62. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Správa o riešení úloh zo súťaže konanej v školskom roku 2012/2013

54. MEDZINÁRODNÁ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA
7. STREDOEURÓPSKA MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

JEDNOTA SLOVENSKÝCH MATEMATIKOV A FYZIKOV

S pomocou spolupracovníkov spracovali
Mgr. Peter Novotný, PhD., RNDr. Karel Horák, CSc.,
doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., mim. prof., RNDr. Róbert Hajduk, PhD.,
Mgr. Tomáš Kocák, Bc. Filip Sládek,
členovia Úlohovej komisie MO, vedúci seminára *i*KS.

Tlač publikácie bola podporená Ministerstvom školstva, vedy, výskumu a športu SR.

ISBN 978-80-969508-9-8

Obsah

O priebehu 62. ročníka Matematickej olympiády

Matematická olympiáda (MO) je najstaršia súťaž spomedzi predmetových olympiád a ostatných postupových súťaží žiakov základných a stredných škôl v SR. Každý rok sa jej zúčastňujú tisícky riešiteľov od piatakov ZŠ až po maturantov. Vyhlasuje ju Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky (MŠVVŠ SR) v spolupráci s Jednotou slovenských matematikov a fyzikov (JSMF). V školskom roku 2012/13 sa uskutočnil 62. ročník MO.

Súťaž riadi Slovenská komisia Matematickej olympiády (SKMO), ktorá v 62. ročníku pracovala v nasledovnom zložení:

Mgr. Peter Novotný, PhD., FMFI UK Bratislava, predseda
doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., mim. prof., F-PEDAS ŽU Žilina, podpredseda
Mgr. Ján Brajerčík, PhD., FHPV PU Prešov, predseda KKMO PO
prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc., FPV UKF Nitra, predseda KKMO NR
Mgr. Martin Kollár, PhD., FMFI UK Bratislava, predseda KKMO BA
doc. RNDr. Stanislav Krajči, PhD., PF UPJŠ Košice, predseda KKMO KE
doc. RNDr. Mária Lucká, CSc., PF TU Trnava, predsedníčka KKMO TT
doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc., F-PEDAS ŽU Žilina, predseda KKMO ZA
RNDr. Eva Oravcová, Gymn. J. G. T. Banská Bystrica, predsedníčka KKMO BB
RNDr. Soňa Pavlíková, CSc., FCHPT STU Bratislava, predsedníčka KKMO TN
RNDr. Monika Dillingerová, PhD., FMFI UK Bratislava
Mgr. Štefan Gyürki, PhD., FCHPT STU, Bratislava
RNDr. Róbert Hajduk, PhD., PF UPJŠ Košice
Ing. RNDr. František Kardoš, PhD., PF UPJŠ Košice
doc. RNDr. Mária Kmeťová, PhD., FPV UKF Nitra
RNDr. Ján Mazák, PhD., PF TU Trnava
Mgr. Martin Potočný, Trojsten, FMFI UK Bratislava
RNDr. Oliver Ralík, CSc., Nitra
doc. RNDr. Roman Soták, PhD., PF UPJŠ Košice
prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc., FPV UKF Nitra
PhDr. Peter Barát, Iuventa, Bratislava, tajomník

V priebehu 62. ročníka vo funkcii tajomníka na Iuvente Petra Baráta vystriedala Mgr. Mária Gajarová.

*

Priebeh a organizovanie jednotlivých kôl MO ostali rovnaké ako v predošlých ročníkoch, okrem pravidelných sústredení a medzinárodných súťaží sa aj v tomto ročníku uskutočnilo Česko-poľsko-slovenské stretnutie juniorov pre najlepších riešiteľov z kategórie C, ktoré sa prvýkrát konalo v 61. ročníku MO. Nad rámec pravidelných prípravných sústredení sa podarilo zorganizovať v termíne 30. 11. – 3. 12. 2012 v Hutách sústredenie pre cca. 50 najlepších riešiteľov krajských kôl MO predošlého ročníka.

Celoštátne kolo MO (CK MO) sa konalo v dňoch 17.–20. 3. 2013 v Košiciach na Prírodovedeckej fakulte Univerzity Pavla Jozefa Šafárika. Organizáciu skomplikovalo nevydarené verejné obstarávanie, zdroje na CK MO sa našťastie podarilo zabezpečiť členovi SKMO RNDr. Róbertovi Hajdukovi, PhD., ktorý mal spolu s ostatnými kolegami z PF UPJŠ hlavnú zásluhu na zdarnom priebehu súťaže. Poďakovanie patrí aj sponzorom CK MO: spoločnosti ALBI, ktorá pravidelne pre CK MO poskytuje ako ceny výborné spoločenské hry a združeniu Košice IT Valley, ktoré prvým trom venovalo čítačky kníh. Knižné ceny poskytli tiež predseda Košického samosprávneho kraja a dekan PF UPJŠ.

Mesiac po CK MO sa uskutočnilo výberové sústredenie, na ktorom sa rozhodlo o zložení družstiev pre Medzinárodnú matematickú olympiádu (IMO) a Stredoeurópsku matematickú olympiádu (MEMO). Nasledované bolo prípravným sústredením pre obe družstvá. Z prípravných medzinárodných akcií sa popri tradičnom Česko-poľsko-slovenskom stretnutí (konalo sa v ČR) uskutočnilo aj spoločné prípravné sústredenie IMO-družstiev ČR a SR. Finančne ho zabezpečuje Spoločnosť Otakara Borůvky a odborne Ústredný výbor Matematickej olympiády v ČR. Treba pripomenúť, že podobná akcia na Slovensku neprebieha, a aspoň na tomto mieste sa chceme poďakovať českým kolegom za pravidelné pozývanie.

Na 54. IMO v Kolumbii sme získali jednu striebornú medailu, tri bronzové medaily a dve čestné uznania. Na 7. MEMO v Maďarsku sme získali dve strieborné a tri bronzové medaily. Každej súťaži je v ročenke venovaná osobitná kapitola. V súvislosti s cestami na IMO a MEMO patrí naša vďaka tajomníčke SKMO Mgr. Márii Gajarovej, ktorá tento rok organizačne zabezpečovala vybavenie všetkých cestovných náležitostí.

Matematická olympiáda by neexistovala bez zaujímavých a originálnych úloh. O ich prípravu sa stará Úlohová komisia MO, ktorú máme spoločnú s Českou republikou. Každoročne sa konajú dve zasadnutia komisie, jedno v ČR, jedno na Slovensku. V 62. ročníku sa uskutočnili v novembri 2012 v Znojme a v máji 2013 v Bratislave. Úlohová komisia má dve sekcie, jednu pre stredoškolské kategórie (sekcia ABC), druhú pre kategórie pre ZŠ (sekcia Z). Zo Slovenska jej členmi v školskom roku 2012/13 boli:

doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., mim. prof., F-PEDAS ŽU Žilina, sekcia ABC
PaedDr. Svetlana Bednářová, PhD., Gymn. I. Kraska, Rimavská Sobota, sekcia Z
RNDr. Monika Dillingerová, PhD., FMFI UK Bratislava, sekcia Z
Mgr. Miroslava Farkas-Smitková, PhD., FEI STU Bratislava, sekcia Z
Mgr. Veronika Hucíková, SvF STU Bratislava, sekcia Z
RNDr. Tomáš Jurík, PhD., VSE Košice, sekcia ABC
RNDr. Ján Mazák, PhD., PF TU Trnava, sekcia ABC
Mgr. Erika Novotná, PhD., Datavard Bratislava, sekcia Z
doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc., F-PEDAS ŽU Žilina, sekcia ABC
Mgr. Peter Novotný, PhD., FMFI UK Bratislava, sekcia ABC

V ročenke uvádzame zadania všetkých úloh kategórií Z5 až Z9 a zadania aj riešenia všetkých úloh kategórií A, B, C.

Vymýšľať nové úlohy do MO nie je jednoduché, úlohová komisia preto uvíta zaslanie zaujímavých návrhov na úlohy aj od autorov, ktorí nie sú jej členmi. Návrhy je možné posielať napríklad na adresu *skmo@skmo.sk*, najlepšie aj s menom autora, s riešením a s odhadom, do ktorej kategórie sa úloha hodí.

V decembri 2009 bola založená a spustená oficiálna internetová stránka SKMO. Jej adresa je *skmo.sk* a zverejňujeme na nej všetky termíny a dokumenty týkajúce sa MO (archív zadaní a riešení úloh, poradia všetkých krajských a vyšších kôl, atď.). Okrem nej možno na internete nájsť viacero stránok súvisiacich s MO. Spomeňme aspoň niektoré z nich:

skmo.sk – oficiálna stránka SKMO,
www.olympiady.sk – stránka Iuventy,
www.uan.edu.co/imo2013/en/ – stránka 54. IMO v Kolumbii,
imo-official.org – oficiálna stránka IMO,
kms.sk – stránka korešpondenčného seminára KMS,
iksko.org – stránka korešpondenčného seminára *i*KS.

Záver úvodu tejto ročenky by sme radi využili na poďakovanie všetkým učiteľom a nadšencom, ktorí pripravujú žiakov na MO a podieľajú sa na propagácii a organizácii MO na školách. Uznanie patrí tiež pracovníkom okresných a krajských komisií MO, školských úradov a centier voľného času, ktorí zabezpečujú jednotlivé kolá. Napokon, ďakujeme pracovníkom Iuventy podieľajúcim sa na organizácii CK MO, distribúcii úloh, komunikácii s MŠVVŠ SR a administratíve súvisiacej s financovaním MO.

Peter Novotný, predseda SKMO

Výsledky

Celoštátne kolo kategórie A

Víťazi

1.	Filip HANZELY	4 G A. Prídavka, Sabinov	7 7 7 7 7 7	42
	Martin VODIČKA	4 G Alejová, Košice	7 7 7 7 7 7	42
3.	Jakub ŠAFIN	4 G P. Horova, Michalovce	4 7 7 7 7 7	39
4.	Miroslav STANKOVIČ	3 G Poštová, Košice	4 7 7 7 7 6	38
5.	Patrik BAK	2 G Sobrance	5 4 7 7 7 7	37
6.	BUI Truc Lam	2 G Grösslingová, Bratislava	5 4 6 7 7 6	35
7.	Marko PUZA	3 G Poštová, Košice	3 5 7 6 7 2	30
8.	Jakub DARGAJ	3 G Poštová, Košice	7 7 1 5 7 2	29
9.	Vladimír MACKO	4 G Ľ. Štúra, Zvolen	2 6 0 6 7 7	28

Ďalší úspešní riešitelia

10.	Eduard BATMENDIJN	2 Cirk. g. sv. Mikuláša, St. Ľubovňa	3 7 0 7 3 7	27
11.	Tamás BALOGH	3 G P. Pázmáňa, Nové Zámky	7 0 1 6 7 5	26
	Marta KOSSACZKÁ	4 G Grösslingová, Bratislava	2 6 1 7 7 3	26
13.	Tomáš GONDA	4 G Grösslingová, Bratislava	0 5 6 5 7 2	25
14.	Zhen Ning David LIU	3 G Grösslingová, Bratislava	1 5 5 6 7 0	24
15.	Dušan KAVICKÝ	4 G Jura Hronca, Bratislava	3 5 1 6 7 1	23
16.	Ľudmila ŠIMKOVÁ	3 G Párovská, Nitra	4 3 1 3 7 2	20
17.	Jaroslav PETRUCHA	4 G Metodova, Bratislava	2 7 0 7 1 2	19
18.	Martin SMOLÍK	4 G Grösslingová, Bratislava	0 6 0 5 0 7	18
19.	Michal HLEDÍK	4 G Jura Hronca, Bratislava	3 1 0 7 6 0	17

Ostatní riešitelia

20.	Matúš HALAJ	3 G J. G. Tajovského, B. Bystrica	1 5 0 6 3 1	16
	Matúš HLAVÁČIK	4 G Alejová, Košice	1 6 1 0 7 1	16
22.	László MÁZIK	4 G H. Selyeho, Komárno	0 2 0 3 7 3	15
	Samuel SUČÍK	2 G Jura Hronca, Bratislava	1 0 1 6 7 0	15
24.	Lucia MAGUROVÁ	4 G Poštová, Košice	0 0 2 3 7 2	14
	Milan SMOLÍK	4 G Jura Hronca, Bratislava	0 6 0 6 1 1	14
26.	Ivan MAŠÁN	4 ŠPMNDaG, Bratislava	0 4 0 6 1 2	13
	Tatiana MATEJOVIČOVÁ	3 G Jura Hronca, Bratislava	1 0 0 3 7 2	13
28.	Marek GALAJDA	4 G sv. T. Akvinského, Košice	1 0 1 1 7 1	11
29.	Filip POKRÝVKA	3 G J. Jesenského, Bánovce n. Beb.	0 1 1 6 1 1	10
	Máté ŠKODA	4 G H. Selyeho, Komárno	3 1 0 5 1 0	10
31.	Jakub BAHYL	4 G Varšavská, Žilina	1 1 1 1 3 2	9
32.	Drahomír MRÓZEK	4 G Pezinok	0 3 0 0 0 1	4
33.	Peter POLÁČIK	4 G M. Hattalu, Trstená	1 0 0 1 1 0	3

Úspešnosť jednotlivých úloh je zaznamenaná v tabuľke.

Počet bodov	**Spolu**	**Číslo úlohy**					
		1.	2.	3.	4.	5.	6.
7 bodov	55	4	7	6	10	21	7
6 bodov	20	0	5	2	10	1	2
5 bodov	13	2	5	1	4	0	1
4 body	6	3	3	0	0	0	0
3 body	16	5	2	0	4	3	2
2 body	14	3	1	1	0	0	9
1 bod	38	8	4	10	3	6	7
0 bodov	36	8	6	13	2	2	5
Priemer	3,58	2,39	3,88	2,15	5,00	5,09	2,94

Krajské kolá

Z príslušného kraja a v príslušnej kategórii A, B, C a Z9 sú uvedení všetci, resp. aspoň prvých 10 úspešných riešiteľov.

Kraj Bratislava

Kategória A

1.	BUI Truc Lam	2 Gymnázium Grösslingová
2.	Marta KOSSACZKÁ	4 Gymnázium Grösslingová
3.	Tomáš GONDA	4 Gymnázium Grösslingová
4.	Dušan KAVICKÝ	4 Gymnázium Jura Hronca
	Milan SMOLÍK	4 Gymnázium Jura Hronca
6.	Jaroslav PETRUCHA	4 Gymnázium Metodova
7.	Zhen Ning David LIU	3 Gymnázium Grösslingová
	Tatiana MATEJOVIČOVÁ	3 Gymnázium Jura Hronca
9.	Michal HLEDÍK	4 Gymnázium Jura Hronca
10.	Ivan MAŠÁN	4 ŠpMNDaG Skalická
	Drahomír MRÓZEK	4 Gymnázium Pezinok
	Martin SMOLÍK	4 Gymnázium Grösslingová
	Samuel SUČÍK	2 Gymnázium Jura Hronca

Kategória B

1.	BUI Truc Lam	Gymnázium Grösslingová
2.	Samuel SUČÍK	Gymnázium Jura Hronca
3.	Matej KRÁLIK	Gymnázium Jura Hronca
4.	Ema KRAKOVSKÁ	Gymnázium Grösslingová
5.	Barbora LAKOTOVÁ	Gymnázium Grösslingová
	Marián LONGA	ŠpMNDaG Skalická
	Martin MURIN	Gymnázium Jura Hronca
8.	Ondrej BOHDAL	Gymnázium Jura Hronca
	Matúš RAKO	Gymnázium Grösslingová
10.	Michal BELÁK	Gymnázium Grösslingová
	Michal ŠTURC	Gymnázium Grösslingová

Kategória C

1.	Zuzana FRANKOVSKÁ	Gymnázium Grösslingová
	Juraj MÁJEK	Gymnázium Grösslingová
	Simona VESELÁ	Gymnázium Jura Hronca
4.	Peter RALBOVSKÝ	ŠpMNDaG Skalická
5.	Filip HUSÁR	Gymnázium sv. Uršule
	Daniel LISÝ	Gymnázium Grösslingová
7.	Juraj HALABRIN	Gymnázium Jura Hronca
8.	Jakub Jozef KOJDA	ŠpMNDaG Skalická
9.	Tomáš BÁNHEGYI	Gymnázium Jura Hronca
	Matej CHOMA	Gymnázium Grösslingová
	Jaroslava KOKAVCOVÁ	Gymnázium Grösslingová

Kategória Z9

1.	Juraj HALABRIN	Gymnázium Jura Hronca
2.	Samuel KARABA	Gymnázium Jura Hronca
3.	Martin HÓZ	ZŠ Vazovova
4.	Tomáš BELAJ	ZŠ Vazovova
5.	Martin ČULEN	ŠpMNDaG Skalická
	Maroš MALÝ	ZŠ Kupeckého, Pezinok
7.	Jana BUBÁKOVÁ	Gymnázium Jura Hronca
	Peter CSICSAY	ZŠ Vývojová
	Michal CHVÍLA	ZŠ Sološnica
	Daniel KUKLOVSKÝ	ZŠ dr. J. Dérera, Malacky
	Zuzana NEOGRÁDYOVÁ	ZŠ Matky Alexie

