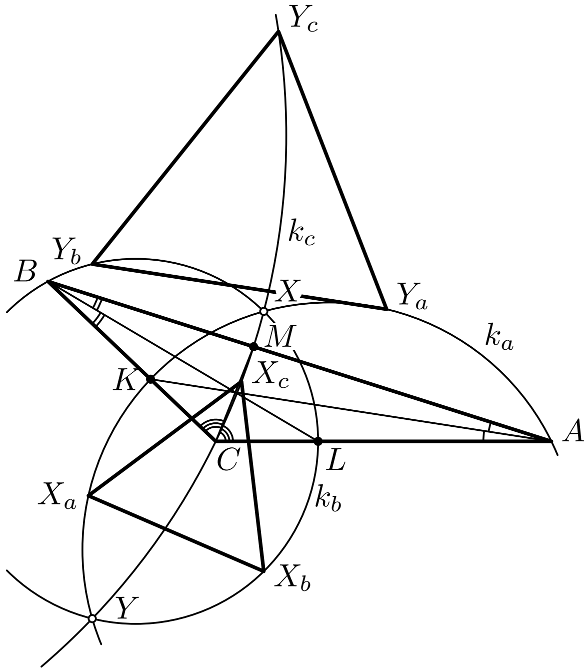
(kvôli ďalšiemu výkladu sme využili sínusovú vetu a prešli od sínusov uhlov k dĺžkam protiľahlých strán v trojuholníku ABC). Práve také body X zostrojíme ako spoločné body nasledujúcich troch Apollóniových kružníc, presnejšie množín bodov X zadaných rovnicami

$$k_a\colon \frac{|XB|}{|XC|} = \frac{|AB|}{|AC|}, \quad k_b\colon \frac{|XA|}{|XC|} = \frac{|AB|}{|BC|}, \quad k_c\colon \frac{|XA|}{|XB|} = \frac{|AC|}{|BC|}; \tag{2}$$

pritom je zrejmé, že ľubovoľným priesečníkom dvoch týchto kružníc bude prechádzať i tretia kružnica.[6] Z rovností v (2) vidno, že $A \in k_a$, $B \in k_b$ a $C \in k_c$. To uľahčuje praktickú konštrukciu týchto troch kružníc: ak sú AK, BL, CM priečky trojuholníka ABC, na ktorých ležia osi jeho vnútorných uhlov (obr. 32), leží na kružnici k_a nielen bod A, ale i bod K (v dôsledku dobre známeho pomeru $|KB| : |KC| = |AB| : |AC|$), takže stred kružnice k_a môžeme zostrojiť ako priesečník osi úsečky AK s priamkou BC (ak neplatí $|AB| = |AC|$, kedy k_a je os strany BC). Podobne využitím osí úsečiek BL,

[6] Niektoré z týchto množín (jedna alebo tri) môžu byť priamkami namiesto kružnicami. Budeme sa tomu venovať neskoršie pri diskusii o počte riešení.

CM určíme stredy kružníc k_b, k_c. Na obr. 32 vidíme situáciu, keď kružnice k_a, k_b, k_c majú dva spoločné body X, Y, a naša úloha tak má dve riešenia.[7] Sú na ňom nakreslené i zodpovedajúce rovnostranné trojuholníky $X_aX_bX_c$ a $Y_aY_bY_c$. Nie je náhoda, že ich vrcholy ležia po jednom na zodpovedajúcich kružniciach k_a, k_b a k_c, lebo stredy týchto kružníc ležia na osiach uvedených súmerností.



Obr. 32

Aj keď je zadaná úloha *konštrukčne* vyriešená, musíme ešte posúdiť otázku, koľko má úloha riešení, teda otázku počtu spoločných bodov Apollóniových kružníc k_a, k_b, k_c (ako vieme, stačí vziať dve z nich). Odpoveď podáme v nasledujúcej časti; pomôžeme si pritom opäť poznatkom o existencii priečok daného trojuholníka ABC, ktoré sú zároveň tetivami skúmaných kružníc; zachováme aj ich označenie AK, BL, CM z obr. 32.

Diskusia.

a) Ak je trojuholník ABC *rovnostranný*, sú k_a, k_b, k_b osi jeho strán a úloha tak má jediné riešenie, ktorým je stred daného rovnostranného trojuholníka.

b) Ak je trojuholník ABC *rovnoramenný* a platí napríklad $|AB| \neq |AC| = |BC|$, je k_c os jeho základne AB, ktorá pretne kružnicu k_a v dvoch bodoch, lebo pretína jej tetivu AK, a teda i oba jej oblúky AK. Pre rovnoramenný trojuholník ABC, ktorý nie je rovnostranný, má preto úloha vždy dve riešenia.

c) Ak je trojuholník ABC *rôznostranný* a napríklad AB je jeho najdlhšia strana (ako na obr. 32), majú kružnice k_a, k_b, ako ukážeme, dva spoločné body. Keďže kružnica k_a je určená rovnicou $|XB|/|XC| = |AB|/|AC| > 1$, leží bod B v jej

[7] Ako uvidíme o chvíľu, dve riešenia zadanej úlohy budú existovať vždy, keď daný trojuholník ABC nebude rovnostranný. Netriviálnosť tohto poznatku nepriamo podporuje i skutočnosť, že obe riešenia X a Y na obr. 32 ležia mimo trojuholníka ABC.

vonkajšej oblasti a bod C v jej vnútornej oblasti. Preto vo vnútornej oblasti k_a leží aj celá úsečka AC (s výnimkou bodu A), teda aj jej vnútorný bod L. Kružnica k_a tak pretína tetivu BL kružnice k_b, a preto sa pretínajú aj obe kružnice. Pre rôznostranný trojuholník ABC má preto úloha vždy dve riešenia.

A – S – 1

Zadané číslo má vyjadrenie

$$\begin{aligned}
&\bigl(10^{2n-1}+10^{2n-2}+\ldots+10^{n+1}\bigr)+2\cdot 10^n+8\cdot\bigl(10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+10^2\bigr)+96=\\
&\quad=10^{n+1}\cdot\frac{10^{n-1}-1}{9}+2\cdot 10^n+8\cdot 10^2\cdot\frac{10^{n-2}-1}{9}+96=\\
&\quad=\frac{10^{2n}-10^{n+1}+18\cdot 10^n+800\cdot 10^{n-2}-800+9\cdot 96}{9}=\\
&\quad=\frac{10^{2n}+16\cdot 10^n+64}{9}=\Bigl(\frac{10^n+8}{3}\Bigr)^2.
\end{aligned}$$

Získali sme druhú mocninu celého čísla, pretože číslo 10^n+8 je deliteľné tromi – má totiž ciferný súčet rovný 9. (Namiesto toho možno tiež konštatovať, že keby zlomok

$$\frac{10^n+8}{3}$$

nebol celým číslom, nebola by celým číslom ani jeho druhá mocnina, a to by bol spor.)

Iné riešenie. Ak objavíme experimentovaním niekoľko prvých rovností (neuškodí uvedomiť si, že vzorec funguje aj pre $n=2$)

$$1\,296=36^2,\quad 112\,896=336^2,\quad 11\,128\,896=3\,336^2,\quad \ldots,$$

napadne nás určite hypotéza, že pre každé $n\geqq 2$ bude platiť

$$\underbrace{1\ldots1}_{n-1}2\underbrace{8\ldots8}_{n-2}96=\underbrace{33\ldots3}_{n-1}6^2.$$

Jej dôkaz urobíme použitím algoritmu písomného násobenia:

$$\begin{array}{r@{}l}
333\ldots3336 & \\
\times 333\ldots3336 & \\
\hline
2000\ldots0016 & \\
10000\ldots008 & \\
100000\ldots08 & \\
1000000\ldots8 & \\
\ddots\quad\ddots & \\
1\ldots000008 & \\
10\ldots00008 & \\
100\ldots0008 & \\
\hline
111\ldots112888\ldots8896 &
\end{array}$$

Obe rovnaké násobené čísla sú n-ciferné, v každom z n riadkov medzi oddeľujúcimi linkami je $(n+1)$-ciferné číslo. Z toho ľahko určíme, ako stoja pod sebou cifry týchto následne sčítaných čísel, a teda aj počty rovnakých cifier vo výsledku.

A – S – 2

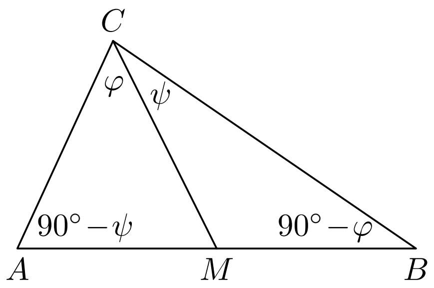
V prvej časti riešenia budeme predpokladať, že $|\measuredangle ABC|+|\measuredangle ACM| = 90°$. Pri označení $\varphi = |\measuredangle ACM|$ a $\psi = |\measuredangle BCM|$ (obr. 33) je potom splnená nielen rovnosť $|\measuredangle ABC| = 90° - \varphi$, ale aj rovnosť $|\measuredangle BAC| = 90° - \psi$, ako vyplýva zo súčtu uhlov v trojuholníku ABC:

$$|\measuredangle BAC| = 180° - |\measuredangle ABC| - |\measuredangle ACB| = 180° - (90° - \varphi) - (\varphi + \psi) = 90° - \psi.$$

Zo sínusovej vety pre trojuholníky ACM a BCM tak vyplýva

$$\frac{\sin(90° - \psi)}{\sin\varphi} = \frac{|CM|}{|AM|} = \frac{|CM|}{|BM|} = \frac{\sin(90° - \varphi)}{\sin\psi}.$$

Z porovnania krajných zlomkov vzhľadom na vzorec $\sin(90° - \omega) = \cos\omega$ vyplýva rovnosť $\sin\varphi\cos\varphi = \sin\psi\cos\psi$, čiže $\sin 2\varphi = \sin 2\psi$. Keďže uhly φ a ψ sú ostré, oba uhly 2φ a 2ψ ležia v intervale od 0° po 180°. Podľa známych vlastností funkcie sínus rovnosť $\sin 2\varphi = \sin 2\psi$ tak znamená, že buď $2\varphi = 2\psi$, alebo $2\varphi + 2\psi = 180°$. V prvom prípade ($\varphi = \psi$) je trojuholník ABC rovnoramenný so základňou AB, v druhom prípade ($\varphi+\psi = 90°$) je pravouhlý s preponou AB. Tým je dokázaná prvá (náročnejšia) z dvoch implikácií, z ktorých je zložená ekvivalencia zo zadania úlohy.



Obr. 33

Pri dôkaze druhej (jednoduchšej) implikácie najskôr predpokladajme, že trojuholník ABC je pravouhlý s preponou AB. Podľa Tálesovej vety vtedy platí $|MB| = |MC|$, a tak sú zhodné uhly MCB a MBC (čiže ABC), odkiaľ už vyplýva

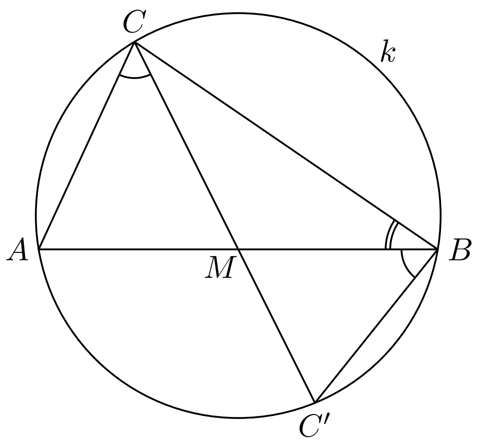
$$|\measuredangle ABC| + |\measuredangle ACM| = |\measuredangle MCB| + |\measuredangle ACM| = |\measuredangle ACB| = 90°.$$

Ostáva dokázať rovnakú rovnosť aj za predpokladu, že trojuholník ABC je rovnoramenný so základňou AB. Vtedy však sú trojuholníky ACM a BCM zhodné a majú pri vrchole M pravý uhol, takže platí

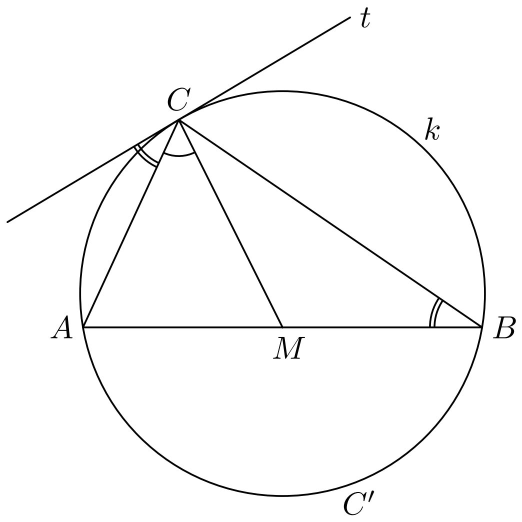
$$|\measuredangle ABC| + |\measuredangle ACM| = |\measuredangle MBC| + |\measuredangle BCM| = 180° - |\measuredangle BMC| = 90°.$$

Tým je aj dôkaz druhej implikácie ukončený a celá úloha je vyriešená.

Iné riešenie. Zostrojme kružnicu k opísanú danému trojuholníku ABC a jeho ťažnicu CM predĺžme za bod M na tetivu CC' kružnice k (obr. 34). Zo zhodnosti obvodového uhla ABC' s obvodovým uhlom ACC' (čiže uhlom ACM) vyplýva, že súčet uhlov ABC a ACM zo zadania úlohy má rovnakú veľkosť ako uhol CBC'. Podľa Tálesovej vety je táto veľkosť rovná $90°$ práve vtedy, keď tetiva CC' kružnice k je jej priemerom. To nastane práve vtedy, keď stred S kružnice k bude ležať na polpriamke CM. Pre takú situáciu rozlíšime prípady $S = M$ a $S \neq M$. Prvý prípad podľa Tálesovej vety nastane práve vtedy, keď bude trojuholník ABC pravouhlý s preponou AB. Druhý prípad (C, M a S sú tri rôzne body ležiace na jednej priamke) nastane práve vtedy, keď bude priamka MS, ktorá je osou úsečky AB, prechádzať bodom C, teda práve vtedy, keď bude trojuholník ABC rovnoramenný so základňou AB (a pritom uhol ACB nebude pravý). Tým je dokázaná celá ekvivalencia zo zadania úlohy.



Obr. 34



Obr. 35

Poznámka. V predchádzajúcom postupe bolo možné namiesto tetivy CC' kružnice k využiť jej dotyčnicu t v bode C (obr. 35). Zo zhodnosti obvodového uhla ABC s vyznačeným úsekovým uhlom medzi tetivou AC a dotyčnicou t totiž vyplýva, že súčet uhlov ABC a ACM je rovný $90°$ práve vtedy, keď je dotyčnica t kolmá na polpriamku CM, teda práve vtedy, keď na tejto polpriamke leží stred S kružnice k.

A – S – 3

Hľadaný počet úsečiek, ktoré prechádzajú vnútornými bodmi valca, určíme tak, že od celkového počtu zostrojených úsečiek odčítame jednak počet tých úsečiek, ktoré ležia na plášti valca, jednak počet tých úsečiek, ktoré ležia v niektorej z oboch podstáv valca.

Výpočet urobíme pre prípad valca s obvodom podstavy x a výškou y. Spájané body sú teda na valci rozložené na x úsečkách po $y+1$ exemplároch, takže ich počet je $x(y+1)$. Pre počet P_0 všetkých zostrojených úsečiek preto platí vzorec

$$P_0 = \binom{x(y+1)}{2} = \frac{x(y+1)(xy+x-1)}{2},$$

počet P_1 úsečiek ležiacich na plášti má vyjadrenie

$$P_1 = x \cdot \binom{y+1}{2} = \frac{x(y+1)y}{2}$$

a napokon počet P_2 úsečiek v oboch podstavách je daný vzorcom

$$P_2 = 2 \cdot \binom{x}{2} = x(x-1).$$

Z toho už pre hľadaný počet P úsečiek, ktoré prechádzajú vnútornými bodmi valca, dostaneme vzorec

$$\begin{aligned} P = P_0 - P_1 - P_2 &= \frac{x(y+1)(xy+x-1)}{2} - \frac{x(y+1)y}{2} - x(x-1) = \\ &= \frac{x(x-1)(y^2+2y-1)}{2}. \end{aligned}$$

Pre zodpovedajúci počet Q úsečiek, ktoré prechádzajú vnútornými bodmi druhého valca s obvodom podstavy y a výškou x, zrejme platí analogický vzorec

$$Q = \frac{y(y-1)(x^2+2x-1)}{2}.$$

Pre porovnanie oboch počtov P a Q upravíme ich rozdiel $P - Q$ (s vedomím, že ten bude násobkom dvojčlena $x - y$, pretože pre $x = y$ zrejme platí $P = Q$):

$$\begin{aligned} 2(P-Q) &= (x^2-x)(y^2+2y-1) - (y^2-y)(x^2+2x-1) = \\ &= (x^2y^2 - xy^2 + 2x^2y - 2xy - x^2 + x) - \\ &\quad - (x^2y^2 - x^2y + 2xy^2 - 2xy - y^2 + y) = \\ &= 3xy(x-y) - (x-y)(x+y) + (x-y) = \\ &= (x-y)(3xy - x - y + 1). \end{aligned}$$

V prípade $x > y$ ako väčšie vyjde číslo P, pretože ukážeme, že výraz $3xy - x - y + 1$ je kladný: z $y \geqq 2$ máme $3xy \geqq 6x$, a preto

$$3xy - x - y + 1 \geqq 5x - y + 1 > 4x + 1 > 0.$$

Poznámka. Opíšme kratší spôsob určenia hľadaného počtu úsečiek, a to opäť pre valec s obvodom podstavy x a výškou y.

Kolmým priemetom každej započítanej úsečky do podstavy je jedna z $\frac{1}{2}x(x-1)$ úsečiek, ktoré spájajú x bodov na hraničnej kružnici. Do jednej z týchto úsečiek sa vždy premietne $(y+1)^2 - 2 = y^2 + 2y - 1$ započítaných úsečiek, pretože $y + 1$ je počet spájaných bodov s rovnakým priemetom a od súčinu $(y+1)(y+1)$ treba odčítať číslo 2 za dve spojnice ležiace v podstavách. Hľadaný počet P je teda rovný

$$P = \frac{x(x-1)(y^2+2y-1)}{2}.$$

A – II – 1

Využime zvyčajný zápis $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ prvočíselného rozkladu hľadaného čísla n, v ktorom $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ sú všetky prvočísla deliace n a exponenty α_i sú kladné celé čísla. Z podmienky úlohy vyplýva, že $p_1 = 2$ (inak by najväčším nepárnym deliteľom čísla n bolo samo n a dostali by sme nerovnosť $n > 3n$, ktorá nemôže platiť) a že $k \geqq 2$ (inak by n bolo mocninou čísla 2). Najväčším nepárnym deliteľom čísla n je zrejme číslo $p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, jeho najmenším nepárnym deliteľom (väčším ako 1) je určite prvočíslo p_2. Rovnica vyjadrujúca podmienku úlohy má preto zápis

$$2^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} = 3 p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} + 5 p_2, \quad \text{čiže} \quad \bigl(2^{\alpha_1} - 3\bigr) p_2^{\alpha_2 - 1} \dots p_k^{\alpha_k} = 5.$$

(V prípade $k = 2$ je ľavá strana upravenej rovnice rovná $\bigl(2^{\alpha_1} - 3\bigr) p_2^{\alpha_2 - 1}$.) Keďže číslo 5 má jediné dva delitele, platí $2^{\alpha_1} - 3 \in \{1, 5\}$, takže $\alpha_1 = 2$ alebo $\alpha_1 = 3$.

i) Prípad $\alpha_1 = 2$. Upravená rovnica prejde na tvar

$$p_2^{\alpha_2 - 1} \dots p_k^{\alpha_k} = 5,$$

takže je splnená práve vtedy, keď je buď $k = 2$, $p_2 = 5$ a $\alpha_2 - 1 = 1$, alebo $k = 3$, $\alpha_2 - 1 = 0$, $p_3 = 5$ a $\alpha_3 = 1$ – vtedy ale prvočíslo p_2 nemôže byť ľubovoľné, lebo z $2 < p_2 < p_3 = 5$ vyplýva $p_2 = 3$. Prvej možnosti tak zodpovedá jediné riešenie $n = 2^2 \cdot 5^2 = 100$, druhej možnosti jediné riešenie $n = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 60$.

ii) Prípad $\alpha_1 = 3$. Teraz dostávame po úprave rovnicu

$$p_2^{\alpha_2 - 1} \dots p_k^{\alpha_k} = 1,$$

ktorá znamená, že $k = 2$ a $\alpha_2 - 1 = 0$ (na prvočíslo p_2 tentoraz žiadne obmedzenie okrem nerovnosti $p_2 > 2$ neexistuje). Tomuto prípadu tak zodpovedá nekonečne veľa riešení $n = 2^3 \cdot p_2^1 = 8p_2$.

Odpoveď. Všetky vyhovujúce celé kladné čísla n sú: $n = 60$, $n = 100$ a $n = 8p$, pričom p je ľubovoľné nepárne prvočíslo.

Poznámka. Celý postup zapíšeme úspornejšie, keď namiesto „úplného“ prvočíselného rozkladu hľadaného čísla n využijeme jeho vyjadrenie $n = 2^\alpha \cdot p \cdot l$, v ktorom 2^α je najvyššia mocnina čísla 2, ktorá delí n, p je najmenšie nepárne prvočíslo deliace n a l je (nepárne) číslo, ktoré nemá žiadneho prvočíselného deliteľa menšieho ako p (môže byť aj $l = 1$, v ostatných prípadoch však $l \geqq p$). Potom je našou úlohou riešiť rovnicu

$$n = 2^\alpha p l = 3pl + 5p, \quad \text{čiže} \quad \bigl(2^\alpha - 3\bigr) l = 5.$$

Odtiaľ máme buď $l = 1$ a $2^\alpha - 3 = 5$, alebo $l = 5$ a $2^\alpha - 3 = 1$. V prvom prípade vychádza $\alpha = 3$, a teda vyhovuje každé $n = 8p$, pričom p je ľubovoľné nepárne prvočíslo; v druhom prípade je $l = 5$ a $\alpha = 2$, takže $n = 20p$, pričom ale z $5 = l \geqq p$ vyplýva $p \in \{3, 5\}$, a preto vyhovujú iba čísla $n = 60$ a $n = 100$.

Iné riešenie. Zo zadania vyplýva, že medzi hľadaným číslom n a jeho najväčším nepárnym deliteľom L platia nerovnosti $n > 3L$ a $n \leqq 3L + 5L = 8L$. Keďže podiel $n : L$ je mocnina čísla 2, z nerovností $3 < n : L \leqq 8$ vyplýva, že buď $n = 4L$, alebo $n = 8L$.

Začneme s rozborom prípadu $n = 8L$. Zo spôsobu, akým sme odvodili nerovnosť $n \leqq 8L$, vyplýva, že číslo L je nielen najväčším, ale aj najmenším netriviálnym nepárnym deliteľom čísla n, a preto je prvočíslom. Dostávame prvú skupinu hľadaných čísel n, ktoré majú tvar $n = 8L$, pričom L je ľubovoľné nepárne prvočíslo.

V prípade $n = 4L$ je najmenší netriviálny nepárny deliteľ čísla n také prvočíslo p, ktorého päťnásobok je rovný číslu $n - 3L = L$. Z rovnosti $5p = L$ máme $n = 4L = 20p$, a preto $5 \mid n$, takže $p \leqq 5$, čiže $p \in \{3, 5\}$. Zodpovedajúce riešenia sú $n = 60$ a $n = 100$.

A – II – 2

V prvej časti riešenia predpokladajme, že X je ľubovoľný bod, ktorý má požadovanú vlastnosť. Zrejme musí ležať vo vonkajšej oblasti každej z oboch kružníc. Body S_1, S_2 a X sú potom vrcholmi trojuholníka, ktorého strany S_1X, S_2X sú preťaté postupne kružnicami k_1, k_2 v bodoch Y_1 a Y_2, ktoré ležia na jednej rovnobežke s priamkou S_1S_2 (obr. 36). Preto aj body Y_1, Y_2, X sú vrcholmi trojuholníka, ktorý je podobný trojuholníku S_1S_2X podľa vety *uu*, teda pre ich strany platí úmera

$$\frac{|XY_1|}{|XS_1|} = \frac{|XY_2|}{|XS_2|}, \tag{1}$$

ktorú vďaka rovnostiam

$$|XY_1| = |XS_1| - r_1 \quad \text{a} \quad |XY_2| = |XS_2| - r_2 \tag{2}$$

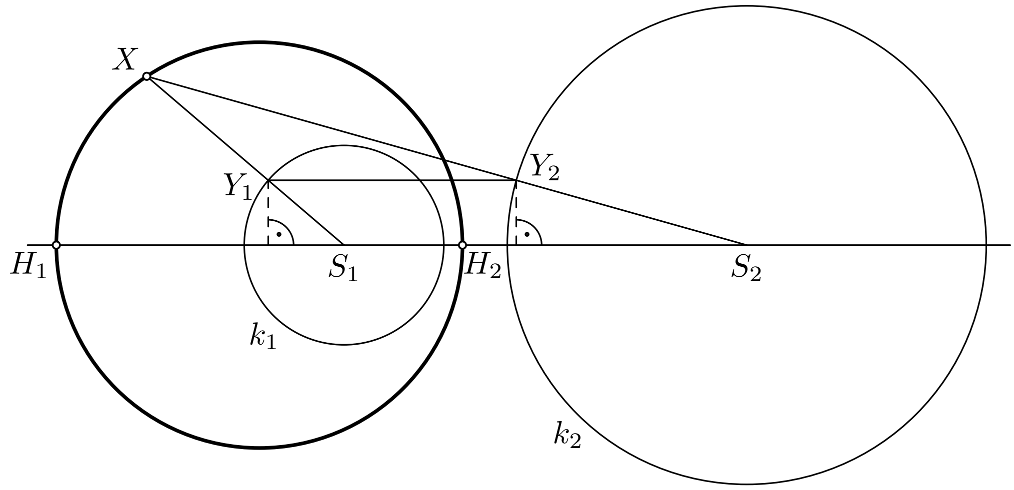
prevedieme na úmeru pre dĺžky úsečiek XS_1 a XS_2:

$$\frac{|XS_1| - r_1}{|XS_1|} = \frac{|XS_2| - r_2}{|XS_2|},$$

takže

$$\frac{|XS_1|}{|XS_2|} = \frac{r_1}{r_2}. \tag{3}$$

Množinu bodov v rovine s danými bodmi S_1 a S_2, ktoré majú vlastnosť (3), poznáme: pre $r_1 = r_2$ je to os úsečky S_1S_2 a pre $r_1 \neq r_2$ je to *Apollóniova kružnica.* Tá je určená svojim priemerom H_1H_2 na priamke S_1S_2, na ktorej sú H_1 a H_2 jediné dva body X s vlastnosťou (3). Z tej navyše vyplýva, že sa jedná o stredy rovnoľahlostí kružníc k_1 a k_2.



Obr. 36

V druhej časti riešenia budeme naopak predpokladať, že bod X je ľubovoľný bod Apollóniovej kružnice určenej rovnicou (3), ktorý je rôzny od jej priesečníkov H_1, H_2 s priamkou S_1S_2. Vzhľadom na predpoklady úlohy ležia body H_1, H_2 vo vonkajšej oblasti oboch kružníc, takže tam leží aj príslušná Apollóniova kružnica, pretože jej priemer obsahuje priemer jednej z daných kružníc (tej s menším polomerom) a s priemerom druhej kružnice je disjunktná.

Body S_1, S_2 a X sú tak vrcholmi trojuholníka, pričom $|XS_1| > r_1$ a $|XS_2| > r_2$. Existujú teda body $Y_1 \in k_1, Y_2 \in k_2$ ležiace vnútri strán S_1X, S_2X trojuholníka S_1S_2X. Preto pre ne tiež platia rovnosti (2), vďaka ktorým možno prejsť tentoraz od rovnice (3) k rovnici (1). Jej platnosť znamená, že trojuholníky S_1S_2X a Y_1Y_2X sú podobné podľa vety *sus*, a preto sú úsečky S_1S_2 a Y_1Y_2 rovnobežné. Body Y_1, Y_2 tak majú od priamky S_1S_2 rovnaké vzdialenosti, čo dokazuje požadovanú vlastnosť bodu X.

Odpoveď. Hľadanou množinou bodov X je Apollóniova kružnica určená rovnicou (3), z ktorej sú vylúčené oba jej priesečníky s priamkou S_1S_2. V prípade $r_1 = r_2$ je hľadanou množinou os úsečky S_1S_2 bez jej stredu.

Poznámka. Potrebnú vlastnosť Apollóniovej kružnice možno odvodiť priamo z rovnosti (3). Z rovnosti, ktorá je pred rovnosťou (3) a ktorá je s ňou v skutočnosti ekvivalentná, pre ľubovoľný taký bod X vyplýva, že oba výrazy $|XS_1|-r_1$ a $|XS_2|-r_2$ majú rovnaké znamienko. A keďže podľa predpokladov úlohy je

$$(|XS_1| - r_1) + (|XS_2| - r_2) > |S_1S_2| - (r_1 + r_2) > 0,$$

je $|XS_1| > r_1$ a $|XS_2| > r_2$, čo znamená, že nájdená Apollóniova kružnica leží v prieniku vonkajších oblastí oboch daných kružníc.

A – II – 3

Ak je napr. $x = 0$, dostávame sústavu $0 = yz^2 = 2y^2z$, takže aj jedna z hodnôt y, z je nulová a druhá môže byť ľubovoľná. Podobne vyriešime aj prípady $y = 0$ a $z = 0$.

Dostávame tak tri skupiny riešení $(t, 0, 0)$, $(0, t, 0)$ a $(0, 0, t)$, pričom t je ľubovoľné reálne číslo. Všetky ostatné riešenia už spĺňajú podmienku $xyz \neq 0$, ktorej platnosť budeme vo zvyšku riešenia predpokladať.

Úpravou rovnice $x(y^2+2z^2) = y(z^2+2x^2)$ dostaneme $(2x-y)(z^2-xy) = 0$. Rozlíšime teda, ktorý z dvoch činiteľov je rovný nule.

i) $2x - y = 0$. Z pôvodnej sústavy po dosadení $y = 2x$ zostane jediná rovnica

$$2x(2x^2 + z^2) = 9x^2 z,$$

odkiaľ po delení číslom $x \neq 0$ dostávame

$$4x^2 + 2z^2 - 9xz = 0, \quad \text{čiže} \quad (x - 2z)(4x - z) = 0.$$

Prípadu i) teda zodpovedajú skupiny riešení $(2t, 4t, t)$ a $(t, 2t, 4t)$, pričom t je ľubovoľné reálne číslo.

ii) $z^2 - xy = 0$. Čiastočným dosadením $z^2 = xy$ dostaneme jedinú rovnicu

$$xy(2x + y) = z(x^2 + 2y^2),$$

ktorá je (vďaka tomu, že $x^2 + 2y^2 > 0$) ekvivalentná s rovnicou

$$z = \frac{xy(2x + y)}{x^2 + 2y^2}.$$

Teraz ale musíme zistiť, kedy také z spĺňa podmienku $z^2 = xy$, ktorá po dosadení nájdeného vzorca pre z získava tvar

$$\frac{x^2y^2(2x + y)^2}{(x^2 + 2y^2)^2} = xy.$$

Po vydelení číslom $xy \neq 0$ a odstránení zlomku dostaneme podmienku

$$xy(2x + y)^2 = (x^2 + 2y^2)^2, \quad \text{čiže} \quad (4y - x)(x^3 - y^3) = 0.$$

Posledná rovnosť platí práve vtedy, keď buď $x = 4y$, alebo $x^3 = y^3$, t. j. $x = y$.[8] Po dosadení do vzorca pre z dostaneme v prvom prípade $z = 2y$, v druhom $z = x$. Prípadu ii) teda zodpovedajú skupiny riešení $(4t, t, 2t)$ a (t, t, t), pričom t je ľubovoľné reálne číslo.

Odpoveď. Všetky riešenia danej sústavy sú $(t, 0, 0)$, $(0, t, 0)$, $(0, 0, t)$, (t, t, t), $(4t, t, 2t)$, $(2t, 4t, t)$ a $(t, 2t, 4t)$, pričom t je ľubovoľné reálne číslo.

Poznámka. Ukážeme spôsob, ako sa v podanom riešení vyhnúť rozboru náročnejšieho prípadu ii). Vďaka cyklickej symetrii má zadaná sústava za dôsledok nielen prvú z nasledujúcich troch rovníc (ktorú sme vyššie odvodili), ale aj ďalšie dve analogické rovnice

$$(2x - y)(z^2 - xy) = 0, \quad (2y - z)(x^2 - yz) = 0, \quad (2z - x)(y^2 - zx) = 0. \tag{1}$$

[8] Posledný záver platí vďaka tomu, že funkcia $x \mapsto x^3$ je na reálnom obore rastúca, a teda prostá.

Prípad $2x - y = 0$ sme vyššie rozobrali, prípady $2y - z = 0$ a $2z - x$ sú analogické a vypísaním riešení pre tieto tri prípady dostaneme všetky riešenia uvedené v odpovedi s výnimkou (t, t, t). Ak nenastane žiadny z týchto troch prípadov, musia byť splnené rovnice

$$z^2 - xy = x^2 - yz = y^2 - zx = 0. \tag{2}$$

Ukážeme, že ich v obore reálnych čísel spĺňajú iba trojice $(x, y, z) = (t, t, t)$. To je jednoduchý dôsledok algebraickej identity

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 2(z^2 - xy) + 2(x^2 - yz) + 2(y^2 - zx),$$

ktorej pravá strana je podľa (2) rovná nule, takže sa rovná nule aj základ každej z troch druhých mocnín na ľavej strane (ktorá by inak mala kladnú hodnotu). Dodajme, že sústavu (2) možno vyriešiť aj kratšou úvahou: ak platí rovnosť (2), majú výrazy x^3, y^3, z^3 tú istú hodnotu xyz, a tak platí $x = y = z$ podľa poznámky pod čiarou.

Iné riešenie. Nebudeme opakovať úvodnú úvahu pôvodného riešenia a rovno budeme hľadať len tie riešenia, ktoré spĺňajú podmienku $xyz \neq 0$.

Po vydelení výrazov v zadanej sústave nenulovým číslom xyz dostaneme

$$\frac{y}{z} + \frac{2z}{y} = \frac{z}{x} + \frac{2x}{z} = \frac{x}{y} + \frac{2y}{x}, \tag{3}$$

čo je rovnosť troch hodnôt funkcie $f(s) = s + 2/s$ v nenulových bodoch $s_1 = y/z$, $s_2 = z/x$ a $s_3 = x/y$. Zistíme preto, kedy pre nenulové čísla s a t platí $f(s) = f(t)$. Z vyjadrenia

$$f(s) - f(t) = s + \frac{2}{s} - t - \frac{2}{t} = \frac{(s-t)(st-2)}{st}$$

vidíme, že želaná situácia nastane, len ak $s = t$ alebo $st = 2$.

Sústava rovníc (3) je preto splnená práve vtedy, keď pre zavedené čísla s_1, s_2, s_3 platí: každé dve z nich sa rovnajú alebo je ich súčin rovný číslu 2. Ak je ale taký súčin rovný 2, tretie číslo je vďaka rovnosti $s_1 s_2 s_3 = 1$ rovné $\frac{1}{2}$ a prvé dve čísla (majúce súčin 2) teda ležia v množine $\{\frac{1}{2}, 4\}$, takže sú rôzne, a preto (s_1, s_2, s_3) je niektorou permutáciou trojice $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 4)$. Ľahko možno overiť, že týmto (spolu trom) permutáciám zodpovedajú riešenia $(4t, t, 2t)$, $(2t, 4t, t)$ a $(t, 2t, 4t)$ pôvodnej sústavy (nebudeme to tu rozpisovať). Ešte jednoduchšie je dokončenie zvyšného prípadu $s_1 = s_2 = s_3$: vďaka rovnosti $s_1 s_2 s_3 = 1$ je spoločná hodnota čísel s_i rovná 1 a zodpovedajúce riešenia zrejme sú (t, t, t) (opäť je t ľubovoľné reálne číslo).

A – II – 4

Permutácie kurtov v jednotlivých kolách aj permutácie samotných kôl posúdime nakoniec; najskôr *družstvá pevne označíme číslami* 1, 2, 3, 4, 5, 6 a podľa toho *päticu kôl ľubovoľného rozpisu jednoznačne preusporiadame.* Zápas družstva x proti družstvu y budeme označovať ako pár (x, y) (máme pritom na pamäti, že na poradí čísel v páre nezáleží).