Kraj Nitra

Kategória A

1.	Tamás BALOGH	3 Gymnázium P. Pázmáňa, Nové Zámky
2.	László MÁZIK	4 Gymnázium H. Selyeho, Komárno
3.	Máté ŠKODA	4 Gymnázium H. Selyeho, Komárno
4.	Ľudmila ŠIMKOVÁ	3 Gymnázium Párovská, Nitra

Kategória B

1.	Katarína MARČEKOVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
2.	Roman KLUVANEC	Gymnázium Párovská, Nitra
3.	Ján GAJDICA	Gymnázium Topoľčany
	Tamás ŠARAI	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
5.	Branislav KRAMÁR	Gymnázium J. Kráľa, Zlaté Moravce
	Tibor RÓZSA	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
7.	Arek ANTONIEWICZ	Gymnázium Párovská, Nitra
	Matúš BAFRNEC	Gymnázium Párovská, Nitra
	Dávid BUGÁR	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	Kristína PREŠINSKÁ	Gymnázium Párovská, Nitra

Kategória C

1.	Lucia TÓDOVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
2.	Tomáš DANIŠ	Spojená škola Nové Zámky
3.	Gergely BUKOVSZKY	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
4.	Samuel VALACH	Gymnázium Ľ. J. Šuleka, Komárno
5.	Tamás VARGA	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
6.	Tomáš BENEŠ	Gymnázium A. Vrábla, Levice
7.	Tamara BARUSOVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
	Mihály KOTIERS	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	Péter KULCSÁR SZABÓ	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	Michal PORUBSKÝ	Gymnázium sv. Cyrila a Metoda, Nitra
	Andrea SZABÓ	Gymnázium H. Selyeho, Komárno

Kategória Z9

1.	Géza CSENGER	ZŠ Práce, Komárno
2.	Natália HOLKOVÁ	ZŠ Ivanka pri Nitre
	Ottó IZSÓF	ZŠ s VJM, Sokolce
	Samuel NOVELINKA	ZŠ Močenok

	Simona ORAVECOVÁ	ZŠ Komenského, Komárno
6.	Martin BENČ	ZŠ sv. Don Bosca, Zlaté Moravce
	Jozef JÓŽA	ZŠ Bernolákova, Šaľa
8.	Tamás PIVODA	ZŠ J. Kossányiho s VJM, Svätý Peter
9.	Viktória BORGUĽOVÁ	ZŠ Rišňovce
	Matej MACÁK	Gymnázium A. Vrábla, Levice
	Márk RANCSÓ	ZŠ s VJM, Pribeta

Kraj Trnava

Kategória A

V kategórii A neboli žiadni úspešní riešitelia.

Kategória B

1.	Jozef BUCKO	Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany
2.	Tamás PAMMER	Gymnázium I. Madácha s VJM, Šamorín

Kategória C

1.	Pál SOMOGYI	Gymnázium I. Madácha s VJM, Šamorín
2.	Samuel OBUCH	Gymnázium J. Hollého, Trnava
3.	Ondrej ČERNEK	Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany
4.	Matej BENKO	Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany
5.	Jessica KONDERKOVÁ	Gymnázium Z. Kodálya, Galanta
6.	Dominika ĎUROVČÍKOVÁ	Gymnázium I. Kupca, Hlohovec
	Noémi MERVA	Gymnázium Á. Vámbéryho, D. Streda

Kategória Z9

1.	Fridrich CSOLTKO	ZŠ B. Bartóka s VJM, Veľký Meder
	Ondrej SAKAČI	ZŠ Brezová, Piešťany
3.	Lenka BACHORÍKOVÁ	ZŠ Vančurova, Trnava
4.	Nikolas PATRIK	ZŠ Mojmírova, Piešťany
5.	Gergő TAKÁCS	ZŠ Z. Kodálya s VJM, D. Streda
6.	Martin MAJTÁN	ZŠ Leopoldov
7.	Adrián TULUŠÁK	ZŠ Trstín
8.	Magdaléna KUBINCOVÁ	ZŠ J. Hollého, Madunice
	Veronika Andrea POLÁKOVÁ	ZŠ Nám. Sl. Uč. Tovarišstva, Trnava

Kraj Trenčín

Kategória A

1.	Filip POKRÝVKA	3 Gymnázium J. Jesenského, Bánovce n. Bebr.

Kategória B

1.	Adam MEČIAR	Gymnázium V. B. Nedožerského, Prievidza
2.	František DRÁČEK	Gymnázium Považská Bystrica
3.	Pavel MADAJ	Gymnázium V. B. Nedožerského, Prievidza
4.	Martin DZÚRIK	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
5.	Jaromír MIKULEC	Gymnázium sv. Jozefa, Nové Mesto n. Váhom
6.	Filip AYAZI	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín

Kategória C

1.	Lukáš KOTLABA	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
2.	Ľubica JANČOVÁ	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
	Samuel ZACHARA	Gymnázium J. Braneckého, Trenčín
4.	Róbert BRACHNA	Gymnázium Považská Bystrica
	Milan ZONGOR	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín

Kategória Z9

1.	Paulína PODSKUBOVÁ	ZŠ Dlhé Hony, Trenčín
2.	Adam JURENKA	ZŠ Nová Bošáca
3.	Alexandra RYBÁRIKOVÁ	ZŠ Mládežnícka, Púchov
4.	Ján HUNÁK	ZŠ Dlhé Hony, Trenčín
5.	Marek BORIK	ZŠ Duklianska, Bánovce nad Bebravou
6.	Kristína BALAŽOVIČOVÁ	ZŠ Duklianska, Bánovce nad Bebravou
	Tomáš HROMADÍK	ZŠ Slov. partizánov, Považská Bystrica
	Miroslav JURKECH	ZŠ Š. Závodníka, Pružina
	Lucia KÝŠKOVÁ	ZŠ Tematínska, Nové Mesto nad Váhom
	Kristína MEČIAROVÁ	ZŠ Dlhé Hony, Trenčín
	Marek STOŠIČ	ZŠ Duklianska, Bánovce nad Bebravou

Kraj Žilina

Kategória A

1.	Jakub BAHYL	4 Gymnázium Varšavská, Žilina
2.	Peter POLÁČIK	4 Gymnázium M. Hattalu, Trstená

Kategória B

1.	Lukáš SADLEK	Gymnázium J. M. Hurbana, Čadca
2.	Filip ŠVÁBIK	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
	Tatiana ZBONČÁKOVÁ	Gymnázium J. M. Hurbana, Čadca
	Martina ZEMBJAKOVÁ	Gymnázium M. Hattalu, Trstená

Kategória C

1.	Daniel BACKOV	Gymnázium Ružomberok
	Samuel SLÁDEK	Gymnázium A. Bernoláka, Námestovo
3.	Adam KRÁL	Gymnázium Varšavská, Žilina
4.	Eva BRANIŠOVÁ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
	Peter SÚKENÍK	Gymnázium Varšavská, Žilina
6.	Emília MLYNARČÍKOVÁ	Bilingválne gymnázium M. Hodžu, Sučany
7.	Michal SLÁDEČEK	Gymnázium Varšavská, Žilina
8.	Matúš VACULÍK	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
9.	Ján CHUDÝ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
	Barbora STACHOVÁ	Gymnázium J. M. Hurbana, Čadca

Kategória Z9

1.	Filip KULLA	Bilingválne gymnázium M. Hodžu, Sučany
2.	Michal SANDANUS	ZŠ Karpatská, Žilina
3.	Róbert DRUSKA	ZŠ Liptovská Teplá
4.	Martin PIALA	ZŠ Sv. Gorazda, Žilina
5.	Matúš GALBA	ZŠ Okoličianska, Lipt. Mikuláš
	Andrea KOMOVÁ	ZŠ Sv. Gorazda, Žilina
	Tomáš MIKŠÍK	ZŠ Karpatská, Žilina
8.	Maximilán MOLNÁR	Ev. gymnázium J. Tranovského, Lipt. Mikuláš
9.	Martin BAZGER	ZŠ Podvysoká
	Adam RADVAN	ZŠ Mieru, Bytča
	Erik WETTER	Bilingválne gymnázium M. Hodžu, Sučany

Kraj Banská Bystrica

Kategória A

1.	Matúš HALAJ	3 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
2.	Vladimír MACKO	4 Gymnázium Ľ. Štúra, Zvolen

Kategória B

1.	Norbert BARLO	Gymnázium Tornaľa

Kategória C

1.	Milan KUBALA	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
2.	Tomáš TEREM	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
3.	Lucia MARCINEKOVÁ	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
4.	Tomáš KOLEDA	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
5.	Bence BIAL	Gymnázium Fiľakovo
6.	Samuel SCHNEIDER	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Tomáš SMÄDO	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Emanuel TESAŘ	Gymnázium B. S.-Timravy, Lučenec
9.	Martin SKLENÁR	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
10.	Matúš PAVLUS	Gymnázium B. S.-Timravy, Lučenec

Kategória Z9

1.	Jozef LIPTÁK	ZŠ P. Jilemnického, Zvolen
	Mátyás PELLE	ZŠ M. Tompu, Rimavská Sobota
3.	Bernadett NOVÁKOVÁ	ZŠ B. Balassiho, Vinica
4.	Libor SASÁK	ZŠ Podbrezová
5.	Adam DOBROVIČ	ZŠ J. Horáka, Banská Štiavnica
	Michaela RAFAJOVÁ	ZŠ J. Simana, Valaská

Kraj Košice

Kategória A

1.	Patrik BAK	2 Gymnázium Sobrance
	Martin VODIČKA	4 Gymnázium Alejová, Košice
3.	Miroslav STANKOVIČ	3 Gymnázium Poštová, Košice

4.	Jakub ŠAFIN	4 Gymnázium P. Horova, Michalovce
5.	Jakub DARGAJ	3 Gymnázium Poštová, Košice
	Matúš HLAVÁČIK	4 Gymnázium Alejová, Košice
7.	Lucia MAGUROVÁ	4 Gymnázium Poštová, Košice
	Marko PUZA	3 Gymnázium Poštová, Košice
9.	Marek GALAJDA	4 Gymnázium sv. T. Akvinského, Košice

Kategória B

1.	Patrik BAK	Gymnázium Sobrance
	Katarína KRAJČIOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
3.	Peter KOVÁCS	Gymnázium Alejová, Košice
4.	Róbert SCHÖNFELD	Gymnázium Poštová, Košice
5.	Roman STAŇO	Gymnázium Poštová, Košice
	Peter VOOK	Gymnázium Poštová, Košice

Kategória C

1.	Tomáš KEKEŇÁK	Gymnázium S. Máraiho, Košice
2.	Žaneta SEMANIŠINOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
3.	Daniel ONDUŠ	Gymnázium Alejová, Košice
	Petra PLŠKOVÁ	Gymnázium Poštová, Košice
5.	Henrieta MICHEĽOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
6.	Patrik LENÁRT	Gymnázium Park mládeže, Košice
	Dávid NGUYEN	Gymnázium Alejová, Košice
8.	Kristína MIŠLANOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
9.	René Michal CEHLÁR	Gymnázium Poštová, Košice
	Lukáš HAVRIŠÁK	Gymnázium Poštová, Košice
	Viktor PRISTAŠ	Gymnázium S. Máraiho, Košice
	Šimon SOTÁK	Gymnázium Alejová, Košice

Kategória Z9

1.	Jakub MACH	ZŠ Krosnianska, Košice
	Martin MASRNA	ZŠ Krosnianska, Košice
	Juraj MIČKO	ZŠ Krosnianska, Košice
4.	Veronika DEMČÁKOVÁ	ZŠ M. Lechkého, Košice
5.	Jakub GENČI	ZŠ Krosnianska, Košice
6.	Zoltán HANESZ	ZŠ S. Máraiho s VJM, Košice
	Samuel KRAJČI	Gymnázium Alejová, Košice
	Adam URBÁN	ZŠ S. Máraiho s VJM, Košice
9.	Peter DRAGÚŇ	ZŠ Krymská, Michalovce
	Slávka MAGUROVÁ	ZŠ Okružná, Michalovce

Kraj Prešov

Kategória A

1.	Eduard BATMENDIJN	2 Cirk. gymnázium sv. Mikuláša, St. Ľubovňa
2.	Filip HANZELY	4 Gymnázium A. Prídavka, Sabinov

Kategória B

1.	Dominik DROZD	Gymnázium Daxnerova, Vranov nad Topľou
	Peter JEVČÁK	Gymnázium arm. gen. L. Svobodu, Humenné
	Zuzana KOŠELOVÁ	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov

Kategória C

1.	Slavomír HANZELY	Gymnázium A. Prídavka, Sabinov
2.	Róbert KLUČÁR	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
	Ján KURIMSKÝ	Gymnázium sv. Moniky, Prešov
4.	Michal ŠČUR	Gymnázium L. Stöckela, Bardejov
5.	Michal ČIRIP	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
6.	Samuel STAŠKO	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
7.	Katarína ŠIMKOVÁ	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
8.	Klaudia BACHLEDOVÁ	Gymnázium P. O. Hviezdoslava, Kežmarok
9.	Lucia JAKUBÍKOVÁ	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
10.	Samuel MOLČAN	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov

Kategória Z9

1.	Miroslava BARANOVÁ	ZŠ Spišská Teplica
2.	Daniela PITTNEROVÁ	ZŠ J. Švermu, Humenné
3.	Tadeáš PETRAS	ZŠ Dr. Fischera, Kežmarok
	Patrik SEMAŇÁK	ZŠ Dr. Fischera, Kežmarok
5.	Filip Daniel FEDIN	ZŠ Študentská, Snina
6.	Natália ABTOVÁ	ZŠ Dr. Fischera, Kežmarok
7.	Angelika FEDÁKOVÁ	ZŠ svätého Cyrila a Metoda, Stará Ľubovňa
	Ivana HELDÁKOVÁ	ZŠ Sv. Kríža, Kežmarok
	Mária KOCÚREKOVÁ	ZŠ Hviezdoslavova, Lipany
	Soňa MAGDOLINIČOVÁ	ZŠ Študentská, Snina
	Ondrej SEKERÁK	ZŠ Hrnčiarska, Humenné
	Katarína ŠČUROVÁ	ZŠ Pod Vinbargom, Bardejov
	Miroslava ŠTEFČÁKOVÁ	ZŠ Hviezdoslavova, Lipany

Zadania súťažných úloh

Kategória Z5

Z5 – I – 1

Mamička zaplatila v kníhkupectve 270 €. Platila dvoma druhmi bankoviek, dvadsaťeurovými a päťdesiateurovými, a presne. Koľko ktorých bankoviek mohla použiť? Uveďte všetky možnosti. (*Marie Krejčová*)

Z5 – I – 2

Pat napísal na tabuľu čudný príklad:

$$550 + 460 + 359 + 340 = 2\,012.$$

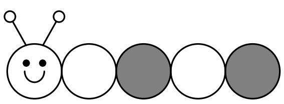
Mat to chcel napraviť, preto pátral po neznámom čísle, ktoré by pripočítal ku každému z piatich uvedených čísel, aby potom bol príklad vypočítaný správne. Aké to bolo číslo? (*Libuše Hozová*)

Z5 – I – 3

Rudo dostal na narodeniny budík. Mal z neho radosť a nastavil na ňom presný čas. Odvtedy každé ráno, keď vstával (vrátane sobôt, nedieľ a prázdnin), stlačil presne na 4 sekundy tlačidlo, ktorým sa osvetľuje ciferník. Pritom si všimol, že počas stlačenia tlačidla je čas na budíku zastavený. Inak sa ale budík vôbec neoneskoruje. Popoludní 11. decembra sa Rudo pozrel na svoj budík a zistil, že ukazuje presne o 3 minúty menej, ako by mal. Aký je dátum Rudových narodenín? (*Michaela Petrová*)

Z5 – I – 4

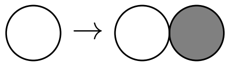
Červík sa skladá z bielej hlavy a niekoľkých článkov, pozri obr. 1.



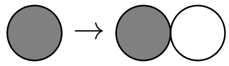
Obr. 1

Keď sa červík narodí, má hlavu a jeden biely článok. Každý deň pribudne červíkovi nový článok jedným z nasledujúcich spôsobov:

- buď sa niektorý biely článok rozdelí na biely a sivý (obr. 2a);
- alebo sa niektorý sivý článok rozdelí na sivý a biely (obr. 2b).



Obr. 2a



Obr. 2b

(V oboch prípadoch opisujeme situáciu pri pohľade na červíka od hlavy.) Na štvrtý deň červík dospieva a ďalej nerastie – jeho telo sa skladá z hlavy a štyroch článkov. Koľko najviac rôznych farebných variantov dospelých červíkov tohto druhu môže existovať? (*Erika Novotná*)

Z5 – I – 5

Vypočítajte $3\cdot 15+20 : 4+1$. Potom doplňte do zadania jeden alebo viac párov zátvoriek tak, aby výsledok bol:
a) čo najväčšie celé číslo,
b) čo najmenšie celé číslo. (*Marta Volfová*)

Z5 – I – 6

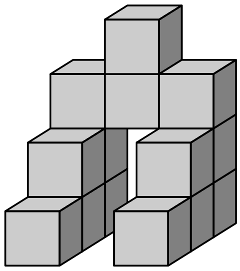
Sedem trpaslíkov sa postavilo po obvode svojej záhradky, do každého rohu jeden, a napli medzi sebou povraz okolo celej záhrady. Snehulienka vyšla od Kýblika a išla pozdĺž povrazu. Najskôr išla štyri metre na východ, kde stretla Vedka. Od neho pokračovala dva metre na sever, kým dorazila k Dudrošovi. Od Dudroša išla na západ a po dvoch metroch natrafila na Plaška. Ďalej pokračovala tri metre na sever, až došla k Smejkovi. Vydala sa na západ a po štyroch metroch stretla Kýchala, odkiaľ jej zostávali tri metre na juh k Spachtošovi. Nakoniec pozdĺž povrázka došla najkratšou cestou ku Kýblikovi a tým obišla celú záhradu. Koľko metrov štvorcových má celá záhrada? (*Martin Mach*)

Z5 – II – 1

Na tábore sa skauti vážili na starodávnej váhe. Vedúci ich upozornil, že váha síce neváži správne, ale rozdiel medzi skutočnou a nameranou hmotnosťou je vždy rovnaký. Mišovi váha ukázala 30 kg, Emilovi 28 kg, ale keď si stúpli na váhu obaja naraz, ukázala 56 kg. Aká bola skutočná hmotnosť Miša a Emila? (*Marta Volfová*)

Z5 – II – 2

Na obr. 3 je stavba zlepená zo 14 rovnakých kocôčok. Stavbu chceme zo všetkých strán ofarbiť, teda aj zospodu. Aká bude celková spotreba farby, keď 10 mililitrov farby stačí na ofarbenie jednej celej kocôčky? (*Martin Mach*)



Obr. 3

Z5 – II – 3

Radka dostala ráno v deň svojich narodenín veľké balenie lentiliek. Každý deň poobede lentilky maškrtila, a to tak, že v pracovný deň (t. j. mimo víkendu) si vzala vždy 3 lentilky a každú sobotu aj nedeľu si ich vzala 5. Istý deň večer zistila, že zjedla práve 111 lentiliek. Ktorý deň v týždni mohla mať Radka narodeniny? Nájdite obe možnosti. (*Eva Patáková*)

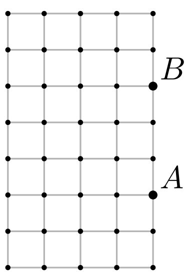
Kategória Z6

Z6 – I – 1

Ľuboš si myslí trojciferné prirodzené číslo, ktoré má všetky svoje cifry nepárne. Ak k nemu pripočíta 421, dostane trojciferné číslo, ktoré nemá ani jednu svoju cifru nepárnu. Nájdite všetky čísla, ktoré si môže Ľuboš myslieť. (*Libor Šimůnek*)

Z6 – I – 2

Na obr. 4 sú vyznačené mrežové body štvorčekovej siete, z ktorých dva sú pomenované A a B. Nech bod C je jeden zo zvyšných mrežových bodov. Nájdite všetky možné polohy bodu C tak, aby trojuholník ABC mal obsah 4,5 štvorčeka. (*Erika Novotná*)



Obr. 4

Z6 – I – 3

Obri Koloman a Bartolomej hovoria niektoré dni iba pravdu a niekedy iba klamú. Koloman hovorí pravdu v pondelok, v piatok a v nedeľu, ostatné dni klame. Bartolomej hovorí pravdu v stredu, štvrtok a piatok, ostatné dni klame.

a) Určte, kedy môže Koloman povedať: „Včera som hovoril pravdu."

b) Jedného dňa obaja povedali: „Včera som klamal." V ktorý deň to bolo?

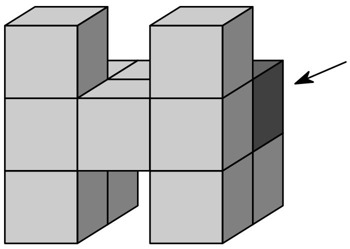
(*Marta Volfová*)

Z6 – I – 4

Eva má tri lístočky a na každom z nich je napísané jedno prirodzené číslo. Keď vynásobí medzi sebou všetky možné dvojice čísel z lístočkov, dostane výsledky 48, 192 a 36. Ktoré čísla sú napísané na Eviných lístočkoch? (*Erika Novotná*)

Z6 – I – 5

Na obr. 5 je útvar zložený z dvanástich zhodných kociek. Na koľko rôznych miest môžeme premiestniť tmavú kocku (označenú šípkou), ak chceme, aby sa povrch zostaveného telesa nezmenil?



Obr. 5

Rovnako ako pri pôvodnom telese sa aj pri novom telese musia kocky dotýkať celými stenami. Poloha svetlých kociek sa meniť nemôže. (*David Reichmann*)

Z6 – I – 6

Obsluhujúci v bufete U Švindliara vždy započítava platiacemu hosťovi do účtu aj dátum: celkovú minutú sumu zväčší o toľko centov, koľký deň v mesiaci práve je. V septembri sa v bufete dvakrát zišla trojica priateľov. Prvýkrát platil každý z nich zvlášť, obsluhujúci teda vždy pripísal dátum a žiadal od každého 1,68 €. O štyri dni tam olovrantovali znova a dali si presne to isté čo minule. Tentoraz však jeden platil za všetkých dokopy. Obsluhujúci teda pripísal dátum do účtu iba raz a vypýtal si 4,86 €. Priateľom sa nezdalo, že aj keď sa ceny v jedálnom lístku nezmenili, majú olovrant lacnejší ako minule, a podvod odhalili. Koľkého septembra práve bolo, keď podvod odhalili? (*Libor Šimůnek*)

Z6 – II – 1

Pat napísal na tabuľu príklad:

$$589 + 544 + 80 = 2\,013.$$

Mat chcel príklad opraviť, aby sa obe strany naozaj rovnali, a pátral po neznámom čísle, ktoré potom k prvému sčítancu na ľavej strane pripočítal, od druhého sčítanca ho odčítal a tretieho sčítanca ním vynásobil. Po prevedení týchto operácií bol príklad vypočítaný správne. Aké číslo Mat našiel? (*Libuše Hozová*)

Z6 – II – 2

Lenka si myslí dve dvojciferné čísla. Jedno má obe cifry párne a druhé obe nepárne. Keď obe čísla sčíta, dostane opäť dvojciferné číslo, ktoré má prvú cifru párnu a druhú nepárnu. Navyše nám Lenka prezradila, že všetky tri dvojciferné čísla sú násobkami čísla tri a jedna z nepárnych cifier je 9. Aké čísla si mohla Lenka myslieť? Nájdite všetky možnosti. (*Veronika Hucíková*)

Z6 – II – 3

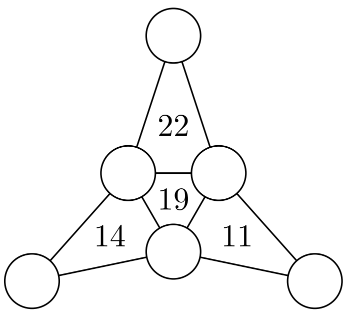
Štvoruholník $ABCD$ má nasledujúce vlastnosti:

- strany AB a CD sú rovnobežné,
- pri vrchole B je pravý uhol,
- trojuholník ADB je rovnoramenný so základňou AB,
- strany BC a CD sú dlhé 10 cm. Určte obsah tohto štvoruholníka. (*Ján Mazák*)

Kategória Z7

Z7 – I – 1

Na obr. 6 je šesť krúžkov, ktoré tvoria vrcholy štyroch trojuholníkov. Napíšte do krúžkov



Obr. 6

navzájom rôzne jednociferné prirodzené čísla tak, aby v každom trojuholníku platilo, že číslo vnútri je súčtom čísel napísaných v jeho vrcholoch. Nájdite všetky riešenia.

(*Erika Novotná*)

Z7 – I – 2

Pred našou školou je kvetinový záhon. Jednu pätinu všetkých kvetov tvoria tulipány, dve devätiny narcisy, štyri pätnástiny hyacinty a zvyšok sú sirôtky. Koľko kvetov je celkom na záhone, ak zo žiadneho druhu ich nie je viac ako 60 ani menej ako 30?

(*Michaela Petrová*)

Z7 – I – 3

Obri Bartolomej a Koloman hovoria niektoré dni iba pravdu a niektoré dni iba klamú. Bartolomej hovorí pravdu iba cez víkendy, ostatné dni klame. Koloman hovorí pravdu v pondelok, v piatok a v nedeľu, ostatné dni klame.

Jedného dňa Bartolomej povedal: „Včera sme obaja klamali."

Koloman však nesúhlasil: „Aspoň jeden z nás hovoril včera pravdu."

Ktorý deň v týždni môžu obri viesť takýto rozhovor?

(*Marta Volfová, Vojtěch Žádník*)

Z7 – I – 4

Pani učiteľka napísala na tabuľu nasledujúce čísla:

$$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ 19,\ 22,\ 25,\ 28,\ 31,\ 34,\ 37,\ 40,\ 43.$$

Dve susedné čísla sa líšia vždy o rovnakú hodnotu, v tomto prípade o 3. Potom z tabule zotrela všetky čísla okrem 1, 19 a 43. Ďalej medzi čísla 1 a 43 dopísala niekoľko celých čísel tak, že sa každé dve susedné čísla opäť líšili o rovnakú hodnotu a pritom žiadne číslo nebolo napísané viackrát. Koľkými spôsobmi mohla pani učiteľka čísla doplniť?

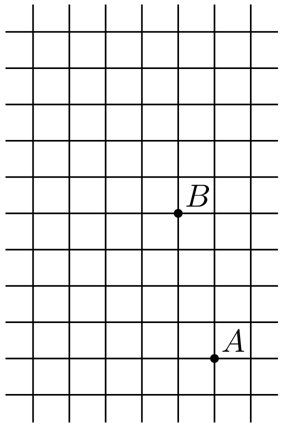
(*Karel Pazourek*)

Z7 – I – 5

V športovom areáli je upravená plocha tvaru obdĺžnika $ABCD$ s dlhšou stranou AB. Uhlopriečky AC a BD zvierajú uhol 60°. Bežci trénujú na veľkom okruhu $ACBDA$ alebo na malej dráhe ADA. Mojmír bežal desaťkrát po veľkom okruhu a Vojtech pätnásťkrát po malej dráhe, teda pätnásťkrát z A do D a pätnásťkrát z D do A. Dokopy ubehli celkom 4,5 km. Aká dlhá je uhlopriečka AC? (*Libuše Hozová*)

Z7 – I – 6

Máme štvorčekovú sieť so 77 mrežovými bodmi. Dva z nich sú označené A a B ako na obr. 7. Bod C nech je jeden zo zvyšných mrežových bodov. Nájdite všetky možné polohy bodu C tak, aby trojuholník ABC mal obsah 6 štvorčekov. (*Erika Novotná*)



Obr. 7

Z7 – II – 1

Dedo Vendelín išiel so svojimi dvoma vnukmi Cyrilom a Metodom kúpiť rybárske prúty a ďalšie potreby. Cena nákupu zaujala Cyrila aj deda. Išlo o štvorciferné číslo, v ktorom prvá cifra bola o jedna väčšia ako tretia cifra, ale o jedna menšia ako posledná cifra. Súčet všetkých štyroch cifier bol 6. Cyril si ešte všimol, že dvojčíslie zložené z prvých dvoch cifier predstavovalo dvojciferné číslo o 7 väčšie ako dvojčíslie zložené z posledných dvoch cifier. Deda však zaujalo číslo preto, lebo bolo súčinom jeho veku a veku oboch vnukov, pritom každý z vnukov mal viac ako jeden rok. Koľko rokov mal dedo Vendelín a koľko jeho vnuci? (*Libuše Hozová*)

Z7 – II – 2

Petra má rovnostranný trojuholník ABC. Najskôr trojuholník prehla tak, aby bod A splynul s bodom C. Potom vzniknutý útvar prehla tak, že bod B splynul s bodom C. Tento útvar potom obkreslila na papier a zistila, že jeho obsah je $12\,\mathrm{cm}^2$. Určte obsah pôvodného trojuholníka. (*Erika Novotná*)

Z7 – II – 3

Do skladu priviezli cement vo vreciach po 25 kg a po 40 kg. Menších vriec bolo dvakrát viac ako tých väčších. Skladník nahlásil vedúcemu počet všetkých privezených vriec, ale nespomenul, koľko je ktorých. Vedúci si myslel, že všetky vrecia vážia 25 kg. Nahlásený počet vriec teda vynásobil číslom 25 a výsledok zadokumentoval ako hmotnosť dodávky cementu. Cez noc zlodeji ukradli 60 väčších vriec, a tak na sklade ostalo presne toľko kg cementu, koľko vedúci zapísal. Koľko kg cementu ostalo? (*Libor Šimůnek*)

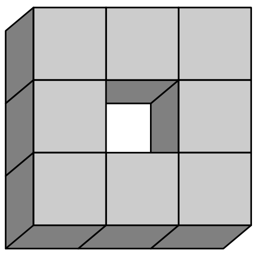
KATEGÓRIA Z8

Z8 – I – 1

Súčin troch prirodzených čísel je 600. Keby sme jedného činiteľa zmenšili o 10, zmenšil by sa súčin o 400. Keby sme namiesto toho jedného činiteľa zväčšili o 5, zväčšil by sa súčin na dvojnásobok pôvodnej hodnoty. Ktoré tri prirodzené čísla majú túto vlastnosť?
(*Libuše Hozová*)

Z8 – I – 2

Stano zložil 7 zhodných útvarov, každý zlepený z 8 rovnakých sivých kociek s hranou 1 cm tak ako na obr. 8.



Obr. 8

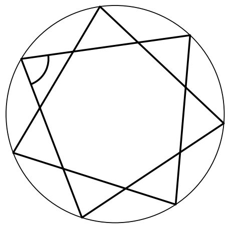
Potom všetky ponoril do bielej farby a následne každý z útvarov rozobral na pôvodných 8 dielov, ktoré tak mali niektoré steny sivé a iné biele. Pridal k nim ešte 8 nových kociek, ktoré boli rovnaké ako ostatné, akurát celé biele. Zo všetkých kociek dokopy zložil jednu veľkú kocku a snažil sa pritom, aby čo najväčšia časť povrchu vzniknutej kocky bola sivá. Koľko cm^2 povrchu bude určite bielych? (*Martin Mach*)

Z8 – I – 3

Dedo zabudol štvorciferný kód svojho mobilu. Vedel len, že na prvom mieste nebola nula, že uprostred boli buď dve štvorky alebo dve sedmičky alebo tiež štvorka so sedmičkou (v neznámom poradí) a že sa jednalo o číslo deliteľné číslom 15. Koľko je možností pre zabudnutý kód? Aká cifra mohla byť na prvom mieste? (*Marta Volfová*)

Z8 – I – 4

Daná je pravidelná sedemcípa hviezda ako na obr. 9. Aká je veľkosť vyznačeného uhla?
(*Eva Patáková*)



Obr. 9

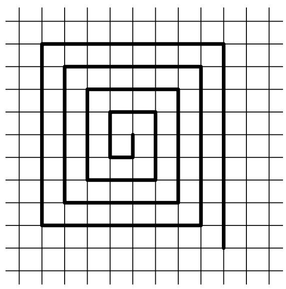
Z8 – I – 5

Dňa 1. septembra 2007 bola založená jazyková škola, v ktorej vyučovalo sedem pedagógov. Dňa 1. septembra 2010 k týmto siedmim učiteľom pribudol nový kolega, ktorý mal práve 25 rokov. Do 1. septembra 2012 jeden z učiteľov zo školy odišiel, a tak ich zostalo opäť sedem. Priemerný vek pedagógov na škole bol vo všetkých troch spomenutých dátumoch rovnaký. Koľko rokov mal 1. septembra 2012 učiteľ, ktorý v škole už nepracoval? Aký bol v ten deň priemerný vek učiteľov na škole?

(*Libor Šimůnek*)

Z8 – I – 6

Anička a Hanka chodili v labyrinte po špirálovitej cestičke, ktorej začiatok je schematicky znázornený na obr. 10. Strana štvorčeka v štvorčekovej sieti má dĺžku 1 m a celá cestička od stredu bludiska až k východu je dlhá 210 m.



Obr. 10

Dievčatá vyšli zo stredu bludiska, nikde sa nevracali a po čase každá zastavila v niektorom z rohov. Anička pritom prešla o 24 m viac ako Hanka. V ktorých rohoch mohli dievčatá stáť? Určte všetky riešenia. (*Erika Novotná*)

Z8 – II – 1

Júlia má na papieri napísané štvorciferné číslo. Keď vymení cifry na mieste stoviek a jednotiek a sčíta toto nové číslo s číslom pôvodným, dostane výsledok 3 332. Keby však vymenila cifry na mieste tisícok a desiatok a sčítala by toto číslo s pôvodným, dostala by výsledok 7 886. Zistite, aké číslo mala Júlia napísané na papieri.