Za kolá 1 a 2 prehlásime kolá postupne s pármi $(1,2)$ a $(1,3)$; ak je pritom v kole 1 pár $(3,a)$ a v kole 2 pár $(2,b)$, sú a, b dve *rôzne* čísla z $\{4,5,6\}$, inak by nám totiž pre tretí zápas v každom z oboch kôl zvýšila tá istá dvojica. Za kolá 3, 4 a 5 potom prehlásime kolá postupne s pármi $(1,a)$, $(1,b)$ a $(1,c)$, pričom $c \in \{4,5,6\} \setminus \{a,b\}$. Máme teda jednoznačne určené poradie všetkých kôl s neúplným rozpisom

$$\begin{array}{lll} 1: & (1,2), & (3,a), \\ 2: & (1,3), & (2,b), \\ 3: & (1,a), & \\ 4: & (1,b), & \\ 5: & (1,c), & \end{array}$$

ktorý sa dá zrejme jediným spôsobom doplniť na úplný rozpis:

$$\begin{array}{llll} 1: & (1,2), & (3,a), & (b,c), \\ 2: & (1,3), & (2,b), & (a,c), \\ 3: & (1,a), & (2,c), & (3,b), \\ 4: & (1,b), & (2,a), & (3,c), \\ 5: & (1,c), & (2,3), & (a,b). \end{array}$$

Keďže (a,b,c) je ľubovoľná permutácia trojice $(4,5,6)$, je počet takto zapísaných rozpisov práve $3! = 6$, v každom takom rozpise potom môžeme kolá usporiadať $5!$ spôsobmi a nakoniec v každom z piatich kôl priradiť párom kurty práve $3! = 6$ spôsobmi. Hľadaný počet je teda rovný číslu

$$6 \cdot 5! \cdot 6^5 = 5! \cdot 6^6 = 2^9 \cdot 3^7 \cdot 5 = 5\,598\,720.$$

Iné riešenie. Označme družstvá číslami 1, 2, 3, 4, 5 a 6 a zostavme najskôr neusporiadaný rozpis turnaja tak, že jednotlivé kolá „očíslujeme“ súpermi družstva číslo 1 a preskúmame, koľkými spôsobmi sa dá k týmto dvojiciam doplniť zápas družstva číslo 2, pričom súpera dvojky vyberáme už len zo štvorprvkovej množiny $\{3,4,5,6\}$:

$$\begin{array}{lll} 1: & (1,2), & \\ 2: & (1,3), & (2,a), \\ 3: & (1,4), & (2,b), \\ 4: & (1,5), & (2,c), \\ 5: & (1,6), & (2,d). \end{array}$$

Na dopĺňané páry $(2,a)$, $(2,b)$, $(2,c)$, $(2,d)$ máme nasledujúce obmedzenia:

- ▷ Družstvo 2 nemôže mať v žiadnom kole rovnakého súpera ako družstvo 1.
- ▷ Obe družstvá 1 a 2 nemôžu mať v dvoch rôznych kolách striedavo tých istých súperov, pretože potom by nám na tretí zápas v oboch kolách zvýšila tá istá dvojica.

Pri splnení týchto dvoch podmienok je potom zrejme jednoznačne určená zvyšná dvojica v každom z kôl, v ktorých proti sebe nehrajú 1 a 2. Po ich určení nám zostanú práve dve dvojice súperov, ktoré sa musia stretnúť v kole, v ktorom spolu hrajú 1 a 2.

Ostáva už len určiť počet permutácií štvorprvkovej množiny $\{3,4,5,6\}$ súperov družstva 2, ktoré spĺňajú uvedené dve podmienky.

Počet permutácií (a,b,c,d) spĺňajúcich prvú podmienku, teda nerovnosti $a \neq 3$, $b \neq 4$, $c \neq 5$ a $d \neq 6$, nájdeme metódou inklúzie a exklúzie: vhodných permutácií je

$$4! - \left(4 \cdot 3! - \binom{4}{2} \cdot 2! + 4 - 1\right) = 9.$$

Medzi nimi sú práve tri permutácie (a,b,c,d), ktoré nevyhovujú druhej podmienke: jedná sa zrejme o permutácie $(4,3,6,5)$, $(5,6,3,4)$ a $(6,5,4,3)$ a žiadne iné.

Všetkých možných rozpisov je tak celkom 6, v každom kole máme však $3! = 6$ možností, ako priradiť párom súperov jednotlivé kurty, a celkom 5! možných usporiadaní jednotlivých kôl, dokopy teda

$$6 \cdot 6^5 \cdot 5! = 5! \cdot 6^6 = 2^9 \cdot 3^7 \cdot 5 = 5\,598\,720 \text{ možností.}$$

Poznámka. Namiesto použitia princípu inklúzie a exklúzie môžeme všetky permutácie (a,b,c,d) vyhovujúce obom podmienkam vhodným systematickým postupom priamo nájsť a vypísať. Jedná sa o permutácie $(4,5,6,3)$, $(4,6,3,5)$, $(5,3,6,4)$, $(5,6,4,3)$, $(6,3,4,5)$, $(6,5,3,4)$.

Naopak, k počtu permutácií vyhovujúcich prvej, nie však druhej podmienke môžeme dospieť nasledujúcou úvahou: máme šesť možností, ako vybrať prestriedavanú dvojicu súperov, pritom také dvojice sú v každej z počítaných permutácií zrejme dve.

A – III – 1

Rozlíšime, či hľadané n je nepárne alebo párne.

i) Nech n je nepárne, potom aj všetky d_i sú nepárne. Z rovnosti $11d_5 + 8d_7 = 3n$ vyplýva $d_7 \mid 11d_5$ a tiež $d_5 \mid 8d_7$ čiže $d_5 \mid d_7$. Z $d_5 \mid d_7 \mid 11d_5$ vzhľadom na $d_7 > d_5$ máme $d_7 = 11d_5$ a po dosadení do rovnosti $11d_5 + 8d_7 = 3n$ dostaneme $99d_5 = 3n$, čiže $33d_5 = n$. Vidíme, že štyri čísla 1, 3, 11 a 33 sú delitele čísla n, a to dokonca jediné delitele menšie ako 50, pretože pre piaty deliteľ d_5 už podľa zadania platí $d_5 = d_3 + 50 > 50$. Máme teda $d_1 = 1$, $d_2 = 3$, $d_3 = 11$, $d_4 = 33$, $d_5 = d_3 + 50 = 61$, a preto $n = 33d_5 = 33 \cdot 61 = 2\,013$. Toto číslo naozaj vyhovuje, lebo jeho najmenšie delitele sú v predchádzajúcej vete vypísané správne, navyše platí $d_6 = 61 \cdot 3$ a $d_7 = 61 \cdot 11$, takže je naozaj splnené $d_7 = 11d_5$, teda i všetko požadované.

ii) Nech n je párne. Z rovnosti $11d_5 + 8d_7 = 3n$ potom vyplýva $2 \mid d_5$, takže aj $2 \mid d_5 - 50 = d_3$. Keďže $d_1 = 1$ a $d_2 = 2$, nemôže byť $d_3 = 3$, takže je buď $d_3 = 4$, alebo $d_3 = 2t$, pričom $t > 2$. Posledné však možné nie je (číslo $t < d_3$ by chýbalo vo výpise najmenších deliteľov čísla n), a preto je nutne $d_3 = 4$. Potom je ale $d_5 = d_3 + 50 = 54$, a teda $3 \mid n$, napriek tomu, že 3 nie je medzi najmenšími deliteľmi čísla n. Žiadne vyhovujúce párne n preto neexistuje.

Odpoveď. Úloha má jediné riešenie $n = 2\,013$.

Iné riešenie. Pre delitele $d_5 < d_7$ máme $d_5 = n/x$ a $d_7 = n/y$, pričom $x > y$ sú opäť kladné delitele čísla n. Dosadením do $11d_5 + 8d_7 = 3n$ dostaneme po vydelení n rovnicu $11/x + 8/y = 3$, ktorú v obore všetkých celých kladných čísel štandardne vyriešime, napríklad úpravou na súčinový tvar:

$$8x = y(3x-11) \quad\Leftrightarrow\quad 8(3x-11)+88 = 3y(3x-11) \quad\Leftrightarrow\quad (3x-11)(3y-8) = 88.$$

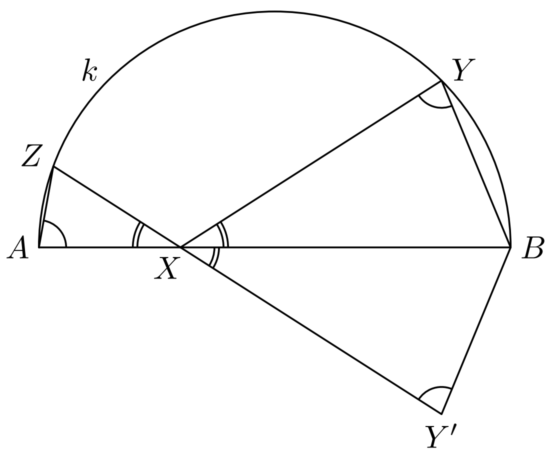
Z prvej upravenej rovnice máme $3x - 11 > 0$, takže z poslednej aj $3y - 8 > 0$; vzhľadom na $x \geqq y + 1$ teda platí $3x - 11 \geqq 3y - 8 > 0$. Pre usporiadanú dvojicu činiteľov z rozkladu čísla 88 preto dostávame možnosti

$$(3x-11, 3y-8) \in \{(88,1), (44,2), (22,4), (11,8)\}.$$

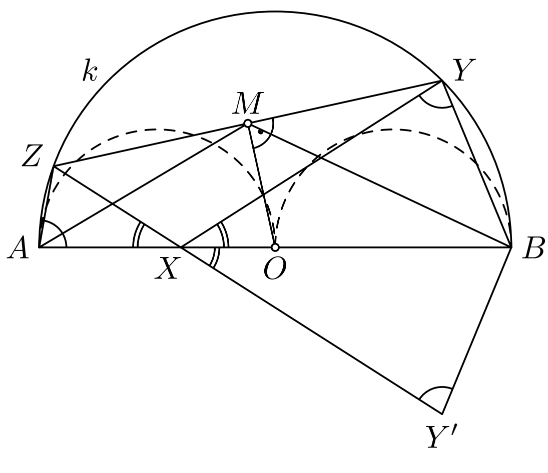
Podľa zvyškov modulo 3 však vyhovujú iba dvojice $(88, 1)$ a $(22, 4)$, ktorým zodpovedajú páry (x, y) rovné $(33, 3)$, resp. $(11, 4)$. Pre prvý z nich máme $d_5 = n/33$ (a $d_7 = n/3$), takže 1, 3, 11 a 33 sú delitele čísla n, odkiaľ rovnako ako v prvom riešení dôjdeme k hľadanému $n = 2\,013$. Pre $(x, y) = (11, 4)$ čiže $d_5 = n/11$ a $d_7 = n/4$ má číslo n delitele 1, 2, 4, 11, 22, 44, čo je v spore s nerovnosťou $d_5 > 50$.

A – III – 2

Podľa zadania ležia body Y a Z v tej istej polrovine s hraničnou priamkou AB. Zostrojme obraz Y' bodu Y v súmernosti podľa priamky AB. Vzhľadom na predpokladanú podobnosť sú uhly XAZ a BYX zhodné (obr. 37), takže je aj $|\measuredangle BAZ| = |\measuredangle BY'Z|$. Z tejto rovnosti ale podľa vety o obvodových uhloch vyplýva, že na kružnici k opísanej trojuholníku ABZ leží nielen bod Y, ale aj bod Y'. Priamka AB ako os tetivy YY' tak prechádza stredom O kružnice k, takže tetiva AB je jej priemerom. Kružnica k je teda vzhľadom na voľbu bodu Z nezávislá. Stred M jej tetivy YZ preto nutne leží vo vnútornej oblasti kružnice k. Z pravých uhlov OMZ a OMY (obr. 38) vidíme, že (menšie) uhly AMO a BMO sú ostré, takže bod M nutne leží v prieniku vonkajších oblastí Tálesových kružníc nad priemermi AO a BO. Ukážeme, že obe nutné podmienky na polohu bodu M už spolu vymedzujú hľadanú množinu.



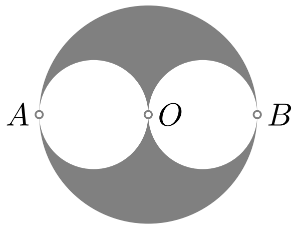
Obr. 37



Obr. 38

Nech M je ľubovoľný bod vo vnútornej oblasti kružnice k, pre ktorý sú oba uhly AMO a BMO ostré (t. j. bod M leží zvonka oboch kruhov s priemermi AO a BO). Potom zrejme kolmica na priamku OM v bode M pretína kružnicu k v polrovine ABM, takže na jednej z Tálesových polkružníc nad priemerom AB vytína tetivu, ktorej krajné body môžeme označiť Y a Z tak, aby A, B, Y, Z bolo poradím bodov na kružnici k. Ak je Y' obraz bodu Y na druhej polkružnici v súmernosti podľa priemeru AB, tak pre priesečník X úsečiek AB a $Y'Z$ platí, že trojuholníky XBY a XZA sú podobné podľa vety *uu*. Dôkaz je hotový.

Záver. Hľadanou množinou je vnútro kruhu s priemerom AB a stredom O bez oboch kruhov s priemermi AO a BO (obr. 39).



Obr. 39

A – III – 3

Dotyčných hrán je $7 \cdot 8 = 56$ zvislých a rovnaký počet vodorovných, celkom ich je $56 \cdot 2 = 112$. Pri ľubovoľnom rozrezaní šachovnice vznikne 32 obdĺžničkov 2×1, preto sa každé také rozrezanie týka práve $112 - 32 = 80$ hrán, a prispeje tak do celkového súčtu číslom 80. Výsledný súčet je teda deliteľný číslom 80, takže jeho dekadický zápis končí nulou.

A – III – 4

Pre každé $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ označme p_k počet divákov v k-tom rade. Podmienka úlohy pre dané i a j znamená, že počet známostí medzi divákmi z i-teho a j-teho radu je rovný jp_i. Prehodením úloh čísel i a j zistíme, že ten istý počet sa má rovnať číslu ip_j. Musí teda platiť $jp_i = ip_j$ čiže $p_i : p_j = i : j$. Prichádzame tak k záveru, že počty p_k divákov v jednotlivých radoch nutne spĺňajú podmienku

$$p_1 : p_2 : \ldots : p_n = 1 : 2 : \ldots : n.$$

Ukážeme, že je to aj podmienka postačujúca, teda že pri počtoch $p_k = kd$ pre vhodné celé d sa rozsadení diváci mohli poznať tak, aby podmienka zo zadania úlohy bola splnená. Pre $d = 1$ to tak určite bude, keď sa budú navzájom poznať všetci diváci v kine; pre všeobecné d stačí, aby diváci boli rozdelení na d skupín navzájom sa poznajúcich divákov a aby diváci z každej takej skupiny boli rozsadení do jednotlivých radov rovnako ako v prípade $d = 1$.

Našou úlohou je preto zistiť, pre ktoré $n \geqq 4$ existuje celé kladné číslo d vyhovujúce rovnici

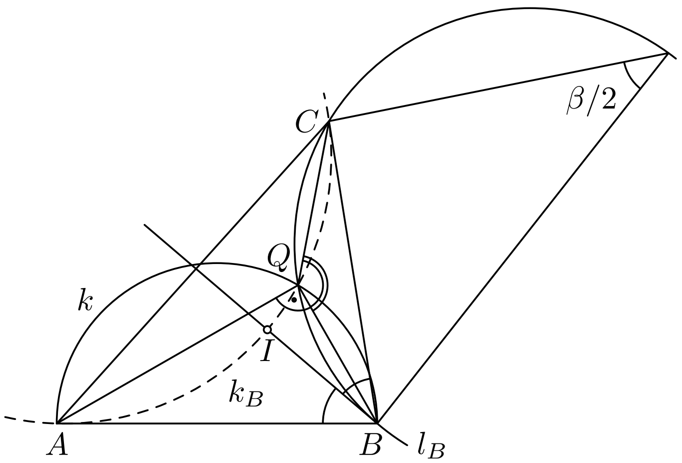
$$d + 2d + \ldots + nd = 234, \quad \text{čiže} \quad dn(n+1) = 468.$$

Hľadáme teda všetky delitele čísla $468 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13$, ktoré sú tvaru $n(n+1)$. Keďže $22 \cdot 23 > 468$, musí platiť $n < 22$, teda $n \in \{4, 6, 9, 12, 13, 18\}$. Vidíme, že vyhovuje jedine $n = 12$ (s príslušným $d = 3$).

Odpoveď. Opísaná situácia mohla nastať jedine pri rozsadení divákov do 12 radov.

A – III – 5

Uvažované kružnice opísané trojuholníkom APC a BQC označme postupne l_A, l_B a všimnime si napríklad druhú z nich (obr. 40, uhly trojuholníka ABC označujeme zvyčajným spôsobom).



Obr. 40

Vysvetlime, že naozaj platí, čo na obrázku vidíme. Predovšetkým bod Q zrejme leží v polrovine BCA, lebo pre body X tamojšieho oblúka BC kružnice l_B sa uhol AXB zväčšuje z (ostrého) uhla γ na (tupý) uhol $180° - \beta/2$, takže nadobúda niekde vnútri oblúka hodnotu $90°$. Keďže úsekový uhol prislúchajúci tomuto oblúku BC kružnice l_B je rovný $\beta/2$, je $|\angle BQC| = 180° - \beta/2$. Odtiaľ $|\angle AQB| + |\angle BQC| = 270° - \beta/2 > 180°$. Preto bod Q leží v polrovine ACB, čiže aj vnútri trojuholníka ABC, konvexný uhol AQC má teda veľkosť $90° + \beta/2$. Ak označíme I stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC, bude mať uhol AIC takú istú veľkosť: $|\angle AIC| = 180° - \alpha/2 - \gamma/2 = 90° + \beta/2$. To však znamená, že bod Q leží na rovnakom oblúku AC kružnice k_B opísanej trojuholníku ACI ako bod I, takže priamka AQ je chordálou kružníc k a k_B.

Druhá uvažovaná priamka BP je analogicky chordálou kružníc k a k_A (ktorá je opísaná trojuholníku BCI). Priesečník oboch priamok AQ a BP má teda rovnakú mocnosť ku kružniciam k_A a k_B, preto leží na ich chordále, ktorou je priamka CI, teda os uhla ACB. Dôkaz je hotový.

Poznámka. Ešte jedným spôsobom vysvetlíme, prečo bod Q leží v polrovine BCA. Priesečník Q kružníc k a l_B zrejme musí ležať v polrovine ABC v uhle ohraničenom dotyčnicami oboch kružníc v bode B. Pritom vrchol C ostrouhlého trojuholníka ABC aj stred S_B kružnice l_B zrejme ležia zvonka kruhu ohraničeného kružnicou k. V trojuholníku BS_BC leží síce časť kružnice k, ale s výnimkou bodov B a C tam určite neleží žiadny iný bod kružnice l_B. Z toho je zrejmé, že bod Q musí ležať v polrovine BCA.

A – III – 6

Jednoduchým dosadením zistíme, že dokazovaná nerovnosť prejde na rovnosť, ak platí aspoň jedna z rovností $a = 0$, $b = 0$ alebo $a = b$. Z ďalšieho postupu vyplynie, že sú to jediné prípady rovnosti.

Vzhľadom na symetriu budeme predpokladať, že platí $a > b > 0$, a postupnými ekvivalentnými úpravami dokážeme ostrú nerovnosť zo zadania, ktorú rovno zapíšeme zbavenú zlomkov:

$$a\sqrt{a^2+1}\sqrt{ab+1} + b\sqrt{b^2+1}\sqrt{ab+1} > (a+b)\sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1}.$$

Teraz roznásobíme pravú stranu zastúpeným súčtom $a + b$ a po preskupení výrazov vyjmeme spoločné činitele:

$$a\sqrt{a^2+1}\big(\sqrt{ab+1} - \sqrt{b^2+1}\big) > b\sqrt{b^2+1}\big(\sqrt{a^2+1} - \sqrt{ab+1}\big)$$

Na ľavej aj pravej strane vystupujú rozdiely odmocnín, rozšírime ich súčtami tých istých odmocnín na zlomky:

$$a\sqrt{a^2+1}\cdot\frac{b(a-b)}{\sqrt{ab+1}+\sqrt{b^2+1}} > b\sqrt{b^2+1}\cdot\frac{a(a-b)}{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{ab+1}}.$$

Obe strany teraz môžeme vydeliť kladným číslom $ab(a-b)$; po následnom odstránení zlomkov dostaneme nerovnosť

$$\sqrt{a^2+1}\big(\sqrt{a^2+1} + \sqrt{ab+1}\big) > \sqrt{b^2+1}\big(\sqrt{b^2+1} + \sqrt{ab+1}\big),$$

ktorej platnosť už vyplýva z porovnania odmocnín na rovnakých miestach oboch strán (vďaka predpokladu $a > b$ totiž platí $\sqrt{a^2+1} > \sqrt{b^2+1}$).

Iné riešenie. Tentoraz z nášho postupu vylúčime iba prípady $a = 0$ a $b = 0$, v ktorých je však dokazovaná nerovnosť triviálna. Budeme teda predpokladať, že čísla a a b sú kladné a zapíšeme pre ne Cauchyho nerovnosť

$$\left(\frac{a}{u} + \frac{b}{v}\right)(au + bv) \geqq (a+b)^2$$

s kladnými koeficientmi $u = \sqrt{b^2+1}$ a $v = \sqrt{a^2+1}$:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+1}}\right)\left(a\sqrt{b^2+1} + b\sqrt{a^2+1}\right) \geqq (a+b)^2. \tag{1}$$

Druhý činiteľ z ľavej strany (1) odhadneme *zhora* podľa inej Cauchyho nerovnosti takto:

$$a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1}=\sqrt{a}\sqrt{ab^2+a}+\sqrt{b}\sqrt{a^2b+b}\leqq$$
$$\leqq\sqrt{a+b}\sqrt{ab^2+a+a^2b+b}=\sqrt{a+b}\sqrt{(a+b)(ab+1)}=(a+b)\sqrt{ab+1}.$$

Pre prvý činiteľ z ľavej strany (1) tak dostávame

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+1}}\geqq\frac{(a+b)^2}{a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1}}\geqq\frac{a+b}{\sqrt{ab+1}},$$

čo sme mali dokázať. Keďže v prvej vypísanej Cauchyho nerovnosti nastáva rovnosť práve vtedy, keď platí $u=v$, čiže $\sqrt{b^2+1}=\sqrt{a^2+1}$, t. j. $a=b$, je posledná rovnosť tretím a posledným prípadom (okrem spomenutých prípadov $a=0$ a $b=0$), kedy v dokazovanej nerovnosti nastáva rovnosť.

Iné riešenie. Vylúčime z úvah zrejmé prípady $a=0$, $b=0$, $a=b$ a dokazovanú ostrú nerovnosť ekvivalentne upravíme na tvar

$$\frac{a}{a+b}\cdot\frac{1}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}>\frac{1}{\sqrt{ab+1}}.$$

Ľavá strana je zrejme ľavou stranou Jensenovej nerovnosti

$$pf(\alpha)+qf(\beta)>f(p\alpha+q\beta) \tag{2}$$

s kladnými koeficientmi $p=a/(a+b)$ a $q=b/(a+b)$ (ktoré, ako vieme, musia spĺňať podmienku $p+q=1$) pre funkciu $f(x)=1/\sqrt{x}$ v bodoch $\alpha=b^2+1$ a $\beta=a^2+1$. Keďže funkcia f je na obore kladných čísel rýdzo konvexná[9] a body α, β sú rôzne vďaka predpokladu $a\neq b$, Jensenova nerovnosť (2) platí. Ostáva sa teda presvedčiť, že aj jej pravá strana sa rovná pravej strane upravenej nerovnosti z úvodu riešenia. To je jednoduché:

$$f(p\alpha+q\beta)=f\Big(\frac{a}{a+b}(b^2+1)+\frac{b}{a+b}(a^2+1)\Big)=$$
$$=f\left(\frac{a+ab^2+b+a^2b}{a+b}\right)=f(ab+1)=\frac{1}{\sqrt{ab+1}}.$$

[9] Graf funkcie $y=x^{-\frac{1}{2}}$ je dobre známy.

Prípravné sústredenia pred IMO a MEMO

Pred medzinárodnou matematickou olympiádou (IMO) a stredoeurópskou matematickou olympiádou (MEMO) sa každoročne koná jedno výberové a jedno prípravné sústredenie pre najlepších riešiteľov celoštátneho kola kategórie A (CK MO). Od 55. ročníka MO sa navyše každoročne koná aj spoločné prípravné sústredenie českého a slovenského IMO-družstva.

Po výberovom sústredení SKMO vyberie 6 najlepších študentov do reprezentačného družstva Slovenska pre IMO a určí jedného náhradníka. Spomedzi tých, ktorí sa nedostali na IMO a zároveň nie sú v maturitnom ročníku (t. j. majú možnosť súťažiť v MO aj nasledujúci školský rok), vyberie SKMO najlepších 6 študentov do družstva pre MEMO. Na výberovom sústredení pred IMO sa zúčastnilo 16 súťažiacich, najúspešnejších riešiteľov tretieho kola MO kategórie A. Sústredenie sa konalo v dňoch 1. – 8. 4. 2014 v Bratislave. Úlohy zadávali bývalí účastníci medzinárodných matematických olympiád a učitelia z FMFI UK Bratislava:

Mgr. Tomáš Kocák, Matúš Stehlík, úlohy 1 – 3,

Mgr. Richard Kollár, PhD., úlohy 4 – 7,

Bc. Michal Hagara, RNDr. Tomáš Jurík, PhD., úlohy 8 – 11,

Filip Hanzely, Mgr. Martin Kollár, PhD., úlohy 12 – 15,

Bc. Filip Sládek, Martin Vodička, úlohy 16 – 18.

Každý deň študenti riešili sériu troch či štyroch úloh pri podobných podmienkach ako na IMO. V poobedňajších hodinách sa konal spoločný rozbor úloh s lektorom. Na konci sústredenia sa získané body za jednotlivé dni sčítali a s prihliadnutím na výsledky tretieho kola MO boli vybrané šesťčlenné družstvá pre účasť na IMO a MEMO.

Výsledky sústredenia:

Bui Truc Lam	64	*Ondrej Bínovský*	21,5
Patrik Bak	53,5	*Ondrej Bohdal*	21,5
Zhen Ning David Liu	51	*Eduard Batmendijn*	21
Samuel Sládek	42,5	*Jozef Rajník*	21
Jakub Dargaj	39,5	*Irena Bačinská*	20,5
Ľudmila Šimková	39	*Henrieta Micheľová*	15,5
Miroslav Psota	34	*Roman Kluvanec*	14,5
Zuzana Frankovská	22	*Silvia Nepšinská*	12

Poradie po zohľadnení výsledkov CK MO:

1.	*Bui Truc Lam*	103	9.	*Zuzana Frankovská*	47
2.	*Patrik Bak*	88,5	10.	*Jozef Rajník*	37
3.	*Zhen Ning David Liu*	85	11.	*Ondrej Bohdal*	35,5
4.	*Miroslav Psota*	57	12.	*Ondrej Bínovský*	34,5
	Ľudmila Šimková	57		*Irena Bačinská*	34,5
6.	*Samuel Sládek*	55,5	14.	*Henrieta Micheľová*	27,5
	Jakub Dargaj	55,5	15.	*Silvia Nepšinská*	25
8.	*Eduard Batmendijn*	49	16.	*Roman Kluvanec*	22,5

Prípravné sústredenie sa konalo v dňoch 2. – 6. 6. 2014 v Bratislave. Sústredenie bolo zamerané obzvlášť na prípravu reprezentačných družstiev na IMO a MEMO. Lektormi boli študenti FMFI UK Bratislava a členovia úlohovej komisie MO:

RNDr. Tomáš Jurík, PhD. (geometria),
Martin Vodička (teória čísel),
Filip Hanzely (nerovnosti),
Bc. Peter Csiba (kombinatorika),
Mgr. Peter Novotný, PhD. (geometria, funkcionálne rovnice, polynómy).

V poradí deviate spoločné sústredenie českého a slovenského družstva sa uskutočnilo v dňoch 15. – 20. 6. 2014 v ČR v Uherskom Hradišti v regionálnom vzdelávacom stredisku Eduha. Sústredenie sa uskutočnilo pod záštitou Společnosti Otakara Borůvky a bolo finančne zabezpečené z neštátnych prostriedkov. Pedagogický dozor slovenským (a na mieste aj českým) študentom robil Martin Vodička z FMFI UK Bratislava. Odborné prednášky viedli

doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., MÚ AV ČR, Brno (teória čísel),
RNDr. Pavel Calábek, CSc., PF UP, Olomouc (algebra),
Mgr. Martin Panák, PhD., MÚ AV ČR, Brno (kombinatorika),
RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., PF UP, Olomouc (syntetická planimetria).

Zadania súťažných úloh výberového sústredenia pred IMO

1. Nech S je konečná množina kladných celých čísel, ktorá má nasledujúcu vlastnosť. Ak x je prvok množiny S, potom aj každý kladný deliteľ čísla x patrí do množiny S. Neprázdna podmnožina T množiny S sa nazýva *dobrá*, ak pre každé x, $y \in T$, $x > y$ je podiel x/y mocninou prvočísla. Neprázdna podmnožina T množiny S sa nazýva *zlá*, ak pre žiadne x, $y \in T$, $x > y$ nie je podiel x/y mocninou prvočísla. Jednoprvkové podmnožiny sú zároveň dobré aj zlé. Nech k je veľkosť najväčšej dobrej podmnožiny množiny S. Ukážte, že k je taktiež najmenší možný počet po dvoch disjunktných zlých podmnožín množiny S, ktorých zjednotením je S.

2. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Nech B_1 je bod na strane AC taký, že B_1B je osou ostrého uhla ABC. Kolmica z bodu B_1 na stranu BC pretne kratší oblúk BC kružnice opísanej trojuholníku ABC v bode K. Kolmica z bodu B na AK pretína AC v bode L. Priamka B_1B pretína oblúk AC v bode M rôznom od B. Dokážte, že body K, L, M ležia na jednej priamke.

3. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že

$$f(f(x) - y) = f(x) + f(f(y) - f(-x)) + x$$

pre všetky x, $y \in \mathbb{R}$.

4. Body A_1, B_1 a C_1 ležia po rade vo vnútri strán BC, CA a AB trojuholníka ABC. Označme po rade A_0, B_0 a C_0 priesečníky $BB_1 \cap CC_1$, $CC_1 \cap AA_1$ a $AA_1 \cap BB_1$. Dokážte, že ak štyri trojuholníky CB_1A_0, AC_1B_0, BA_1C_0 a $A_0B_0C_0$ majú rovnaký obsah rovný jednej, tak aj tri štvoruholníky $AB_0A_0B_1$, $BC_0B_0C_1$ a $CA_0C_0A_1$ majú rovnaký obsah. Nájdite jeho veľkosť.

5. Označme α, β, γ uhly trojuholníka ABC. Dokážte, že ak platí

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma} = \sqrt{3},$$

tak potom má jeden z uhlov trojuholníka ABC veľkosť $60°$.

6. Dokážte, že každé prirodzené číslo k možno jediným spôsobom vyjadriť v tvare

$$k = b_1 \cdot 1! + b_2 \cdot 2! + \ldots + b_n \cdot n!,$$

kde b_j, $j = 1, \ldots, n$, sú celé čísla, pre ktoré platí $0 \leqq b_j \leqq j$, $b_n \neq 0$.

7. O postupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_{2014}$ je známe, že

$$|a_1| = 1 \qquad \text{a} \qquad |a_{k+1}| = |a_k + 1| \quad \text{pre každé } k = 1, \ldots, 2013.$$

Nájdite najmenšiu možnú hodnotu výrazu $|a_1 + a_2 + \ldots + a_{2013}|$.

8. Pre každé prirodzené číslo $k > 1$ nájdite najmenšie prirodzené číslo $m > 1$ také, že existuje polynóm $P(x)$ s celočíselnými koeficientmi a vlastnosťami:
- $P(x) - 1$ má aspoň jeden celočíselný koreň,
- $P(x) - m$ má presne k celočíselných koreňov.

9. Na priamke AC trojuholníka ABC zvolíme body M a N tak, aby $|AM| = |AB|$, $|CN| = |BC|$ a body sú na priamke v poradí M, A, C, N. Kružnice opísané trojuholníkom BCM a ABN sa pretínajú v bodoch B a K. Dokážte, že BK je osou uhla ABC.

10. Pre nezáporné čísla a, b, c so súčtom 5 nájdite maximum výrazu $a^4b+b^4c+c^4a$.

11. Na nekonečnej šachovnici máme vyznačených 100 políčok, po ktorých sa môže pohybovať veža. Medzi každou dvojicou vyznačených políčok sa dá dostať konečným počtom ťahov vežou. (Vežou môžeme ťahať medzi ľubovoľnými dvoma vyznačenými políčkami v rovnakom riadku alebo stĺpci.) Dokážte, že vieme vyznačené políčka rozdeliť na 50 dvojíc tak, že políčka každej dvojice ležia v rovnakom riadku alebo stĺpci.

12. Radikálom prirodzeného čísla N (ktorý sa označuje $\operatorname{rad}(N)$) sa nazýva súčin všetkých prvočíselných deliteľov čísla N, ktoré sa berú v prvej mocnine. Napríklad $\operatorname{rad}(120) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Existuje taká trojica po dvoch nesúdeliteľných prirodzených čísel A, B, C, že platí $A + B = C$ a tiež $C > 1000 \cdot \operatorname{rad}(ABC)$?

13. Na stranách AD a CD rovnobežníka $ABCD$ so stredom S zvolíme postupne také body P, Q aby platilo $|\sphericalangle ASP| = |\sphericalangle CSQ| = |\sphericalangle ABC|$. Dokážte, že
 a) uhly ABP a CBQ sú zhodné,
 b) priamky AQ a CP sa pretínajú na kružnici opísanej trojuholníku ABC.

14. Pre reálne po dvoch rôzne a, b, c dokážte nerovnosť

$$\left|\frac{a+b}{a-b}\right| + \left|\frac{a+c}{a-c}\right| + \left|\frac{c+b}{c-b}\right| \geqq 2$$

a zistite kedy nastáva rovnosť.

15. Máme štvorcovú tabuľku 2014×2014, ktorá je ako torus. Vpíšeme do nej čísla od 1 po 2014^2, každé práve raz. Nájdite najväčšie také M, že vždy existuje dvojica susedných políčok (hranou) líšiaca sa aspoň o M.

16. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že pre všetky $a, b \in \mathbb{N}$ platí

$$a^2 + f(b) \mid af(a) + b.$$

17. Daný je trojuholník ABC taký, že $|\sphericalangle ABC| > |\sphericalangle BCA|$. Nech P, Q sú také dva rôzne body na priamke AC, že $|\sphericalangle QBA| = |\sphericalangle PBA| = |\sphericalangle BCA|$ a A leží medzi P a C. Predpokladajme, že vnútri úsečky BQ existuje bod D taký, že $|PB| = |PD|$. Označme R priesečník polpriamky AD a kružnice opísanej trojuholníku ABC rôzny od A. Dokážte, že $|QB| = |QR|$.

18. Šialený vedec zostrojil armádu robotov. Problém je v tom, že niektoré dvojice robotov sa nenávidia (nenávisť je vzájomná). Vždy však s robotmi vie urobiť jednu z nasledujúcich dvoch operácií:
 i) Ak nejaký robot nenávidí nepárny počet robotov, vedec ho môže zničiť.
 ii) Vedec môže zdvojnásobiť armádu tak, že každý robot R sa rozdelí na dvoch robotov R_1 a R_2. Pre každú dvojicu pôvodných robotov R, Q, ktorí sa nenávideli, sa budú nenávidieť roboti R_1, Q_1 aj roboti R_2 a Q_2. Roboti R_1 a R_2 sa tiež nenávidia pre každého pôvodného robota R. To sú všetky dvojice robotov, ktoré sa budú nenávidieť po zdvojnásobení.

Dokážte, že vedec vie po konečnom počte operácií dostať armádu robotov, v ktorej neexistuje dvojica robotov, ktorá sa nenávidí.

3. Česko-poľsko-slovenské stretnutie juniorov

Aj tretí ročník tejto novej súťaže zorganizovalo Poľsko, a to v rekreačnom zariadení Gronik v blízkosti obce Szczyrk v termíne 12. – 15. 5. 2014. Za Slovensko sa zúčastnili šiesti študenti, ktorých SKMO vybrala na základe výsledkov krajského kola v kategórii C:

Pavol Drotár, Gymnázium Poštová, Košice,

Juraj Halabrin, Gymnázium Jura Hronca, Bratislava,

Jozef Lipták, Gymnázium J. G. Tajovského, Banská Bystrica,

Filip Kulla, Bilingválne gymn. M. Hodžu, Sučany,

Jakub Mach, Gymnázium Poštová, Košice,

Pavol Petruš, Gymnázium Poštová, Košice.

Ako vedúci ich sprevádzali Mgr. Peter Novotný, PhD., Mgr. Erika Novotná, PhD. a Martin Vodička.

Samotná súťaž mala rovnako ako predošlé roky dve časti – súťaž jednotlivcov a súťaž družstiev. V tabuľkách uvádzame výsledky oboch súťaží, plný počet za každú úlohu bol 5 bodov. Najlepší v oboch súťažiach získali hodnotné vecné ceny.

Prehľad výsledkov:

Por.	Meno	Štát	1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$
1.	Mariusz Trela	Poľsko	5	2	2	4	4	17
2.	Radomił Baran	Poľsko	5	4	5	2	0	16
	Maciej Maruszczak	Poľsko	5	0	2	5	4	16
4.	Jakub Różycki	Poľsko	5	4	3	0	2	14
	Jáchym Solecký	Česká rep.	5	0	0	5	4	14
6.	Ondřej Motlíček	Česká rep.	5	4	0	0	3	12
	Philip Smolenski-Jensen	Poľsko	5	3	2	0	2	12
8.	Tomasz Grześkiewicz	Poľsko	5	0	1	0	5	11
9.	*Juraj Halabrin*	Slovensko	5	3	1	0	0	9
	Lenka Kopfová	Česká rep.	5	0	2	0	2	9
	Pavol Petruš	Slovensko	5	0	1	0	3	9
12.	*Jozef Lipták*	Slovensko	4	4	0	0	0	8
13.	*Jakub Mach*	Slovensko	4	0	1	0	2	7
14.	Petr Zelina	Česká rep.	5	0	1	0	0	6
15.	*Pavol Drotár*	Slovensko	5	0	0	0	0	5
	Václav Steinhauser	Česká rep.	5	0	0	0	0	5
	Barbora Výborová	Česká rep.	5	0	0	0	0	5
18.	*Filip Kulla*	Slovensko	0	0	0	0	1	1

Por.	Zloženie družstva	Štát	1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$
1.	Jáchym Solecký Mariusz Trela *Pavol Petruš*	Česká rep. Poľsko Slovensko	3	5	5	0	5	0	18
2.	Barbora Výborová Radomił Baran *Jakub Mach*	Česká rep. Poľsko Slovensko	3	5	4	0	0	0	12
	Lenka Kopfová Tomasz Grześkiewicz *Juraj Halabrin*	Česká rep. Poľsko Slovensko	2	5	5	0	0	0	12
	Ondřej Motlíček Maciej Maruszczak *Pavol Drotár*	Česká rep. Poľsko Slovensko	3	5	4	0	0	0	12
5.	Petr Zelina Philip Smolenski-Jensen *Filip Kulla*	Česká rep. Poľsko Slovensko	3	4	3	0	0	0	10
	Václav Steinhauser Jakub Różycki *Jozef Lipták*	Česká rep. Poľsko Slovensko	3	0	5	0	0	2	10

Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia juniorov

Súťaž jednotlivcov

Úloha 1.
V rovine sú dané kružnice k, l, ktoré sa pretínajú v bodoch C a D. Kružnica k prechádza stredom L kružnice l. Uvažujme ľubovoľnú priamku prechádzajúcu bodom D, ktorá pretína kružnice k, l postupne v bodoch A, B, pričom D leží vnútri úsečky AB. Dokážte, že $|AB| = |AC|$. (*Česká rep.*)

Úloha 2.
V obore reálnych čísel vyriešte rovnicu $a + b + 4 = 4\sqrt{a\sqrt{b}}$. (*Poľsko*)

Úloha 3.
K dispozícii máme 10 rovnakých dlaždíc; jedna z nich je zobrazená na obrázku nižšie. Dlaždice možno otáčať v rovine ale nesmieme ich preklopiť na opačnú stranu. Plochu 7×7 chceme pokryť týmito dlaždicami takým spôsobom, že práve jeden jednotkový štvorček je pokrytý dvoma dlaždicami a všetky ostatné jednotkové štvorčeky sú pokryté práve jednou dlaždicou. Určte všetky jednotkové štvorčeky, ktoré môžu byť pokryté dvoma dlaždicami. (*Poľsko*)

Úloha 4.
Číslo a_n vzniklo napísaním všetkých čísel 1, 2, …, n za sebou (napríklad $a_3 = 123$, $a_{11} = 1234567891011$ a pod.). Pre aký najmenší index t platí $11 \mid a_t$? (*Patrik Bak*)

Úloha 5.
Daný je štvorec. Rezmi v podobe priamok ho rozdelíme na n mnohouholníkov. Aký je najväčší možný súčet vnútorných uhlov všetkých mnohouholníkov? (*Ján Mazák*)

Súťaž družstiev

Úloha 1.
Množinu $\{1, 2, 3, \dots, 63\}$ sme rozdelili na tri neprázdne disjunktné množiny, vypočítali sme súčin všetkých čísel v každej množine a napokon sme určili najväčšieho spoločného deliteľa uvedených troch súčinov. Aký najväčší možný výsledok sme mohli dostať? (*Peter Novotný*)

Úloha 2.
V rovnobežníku $ABCD$ platí $|\measuredangle BAD| < 90^\circ$ a $|AB| > |BC|$. Os uhla BAD pretína úsečku CD v bode P a polpriamku opačnú k CB v bode Q. Dokážte, že stred kružnice opísanej trojuholníku CPQ je rovnako vzdialený od bodov B a D. (*Patrik Bak*)

Úloha 3.
Znajdź wszystkie liczby całkowite n o tej własności, że

$$|n^3 - 4n^2 + 3n - 35| \quad \text{oraz} \quad |n^2 + 4n + 8|$$

są liczbami pierwszymi. (*Česká rep.*)

Úloha 4.
Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta ostrokątnego ABC. Okrąg o środku w punkcie M przechodzący przez punkt C przecina proste AC i BC po raz drugi odpowiednio w punktach P i Q. Punkt R należący do odcinka AB jest taki, że trójkąty APR i BQR mają równe pola. Wykaż, że proste PQ i CR są prostopadłe. (*Poľsko*)

Úloha 5.
Na tabuli je na počátku napsáno číslo 1. Pokud je na tabuli napsáno číslo a, pak na ni můžeme napsat rovněž přirozené číslo b takové, že $a+b+1$ je dělitelem čísla $a^2 + b^2 + 1$. Rozhodněte, zda se na tabuli po jistém čase může objevit kterékoliv předem dané přirozené číslo. Svou odpověď zdůvodněte. (*Poľsko*)

Úloha 6.
Určete největší a nejmenší hodnotu zlomku

$$F = \frac{y - x}{x + 4y},$$

jestliže reálná čísla x a y vyhovují rovnici $x^2y^2 + xy + 1 = 3y^2$. (*Česká rep.*)

14. Česko-poľsko-slovenské stretnutie

V rámci záverečnej prípravy pred IMO sa uskutočnilo po 14. krát prípravné stretnutie medzi družstvami Českej republiky, Poľska a Slovenska. Jednotlivé krajiny reprezentovali šestice študentov, ktorí si vybojovali vo svojich krajinách účasť na 55. IMO v Južnej Afrike, prípadne náhradníci.

Súťaž sa konala 22. – 25. 6. 2014 v Mszane Dolnej v Poľsku, teda na mieste, kde bolo predošlé dva roky Česko-poľsko-slovenské stretnutie juniorov. Organizácia a priebeh súťaže boli tradične prispôsobené štýlu celoštátneho kola MO a podmienkam IMO. Súťažiacim boli počas dvoch dní predložené dve trojice súťažných úloh, pričom za každú správnu úlohu mohli získať najviac 7 bodov, t. j. celkove 42 bodov (rovnako ako na IMO). Na každú trojicu úloh mali súťažiaci vymedzené 4,5 hodiny čistého času.

Opravu riešení zabezpečila medzinárodná porota, v ktorej Slovensko zastupovali Mgr. Erika Novotná, PhD. a Mgr. Peter Novotný, PhD. Slovensku sa nepodarilo zopakovať vlaňajší úspech – naši žiaci v súčte zaostali ako za poľskými, tak za českými účastníkmi (čiastočne kvôli tomu, že víťaz celoštátneho kola Bui Truc Lam v čase stretnutia bol na Stredoeurópskej olympiáde v informatike).

Prehľad výsledkov:

Por.	Meno	Štát	1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$
1.	Jan Gwinner	Poľsko	4	4	7	7	7	7	36
2.	Kamil Rychlewicz	Poľsko	7	7	0	7	7	7	35
3.	Konrad Jan Paluszek	Poľsko	7	6	7	6	7	0	33
4.	Karol Kaszuba	Poľsko	7	7	0	7	7	2	30
5.	Radovan Švarc	Česká rep.	7	2	7	6	7	0	29
6.	*Patrik Bak*	Slovensko	7	1	7	7	6	0	28
	Zhen Ning David Liu	Slovensko	1	1	5	7	7	7	28
8.	Mikołaj Leonarski	Poľsko	6	1	7	7	5	0	26
9.	Filip Bialas	Česká rep.	4	0	0	2	7	7	20
	Adam Klukowski	Poľsko	6	7	0	0	7	0	20
	Pavel Turek	Česká rep.	7	7	0	3	3	0	20
12.	Viktor Němeček	Česká rep.	0	7	1	5	3	0	16
13.	Martin Hora	Česká rep.	4	1	1	2	7	0	15
14.	*Jakub Dargaj*	Slovensko	0	7	0	0	6	0	13
15.	*Miroslav Psota*	Slovensko	0	1	0	2	7	0	10
16.	Tomáš Novotný	Česká rep.	2	1	1	2	2	0	8
17.	*Samuel Sládek*	Slovensko	1	1	0	0	3	0	5
18.	*Ľudmila Šimková*	Slovensko	0	0	0	2	0	0	2

Štát	1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$
Česká rep.	24	18	10	20	29	7	108
Poľsko	37	32	21	34	40	16	180
Slovensko	9	11	12	18	29	7	86

Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia

Úloha 1.
Dokážte, že kladné reálne čísla a, b, c spĺňajú rovnicu

$$a^4 + b^4 + c^4 + 4a^2b^2c^2 = 2\bigl(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2\bigr)$$

práve vtedy, keď existuje trojuholník ABC s vnútornými uhlami α, β, γ takými, že $\sin\alpha = a$, $\sin\beta = b$ a $\sin\gamma = c$. (*Jaromír Šimša*)

Úloha 2.
Pre dané kladné celé čísla a, b, x_1 zostavíme postupnosť čísel $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ spĺňajúcich vzťah $x_n = ax_{n-1} + b$ pre každé $n \geqq 2$. Určte podmienku na zadané čísla a, b a x_1, ktorá je nutná a postačujúca na to, aby pre všetky indexy m, n platila implikácia $m \mid n \Rightarrow$ $\Rightarrow x_m \mid x_n$. (*Jaromír Šimša*)

Úloha 3.
Daný je konvexný štvoruholník $ABCD$, pričom $|\measuredangle ABC| = |\measuredangle ADC| = 135^\circ$. Na polpriamkach AB, AD sú postupne zvolené také body M, N, že $|\measuredangle MCD| = |\measuredangle NCB| =$ $= 90^\circ$. Kružnice opísané trojuholníkom AMN a ABD sa druhýkrát pretínajú v bode $K \neq A$. Dokážte, že priamky AK a KC sú navzájom kolmé. (*Irán*)

Úloha 4.
Daný je trojuholník ABC, pričom P je stred strany AC. Kružnica k pretína úsečky AP, CP, BC, AB postupne v ich vnútorných bodoch K, L, M, N. Označme S stred KL. Nech platí

$$2\cdot|AN|\cdot|AB|\cdot|CL| = 2\cdot|CM|\cdot|BC|\cdot|AK| = |AC|\cdot|AK|\cdot|CL|.$$

Dokážte, že ak $P \neq S$, tak priesečník priamok KN a ML leží na osi úsečky PS.
(*Ján Mazák*)

Úloha 5.
Určte všetky kladné celé čísla n spĺňajúce nasledujúcu podmienku: pre každé nezáporné celé čísla k, m také, že $k+m \leqq n$, dávajú čísla $\binom{n-k}{m}$ a $\binom{n-m}{k}$ rovnaký zvyšok po delení dvoma. (*Poľsko*)

Úloha 6.
Nech $n \geqq 6$ je celé číslo a $\mathcal{F}$ je systém 3-prvkových podmnožín množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ spĺňajúci nasledujúcu podmienku: pre každé $1 \leqq i < j \leqq n$ existuje aspoň $\lfloor \frac{1}{3}n \rfloor - 1$ podmnožín $\mathsf{A} \in \mathcal{F}$ takých, že $i, j \in \mathsf{A}$. Dokážte, že pre niektoré celé číslo $m \geqq 1$ existujú navzájom disjunktné podmnožiny $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_m \in \mathcal{F}$ také, že

$$|\mathsf{A}_1 \cup \mathsf{A}_2 \cup \ldots \cup \mathsf{A}_m| \geqq n - 5.$$

(*Poľsko*)

Riešenia úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia

Úloha 1.
V prvej časti riešenia uvažujme ľubovoľný trojuholník ABC s vnútornými uhlami α, β, γ. Vďaka sínusovej vete ho prípadnou podobnosťou môžeme zmeniť tak, aby dĺžky jeho strán boli priamo kladné čísla a, b, c rovné sínusom jeho vnútorných uhlov, teda

$$a = \sin\alpha, \quad b = \sin\beta \quad \text{a} \quad c = \sin\gamma.$$

Podľa kosínusovej vety pre tieto čísla platí rovnosť, ktorú budeme hneď upravovať, až dostaneme rovnosť zo zadania úlohy:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot (\pm\sqrt{1-a^2}), \\ 2bc \cdot (\pm\sqrt{1-a^2}) &= b^2 + c^2 - a^2, \quad /^2 \\ 4b^2c^2(1-a^2) &= \bigl(b^2 + c^2 - a^2\bigr)^2, \\ 4b^2c^2 - 4a^2b^2c^2 &= a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2, \\ a^4 + b^4 + c^4 + 4a^2b^2c^2 &= 2\bigl(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2\bigr). \end{aligned}$$

V druhej časti riešenia predpokladajme, že a, b, c sú pevné kladné čísla spĺňajúce zadanú rovnicu. Opačným postupom ako v prvej časti riešenia ju upravíme na tvar

$$4b^2c^2\bigl(1-a^2\bigr) = \bigl(b^2 + c^2 - a^2\bigr)^2.$$

Z toho vyplýva, že číslo a (kladné podľa zadaného predpokladu) je nanajvýš rovné 1. Existuje preto $\alpha \in (0, \pi)$ také, že $\sin\alpha = a$ a že upravenú rovnicu možno po odmocnení zapísať v tvare

$$2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2.$$

Ak teda zostrojíme podľa vety *sus* trojuholník ABC, v ktorom $|AC| = b$, $|AB| = c$ a $|\angle BAC| = \alpha$, bude v ňom vďaka kosínusovej vete podľa predchádzajúcej rovnosti platiť $|BC| = a$, takže potom z ďalších dvoch podobných dôsledkov zadanej rovnice

$$4a^2c^2\bigl(1-b^2\bigr) = \bigl(a^2 + c^2 - b^2\bigr)^2 \quad \text{a} \quad 4a^2b^2\bigl(1-c^2\bigr) = \bigl(a^2 + b^2 - c^2\bigr)^2$$

vyplýva, že pre vnútorné uhly α, β, γ takého trojuholníka ABC bude platiť nielen $\sin\alpha = a$ (pozri vyššie), ale aj $\cos^2\beta = 1 - b^2$ a $\cos^2\gamma = 1 - c^2$, čiže $\sin\beta = b$ a $\sin\gamma = c$.

Iné riešenie. (Podľa *Patrika Baka.*) Uvedenú rovnosť možno ekvivalentne upraviť na tvar

$$4a^2b^2c^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a). \tag{1}$$

Nech pre kladné čísla a, b, c platí táto rovnosť. Vzhľadom na symetriu môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $a \geqq b \geqq c$. Prvé tri činitele na pravej strane v (1) sú podľa našich predpokladov kladné a keďže ľavá strana je tiež kladná, musí byť kladný aj štvrtý činiteľ. Čísla a, b, c teda spĺňajú trojuholníkové nerovnosti a existuje trojuholník ABC so stranami a, b, c. Pre jeho obsah S podľa Herónovho vzorca platí

$$16S^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a), \tag{2}$$

odkiaľ spojením s (1) máme $4a^2b^2c^2 = 16S^2$, čiže $abc = 2S$. Ak označíme r polomer kružnice opísanej trojuholníku ABC, podľa známeho vzťahu platí $r = abc/(4S)$, a preto $r = \frac{1}{2}$. Zároveň však $r = a/(2\sin\alpha)$, a teda $a = \sin\alpha$. Analogicky dostaneme $b = \sin\beta$ a $c = \sin\gamma$.

Pre dôkaz opačnej implikácie predpokladajme, že trojuholník ABC má strany a uhly spĺňajúce $a = \sin\alpha$, $b = \sin\beta$ a $c = \sin\gamma$. Potom použitím označenia a známych vzťahov z predošlého odseku dostaneme $r = \frac{1}{2}$ a $abc = 2S$, odkiaľ po umocnení a použití vzorca (2) dostaneme želanú rovnosť (1).

Úloha 2.
Ukážeme, že hľadanou podmienkou je rovnosť $x_1 = b$. V priebehu riešenia využijeme jednoduchý poznatok, že všeobecný člen x_n skúmaných postupností má vyjadrenie

$$x_n = a^{n-1}x_1 + \bigl(a^{n-2} + a^{n-3} + \ldots + a + 1\bigr)b. \tag{1}$$

V prvej časti riešenia odvodíme rovnosť $x_1 = b$ z predpokladu, že pre každé $n \geqq 1$ platí $x_n \mid x_{2n}$ (využijeme teda len časť zo všetkých implikácií zo zadania úlohy). Keďže vzorec (1) pre skrátenú postupnosť $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$ vedie na vyjadrenie

$$x_{2n} = a^n x_n + \bigl(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1\bigr)b,$$

pre podiel x_{2n}/x_n z posledného vzťahu vyplýva

$$\frac{x_{2n}}{x_n} = a^n + \frac{\bigl(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1\bigr)b}{x_n}. \tag{2}$$

Špeciálne pre $n = 1$ tak dostávame nutnú podmienku $x_1 \mid b$. Potrebnú podmienku $x_1 = b$ odvodíme, keď pripustíme, že platí $x_1 < b$, a z toho dôjdeme k sporu. Uvažujme čísla

$$y_n = \bigl(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1\bigr)b$$

z čitateľa zlomku na pravej strane (2), ktoré ako čísla x_n spĺňajú rekurentný vzťah $y_{n+1} = ay_n + b$. Podľa vzorca (1) potom v prípade $x_1 < b$ platí pre každé n nerovnosť $x_n < y_n$, pričom podľa (2) sú všetky podiely y_n/x_n celočíselné a tvoria klesajúcu postupnosť, pretože

$$\frac{y_n}{x_n} - \frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} = \frac{y_n}{x_n} - \frac{ay_n + b}{ax_n + b} = \frac{b(y_n - x_n)}{x_n(ax_n + b)} > 0. \tag{3}$$

Dostali sme nekonečnú klesajúcu postupnosť celých čísel väčších ako 1, a to je avizovaný spor. Rovnosť $x_1 = b$ je tak dokázaná.

V druhej jednoduchšej časti riešenia ukážeme, že v prípade $x_1 = b$ platia všetky implikácie zo zadania úlohy. Využijeme pritom opäť vzorec (1), podľa ktorého v prípade $a = 1$ po dosadení $x_1 = b$ dostaneme pre každé n vyjadrenie $x_n = nb$, zatiaľ čo v prípade $a > 1$ vychádza vzorec

$$x_n = \frac{(a^n - 1)b}{a - 1}.$$

Všetky dokazované implikácie tak sú v prípade $a = 1$ úplne triviálne, zatiaľ čo v prípade $a > 1$ sú zrejmým dôsledkom známeho pravidla

$$m \mid n \quad \Longrightarrow \quad a^m - 1 \mid a^n - 1,$$

ktoré pre $n = km$ vyplýva z algebraického vzorca

$$a^{km} - 1 = \bigl(a^m - 1\bigr)\bigl(a^{(k-1)m} + a^{(k-2)m} + \ldots + a + 1\bigr).$$

Poznámka. Tvrdenie, že všetky zlomky z pravých strán (2), teda zlomky

$$\frac{y_n}{x_n} = \frac{\bigl(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1\bigr)b}{a^{n-1}x_1 + \bigl(a^{n-2} + a^{n-3} + \ldots + a + 1\bigr)b},$$

sú celočíselné jedine v prípade $x_1 = b$, možno odvodiť aj z poznatku, že také zlomky majú pre $n \to \infty$ limitu

$$\frac{ab}{(a-1)x_1 + b}$$

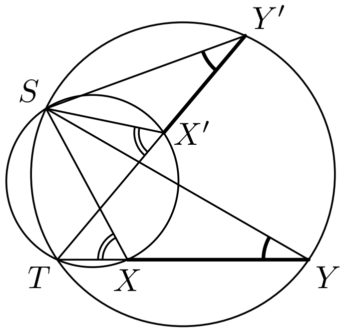
(rutinný výpočet tu neuvádzame), a preto kvôli ich celočíselnosti musí pre všetky dostatočne veľké n platiť rovnosť $y_{n+1}/x_{n+1} = y_n/x_n$, ktorá podľa úpravy (3) platí, len keď je $y_n = x_n$, a teda $x_1 = b$.

Úloha 3.

(Podľa *Patrika Baka.*) Pripomeňme si najskôr jedno známe tvrdenie o *špirálovej podobnosti* (t. j. o zobrazení, ktoré je zložením rovnoľahlosti a otočenia s rovnakým stredom).

Tvrdenie. Majme úsečky XY a $X'Y'$, ktoré nie sú rovnobežné. Prienik priamok XY a $X'Y'$ označme T. Potom stredom špirálovej podobnosti, ktorá úsečku XY zobrazí na úsečku $X'Y'$, je priesečník kružníc opísaných trojuholníkom XTX' a YTY' rôzny od bodu T.[10]

[10] Tvrdenie neuvádzame v presnej forme: V špeciálnych prípadoch sa môže stať, že bod T splýva s niektorým z krajných bodov daných úsečiek, prípadne uvedené kružnice nemajú iný spoločný bod ako T.

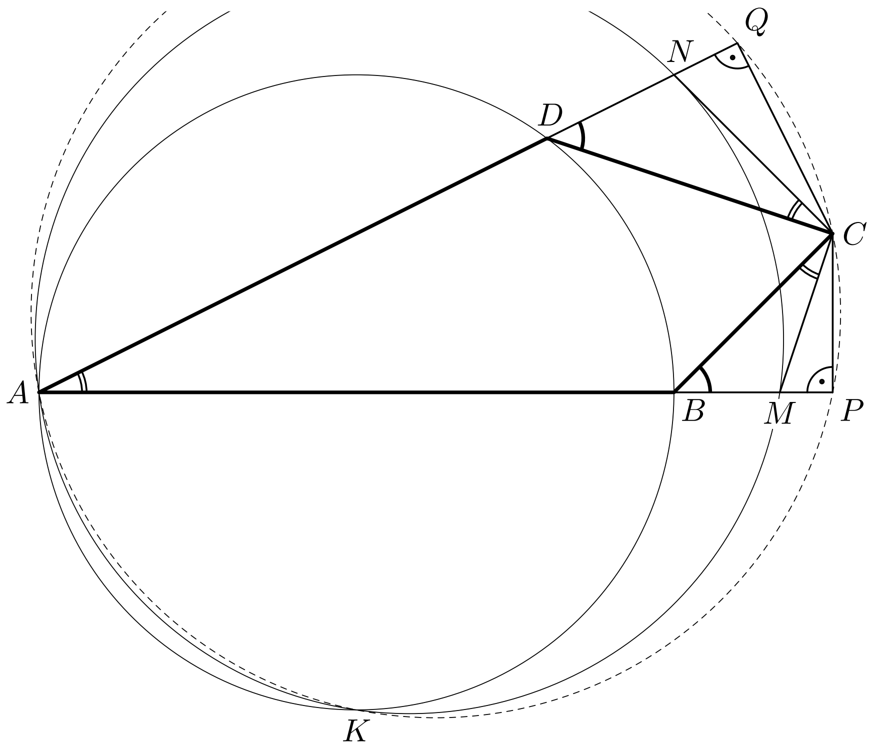


Obr. 41

Dôkaz. Uvedieme dôkaz len pre konfiguráciu ako na obr. 41. Priesečník kružníc, o ktorom dokazujeme, že je stredom špirálovej podobnosti, označme S. Stačí ukázať podobnosť trojuholníkov XSY a $X'SY'$. Tá vyplýva jednoducho z obvodových uhlov:

$$|\measuredangle XYS| = |\measuredangle TYS| = |\measuredangle TY'S| = |\measuredangle X'Y'S|,$$
$$|\measuredangle SXY| = 180° - |\measuredangle SXT| = 180° - |\measuredangle SX'T| = |\measuredangle SX'Y'|.$$

Prejdime k riešeniu samotnej úlohy. Keďže súčet vnútorných uhlov v štvoruholníku je $360°$, zo zadania vyplýva $|\measuredangle BAD| + |\measuredangle BCD| = 90°$ a $|\measuredangle MBC| = |\measuredangle NDC| = 45°$. Potom $|\measuredangle BCM| = 90° - |\measuredangle BCD| = |\measuredangle BAD|$ a podobne dostaneme $|\measuredangle DCN| = |\measuredangle BAD|$. Takže trojuholníky BMC a DNC sú podobné (obr. 42). Päty kolmíc z bodu C na



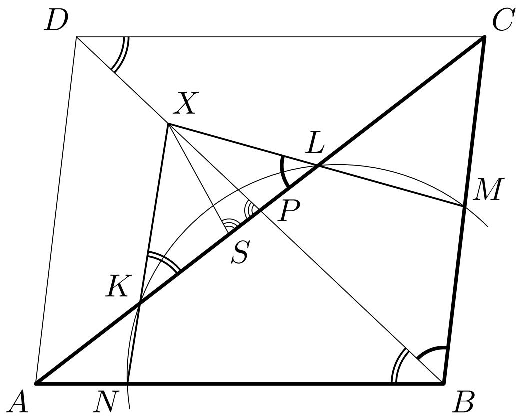
Obr. 42

priamky AB a AD označme postupne P a Q. Aj trojuholníky BPC a DQC sú podobné, preto $|BM| : |BP| = |DN| : |DQ|$.

Uvažujme špirálovú podobnosť $\mathcal{S}$, ktorá zobrazí úsečku BM na DN. Podľa tvrdenia z úvodu je jej stredom práve bod K. Avšak vzhľadom na odvodený pomer zobrazuje $\mathcal{S}$ úsečku BP na DQ. Preto (opäť podľa tvrdenia z úvodu) bod K leží na kružnici opísanej trojuholníku APQ, čo je Tálesova kružnica nad priemerom AC, takže uhol AKC je pravý.

Úloha 4.

Označme D obraz bodu B v stredovej súmernosti so stredom v P (potom $ABCD$ je rovnobežník). Z rovnosti $2|AN| \cdot |AB| \cdot |CL| = |AC| \cdot |AK| \cdot |CL|$ máme $|AN| \cdot |AB| = \frac{1}{2}|AC| \cdot |AK|$, takže štvoruholník $KPBN$ je tetivový. Podobne aj štvoruholník $LPBM$ je tetivový. Keďže štvoruholník $KLMN$ je tiež tetivový, sú priamky KN, BP a LM chordálami dvojíc kružníc opísaných uvedeným tetivovým štvoruholníkom. Preto priesečník X priamok KN a ML leží na priamke BD (obr. 43).



Obr. 43

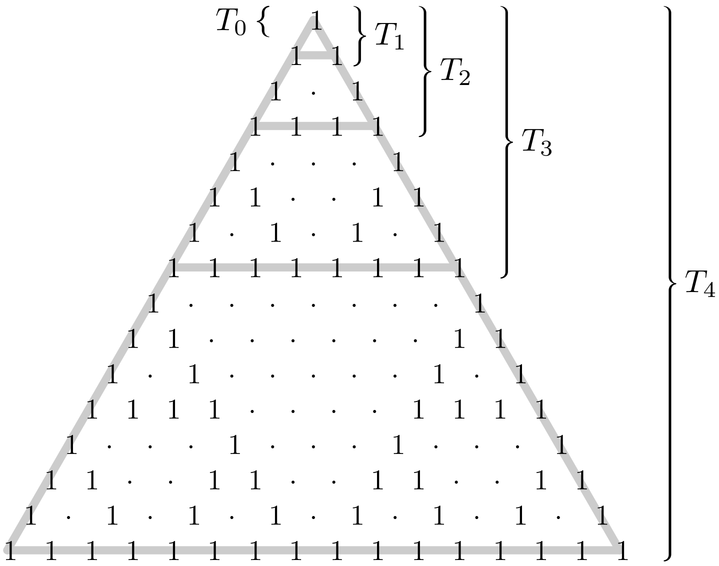
Z tetivovosti uvedených štvoruholníkov vyplýva zhodnosť uhlov CBD a KLX; podobne uhly CDB, ABD a LKX sú zhodné. Podľa vety *uu* je trojuholník KLX podobný s trojuholníkom DBC. Uhly XSP a XPS musia byť rovnaké, lebo sú to uhly, ktoré zvierajú zodpovedajúce si ťažnice so stranami v podobných trojuholníkoch (to platí ako pre konfiguráciu, keď bod S leží na úsečke AP, tak pre konfiguráciu, keď leží na úsečke CP, argumentácia je takmer rovnaká). Preto bod X leží na osi úsečky PS.

Úloha 5.

(Podľa *Miroslava Psotu.*) V riešení budeme pracovať s Pascalovým trojuholníkom, teda so zápisom kombinačných čísel do nasledovnej (nekonečnej) schémy:

$$\begin{array}{c} \binom{0}{0} \\ \binom{1}{0} \ \binom{1}{1} \\ \binom{2}{0} \ \binom{2}{1} \ \binom{2}{2} \\ \binom{3}{0} \ \binom{3}{1} \ \binom{3}{2} \ \binom{3}{3} \\ \dots \end{array}$$

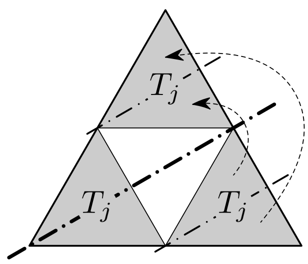
Vieme, že každé číslo v tejto schéme (okrem čísel 1 na začiatku a na konci každého riadka) je rovné súčtu dvoch čísel bezprostredne nad ním. Ak v Pascalovom trojuholníku každé číslo nahradíme jeho zvyškom po delení dvoma, t. j. nulou alebo jednotkou podľa parity čísla, uvedené pravidlo spôsobí, že ak vedľa seba budú dva rovnaké zvyšky, pod nimi bude 0 a ak vedľa seba budú dva rôzne zvyšky, pod nimi bude 1. Prvých niekoľko riadkov vyzerá takto (kvôli prehľadnosti nuly znázorňujeme bodkami):



Nech T_j označuje trojuholník vytvorený z prvých 2^j riadkov takéhoto „zvyškového“ Pascalovho trojuholníka (t. j. riadkov pochádzajúcich z kombinačných čísel $\binom{i}{l}$ pre $i = 0, 1, \ldots, 2^j - 1$). Ľahko možno nahliadnuť a matematickou indukciou dokázať, že T_{j+1} sa skladá z troch kópií T_j vo vrcholoch a „otočeného“ trojuholníka zloženého zo samých núl v strede.

Predpokladajme, že n spĺňa podmienky zadania. Voľbou $m = 0$ dostaneme, že číslo $\binom{n}{k}$ musí byť nepárne pre každé $k \leqq n$. To znamená, že v príslušnom riadku Pascalovho trojuholníka sú len zvyšky 1, čomu vyhovujú len hodnoty $n = 2^j - 1$ pre $j = 0, 1, \ldots$ (vyplýva to z vyššie uvedenej konštrukcie trojuholníkov T_j, formálne môžeme opäť použiť indukciu).

Naopak, ak $n = 2^j - 1$, tak podmienka zo zadania je splnená. Zvyšky kombinačných čísel $\binom{n-k}{m}$ a $\binom{n-m}{k}$ sa totiž nachádzajú v T_j na pozíciách, ktoré sú súmerne združené vzhľadom na os uhla pri ľavom dolnom vrchole trojuholníka T_j. Stačí teda ukázať, že T_j je symetrický podľa tejto osi. Na to znova použijeme indukciu: Nech T_j je symetrický



Obr. 44

podľa uvedenej osi (pre malé hodnoty j to zjavne platí). Pozrime sa na trojuholník T_{j+1}. Keďže je rovnostranný, jeho os uhla je zároveň osou uhla ľavej dolnej kópie T_j aj vnútorného trojuholníka zloženého z núl (obr. 44). Na kópiách T_j je tak symetrický podľa indukčného predpokladu a prostredný trojuholník je podľa osi symetrický tiež, keďže sa skladá zo samých núl.

Úloha 6.
(Podľa *Zhen Ning Davida Liu.*) Nech $\mathcal{M}$ je najväčší podsystém navzájom disjunktných množín systému $\mathcal{F}$. Označme S zjednotenie všetkých množín z $\mathcal{M}$. Ďalej označme $S' = \{1, 2, \dots, n\} \setminus S$, teda množinu tých prvkov, ktoré sa nenachádzajú v žiadnej množine z $\mathcal{M}$. Sporom ukážeme, že $|\mathcal{M}| \geqq \lfloor \frac{1}{3}n \rfloor - 1$, čiže počet prvkov v S je aspoň $3(\lfloor \frac{1}{3}n \rfloor - 1) \geqq n - 5$.

Ak sa prvky x a y nachádzajú v S', tak všetky také prvky z, pre ktoré množina $A = \{x, y, z\}$ je prvkom $\mathcal{F}$, musia ležať v S. Inak by sme totiž mohli zobrať množinu A a pridať ju do systému $\mathcal{M}$, čím by sme zväčšili jeho veľkosť.

Nech $|\mathcal{M}| < \lfloor \frac{1}{3}n \rfloor - 1$. Potom $|S'| \geqq 6$, teda spomedzi prvkov množiny S' vieme vybrať tri disjunktné dvojprvkové množiny $\{x_1, y_1\}$, $\{x_2, y_2\}$ a $\{x_3, y_3\}$. Ukážeme, že pre niektoré dva rôzne indexy $i, j \in \{1, 2, 3\}$ existujú množiny

$$A = \{s_1, s_2, s_3\} \in \mathcal{M}, \qquad B = \{x_i, y_i, s_1\} \in \mathcal{F}, \qquad C = \{x_j, y_j, s_2\} \in \mathcal{F}. \tag{1}$$

Potom v systéme $\mathcal{M}$ môžeme množinu A nahradiť množinami B a C, čím ho zväčšíme.

Nazývajme *dobrými trojicami* také množiny $A \in \mathcal{F}$, že pre niektoré $i \in \{1, 2, 3\}$ a $s \in S$ platí $A = \{x_i, y_i, s\}$. Ak žiadna trojica množín tvaru (1) neexistuje, tak prvky každej jednej množiny z $\mathcal{M}$ tvoria dobré trojice buď iba s jednou dvojicou $\{x_i, y_i\}$, alebo iba jeden prvok tejto množiny je v dobrej trojici s niektorými dvojicami $\{x_i, y_i\}$. V každom prípade na jednu množinu z $\mathcal{M}$ prislúchajú nanajvýš tri dobré trojice.

Z pohľadu dvojíc prvkov $\{x_i, y_i\}$ je však podľa zadania počet dobrých trojíc aspoň $3(\lfloor \frac{1}{3}n \rfloor - 1)$, pretože, ako sme poznamenali na úvod, každý prvok, ktorý s niektorou dvojicou $\{x_i, y_i\}$ tvorí množinu z $\mathcal{F}$, leží v S. Z toho dostávame odhady

$$3|\mathcal{M}| \geqq \text{počet dobrých trojíc} \geqq 3(\lfloor \tfrac{1}{3}n \rfloor - 1),$$

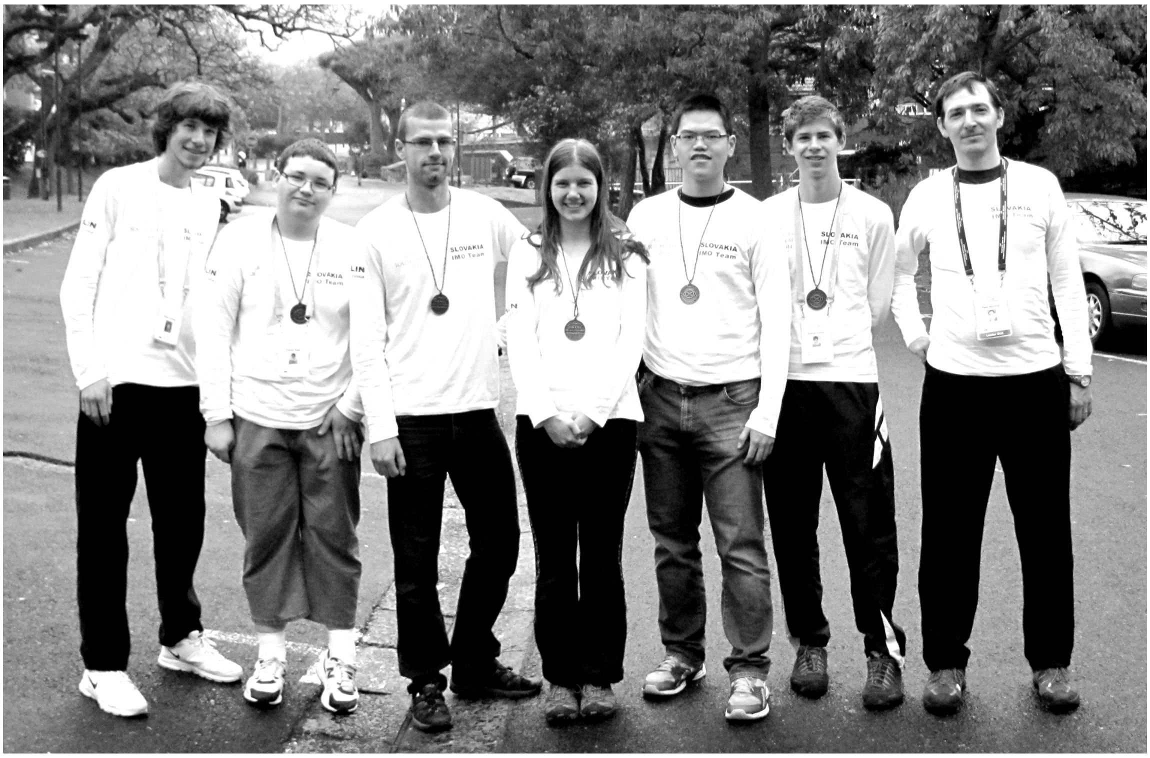
čo je v spore s predpokladom, že $|\mathcal{M}| < \lfloor \frac{1}{3}n \rfloor - 1$.