(*Erika Novotná*)

Z8 – II – 2

Pán Zeler mal na záhradke dve rovnaké nádrže tvaru štvorbokého hranola so štvorcovým dnom, v oboch dokopy mal 300 litrov vody. V prvej nádrži tvorila voda presnú kocku a vyplnila 62,5 % nádrže, v druhej nádrži bolo vody o 50 litrov viac. Aké rozmery mali nádrže pána Zelera? (*Libuše Hozová*)

Z8 – II – 3

Šifrovacej hry sa zúčastnilo 168 hráčov v 50 tímoch, ktoré mali dva až päť členov. Najviac bolo štvorčlenných tímov, trojčlenných tímov bolo 20 a hry sa zúčastnil aspoň jeden päťčlenný tím. Koľko bolo dvojčlenných, štvorčlenných a päťčlenných tímov?

(*Martin Mach*)

KATEGÓRIA Z9

Z9 – I – 1

Na tabuli bolo napísané trojciferné prirodzené číslo. Pripísali sme k nemu všetky ďalšie trojciferné čísla, ktoré možno získať zmenou poradia jeho cifier. Na tabuli tak boli okrem pôvodného čísla ešte tri nové. Súčet najmenších dvoch zo všetkých štyroch čísel je 1 088. Aké cifry obsahuje pôvodné číslo? (*Libuše Hozová*)

Z9 – I – 2

Trojuholník má dve strany, ktorých dĺžky sa líšia o 12 cm, a dve strany, ktorých dĺžky sa líšia o 15 cm. Obvod tohto trojuholníka je 75 cm. Určte dĺžky jeho strán. Nájdite všetky možnosti. (*Libor Šimůnek*)

Z9 – I – 3

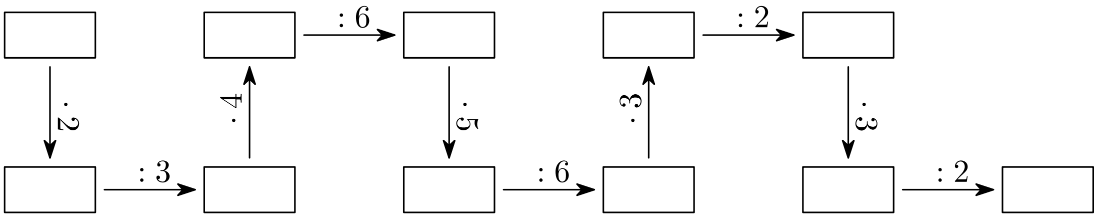
Pri horskej chate nám tréner povedal: „Ak pôjdeme ďalej týmto pohodlným tempom 4 km za hodinu, prídeme na stanicu 45 minút po odchode nášho vlaku.“ Potom ukázal na skupinu, ktorá nás práve míňala: „Tí majú lepšiu obuv, a tak dosahujú priemernú rýchlosť 6 km za hodinu. Na stanici budú už pol hodiny pred odchodom nášho vlaku.“ Ako ďaleko bola stanica od horskej chaty? (*Marta Volfová*)

Z9 – I – 4

Do kružnice s polomerom 5 cm je vpísaný pravidelný osemuholník $ABCDEFGH$. Zostrojte trojuholník ABX tak, aby bod D bol ortocentrom (priesečníkom výšok) trojuholníka ABX. (*Martin Mach*)

Z9 – I – 5

Do každého políčka schémy na obr. 11 máme zapísať štvorciferné prirodzené číslo tak, aby všetky naznačené výpočtové operácie boli správne. Koľkými rôznymi spôsobmi možno schému vyplniť? (*Libor Šimůnek*)



Obr. 11

Z9 – I – 6

Daný je pravouhlý lichobežník $ABCD$ s pravým uhlom pri vrchole B a s rovnobežnými stranami AB a CD. Uhlopriečky lichobežníka sú na seba kolmé a majú dĺžky $|AC| = 12$ cm, $|BD| = 9$ cm. Vypočítajte obvod a obsah tohto lichobežníka.
(*Marie Krejčová*)

Z9 – II – 1

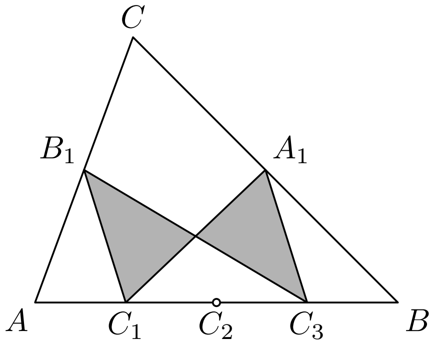
Do triedy chodí 33 žiakov. Pred Vianocami boli s hájnikom v lese plniť kŕmidlá. Dievčatá si rozobrali balíky sena. Chlapci sa rozdelili na dve skupiny: tí z prvej skupiny vzali každý 4 vrecká mrkvy a 3 vrecká orechov (teda každý z nich vzal 7 vreciek) a tí z druhej skupiny vzali každý jedno vrecko jabĺk a jedno vrecko orechov (teda každý z nich vzal 2 vrecká). Pomer počtu dievčat, chlapcov z prvej skupiny a chlapcov z druhej skupiny bol rovnaký ako pomer celkového počtu vreciek orechov, jabĺk a mrkvy. Koľko bolo v triede dievčat, koľko chlapcov nieslo vrecká s mrkvou a koľko ich nieslo vrecká s jablkami? (*Martin Mach*)

Z9 – II – 2

Na čistú tabuľu sme žltou kriedou napísali trojciferné prirodzené číslo tvorené navzájom rôznymi nenulovými ciframi. Potom sme na tabuľu bielou kriedou vypísali všetky ďalšie trojciferné čísla, ktoré možno získať zmenou poradia cifier žltého čísla. Aritmetický priemer všetkých čísel na tabuli bol 370. Každé číslo menšie ako žlté sme podčiarkli. Podčiarknuté čísla boli práve tri a ich aritmetický priemer bol 205. Určte žlté číslo. (*Libor Šimůnek*)

Z9 – II – 3

Vyznačme vo všeobecnom trojuholníku ABC nasledujúce body podľa obr. 12. Body A_1 a B_1 sú stredy strán BC a AC, body C_1, C_2 a C_3 delia stranu AB na štyri rovnaké časti. Spojíme body A_1 a B_1 s bodmi C_1 a C_3, takže vznikne mašľa ohraničená týmito spojnicami. Akú časť obsahu celého trojuholníka mašľa zaberá? (*Martin Mach*)



Obr. 12

Z9 – II – 4

Nájdite všetky sedemciferné čísla, ktoré obsahujú každú z cifier 0 až 6 práve raz a pre ktoré platí, že ich prvé aj posledné dvojčíslie je deliteľné 2, prvé aj posledné trojčíslie je deliteľné 3, prvé aj posledné štvorčíslie je deliteľné 4, prvé aj posledné päťčíslie je deliteľné 5 a prvé aj posledné šesťčíslie je deliteľné 6. (*Martin Mach*)

Z9 – III – 1

V malom kráľovstve prišli poddaní pozdraviť nového kráľa a jeho ministra. Každý priniesol nejaký darček: 60 najchudobnejších prinieslo len vlastnoručne vyrobenú drevenú sošku, tí bohatší buď 2 zlatky, alebo 3 strieborniaky. Pritom strieborniakov bolo darovaných viac ako 40, ale menej ako 100. Všetky sošky dostal minister a k tomu ešte sedminu všetkých zlatiek a tretinu všetkých strieborniakov. Kráľ aj jeho minister dostali rovnaký počet predmetov. Zistite, koľko mohlo byť poddaných, koľko mohlo byť darovaných zlatiek a koľko strieborniakov. (*Marta Volfová*)

Z9 – III – 2

Matej mal v riadku v zošite napísaných šesť rôznych prirodzených čísel. Druhé z nich bolo dvojnásobkom prvého, tretie bolo dvojnásobkom druhého a podobne každé ďalšie číslo bolo dvojnásobkom predchádzajúceho. Matej všetky tieto čísla opísal do nasledujúcej tabuľky, a to v ľubovoľnom poradí, do každého políčka jedno:

Súčet oboch čísel v prvom stĺpci tabuľky bol 136 a súčet čísel v druhom stĺpci bol dvojnásobný, teda 272. Určte súčet čísel v treťom stĺpci tabuľky. (*Libor Šimůnek*)

Z9 – III – 3

Daný je pravidelný osemuholník $ABCDEFGH$ a bod X taký, že bod A je ortocentrom (t. j. priesečníkom výšok) trojuholníka BDX. Vypočítajte veľkosti vnútorných uhlov tohto trojuholníka. (*Vojtěch Žádník*)

Z9 – III – 4

V slove TESTOVANIE majú byť nahradené rovnaké písmenká rovnakými nenulovými ciframi a rôzne písmenká rôznymi nenulovými ciframi. Pritom súčin cifier výsledného čísla má byť druhou mocninou nejakého prirodzeného čísla. Nájdite najväčšie číslo, ktoré možno nahradením písmen pri splnení uvedených podmienok získať.

(*Eva Patáková*)

Kategória C

C – I – 1

Štvorcová tabuľka je rozdelená na 16×16 políčok. Kobylka sa po nej pohybuje dvoma smermi: vpravo alebo dole, pričom strieda skoky o dve a o tri políčka (t. j. žiadne dva po sebe idúce skoky nie sú rovnako dlhé). Začína skokom dĺžky dva z ľavého horného políčka. Koľkými rôznymi cestami sa môže kobylka dostať na pravé dolné políčko? (Pod cestou máme na mysli postupnosť políčok, na ktoré kobylka doskočí.)

(*Peter Novotný*)

C – I – 2

Pre kladné reálne čísla a, b, c, d platí

$$a + b = c + d, \qquad ad = bc, \qquad ac + bd = 1.$$

Akú najväčšiu hodnotu môže mať súčet $a + b + c + d$? (*Ján Mazák*)

C – I – 3

Daný je obdĺžnik $ABCD$ s obvodom o. V jeho rovine nájdite množinu všetkých bodov, ktorých súčet vzdialeností od priamok AB, BC, CD, DA je rovný $\frac{2}{3}o$. (*Tomáš Jurík*)

C – I – 4

Rozhodnite, či z ľubovoľných siedmich vrcholov daného pravidelného 19-uholníka možno vždy vybrať štyri, ktoré sú vrcholmi lichobežníka. (*Jaromír Šimša*)

C – I – 5

Určte všetky celé čísla n, pre ktoré $2n^3 - 3n^2 + n + 3$ je prvočíslo. (*Jaroslav Švrček*)

C – I – 6

Vnútri pravidelného šesťuholníka $ABCDEF$ s obsahom $30\,\mathrm{cm}^2$ je zvolený bod M. Obsahy trojuholníkov ABM a BCM sú postupne $3\,\mathrm{cm}^2$ a $2\,\mathrm{cm}^2$. Určte obsahy trojuholníkov CDM, DEM, EFM a FAM. (*Pavel Leischner*)

C – S – 1

Danému rovnostrannému trojuholníku vpíšme a opíšme kružnicu. Označme S obsah vzniknutého medzikružia a T obsah kruhu, ktorého priemer je zhodný s dĺžkou strany daného trojuholníka. Ktorý z obsahov S, T je väčší? Svoju odpoveď zdôvodnite.

(*Leo Boček*)

C – S – 2

Určte všetky dvojice a, b celých kladných čísel, pre ktoré platí

$$a \cdot [a, b] = 4 \cdot (a, b),$$

pričom symbol $[a, b]$ označuje najmenší spoločný násobok a (a, b) najväčší spoločný deliteľ celých kladných čísel a, b. (*Jaroslav Švrček*)

C – S – 3

Každý vrchol pravidelného devätnásťuholníka je ofarbený jednou zo šiestich farieb. Dokážte, že niektorý tupouhlý trojuholník má všetky vrcholy ofarbené rovnakou farbou.

(*Jaromír Šimša*)

C – II – 1

V tanečnej sa zišla skupina chlapcov a dievčat. Každý z prítomných 15 chlapcov pozná práve 4 dievčatá a každé dievča pozná práve 10 chlapcov. (Známosti sú vzájomné.) Dokážte, že ľubovoľní dvaja chlapci majú aspoň dve spoločné známe. (*Ján Mazák*)

C – II – 2

Vnútri rovnobežníka $ABCD$ je daný bod K a v páse medzi rovnobežkami BC a AD v polrovine opačnej k CDA je daný bod L. Obsahy trojuholníkov ABK, BCK, DAK a DCL sú $S_{ABK} = 18\,\mathrm{cm}^2$, $S_{BCK} = 8\,\mathrm{cm}^2$, $S_{DAK} = 16\,\mathrm{cm}^2$, $S_{DCL} = 36\,\mathrm{cm}^2$. Vypočítajte obsahy trojuholníkov CDK a ABL. (*Pavel Novotný*)

C – II – 3

Nájdite všetky dvojice celých kladných čísel a a b, pre ktoré je číslo $a^2 + b$ o 62 väčšie ako číslo $b^2 + a$. (*Jaromír Šimša*)

C – II – 4

Určte najmenšie celé kladné číslo v, pre ktoré platí: Medzi ľubovoľnými v vrcholmi pravidelného dvadsaťuholníka možno nájsť tri, ktoré sú vrcholmi pravouhlého rovnoramenného trojuholníka. (*Jaromír Šimša*)

Kategória B

B – I – 1

Určte všetky trojice (a, b, c) prirodzených čísel, pre ktoré platí

$$2^a + 4^b = 8^c.$$

(*Jaroslav Švrček*)

B – I – 2

V obore reálnych čísel riešte rovnicu

$$x^3 + (3\sqrt{2} - 2)x^2 - (1 + \sqrt{2})x - 14(\sqrt{2} - 1) = 0,$$

ak viete, že má aspoň jeden celočíselný koreň. Prípadné iracionálne korene zapíšte v jednoduchom tvare bez odmocnín z iracionálnych čísel. (*Jaromír Šimša*)

B – I – 3

Nech V je priesečník výšok ostrouhlého trojuholníka ABC. Priamka CV je spoločnou dotyčnicou kružníc k a l, ktoré sa zvonka dotýkajú v bode V a pritom každá z nich prechádza jedným z vrcholov A a B. Ich priesečníky s vnútrami strán AC a BC označme P a Q. Dokážte, že polpriamka VC je osou uhla PVQ a že body A, B, P, Q ležia na jednej kružnici. (*Jaroslav Švrček*)

B – I – 4

Nájdite najmenšiu hodnotu zlomku

$$V(n) = \frac{n^3 - 10n^2 + 17n - 4}{n^2 - 10n + 18},$$

pričom n je ľubovoľné prirodzené číslo väčšie ako 2. (*Vojtech Bálint*)

B – I – 5

V rovine je daná úsečka AB. Pre ľubovoľný bod X tejto roviny, ktorý je rôzny od A aj B, označme X_A, resp. X_B obraz bodu A, resp. B v osovej súmernosti podľa priamky XB, resp. XA. Nájdite všetky také body X, ktoré spolu s bodmi X_A, X_B tvoria vrcholy rovnostranného trojuholníka. (*Pavel Calábek*)

B – I – 6

Je dané prirodzené číslo $k < 12$. Vo vrcholoch pravidelného 12-uholníka sú napísané čísla $1, 2, \ldots, 12$ (ako na ciferníku hodín). V jednom kroku môžeme buď vymeniť niektoré dve protiľahlé čísla, alebo zvoliť ľubovoľných k susedných vrcholov a v nich napísané čísla zväčšiť o 1. Označme $T(k)$ nasledovné tvrdenie: „Po konečnom počte krokov možno dostať všetkých 12 čísel rovnakých.“ Dokážte, že $T(2)$ neplatí, $T(5)$ platí, a rozhodnite o platnosti $T(3)$. (*Ján Mazák*)

B – S – 1

Dokážte, že žiadna z rovníc

$$3^{2x} + 6^y = 2013, \quad |3^{2x} - 6^y| = 2013$$

nemá riešenie v obore celých kladných čísel. (*Jaroslav Švrček*)

B – S – 2

Do políčok štvorčekovej mriežky 11×11 sme postupne zľava doprava a zhora nadol zapísali čísla $1, 2, \ldots, 121$. Štvorcovou doskou 3×3 sme všetkými možnými spôsobmi zakryli presne deväť políčok. V koľkých prípadoch bol súčet deviatich zakrytých čísel druhou mocninou celého čísla? (*Vojtech Bálint*)

B – S – 3

Uvažujme dve kružnice so stredmi S_1 a S_2 také, že ich spoločné vnútorné dotyčnice pretínajú ich spoločné vonkajšie dotyčnice v štyroch bodoch. Dokážte, že tieto štyri priesečníky ležia na Tálesovej kružnici nad priemerom S_1S_2. (*Tomáš Jurík*)

B – II – 1

Pre ľubovoľné reálne čísla $k \neq \pm 1$, $p \neq 0$ a q dokážte tvrdenie: Rovnica

$$x^2 + px + q = 0$$

má v obore reálnych čísel dva korene, z ktorých jeden je k-násobkom druhého, práve vtedy, keď platí $kp^2 = (k+1)^2 q$. (*Jaromír Šimša*)

B – II – 2

Obec má 100 obyvateľov. Vieme, že každý z nich má v obci práve troch známych. (Známosti sú vzájomné.)

a) Dokážte, že v obci existuje skupina 25 osôb, medzi ktorými sa žiadne dve nepoznajú.

b) Nájdite najmenšie prirodzené číslo n s vlastnosťou, že v ľubovoľnej skupine n osôb každej takej obce existuje dvojica známych.