55. Medzinárodná matematická olympiáda

V termíne 3. – 13. 7. 2014 sa v juhoafrickom Kapskom Meste uskutočnila v poradí 55. Medzinárodná matematická olympiáda (IMO). Na africkom kontinente sa súťaž konala vôbec po prvý raz v histórii. Zúčastnilo sa jej 560 študentov stredných škôl zo 101 krajín. Každá krajina mohla vyslať najviac 6 súťažiach. Slovensko reprezentovali

Patrik Bak, Gymnázium Sobrance, 3. ročník,
Bui Truc Lam, Gymnázium Grösslingová, Bratislava, 3. ročník,
Zhen Ning David Liu, Gymnázium Jura Hronca, Bratislava, 3. ročník,
Miroslav Psota, Gymnázium Hlinská, Žilina, 4. ročník,
Samuel Sládek, Gymnázium A. Bernoláka, Námestovo, 2. ročník,
Ľudmila Šimková, Gymnázium Párovská, Nitra, 4. ročník.

Vedúcim družstva SR bol Mgr. Peter Novotný, PhD. (FMFI UK Bratislava), zástupcu vedúceho a pedagogický dozor vykonával Bc. Filip Sládek (študent na FMFI UK Bratislava).



Obr. 45
(Zľava: Filip Sládek, Patrik Bak, Miroslav Psota, Ľudmila Šimková, Zhen Ning David Liu, Samuel Sládek, Peter Novotný; chýba Bui Truc Lam, ktorý odchádzal skôr kvôli účasti na IOI.)

Žiaci riešili počas dvoch dní (8. a 9. júla) dve trojice úloh, za každú úlohu bolo možné získať najviac 7 bodov. Absolútnymi víťazmi IMO s plným počtom 42 bodov sa stali Alexander Gunning z Austrálie, Jiyang Gao z Číny a Po-Sheng Wu z Taiwanu. Výsledky družstva SR sú uvedené v tabuľke.

Meno	1.	2.	3.	4.	5.	6.	Súčet	Cena
Patrik Bak	7	0	1	7	2	0	17	bronz
Bui Truc Lam	6	7	0	7	7	0	27	striebro
Zhen Ning David Liu	7	5	0	7	0	0	19	bronz
Miroslav Psota	5	6	0	7	0	0	18	bronz
Samuel Sládek	7	6	0	7	1	0	21	bronz
Ľudmila Šimková	7	5	0	7	1	0	20	bronz

Naši žiaci získali jednu striebornú a päť bronzových medailí. Výborne si počínal najmä Bui Truc Lam, ktorý vyriešil až štyri úlohy. Pritom z IMO odchádzal naspäť na Slovensko sám o niekoľko dní skôr, pretože cestoval aj na medzinárodnú olympiádu v informatike. Tá sa začínala už počas IMO a Bui Truc Lam na nej získal takisto striebornú medailu. Vyzdvihnúť treba tiež výkon Samuela Sládeka, ktorého delil len jeden bod od striebornej medaily a pritom bol z našich účastníkov najmladší – má možnosť bojovať o účasť na IMO ešte dvakrát. Všetci naši získali medaily, čo sa nám naposledy podarilo v roku 2006. Štyria zo šestice majú možnosť zúčastniť sa aj o rok. Keď k tomu pridáme fakt, že na IMO sa nezúčastnil dvojnásobný držiteľ bronzovej medaily z predošlých IMO Eduard Batmendijn, ktorý tiež môže budúci rok súťažiť, dáva nám to do budúceho roka nádej na veľmi skúsené družstvo.

Najviac sa našim darilo na úlohe č. 4 – ľahkej geometrii – všetci ju vyriešili na plný počet bodov. K tomu sme boli blízko i v úlohe č. 1 – ľahkej úlohe o postupnostiach (zaradenej v časti algebra). Túto úlohu však zvládlo porovnateľne dobre alebo lepšie (bez straty bodov) mnoho krajín.

Celkom sa nám darilo aj v úlohe č. 2 – stredne náročnej kombinatorike – ktorú viac-menej vyriešili piati z našich študentov. Úlohu č. 5 – stredne náročnú kombinatorickú teóriu čísel – vyriešil zo slovenského družstva len Bui Truc Lam, no aj ostatným krajinám táto úloha robila väčšie problémy a naši na nej dokázali získať aspoň čiastkové body, ktoré sa napokon u Patrika Baka ukázali ako dôležité pri rozhodovaní o medailách (na bronzovú bolo treba získať aspoň 16 bodov).

V ťažkých úlohách č. 3 a 6 sme tradične nedokázali výraznejšie bodovať. Bývajú to úlohy, na vyriešenie ktorých okrem tréningu treba nemalú dávku šťastia a vrodených predispozícií.

V neoficiálnom poradí krajín, ktoré vznikne sčítaním bodov celého družstva, sme sa umiestnili so ziskom 122 bodov na 34. mieste. V rámci krajín EÚ sme sa zaradili na 11. miesto. Mrzieť nás môže strata bodov za drobné nepresnosti (v úlohách č. 1 a 2), bez ktorej by sme skončili v prvej tridsiadke. Celé poradie krajín uvádzame v tabuľke (čísla v zátvorke sú uvedené za krajinami, ktoré mali na IMO menší počet účastníkov). Kompletné výsledky a štatistiky z tohtoročnej a aj z minulých IMO možno nájsť na internetovej stránke *imo-official.org*.

Por.	Štát	Z	S	B	$\sum$
1.	Čína	5	1		201
2.	USA	5	1		193
3.	Taiwan	4		2	192
4.	Rusko	3	3		191
5.	Japonsko	4	1	1	177
6.	Ukrajina	2	3	1	175
7.	Kórejská republika	2	4		172
8.	Singapur	3	2	1	161
9.	Kanada	2	1	3	159
10.	Vietnam	3	2	1	157
11.	Austrália	1	3	2	156
	Rumunsko	1	5		156
13.	Holandsko	3	2	1	155
14.	KĽDR	1	4		154
15.	Maďarsko	1	4	1	153
16.	Nemecko		6		152
17.	Turecko	1	3	2	147
18.	Hongkong		4	2	143
	Izrael		5	1	143
20.	Spojené kráľovstvo		4	2	142
21.	Irán		4	2	131
	Thajsko		4	2	131
23.	Kazachstan	1	1	4	129
	Malajzia	2	1	1	129
	Srbsko	1	3	2	129
26.	Mexiko		4	1	128
	Poľsko	1		4	128
	Taliansko	1	2	1	128
29.	Chorvátsko	1	2	2	126
	Indonézia		2	3	126
	Peru		1	5	126
32.	Česká republika		1	5	124
33.	Portugalsko		2	3	123
34.	Bielorusko	1	1	3	122
	Brazília		3	2	122
	Slovensko		1	5	122
37.	Bulharsko		3	1	120
38.	Švajčiarsko		2	4	114
39.	Arménsko		2	1	110
	India		1	3	110
41.	Grécko		2	2	109
42.	Litva		1	3	104
43.	Saudská Arábia			4	103
44.	Mongolsko			5	102
45.	Filipíny		1	3	96
	Francúzsko		1	4	96
47.	Gruzínsko		1	2	92
48.	Moldavsko			2	90
	Španielsko			3	90
50.	Tadžikistan			2	89
51.	Bosna a Hercegovina		1		86
	Rakúsko		1	1	86
53.	Bangladéš		1	1	84
54.	Kolumbia		1	1	82
	Srí Lanka			2	82
56.	Argentína			2	81
57.	Švédsko			2	80
58.	Slovinsko			2	78
59.	Belgicko		1		77
60.	Nový Zéland		1	1	76
61.	Azerbajdžan			1	75
62.	Macao			2	74
63.	Kostarika			1	72
64.	Írsko				67
	Južná Afrika			1	67
66.	Lotyšsko		1	1	64
67.	Dánsko			2	62
	Macedónsko			1	62
69.	Nórsko		1		61
70.	Fínsko			1	59
71.	Paraguaj			1	56
72.	Cyprus				53
	Sýria				53
74.	Estónsko				52
75.	Pakistan			1	50
76.	Island			1	47
77.	Albánsko (5)				46
78.	Maroko				43
79.	Luxembursko (3)			1	41
80.	Tunisko				37
81.	Chile (4)			1	33
82.	Nigéria			1	32
	Trinidad a Tobago (5)			1	32
84.	Uruguaj				31
85.	Kirgizstan				29
86.	Venezuela (2)				24
87.	Lichtenštajnsko (1)		1		22
88.	Čierna Hora (3)				21
89.	Burkina Faso				19
	Ekvádor				19
91.	Portoriko (2)				12
92.	Kuba (1)				10
93.	Panama (1)				7
94.	Bolívia				5
	Uganda (4)				5
	Zimbabwe				5
97.	Pobrežie Slonoviny				3
98.	Benin (3)				2
	Tanzánia (3)				2
100.	Gambia				1
101.	Ghana (1)				0

Keďže Kapské Mesto sa nachádza na južnej pologuli a pomerne ďaleko od rovníka, v čase konania IMO tu bolo celkom chladno – približne ako na jeseň na Slovensku. Študenti pritom boli počas pobytu ubytovaní na vysokoškolských internátoch, v ktorých, napriek veľmi chladným nociam, nebola žiadna forma kúrenia. Rôzne družstvá sa s tým vyrovnávali po svojom. Niekto spal pod dvoma perinami, niekto v čiapke a boli dokonca takí, ktorí si zakúpili elektrické ohrievače.

Mimo súťaže pripravili organizátori pre súťažiacich dňa 10. júla exkurziu na Mys dobrej nádeje a 12. júla exkurziu pre súťažiacich aj vedúcich do centra Kapského Mesta (s návštevou múzea a oceanária). Dňa 11. júla doobeda umožnil harmonogram koordinácie slovenským vedúcim spoločne s časťou slovenského a českého družstva zorganizovať si vlastný výlet v národnom parku „Table Mountain“ s výstupom na dominantu Kapského Mesta a jeden z prírodných divov sveta Stolovú horu.

Budúci ročník IMO sa bude konať v Thajsku v meste Chiang Mai.

Peter Novotný

Zadania úloh IMO

Úloha 1.
Nech $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$ je nekonečná postupnosť kladných celých čísel. Dokážte, že existuje práve jedno celé číslo $n \geqq 1$ také, že

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n} \leqq a_{n+1}.$$

(*Rakúsko*)

Úloha 2.
Nech $n \geqq 2$ je celé číslo. Uvažujme šachovnicu s rozmermi $n \times n$ pozostávajúcu z n^2 jednotkových štvorcových políčok. Konfiguráciu n veží na tejto šachovnici nazývame *šťastná*, ak každý riadok a každý stĺpec obsahuje práve jednu vežu. Nájdite najväčšie kladné celé číslo k také, že pre každú šťastnú konfiguráciu n veží existuje štvorec s rozmermi $k \times k$, ktorý neobsahuje vežu na žiadnom zo svojich k^2 políčok. (*Chorvátsko*)

Úloha 3.
V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ platí $|\measuredangle ABC| = |\measuredangle CDA| = 90°$. Bod H je pätou kolmice z bodu A na priamku BD. Body S, T ležia postupne na stranách AB, AD, pričom bod H je vnútorným bodom trojuholníka SCT a platí

$$|\measuredangle CHS| - |\measuredangle CSB| = 90°, \quad |\measuredangle THC| - |\measuredangle DTC| = 90°.$$

Dokážte, že priamka BD sa dotýka kružnice opísanej trojuholníku TSH. (*Irán*)

Úloha 4.
Na strane BC daného ostrouhlého trojuholníka ABC ležia body P, Q, pričom $|\measuredangle PAB| = |\measuredangle BCA|$ a $|\measuredangle CAQ| = |\measuredangle ABC|$. Body M a N ležia postupne na priamkach AP a AQ tak, že bod P je stredom úsečky AM a bod Q je stredom úsečky AN. Dokážte, že priamky BM a CN sa pretínajú na kružnici opísanej trojuholníku ABC.
(*Gruzínsko*)

Úloha 5.
Banka v Kapskom Meste razí mince s hodnotou $1/n$ pre každé kladné celé číslo n. Majme konečnú kolekciu takýchto mincí (nie nutne s rôznymi hodnotami), ktorá má celkovú hodnotu nanajvýš $99+\frac{1}{2}$. Dokážte, že túto kolekciu možno rozdeliť na 100 alebo menej častí tak, aby každá časť mala celkovú hodnotu nanajvýš 1. (*Luxembursko*)

Úloha 6.
Hovoríme, že priamky v rovine sú vo *všeobecnej polohe*, ak žiadne dve nie sú rovnobežné a žiadne tri neprechádzajú jedným bodom. Množina priamok vo všeobecnej polohe rozdeľuje rovinu na oblasti, z ktorých niektoré majú konečný obsah; nazývame ich *konečné oblasti* prislúchajúce danej množine priamok. Pre každé dostatočne veľké n dokážte, že v ľubovoľnej množine n priamok vo všeobecnej polohe je možné zafarbiť aspoň $\sqrt{n}$ priamok modrou farbou tak, že žiadna z prislúchajúcich konečných oblastí nebude mať celú hranicu modrú. (*Rakúsko*)

Riešenia úloh IMO

Úloha 1.
Označme B množinu tých prirodzených čísel n, pre ktoré je splnená prvá nerovnosť zo zadania, teda takých n, pre ktoré $a_n < (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)/n$. Ekvivalentnou úpravou tejto podmienky dostaneme

$$(a_n - a_{n-1}) + (a_n - a_{n-2}) + \ldots + (a_n - a_1) < a_0. \tag{1}$$

Množina B má nasledovné tri vlastnosti:

- ▷ Je neprázdna, pretože zrejme $1 \in B$.
- ▷ Každý z $n-1$ sčítancov na ľavej strane (1) je aspoň 1, takže ak $n > a_0$, tak $n \notin B$. Preto B je konečná.
- ▷ Pri zväčšení n o 1 pribudne na ľavej strane (1) kladný sčítanec $a_{n+1} - a_n$ a navyše sa o túto hodnotu zväčší každý zo zvyšných sčítancov. Ľavá strana (1) sa tak s rastúcim n zväčšuje. Teda ak nejaké číslo patrí do B, patrí tam aj každé od neho menšie prirodzené číslo.

Z uvedeného vyplýva, že $B = \{1, 2, 3, \ldots, n_0\}$ pre nejaké prirodzené číslo n_0.

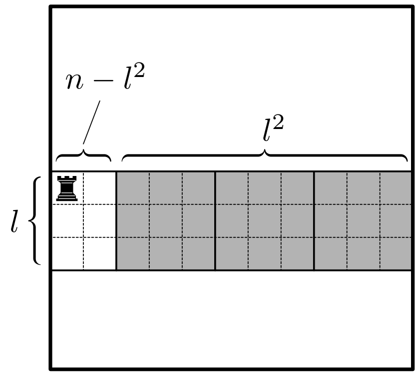
Všimnime si, že druhá nerovnosť zo zadania $(a_0 + a_1 + \ldots + a_n)/n \leqq a_{n+1}$ je ekvivalentná s podmienkou

$$a_0 \leqq (a_{n+1} - a_n) + (a_{n+1} - a_{n-1}) + \ldots + (a_{n+1} - a_1),$$

teda s tým, že $n + 1 \notin B$. Také n, ktoré spĺňa obe nerovnosti zo zadania, t. j. také, že $n \in B$ a súčasne $n + 1 \notin B$, je zrejme iba číslo n_0.

Úloha 2.
Hľadaná najväčšia hodnota je $k = \lfloor\sqrt{n-1}\rfloor$. V prvej časti riešenia dokážeme, že ak $n > l^2$, tak každá šťastná konfigurácia obsahuje prázdny štvorec $l \times l$. V druhej časti potom ukážeme, že ak $n \leqq l^2$, tak existuje šťastná konfigurácia neobsahujúca žiadny prázdny štvorec $l \times l$. Z týchto dvoch tvrdení zrejme vyplýva uvedený záver.

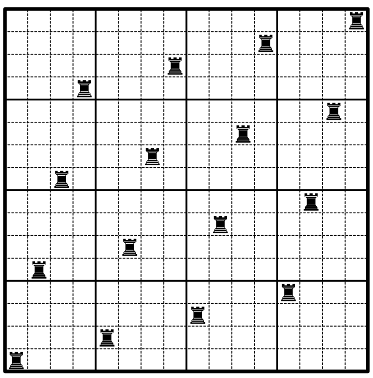
Nech teda $n > l^2$. Uvažujme ľubovoľnú šťastnú konfiguráciu. Zoberme blok l za sebou idúcich riadkov, medzi ktorými sa nachádza aj riadok obsahujúci vežu v prvom stĺpci. Spolu je v tomto bloku práve l veží. Následne z neho odstráňme prvých $n - l^2$ stĺpcov. Podľa nášho predpokladu je $n - l^2 \geqq 1$, takže sme uvedenou operáciou odobrali z bloku aspoň jednu vežu – tú, ktorá sa nachádza v prvom stĺpci. Zvyšných $l \times l^2$ políčok sa dá rozdeliť na l štvorcov s rozmermi $l \times l$ (obr. 46). Keďže je v nich spolu nanajvýš $l - 1$ veží, aspoň jeden z nich neobsahuje vežu.



Obr. 46

V druhej časti predpokladajme, že $n \leqq l^2$. Najskôr zostrojíme šťastnú konfiguráciu bez prázdnych štvorcov pre prípad $n = l^2$ a potom ukážeme, ako ju modifikovať pre menšie hodnoty n.

Označme riadky a stĺpce šachovnice s rozmermi $l^2 \times l^2$ číslami od 0 po $l^2 - 1$. Políčko v s-tom stĺpci a r-tom riadku budeme označovať súradnicami (s, r). Rozložme veže na políčka so súradnicami $(il + j, jl + i)$ pre všetky dvojice $i, j \in \{0, 1, \ldots, l-1\}$ (na obr. 47 je zobrazená táto konfigurácia pre $l = 4$; stĺpce sú číslované zľava doprava, riadky zdola



Obr. 47

nahor). Keďže každé číslo od 0 po l^2-1 sa dá práve jedným spôsobom zapísať v tvare $il+j$, kde $0 \leqq i,j \leqq l-1$, v každom stĺpci sa nachádza práve jedna veža a rovnaký záver platí pre riadky.[11] Preto táto konfigurácia je šťastná.

Dokážeme, že v každom štvorci $l \times l$ tejto konfigurácie sa nachádza aspoň jedna veža. Uvažujme ľubovoľný taký štvorec a zoberme l po sebe idúcich stĺpcov, ktoré ho obsahujú. Povedzme, že prvý z nich má číslo $pl+q$, kde $0 \leqq p,q \leqq l-1$ (platí teda $pl+q \leqq l^2-l$). Potom čísla riadkov, v ktorých sa nachádzajú veže z týchto stĺpcov, sú $ql+p$, $(q+1)l+p$, $\dots$, $(l-1)l+p$, $p+1$, $l+(p+1)$, $\dots$, $(q-1)l+(p+1)$. Ak ich zapíšeme od najmenšieho po najväčšie, dostaneme postupnosť

$$p+1,\ l+(p+1),\ \dots,\ (q-1)l+(p+1),\ ql+p,\ (q+1)l+p,\ \dots,\ (l-1)l+p. \quad (1)$$

Ľahko nahliadneme, že najmenší člen tejto postupnosti má hodnotu nanajvýš $l-1$ (ak totiž $p=l-1$, tak $q=0$ a postupnosť začína členom $ql+p=l-1$), najväčší člen má hodnotu aspoň $l(l-1)$ a rozdiel medzi ľubovoľnými po sebe idúcimi členmi neprevyšuje l. Preto niektorý z l po sebe idúcich riadkov prechádzajúcich uvažovaným štvorcom $l \times l$ má číslo uvedené v (1), a teda veža z tohto riadku leží v danom štvorci.

Ostáva zostrojiť šťastnú konfiguráciu bez prázdnych štvorcov v prípade $n < l^2$. Za tým účelom zväčšíme šachovnicu na rozmery $l^2 \times l^2$ a vyplníme ju ako vyššie. Následne odoberieme pridané riadky a stĺpce. Môže sa stať, že v niektorých riadkoch a stĺpcoch nebudú veže. Avšak riadkov bez veží bude práve toľko ako stĺpcov bez veží, takže postupným doplnením veží na priesečníky prázdnych riadkov a stĺpcov vytvoríme šťastnú konfiguráciu. Keďže neexistoval prázdny štvorec $l \times l$ v šachovnici rozšírenej na rozmer $l^2 \times l^2$, nenájdeme ho ani v tejto výslednej konfigurácii.

Úloha 3.
Označme Q priesečník priamky AB s kolmicou na priamku SC vedenou bodom C. Potom

$$|\sphericalangle SQC| = 90^\circ - |\sphericalangle CSB| = 180^\circ - |\sphericalangle CHS|,$$

teda štvoruholník $SQCH$ je tetivový. Jeho opísanou kružnicou je Tálesova kružnica nad priemerom SQ, ktorej stred ležiaci na priamke AB označme K (obr. 48). Analogicky stred kružnice opísanej trojuholníku THC, ktorý označíme L, leží na priamke AD.

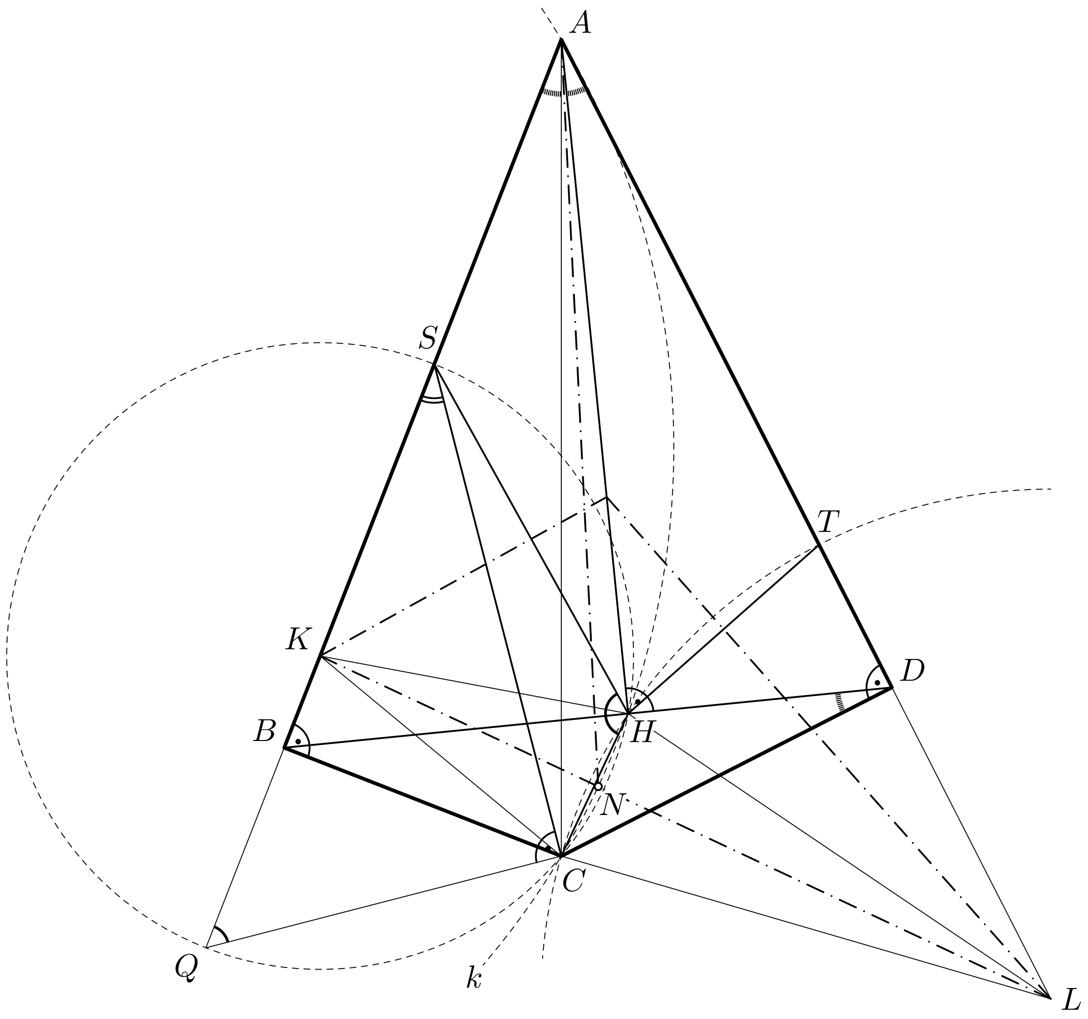
Na vyriešenie úlohy stačí ukázať, že priesečník osí úsečiek SH a TH leží na priamke AH. Keďže $|KH|=|KS|$, je os úsečky SH zároveň osou uhla AKH; podobne os úsečky TH je osou uhla ALH. Aby sme dokázali, že osi uhlov AKH a ALH delia úsečku AH v rovnakom pomere, stačí podľa známeho tvrdenia o osi uhla v trojuholníku[12] dokázať, že

$$\frac{|AK|}{|KH|} = \frac{|AL|}{|LH|}. \quad (1)$$

---

[11] Uvedená jednoznačnosť zápisu vyplýva z faktu, že ak $s = il+j$, tak j je zvyšok čísla s po delení číslom l a i je celočíselný podiel tohto delenia.

[12] Os vnútorného uhla trojuholníka delí protiľahlú stranu v pomere strán priľahlých. Tento poznatok možno odvodiť jednoducho napr. použitím sínusovej vety pre trojuholníky, na ktoré delí os uhla pôvodný trojuholník.



Obr. 48

Ak body A, H, C ležia na jednej priamke, uvedená rovnosť vyplýva zo symetrie (štvoruholník $ABCD$ je vtedy deltoid). V opačnom prípade uvažujme kružnicu k, ktorá cez ne prechádza. Keďže uhly pri vrcholoch B a D sú pravé, je štvoruholník $ABCD$ tetivový, preto

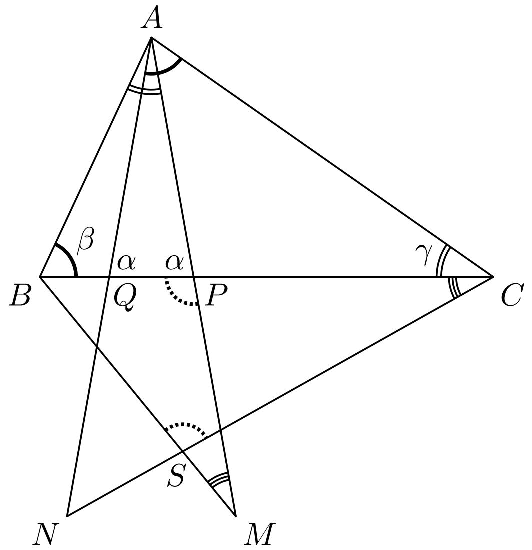
$$|\measuredangle BAC| = |\measuredangle BDC| = 90^\circ - |\measuredangle ADH| = |\measuredangle HAD|.$$

Nech $N \neq A$ je priesečník kružnice k s osou uhla CAH. Z práve odvodenej rovnosti uhlov potom dostávame, že AN je zároveň osou uhla BAD. Zrejme body H a C sú súmerne združené podľa priamky KL a $|HN| = |NC|$. Z toho vyplýva, že bod N aj stred kružnice k ležia na priamke KL. Navyše z rovnakého tvrdenia o osi uhla, ktoré sme použili pred chvíľou, máme $|KN|/|NL| = |AK|/|AL|$. Uvedené skutočnosti znamenajú, že k je Apollóniovou kružnicou prislúchajúcou bodom K a L, odkiaľ už priamo dostaneme rovnosť (1).

Úloha 4.
Označme S priesečník priamok BM a CN. Podľa zadania majú trojuholníky PBA a QAC veľkosti uhlov rovnaké ako trojuholník ABC (budeme ich označovať štandardne α, β, γ), sú teda navzájom podobné. Odtiaľ

$$\frac{|BP|}{|PM|}=\frac{|BP|}{|PA|}=\frac{|AQ|}{|QC|}=\frac{|NQ|}{|QC|}.$$

Pritom $|\measuredangle BPM| = |\measuredangle NQC| = 180 - \alpha$, pretože sú to uhly susedné k uhlom pri vrcholoch P a Q uvedených podobných trojuholníkov (obr. 49). Trojuholníky BPM a NQC majú zhodné uhly pri vrcholoch P a Q aj pomery dĺžok strán, ktoré tieto uhly zvierajú, takže sú podobné. Preto $|\measuredangle BMP| = |\measuredangle NCQ|$ a aj trojuholníky BPM a BSC sú podobné. Z toho dostávame $|\measuredangle CSB| = |\measuredangle BPM| = 180° - \alpha$, teda štvoruholník $ABSC$ je tetivový.



Obr. 49

Úloha 5.
Dokážeme všeobecnejšie tvrdenie: Pre každé kladné celé číslo N sa mince s celkovou hodnotou nanajvýš $N - \frac{1}{2}$ dajú rozdeliť na N častí tak, aby každá časť mala celkovú hodnotu nanajvýš 1 (pripúšťame aj „prázdne" časti s hodnotou 0).

Uvažujme teda ľubovoľnú kolekciu mincí s hodnotou nanajvýš $N-\frac{1}{2}$. Pred samotným delením na časti kolekciu mierne modifikujeme. Pokiaľ niekoľko mincí dokopy má celkovú hodnotu $1/k$, nahradíme ich jednou mincou tejto hodnoty. Ak sa bude dať zmenená kolekcia rozdeliť požadovaným spôsobom, tak sa samozrejme dá rozdeliť aj pôvodná. Po každej modifikácii počet mincí v kolekcii klesá, takže raz tento proces musí skončiť – vtedy už nevieme vykonať žiadne opísané „zlučovanie" mincí. Z toho vyplýva, že pre každé párne k existuje len jedna minca s hodnotou $1/k$ (inak by sme dve mince s touto hodnotou vedeli nahradiť jednou mincou s hodnotou $1/\frac{k}{2}$) a pre každé nepárne

$k > 1$ existuje najviac $k-1$ mincí s hodnotou $1/k$ (inak by sme k takých mincí vedeli nahradiť mincou s hodnotou 1).

Každá minca s hodnotou 1 musí sama tvoriť jednu z N častí. Ak máme d mincí s hodnotou 1, stačí ich odobrať a v tvrdení nahradiť N hodnotou $N-d$. Môžeme teda predpokladať, že v kolekcii nemáme žiadne mince s hodnotou 1.

Za týchto predpokladov rozdeľme mince nasledovne: Pre každé $k = 1, 2, \ldots, N$ dajme všetky mince s hodnotami $1/(2k-1)$ a $1/(2k)$ do skupiny C_k. Celková hodnota skupiny C_k bude nanajvýš

$$(2k-2)\cdot\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k}=1-\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)<1.$$

Ostáva rozdeliť mince s hodnotami menšími ako $1/(2N)$. Budeme ich pridávať po jednej opakovaním nasledujúceho kroku. Zoberme ľubovoľnú mincu čo zostala. Celková hodnota už rozdelených mincí je maximálne $N-\frac{1}{2}$, takže existuje časť s celkovou hodnotou nanajvýš

$$\frac{N-\frac{1}{2}}{N}=1-\frac{1}{2N},$$

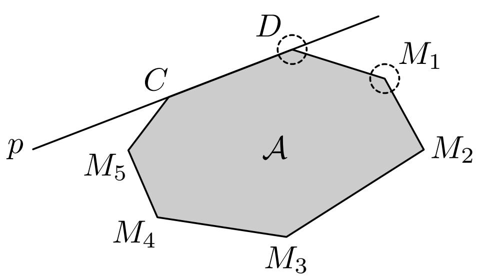
do ktorej je možné našu mincu pridať bez prekročenia stanoveného limitu.

Poznámka. Algoritmus rozdelenia mincí s hodnotami aspoň $1/(2N)$ sa dá modifikovať: napr. do časti C_k môžeme dať všetky mince s hodnotami $1/[2^s(2k-1)]$ pre všetky celé čísla $s \geqq 0$. Ľahko možno nahliadnuť, že ich hodnota neprekročí 1.

Úloha 6.
Nech P je ľubovoľná množina n priamok vo všeobecnej polohe. Označme F množinu konečných oblastí prislúchajúcich množine P. Zoberme maximálnu (vzhľadom na inklúziu) podmnožinu $\mathsf{Q} \subseteq \mathsf{P}$ takú, že po zafarbení priamok z Q namodro žiadna oblasť z F nebude mať celú hranicu modrú. Položme $k = |\mathsf{Q}|$. Stačí dokázať, že $k \geqq \sqrt{n}$.

Zafarbime priamky z $\mathsf{P} \setminus \mathsf{Q}$ načerveno. Priesečníky dvoch modrých priamok budeme nazývať *modré* body a priesečníky modrých priamok s červenými priamkami *dvojfarebné* body. Modrých bodov je zrejme $\binom{k}{2}$ a červených priamok $n-k$.

Uvažujme ľubovoľnú červenú priamku p. Nech $\mathcal{A} \in \mathsf{F}$ je taká oblasť, ktorá má práve jednu červenú stranu a tá leží na p (ak by taká oblasť neexistovala, mohli by sme priamku p pridať do Q, čo je v spore s maximálnosťou množiny Q). Označme C, D, M_1, M_2, $\ldots$, M_l vrcholy oblasti $\mathcal{A}$ v smere hodinových ručičiek, pričom $C, D \in p$. Potom body C, D sú dvojfarebné, zatiaľ čo body M_1, M_2, $\ldots$, M_l sú modré. Budeme hovoriť, že priamka p je *pridružená* k bodu M_1 *cez* bod D (obr. 50).



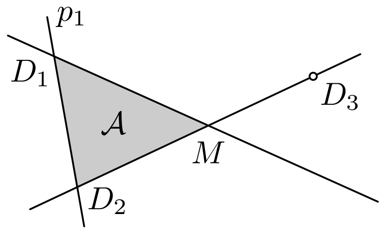
Obr. 50

Všimnime si, že pre každú dvojicu tvorenú dvojfarebným bodom D a modrým bodom M môže byť k M cez D pridružená nanajvýš jedna červená priamka, pretože existuje nanajvýš jedna oblasť $\mathcal{A}$, ktorá má body D a M umiestnené na svojom obvode v smere hodinových ručičiek. Ukážeme, že k žiadnemu modrému bodu nie sú pridružené viac ako dve červené priamky. Z toho dostaneme odhad

$$n - k \leqq 2\binom{k}{2},$$

ktorý je ekvivalentný so želanou nerovnosťou $n \leqq k^2$.

Predpokladajme sporom, že tri rôzne priamky p_1, p_2, p_3 sú pridružené k modrému bodu M postupne cez rôzne dvojfarebné body D_1, D_2, D_3. Bodom M prechádzajú dve modré priamky, ktoré určujú štyri polpriamky. Zrejme každý z bodov D_i leží na jednej z nich (každý na inej) a je najbližším bodom k M spomedzi všetkých priesečníkov ležiacich na tejto polpriamke. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že D_2 a D_3 ležia na navzájom opačných polpriamkach. Uvažujme oblasť $\mathcal{A}$, vzhľadom na ktorú



Obr. 51

je p_1 pridružená k M cez D_1. Jej tri po sebe idúce vrcholy sú D_1, M a jeden z vrcholov D_2, D_3, povedzme D_2. Keďže oblasť $\mathcal{A}$ má iba jednu červenú stranu, musí to byť strana D_2D_1, t. j. $\mathcal{A}$ je trojuholník D_2D_1M (obr. 51). To je však spor s tým, že priamky p_1 a p_2 sú rôzne.

8. Stredoeurópska matematická olympiáda

Ôsmy ročník Stredoeurópskej matematickej olympiády (MEMO) sa konal od 18. do 24. septembra v Nemecku v meste Drážďany a tak ako i po minulé roky sa ho zúčastnilo 60 súťažiacich z 10 krajín. Slovensko reprezentovali

Eduard Batmendijn, Cirk. g. sv. Mikuláša, St. Ľubovňa, 3. ročník,
Ondrej Bínovský, Gymnázium A. Merici, Trnava, 3. ročník,
Ondrej Bohdal, Gymnázium Jura Hronca, Bratislava, 3. ročník,
Zuzana Frankovská, Gymnázium Grösslingová, Bratislava, 2. ročník,
Henrieta Micheľová, Gymnázium Alejová, Košice, 2. ročník,
Silvia Nepšinská, Gymnázium Jura Hronca, Bratislava, 3. ročník.

Vedúcim družstva SR bol RNDr. Róbert Hajduk, PhD. (Prírodovedecká fakulta Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach), zástupcom vedúceho bol Mgr. Tomáš Kocák (Inria Lille – Nord Europe).

Súťaž pozostávala z dvoch súťažných dní. V prvý deň prebiehala súťaž jednotlivcov. V nej sa našim súťažiacim oproti predchádzajúcemu roku až tak nedarilo a zo šiestich našich súťažiach len dvaja dosiahli na ocenenie. A to Edo Batmendijn na striebornú medailu a Zuzka Frankovská na čestné uznanie, ktoré sa udeľuje tým súťažiacim, ktorí nezískajú medailu ale vyriešia aspoň jednu úlohu na plný počet, 8 bodov. Treba poznamenať, že Edo Batmendijn nebol veľmi ďaleko od zlatej medaily, nakoľko pre malú nepozornosť prišiel o 2 body, vďaka ktorým by už na zlato dosiahol. V neoficiálnom poradí štátov v súťaži jednotlivcov dominovali Chorváti pred Poliakmi a Maďarmi. Naše umiestnenie žiaľ nepatrilo medzi tie, na ktoré môžeme byť hrdí. Reputáciu sme si však napravili v súťaži družstiev, ktorá sa konala na druhý deň. V súťaži družstiev (t. j. v súťaži, v ktorej súťažiaci z jedného štátu tvoria jeden tím a teda spolu riešia a odovzdávajú jedno spoločné riešenie každej z ôsmich zadaných úloh) sme zopakovali do tretice 4. miesto, a mať o 2 body viac, tešíme sa z medaily. Víťazom v súťaži družstiev sa tak ako pred rokom stalo družstvo Poľska. Druhé skončilo Maďarsko a tretie Chorvátsko. Tak ako minulý rok, aj teraz medzi súťažnými úlohami nechýbala úloha zo Slovenska od Patrika Baka. Konkrétne šlo o „ťažšiu“ geometriu v tímovej súťaži.

Výsledky družstva SR v súťaži jednotlivcov sú uvedené v prvej tabuľke. Prehľad výsledkov všetkých krajín v súťaži jednotlivcov je v druhej tabuľke. Krajiny sú v nej zoradené podľa súčtu bodov celého družstva, podobne ako pri neoficiálnom poradí krajín na IMO. Výsledky súťaže družstiev sú uvedené v tretej tabuľke.

Meno	I1	I2	I3	I4	Súčet	Cena
Eduard Batmendijn	3	8	8	6	25	striebro
Ondrej Bínovský	0	0	0	2	2	
Ondrej Bohdal	2	3	1	3	9	
Zuzana Frankovská	2	8	4	2	16	ČU
Henrieta Micheľová	0	3	0	3	6	
Silvia Nepšinská	0	3	0	3	6	

Por.	Štát	Z	S	B	ČU	$\sum$	Por.	Štát	Z	S	B	ČU	$\sum$
1.	Chorvátsko	1	2	3		139	6.	Rakúsko		1	2	3	101
2.	Poľsko		4	2		134	7.	Švajčiarsko			2	2	82
3.	Maďarsko	1	1	4		133	8.	Slovinsko			1	1	72
4.	Česká rep.	1		3	1	108	9.	Slovensko		1		1	64
5.	Nemecko		2	1	2	107	10.	Litva				3	63

	Štát	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	$\sum$
1.	Poľsko	8	8	7	8	8	7	8	–	54
2.	Maďarsko	8	3	8	5	8	8	8	4	52
3.	Chorvátsko	8	5	7	8	8	–	8	2	46
4.	Slovensko	8	2	8	8	8	1	8	1	44
5.	Nemecko	8	1	7	8	8	–	8	1	41
6.	Švajčiarsko	8	1	8	–	8	–	8	1	34
	Česká rep.	8	4	6	–	8	–	8	–	34
	Rakúsko	4	2	8	5	6	–	8	1	34
9.	Litva	–	1	7	8	8	–	5	1	30
	Slovinsko	8	1	7	1	6	–	7	–	30

Účastníci aj vedúci boli ubytovaní v hoteli, ktorý bol situovaný v blízkosti centra Drážďan. Samotná súťaž a aj zasadnutia jury prebiehali v priestoroch gymnázia Marie Curie, ktoré bolo situované pár minút od miesta ubytovania súťažiacich a vedúcich. Sprievodný program pre súťažiacich, ktorý pripravili nemeckí organizátori, obsahoval prehliadku mesta, návštevu múzea matematiky v meste ako i ďalších atrakcií v Drážďanoch a jeho okolí. V deň vyhodnotenia bola zorganizovaná spoločná exkurzia do mesta Meißen známeho svojim porcelánom a zámkom Albrechtsburg.

9. ročník MEMO sa bude konať v slovinskom Koperi v auguste 2015.

Róbert Hajduk

Zadania úloh MEMO

Súťaž jednotlivcov

Úloha I-1.
Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že

$$xf(y) + f\bigl(xf(y)\bigr) - xf\bigl(f(y)\bigr) - f(xy) = 2x + f(y) - f(x+y)$$

platí pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$. (*Litva*)

Úloha I-2.
Daný je pravidelný n-uholník, ktorý rozrežeme na $n-2$ trojuholníkov pomocou $n-3$ rezov pozdĺž uhlopriečok, ktoré sa navzájom nepretínajú vo vnútri n-uholníka. Nech *dvojfarebná triangulácia* je také rozrezanie n-uholníka, v ktorom každý trojuholník je

ofarbený čiernou alebo bielou farbou a každé dva trojuholníky so spoločnou stranou majú rôzne farby. Celé číslo $n \geqq 3$ nazývame *triangulárne*, ak pre pravidelný n-uholník existuje dvojfarebná triangulácia taká, že pre každý vrchol A daného n-uholníka je počet čiernych trojuholníkov s vrcholom A väčší ako počet bielych trojuholníkov s vrcholom A. Nájdite všetky triangulárne čísla. (*Chorvátsko*)

Úloha I-3.
Daný je trojuholník ABC so stredom I kružnice vpísanej, pričom $|AB| < |AC|$. Označme E bod na strane AC taký, že $|AE| = |AB|$. Nech G je bod na priamke EI taký, že $|\measuredangle IBG| = |\measuredangle CBA|$ a bod I leží medzi bodmi E a G. Dokážte, že priamka AI, kolmica na AE v bode E a os uhla BGI sa pretínajú v jednom bode. (*Chorvátsko*)

Úloha I-4.
Pre celé čísla $n \geqq k \geqq 0$ definujme *bibinomický koeficient* $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ ako[13]

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \frac{n!!}{k!!(n-k)!!}.$$

Nájdite všetky dvojice (n, k) celých čísel $n \geqq k \geqq 0$ také, že prislúchajúci bibinomický koeficient je celé číslo. (*Rakúsko*)

Súťaž družstiev

Úloha T-1.
Určte najmenšiu možnú hodnotu výrazu

$$\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a+y} + \frac{1}{b+x} + \frac{1}{b+y},$$

kde a, b, x a y sú kladné reálne čísla spĺňajúce nerovnosti

$$\frac{1}{a+x} \geqq \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{a+y} \geqq \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{b+x} \geqq \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{b+y} \geqq 1.$$

(*Maďarsko*)

Úloha T-2.
Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že

$$xf(xy) + xyf(x) \geqq f(x^2)f(y) + x^2y$$

platí pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$. (*Česká rep., Pavel Calábek*)

---

[13] „Dvojitý“ faktoriál $n!!$ je definovaný ako súčin všetkých párnych čísel od 2 po n, ak n je párne, a ako súčin všetkých nepárnych čísel od 1 po n, ak n je nepárne. Napríklad $0!! = 1$, $4!! = 2 \cdot 4 = 8$ a $7!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

Úloha T-3.
Nech K a L sú prirodzené čísla. Na šachovnici pozostávajúcej z $2K \times 2L$ políčok sa pohybuje mravec. Začína v ľavom dolnom políčku a presúva sa do pravého horného políčka. V každom kroku sa presunie na susedné políčko vo vodorovnom alebo zvislom smere a každé z políčok pri svojom presune navštívi nanajvýš raz. V niektorých prípadoch nenavštívené políčka tvoria pravouholník – taký nazývame MEMO*rovaný*. Určte počet všetkých rôznych MEMOrovaných pravouholníkov. (Pravouholníky sú rôzne, pokiaľ nepozostávajú z tých istých políčok.) (*Rakúsko*)

Úloha T-4.
V Happy City je 2014 obyvateľov označených A_1, A_2, ..., A_{2014}. V každom okamihu dňa je každý obyvateľ buď *šťastný* alebo *nešťastný*. Nálada obyvateľa A sa zmení (z nešťastnej na šťastnú alebo opačne) práve vtedy, ak sa usmeje nejaký iný šťastný obyvateľ na obyvateľa A. Na začiatku v Happy City bolo N šťastných obyvateľov. V pondelok počas dňa sa udialo nasledovné: obyvateľ A_1 sa usmial na obyvateľa A_2, potom sa obyvateľ A_2 usmial na obyvateľa A_3, atď. Nakoniec sa obyvateľ A_{2013} usmial na obyvateľa A_{2014}. Okrem toho sa nikto iný neusmial na nikoho iného. Rovnako to prebehlo aj v utorok, stredu a vo štvrtok. Na konci dňa vo štvrtok bolo v Happy City presne 2000 šťastných obyvateľov. Určte najväčšiu možnú hodnotu N. (*Litva*)

Úloha T-5.
Daný je trojuholník ABC, pre ktorý platí $|AB| < |AC|$. Kružnica vpísaná trojuholníku ABC so stredom I sa dotýka strán BC, CA a AB postupne v bodoch D, E a F. Priamka AI pretína priamky DE a DF postupne v bodoch X a Y. Označme Z pätu výšky z bodu A na stranu BC. Dokážte, že D je stred kružnice vpísanej trojuholníku XYZ. (*Nemecko*)

Úloha T-6.
Kružnica k vpísaná trojuholníku ABC sa dotýka strany BC v bode D. Nech $L \neq D$ je priesečník priamky AD a kružnice k a nech K je stred kružnice pripísanej k strane BC. Označme M a N postupne stredy úsečiek BC a KM. Dokážte, že body B, C, N a L ležia na jednej kružnici. (*Slovensko, Patrik Bak*)

Úloha T-7.
Konečná množina A kladných celých čísel sa nazýva *priemerová*, ak pre každú jej neprázdnu podmnožinu je aritmetický priemer jej prvkov taktiež kladné celé číslo. Ináč povedané, A je priemerová, ak $(a_1 + \ldots + a_k)/k$ je celé číslo pre každé $k \geqq 1$, kde $a_1, \ldots, a_k \in \mathsf{A}$ sú navzájom rôzne. Pre ľubovoľné celé číslo n určte najmenší možný súčet prvkov priemerovej n-prvkovej množiny. (*Rakúsko*)

Úloha T-8.
Určte všetky štvorice (x, y, z, t) kladných celých čísel, pre ktoré platí

$$20^x + 14^{2y} = (x + 2y + z)^{zt}.$$

(*Litva*)

Riešenia úloh MEMO

Úloha I-1.
Ukážeme, že jedinými riešeniami spĺňajúcimi podmienky zo zadania sú funkcie tvaru $f(x) = 2x + a$, kde a je ľubovoľné reálne číslo.

Označme $f(1) = c$. Po dosadení $x = 1$ do rovnosti zo zadania dostávame

$$0 = 2 + f(y) - f(y+1),$$
$$f(y+1) = f(y) + 2$$

pre všetky $y \in \mathbb{R}$. Použitím matematickej indukcie v oboch smeroch dostávame

$$f(y+n) = f(y) + 2n \tag{1}$$

pre všetky $y \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{Z}$.

Dosadením $y = 1$ do rovnosti zo zadania dostávame

$$cx + f(cx) - xf(c) - f(x) = 2x + c - (f(x) + 2),$$

čo môžeme upraviť na tvar

$$f(cx) = x(f(c) - c + 2) + c - 2.$$

Ak $c \neq 0$, môžeme nahradiť x neznámou z/c, z čoho už vidno, že f je lineárna funkcia. Z rovnosti (1) však vidíme, že smernica funkcie f musí byť 2. Preto funkcia f môže byť jedine tvaru $f(x) = 2x + a$.

Predpokladajme teraz, že $c = 0$. Z rovnice (1) dostávame

$$f(n) = f(1 + (n-1)) = f(1) + 2(n-1) = c + 2n - 2 = 2n - 2$$

pre akékoľvek celé číslo n. Dosadením celého čísla $y = n$ do rovnice zo zadania dostávame

$$(2n-2)x + f((2n-2)x) - (4n-6)x - f(nx) = 2x + (2n-2) - f(x) - 2n,$$
$$f((2n-2)x) - f(nx) + f(x) = (2n-2)x - 2. \tag{2}$$

V prípade $n = 0$ sa rovnosť zjednoduší na tvar

$$f(-2x) + f(x) = -2x + 4.$$

Dosadením $-2x$ za x a odčítaním od predchádzajúcej rovnosti dostávame

$$f(4x) - f(x) = (f(4x) + f(-2x)) - (f(-2x) + f(x)) = (4x - 4) - (-2x - 4) = 6x. \tag{3}$$

Dosadením $n = -1$ do (2) a $x = -x$ do (3) dostávame

$$f(-4x) - f(-x) + f(x) = -4x - 2,$$
$$f(-4x) - f(-x) = -6x.$$

Odčítaním posledných dvoch rovností dostávame $f(x) = 2x - 2$, teda opäť funkciu tvaru $f(x) = 2x + a$.

Dosadením $f(x) = 2x + a$ do rovnice zo zadania jednoducho overíme, že takáto funkcia je naozaj riešením pre ľubovoľné $a \in \mathbb{R}$.

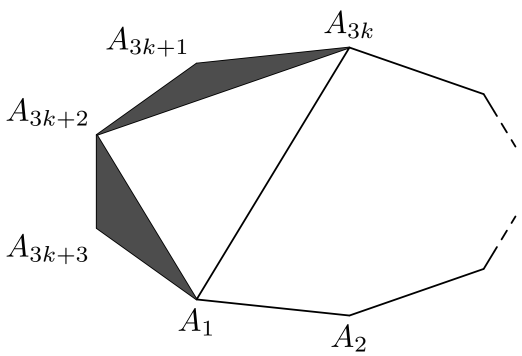
Úloha I-2.

Najskôr ukážeme, že všetky triangulárne čísla sú deliteľné tromi. Nech n je triangulárne číslo. Uvažujme takú dvojfarebnú trianguláciu pravidelného n-uholníka, ktorá spĺňa podmienky zo zadania. Celkový počet strán bielych trojuholníkov triangulácie označme b. Keďže trojuholníky majú tri strany a žiadne dva biele trojuholníky nemajú spoločnú stranu, číslo b musí byť deliteľné tromi.

Pozrime sa teraz bližšie na ľubovoľný vrchol A. Trojuholníky pri vrchole A sú striedavo biele a čierne, pričom prvý a posledný trojuholník musí byť čierny, aby bola splnená podmienka zo zadania. Preto sú strany bielych trojuholníkov zároveň uhlopriečkami n-uholníka.

Rovnako dostaneme, že počet strán c čiernych trojuholníkov je deliteľný tromi. Každá uhlopriečka n-uholníka použitá pri triangulácii je súčasne stranou bieleho aj čierneho trojuholníka a navyše všetky strany n-uholníka sú stranami čiernych trojuholníkov, preto $c = n + b$. Keďže c a b sú deliteľné tromi, musí byť tromi deliteľné aj n.

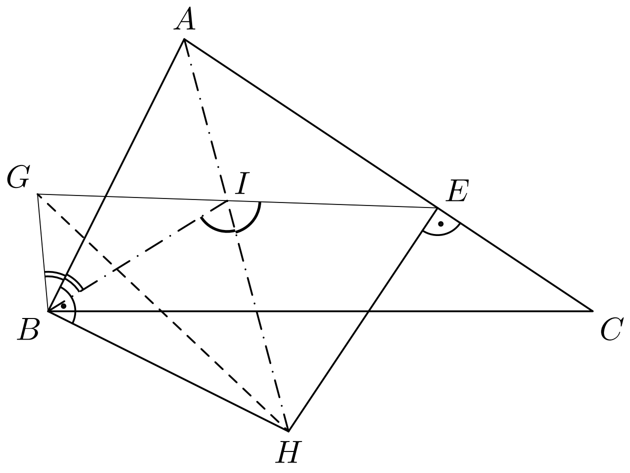
V druhej časti dokážeme, že pre ľubovoľné prirodzené číslo k a pre $n = 3k$ existuje dvojfarebná triangulácia spĺňajúca podmienky zo zadania, a to nielen pre pravidelný, ale pre ľubovoľný konvexný n-uholník.



Obr. 52

Dôkaz prevedieme indukciou vzhľadom na k. Pre $k = 1$ máme len jeden trojuholník, ktorý po ofarbení čiernou farbou tvorí trianguláciu spĺňajúcu podmienky zo zadania. Nech teda tvrdenie platí pre nejaké k. Uvažujme ľubovoľný $3(k+1)$-uholník $P = A_1A_2\ldots A_{3(k+1)}$. Na $3k$-uholník $A_1A_2\ldots A_{3k}$ použijeme indukčný predpoklad, t. j. predpokladáme, že v ňom je vytvorená dvojfarebná triangulácia spĺňajúca podmienky zadania. Z prvej časti riešenia vieme, že trojuholník so stranou A_1A_{3k} je v nej ofarbený čiernou farbou. Do triangulácie mnohouholníka P pridáme uhlopriečky A_1A_{3k+2} a $A_{3k}A_{3k+2}$, trojuholník $A_1A_{3k}A_{3k+2}$ ofarbíme bielou farbou a trojuholníky $A_{3k}A_{3k+1}A_{3k+2}$ a $A_1A_{3k+2}A_{3k+3}$ ofarbíme čiernou farbou (obr. 52). Takto vznikne dvojfarebná triangulácia $3(k+1)$-uholníka, ktorá (ako možno ľahko nahliadnuť) spĺňa podmienky zo zadania.

Úloha I-3.
Nech H je priesečník kolmice na AE vedenej bodom E a priamky AI. Naším cieľom bude ukázať, že bod H je stredom kružnice pripísanej k strane BI trojuholníka BIG a teda leží na osi uhla BGI.



Obr. 53

Osová súmernosť podľa priamky AI zobrazí bod E na bod B a teda AI je osou uhla BIE a zároveň uhol HBA je zhodný s uhlom HEA, čiže pravý (obr. 53). Označme $|\measuredangle ABC| = \beta$. Zo zadania vieme, že $|\measuredangle IBG| = \beta$ a $|\measuredangle ABI| = \beta/2$. Preto $|\measuredangle IBH| = 90^\circ - |\measuredangle GBI|/2$, z čoho vyplýva, že H leží na osi vonkajšieho uhla pri vrchole B v trojuholníku BIG. Z toho už dostávame dokazované tvrdenie.

Úloha I-4.
Dvojice (n, k) spĺňajú podmienky zo zadania práve vtedy, keď $(n, k) = (2, 1)$, $k \in \{0, n\}$ alebo n a k sú párne.

Najskôr ukážeme, že dvojice popísané vyššie skutočne spĺňajú podmienky zo zadania. Zrejme $\left(\!\binom{2}{1}\!\right) = 2$ a pre všetky nezáporné celé čísla n máme

$$\left(\!\!\binom{n}{0}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n}{n}\!\!\right) = \frac{n!!}{n!! \cdot 0!!} = 1.$$

Napokon, ak n a k sú párne čísla, označme $n = 2n'$ a $k = 2k'$. Potom

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \frac{(2n')!!}{(2k')!!(2(n'-k'))!!} = \frac{2^{n'} n'!}{2^{k'} k'! 2^{n'-k'} (n'-k')!} = \binom{n'}{k'},$$

čo očividne je celé číslo.

Ostáva ukázať, že žiadne ďalšie dvojice zadaniu nevyhovujú. Nech n a k sú také celé nezáporné čísla, že $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ je celé číslo. Rozlíšime dva prípady v závislosti od parity n.

Nech n je nepárne číslo. V takom prípade $k = 0$ alebo $k = n$. V opačnom prípade je totiž jedno z čísel k, $n - k$ párne kladné celé číslo a preto aj menovateľ rozpísaného výrazu $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ je párny, zatiaľ čo čitateľ je nepárny.

Nech n je párne číslo. Na úvod sme ukázali, že v prípadoch $n = 0$ a $n = 2$ môže byť k ľubovoľné nezáporné celé číslo, ktoré spĺňa $k \leqq n$. Predpokladajme preto, že $n \geqq 4$. Označme $n = 2m$ a nech k je nepárne. Zo symetrie vyplýva $\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \left(\!\binom{n}{n-k}\!\right)$, takže sa stačí obmedziť na prípady, keď $1 \leqq k \leqq m$. Pre $j \in \{1, 2, \ldots, m-k\}$ je splnená nerovnosť $k + j < k + 2j$ a preto

$$\prod_{j=1}^{m-k} (k + j) \leqq \prod_{j=1}^{m-k} (k + 2j),$$

pričom rovnosť nastáva pre $m = k$. Ďalej použijeme aj nerovnosť $(k-1)!! \leqq k!!$, v ktorej nastáva rovnosť pre $k = 1$. Vynásobením posledných dvoch nerovností dostávame

$$(k-1)!!\frac{m!}{k!} \leqq k!!\frac{(2m-k)!!}{k!!} = (2m-k)!!,$$

pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $m = k = 1$, čo nastáva pre $n = 2$. V tejto časti však predpokladáme, že $n \geqq 4$ a preto v poslednej nerovnosti rovnosť nikdy nenastáva. Prenásobením $k!!$ a použitím rovnosti $(k-1)!!k!! = k!$ dostávame $m! < k!!(2m-k)!!$, čo znamená, že podiel

$$\frac{m!}{k!!(2m-k)!!}$$

nemôže byť celé číslo. Keďže menovateľ je nepárny, podiel

$$\frac{2^m m!}{k!!(2m-k)!!} = \frac{n!!}{k!!(2m-k)!!} = \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$$

taktiež nemôže byť celé číslo. Preto v prípade, že $n \geqq 4$ je párne a $0 < k < n$ je nepárne, riešenie neexistuje.

Úloha T-1.
Ukážeme, že najmenšia možná hodnota je $\frac{17}{6}$.

Ak $a = x = 1$ a $b = y = \frac{1}{2}$, potom

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{a+y} = \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{b+x} = \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{b+y} = 1.$$

Podmienky sú splnené a navyše súčet týchto štyroch zlomkov je

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 1 = \frac{17}{6}$$

a teda $\frac{17}{6}$ je naozaj možná hodnota výrazu za splnenia predpokladov.

Nech a, b, x a y sú kladné reálne čísla spĺňajúce zadané nerovnosti. Z prvej a štvrtej podmienky máme

$$a + b + x + y = (a + x) + (b + y) \leqq 2 + 1 = 3.$$

Z nerovnosti medzi aritmetickým a harmonickým priemerom dvoch kladných reálnych čísel dostávame

$$\frac{2}{\frac{1}{a+y}+\frac{1}{b+x}} \leqq \frac{(a+y)+(b+x)}{2} = \frac{a+b+x+y}{2} \leqq \frac{3}{2}.$$

Z toho úpravou obdržíme nerovnosť

$$\frac{1}{a+y}+\frac{1}{b+x} \geqq \frac{4}{3}.$$

Pridaním prvej a štvrtej nerovnosti dostávame

$$\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a+y}+\frac{1}{b+x}+\frac{1}{b+y} \geqq \frac{1}{2}+\frac{4}{3}+1=\frac{17}{6}.$$

Úloha T-2.
Ukážeme, že jediné funkcie spĺňajúce podmienky zo zadania sú funkcie v tvare

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{ak } x \geqq 0,\\ kx, & \text{ak } x \leqq 0,\end{cases}$$

pričom k je ľubovoľné reálne číslo spĺňajúce $k \geqq 1$.

Nech f je funkcia vyhovujúca zadaniu. Dosadením $x=y$ dostávame

$$0 \geqq (f(x^2)-x^2)(f(x)-x). \tag{1}$$

Špeciálne pre $x=1$ a $x=0$ máme $f(0)=0$ a $f(1)=1$. Po dosadení $y=1$ do pôvodnej nerovnosti dostávame

$$2xf(x) \geqq f(x^2)+x^2 \tag{2}$$

pre všetky reálne čísla x.

Najskôr ukážeme, že $f(x)=x$ pre $x \geqq 0$. Uvažujme dva prípady.

- ▷ Predpokladajme, že $f(x) < x$. Z nerovnosti (2) dostávame $0 > f(x^2)-x^2$. Použitím tejto nerovnosti dostávame $0 < (f(x^2)-x^2)(f(x)-x)$, čo je v spore s nerovnosťou (1). Preto $f(x) \geqq x$ pre všetky $x \geqq 0$.
- ▷ Predpokladajme, že $f(x^2) > x^2$. Z nerovnosti (2) dostávame $0 < f(x)-x$. Použitím tejto nerovnosti dostávame $0 < (f(x^2)-x^2)(f(x)-x)$, čo je opäť v spore s nerovnosťou (1). Preto $f(x^2) \leqq x^2$ pre všetky $x \geqq 0$. Dosadením $\sqrt{x}$ za x dostávame $f(x) \leqq x$ pre všetky $x \geqq 0$.

Z uvedených prípadov vidíme, že jediné riešenie pre $x \geqq 0$ je $f(x)=x$.

Pozrime sa teraz na prípad, keď x a y sú záporné čísla. Z nerovnosti zo zadania a použitím $f(x)=x$ pre $x \geqq 0$ dostávame nerovnosť $x^2y+xyf(x) \geqq x^2f(y)+x^2y$. Po vydelení tejto nerovnosti záporným číslom x^2y dostávame

$$\frac{f(x)}{x} \leqq \frac{f(y)}{y}.$$

V ostatnej nerovnosti musí nastať rovnosť vďaka symetrii. Preto $f(x) = kx$ pre nejaké pevne zvolené reálne číslo k. Po dosadení $x = -1$ a $y = 1$ do pôvodnej nerovnosti dostávame podmienku $k \geqq 1$. Preto riešením pre $x \leqq 0$ môže byť len funkcia tvaru $f(x) = kx$ pre pevne zvolené $k \geqq 1$.

Dosadením tohto riešenia do pôvodnej nerovnosti ľahko nahliadneme, že je splnená.

Úloha T-3.

Predpokladajme, že políčka šachovnice sú ofarbené striedavo čiernou a bielou farbou tak, že políčko, na ktorom mravec začína, je čierne. Najskôr ukážeme, že MEMOrované sú práve tie pravouholníky, ktoré majú všetky rohové políčka biele. V druhej časti určíme počet pravouholníkov s bielymi rohmi.

Zaveďme súradnicovú sústavu na šachovnici tak, že čierne políčko, na ktorom mravec začína, má súradnice $(1, 1)$, jednotková dĺžka je zhodná s dĺžkou strany jedného políčka a x-ová os je rovnobežná so spodnou stranou šachovnice. Keďže mravec začína a končí na čiernom políčku, počet čiernych políčok, ktoré mravec počas presunu navštívi, je o 1 viac ako počet bielych políčok, ktoré navštívi. Preto na šachovnici ostane nepárny počet nenavštívených políčok a bielych bude medzi nimi o 1 viac ako čiernych. Z toho vyplýva, že MEMOrovaný pravouholník musí mať strany nepárnej dĺžky a rohy bielej farby.

Ďalej ukážeme, že každý pravouholník spĺňajúci vyššie popísané podmienky je MEMOrovaný. Budeme postupovať indukciou vzhľadom na $K + L$. Pre $K = L = 1$ pozostávajú oba prípustné pravouholníky len z jedného políčka. Pre oba jednoducho nájdeme cestu, ktorou mravec mohol ísť. Predpokladajme preto, že $K + L \geqq 3$. Uvažujme ľubovoľný prípustný pravouholník. Nech jeho ľavý dolný roh má súradnice (a, b). Ak $a \geqq 3$, tak mravec môže na začiatku svojej cesty prejsť ľavé dva stĺpce, čím sa šachovnica zmenší o dva stĺpce a mravec sa bude nachádzať na políčku $(3, 1)$. Na túto situáciu môžeme použiť indukčný predpoklad. Preto môžeme predpokladať, že $a < 3$. Analogicky môžeme predpokladať, že $b < 3$. Keďže políčko (a, b) musí mať bielu farbu, ostávajú prípady $(a, b) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$. Vďaka symetrii sa môžeme obmedziť na prípad $a = 2$ a $b = 1$. Podobnou úvahou ukážeme, že pre súradnice pravého horného rohu uvažovaného pravouholníka stačí uvažovať možnosti $(2L - 1, 2K)$ a $(2L, 2K - 1)$. Aby však pravouholník mal strany nepárnej dĺžky, pravý horný roh musí byť $(2L, 2K - 1)$. V takomto prípade ľahko nahliadneme, že stačí, aby mravec prešiel ľavý stĺpec z políčka $(1, 1)$ na políčko $(1, 2K)$ a potom horný riadok z políčka $(1, 2K)$ na políčko $(2L, 2K)$.

Ostáva určiť počet pravouholníkov s bielymi rohmi. Každý taký pravouholník je jednoznačne určený jeho ľavým dolným rohom (a, b) a pravým horným rohom (c, d). Navyše čísla a, b, c a d musia spĺňať $1 \leqq a \leqq c \leqq 2L$, $1 \leqq b \leqq d \leqq 2K$, čísla a a c majú rovnakú paritu a čísla b a d majú opačnú paritu ako číslo a. V prípade, že číslo a je nepárne, existuje $\binom{L+1}{2}$ možností pre dvojice (a, c) a nezávisle na tom $\binom{K+1}{2}$ možností pre párne dvojice (b, d). V prípade, že a je párne, dostaneme rovnako veľa prípustných pravouholníkov. Preto počet všetkých MEMOrovaných pravouholníkov je

$$2\binom{K+1}{2}\binom{L+1}{2} = \frac{K(K+1)L(L+1)}{2}.$$

Úloha T-4.

Každému šťastnému obyvateľovi Happy City priraďme číslo -1 a každému nešťastnému $+1$. Takéto priradenie nám umožňuje jednoducho popísať zmenu v šťastí obyvateľa: Ak sa obyvateľ A s číslom a usmeje na obyvateľa B s číslom b, nové číslo obyvateľa B bude ab.

Uvažujme situáciu, keď obyvatelia majú priradenú postupnosť čísel $u_1, u_2, \ldots, u_{2014}$. Na konci dňa sa postupnosť priradených čísel zmení na $v_1, v_2, \ldots, v_{2014}$, pričom $v_i = u_1 u_2 \ldots u_i = v_{i-1} u_i$. Z toho dostávame $u_i = v_i v_{i-1}$.

Označme $a_1, \ldots, a_{2014}$ postupnosť čísel priradených vo štvrtok večer, $b_1, \ldots, b_{2014}$ v stredu večer, $c_1, \ldots, c_{2014}$ v utorok večer, $d_1, \ldots, d_{2014}$ v pondelok večer a $e_1, \ldots, e_{2014}$ v pondelok ráno. Pre jednoduchosť zápisu definujme $a_i = b_i = c_i = d_i = e_i = 1$ pre všetky celé čísla $i \leqq 0$. Pre všetky $i \in \{1, 2, \ldots, 2014\}$ dostávame

$$\begin{aligned} b_i &= a_i a_{i-1}, \\ c_i &= b_i b_{i-1} = a_i a_{i-1}^2 a_{i-2} = a_i a_{i-2}, \\ d_i &= c_i c_{i-1} = a_i a_{i-1} a_{i-2} a_{i-3}, \\ e_i &= d_i d_{i-1} = a_i a_{i-4}. \end{aligned}$$

Nech x_j označuje počet jednotiek v postupnosti $a_j, a_{j+4}, a_{j+8}, \ldots$ Použitím tohto označenia vieme zapísať počet nešťastných obyvateľov vo štvrtok večer ako $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 14$.

Pozrime sa teraz na to, koľko obyvateľov mohlo mať v pondelok ráno priradené číslo -1. Keďže $e_i = a_i a_{i-4}$, môže e_i nadobúdať hodnotu -1 len v prípade, že práve jedno z čísel a_i, a_{i-4} je rovné 1. Preto pre $j = 1, 2, 3, 4$, počet členov postupnosti e_j, e_{j+4}, e_{j+8}, … rovných -1 môže byť maximálne $2x_j + 1$, pričom $2x_j$ členov prislúcha nešťastným obyvateľom vo štvrtok večer a jeden obyvateľ navyše je v prípade, že $a_j = -1$ a $j - 4 \leqq 0$. Preto v pondelok ráno mohlo byť maximálne $2x_1 + 1 + 2x_2 + 1 + 2x_3 + 1 + 2x_4 + 1 = 32$ šťastných obyvateľov.

Posledným krokom riešenia je ukázať situáciu, v ktorej bolo v pondelok ráno 32 šťastných obyvateľov a ktorá je v súlade so zadaním. Uvažujme prípad $a_8 = a_{16} = \ldots = a_{8 \cdot 14} = 1$ a $a_i = -1$ pre všetky ostatné i. To znamená, že vo štvrtok večer bolo práve 14 nešťastných a teda 2000 šťastných obyvateľov. Jednoducho môžeme overiť, že takúto situáciu vo štvrtok večer môžeme dostať zo situácie v pondelok ráno, pri ktorej $e_1 = e_2 = e_3 = -1$, $e_4 = e_8 = \ldots = e_{4 \cdot 29} = -1$ a $e_i = 1$ pre ostatné i. V tomto prípade je počet šťastných obyvateľov v pondelok ráno $3 + 29 = 32$.

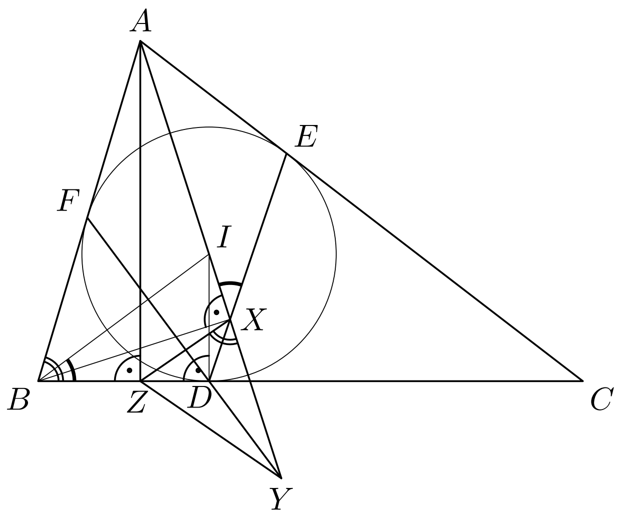
Úloha T-5.

Zrejme bod X leží medzi bodmi A a Y (obr. 54). Veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC označme ako zvyčajne α, β, γ. Platí

$$|\measuredangle EXI| = |\measuredangle DEC| - |\measuredangle XAE| = \left(90^\circ - \tfrac{1}{2}\gamma\right) - \tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}\beta = |\measuredangle DBI|,$$

odkiaľ dostávame, že štvoruholník $BDXI$ je tetivový, a teda

$$|\measuredangle AXB| = |\measuredangle IXB| = |\measuredangle IDB| = 90^\circ = |\measuredangle AZB|.$$



Obr. 54

Z toho vyplýva, že aj štvoruholník $ABZX$ je tetivový. Odtiaľ $|\measuredangle ZXY| = \beta$ a keďže $|\measuredangle DXY| = |\measuredangle EXI| = \frac{1}{2}\beta$, dokázali sme, že bod D leží na osi uhla ZXY. Podobne možno dokázať, že D leží na osi uhla XYZ. Z toho už vyplýva dokazované tvrdenie.

Poznámka. Alternatívny spôsob, ako dokončiť riešenie úlohy po dokázaní, že štvoruholník $ABZX$ je tetivový, je nasledovný: Vieme, že $|\measuredangle DZX| = \frac{1}{2}\alpha$ a podobne $|\measuredangle YZD| = \frac{1}{2}\alpha$. Takže ZD je os uhla YZX. Ostáva len overiť, že $|\measuredangle YDX| = 90° + \frac{1}{2}|\measuredangle YZX|$. Vieme, že $|\measuredangle YZX| = \alpha$ a

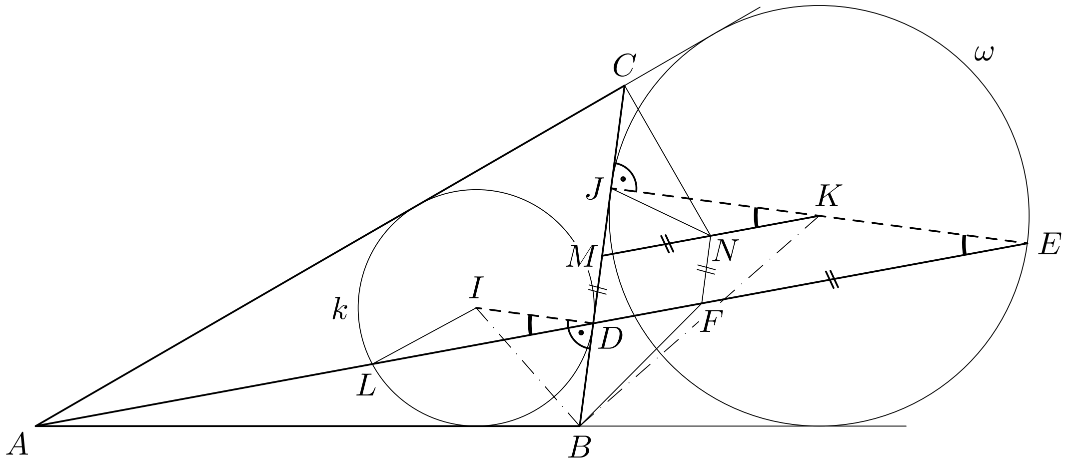
$$|\measuredangle YDX| = |\measuredangle FDB| + |\measuredangle CDE| = \left(90° - \tfrac{1}{2}\beta\right) + \left(90° - \tfrac{1}{2}\gamma\right) = 90° + \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Úloha T-6.

Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $|AB| \leqq |AC|$. Označme ω kružnicu pripísanú k strane BC trojuholníka ABC a E priesečník priamky AD a kružnice ω, ktorý je ďalej od D. Rovnoľahlosť so stredom A, ktorá zobrazí k na ω, zobrazí bod D na bod E. Navyše priamka EK je kolmá na stranu BC a pretína ju v bode J, ktorý je dotykovým bodom ω s BC. Keďže bod K je stredom JE a – ako vieme[14] – bod M je stredom DJ, sú priamky MK a DE rovnobežné (obr. 55).