(*Ján Mazák*)

B – II – 3

Určte všetky trojice (a, b, c) celých kladných čísel, pre ktoré platí

$$2^{a+2b+1} + 4^a + 16^b = 4^c.$$

(*Jaroslav Švrček*)

B – II – 4

V rovine sú dané kružnice m, n, ktoré sa pretínajú v bodoch K, L. Dotyčnica v bode K ku kružnici m pretína kružnicu n v bode $A \neq K$, dotyčnica v bode L ku kružnici n pretína kružnicu m v bode $C \neq K$. Bod $B \neq L$ je priesečník priamky AL s kružnicou m a bod $D \neq K$ je priesečník priamky CK s kružnicou n. Dokážte, že štvoruholník $ABCD$ je rovnobežník. (*Pavel Leischner*)

Kategória A

A – I – 1

Nájdite všetky dvojice prvočísel p, q, pre ktoré existuje prirodzené číslo a také, že

$$\frac{pq}{p+q}=\frac{a^2+1}{a+1}.$$

(*Ján Mazák, Róbert Tóth*)

A – I – 2

Dve kružnice $k_1(S_1,r_1)$ a $k_2(S_2,r_2)$ sa zvonka dotýkajú a ležia vo štvorci $ABCD$ so stranou a tak, že k_1 se dotýka strán AD a CD a k_2 sa dotýka strán BC a CD. Dokážte, že aspoň jeden z trojuholníkov AS_1S_2, BS_1S_2 má obsah najviac $\frac{3}{16}a^2$. (*Tomáš Jurík*)

A – I – 3

Označme $p(n)$ počet všetkých n-ciferných čísel zložených len z cifier 1, 2, 3, 4, 5, v ktorých sa každé dve susedné cifry líšia aspoň o 2. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$5\cdot 2{,}4^{n-1}\leqq p(n)\leqq 5\cdot 2{,}5^{n-1}.$$

(*Pavel Novotný*)

A – I – 4

Nájdite všetky funkcie $f\colon\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ také, že pre všetky nenulové čísla x, y platí

$$x\cdot f(xy)+f(-y)=x\cdot f(x).$$

(*Pavel Calábek*)

A – I – 5

Označme I stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC. Kružnica, ktorá prechádza vrcholom B a dotýka sa priamky AI v bode I, pretína strany AB, BC postupne v bodoch P, Q. Priesečník priamky QI so stranou AC označme R. Dokážte, že platí

$$|AR|\cdot|BQ|=|PI|^2.$$

(*Jaroslav Švrček*)

A – I – 6

V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned}\sin^2 x + \cos^2 y &= \operatorname{tg}^2 z,\\ \sin^2 y + \cos^2 z &= \operatorname{tg}^2 x,\\ \sin^2 z + \cos^2 x &= \operatorname{tg}^2 y.\end{aligned}$$

(*Pavel Calábek*)

A – S – 1

V obdĺžniku $ABCD$ so stranami $|AB| = 9$, $|BC| = 8$ ležia navzájom sa dotýkajúce kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ tak, že k_1 sa dotýka strán AD a CD, k_2 sa dotýka strán AB a BC.

a) Dokážte, že $r_1 + r_2 = 5$.

b) Určte najmenšiu a najväčšiu možnú hodnotu obsahu trojuholníka AS_1S_2.

(*Pavel Novotný*)

A – S – 2

Na každej z $n+1$ stien n-bokého ihlana je napísané číslo 0. V každom kroku zvolíme niektorý vrchol a čísla na všetkých stenách obsahujúcich tento vrchol zväčšíme o 1 alebo ich všetky zmenšíme o 1. Dokážte, že nemôže nastať situácia, v ktorej by na všetkých stenách ihlana bolo napísané číslo 1. (*Peter Novotný*)

A – S – 3

Určte všetky trojice reálnych čísel a, b, c, ktoré spĺňajú podmienky

$$a^2 + b^2 + c^2 = 26, \quad a + b = 5 \quad \text{a} \quad b + c \geqq 7.$$

(*Pavel Novotný*)

A – II – 1

Daných je 21 rôznych celých čísel takých, že súčet ľubovoľných jedenástich z nich je väčší ako súčet desiatich zvyšných čísel.

a) Dokážte, že každé z daných čísel je väčšie ako 100.

b) Určte všetky také skupiny 21 rôznych celých čísel, ktoré obsahujú číslo 101.

(*Jaromír Šimša*)

A – II – 2

Nech A, B sú množiny celých kladných čísel také, že súčet ľubovoľných dvoch rôznych čísel z A patrí do B a podiel ľubovoľných dvoch rôznych čísel z B (väčšie delené menším) patrí do A. Určte najväčší možný počet prvkov množiny $A \cup B$. (*Martin Panák*)

A – II – 3

V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou AB a odvesnami dĺžok $|AC| = 4$ a $|BC| = 3$ ležia navzájom sa dotýkajúce kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ tak, že k_1 sa dotýka strán AB a AC a k_2 sa dotýka strán AB a BC. Určte polomery r_1 a r_2, ak platí $4r_1 = 9r_2$. (*Pavel Novotný*)

A – II – 4

Dokážte, že kladné čísla a, b, c sú dĺžkami strán trojuholníka práve vtedy, keď sústava rovníc

$$a(yz + x) = b(xz + y) = c(xy + z), \quad x + y + z = 1$$

s neznámymi x, y, z má riešenie v obore kladných reálnych čísel. (*Tomáš Jurík*)

A – III – 1

Nájdite všetky dvojice celých čísel a, b, pre ktoré platí rovnosť

$$\frac{a^2 + 1}{2b^2 - 3} = \frac{a - 1}{2b - 1}.$$

(*Pavel Novotný*)

A – III – 2

Každý zo zbojníkov v n-člennej družine ($n \geqq 3$) nazbíjal určitý počet mincí. Všetkých nazbíjaných mincí bolo $100n$. Zbojníci sa rozhodli podeliť korisť nasledujúcim spôsobom: v každom kroku dá jeden zo zbojníkov po jednej minci iným dvom. Nájdite všetky prirodzené čísla $n \geqq 3$, pre ktoré po konečnom počte krokov môže mať každý zbojník 100 mincí bez ohľadu na to, koľko mincí jednotliví zbojníci nazbíjali. (*Ján Mazák*)

A – III – 3

V rovnobežníku $ABCD$ so stredom S označme O stred kružnice vpísanej trojuholníku ABD a T bod jej dotyku s uhlopriečkou BD. Dokážte, že priamky OS a CT sú rovnobežné. (*Jaromír Šimša*)

A – III – 4

Na tabuli je napísané v desiatkovej sústave celé kladné číslo N. Ak nie je jednociferné, zotrieme jeho poslednú cifru c a číslo m, ktoré na tabuli ostane, nahradíme číslom $|m - 3c|$. (Ak napríklad bolo na tabuli číslo $N = 1\,204$, po úprave tam bude $120 - 3 \cdot 4 = 108$.) Nájdite všetky prirodzené čísla N, z ktorých opakovaním opísanej úpravy nakoniec dostaneme číslo 0. (*Peter Novotný*)

A – III – 5

Daný je rovnobežník $ABCD$ taký, že päty K, L kolmíc spustených z bodu D postupne na strany AB, BC sú ich vnútornými bodmi. Dokážte, že $KL \parallel AC$ práve vtedy, keď

$$|\sphericalangle BCA| + |\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle BDA| + |\sphericalangle ACD|.$$

(*Ján Mazák*)

A – III – 6

Nájdite všetky kladné reálne čísla p také, že

$$\sqrt{a^2 + pb^2} + \sqrt{b^2 + pa^2} \geqq a + b + (p - 1)\sqrt{ab}$$

platí pre ľubovoľnú dvojicu kladných reálnych čísel a, b. (*Jaromír Šimša*)

Riešenia súťažných úloh

Kategória C

C – I – 1

V priebehu svojej cesty sa kobylka musí posunúť o celkom 15 políčok doprava a 15 políčok nadol. Dohromady sa tak posunie o 30 políčok, takže dvojicu skokov dĺžky $2+3=5$ zopakuje celkom šesťkrát. Presnejšie vyjadrené, jej jednotlivé skoky budú mať dĺžky postupne

$$2,\ 3,\ 2,\ 3,\ 2,\ 3,\ 2,\ 3,\ 2,\ 3,\ 2,\ 3, \tag{1}$$

takže pôjde šesťkrát o skok dĺžky dva (*2-skok*) a šesťkrát o skok dĺžky tri (*3-skok*). Ak jednotlivým 2-skokom a 3-skokom pripíšeme poradové čísla podľa ich pozície v (1), bude kobylkina cesta jednoznačne určená výberom poradových čísel skokov smerujúcich doprava (zvyšné potom budú smerovať nadol). Musíme pritom dodržať len to, aby súčet dĺžok takto vybraných skokov (t. j. skokov doprava) bol rovný 15. To možno povolenými dĺžkami dosiahnuť (bez rozlíšenia poradia skokov) nasledujúcimi spôsobmi:

$$\begin{aligned}
15 &= 3+3+3+3+3,\\
15 &= 3+3+3+2+2+2,\\
15 &= 3+2+2+2+2+2+2.
\end{aligned}$$

V prvom prípade bude päť zo šiestich 3-skokov doprava (a všetky 2-skoky nadol), takže cesta bude určená len poradovým číslom toho (jediného) 3-skoku, ktorý bude smerovať nadol. Preto je ciest tohto typu práve 6.

V druhom prípade bude cesta určená poradovými číslami troch 3-skokov doprava a poradovými číslami troch 2-skokov doprava. Výbery oboch trojíc sú nezávislé (t. j. možno ich spolu ľubovoľne kombinovať) a pri každom z nich vyberáme tri prvky zo šiestich, čo možno urobiť 20 spôsobmi.[1] Preto je ciest tohto typu $20 \cdot 20 = 400$.

V treťom prípade je kobylkina cesta určená len poradovým číslom toho jediného 3-skoku, ktorý bude smerovať doprava, takže ciest tohto typu je (rovnako ako v prvom prípade) opäť 6.

Odpoveď. Hľadaný celkový počet kobylkiných ciest je $6+400+6=412$.

Iné riešenie. Zadanú úlohu „pre pravé dolné políčko“ vyriešime tak, že budeme postupne určovať počty kobylkiných ciest, ktoré vedú do jednotlivých políčok tabuľky (políčka budeme postupne voliť od ľavého horného políčka po jednotlivých vedľajších

[1] Väčšina riešiteľov kategórie C ešte zrejme nepozná kombinačné čísla, hodnotu $\binom{6}{3}=20$ však možno vypočítať aj vypísaním jednotlivých možností.

diagonálach[2], lebo ako ľahko zistíme, po určitom počte skokov skončí kobylka na tej istej vedľajšej diagonále; tak sa nakoniec dostaneme k tomu najvzdialenejšiemu, teda pravému dolnému políčku). Pre zjednodušenie ďalšieho výkladu označme (i,j) políčko v i-tom riadku a j-tom stĺpci.

Je zrejmé, že povoleným spôsobom skákania sa kobylka vie dostať len na niektoré políčka celej tabuľky. Po prvom skoku (ktorý musí byť 2-skok z políčka $(1,1)$) sa kobylka dostane len na políčko $(1,3)$ alebo $(3,1)$, po druhom skoku (teda 3-skoku) to bude niektoré z políčok

$$(1,6),\ (3,4),\ (4,3),\ (6,1).$$

Vo všetkých doteraz uvedených políčkach je v tabuľke vpísané číslo 1, lebo na každé z nich vedie jediná kobylkina cesta. Situácia sa zmení po treťom skoku (2-skoku) kobylky, lebo na políčka $(3,6)$ a $(6,3)$ vedú vždy dve rôzne cesty, a to z políčok $(1,6)$ a $(3,4)$, resp. z políčok $(6,1)$ a $(4,3)$. Takto v ďalšom kroku našej úvahy určíme všetky políčka, na ktoré sa kobylka môže dostať po štyroch skokoch, aj počty ciest, ktoré v týchto políčkach končia. V zapĺňaní tabuľky týmito číslami (postupom podľa počtu skokov kobylky) pokračujeme, až sa dostaneme do „cieľového“ políčka $(16,16)$. Pritom neustále využívame to, že posledný skok kobylky na dané políčko má danú dĺžku a jeden či oba možné smery. V prvom prípade číslo z predposledného políčka na ceste na posledné políčko opíšeme, v druhom prípade tam napíšeme súčet čísel z oboch možných predposledných políčok.

1		1			1		1			1		1			1
1			1		2			2		3			3		4
		1		1			2		2			3		3	
			1			1		3			3		6		
1		2			4		6			9		12			16
				1		2			4		7			10	
1			2		6			9		18			24		40
		2		3			9		13			25		35	
			2			4		13			20		44		
1		3			9		18			36		61			101
				3		7			20		40			75	
1			3		12			25		61			105		206
		3		6			24		44			105		180	
			3			10		35			75		180		
1		4			16		40			101		206			412

Rovnako ako v prvom riešení prichádzame k výsledku 412.

[2] V tomto prípade pod vedľajšou diagonálou chápeme skupinu políčok, ktorých stredy ležia na priamke kolmej na spojnicu stredu začiatočného políčka so stredom koncového políčka.

C – I – 2

Najskôr ukážeme, že prvé dve rovnosti zo zadania úlohy sú splnené len vtedy, keď platí $a = c$ a súčasne $b = d$. Naozaj, vďaka tomu, že zadané čísla sú kladné (a teda rôzne od nuly), môžeme uvedené rovnosti zapísať ako

$$a\Big(1 + \frac{b}{a}\Big) = c\Big(1 + \frac{d}{c}\Big) \quad \text{a} \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

Podľa druhej rovnosti vidíme, že súčty v oboch zátvorkách z prvej rovnosti majú rovnakú kladnú hodnotu, takže sa musia rovnať prvé činitele oboch jej strán. Platí teda $a = c$, odkiaľ už vyplýva aj rovnosť $b = d$.

Keď už vieme, že platí $a = c$ a $b = d$, vystačíme ďalej len s premennými a a b a nájdeme najväčšiu hodnotu zadaného súčtu

$$S = a + b + c + d = 2(a + b)$$

za jedinej podmienky, totiž že kladné čísla a, b spĺňajú rovnosť $a^2 + b^2 = 1$, ktorá je vyjadrením tretej zadanej rovnosti $ac + bd = 1$ (prvé dve sú vďaka rovnostiam $a = c$ a $b = d$ zrejmé).

Všimnime si, že pre druhú mocninu (kladného) súčtu S platí

$$S^2 = 4(a + b)^2 = 4(a^2 + b^2) + 8ab = 4 \cdot 1 + 8ab = 4(1 + 2ab),$$

takže hodnota S bude najväčšia práve vtedy, keď bude najväčšia hodnota $2ab$. Zo zrejmej nerovnosti $(a - b)^2 \geqq 0$ po roznásobení však dostaneme

$$2ab \leqq a^2 + b^2 = 1,$$

pritom rovnosť $2ab = 1$ nastane práve vtedy, keď bude platiť $a = b$, čo pre kladné čísla a, b spolu s podmienkou $a^2 + b^2 = 1$ vedie k jedinej vyhovujúcej dvojici $a = b = 1/\sqrt{2}$. Najväčšia hodnota výrazu $2ab$ je teda 1, takže najväčšia hodnota výrazu S^2 je $4(1 + 1) = 8$, a teda najväčšia hodnota S je $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Dosiahne sa pre jedinú prípustnú štvoricu $a = b = c = d = 1/\sqrt{2}$.