Veďme bodom N rovnobežku s BC a jej priesečník s DE označme F. Potom štvoruholník $DFNM$ je rovnobežník. Aplikovaním Tálesovej vety na pravouhlý trojuholník MKJ dostávame $|JN| = |MN| = |DF|$. Z toho vyplýva, že $DFNJ$ je rovnoramenný lichobežník, a keďže $|BD| = |JC|$, aj $BFNC$ je rovnoramenný lichobežník. Z toho dôvodu je tiež tetivovým štvoruholníkom a stačí ukázať, že body B, C, F, L ležia na jednej kružnici. Urobíme to tak, že dokážeme rovnosť $|DB| \cdot |DC| = |DL| \cdot |DF|$.

[14] Je známe, že pri štandardnom označení dĺžok strán trojuholníka ABC platí $|BD| = |CJ| = s - b$, pričom $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.



Obr. 55

Nech I je stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC a $|\measuredangle ABC| = \beta$. Pravouhlé trojuholníky BDI a KJB majú ostré uhly s veľkosťami $\frac{1}{2}\beta$ a $90° - \frac{1}{2}\beta$, sú teda podobné. Preto

$$|DI| \cdot |JK| = |DB| \cdot |JB| = |DB| \cdot |DC|$$

a ostáva overiť, že $|DI| \cdot |JK| = |DL| \cdot |DF|$.

Keďže $AE \parallel MK$ a $ID \parallel JK$, dostávame $|\measuredangle IDL| = |\measuredangle JED| = |\measuredangle JKM|$, preto rovnoramenné trojuholníky ILD a NKJ sú podobné a tým je dokázané, že $|DI| \cdot |JK| = |DL| \cdot |JN|$. Už skôr sme ukázali, že $|JN| = |DF|$, z čoho dostávame požadovanú rovnosť.

Úloha T-7.

Označme S_n hľadaný najmenší možný súčet prvkov priemerovej n-prvkovej množiny. Dokážeme, že $S_n = n + \frac{1}{2}n(n+1)D_n$, pričom $D_1 = D_2 = 2$ a pre $n \geqq 3$ je D_n najmenším spoločným násobkom prvkov množiny $\{1, \ldots, n-1\}$.

Príkladom priemerovej množiny, ktorej súčet prvkov nadobúda uvedenú hodnotu, je množina

$$\mathsf{A}_n = \{1 + j \cdot D_n \mid j = 0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Naozaj, nech $1 + j_1 D_n, \ldots, 1 + j_k D_n$ je nejakých jej k rôznych prvkov. Ak $1 \leqq k < n$, tak ich aritmetický priemer

$$\frac{(1 + j_1 D_n) + \ldots + (1 + j_k D_n)}{k} = 1 + (j_1 + \ldots + j_k) \cdot \frac{D_n}{k}$$

je celé číslo, pretože D_n/k je celé číslo. Ak $k = n$, tak ich aritmetický priemer je

$$\frac{(1 + j_1 D_n) + \ldots + (1 + j_k D_n)}{k} = 1 + (n-1) \cdot \frac{D_n}{2}, \tag{1}$$

čo je celé číslo, pretože D_n je vždy párne. Súčet prvkov množiny A_n je n-násobkom výrazu (1), čiže práve $n + \frac{1}{2}n(n-1)D_n$.

Uvažujme teraz ľubovoľnú n-prvkovú priemerovú množinu $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, pričom $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Dokážeme, že súčet jej prvkov je aspoň $n + \frac{1}{2}n(n-1)D_n$.

Pre $n = 1$ a $n = 2$ to triviálne platí, preto predpokladajme, že $n \geqq 3$. Použijeme nasledovné pomocné tvrdenie: Ak prirodzené čísla i, j spĺňajú $1 \leqq i < j \leqq n$, tak $a_i \equiv a_j \pmod{D_n}$.

Dôkaz. Uvažujme ľubovoľné celé číslo k spĺňajúce $1 \leqq k < n$ a nech $r_1, \dots, r_{k-1}$ je ľubovoľných $k-1$ rôznych indexov z množiny $\{1, 2, \dots, n\} - \{i, j\}$. Keďže A je priemerová, súčty $a_i + a_{r_1} + \dots + a_{r_{k-1}}$ a $a_j + a_{r_1} + \dots + a_{r_{k-1}}$ sú deliteľné číslom k a teda je ním deliteľný aj ich rozdiel $a_i - a_j$. To dokazuje, že $a_i - a_j$ je násobkom každého z čísel $1, 2, \dots, n-1$ a teda tiež násobkom ich najmenšieho spoločného násobku D_n.

Z uvedeného tvrdenia máme $a_1 \equiv a_2 \equiv \dots \equiv a_n \pmod{D_n}$, preto existujú celé čísla $0 = j_1 < j_2 < \dots < j_n$ také, že $a_i = a_1 + j_i \cdot D_n$. Odtiaľ dostávame

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_n &= na_1 + (j_1 + j_2 + \dots + j_n)D_n \geqq \\ &\geqq n + (0 + 1 + \dots + (n-1))D_n = n + \frac{1}{2}n(n-1)D_n, \end{aligned}$$

čo sme chceli dokázať.

Úloha T-8.
Ukážeme, že jediným riešením je štvorica $(x, y, z, t) = (1, 1, 3, 1)$.

Predpokladajme, že (x, y, z, t) je jedno z riešení. V prípade, že $z = t = 1$, dostávame upravenú rovnicu $20^x + 14^{2y} = x + 2y + 1$. Pritom $20^x > 2^x \geqq x + 1$ a $14^{2y} > 2y + 1$. Sčítaním a využitím vyššie upravenej rovnice dostávame $x + 2y + 1 > (x+1) + (2y+1)$, čo je spor. Preto $zt > 1$.

Ak by x bolo párne, mali by sme

$$20^x + 14^{2y} \equiv (-1)^x + (-1)^{2y} \equiv 2 \pmod{3}.$$

Zároveň, aby bola splnená rovnosť (keďže ľavá strana je vždy párna), muselo by aj z byť párne. V tom prípade by však pravá strana bola štvorcom a jej zvyšok po delení troma by nemohol byť 2.

Preto x, a teda aj z, sú nepárne. Z toho dostávame

$$20^x + 14^{2y} \equiv (-1)^x + (-1)^{2y} \equiv (-1) + 1 \equiv 0 \pmod{3},$$

čiže $x + 2y + z$ je deliteľné tromi. Keďže $zt > 1$, máme

$$0 \equiv 20^x + 196^y \equiv 2^x + 7^y \pmod{9},$$

z čoho vyplýva

$$2^{x+2y} \equiv 2^x \cdot 4^y \equiv (-7^y) \cdot 4^y \equiv -28^y \equiv -1 \pmod{9}.$$

Vyšetrením zvyškov mocnín čísla 2 po delení deviatimi ľahko nahliadneme, že na platnosť predošlej kongruencie je nutné, aby $x + 2y$ bolo deliteľné tromi, čiže aj $z = (x + 2y + z) - (x + 2y)$ musí byť deliteľné tromi.

Poznamenajme, že x ani y nemôžu byť deliteľné tromi. V opačnom prípade by totiž museli byť obe deliteľné tromi a dostali by sme netriviálne riešenie Fermatovej rovnice $a^3 + b^3 = c^3$, ktoré, ako vieme, neexistuje. K rovnakému záveru možno dospieť aj bez použitia uvedeného poznatku, a to analýzou rovnice modulo 13: Ak by bolo $x/3$ nepárne celé číslo, mali by sme

$$20^x + 14^{2y} \equiv \left(20^3\right)^{x/3} + 1^{2y} \equiv 5^{x/3} + 1 \equiv 6 \text{ alebo } 9 \pmod{13}.$$

Na druhej strane, štvorec čísla môže po delení číslom 13 dávať iba zvyšky 0, 1, 5, 8 a 12.

Najskôr predpokladajme, že $x \neq y$ a označme $a = \min\{x, y\}$. Všimnime si, že 2^{2x} je najväčšou mocninou dvoch, ktorá delí 20^x, zatiaľ čo 2^{2y} je najväčšou mocninou dvoch, ktorá delí 14^{2y}. Z toho vyplýva, že 2^{2a} je najväčšou mocninou dvoch, ktorá delí $20^x + 14^{2y}$. Vzhľadom na to, že $3 \mid z$, je nutne aj a deliteľné tromi, čo je v spore s predošlým zistením, že žiadne z čísel x, y nie je deliteľné tromi. Nutne teda $x = y$.

Využitím všetkých doterajších záverov dostávame

$$(3x + z)^{zt} = 20^x + 14^{2x} = 4^x(5^x + 49^x) = 4^x \cdot 54 \cdot A,$$

pričom

$$A = 5^{x-1} - 49 \cdot 5^{x-2} + 49^2 \cdot 5^{x-3} - \ldots + 49^{x-1},$$

čiže

$$A \equiv (-1)^{x-1} - 1 \cdot (-1)^{x-2} + \ldots + 1 \equiv 1 + 1 + \ldots + 1 \equiv x \not\equiv 0 \pmod{3}.$$

Číslo $(3x + z)^{zt} = 4^x \cdot 54 \cdot A = 2^{2x+1} \cdot 3^3 \cdot A$ nie je deliteľné 3^4. Preto $zt < 4$ a keďže $3 \mid z$, nutne $z = 3$ a $t = 1$.

Ak by bolo $x > 1$, dostali by sme

$$27(x+1)^3 = (3x+3)^3 = 20^x + 14^{2x} > 14^{2x} = 14^x \cdot 14^x > 14^2 \cdot 8^x > 27 \cdot (2^x)^3 \geqq 27(x+1)^3,$$

čo je očividný spor. Takže $x = y = 1$ a jediným kandidátom na riešenie je štvorica $(1, 1, 3, 1)$. Táto štvorica naozaj vyhovuje – hodnota na oboch stranách zadanej rovnice je pre ňu 216.

*i*KS – korešpondenčný seminár SKMO

Korešpondenčný seminár Slovenskej komisie Matematickej olympiády (KS SKMO) vznikol v 24. ročníku MO v školskom roku 1974/75 ako jeden z prvých matematických korešpondenčných seminárov (vtedy ešte ako československý seminár) preto, aby bolo umožnené venovať individuálnu starostlivosť aj tým študentom, ktorí nenavštevovali triedy so zameraním na matematiku. Úlohy tohto seminára svojou náročnosťou prevyšujú akúkoľvek inú matematickú súťaž na Slovensku pre stredoškolákov, seminár je preto dôležitou súčasťou prípravy aj na medzinárodnú matematickú olympiádu (IMO).

Počas svojej existencie prešiel seminár viacerými zmenami. V školskom roku 2003/04 jeho organizovanie prebrali vedúci korešpondenčného seminára KMS a až do 60. ročníka MO bol KS SKMO jeho kategóriou GAMA a KMS oficiálnym seminárom SKMO.

V školskom roku 2011/12 seminár dostal novú tvár pod názvom *i*KS a stal sa z neho medzinárodný seminár, nakoľko série striedavo pripravujú organizátori zo Slovenska (vedúci KMS; poz. ďalšiu kapitolu) a z Českej republiky (vedúci seminára MKS organizovaného na Matematicko-fyzikálnej fakulte Univerzity Karlovej v Prahe) – svojim záberom sa tak opäť vrátil na územie celého bývalého Československa, kde pôvodne vznikol. Riešiteľská základňa sa stala česko-slovenská, čo má napomôcť motivácii a konkurencii medzi študentmi, ako i odovzdávaniu skúseností medzi vedúcimi.

Súťaž zmenila formát na 6 sérií po 4 úlohy, v každej sérii je jedna úloha z každej zo štyroch tradičných olympiádnych disciplín – algebra, geometria, kombinatorika, teória čísel. Bývajú zoradené podľa odhadovanej náročnosti. Najlepších cca. 10 študentov má na konci ročníka možnosť zúčastniť sa sústredenia, ktoré má bohatý matematický program a koná sa tesne pred celoštátnym kolom MO, aby riešitelia mohli skúsenosti na ňom získané v súťaži využiť. Plný počet bodov za jednu úlohu je 7 – rovnako ako na IMO, spolu sa teda za všetky série dalo získať max. 168 bodov.

Celkové poradie *i*KS 2013/2014

1. *Eduard Batmendijn*, 3. ročník, Cirk. g. sv. Mikuláša, St. Ľubovňa, SR, 152 bodov
2. *Anh Dung Le*, 4. ročník, Gymnázium Tachov, ČR, 143 bodov
3. *Samuel Sládek*, 2. ročník, Gymnázium A. Bernoláka, Námestovo, SR, 121 bodov
4. *Radovan Švarc*, 3. ročník, Gymnázium Česká Třebová, ČR, 119 bodov
5. *Bui Truc Lam*, 3. ročník, Gymnázium Grösslingová, Bratislava, SR, 94 bodov

Uvádzame všetky príklady tohto ročníka súťaže spolu s riešeniami, často študentskými. Série pripravované v ČR ponechávame v češtine. Príklady boli zväčša vyberané z národných olympiád či iných súťaží, prípadne z literatúry, pôvod (pokiaľ bol zaevidovaný) uvádzame pri zadaniach.

Všetky informácie o seminári možno nájsť na internetovej adrese *iksko.org*.

Zadania súťažných úloh *i*KS

Prvá séria

N1. Množina M racionálních čísel splňuje

i) $0 \in M$,

ii) kdykoli $x \in M$, tak i $x+1 \in M$ a $x-1 \in M$,

iii) kdykoli $x \in M \setminus \{0,1\}$, tak

$$\frac{1}{x(x-1)} \in M.$$

Musí být M už nutně množina všech racionálních čísel? (*Putnam, 2009*)

C1. V kruhu je rozmístěno několik krabic. V každé z nich je nějaký počet míčků, připadně může být krabice prázdná. Pavel chodí po směru pohybu hodinových ručiček a pokaždé, když se mu nějaká krabice začne líbit, vytáhne z ní všechny míčky a počínaje od následující krabice dává po jednom míčku do každé krabice, okolo které prochází.

a) Dokažte, že pokud se Pavlovi líbí pokaždé ta krabice, do které naposledy vložil míček, tak bude rozmístění míčků časem stejné jako jejich počáteční rozmístění.

b) Dokažte, že Pavel umí vhodnými sympatiemi ke krabicím zařídit, aby se rozmístění míčků v krabicích měnilo na jakékoliv jiné se stejným celkovým počtem míčků. (*Moskovská MO, 2001*)

A1. Je dáno reálné číslo a a posloupnost $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ splňující rekurentní předpis $x_0 = a$, $x_{n+1} = 2a - (a^2+1)/x_n$. Ukažte, že pokud je tato posloupnost periodická, má její nejkratší perioda lichou délku. (*Petrohradská MO, 1996*)

G1. Trojúhelníky ABC a XYZ sdílí vepsanou kružnici a navíc body B, C, Y, Z leží v přímce. Uvažme kružnici, která se dotýká úseček AB, AC a navíc kružnice opsané trojúhelníku ABC,[15] a její bod dotyku s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC označme T. Ukažte, že pokud X leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC, tak T leží na kružnici opsané trojúhelníku XYZ.

(*Mathematical Reflections, 2011*)

[15] Táto kružnica sa v anglických textoch nazýva „mixtilinear incircle“.

Druhá séria

G2. Na stranách AB a BC konvexného štvoruholníka $ABCD$ sú postupne dané body M a N tak, že CM a AN delia jeho obsah na polovice. Dokážte, že MN rozpoľuje uhlopriečku BD. (*Kanada, 2008*)

N2. *Mocninou* nazveme také prirodzené číslo, ktoré sa dá zapísať v tvare a^n, kde a, n sú prirodzené čísla, $n > 1$.

a) Dokážte, že existuje taká množina 2013 prirodzených čísel, že súčet prvkov ľubovoľnej jej neprázdnej podmnožiny nie je mocnina.

b) Dokážte, že existuje taká množina 2013 prirodzených čísel, že súčet prvkov ľubovoľnej jej neprázdnej podmnožiny je mocnina.

C2. V kruhu (vrátane hranice) s polomerom 1 máme n bodov. Dokážte, že aspoň $n^2/6 - n/2$ dvojíc týchto bodov je vzdialených najviac $\sqrt{2}$.

A2. Postupnosť $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ spĺňa

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad \text{a} \qquad a_{k+1} = -a_k + \frac{1}{2 - a_k} \quad \text{pre } k \geqq 1.$$

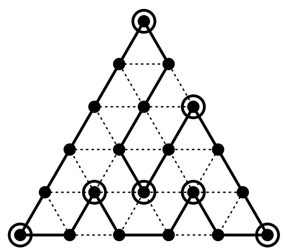
Označme A_n aritmetický priemer prvých n čísel postupnosti. Dokážte, že

$$\left(\frac{1}{2A_n} - 1\right)^n \leqq A_n^n \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{a_i} - 1\right).$$

(*Čína, 2006*)

Tretia séria

C3. Rovnostranný trojúhelník o straně délky n je vyplněný jednotkovou trojúhelníčkovou mřížkou. Uzavřená lomená čára vede podél této mřížky a každý vrchol mřížky potká právě jednou. Dokažte, že tato čára alespoň $(n+1)$-krát zahne do ostrého úhlu (obr. 56).



Obr. 56

G3. Čtyřstěn $ABCD$ má tu vlastnost, že součet obsahů stěn ABC a ABD je stejný jako součet obsahů stěn CDA a CDB. Ukažte, že středy hran AC, AD, BC, BD a střed koule vepsané leží v jedné rovině. (*Turnaj miest, 2003*)

A3. Jsou dána reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ukažte, že pro každou neprázdnou podmnožinu $\mathsf{M} \subset \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ platí nerovnost

$$\Bigl(\sum_{i \in \mathsf{M}} x_i\Bigr)^2 \leqq \sum_{1 \leqq i \leqq j \leqq n} (x_i + \ldots + x_j)^2.$$

(*Rumunsko, 2004*)

N3. Nalezněte všechna přirozená čísla n, pro která mají čísla n a $2^n + 1$ stejnou množinu prvočíselných dělitelů. (*Gabriel Dospinescu*)

Štvrtá séria

C4. Nájdite všetky neprázdne množiny S celých čísel také, že pre každé $m, n \in \mathsf{S}$ je $3m - 2n \in \mathsf{S}$. (*Čína, 2013*)

N4. Nájdite všetky také $n \in \mathbb{N}$, pre ktoré $2n + 7 \mid n! - 1$.

G4. Označme O stred kružnice opísanej trojuholníku ABC. Feuerbachova kružnica trojuholníka ABC a kružnica opísaná trojuholníku OBC sa pretínajú v dvoch bodoch X a Y. Dokážte, že $|\measuredangle BAY| = |\measuredangle CAX|$. (*Srbsko, 2013*)

A4. Majme polynóm $P(x)$ s reálnymi koeficientmi taký, že existuje nekonečne veľa dvojíc celých čísel a, b, pre ktoré platí $P(a)+P(b) = 0$. Dokážte, že graf funkcie $y = P(x)$ je symetrický podľa nejakého svojho bodu.

Piata séria

A5. Pro všechna přirozená čísla $n \geqq 2$ dokažte rovnost

$$\lfloor \sqrt[2]{n} \rfloor + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor + \ldots + \lfloor \sqrt[n]{n} \rfloor = \lfloor \log_2(n) \rfloor + \lfloor \log_3(n) \rfloor + \ldots + \lfloor \log_n(n) \rfloor .$$

G5. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. O kružnici k řekneme, že je *šikovná*, pokud prochází bodem A, protíná strany AB a AC (průsečíky označíme postupně X_k, Y_k) a navíc průsečík úseček BY_k a CX_k leží na k. Dokažte, že všechny šikovné kružnice prochází pevným bodem různým od A.

C5. Na kružnici leží dva bílé žetony (a žádné černé). Je povoleno provádět následující operace.
- Vložíme na kružnici další bílý žeton a sousední dva žetony přebarvíme (z bílé na černou a obráceně).
- Zbývají-li na kružnici alespoň 3 žetony, jeden bílý žeton odebereme a přebarvíme dva žetony, se kterými tento odebraný sousedil.

Je možné dosáhnout stavu, kdy zbudou na kružnici pouze dva černé žetony a žádné bílé?

N5. David zkoumal monický[16] polynom p s celočíselnými koeficienty. Snažil se dokázat, že tento polynom nemá celočíselný kořen tak, že chtěl najít přirozené číslo n takové, aby pro všechna $k \in \{0, \dots, n-1\}$ platilo

$$p(k) \not\equiv 0 \pmod{n}.$$

Zjistil ale, že takové n není možné najít. Musí už v takovém případě polynom p mít celočíselný kořen? (*Fínsko, 2007*)

Šiesta séria

A6. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, ktoré spĺňajú nasledujúce podmienky:
- pre každé x platí $f(x^2) = f(x)^2 - 2xf(x)$;
- pre každé x platí $f(-x) = f(x-1)$;
- Ak $1 < x < y$, tak potom $f(x) < f(y)$. (*Turecko, 2013*)

N6. Nájdite všetky prirodzené čísla k také, že súčin prvých k nepárnych prvočísel sa dá zapísať v tvare $a^b + 1$, kde a, b sú prirodzené čísla, pričom $b > 1$.
(*Rusko, 2013*)

G6. Majme konvexný štvoruholník $ABCD$ s navzájom kolmými uhlopriečkami pretínajúcimi sa v bode E. Označme P bod na strane AD rôzny od A taký, že $|EP| = |EC|$. Kružnica opísaná trojuholníku BCD pretína stranu AD v bode Q, ktorý je rôzny od A. Kružnica prechádzajúca cez A, ktorá sa dotýka priamky EP v bode P, pretína úsečku AC v bode R. Ak B, Q, R sú kolineárne, tak ukážte, že $|\measuredangle BCD| = 90^\circ$.

C6. V každom vrchole pravidelného n-uholníka ($n \geqq 3$) je položená minca. V každom ťahu si vyberieme nejakú stranu a vymeníme 2 mince, ktoré ležia vo vrcholoch vybranej strany. Urobíme niekoľko takých ťahov, až nakoniec každá dvojica mincí bude vymenená práve raz. Dokážte, že nejaká strana nebola vybraná (teda že sa nevymieňali mince v jej vrcholoch).
(*Romanian Masters in Mathematics, 2013*)

[16] Monický polynom je takový, který má koeficient u členu nejvyššího stupně roven jedné, tedy například polynom $x^3 + 2x^2 + 3$ je monický, zatímco polynom $2x^2 + 1$ není.

Riešenia súťažných úloh *i*KS

Prvá séria

N1.

Ukážeme, že množina M všech racionálních čísel bez čísel tvaru $\frac{3}{5}+n$, kde n je libovolné celé číslo, splňuje podmínky zadání. Označme $S = \{\frac{3}{5}+n; n \in \mathbb{N}\}$, tedy platí $M = \mathbb{Q}\setminus S$. Zřejmě 0 náleží do M, takže je splněna první podmínka.

Pokud m náleží do M, potom $m+1$ a $m-1$ jsou jistě racionální čísla. Pokud by ale jedno náleželo S, pak existuje n, že $m \pm 1 = \frac{3}{5} + n$, čili $m = \frac{3}{5} + (n \pm 1) \in S$, což je spor s tím, že m náleží do M. Tím je zaručena platnost druhé podmínky.

Zbývá ověřit, že pokud m je prvkem M, poté i číslo $1/[m(m-1)]$ je prvkem M. Číslo m je racionální, můžeme jej tedy zapsat v základním tvaru jako a/b. Potom dostaneme

$$\frac{1}{m(m-1)} = \frac{1}{\frac{a}{b}(\frac{a}{b}-1)} = \frac{b^2}{a(a-b)}.$$

Předpokládejme nyní pro spor, že existuje n, pro které platí

$$\frac{b^2}{a(a-b)} = \frac{3}{5} + n = \frac{3+5n}{5}.$$

Protože $\operatorname{nsd}(a,b) = \operatorname{nsd}(b, a-b) = 1$, čísla b^2 a $a(a-b)$ jsou nesoudělná, stejně jako čísla $3+5n$ a 5. Oba zlomky jsou tedy v základním tvaru (až na znaménko ve jmenovateli), porovnáním čitatelů dostáváme $b^2 = \pm(3+5n)$. Číslo b^2 tedy dává zbytek 2 nebo 3 po dělení pěti, což je ale nemožné, neboť 2 ani 3 nejsou kvadratickými zbytky modulo pěti. Tím dospíváme ke sporu, takže množina M splňuje i třetí podmínku. Vidíme, že množina splňující podmínky ze zadání nemusí být nutně množina všech racionálních čísel.

C1.

a) Pavlovo sebrání míčků z jedné krabice a následné naházení míčků do dalších krabic nazvěme tahem. Pokud známe krabici, do které Pavel hodil míček jako poslední a počty míčků v krabicích po tahu, dokážeme zpětně zrekonstruovat celý tah (tedy i počty míčků před tahem). Stačí jít v opačném směru a sbírat míčky, než narazíme na prázdnou krabici, a jakmile se tak stane, tak do ní dáme všechny sesbírané míčky. V tomto zpětném tahu jsme nemohli jít dál, protože jinak by musela být krabice prázdná po Pavlově vhození míčku. Současně jsme se nemohli zastavit dřív, protože jinak by Pavel nevyprázdnil celou krabici.

Počty míčků v jednotlivých krabicích spolu s pozicí krabice, která se Pavlovi bude v příštím tahu líbit, nazveme stavem. Stavů je jen konečně mnoho, proto když bude Pavel dostatečně dlouho provádět tahy, dostane se jednou do stavu, ve kterém se ocitl. Podívejme se na okamžik, kdy se to stane poprvé. Pokud by tento stav nebyl počátečním, tak by se do něj postupně dostal ze dvou různých stavů – to je ovšem spor s tím, že stav před tahem se dá jednoznačně určit. Pavel se tedy časem dostane do stavu, ve kterém začínal.

b) V této části se nebudeme zabývat stavy, ale rozmístěními – rozmístěním rozumíme pouze údaje o počtech míčků v krabicích (bez Pavlovy „pozice"). Díky části a) víme, že kdykoli se jedním tahem můžeme dostat z rozmístění A do rozmístění B, tak následným opakováním tahů z a) se nakonec opět octneme v rozmístění A. Jinak řečeno pak existuje posloupnost tahů vedoucí z B do A.

Nyní trochu obecněji, pokud existuje posloupnost tahů z rozmístění A do rozmístění B, dejme tomu přes rozmístění M_1, M_2, …, M_k, tak z pozorování z předchozího odstavce máme posloupnost tahů z B do M_k, z M_k do M_{k-1}, … až z M_1 do A. Celkově tedy opět existuje posloupnost tahů z B do A.

K vyřešení úlohy již stačí najít jedno rozmístění C s celkovým počtem n míčků takové, že je možné se do něj dostat z jakéhokoli jiného rozmístění s celkovým počtem n míčků. Tím totiž kdykoli se bude chtít Pavel dostat z rozmístění A do rozmístění B (v obou je n míčků), tak se nejprve dostane do C a následně víme, že existuje posloupnost taků z B do C, tedy existuje i z C do B.

Jako C volme takové rozmístění, kdy je v jedné pevné krabici K všech n míčků a zbylé krabice jsou prázdné. Do tohoto rozmístění se dostaneme následovně: vždy si Pavel vybere míček M mimo K, a tento míček každým tahem posune o jednu krabici dál (vybere si vždy krabici s M a při rozdávání míčků se M zbaví jako prvního). Takto časem dostane M do K, a v tom okamžiku si vybere jiný míček. Pavlovi se K nikdy nelíbí, tedy počet míčků v K takto roste do té doby, než jsou v K všechny míčky.

A1.

(Podle *Eduarda Batmendijna* a *Samuela Sládeka*.) Nejdříve si uvědomíme, že nejenže libovolný člen posloupnosti určuje člen následující, ale že určuje i člen předchozí. Platí

$$x_n = \frac{a^2+1}{2a - x_{n+1}}.$$

Je-li posloupnost dobře definovaná, je každý její člen nenulový, takže každý člen je také různý od $2a$. Předchozí vztah lze proto použít pro každé $n \in \mathbb{N}_0$.

Předpokládejme, že zadaná posloupnost je periodická. Vezměme nejmenší m, pro které $x_m = x_0 = a$. V rámci první periody se podívejme na součet členů „naproti", např. $x_0 + x_m = a + a = 2a$, $x_1 + x_{m-1} = (a^2-1)/a + (a^2+1)/a = 2a$ atd. Indukcí dokážeme, že platí $x_i + x_{m-i} = 2a$ i pro každou další dvojici. Předpokládejme, že již platí $x_i + x_{m-i} = 2a$ pro nějaké $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Potom

$$x_{i+1} + x_{m-i-1} = 2a - \frac{a^2+1}{x_i} + \frac{a^2+1}{2a - x_{m-i}} = 2a - \frac{a^2+1}{x_i} + \frac{a^2+1}{x_i} = 2a.$$

Nakonec pro spor předpokládejme, že $m = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Potom z dokázané identity plyne $x_k + x_k = 2a$, tudíž $x_k = a$, což je spor s tím, že $2k$ je nejkratší perioda.

Jiné řešení. (Podle *Anh Dung Le* a *Radovana Švarce*; náznak.) Pokusíme se nalézt explicitní vzorec pro x_n. Za tímto účelem si vypíšeme několik prvních členů

$$a, \quad \frac{a^2-1}{a}, \quad \frac{a^3-3a}{a^2-1}, \quad \dots$$

a všimneme si, že se čitatel jednoho zlomku rovná jmenovateli následujícího. Definujeme si tedy posloupnost $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ tak, aby $y_0 = 1$ a $y_{n+1}/y_n = x_n$. Zadaný rekurentní vztah je po přeformulování do y_n již lineární diferenční rovnice, která je standardně řešitelná.

Lze spočítat, že

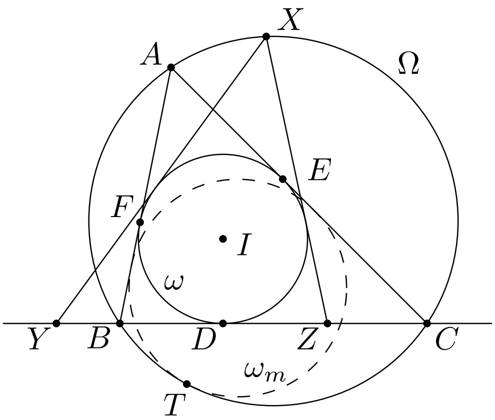
$$x_n = \frac{(a+i)^{n+1} + (a-i)^{n+1}}{(a+i)^n + (a-i)^n},$$

kde i je komplexní jednotka. Řešení se dokončí tak, že se ukáže, že z rovnosti $x_j = x_{j+2k}$ plyne (po úpravách) rovnost $x_j = x_{j+k}$.

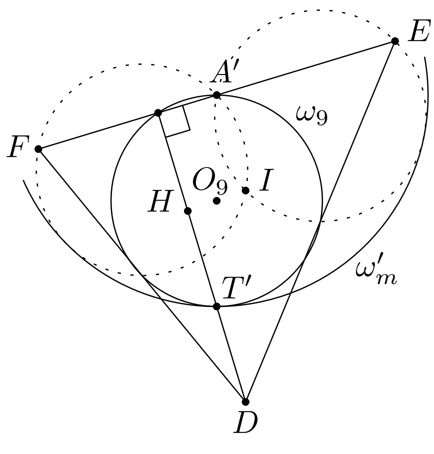
G1.

Označme ω kružnici vepsanou trojúhelníku ABC, I její střed, r její poloměr a D, E, F body dotyku se stranami BC, CA, AB. Dále označme Ω kružnici opsanou trojúhelníku ABC a ω_m „mixtilineární“ kružnici ze zadání (obr. 57a). Provedeme kruhovou inverzi podle ω. Obrazy značme čárkovaně.

Body A, B, C se zobrazí na středy úseček EF, FD, DE, takže Ω se zobrazí na Feuerbachovu kružnici[17] trojúhelníka DEF. Označme ji ω_9 a její střed O_9. Přímky AB, AC se zobrazí na kružnice s průměry IF, IE, které tak mají stejně jako ω_9 poloměr $\frac{1}{2}r$ a procházejí bodem A' (obr. 57b). Kružnice ω_m se tudíž zobrazí na kružnici se středem A' a poloměrem r a bod T se zobrazí na „bod naproti“ A' na ω_9 neboli na střed úsečky DH, kde H je ortocentrum trojúhelníka DEF. Povšimněme si, že O_9T' je jakožto střední příčka v trojúhelníku HID rovnoběžná s ID a má délku $\frac{1}{2}|ID| = \frac{1}{2}r$.



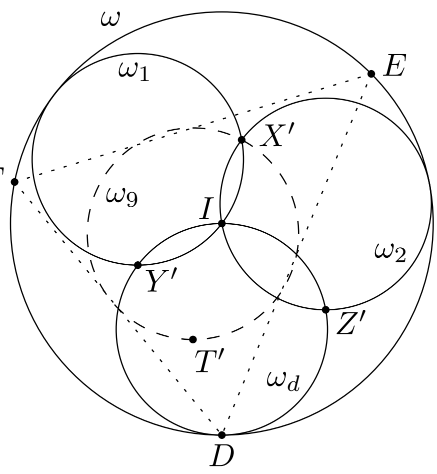
Obr. 57a



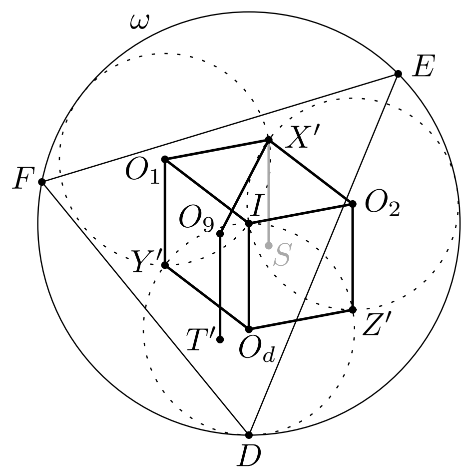
Obr. 57b

[17] O základních vlastnostech Feuerbachovy kružnice (kružnice devíti bodů) se můžete dočíst například na Wikipedii.

Nyní do zvláštního obrázku zobrazíme body X, Y, Z. Leží-li bod X na Ω, leží jeho obraz X' na ω_9. Přímky XY, XZ se zobrazí na kružnice ω_1, ω_2, které procházejí skrz I a X' a dotýkají se kružnice ω, takže mají rovněž poloměry $\frac{1}{2}r$. Jejich průsečíky s kružnicí nad průměrem DI (označme ji ω_d) jsou pak obrazy bodů Y, Z. Nyní stačí dokázat, že body T', X', Y', Z' leží na jedné kružnici (obr. 58a).



Obr. 58a



Obr. 58b

Dokreslíme-li středy O_1, O_2, O_d kružnic ω_1, ω_2, ω_d a všechny vzniklé úsečky délky $\frac{1}{2}r$, dostaneme obrázek šestiúhelníku $X'O_1Y'O_dZ'O_2$ složeného ze tří kosočtverců[18] $X'O_1IO_2$, $Y'O_1IO_d$, $Z'O_2IO_d$ a lomenou čáru $X'O_9T'$ (obr. 58b). S úsečkou IO_d je tak rovnoběžná nejen úsečka O_9T', ale i úsečky O_1Y' a O_2Z'. Dokreslíme-li proto rovnoběžník $X'IO_dS$, vzniknou dále kosočtverce $X'O_9T'S$, $X'O_1Y'S$ a $X'O_2Z'S$, takže body T', X', Y', Z' leží na kružnici se středem S a poloměrem $\frac{1}{2}r$.

Druhá séria

G2.

Z konvexnosti štvoruholníka (rozmyslite si) dostávame výpočty obsahov:

$$2S_{ABCM} = S_{ABCD},$$
$$2\left(\tfrac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|AC,B| + \tfrac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|AC,M|\right) = \tfrac{1}{2}\cdot|AC|\cdot(|AC,B| + |AC,D|).$$

Odtiaľ

$$|AC,M| = \frac{|AC,D| - |AC,B|}{2},$$

[18] Pro pokrytí degenerovaných případů chápeme rovnoběžník jako čtveřici bodů $KLMN$ takovou, že vektor KL je shodný s vektorem NM. Kosočtverec pak chápeme jako rovnoběžník $KLMN$, ve kterém navíc $|KL| = |KN|$.

a podobne

$$|AC,N| = \frac{|AC,D| - |AC,B|}{2} = |AC,M|.$$

Z tejto rovnice vyplýva rovnobežnosť MN s AC (okrem rovnakej vzdialenosti M, N od AC totiž máme aj polohu M, N v rovnakej polrovine AC) a aj tvrdenie zo zadania (napr. môžeme zaviesť súradnicovú os kolmú na AC).

N2.

a) Stačí zobrať množinu $\{p, 2p, \dots, 2013p\}$ pre prvočíslo $p > \frac{1}{2} \cdot 2013 \cdot 2014$. Potom triviálne je súčet prvkov jej ľubovoľnej podmnožiny deliteľný p, no je menší ako p^2, preto nie je deliteľný p^2, a teda to určite nie je mocnina.

b) (Podľa *Eduarda Batmendijna.*) Dokážeme indukciou, že pre každé $k \in \mathbb{N}$ existuje číslo $s_k \in \mathbb{N}$ také, že čísla s_k, $2s_k$, ..., ks_k sú mocniny.

Pre $k = 1$ tvrdenie platí triviálne. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre k, čiže čísla s_k, $2s_k$, ..., ks_k sú mocniny. Potom $is_k = a_i^{q_i}$. Položme

$$s_{k+1} = s_k \cdot \big((k+1)s_k\big)^{q_1 \cdots q_k}.$$

Zrejme

$$is_{k+1} = is_k \cdot \big((k+1)s_k\big)^{q_1 \cdots q_k} = a_i^{q_i} \cdot \Big(\big((k+1)s_k\big)^{\frac{q_1 \cdots q_k}{q_i}}\Big)^{q_i}$$

je mocnina pre $1 \leqq i \leqq k$, a tiež

$$(k+1)s_{k+1} = (k+1) \cdot s_k \cdot \big((k+1)s_k\big)^{q_1 \cdots q_k} = \big((k+1)s_k\big)^{1+q_1 \cdots q_k}$$

je mocnina. Platí teda tvrdenie pre $k+1$.

Uvažujme množinu $\{s_n, 2s_n, \dots, 2013s_n\}$ pre $n \geqq \frac{1}{2} \cdot 2013 \cdot 2014$. Súčet prvkov ľubovoľnej jej podmnožiny je násobok s_n, ktorý neprevyšuje $\frac{1}{2} \cdot 2013 \cdot 2014 \cdot s_n$, a teda podľa definície s_n to je mocnina.

C2.

(Podľa *Miroslava Stankoviča.*) Postupujme indukciou. Pre $n = 1$ tvrdenie platí. Stačí teda ukázať, že medzi $n+1$ bodmi existuje taký, ktorý je od aspoň

$$\left(\frac{(n+1)^2}{6} - \frac{n+1}{2}\right) - \left(\frac{n^2}{6} - \frac{n}{2}\right) = \frac{n-1}{3}$$

bodov vzdialený najviac $\sqrt{2}$.

Ak je nejaký bod v strede, môžeme zvoliť ten. Ak žiadny nie je v strede, vezmime ľubovoľný bod X, urobme priemer prechádzajúci tým bodom a priemer naň kolmý. Tým kruh rozdelíme na štyri časti. Dva menšie štvrťkruhy neobsahujúce X označme $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, zvyšný polkruh označme $\mathcal{C}$. Počty bodov v nich označme a, b, $c+1$. Body v $\mathcal{A}$ sú navzájom najďalej $\sqrt{2}$, to isté platí o bodoch v $\mathcal{B}$. Nakoniec všetky body v $\mathcal{C}$ sú od bodu X vzdialené najviac $\sqrt{2}$.

Rozlíšme tri prípady:

▷ Ak $n = 3k$, z nerovností

$$\begin{aligned} a-1 &< \frac{n-1}{3} = k - \frac{1}{3}, \quad \text{čiže} \quad a-1 \leqq k-1, \\ b-1 &< \frac{n-1}{3} = k - \frac{1}{3}, \quad \text{čiže} \quad b-1 \leqq k-1, \\ c &< \frac{n-1}{3} = k - \frac{1}{3}, \quad \text{čiže} \quad c \leqq k-1 \end{aligned}$$

dostaneme $n-2 = a-1+b-1+c \leqq 3k-3 = n-3$, čo je spor.

▷ Ak $n = 3k+1$, z nerovností

$$\begin{aligned} a-1 &< \frac{n-1}{3} = k, \quad \text{čiže} \quad a-1 \leqq k-1, \\ b-1 &< \frac{n-1}{3} = k, \quad \text{čiže} \quad b-1 \leqq k-1, \\ c &< \frac{n-1}{3} = k, \quad \text{čiže} \quad c \leqq k-1 \end{aligned}$$

dostaneme $n-2 = a-1+b-1+c \leqq 3k-3 = n-4$, čo je opäť spor.

▷ Ak $n = 3k+2$, z nerovností

$$\begin{aligned} a-1 &< \frac{n-1}{3} = k + \frac{1}{3}, \quad \text{čiže} \quad a-1 \leqq k, \\ b-1 &< \frac{n-1}{3} = k + \frac{1}{3}, \quad \text{čiže} \quad b-1 \leqq k, \\ c &< \frac{n-1}{3} = k + \frac{1}{3}, \quad \text{čiže} \quad c \leqq k \end{aligned}$$

dostaneme $n-2 = a-1+b-1+c \leqq k+k+k = n-2$. Zostala tak jediná možnosť: všetky nerovnosti sú rovnosti. Podľa našej konštrukcie to znamená, že všetky body z $\mathcal{A}$ sú od bodov z $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ vzdialené viac ako $\sqrt{2}$, symetricky to platí o bodoch z $\mathcal{B}$. Body v $\mathcal{A}$ môžeme teda dať do jedného bodu, analogicky body v $\mathcal{B}$ (rozmyslite si dôkladne, že to môžeme spraviť). Keďže však $\mathcal{A}$ aj $\mathcal{B}$ sú navzájom a aj od $\mathcal{C}$ vzdialené viac ako $\sqrt{2}$, leží $\mathcal{C}$ v jednom štvrťkruhu (rozmyslite si), takže počet dvojíc je

$$\frac{a(a-1)}{2} + \frac{b(b-1)}{2} + \frac{(c+1)c}{2} = 3\frac{(k+1)k}{2} = \frac{(n+1)^2}{6} - \frac{n+1}{2}.$$

A2.

(Podľa *Samuela Sládeka* a *Anh Dung Le.*) Riešenie bude pozostávať z niekoľkých pozorovaní (počas úprav výrazov v celom riešení si poriadne uvedomte, prečo ich môžeme urobiť).

Lema. Platí $0 < a_i \leqq \frac{1}{2}$.

Dôkaz. Obe nerovnosti dokážeme indukciou: ľavú priamo a pravú sporom. Pre $i = 1$ tvrdenie platí, druhý krok je zhrnutý v zápisoch

$$(a_i - 1)^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad a_{i+1} = -a_i + \frac{1}{2 - a_i} = \frac{(a_i - 1)^2}{2 - a_i} > 0$$

a

$$a_{i+1} = -a_i + \frac{1}{2 - a_i} > \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a_i(2a_i - 3) > 0 \quad \Rightarrow \quad a_i > \frac{3}{2}.$$

Lema. Pre $a_1, \ldots, a_n \in \left(0, \frac{1}{2}\right\rangle$ platí

$$\left(\frac{1}{A_n} - 1\right)^n \leqq \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{a_i} - 1\right).$$

Dôkaz. Upravme nerovnosť na tvar

$$\left(\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}(1-a_i)}{n}}{\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}}\right)^n \leqq \frac{\prod_{i=1}^{n}(1 - a_i)}{\prod_{i=1}^{n} a_i}.$$

Vľavo máme mocninu pomeru aritmetických priemerov čísel a_i a čísel stredovo súmerných s a_i podľa stedu $\frac{1}{2}$, vpravo zase mocninu pomerov geometrických priemerov. Použijeme klasickú metódu „balance“ a dokážeme, že najhorší prípad v nerovnosti nastáva pre $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, kde sa ale nadobúda rovnosť, čím bude nerovnosť dokázaná. Nech teda bez ujmy na všeobecnosti $x + \varepsilon = a_1 > a_2 = x - \varepsilon$. Potom nahraďme a_1 aj a_2 číslom $x = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$. Ľavá strana zrejme zostane rovnaká. Pravá strana sa prenásobí výrazom

$$\frac{(x + \varepsilon)(x - \varepsilon)(1 - x)^2}{(1 - x - \varepsilon)(1 - x + \varepsilon)x^2},$$

o ktorom stačí ukázať, že je menší alebo rovný jednej. To už necháme na čitateľa. Treba si len uvedomiť, aké môžu byť x a ε.

Na dokončenie úlohy netreba nič viac, ako dokázať nerovnosť

$$\left(\frac{1}{2A_n} - 1\right)^n \leqq A_n^n \cdot \left(\frac{1}{A_n} - 1\right)^n \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \geqq 2A_n^2 - 4A_n + 1.$$

Pretože A_n je zrejme menšie ako $\frac{1}{2}$, a teda menšie ako väčší z koreňov danej kvadratickej rovnice, riešenie dokončíme dvomi lemami. Označme c menší z dvojice koreňov rovnice $0 = 2x^2 - 4x + 1$.

Lema. Platí $a_{2i-1} > c$ a $a_{2i} < c$.

Dôkaz. Keďže $a_1 = \frac{1}{2} > c$, stačí ukázať, že postupnosť $a_i - c$ mení znamienka. To ale ľahko nahliadneme z rovnosti

$$a_{i+1} - c = \left(-a_i + \frac{1}{2-a_i}\right) - \left(-c + \frac{1}{2-c}\right) = (c - a_i)\left(1 - \frac{1}{(2-c)(2-a_i)}\right),$$

pretože posledný činiteľ je zrejme vačší ako 1.

Lema. Platí $A_n \geqq c$.

Dôkaz. Zrejme $a_2 = \frac{1}{6}$. Všimnime si, že

$$a_{2i-1} + a_{2i} = \frac{1}{2 - a_{2i-1}} \geqq \frac{1}{1-c} \geqq 2c.$$

Teraz pre párne n máme

$$A_n = \frac{(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}) + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{n-1} + a_n)}{n} > c,$$

lebo $\frac{2}{3} > 2c$. Pre nepárne n podobne máme

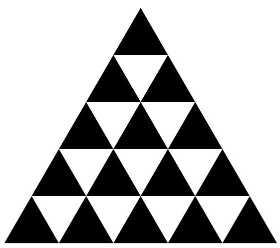
$$A_n = \frac{(a_1 + a_2) + \ldots + (a_{n-2} + a_{n-1}) + a_n}{n} > c,$$

lebo $a_n > c$.

Tretia séria

C3.

Nejdříve si uvědomíme, že pro $n = 1$ úloha platí triviálně, dále budeme předpokládat $n \geqq 2$. Obarvěme si na černo trojúhelníčky, které jsou otočené špičkou nahoru (tak jako na obr. 59).



Obr. 59

Všimněme si, že každý úsek čáry vede podél právě jednoho z těchto trojúhelníčků. Žádný z našich trojúhelníčků nebude sousedit všemi třemi stranami s naší čárou, protože pak by byla čára uzavřená jen kolem tohoto malého trojúhelníčku. Označme si počet černých trojúhelníčků, které mají s čárou společnou jen jednu (resp. dvě) strany a_1 (resp. a_2). Pak si můžeme délku čáry vyjádřit jako $a_1 + 2a_2$. Navíc víme, že $a_1 + a_2$ je maximálně tolik, kolik je černých trojúhelníčků. Těch je $1 + 2 + \ldots + n$ (počítáme je po řádcích). Víme tedy $a_1 + a_2 \leqq 1 + 2 + \ldots + n$. Navíc čára je tak dlouhá, jaký je počet bodů, které obsahuje. Opět je spočítáme po řádcích a je jich $1 + 2 + \ldots + (n + 1)$. Víme tedy, že

$$
\begin{aligned}
1 + 2 + \ldots + (n + 1) = a_1 + 2a_2 = a_2 + (a_1 + a_2) &\leqq a_2 + 1 + 2 + \ldots + n,\\
a_2 &\geqq n + 1.
\end{aligned}
$$

Existuje tedy alespoň $n + 1$ černých trojúhelníčků, kde čára prochází kolem dvou jeho stran. Ale na těchto místech se čára láme do ostrého úhlu. Ostrých úhlů je proto alespoň $n + 1$.

G3.

Natočme čtyřstěn tak, aby hrany AB a CD ležely ve svislých rovinách ϱ, τ (představujme si ϱ „vlevo“ a τ „vpravo“).

Množina středů úseček RT, kde $R \in \varrho$ a $T \in \tau$ je zřejmě svislá rovina ležící přesně v polovině mezi ϱ a τ. Nazvěme tuto rovinu σ. Středy hran AC, AD, BC, BD všechny patří do roviny σ.

Označme I střed koule vepsané a r její poloměr. Hranatými závorkami značme objem, resp. obsah, a zaměřme se na součet objemů $[ABCI] + [ABDI]$. Jelikož $[ABC] + [ABD]$ je rovno polovině povrchu čtyřstěnu, máme

$$
[ABCI] + [ABDI] = \frac{r}{3}([ABC] + [ABD]) = \frac{1}{2}[ABCD].
$$

Označíme-li písmenem J průsečík roviny ABI s hranou CD (řezem čtyřstěnu rovinou ABI je tedy trojúhelník ABJ), můžeme vyjádřit tentýž součet objemů pomocí obsahu společné stěny ABI jako

$$
[ABCI] + [ABDI] = \frac{[ABI]}{3}(|C, ABI| + |D, ABI|),
$$

kde $|W, XYZ|$ značí vzdálenost bodu W od roviny XYZ. Objem celého čtyřstěnu ale lze vyjádřit jako $[ABCD] = \frac{1}{3}[ABJ](|C, ABI| + |D, ABI|)$. Porovnáním dostáváme $[ABI] = \frac{1}{2}[ABJ]$. Bod I tedy leží v polovině výšky z vrcholu J trojúhelníka ABJ, a tedy také leží v rovině σ.

Jiné řešení. Zavedeme barycentrický souřadnicový systém

$$
A = (1, 0, 0, 0), \quad B = (0, 1, 0, 0), \quad C = (0, 0, 1, 0), \quad D = (0, 0, 0, 1).
$$

Středy hran AC, AD, BC, BD mají potom postupně souřadnice

$$
S_{AC} = \left(\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, 0\right), \quad S_{AD} = \left(\tfrac{1}{2}, 0, 0, \tfrac{1}{2}\right), \quad S_{BC} = \left(0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0\right), \quad S_{BD} = \left(0, \tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}\right)
$$

a střed koule vepsané čtyřstěnu $ABCD$ má souřadnice

$$I = ([BCD]/S, [ACD]/S, [ABD]/S, [ABC]/S),$$

kde $[XYZ]$ značí opět obsah trojúhelníka XYZ a S značí povrch čtyřstěnu $ABCD$.

Obecná rovnice roviny v prostoru má tvar $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = 0$, kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ jsou parametry. Stačí si tedy tipnout rovinu s rovnicí $x + y - z - w = 0$ a dosazením ověřit, že všech pět požadovaných bodů v ní leží. U středů hran je to jasné (vždy se odečte polovina s polovinou), u bodu I využijeme zadanou podmínku $[ABC]+[ABD] = [ACD] + [BCD]$.

A3.

Nejprve učiníme několik pozorování, která nám umožní úlohu zkonkrétnit. Mějme libovolnou n-tici reálných čísel $A = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Označme X_M množinu $\{x_i; i \in M\}$. Slovem interval budeme označovat sumu $x_i + \dots + x_j$ pro nějaká $1 \leqq i \leqq j \leqq n$.

i) Pokud se v A vyskytuje nula, můžeme ji smazat, čímž dostaneme $(n-1)$-tici, pro kterou má nerovnost opět platit. Smazáním nuly jsme levou stranu neovlivnili, zatímco na pravé jsme vynechali několik čtverců intervalů (začínajících nebo končících nulou). Proto nám stačí nerovnost dokázat pro n-tice bez nuly, opakováním úvahy bez nul.

ii) Pokud dokážeme platnost nerovnosti pro tu indexovou podmnožinu $M \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, pro kterou je absolutní hodnota sumy $\sum_{i \in M} x_i$ největší možná, bude už nerovnost platit i pro všechny ostatní a budeme hotovi (pravá strana na M nezávisí). Toho dosáhneme zřejmě volbou buď právě všech kladných, nebo právě všech záporných x_i. Je vidět, že změna znamének všech čísel x_i nerovnost nezmění, čili můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že všechna čísla v X_M jsou kladná.

iii) Pokud se v dané n-tici vyskytují dvě sousední čísla se stejným znaménkem, můžeme je „slít“ do jednoho ($x_i, x_{i+1} \to x'_i = x_i + x_{i+1}$), čímž dostaneme novou $(n-1)$-tici takovou, že z platnosti nerovnosti pro ni plyne platnost nerovnosti pro původní n-tici (levá strana se nezměnila, protože čísla se stejným znaménkem buď obě jsou, nebo obě nejsou v X_M, a pravá strana se zmenšila o čtverce těch intervalů, které obsahují právě jedno z čísel x_i, x_{i+1}). Po „slití“ dvou sousedních čísel pochopitelně všechna x_i přeindexujeme od 1 po $n-1$ za zachování pořadí a M změníme tak, aby X_M obsahovala zase všechna kladná x_i.

iv) Pokud je první nebo poslední číslo z A záporné, můžeme je vynechat. Levá strana zůstane, z pravé zmizí čtvrece těch intervalů, které začínaly/končily jedním z vynechaných čísel, ostatní intervaly zůstanou beze změny – je dobré si uvědomit, že tuto úvahu nemůžeme použít pro čísla, která nejsou na kraji A, protože by došlo i ke změně některých neodstraňovaných intervalů.

Z těchto pozorování plyne, že stačí nerovnost dokázat pro n-tice s lichým n, které začínají kladným číslem, znaménka čísel se postupně střídají a $M = \{1, 3, \dots, n\}$. Dokážeme, že pro takové n-tice platí identita

$$\sum_{1 \leqq i \leqq j \leqq n} (x_i + \dots + x_j)^2 = \left(\sum_{i \in M} x_i\right)^2 + 2 \sum_{\substack{1 \leqq i \leqq j \leqq n \\ 2 \,|\, j-i+1}} (x_i + \dots + x_j)^2.$$

Z té již dokazovaná nerovnost triviálně plyne. Interval, který má sudý (resp. lichý) počet členů budeme nazývat sudý (resp. lichý). Identita vlastně říká, že součet čtverců všech intervalů je roven čtverci součtu přes X_M plus dvakrát součet čtverců všech sudých intervalů. Protože levá strana je vlastně součet čtverců všech sudých a lichých intervalů, po odečtení součtu čtverců všech sudých intervalů od obou stran dostaneme ekvivalentní rovnost

$$\sum_{\substack{1\leqq i\leqq j\leqq n\\ 2\,|\,j-i}} (x_i+\ldots+x_j)^2 = \Bigl(\sum_{i\in M} x_i\Bigr)^2 + \sum_{\substack{1\leqq i\leqq j\leqq n\\ 2\,|\,j-i+1}} (x_i+\ldots+x_j)^2.$$

Tuto identitu roznásobíme a ukážeme, že všechny vzniklé členy se vyskytují na obou stranách ve stejném počtu, což zřejmě implikuje její platnost. Jaké členy po roznásobení vzniknou? Vzhledem k tomu, že se jedná o čtverce součtů x_i, budou to právě členy x_kx_l, kde $k,l\in\{1,2,\ldots,n\}$ (pro $k\neq l$ jsou to členy $2x_kx_l$, což nám ale nevadí, protože dvojka se objevuje vždy). Tento člen se ve čtverci intervalu vyskytuje právě tehdy, když tento interval obsahuje obě čísla x_k i x_l. Bez újmy na obecnosti nechť $k\leqq l$. Pro index i prvního prvku intervalu obsahujícího x_kx_l platí $i\leqq k$. Podobně pro poslední index j platí $j\geqq l$. Takových intervalů je tedy $k(n-l+1)$. Můžeme si je představit jako šachovnici o rozměrech $k\times(n-l+1)$ (pole o souřadnicích (a,b) odpovídá intervalu, který začíná číslem x_a a končí x_b). Je vidět, že po standardním obarvení této šachovnice (nechť pole odpovídající intervalu od x_1 do x_n je bílé) budou liché intervaly bílé a sudé intervaly budou černé. Pokud je alespoň jeden rozměr šachovnice sudý, je počet černých a bílých polí stejný, čili i počet sudých a lichých intervalů obsahující naše dva členy je stejný. To je v souladu s naší identitou, protože suma přes M obsahuje pouze členy s lichými indexy (platí $n-l+1\equiv l \pmod 2$). Pokud jsou oba rozměry liché, je bílých polí o jedno více než černých (tzn. sudých intervalů je o jeden méně). Dále to znamená, že k, l jsou lichá čísla, takže $k,l\in M$, čili chybějící člen na pravé straně doplní suma přes M. Dokázali jsme, že každý člen se po roznásobení vyskytuje na obou stranách ve stejném počtu, čili rovnost platí.

N3.

Na úvod si rozmyslíme čtyři malá tvrzení. První z nich by mělo být vidět, druhá dvě jsou známá a čtvrté není překvapivé.

Lemma. Pokud a, b jsou lichá čísla taková, že $a\mid b$, pak $2^a+1\mid 2^b+1$.

Důkaz. Pro každé liché k platí známý rozklad

$$A^k+B^k=(A+B)(A^{k-1}-A^{k-2}B+\ldots-AB^{k-2}+B^{k-1}).$$

Naše lemma není nic jiného než jeho přímý důsledek pro $A=2^a$, $B=1$ a liché číslo $k=b/a$.

Lemma. Pro dané prvočíslo p označme ord_p nejmenší přirozené číslo, pro které platí $2^{\mathrm{ord}_p}\equiv 1 \pmod p$ (tzv. řád prvku 2). Potom pro každé přirozené číslo m, pro které $2^m\equiv 1 \pmod p$ platí $\mathrm{ord}_p\mid m$.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že existuje $m = k \cdot \mathrm{ord}_p + l$, kde l je nenulový zbytek po dělení číslem ord_p, takové, že $2^m \equiv 1 \pmod p$. Potom je

$$1 \equiv 2^m = 2^{k \cdot \mathrm{ord}_p + l} \equiv 1^k \cdot 2^l \pmod p,$$

tedy $2^l \equiv 1 \pmod p$ pro $l < \mathrm{ord}_p$, což je spor s minimalitou ord_p.

Lemma. Rovnice $3^a - 2^b = 1$ má v přirozených číslech pouze triviální řešení $a = b = 1$ a $a = 2$, $b = 3$.

Důkaz. Všimněme si, že pro $b \geqq 2$ je a nutně sudé, protože je $2^b + 1 \equiv 1 \pmod 4$. Dostáváme $a = 2c$, $c \in \mathbb{N}$, a následně

$$2^b = 3^{2c} - 1 = (3^c - 1)(3^c + 1).$$

Čísla $3^c - 1$, $3^c + 1$ se liší o 2, takže pokud to nejsou zrovna čísla 2 a 4, nemohou být obě mocniny dvojky. Případ $3^c - 1 = 2$ dá $c = 1$ a posléze $a = 2$, $b = 3$.

Lemma. Pro každé prvočíslo $q > 3$ má číslo $2^q + 1$ prvočíselného dělitele většího než q.

Důkaz. Uvažujme prvočíselného dělitele $p \mid 2^q + 1$. Potom je $2^q \equiv -1 \pmod p$. Naším velmi nepřesně řečeným plánem je, že ord_p bude skoro dělitel q (-1 namísto 1 by snad nemusela hrát velkou roli), tedy nejspíš bude $\mathrm{ord}_p = q$. Zároveň ale z malé Fermatovy věty víme, že $2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, takže $\mathrm{ord}_p \mid p-1$. To by znamenalo, že $q = \mathrm{ord}_p \leqq p-1$, takže p by bylo větší prvočíslo než q. Zpřesněme naše myšlenky.

Protože je $2^q \equiv -1 \pmod p$, je $2^{2q} \equiv 1 \pmod p$. Z druhého lemmatu vyplývá, že $\mathrm{ord}_p \mid 2q$, což znamená, že ord_p je jedno z čísel 1, 2, q, $2q$. Předpokládejme, že se nám podaří vyloučit první dva případy. Pak je $q \leqq \mathrm{ord}_p$. Z malé Fermatovy věty a druhého lemmatu dostáváme $\mathrm{ord}_p \mid p - 1$, tedy $q \leqq \mathrm{ord}_p \leqq p - 1$. Ukázali jsme, že prvočíslo p je větší než q.

Zbývá dokázat, že ord_p není 1 nebo 2. Případ $\mathrm{ord}_p = 1$ by znamenal, že $2^1 \equiv 1 \pmod p$, což pro žádné prvočíslo p neplatí. Případ $\mathrm{ord}_p = 2$ znamená, že $2^2 \equiv 1 \pmod p$, tedy $p = 3$. Jinými slovy pokud má číslo $2^q + 1$ prvočíselného dělitele většího než 3, pak už je tento dělitel větší než q. Pokud nemá, existuje přirozené a, pro něž $2^q + 1 = 3^a$. Z třetího lemmatu pak plyne $q = 3$, ale my uvažujeme jen $q > 3$, čímž je tento případ vyloučen.

Za použití těchto lemmat konečně vyřešíme původní úlohu. Jistě je $2^n + 1$ liché, takže je i n liché. Podle prvního lemmatu pro každého dělitele d čísla n platí $2^d + 1 \mid 2^n + 1$. Je-li $d > 3$ a prvočíslo, existuje podle čtvrtého lemmatu větší prvočíslo p takové, že $p \mid 2^d + 1 \mid 2^n + 1$. Podle zadání pak $p \mid n$. To je ale divné, protože ke každému prvočíslu $d > 3$ umíme najít větší prvočíslo $p \mid n$. Pokud není $n = 3^k$, $k \in \mathbb{N}$, pak speciálně pro největšího prvočíselného dělitele $d \mid n$ dostáváme spor. V případě $n = 3^k$ zadání vynucuje $2^n + 1 = 3^a$, $a \in \mathbb{N}$. Tato rovnice má podle tretího lemmatu řešení pouze $n = 1$ a $n = 3$. První řešení nevyhovuje, zatímco druhé ano.

Štvrtá séria

C4.

Ak je v množine S jediné číslo a, potom môžeme zvoliť len $m = n = a$, čím dostaneme $3a - 2a \in S$, čo zjavne platí. Všetky množiny $S = \{a\}$ teda podmienku zo zadania spĺňajú.

Zamerajme sa teraz na aspoň dvojprvkové množiny. Vyberme spomedzi rozdielov dvoch rôznych prvkov z S (v absolútnej hodnote) ten najmenší a označme ho d. Takýto rozdiel je skutočne nejaké konkrétne číslo – predstavme si, že najprv zvolíme za d ľubovoľný rozdiel dvoch čísel z S, potom skúšame v nejakom poradí všetky ďalšie dvojice a vždy, keď nájdeme nejakú s menším rozdielom, nastavíme d na túto novú, menšiu hodnotu; keďže je ale d prirodzené číslo, zmenšiť ho môžeme len konečne veľa krát, teda od nejakého okamihu už d nikdy nezmenšíme, a vtedy sme už dosiahli jeho žiadanú hodnotu. (Ak by napr. S mohla obsahovať ľubovoľné reálne čísla, nemusel by existovať žiadny rozdiel, ktorý by bol najmenší – premyslite si, prečo.) Niektoré dve čísla, ktoré majú rozdiel d, potom vieme zapísať ako $a + d$, $a + 2d$.

Ukážeme teraz, že množina S musí obsahovať všetky čísla tvaru $a + (3k + z)d$, kde $z \in \{1, 2\}$ a $k \in \mathbb{Z}$.

Postupujme matematickou indukciou. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre dané k (pre $k = 0$ zjavne platí, lebo hovorí len že $a + d, a + 2d \in S$), a dosaďme postupne do podmienky zo zadania

$$\begin{aligned} m &= a + (3k + 2)d,\ n = a + (3k + 1)d\colon \quad a + (3k + 4)d = a + (3(k + 1) + 1)d \in S,\\ m &= a + (3k + 1)d,\ n = a + (3k + 2)d\colon \quad a + (3k - 1)d = a + (3(k - 1) + 2)d \in S. \end{aligned}$$

Z toho vieme, že $a + (3k + 4)d$ aj $a + (3k - 1)d$ tiež patria do S, a môžeme ďalej dosadzovať

$$\begin{aligned} m &= a + (3k + 1)d,\ n = a + (3k - 1)d\colon \quad a + (3k + 5)d = a + (3(k + 1) + 2)d \in S,\\ m &= a + (3k + 2)d,\ n = a + (3k + 4)d\colon \quad a + (3k - 2)d = a + (3(k - 1) + 1)d \in S. \end{aligned}$$

Zistili sme, že naše tvrdenie platí aj pre $k + 1$ (z čoho indukciou od $k = 0$ zistíme, že platí pre všetky nezáporné k), aj pre $k - 1$ (z čoho podobne zistíme, že platí pre všetky záporné k), množina S teda obsahuje všetky čísla v tomto tvare pre všetky celé k.

Množina všetkých čísel v tomto tvare skutočne vyhovuje. Ak si totiž zvolíme ľubovoľné $m = a + (3k_1 + z_1)d$, $n = a + (3k_2 + z_2)d$, podmienka zo zadania hovorí, že

$$3m - 2n = a + (9k_1 - 6k_2 + 3z_1 - 2z_2)d = a + gd \in S,$$

kde $3 \nmid g$, čo dokážeme sporom – ak $3 \mid g$, potom $3 \mid -2z_2$, teda $3 \mid z_2$, čo nie je možné pre $z_2 \in \{1, 2\}$. Číslo $a + gd$ je preto medzi číslami, o ktorých sme už povedali, že do S patria, a teda takáto množina S našu podmienku spĺňa.

Ale čo ak patrí do S ešte nejaké iné číslo? Môže ísť len o číslo v tvare $a + 3kd$, pretože ku každému číslu b vieme nájsť k také, že $a + (3k - 2)d \leqq b \leqq a + (3k + 1)d$;

z minimálnosti d musí potom platiť $a+(3k-1)d \leqq b \leqq a+3kd$, ale keďže chceme b rôzne od $a+(3k-1)d$, musí byť dokonca $a+3kd \leqq b \leqq a+3kd$, teda $b=a+3kd$. Dosaďme teraz

$$\begin{aligned} m&=a+(3k+1)d, & n&=a+3kd: & 3m-2n&=a+3(k+1)d\in S,\\ m&=a+(3(k-1)+2)d, & n&=a+3kd: & 3m-2n&=a+3(k-1)d\in S. \end{aligned}$$

Z toho zasa matematickou indukciou v oboch smeroch po číselnej osi dokážeme, že do S patria aj všetky čísla v tvare $a+3kd$. O množine S teda už vieme, že musí obsahovať všetky čísla v tvare $a+ld$; žiadne ďalšie číslo už obsahovať nemôže, lebo také číslo by muselo ležať medzi dvomi číslami $a+(l-1)d$ a $a+ld$, čo je spor s minimálnosťou d.

Takáto množina vyhovuje zadaniu, lebo pre $m=a+l_1d$, $n=a+l_2d$ platí $3m-2n= =a+(3l_1-2l_2)d=a+l_3d\in S$.

Záver. Riešením sú pre ľubovoľné $a\in\mathbb{Z}$ množiny S tvaru

$$\{a\}, \qquad \big\{a+(3k+z)d; k\in\mathbb{Z}, z\in\{1,2\}\big\}, \qquad \{a+ld; l\in\mathbb{Z}\}.$$

N4.

Predpokladajme, že $2n+7 \mid n!-1$ pre nejaké n. Ak $2n+7$ je zložené, existujú také $a,b\geqq 2$, že $2n+7=ab$. Teda

$$a\mid 2n+7\mid n!-1 \quad\Rightarrow\quad a\nmid n! \quad\Rightarrow\quad a\geqq n+1,$$

analogicky $b\geqq n+1$. Dostávame $2n+7=ab\geqq (n+1)^2$, po úprave $6\geqq n^2$, čiže $2\geqq n$. Po odskúšaní $n=1$ a $n=2$ zistíme, že iba $n=1$ vyhovuje.

Ak $2n+7$ nie je zložené, tak zjavne $2n+7$ je prvočíslo väčšie ako 7. Potom

$$2n+7\mid n!-1 \quad\Rightarrow\quad n!\equiv 1 \pmod{2n+7}.$$

Využitím tohto poznatku, kongruencie $2n+7-a\equiv -a \pmod{2n+7}$ a Wilsonovej vety, ktorá hovorí, že $(p-1)!\equiv -1 \pmod{p}$ pre p prvočíslo, dostávame

$$\begin{aligned} -1&\equiv (2n+6)!=(n+6)!(2n+7-n)(2n+7-(n-1))\dots(2n+7-1)\equiv\\ &\equiv (n+6)!(-n)(-(n-1))\dots(-1)\equiv(-1)n(n!)^2(n+1)(n+2)\dots(n+6)\equiv\\ &\equiv (-1)n(n+1)(n+2)\dots(n+6) \pmod{2n+7}. \end{aligned}$$

Po prenásobení číslom $64=2^6$ máme

$$\begin{aligned} -64&\equiv(-1)n(2n+2)(2n+4)(2n+6)(2n+8)(2n+10)(2n+12)\equiv\\ &\equiv(-1)n(-5)(-3)(-1)\cdot 1\cdot 3\cdot 5 \pmod{2n+7},\\ 64&\equiv(-1)n\cdot 225 \pmod{2n+7}. \end{aligned}$$

Pre párne n máme $0 \equiv 225 - 64 = 161 \pmod{2n+7}$, preto $2n + 7 \mid 161 = 23 \cdot 7$ a keďže $2n + 7$ je prvočíslo väčšie ako 7, nutne $2n + 7 = 23$, t. j. $n = 8$. Pre nepárne n analogickým postupom dostaneme $2n + 7 \mid 289 = 17^2$, teda $2n + 7 = 17$ a $n = 5$. Po dosadení $n = 5$ a $n = 8$ zistíme, že obe vyhovujú. Zadaniu vyhovujú práve čísla 1, 5 a 8.

G4.

Označme E stred strany AB, F stred strany AC, P pätu výšky z vrcholu A na BC a dĺžky strán a obsah trojuholníka ABC ako obvykle.

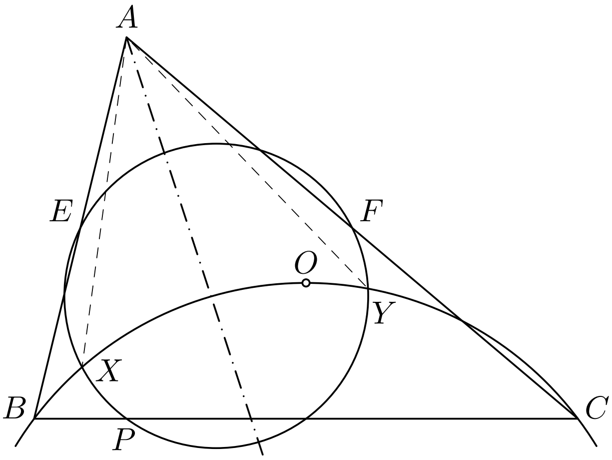
Uvažujme zloženie kružnicovej inverzie so stredom v bode A a polomerom $r = \sqrt{bc/2}$ a osovej súmernosti podľa osi uhla BAC. Obraz bodu B, ktorý označíme B', bude zrejme ležať na polpriamke AC a pre jeho vzdialenosť od A bude platiť

$$|B'A| = \frac{r^2}{|BA|} = \frac{c}{2}.$$

Teda B sa zobrazí na F a preto sa aj F zobrazí na B. Analogicky sa C zobrazí na E a E na C. Priamky AP a AO sú izogonálne (t. j. symetrické podľa osi uhla, skúste si to dokázať), teda polpriamka AP sa v tomto zobrazení zobrazí na polpriamku AO. Ďalej máme

$$|AP| \cdot |AO| = |AP| \cdot \frac{abc}{4S} = |AP| \cdot \frac{abc}{2a|AP|} = \frac{bc}{2},$$

čiže P sa zobrazí na O a O sa zobrazí na P. Ak to dáme dokopy, kružnica opísaná trojuholníku BCO sa zobrazí na Feuerbachovu kružnicu (obr. 60). Teda ich prieniky X, Y sa zobrazia v nejakom poradí na seba. Ak sa X zobrazí na X a Y na Y, tak oba body musia ležať na osi uhla BAC, a teda sú identické a rovnosť uhlov zo zadania platí (môžete si skúsiť dokázať, že tento prípad nikdy nenastane). Ak sa zobrazí X na Y a naopak, tak je zjavné, že X a Y sú izogonálne, teda rovnosť uhlov zo zadania taktiež platí.



Obr. 60

A4.

Zrejme graf nulového polynómu je symetrický podľa nejakého svojho bodu (dokonca každého). Pre iný konštantný polynóm neexistujú celé čísla x, y také, že $P(x)+P(y)=$ $=0$. Ďalej predpokladajme, že P je stupňa $n>1$.

Nech teda $P(x)=a_nx^n+\ldots+a_0$ a $a_n\neq 0$. Je zrejmé, že

$$P(x)+P(y)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{P(x)}{a_n}+\frac{P(y)}{a_n}=0.$$

Pritom graf polynómu $P(x)$ je stredovo súmerný práve vtedy, keď aj graf polynómu $P(x)/a_n$ je stredovo súmerný. Môžeme teda polynóm P vydeliť a_n a odteraz predpokladať, že $a_n=1$.

Ďalej vieme, že ak je polynóm párneho stupňa, existuje $X\in\mathbb{R}$ také, že pre všetky x spĺňajúce $|x|>X$ je $P(x)>0$. Potom však existuje iba konečne veľa celých čísel z, v ktorých má P zápornú hodnotu, a ku každému z existuje len konečne veľa y takých, že $P(y)=-P(z)$ (lebo inak by polynóm $P(x)-P(z)$ mal nekonečne veľa koreňov). Preto je len konečne veľa dvojíc celých čísel, pre ktoré $P(x)+P(y)=0$, čo je spor. Preto je n nepárne.

Označme $d=a_{n-1}/n$. Teraz sa pozrieme na polynóm $Q(x)=P(x-d)$. Jeho graf je len posunutý graf polynómu P. Stačí ukázať, že graf polynómu Q je súmerný, ak existuje nekonečne veľa dvojíc čísel x, y, pre ktoré $Q(x)+Q(y)=0$ a $x+d$ a $y+d$ sú celé.