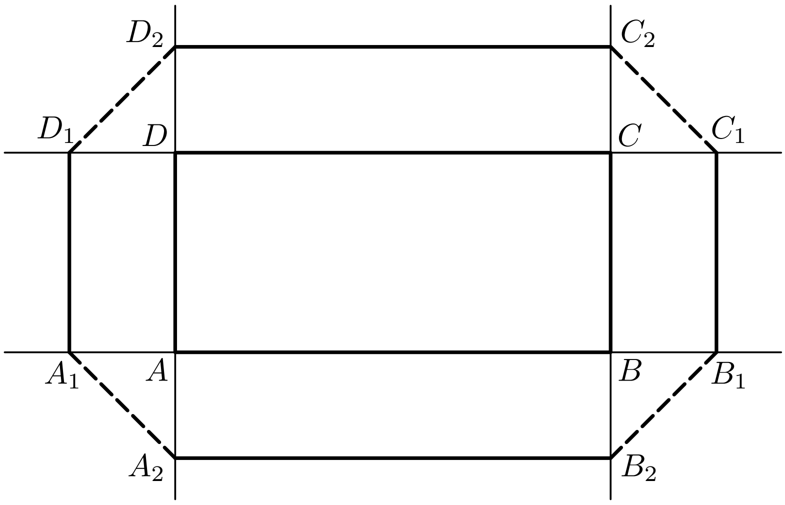
C – I – 3

Požadovanú hodnotu súčtu štyroch vzdialeností zapíšeme v tvare

$$\frac{2}{3}o = \frac{1}{6}o + \frac{1}{2}o = \frac{1}{6}o + |AB| + |BC|. \tag{1}$$

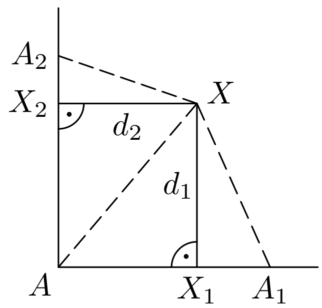
Pre ľubovoľný bod v páse určenom priamkami AB a CD platí, že súčet jeho vzdialeností od týchto dvoch rovnobežiek je rovný ich vzdialenosti, t. j. $|BC|$. Pre ľubovoľný bod zvonka tohto pásu je súčet dvoch uvažovaných vzdialeností rovný súčtu hodnoty $|BC|$ a dvojnásobku vzdialenosti od bližšej z oboch rovnobežiek. Podobné dve tvrdenia platia pre súčet vzdialeností ľubovoľného bodu od rovnobežiek BC a AD vo vzťahu k ich vzdialenosti $|AB|$. Vzhľadom na vyjadrenie (1) tak môžeme urobiť prvé dva závery.

1) V páse medzi priamkami AB a CD sú hľadanými bodmi práve tie, ktorých súčet vzdialeností od priamok BC a AD je rovný $\frac{1}{6}o+|AB|$. Sú to teda body, ktoré ležia zvonka pásu určeného priamkami BC a AD a majú od bližšej z nich vzdialenosť rovnú $\frac{1}{6}o : 2 = \frac{1}{12}o$. Množinu hľadaných bodov v páse medzi AB a CD tak tvoria dve úsečky B_1C_1 a A_1D_1 znázornené na obr. 13. Ich krajné body A_1, B_1 ležia na priamke AB zvonka úsečky AB tak, že $|AA_1| = |BB_1| = \frac{1}{12}o$; krajné body C_1, D_1 ležia na priamke CD zvonka úsečky CD tak, že $|CC_1| = |DD_1| = \frac{1}{12}o$.



Obr. 13

2) V páse medzi priamkami BC a AD sú hľadanými bodmi práve tie, ktorých súčet vzdialeností od priamok AB a CD je rovný $\frac{1}{6}o + |BC|$. Sú to teda body, ktoré ležia zvonka pásu určeného priamkami AB a CD a ktoré majú od bližšej z nich vzdialenosť $\frac{1}{12}o$. Množinu hľadaných bodov v páse medzi BC a AD tak tvoria dve úsečky A_2B_2 a C_2D_2, pritom krajné body B_2, C_2 ležia na priamke BC zvonka úsečky BC tak, že $|BB_2| = |CC_2| = \frac{1}{12}o$ a krajné body A_2, D_2 ležia na priamke AD zvonka úsečky AD tak, že $|AA_2| = |DD_2| = \frac{1}{12}o$.



Obr. 14

Ostáva nájsť hľadané body mimo zjednotenia oboch uvažovaných pásov, teda body ležiace v nejakom zo štyroch pravých uhlov A_1AA_2, B_1BB_2, C_1CC_2, D_1DD_2. Z vyššie uvedených úvah vyplýva, že v každom z týchto uhlov hľadáme práve tie body, ktorých súčet vzdialeností od oboch ramien uhla je rovný hodnote $\frac{1}{12}o$. Vzhľadom na symetriu ukážeme len to, že také body uhla A_1AA_2 vyplnia úsečku A_1A_2; v ostatných troch uhloch to potom budú úsečky B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 (obr. 13).

Všimnime si najskôr, že body A_1, A_2 sú jediné body na ramenách uhla A_1AA_2, ktoré majú požadovanú vlastnosť. Pre ľubovoľný vnútorný bod X uhla A_1AA_2 označme d_1, d_2 vzdialenosti bodu X od ramien AA_1, resp. AA_2. Hľadáme potom práve tie body X, pre ktoré platí $d_1 + d_2 = \frac{1}{12}o$ (obr. 14). Túto „rovnicu“ teraz vyriešime úvahou o obsahu S útvaru AA_1XA_2, ktorý je buď trojuholník, alebo konvexný či nekonvexný štvoruholník.

Obsah S je vždy rovný súčtu obsahov dvoch trojuholníkov AA_1X a AA_2X:

$$S = S_{AA_1X} + S_{AA_2X} = \frac{1}{2}|AA_1|d_1 + \frac{1}{2}|AA_2|d_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}o\cdot(d_1+d_2).$$

Rovnica $d_1+d_2 = \frac{1}{12}o$ je tak splnená práve vtedy, keď obsah S má rovnakú hodnotu ako obsah S_0 pravouhlého trojuholníka AA_1A_2, ktorého obe odvesny majú zhodnú dĺžku $\frac{1}{12}o$. Hľadané body X sú teda práve tie, pre ktoré je útvar AA_1XA_2 trojuholník; ak je totiž AA_1XA_2 konvexný, resp. nekonvexný štvoruholník, platí zrejme $S > S_0$, resp. $S < S_0$. Hľadané body X uhla AA_1A_2 preto naozaj tvoria úsečku A_1A_2.

Odpoveď. Hľadaná množina je zjednotením ôsmich úsečiek, ktoré tvoria hranicu osemuholníka $A_1A_2B_2B_1C_1C_2D_2D_1$.

Poznámka. Z obr. 14 je tiež zrejmé, že rovnica $d_1 + d_2 = c$, pričom $c = |AA_1| = |AA_2|$, bude splnená práve vtedy, keď bude $|X_1A_1| = d_1$ a $|X_2A_2| = d_2$, t. j. práve vtedy, keď budú oba trojuholníky XX_1A_1 a XX_2A_2 rovnoramenné. To zrejme nastane práve vtedy, keď bude uhol A_1XA_2 priamy, pretože $|\measuredangle AA_1A_2| = 45°$.

C – I – 4

Označme S stred daného pravidelného 19-uholníka $A_1A_2\dots A_{19}$. Os každej úsečky A_iA_j je priamka, ktorá okrem bodu S prechádza ešte niektorým vrcholom A_k (to vďaka tomu, že číslo 19 je nepárne). Preto sa dajú všetky úsečky A_iA_j rozdeliť na 19 skupín, pričom v každej skupine budú navzájom rovnobežné úsečky so spoločnou osou, ktorou je vždy jedna z priamok SA_k. V každej skupine je pritom zrejme $(19-1) : 2 = 9$ úsečiek a každé dve z nich sú základňami lichobežníka (nemôže sa jednať o rovnobežník, lebo žiadna z úsečiek A_iA_j neprechádza stredom S, opäť vďaka tomu, že číslo 19 je nepárne).

Počet všetkých úsečiek A_iA_j s krajnými bodmi v ľubovoľne vybranej sedemprvkovej množine vrcholov je $(7\cdot 6) : 2 = 21 > 19$, takže dve z týchto úsečiek ležia v rovnakej z 19 opísaných skupín. Tým je existencia žiadaného lichobežníka dokázaná, nech už je sedemprvková množina vrcholov zvolena akokoľvek.

Poznámka. Úvodnú úvahu o osi úsečky A_iA_j možno vynechať. Namiesto toho môžeme rovno opísať uvedených 19 deväťprvkových skupín navzájom rovnobežných úsečiek a potom skonštatovať, že ide o všetky možné úsečky A_iA_j, lebo tých je $(19 \cdot 18) : 2 = 19 \cdot 9$, teda práve toľko, koľko je úsečiek v opísaných 19 skupinách.

Iné riešenie. Zatiaľ čo v prvom riešení sme uvažovali o základniach hľadaného lichobežníka, teraz sa zameriame na jeho ramená alebo uhlopriečky. V oboch prípadoch to musia byť dve zhodné úsečky, lebo každý lichobežník, ktorému možno opísať kružnicu, je rovnoramenný. Osi jeho základní totiž musia prechádzať stredom opísanej kružnice, takže splývajú a tvoria tak os súmernosti celého lichobežníka. Naopak každé dve tetivy jednej kružnice, ktoré majú rovnakú dĺžku kratšiu ako priemer kružnice, nie sú rovnobežné a nemajú spoločný krajný bod, tvoria buď ramená, alebo uhlopriečky (rovnoramenného) lichobežníka (stačí si uvedomiť, že ľubovoľné dve zhodné tetivy jednej kružnice sú súmerne združené podľa priamky prechádzajúce stredom uvedenej kružnice a priesečníkom prislúchajúcich sečníc).

V pravidelnom 19-uholníku $A_1A_2 \dots A_{19}$ majú zrejme všetky úsečky A_iA_j dokopy len 9 rôznych dĺžok. Vo vybranej sedemprvkovej množine vrcholov má oba krajné body celkom $(7 \cdot 6) : 2 = 21$ úsečiek. Keďže $21 > 2 \cdot 9$, podľa Dirichletovho princípu niektoré tri z týchto úsečiek majú rovnakú dĺžku (t. j. sú zhodné). Keby každé dve z týchto troch úsečiek mali spoločný vrchol (a vieme, že z ľubovoľného vrcholu vychádzajú nanajvýš dve zhodné strany či uhlopriečky), vytvorili by tieto tri úsečky rovnostranný trojuholník, čo nie je možné, lebo $3 \nmid 19$. Preto niektoré dve z týchto troch zhodných úsečiek nemajú spoločný krajný bod, takže to sú buď ramená, alebo uhlopriečky rovnoramenného lichobežníka (protiľahlé strany rovnobežníka to byť nemôžu).

C – I – 5

Ukážeme, že jedinými celými číslami, ktoré vyhovujú úlohe, sú $n = 0$ a $n = 1$.

Upravme najskôr výraz $V = 2n^3 - 3n^2 + n + 3$ nasledujúcim spôsobom:

$$V = (n^3 - 3n^2 + 2n) + (n^3 - n) + 3 = (n-2)(n-1)n + (n-1)n(n+1) + 3.$$

Oba súčiny $(n-2)(n-1)n$ a $(n-1)n(n+1)$ v upravenom výraze V sú deliteľné tromi pre každé celé číslo n (v oboch prípadoch sa jedná o súčin troch po sebe idúcich celých čísel), takže výraz V je pre všetky celé čísla n deliteľný tromi. Hodnota výrazu V je preto prvočíslom práve vtedy, keď $V = 3$, teda práve vtedy, keď súčet oboch spomenutých súčinov je rovný nule:

$$0 = (n-2)(n-1)n + (n-1)n(n+1) = n(n-1)[(n-2) + (n+1)] = n(n-1)(2n-1)$$

Poslednú podmienku však spĺňajú iba dve celé čísla n, a to $n = 0$ a $n = 1$. Tým je úloha vyriešená.

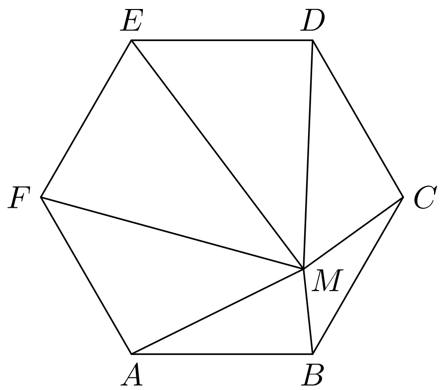
Poznámka. Fakt, že výraz V je deliteľný tromi pre ľubovoľné celé n, môžeme odvodiť aj tak, že doňho postupne dosadíme $n = 3k$, $n = 3k + 1$ a $n = 3k + 2$, pričom k je celé číslo, rozdelíme teda všetky celé čísla n na tri skupiny podľa toho, aký dávajú zvyšok po delení tromi.

C – I – 6

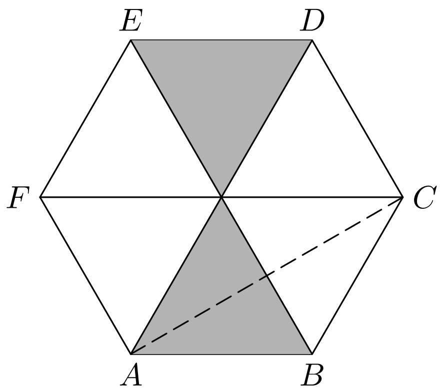
Úloha je o obsahu šiestich trojuholníkov, na ktoré je daný pravidelný šesťuholník rozdelený spojnicami jeho vrcholov s bodom M (obr. 15). Celý šesťuholník s daným obsahom, ktorý označíme S, možno rozdeliť na šesť rovnostranných trojuholníkov s obsahom $S/6$ (obr. 16). Ak označíme r ich stranu, v vzdialenosť rovnobežiek AB, CD a v_1 vzdialenosť bodu M od priamky AB, dostaneme

$$S_{ABM} + S_{EDM} = \frac{1}{2}rv_1 + \frac{1}{2}r(v - v_1) = \frac{1}{2}rv = \frac{S}{3},$$

lebo $S/3$ je súčet obsahov dvoch vyfarbených rovnostranných trojuholníkov. Vďaka symetrii majú tú istú hodnotu $S/3$ aj súčty $S_{BCM} + S_{EFM}$ a $S_{CDM} + S_{FAM}$. Odtiaľ už dostávame prvé dva neznáme obsahy $S_{DEM} = S/3 - S_{ABM} = 7\,\mathrm{cm}^2$ a $S_{EFM} = S/3 - S_{BCM} = 8\,\mathrm{cm}^2$.



Obr. 15



Obr. 16

Ako určiť zvyšné dva obsahy S_{CDM} a S_{FAM}, keď zatiaľ poznáme len ich súčet $S/3$? Všimnime si, že súčet zadaných obsahov trojuholníkov ABM a BCM má významnú hodnotu $S/6$, ktorá je aj obsahom trojuholníka ABC (to vyplýva opäť z obr. 16). Taká zhoda obsahov znamená práve to, že bod M leží na uhlopriečke AC. Trojuholníky ABM a BCM tak majú zhodné výšky zo spoločného vrcholu B a to isté platí aj pre výšky trojuholníkov CDM a FAM z vrcholov F a D (t. j. bodov, ktoré majú od priamky AC rovnakú vzdialenosť). Pre pomery obsahov týchto dvojíc trojuholníkov tak dostávame

$$\frac{S_{CDM}}{S_{FAM}} = \frac{|CM|}{|AM|} = \frac{S_{BCM}}{S_{ABM}} = \frac{2}{3}.$$

V súčte $S_{CDM} + S_{FAM}$ majúcom hodnotu $S/3$ sú teda sčítance v pomere $2 : 3$. Preto $S_{CDM} = 4\,\mathrm{cm}^2$ a $S_{FAM} = 6\,\mathrm{cm}^2$.

C – S – 1

Ukážeme, že sa oba obsahy rovnajú. Označme A, B, C vrcholy daného trojuholníka a r a R zodpovedajúce polomery jeho vpísanej a opísanej kružnice; dĺžku jeho strany označme a. Obe uvedené kružnice majú spoločný stred S. Označme ešte P bod dotyku vpísanej kružnice so stranou AB. Keďže trojuholník ABC je rovnostranný, je P zároveň stredom strany AB. Použitím Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku PSB dostávame

$$R^2 - r^2 = \left(\tfrac{1}{2}a\right)^2,$$

čo je ekvivalentné s dokazovaným tvrdením $S = \pi(R^2 - r^2) = \pi\left(\frac{1}{2}a\right)^2 = T$.

Poznámka. Rovnostranný trojuholník so stranou a má výšku veľkosti $v = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, takže skúmané polomery sú $R = \frac{2}{3}v$ $(= \frac{1}{3}a\sqrt{3})$ a $r = \frac{1}{3}v$ $(= \frac{1}{6}a\sqrt{3})$, a preto

$$S = \pi\bigl(R^2 - r^2\bigr) = \pi\bigl(\tfrac{4}{9} - \tfrac{1}{9}\bigr)v^2 = \pi \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{3}{4}a^2 = \pi\bigl(\tfrac{1}{2}a\bigr)^2 = T.$$

C – S – 2

Ak označíme d najväčšieho spoločného deliteľa čísel a a b, môžeme písať $a = kd$ a $b = ld$, pričom $(k, l) = 1$, takže $[a, b] = kld$. Po dosadení do danej rovnice tak dostaneme

$$kd \cdot kld = 4 \cdot d \qquad \text{a po úprave} \qquad k^2 ld = 4.$$

Z poslednej rovnosti je zrejmé, že môže byť jedine $k = 2$ alebo $k = 1$.

Pre $k = 2$ vychádza $l = d = 1$, čomu zodpovedá dvojica $a = 2$, $b = 1$.

Pre $k = 1$ dostávame rovnicu $ld = 4$, ktorá má v obore kladných celých čísel tri riešenia:

1. $l = 4$, $d = 1$ a riešením úlohy je dvojica $a = 1$, $b = 4$;
2. $l = 2$, $d = 2$ a riešením úlohy je dvojica $a = 2$, $b = 4$;
3. $l = 1$, $d = 4$ a riešením úlohy je dvojica $a = 4$, $b = 4$.