Vieme, že

$$Q(x)=(x-d)^n+a_{n-1}(x-d)^{n-1}+\ldots+a_0=x^n-ndx^{n-1}+a_{n-1}x^{n-1}+R(x)=x^n+R(x),$$

kde $R(x)$ je polynóm stupňa najviac $n-2$. Vieme, že existujú také K, L, že Q je na intervaloch $(-\infty,K)$ a (L,∞) rastúci. Na intervale (K,L) je ohraničený, a preto existujú také M, N ($M<K$, $N>L$), že na intervaloch $(-\infty,M)$, resp. (N,∞) sú všetky hodnoty Q menšie, resp. väčšie ako ľubovoľná hodnota Q v bode z intervalu (K,L). Zvoľme ich tak, aby $Q(M)<0$ a $Q(N)>0$. Na intervale (M,N) je len konečne veľa čísel tvaru $z+d$, $z\in\mathbb{Z}$ a z rovnakého dôvodu ako na začiatku je len konečne dvojíc x, y takých, že $Q(x)+Q(y)=0$. Preto ich je nekonečne veľa takých, že $x\in(-\infty,M)$ a $y\in(N,\infty)$.

Predpokladajme, že $-x<y$. Najbližšie väčšie číslo tvaru $z+d$, $z\in\mathbb{Z}$ ku $-x$ je jasne $-x+\{2d\}$, kde $\{2d\}$ označuje desatinnú časť čísla $2d$. Ak je $d=\frac{1}{2}z$ pre nejaké celé z, tak je to $-x+1$. V každom prípade to je $-x+e$, kde e je konštanta. Potom sa pozrieme na polynóm

$$Q(x)+Q(-x+e)=x^n+R(x)+(-x+e)^n+R(-x-e)=nex^{n-1}+S(x),$$

kde $S(x)$ je stupňa najviac $n-2$ (lebo $R(x)$ je stupňa najviac $n-2$). Preto existuje h také, že pre $x<h$ bude hodnota toho polynómu kladná (je párneho stupňa). Teda pre $x<h$ a $y>-x$ (a stále $y>N$) bude platiť $Q(x)+Q(y)\geqq Q(x)+Q(-x+e)>0$, a teda máme spor.

Obdobne ak $-y > x$, rovnako zistíme, že existuje H, že pre $y > H$ a $-y > x$ (a stále $y > N$) bude platiť $Q(x) + Q(y) \geqq Q(-y - f) + Q(y) > 0$. No teraz vidno, že je len konečný počet takých dvojíc x, y, že $|x| \neq |y|$. Preto je ich nekonečne takých, že $x = -y$ (pre $x = y$ také nie sú na spomínaných intervaloch). Preto polynóm $Q(x) + Q(-x)$ má nekonečne veľa koreňov a je nulový. Teda Q je nepárny a symetrický podľa bodu $[0, 0]$.

Piata séria

A5.

Mějmě tabulku $n \times n$ políček, kde do políčka v a-tém sloupci a b-tém řádku napíšeme číslo a^b. Vybarvíme všechna čísla, která jsou menší nebo rovna n. Jako příklad je vyobrazena tabulka pro $n = 100$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...	100	100
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	...	100^2	10
1	8	27	64	125	216	343	512	729	10^3	11^3	...	100^3	4
1	16	81	256	5^4	6^4	7^4	8^4	9^4	10^4	11^4	...	100^4	3
1	32	243	4^5	5^5	6^5	7^5	8^5	9^5	10^5	11^5	...	100^5	2
1	64	729	4^6	5^6	6^6	7^6	8^6	9^6	10^6	11^6	...	100^6	2
1	128	3^7	4^7	5^7	6^7	7^7	8^7	9^7	10^7	11^7	...	100^7	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
1	2^{100}	3^{100}	4^{100}	5^{100}	6^{100}	7^{100}	8^{100}	9^{100}	10^{100}	11^{100}	...	100^{100}	1
100	6	4	3	2	2	2	2	2	2	1	...	1	

Dvěma způsoby spočítáme počet vybarvených políček, z čehož dostaneme kýženou rovnost. Zřejmě je vybarvený celý první řádek i první sloupec.

Podívejme se na čísla v a-tém sloupci ($a > 1$). Poslední vybarvené políčko označme jako x-té. Potom $a^x \leqq n$, ale $a^{x+1} > n$. To ale přesně znamená, že $x = \lfloor \log_a n \rfloor$. Navíc všechna čísla v předchozích řádcích jsou také vybarvena, takže v a-tém (kromě prvního, který je vybarven celý) řádku je tedy vybarveno $\lfloor \log_a n \rfloor$ čísel.

Nyní se podívejme na čísla v b-tém řádku. Opět poslední vybarvené políčko označme jako x-té, nyní platí $x^b \leqq n$, ale $x^{b+1} > n$, tedy $x = \lfloor \sqrt[b]{n} \rfloor$. Stejně jako předtím, i všechna čísla v předchozích řádcích musí být vybarvena, tedy v b-tém řádku je vybarveno přesě $\lfloor \sqrt[b]{n} \rfloor$ čísel.

Celkový počet vybarvených čísel musí být stejný, ať je počítáme po řádcích nebo po sloupcích. Z toho dostáváme

$$n + \lfloor \log_2 n \rfloor + \lfloor \log_3 n \rfloor + \ldots + \lfloor \log_n n \rfloor = n + \lfloor \sqrt[2]{n} \rfloor + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor + \ldots + \lfloor \sqrt[n]{n} \rfloor.$$

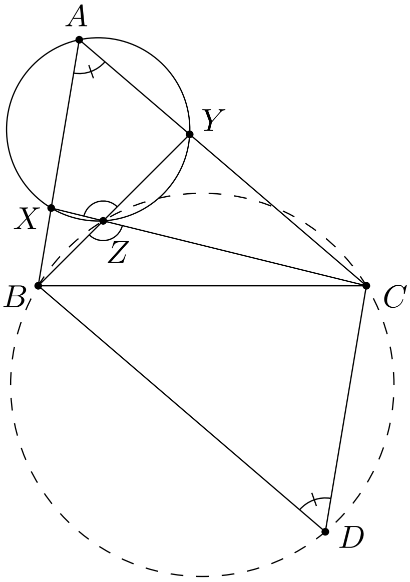
Po odečtení n od obou stran zbude dokazovaná rovnost.

G5.

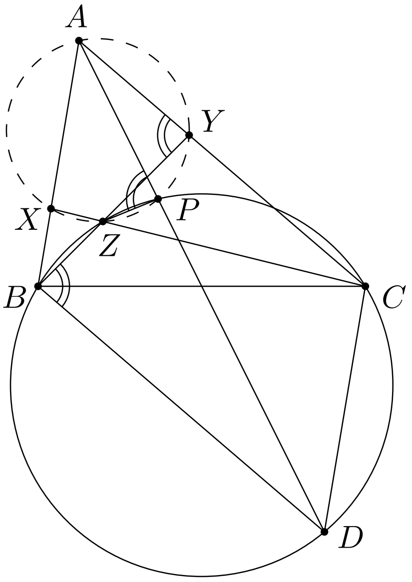
(Podle *Patrika Baka.*) Uvažme šikovnou kružnici k protínající strany AB, AC v bodech X, Y a označme $Z = BY \cap CX$. Ať D je takový bod, že $ABDC$ je rovnoběžník (obr. 61a). Ze šikovnosti plyne

$$|\measuredangle BZC| + |\measuredangle CDB| = |\measuredangle YZX| + |\measuredangle BAC| = 180^\circ,$$

takže čtyřúhelník $BDCZ$ je tětivový (bod Z zřejmě leží uvnitř trojúhelníku ABC). Označme P druhý průsečík AD a kružnice opsané čtyřúhelníku $BDCZ$. Tvrdíme, že P leží na kružnici s body A, Y a Z, a tedy je to hledaný pevný bod (obr. 61b).



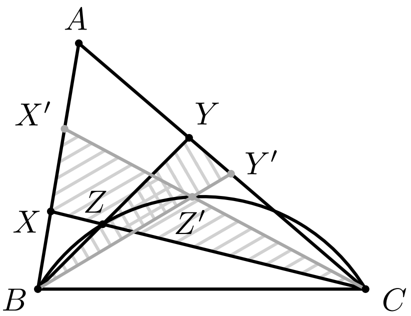
Obr. 61a



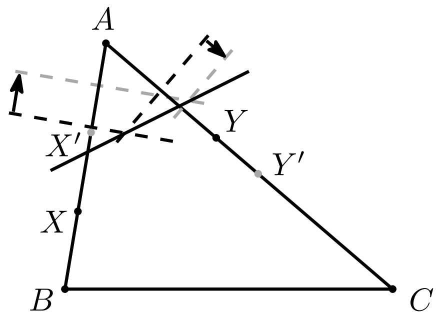
Obr. 61b

Je-li $P = Z$, není co dokazovat. Leží-li P na kratším oblouku ZC, máme $|\measuredangle APZ| = |\measuredangle DBZ| = |\measuredangle AYZ|$, takže $AYPZ$ je tětivový. Leží-li P na kratším oblouku BZ, postupujeme obdobně (zkuste si).

Jiné řešení. (Podle *Filipa Bialase.*) Jako v prvním řešení si všimneme, že pro průsečík $Z = BY \cap CX$ platí $|\measuredangle BZC| = 180^\circ - \alpha$. Uvažme na tomto oblouku kromě pevného bodu Z ještě pohyblivý bod Z' a jemu odpovídající body X', Y' (obr. 62a). Z úhlů snadno dostaneme, že trojúhelníky CXX' a BYY' jsou podobné. A teď je zbytek zřejmý.



Obr. 62a



Obr. 62b

Když totiž hýbeme bodem Z' po kružnici tak, aby se X' vzdaloval od X konstantní rychlostí, bude se díky podobnosti konstantní rychlostí vzdalovat i bod Y' od Y. Osy stran AX, AY se při tom budou konstantními (polovičními) rychlostmi posouvat na osy stran AX', AY' a jejich průsečík (čili střed kružnice opsané trojúhelníku $AX'Y'$) se tak bude konstantní rychlostí posouvat po přímce (obr. 62b). Všechny šikovné kružnice pak budou kromě A procházet i obrazem A podle této přímky.

C5.

Učiníme krok stranou a podíváme se na trochu jinou úlohu – nazvěme ji *žlutomodrou*:

Na kružnici leží dva žetony a celá kružnice je obarvena na žluto. Je povoleno provádět následující operace.

- Vložíme na kružnici další žeton a oblouk mezi sousedními dvěma žetony přebarvíme (z žluté na modrou a obráceně).
- Zbývají-li na kružnici alespoň tři žetony, odebereme jeden žeton sousedící se stejně barevnými oblouky, a následně přebarvíme „sloučený“ oblouk mezi žetony, se kterými tento odebraný sousedil.

Je možné dosáhnout stavu, kdy zbudou na kružnici pouze dva žetony, jeden oblouk bude obarvený na žluto a druhý na modro?

Ukážeme, že odpověď na tuto úlohu zní „ne“. Nejprve ale vysvětlíme souvislost původní a žlutomodré úlohy.

Žetony ve žlutomodré úloze, které sousedí se stejně barevnými oblouky, budeme nazývat *bílé* a žetony, které sousedí s různě barevnými oblouky budeme nazývat *černé*. Snadno si rozmyslíme, že povolené kroky ve žlutomodré úloze za takto definovaných barev žetonů přesně odpovídají povoleným krokům v původní úloze a že počáteční stav ve žlutomodré úloze odpovídá počátečnímu stavu v původní úloze.

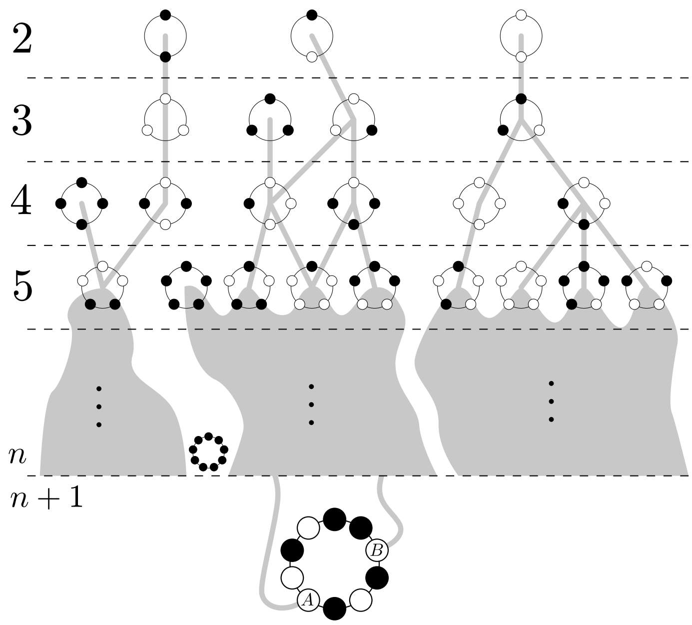
Pokud by tedy bylo možné v původní úloze nějakou posloupností kroků dostat stav, kde jsou dva černé žetony, mohli bychom tutéž posloupnost kroků použít ve žlutomodré úloze a dostali stav, kde je jeden oblouk žlutý a jeden modrý. K tomu, abychom ukázali, že v původní úloze taková posloupnost kroků neexistuje, stačí ukázat, že neexistuje ve žlutomodré úloze.

Věnujme se tedy dále řešení žlutomodré úlohy. V každém kroku se při přidávání/odebírání žetonu změní počet oblouků jedné barvy o ± 2 a opačné barvy o ∓ 1. Nicméně platí

$$\pm 2 \equiv \mp 1 \pmod 3,$$

takže můžeme říci, že modulo třemi se oba počty změní o stejné číslo. Na začátku máme dva žluté oblouky a žádný modrý, tedy tyto počty dávají různý zbytek po dělení třemi. Díky předchozímu poznatku budou tyto počty stále nekongruentní (modulo třemi), takže není možné se dostat do stavu, kdy jsou oba počty stejné, což jsme chtěli dokázat.

Jiné řešení. Všimneme si, že odebrání bílého žetonu je jen inverzní operace k přidání toho samého žetonu. Nakreslíme jako na obr. 63 po patrech všechna možná rozložení žetonů na kružnici (až na spojité posuvy) a spojíme ta rozložení, která na sebe lze jedním tahem převést.



Obr. 63

Na prvních patrech shledáváme, že se obrázek (graf) dělí na tři oddělené větve (komponenty souvislosti). K dokončení řešení zbývá zdůvodnit, proč se tyto větve ani později nesrostou. Indukcí – předpokládejme že se větve nesrostly až do patra n, dokážeme, že se nesrostou ani po přidání patra $n+1$. V patře n zbývá ještě jedno dosud nezařazené rozložení – samé černé, nicméně to spojit větve nemůže, protože bude spojeno až na symetrii s jediným dalším rozložením. Nyní uvažme libovolné rozložení z patra $n+1$, ze kterého vedou alespoň dvě spojnice do patra n (tedy obsahuje alespoň dva bílé). Stačí ukázat, že odebráním jednoho bílého žetonu A se dostaneme do stejné větve jako odebráním jiného bílého žetonu B.

- ▷ Pokud A a B nesousedí, dostaneme odebráním B stejné rozložení jako když nejprve odebereme A a (dále se pohybujeme z indukce uvnitř větve) pak odebereme B a zpět přidáme A.
- ▷ Pokud A a B sousedí, ale existuje bílý C, který nesousedí s A ani s B, použijeme dvakrát předchozí bod – odebráním A jsme ve stejné větvi jako odebráním C a tím jsme ve stejné větvi jako odebráním B.
- ▷ Pokud A a B sousedí a žádný nesousední bílý žeton tam není, jsou to buď dva nebo tři bílé vedle sebe. První možnost vede jen do jednoho (až na symetrii) rozložení s n žetony, druhá krom toho už jen do samých černých.

Ve všech případech se napojíme jen na jednu původní větev a důkaz je hotov.

N5.

(Volně podle *Anh Dung Le.*) Dokážeme, že správná odpověď je „ne“, tedy existuje monický polynom s celočíselnými koeficienty, který má celočíselný kořen modulo každé přirozené číslo, ale nemá celočíselný kořen. Konkrétně z těchto vlastností usvědčíme polynom $P(x) = (x^2+1)(x^2+7)(x^2-7)$. Tento polynom je zjevně monický a nemá celočíselné kořeny. Nyní ukážeme, že $P(x)$ má kořen modulo jakákoliv mocnina prvočísla a nakonec pomocí Čínské zbytkové věty najdeme kořen modulo libovoné přirozené číslo. Nebudeme uvažovat modulo 1, jelikož každé celé číslo je kořenem $P(x)$ modulo 1.

Nechť p je libovolné liché prvočíslo. Pro $p = 7$ je jistě kořenem $x = 0$. Pro všechna ostatní prvočísla použijeme Legendreova symbolu k nalezení kořenu jedné ze závorek. Jak známo platí

$$\left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{-7}{p}\right) = \left(\frac{7}{p}\right),$$

kde

$$\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}}$$

je právě Legendreův symbol. Pokud první dvě závorky nemají kořen modulo p, tedy -1, ani -7 nejsou kvadratické zbytky modulo p, tedy

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = \left(\frac{-7}{p}\right) = -1,$$

máme

$$\left(\frac{7}{p}\right) = (-1)(-1) = 1,$$

čili 7 je kvadratický zbytek modulo p, takže třetí závorka má modulo p kořen. Přejděme teď k mocninám.

Dokážeme matematickou indukcí, že $P(x)$ má kořen modulo p^k, kde k je přirozené číslo a p libovolné liché prvočíslo. Pro $k = 1$ a libovolné liché prvočíslo p jsme již pro jednu ze závorek kořen našli. Nechť $n^2 + a \equiv 0 \pmod{p^k}$, tj. $p^k \mid n^2 + a$, kde $a \in \{1, 7, -7\}$. Uvažme p čísel $(n + ip^k)^2 + a$, kde $i \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$. Platí

$$(n + ip^k)^2 + a \equiv n^2 + a + 2nip^k + i^2p^{2k} \equiv n^2 + a \equiv 0 \pmod{p^k}.$$

Všechna tato čísla tedy dávají po dělení p^{k+1} jeden z těchto p zbytků:

$$0,\ p^k,\ 2p^k,\ \dots,\ (p-1)p^k.$$

Kdyby $(n + ip^k)^2 + a \equiv (n + jp^k)^2 + a \pmod{p^{k+1}}$ pro nějaká dvě různá $i, j \in$ $\in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$, potom by $p^{k+1} \mid 2(i-j)p^k$, odkud $p \mid 2(i-j)$, což je spor. Existuje tedy takové $i \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$, pro které $(n + ip^k)^2 + a \equiv 0 \pmod{p^{k+1}}$, čili $n + ip^k$ je kořenem jedné ze závorek (podle hodnoty a) modulo p^{k+1}. Tím je důkaz indukcí ukončen.

Pro $p = 2$ budeme postupovat podobně. Z důvodů, které budou jasné později, začneme s indukcí od $k = 3$. Platí $1^2 + 7 \equiv 0 \pmod{2^3}$. Dále předpokládejme, že $2^k \mid n^2 + 7$. Potom uvažme čísla $n^2 + 7$ a $(n + 2^{k-1})^2 + 7$. Obě tato čísla jsou dělitelná číslem 2^k – první z indukčního předpokladu, druhé z úpravy

$$(n + 2^{k-1})^2 + 7 = n^2 + 7 + n2^k + 2^{2k-2}.$$

Pokud by obě tato čísla dávala stejný zbytek po dělení 2^{k+1}, muselo by

$$2^{k+1} \mid n2^k + 2^{2k-2}$$

a tedy $2 \mid n$ (totiž $k \geqq 3$, takže $2k - 2 \geqq k + 1$), což je spor, protože n je z předpokladu $2^k \mid n^2 + 7$ liché.

Nyní již víme, že $P(x)$ má kořen modulo libovolná mocnina prvočísla. Nyní si uvědomíme, že ze známého tvrzení

$$a \equiv b \pmod m \quad \Rightarrow \quad P(a) \equiv P(b) \pmod m$$

pro $P(x)$ polynom s celočíselnými koeficienty plyne, že pokud je n kořenem modulo nějaké přirozené m, tak i každé celé $q \equiv n \pmod m$ je kořen. Mějme tedy libovolné přirozené n. Uvažme jeho rozklad na mocniny prvočísel. Modulo každá mocnina z tohoto rozkladu již nějaký kořen $P(x)$ umíme najít. Z Čínské zbytkové věty plyne existence celého čísla r takového, že

$$r \equiv h_{p^k} \pmod{p^k},$$

kde p^k je libovolná mocnina prvočísla p z rozkladu čísla n a h_{p^k} je odpovídající kořen $P(x)$ modulo p^k. Z toho a výše uvedeného tvrzení již plyne, že $P(r) \equiv 0 \pmod m$. Tím je tvrzení dokázáno.

Šiesta séria

A6.

Ukážeme, že jediným riešením je $f(x) = x^2 + x + 1$. Netradične urobíme skúšku hneď na začiatku:

$$f(x^2) = x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)^2 - 2x(x^2 + x + 1) = f(x)^2 - 2xf(x),$$
$$f(-x) = x^2 - x + 1 = (x - 1)^1 + (x - 1) + 1 = f(x - 1),$$

a keďže pre všetky $x > 1$ sú obe funkcie x^2 a x rastúce, aj f je rastúca na $\langle 1, \infty)$.

Označme $g(x) = x^2 + x + 1$ a ukážeme, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$. Dosadením $x = t$ a $x = -t$ do prvého vzťahu dostávame

$$\begin{aligned} f(t^2) = f(t)^2 - 2tf(t) &= f(-t)^2 + 2tf(-t), \\ f(t)^2 - f(-t)^2 &= 2tf(t) + 2tf(-t), \\ \big(f(t) - f(-t)\big)\big(f(t) + f(-t)\big) &= 2t\big(f(t) + f(-t)\big). \end{aligned}$$

Keďže obor hodnôt f je kladný, $f(t) + f(-t) > 0$ a po vydelení dostávame $f(t) - f(-t) = 2t$ a dosadením podľa $f(-x) = f(x - 1)$ dostávame

$$f(t) - f(t - 1) = 2t.$$

Ďalej dokážeme nasledujúce tvrdenie:

Lema. Ak pre dané y platí $f(y) = g(y)$, tak aj $f(y+1) = g(y+1)$ a $f(y-1) = g(y-1)$, a pokiaľ je $y \geqq 0$, tak aj $f(\sqrt{y}) = g(\sqrt{y})$.

Dôkaz. Podľa vyššie uvedeného vzťahu platí

$$f(y+1) - f(y) = 2(y+1),$$

teda

$$f(y+1) = y^2 + y + 1 + 2(y+1) = (y+1)^2 + (y+1) + 1 = g(y+1).$$

Podobne vieme, že

$$f(y) - f(y-1) = 2y,$$

teda

$$f(y-1) = y^2 + y + 1 - 2y = (y-1)^2 + (y-1) + 1 = g(y-1).$$

Ďalej dosadíme $x = \sqrt{y}$ do prvého vzťahu. Dostaneme

$$y^2 + y + 1 = f(y) = f(\sqrt{y})^2 - 2\sqrt{y}f(\sqrt{y}).$$

Označíme $a = f(\sqrt{y})$ a dostaneme

$$a^2 - 2a\sqrt{y} - (y^2 + y + 1) = 0.$$

Táto kvadratická rovnica má iba jedno kladné riešenie $a = y + \sqrt{y} + 1$, a preto $f(\sqrt{y}) = a = g(\sqrt{y})$.

Dosadením $x = 0$ do prvého vzťahu v zadaní dostávame $f(0) = f(0)^2$ a keďže obor hodnôt f obsahuje len kladné čísla, nutne $f(0) = 1$, a teda $f(0) = g(0)$. Indukciou z lemy dostaneme, že $f(x) = g(x)$ pre všetky celé x a taktiež pre všetky $x = \sqrt[2^k]{n}$, kde n, k sú prirodzené. Ak by sme teraz ukázali, že $f(x) = g(x)$ pre všetky x z nejakého intervalu $\langle z, z+1\rangle$, tak využitím lemy pomocou indukcie dostaneme, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

Zoberme teda $z = 2$ a dokážme, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in \langle 2, 3\rangle$. Dokážeme to sporom. Predpokladajme, že existuje nejaké také $y \in \langle 2, 3\rangle$, že $f(y) \neq g(y)$. Je jasné, že y $\neq 2$, $y \neq 3$ a $7 = g(2) < f(y) < g(3) = 13$, inak by sme dostali spor z rastúcosti. Keďže g je spojitá, určite existuje $h \in (2, 3)$ také, že $g(h) = f(y)$.

Najprv uvažujme prípad, že $g(h) = f(y) > g(y)$. Z rastúcosti funkcie g vieme, že $3 > h > y > 2$. Ukážeme, že v intervale $(g(y), f(y))$ existuje číslo c také, že $c = g(\sqrt[2^k]{n})$ pre nejaké prirodzené n, k. Potom z rastúcosti funkcie g na intervale $(2,3)$ dostaneme, že $y < \sqrt[2^k]{n}$ a podľa lemy vieme, že $f(\sqrt[2^k]{n}) = g(\sqrt[2^k]{n}) < f(y)$ a dostávame spor s rastúcosťou funkcie f na $(2,3)$. Stačí teda ukázať, že také c existuje. Uvažujme rozklad

$$h^{2^k} - y^{2^k} = (h-y)(h+y)(h^2+y^2)\dots\bigl(h^{2^{k-1}} + y^{2^{k-1}}\bigr).$$

Keďže $h, y > 1$, máme $h^{2^k} - y^{2^k} > 2^k(h-y)$ a teda určite možno zvoliť také k, aby $h^{2^k} - y^{2^k} > 2^k(h-y) > 1$. Nakoľko medzi h^{2^k} a y^{2^k} určite existuje nejaké prirodzené n, leží $\sqrt[2^k]{n}$ v (y, h) a teda aj $c = g(\sqrt[2^k]{n})$ je v $(g(y), f(y))$. Uvedené c sme našli a teda nastáva spor. V prípade, že $g(y) > f(y)$, postupujeme analogicky. Preto je jediné vyhovujúce riešenie $f(x) = x^2 + x + 1$.

N6.

Označme prvých k nepárnych prvočísel $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ a ich súčin P_k.

Prvé pozorovanie je, že stačí uvažovať prvočíselné b. Ak totiž $b = cp$, kde p je prvočíslo, tak ak $P_k = a^b + 1 = a^{cp} + 1 = (a^c)^p + 1$, a máme ho zapísané v tom istom tvare, no exponent je prvočíslo.

Zrejme $b \neq 2$, lebo $3 \mid P_k$ a teda $a^b \equiv -1 \pmod 3$, avšak -1 nie je kvadratický zvyšok modulo 3.

Nech $b = p \leqq p_k$. Zrejme $p \mid P_k$, preto $a^p \equiv -1 \pmod p$. No z malej Fermatovej vety $a^p \equiv a \pmod p$, a teda $a \equiv -1 \pmod p$. Teraz podľa lemy o zvýšení exponentu[19] vieme povedať, že $\nu_p(a^p + 1) = \nu_p(a+1) + \nu_p(p) \geqq 2$. Takže $p^2 \mid P_k$, čo je spor, lebo každé prvočíslo delí P_k najviac v prvej mocnine. Z toho vieme povedať, že $b > P_k$. Zrejme a nie je deliteľné žiadnym prvočíslom od p_1 až po p_k (inak by a^b aj $a^b + 1$ boli deliteľné tým prvočíslom). Ak $a > p_k$, tak zrejme $a^b + 1 > p_k^{p_k} > p_k^k > P_k$, čo je spor.

Ostal teda už len prípad $a = 2^l$. Potom $a^b + 1 = 2^{bl} + 1$. Avšak mocniny dvoch dávajú po delení 7 zvyšky len 1, 2 a 4. Preto $a^b + 1$ nie je deliteľné 7, avšak P_k pre $k \geqq 3$ je. Vyskúšať prípady $k = 1$, $k = 2$ nie je ťažké a ani jeden z nich nevyhovuje ($P_1 = 3$, $P_2 = 15$). Prešli sme teda všetky možnosti a nikde nevyšlo riešenie. Preto také k neexistuje.

G6.

(Voľne podľa *Bui Truc Lama.*) Skúsme sa pozrieť najprv na bod R. Je dosť komplikovane zadefinovaný, tak si skúsme prepísať podmienky na zmysluplnejšie. Pozrime sa na mocnosť bodu E ku kružnici dotýkajúcej sa AD v P prechádzajúcej cez A. Platí $|ER| \cdot |EA| = |EP|^2 = |EC|^2$. Všimnime si, že sme práve využili naplno informáciu o bode P, a bod R je jednoznačne určený.

Úloha sa nám dosť zjednodušila. Zafixujme body A, B, D, E a pozrime sa, čo sa stane, ak budeme posúvať bod C po priamke EA smerom od bodu E. Bod P sa bude hýbať k bodu D a bod R k bodu A (poriadne si to rozmyslite). Podobne, ak budeme posúvať bod C po priamke EA smerom k bodu E, bod P sa bude hýbať k bodu A a bod R k bodu E. Teda rovnosť uhlov $|\measuredangle QBD| = |\measuredangle RBD|$ (ekvivalentná s kolineárnosťou B, R, Q) môže platiť pre najviac jednu polohu bodu C. Ukážeme, že to platí pre $|\measuredangle BCD| = 90°$.

---

[19] V anglických textoch je táto lema známa pod názvom „Lifting the Exponent Lemma". Podľa nej ak x, y sú celé čísla, n je nepárne prirodzené číslo a p je nepárne prvočíslo, pričom $p \mid x + y$ a žiadne z čísel x, y nie je násobkom p, tak $\nu_p(x^n + y^n) = \nu_p(x + y) + \nu_p(n)$. Pritom $\nu_p(k)$ je označenie pre najvyšší exponent ν taký, že $p^\nu \mid k$.

Ak $|\angle BCD| = 90°$, tak z Euklidovej vety o výške vyplýva $|ED| \cdot |EB| = |EC|^2 = |ER| \cdot |EA|$, a vďaka tomu, že $|\angle BER| = 90° = |\angle DEA|$, máme podobnosť trojuholníkov DEA a BER, z čoho $|\angle DAE| = |\angle RBD|$. Ďalej z tetivovosti štvoruholníka $BCDQ$ máme $|\angle AQB| = 90°$ a keďže tiež $|\angle AEB| = 90°$, dostávame tetivovosť štvoruholníka $ABEQ$, ktorá zaručuje rovnosť $|\angle QAE| = |\angle QBE|$. Dokopy teda $|\angle RBD| = |\angle DAE| = |\angle QAE| = |\angle QBE| = |\angle QBD|$, z čoho vyplýva požadovaná kolineárnosť bodov Q, R, B.

C6.

(Podľa *Anh Dung Le.*) Ukážme najprv, že existuje minca, ktorá sa hýbe len jedným smerom. Označme jeden smer pohybu po kružnici ako kladný a druhý ako záporný. Ak sa minca i pohla v k_i ťahoch kladným smerom, potom sa v $n-1-k_i$ ťahoch pohla záporným smerom (v každom ťahu, keď sa s nejakou mincou vymenila, sa pohla práve jedným smerom a spolu sa vymenila práve raz s každou zo zvyšných $n-1$ mincí). Sústreďme sa na niektorú mincu s maximálnym k_i; označme ju x.

Postupujme sporom – predpokladajme, že $k_x < n-1$, teda minca x sa aspoň v jednom ťahu pohla záporným smerom. V poslednom z takýchto ťahov (označme ho t) sa vymenila s mincou, ktorú označíme y. Teraz oddelene ukážeme, že:

- ▷ Tesne pred ťahom t bolo $k_y \geqq k_x$. Ak sa v nejakom ťahu pohla x kladným smerom a vymenila sa pri tom s mincou z, dostane sa tým z medzi x a y (tie sa zatiaľ ešte vymeniť nemohli). Na to, aby sa mohla y spomenutým spôsobom vymeniť s x, sa musí pred tým vymeniť so z tak, že sa y pohne kladným smerom (z a x sa už vymeniť nemôžu). Ak teda výmenou s mincou z narastie k_x o 1, tak musí k_y tiež výmenou so z narásť o 1; to platí pre každú mincu z, teda $k_y \geqq k_x$.
- ▷ Po ťahu t je vždy $k_y > k_x$. Hneď po ťahu t to platí, lebo pred ním bolo $k_y \geqq k_x$ a počas neho sa k_y zväčšilo o 1. Minca x sa už smie hýbať len v kladnom smere (z predpokladov o ťahu t) a nesmie sa pri tom už vymeniť s y, preto sa y musí ešte pohnúť kladným smerom aspoň toľkokrát, koľkokrát sa ešte pohne x. Tým je dokázané aj $k_y > k_x$.

Už je jasné, že minca y bude mať väčšie k ako minca x, čo je spor s maximálnosťou k_x. Preto je $k_x = n-1$ a x sa hýbe len kladným smerom.

Teraz ukážme, že hrana h, ktorá nebola vybraná pri žiadnej výmene s mincou x, ostala nevybraná celý čas. Postupujme opäť sporom – predpokladajme, že v nejakom ťahu t je táto hrana použitá pri výmene mincí y, z rôznych od x.

Dovtedy môžeme hranu h zotrieť a zvyšok kružnice narovnať na úsečku; vidíme, že všetky mince, ktoré sa s x vymenili, sú na jednej strane (bez ujmy na všeobecnosti naľavo) od x, a všetky, ktoré sa s x nevymenili, sú napravo. V ťahu t sa vymenia mince na koncoch tejto úsečky; bez ujmy na všeobecnosti y na ľavom a z na pravom konci. Odteraz sa ale bude minca x musieť vymeniť s y na to, aby sa mohla vymeniť so z (lebo y, z sa zasa vymeniť nemôžu a x, z sa majú vymeniť tak, že sa x pohne kladným smerom); to ale nemôže, lebo x, y sa už raz vymenili.

Došli sme k sporu so zadaním – nevieme vymeniť všetky mince (napr. x, z). Preto musí hrana h ostať nepoužitá. Nielen že sme tvrdenie zo zadania dokázali, ale aj popísali, o ktorú hranu ide.

Iné korešpondenčné semináre

Okrem Matematickej olympiády sú pre študentov základných aj stredných škôl počas školského roka organizované aj iné matematické súťaže. Patria medzi ne predovšetkým korešpondenčné semináre. Tieto súťaže sa v detailoch istotne líšia, avšak základné črty majú spoločné. Počas školského roka prebiehajú dve časti (letná a zimná), ktoré pozostávajú zväčša z troch sérií úloh rozosielaných riešiteľom do škôl alebo domov. Riešenia súťažiaci vypracovávajú rovnakou formou ako v MO a v určenom termíne ich odosielajú na adresu príslušného seminára, odkiaľ sa po niekoľkých dňoch až týždňoch vrátia opravené spolu so vzorovými riešeniami a výsledkovou listinou. Mladší a menej skúsení riešitelia zväčša nemusia riešiť tie najzložitejšie príklady, aby aj oni mali šancu ovplyvniť poradie na prvých miestach. Na konci oboch častí súťaže sú približne tridsiati najúspešnejší riešitelia pozývaní na týždňové sústredenie, účasť na ktorom býva často najsilnejšou motiváciou na riešenie úloh. Nie je ale možné nespomenúť, že takýto pravidelný tréning sa odráža aj na výsledkoch dosahovaných v MO, a že drvivá väčšina reprezentantov Slovenska na IMO sa aktívne zapájala do viacerých z týchto seminárov.

Nižšie uvedené korešpondenčné semináre (KS) sú určené študentom stredných škôl, svojím záberom pokrývajú územie celého Slovenska a často majú aj riešiteľov z Českej republiky. Je však možné, že vo svojom okolí nájdete aj menšie súťaže podobného druhu.

Korešpondenčný matematický seminár – KMS

KMS vznikol v roku 2002 spojením Bratislavského a Stredoslovenského korešpondenčného matematického seminára. Organizovaný je študentmi FMFI UK v Bratislave. Má dve kategórie. Začínajúcim a mladším je určená kategória ALFA, pre skúsenejších je kategória BETA. Rozdelenie do kategórií umožňuje bojovať o miesta na sústredení aj neskúseným študentom, ktorí by v silnej konkurencii strácali motiváciu.

KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava
e-mail: kms@kms.sk
web: http://kms.sk

Súťaž talentovaných riešiteľov obľubujúcich matematiku – STROM

Seminár STROM je pokračovateľom najstaršieho korešpondenčného seminára v bývalom Československu. Je organizovaný z PF UPJŠ v Košiciach skupinou nadšencov, väčšinou bývalých riešiteľov seminára a študentov UPJŠ. Na organizovaní sa okrem košickej skupiny podieľajú aj študenti pochádzajúci z východného Slovenska študujúci v iných mestách v SR či ČR. Riešiteľskú základňu má prevažne na východnom Slovensku.

STROM, PF UPJŠ, Jesenná 5, 041 54 Košice
e-mail: strom@strom.sk
web: https://strom.sk

Ak ste sa rozhodli do niektorého zo seminárov zapojiť, najrozumnejšie je zadania a pravidlá nájsť na internete začiatkom septembra alebo začiatkom januára.

Šesťdesiatytretí ročník
Matematickej olympiády

Názov:	Šesťdesiatytretí ročník Matematickej olympiády
Autori:	Mgr. Peter Novotný, PhD., RNDr. Karel Horák, CSc., RNDr. Róbert Hajduk, PhD., Mgr. Tomáš Kocák, Bc. Filip Sládek, Ľudmila Šimková, Úlohová komisia MO, vedúci seminára *i*KS
Jazyková úprava:	neprešlo jazykovou úpravou
Grafická úprava:	Mgr. Peter Novotný, PhD., RNDr. Karel Horák, CSc., sadzba programom $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX
Vydavateľ:	Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Tlač:	DOLIS, s. r. o.
Rok vydania:	2015
Náklad:	500 ks
Rozsah:	172 strán

ISBN **978-80-89829-00-2**

Tlač publikácie bola podporená Ministerstvom školstva, vedy, výskumu a športu SR.