Záver. Úlohe vyhovujú práve štyri dvojice kladných celých čísel (a, b), a to $(2, 1)$, $(1, 4)$, $(2, 4)$ a $(4, 4)$.

Iné riešenie. Využijeme známu rovnosť $[a, b] \cdot (a, b) = a \cdot b$, ktorá platí pre všetky celé kladné a, b. Vynásobením oboch strán danej rovnice číslom $[a, b]$ tak dostaneme

$$a[a, b]^2 = 4ab, \qquad \text{čiže} \qquad [a, b]^2 = 4b. \tag{1}$$

Vzhľadom na to, že $[a, b] \geqq b$, a teda

$$4b = [a, b]^2 \geqq b^2,$$

je $b^2 \leqq 4b$, takže $b \leqq 4$. Navyše z upravenej rovnice (1) vyplýva, že $4b$, a teda aj b je druhou mocninou celého čísla. Preskúmaním oboch prípadov $b \in \{1, 4\}$ (dosadíme do pôvodnej rovnice postupne všetky možné hodnoty (a, b), ktorých je konečne veľa, alebo dosadíme do (1) a využijeme to, že a je deliteľom najmenšieho spoločného násobku $[a, b]$) dôjdeme k rovnakému záveru ako v prvom riešení.

Iné riešenie. Keďže zrejme platí $[a,b] \geqq (a,b)$, vyplýva zo zadanej rovnosti nerovnosť $a \leqq 4$, pričom rovnosť $a = 4$ nastane práve vtedy, keď $[a,b] = (a,b)$ čiže $a = b = 4$. To je prvé riešenie danej úlohy, pri všetkých ostatných musí byť $a = 1$, $a = 2$, alebo $a = 3$. Pre $a = 1$ máme rovnicu $1 \cdot b = 4$, takže $(a,b) = (1,4)$ je druhým riešením. Pre $a = 2$ máme rovnicu $2[2,b] = 4(2,b)$ čiže $[2,b] = 2(2,b)$, odkiaľ podľa možných hodnôt $(2,b) = 1$ a $(2,b) = 2$ dostaneme $b = 1$, resp. $b = 4$; ďalšie dve (tretie a štvrté) riešenia teda sú $(a,b) = (2,1)$ a $(a,b) = (2,4)$. Napokon pre $a = 3$ máme rovnicu $3[3,b] = 4(3,b)$, z ktorej vyplýva $3 \mid (3,b)$, čiže $3 \mid b$, takže máme vlastne rovnicu $3b = 12$, ktorej jediné riešenie $b = 4$ však podmienku $3 \mid b$ nesplĺňa.

Poznámka. Diskusii o prípade $a = 3$ sa možno vyhnúť nasledujúcou úvahou. Prepíšme zadanú rovnicu na tvar

$$\frac{[a,b]}{(a,b)} = \frac{4}{a}.$$

Keďže zlomok na ľavej strane je zrejme celé číslo, musí byť taký aj zlomok na pravej strane, takže a je jedno z čísel 1, 2 alebo 4.

C – S – 3

Keďže $19 > 6 \cdot 3$, majú rovnakú farbu niektoré štyri vrcholy, ktoré označíme A, B, C, D v poradí na opísanej kružnici. Tie tvoria vrcholy konvexného štvoruholníka, ktorého vnútorné uhly majú súčet $360°$, takže nemôžu byť všetky menšie ako $90°$. Zároveň je zrejmé, že žiadny z nich nemôže byť rovný $90°$, pretože číslo 19 je nepárne. Aspoň jeden z uhlov ABC, BCD, CDA, DAB je teda väčší ako $90°$, a preto je príslušný trojuholník tupouhlý.

C – II – 1

Do každej známosti vstupuje práve jeden chlapec a každý z chlapcov má práve štyri známosti, spolu teda v tanečnej existuje $15 \cdot 4 = 60$ známostí. V každej známosti je však zastúpené práve jedno dievča a každé dievča má práve desať známostí. Ak označíme d počet dievčat, tak $10 \cdot d = 60$. V tanečnej je teda 6 dievčat. Uvažujme ľubovoľného z chlapcov, povedzme Tomáša. Tomáš pozná 4 dievčatá, v tanečnej sú teda iba dve dievčatá, ktoré Tomáš nepozná. Ľubovoľný ďalší chlapec však pozná tiež štyri dievčatá, musí tak poznať aspoň dve z dievčat, ktoré pozná Tomáš.

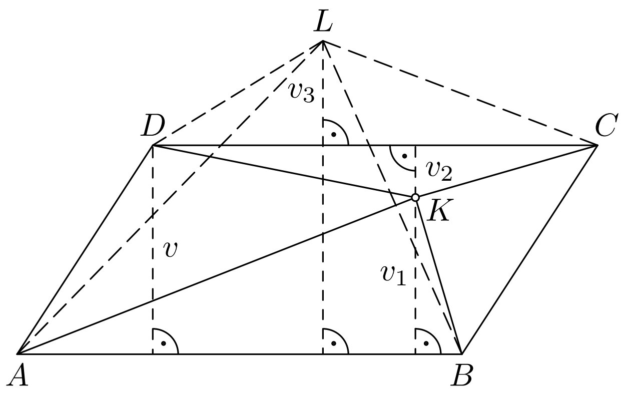
C – II – 2

Trojuholníky ABK a CDK majú zhodné strany AB a CD a súčet ich výšok v_1 a v_2 (vzdialeností bodu K od priamky AB, resp. CD) je rovný výške v rovnobežníka $ABCD$ (vzdialenosti rovnobežných priamok AB a CD, obr. 17). Preto súčet ich obsahov dáva polovicu súčtu obsahu daného rovnobežníka:

$$S_{ABK} + S_{CDK} = \frac{1}{2}|AB|v_1 + \frac{1}{2}|CD|v_2 = \frac{1}{2}|AB| \cdot (v_1 + v_2) = \frac{1}{2}|AB| \cdot v = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Podobne aj $S_{BCK} + S_{DAK} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$, teda

$$S_{CDK} = S_{BCK} + S_{DAK} - S_{ABK} = 6\,\mathrm{cm}^2.$$



Obr. 17

Trojuholníky ABL a DCL majú zhodné strany AB a CD. Ak v_3 označuje príslušnú výšku druhého z nich, je výška prvého z nich rovná $v + v_3$, takže pre rozdiel obsahov týchto trojuholníkov platí

$$\begin{aligned} S_{ABL} - S_{DCL} &= \frac{1}{2}|AB| \cdot (v + v_3) - \frac{1}{2}|CD| \cdot v_3 = \frac{1}{2}|AB| \cdot (v + v_3 - v_3) = \\ &= \frac{1}{2}|AB| \cdot v = \frac{1}{2} S_{ABCD} = S_{BCK} + S_{DAK}. \end{aligned}$$

Odtiaľ vyplýva

$$S_{ABL} = S_{BCK} + S_{DAK} + S_{DCL} = 60\,\mathrm{cm}^2.$$

C – II – 3

Zadanie zapíšeme rovnosťou, ktorej pravú stranu rovno upravíme na súčin:

$$62 = (a^2 + b) - (b^2 + a) = (a^2 - b^2) - (a - b) = (a - b)(a + b - 1).$$

Súčin celých čísel $u = a - b$ a $v = a + b - 1$ je teda rovný súčinu dvoch prvočísel $2 \cdot 31$. Keďže $v \geqq 1 + 1 - 1 = 1$, je nutne aj číslo u kladné a zrejme $u < v$, takže (u, v) je jedna z dvojíc $(1, 62)$ alebo $(2, 31)$. Ak vyjadríme naopak a, b pomocou u, v, dostaneme

$$a = \frac{u + v + 1}{2} \quad \text{a} \quad b = \frac{v - u + 1}{2}.$$

Pre $(u, v) = (1, 62)$ tak dostávame riešenie $(a, b) = (32, 31)$, dvojici $(u, v) = (2, 31)$ zodpovedá druhé riešenie $(a, b) = (17, 15)$. Iné riešenia úloha nemá.

C – II – 4

Nech $A_1A_2\dots A_{20}$ je pravidelný dvadsaťuholník. Podľa Tálesovej vety jedine niektorý z desiatich priemerov A_1A_{11}, A_2A_{12}, …, $A_{10}A_{20}$ opísanej kružnice môže byť preponou hľadaného pravouhlého trojuholníka, takže skúmané tvrdenie neplatí pre $v = 10$ (ani pre žiadne $v < 10$): stačí vybrať po jednom z vrcholov na rôznych priemeroch a nebude existovať žiadny pravouhlý trojuholník s takto vybranými vrcholmi.

V druhej časti riešenia ukážeme, že vyhovuje $v = 11$. Všetkých 20 vrcholov dvadsaťuholníka rozdelíme na päť štvoríc vrcholov štvorcov $A_1A_6A_{11}A_{16}$, $A_2A_7A_{12}A_{17}$, $A_3A_8A_{13}A_{18}$, $A_4A_9A_{14}A_{19}$ a $A_5A_{10}A_{15}A_{20}$. Ak teraz vyberieme ľubovoľne 11 vrcholov, budú vďaka nerovnosti $11 > 5\cdot 2$ medzi vybranými aspoň tri vrcholy niektorého z piatich uvedených štvorcov (Dirichletov princíp). Ostáva dodať, že akékoľvek tri vrcholy štvorca zrejme tvoria pravouhlý rovnoramenný trojuholník.

Odpoveď. Hľadané najmenšie číslo v je rovné číslu 11.

KATEGÓRIA B

B – I – 1

Danú rovnicu môžeme prepísať ako $2^a + 2^{2b} = 2^{3c}$. Aby sme mohli výraz na ľavej strane vydeliť mocninou dvojky, pomôžeme si označením $m = \min(a, 2b)$, $M = \max(a, 2b)$, $0 < m \leqq M$, takže

$$2^a + 2^{2b} = 2^m(2^{M-m} + 1).$$

Číslo $2^{M-m} + 1$ v zátvorke je pre $M > m$ zrejme nepárne číslo väčšie ako 1, takže to nemôže byť deliteľ mocniny 2^{3c}, ktorá je na pravej strane danej rovnice. Nutne teda musí byť $M = m$, odkiaľ vyplýva $a = 2b$ a porovnaním oboch strán upravenej rovnice aj $2b + 1 = 3c$. Keďže $2b + 1$ je nepárne číslo, musí byť číslo c tiež nepárne, existuje teda prirodzené číslo n, pre ktoré platí $c = 2n - 1$. Z rovnice $2b + 1 = 3c$ dopočítame $b = 3n - 2$ a $a = 2b = 6n - 4$.

Pre ľubovoľné prirodzené číslo n je trojica $(a, b, c) = (6n - 4, 3n - 2, 2n - 1)$ riešením danej rovnice, ako môžeme overiť skúškou, ktorá pri tomto postupe nie je nutná.

Poznámka. Zo zápisu $2^a + 2^{2b} = 2^{3c}$ a z jednoznačnosti zápisu čísla v dvojkovej sústave okamžite vyplýva, že musí byť $a = 2b$, a teda $3c = a + 1$.

B – I – 2

Danú rovnicu prepíšme na tvar

$$\sqrt{2}\,(3x^2 - x - 14) + (x^3 - 2x^2 - x + 14) = 0. \tag{1}$$

Z toho vyplýva, že každý celočíselný koreň danej rovnice musí byť koreňom rovnice

$$3x^2 - x - 14 = 0,$$

inak by sa iracionálne číslo $\sqrt{2}$ dalo z rovnice (1) vyjadriť ako podiel dvoch celých čísel. Táto kvadratická rovnica má korene -2 a $\frac{7}{3}$, z ktorých iba ten prvý je koreňom aj pôvodnej rovnice, ako sa ľahko presvedčíme dosadením oboch čísel do upravenej rovnice (1).

Našli sme teda koreň $x_1 = -2$ danej kubickej rovnice. Jej zvyšné korene sú korene kvadratickej rovnice, ktorú dostaneme, keď pôvodnú rovnicu vydelíme koreňovým činiteľom $x + 2$. Dostaneme tak

$$\bigl(x^3 + \bigl(3\sqrt{2} - 2\bigr)x^2 - \bigl(1 + \sqrt{2}\bigr)x - 14\bigl(\sqrt{2} - 1\bigr)\bigr) : (x + 2) = x^2 + \bigl(3\sqrt{2} - 4\bigr)x - 7\bigl(\sqrt{2} - 1\bigr) = 0.$$

Diskriminant D nájdenej kvadratickej rovnice je kladné iracionálne číslo

$$D = \bigl(3\sqrt{2} - 4\bigr)^2 + 28\bigl(\sqrt{2} - 1\bigr) = 6 + 4\sqrt{2}.$$

Aby sme sa vyhli v zápise zvyšných koreňov odmocninám iracionálnych čísel, hľadajme hodnotu $\sqrt{D}$ v tvare

$$\sqrt{D} = \sqrt{6 + 4\sqrt{2}} = a + b\sqrt{2}$$

s racionálnymi koeficientmi a, b. Tie možno ľahko uhádnuť, lebo po umocnení na druhú dostávame

$$6 + 4\sqrt{2} = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2},$$

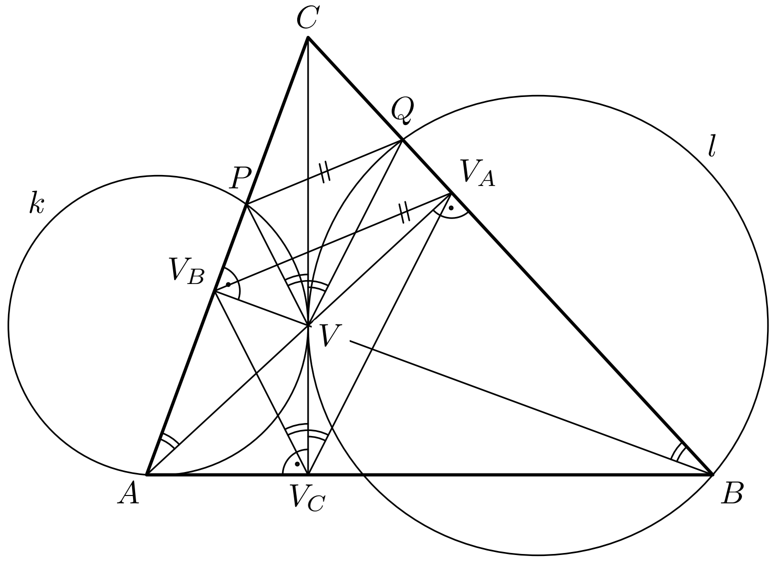
odkiaľ $a^2 + 2b^2 = 6$ a $2ab = 4$, takže je zrejmé, že vyhovujú hodnoty $a = 2$ a $b = 1$. (Namiesto hádania môžeme po dosadení $b = 2/a$ riešiť pre neznámu a^2 rovnicu $a^2 + 2 \cdot \cdot (2/a)^2 = 6$, z ktorej vychádza $a^2 = 2$ alebo $a^2 = 4$.)

Takže $\sqrt{D} = 2 + \sqrt{2}$ a zvyšnými koreňmi $x_{2,3}$ danej rovnice sú čísla

$$x_2 = \frac{4 - 3\sqrt{2} + (2 + \sqrt{2})}{2} = 3 - \sqrt{2} \quad \text{a} \quad x_3 = \frac{4 - 3\sqrt{2} - (2 + \sqrt{2})}{2} = 1 - 2\sqrt{2}.$$

B – I – 3

Označme veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC zvyčajným spôsobom a V_A, V_B, V_C päty jeho výšok postupne z vrcholov A, B, C (obr. 18).



Obr. 18

Trojuholník AV_AC je pravouhlý a platí $|\measuredangle VAC| = |\measuredangle V_AAC| = 90° - \gamma$. Podobne platí aj $|\measuredangle VBC| = |\measuredangle V_BBC| = 90° - \gamma$. Z rovnosti úsekového a obvodového uhla pre tetivu PV kružnice k vychádza $|\measuredangle CVP| = |\measuredangle VAC| = 90° - \gamma$. A obdobne pre tetivu QV kružnice l máme $|\measuredangle CVQ| = |\measuredangle VBC| = 90° - \gamma$. Polpriamka VC je teda osou uhla PVQ, čo sme chceli dokázať.

Druhú časť tvrdenia môžeme dokázať nasledujúcim spôsobom. Podľa Tálesovej vety ležia body V_A a V_C na Tálesovej kružnici nad priemerom AC. Z rovnosti obvodových uhlov nad tetivou V_AC tejto kružnice vyplýva $|\measuredangle V_AAC| = |\measuredangle V_AV_CC| = 90^\circ - \gamma$. Úsečky V_AV_C a QV sú teda rovnobežné, pretože zvierajú s priamkou CV_C rovnaký uhol. Podobne zistíme, že aj úsečky V_BV_C a PV sú rovnobežné. Odtiaľ vidíme, že trojuholník $V_AV_BV_C$ je obrazom trojuholníka QPV v rovnoľahlosti so stredom v bode C, ktorá zobrazuje bod V_C na bod V. Preto sú úsečky V_AV_B a QP rovnobežné.

Podľa Tálesovej vety ležia body V_A a V_B na Tálesovej kružnici nad priemerom AB, z vlastností tetivového štvoruholníka ABV_AV_B tak vyplýva $|\measuredangle PQC| = |\measuredangle V_BV_AC| = \alpha$, $|\measuredangle QPC| = |\measuredangle V_AV_BC| = \beta$. Tieto rovnosti už, ako je známe, zaručujú, že aj štvoruholník $ABQP$ je tetivový, teda jeho vrcholy ležia na jednej kružnici, ako sme mali dokázať.

Poznámka. Druhá časť tvrdenia tiež jednoducho vyplýva z vlastností mocnosti bodu ku kružnici: Mocnosť bodu C ku kružnici k je rovná $|CV|^2 = |CP|\cdot|CA|$. Podobne mocnosť bodu C ku kružnici l je rovná $|CV|^2 = |CQ| \cdot |CB|$. Preto $|CP| \cdot |CA| = |CQ| \cdot |CB|$, čo je ekvivalentné s tým, že body A, B, P, Q ležia na jednej kružnici.

To isté môžeme formulovať aj bez počítania, ak využijeme poznatok o chordálach[3] troch kružníc: Označme m kružnicu opísanú trojuholníku ABP. Keďže CV je chordálou kružníc k a l a AC chordálou kružníc k a m, je BC chordálou kružníc l a m. Odtiaľ vyplýva, že kružnice l a m sa pretínajú v bode Q.

B – I – 4

Najskôr vypočítajme hodnoty výrazu $V(n)$ pre niekoľko prirodzených čísel $n \geqq 3$:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$V(n)$	$5\frac{1}{3}$	$5\frac{1}{3}$	$6\frac{2}{7}$	$7\frac{2}{3}$	$10\frac{2}{3}$	2	$7\frac{5}{9}$	$9\frac{2}{9}$	$10\frac{14}{29}$	$11\frac{13}{21}$	$12\frac{40}{57}$	$13\frac{28}{37}$

Z tabuľky vidíme, že $V(n) \geqq 2$ pre všetky $n \in \{3, 4, \ldots, 14\}$, pričom $V(8) = 2$. Ukážeme, že pre všetky $n \geqq 9$ už platí $V(n) > 2$.

Postupnou úpravou výrazu $V(n) - 2$ dostávame (vieme, že $V(8) - 2 = 0$)

$$V(n) - 2 = \frac{n^3 - 10n^2 + 17n - 4}{n^2 - 10n + 18} - 2 = \frac{n^3 - 12n^2 + 37n - 40}{n^2 - 10n + 18} =$$
$$= \frac{(n-8)(n^2 - 4n + 5)}{(n-5)^2 - 7} = \frac{(n-8)\bigl((n-2)^2 + 1\bigr)}{(n-5)^2 - 7}.$$

Pre $n \geqq 9$ sú čitateľ aj menovateľ posledného zlomku kladné čísla. Preto $V(n) - 2 > 0$ pre každé $n \geqq 9$.

Odpoveď. Najmenšia možná hodnota zlomku $V(n)$ pre prirodzené čísla $n > 2$ je rovná 2; túto hodnotu výraz $V(n)$ nadobúda pre $n = 8$.

Iné riešenie. Delením oboch polynómov so zvyškom dostaneme

$$V(n) = n - \frac{n+4}{n^2 - 10n + 18}. \tag{1}$$

[3] Chordála dvoch kružníc je množina bodov, ktoré majú k obom kružniciam rovnakú mocnosť, čo v prípade pretínajúcich sa kružníc je ich spoločná sečnica.

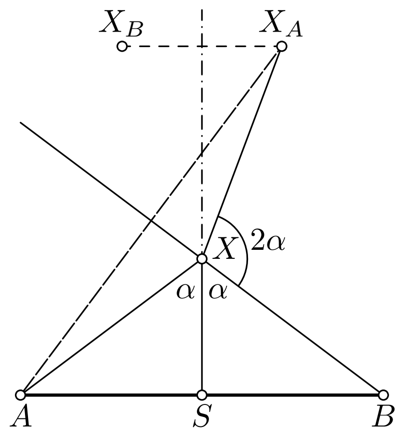
Ukážeme, že pre $n \geqq 10$ platí

$$\frac{n+4}{n^2-10n+18} < 1. \tag{2}$$

Pre prirodzené čísla $n \geqq 10$ je totiž menovateľ $n^2 - 10n + 18 = n(n-10) + 18$ kladné číslo, a nerovnosť (2) je tak ekvivalentná s nerovnosťou $0 < n^2 - 11n + 14 = (n-1)(n-10) + 4$, ktorá je pre $n \geqq 10$ zrejme splnená. Pre prirodzené čísla $n \geqq 10$ preto podľa (1) platí $V(n) > n - 1 \geqq 9$. Ako ľahko zistíme (napr. podľa hodnôt v tabuľke na začiatku prvého riešenia), nadobúda výraz $V(n)$ pre prirodzené čísla $n \in \{3,4,5,6,7,8,9\}$ menšie hodnoty, medzi nimi je najmenšia $V(8) = 2$.

B – I – 5

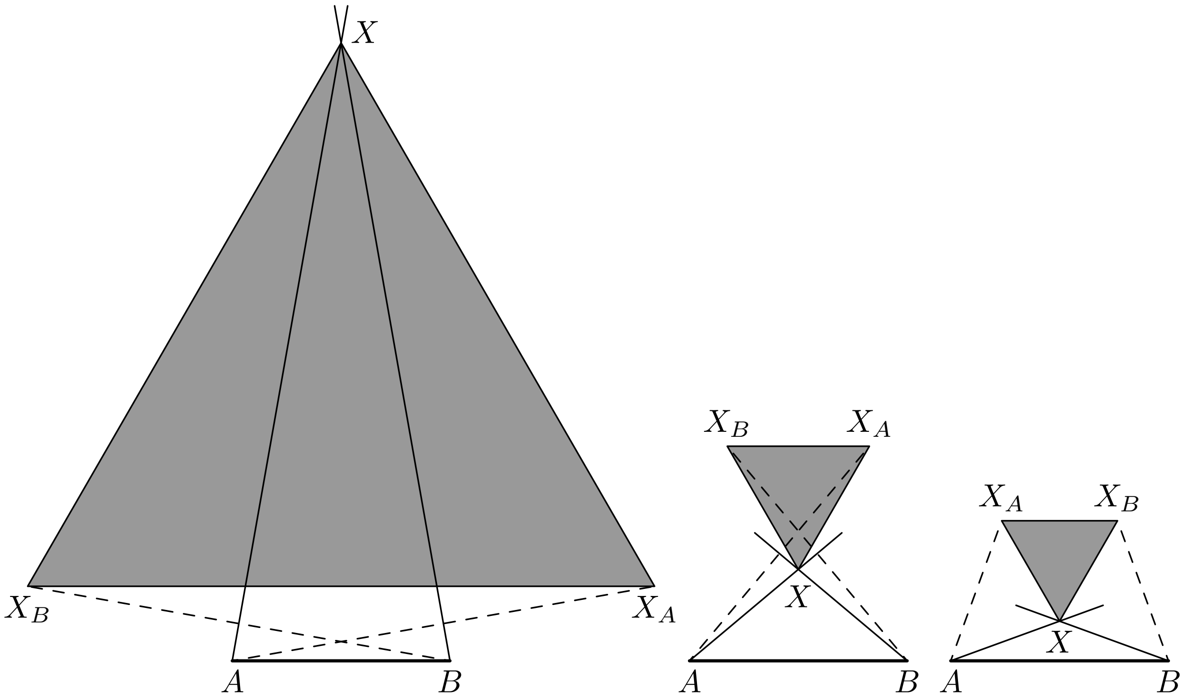
Bod X_A je súmerne združený s bodom A podľa priamky XB, platí teda $|XX_A| = |XA|$. Podobne $|XX_B| = |XB|$. Ak má byť trojuholník XX_AX_B rovnostranný, musí platiť $|XX_A| = |XX_B|$, čiže $|XA| = |XX_A| = |XX_B| = |XB|$. Bod X preto nutne leží na osi o úsečky AB. Naopak, ak X leží na osi úsečky AB, platí podľa rovností z prvých dvoch viet riešenia $|XX_A| = |XX_B|$. Body X, X_A a X_B potom budú vrcholmi rovnostranného trojuholníka práve vtedy, keď veľkosť uhla X_AXX_B bude $60°$.



Obr. 19

Hľadaný bod X zrejme nemôže byť stredom S úsečky AB, pretože potom by bolo $X_A = A$, $X_B = B$ a body X_A, X, X_B by ležali na jednej priamke. Hľadané body X môžu teda ležať na priamke o mimo úsečky AB. Vzhľadom na zrejmú symetriu sa ďalej obmedzíme len na body X v jednej z polrovín určených priamkou AB.

Označme α veľkosť ostrého uhla AXS (obr. 19), ktorý zrejme môže nadobúdať ľubovoľnú hodnotu z intervalu $(0°, 90°)$. Zo zhodnosti orientovaných uhlov AXB a BXX_A vyplýva, že orientovaný uhol SXX_A má potom veľkosť 3α. Ako už vieme, bod X bude vrcholom rovnostranného trojuholníka XX_AX_B práve vtedy, keď bude priamka XX_A zvierať s osou o uhol $30°$, čo vzhľadom na nerovnosti $0° < 3\alpha < 270°$ nastane jedine pre $3\alpha \in \{30°, 150°, 210°\}$, čiže $\alpha \in \{10°, 50°, 70°\}$.



Obr. 20

Na obr. 20 vidíme všetky tri zodpovedajúce riešenia. Sú to vrcholy rovnoramenných trojuholníkov so základňou AB a uhlom $2\alpha \in \{20°, 100°, 140°\}$ pri vrchole X. Ďalšie tri riešenia (súmerne združené podľa priamky AB) existujú v opačnej polrovine určenej priamkou AB.

B – I – 6

Vrcholy pravidelného dvanásťuholníka očíslujme rovnako ako na ciferníku hodín. Pre $i \in \{1, 2, \dots, 12\}$ označme a_i číslo napísané v i-tom vrchole dvanásťuholníka; na začiatku je podľa zadania $a_i = i$ pre všetky $i \in \{1, 2, \dots, 12\}$.

Najskôr ukážeme, že $T(2)$ neplatí. Uvažujme súčty

$$S_1 = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11},$$
$$S_2 = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12}.$$

Na začiatku je $S_1 = 36$ a $S_2 = 42$. Každé dve protiľahlé čísla sa nachádzajú spoločne v tom istom súčte, to znamená, že po ich výmene sa žiadny z oboch súčtov nezmení. Navyše žiadne dve susedné čísla nepatria do toho istého súčtu, takže po kroku spočívajúcom vo voľbe dvoch susedných vrcholov a zväčšení v nich napísaných čísel o 1 sa oba súčty zväčšia o 1, takže ich rozdiel $S_2 - S_1$ sa nezmení. Keďže na začiatku je $S_2 - S_1 = 6$, nemožno sa nikdy dostať do situácie, keď by boli všetky čísla a_i rovnaké. V takom prípade by totiž bolo $S_1 = S_2$ a rozdiel $S_2 - S_1$ by bol nulový. Preto tvrdenie $T(2)$ neplatí.

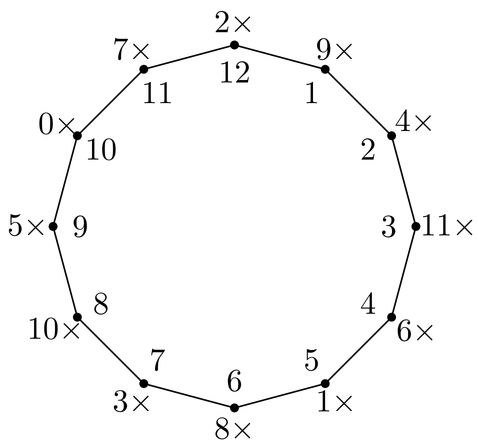
Podobne dokážeme, že neplatí ani tvrdenie $T(3)$. Uvažujeme tentoraz tri súčty

$$S_1 = a_1 + a_4 + a_7 + a_{10},$$
$$S_2 = a_2 + a_5 + a_8 + a_{11},$$
$$S_3 = a_3 + a_6 + a_9 + a_{12},$$

pre ktoré na začiatku platí $S_1 = 22$, $S_2 = 26$, $S_3 = 30$. Po každom kroku sa buď žiadny z troch súčtov nezmení (ak vymeníme dvojicu protiľahlých čísel), alebo sa všetky tri zväčšia o 1 (ak zväčšíme trojicu susedných čísel). Preto po žiadnom počte krokov nemôžu byť vo všetkých vrcholoch napísané rovnaké čísla, vtedy by totiž platilo $S_1 = S_2 = S_3$.

Nakoniec ukážeme, že tvrdenie $T(5)$ platí. Pod päticou čísel so stredom vo vrchole i budeme rozumieť čísla vo vrcholoch $i-2$, $i-1$, i, $i+1$, $i+2$ so zvyčajnou dohodou, že vrchol -1 je vrchol 11, vrchol 0 je 12, vrchol 13 je 1 a vrchol 14 je 2. Zväčšíme pätice so stredmi v jednotlivých vrcholoch toľkokrát, koľko je naznačené v obr. 21, t. j. päticu so stredom vo vrchole 1 zväčšíme deväťkrát, päticu so stredom vo vrchole 2 štyrikrát, päticu so stredom vo vrchole 3 jedenásťkrát atď. až päticu so stredom vo vrchole 12 dvakrát. Číslo vo vrchole 1 je na začiatku 1 a zväčší sa iba pri zväčšení pätíc so stredmi vo vrcholoch 11, 12, 1, 2 a 3. Po týchto krokoch bude teda $a_1 = 1+7+2+9+4+11 = 34$, podobne sa zväčšia aj čísla pri ďalších vrcholoch a bude platiť

$$a_2 = 2+2+9+4+11+6 = 34,$$
$$a_3 = 3+9+4+11+6+1 = 34,$$
$$a_4 = 4+4+11+6+1+8 = 34,$$
$$a_5 = 5+11+6+1+8+3 = 34,$$
$$a_6 = 6+6+1+8+3+10 = 34,$$
$$a_7 = 7+1+8+3+10+5 = 34,$$
$$a_8 = 8+8+3+10+5+0 = 34,$$
$$a_9 = 9+3+10+5+0+7 = 34,$$
$$a_{10} = 10+10+5+0+7+2 = 34,$$
$$a_{11} = 11+5+0+7+2+9 = 34,$$
$$a_{12} = 12+0+7+2+9+4 = 34.$$



Obr. 21

Vidíme, že po opísaných krokoch (tie spočívali len vo zväčšení pätice susedných čísel, výmenu protiľahlých čísel sme nevyužili) bude v každom vrchole dvanásťuholníka napísané zhodné číslo 34.

Poznámka. Ukážme, ako dokázať tvrdenie $T(5)$ systematickejšie, aj keď zďaleka nie tak efektívne. Ak zväčšíme päťkrát čísla v po sebe nasledujúcich päticiach vrcholov, teda postupne v päticiach vrcholov

$$(1,2,3,4,5),\quad (6,7,8,9,10),\quad (11,12,1,2,3),\quad (4,5,6,7,8),\quad (9,10,11,12,1),$$

dosiahneme vďaka rovnosti $5\cdot 5 = 2\cdot 12+1$ to, že čísla vo všetkých vrcholoch s výnimkou prvého zväčšíme o 2, zatiaľ čo číslo v prvom vrchole zväčšíme o 3. Podobne samozrejme môžeme zväčšiť číslo v ľubovoľnom vrchole o o jedna viac ako vo všetkých ostatných vrcholoch, takže opakovaním uvedeného postupu jedenásťkrát pre vrchol 1, desaťkrát pre vrchol 2, ... a napokon jedenkrát pre vrchol 11 dosiahneme to, že čísla vo všetkých vrcholoch budú rovnaké. Dodajme, že analogickým postupom možno vďaka rovnostiam $7\cdot 7 = 4\cdot 12+1$ a $11\cdot 11 = 10\cdot 12+1$ dokázať aj tvrdenia $T(7)$ a $T(11)$, nie však žiadne tvrdenie $T(k)$ s číslom k súdeliteľným s číslom 12.

B – S – 1

Pre $y = 1$ dostaneme z prvej rovnice $3^{2x} = 2\,013 - 6 = 3^2 \cdot 223$, čo je rovnica, ktorá nemá v obore kladných celých čísel riešenie, lebo 223 nie je mocninou troch.

Navyše pre $y = 1$ platí $3^{2x} \geqq 9 > 6$ pre ľubovoľné kladné celé číslo x, takže úpravou druhej rovnice dostávame $3^{2x} = 2\,013 + 6 = 3 \cdot 673$. Z podobného dôvodu ani táto rovnica nemá riešenie v obore kladných celých čísel.

Ďalej predpokladajme, že $y \geqq 2$. Pre každé kladné celé číslo x je ako 3^{2x}, tak aj 6^y deliteľné deviatimi. Výrazy na ľavých stranách oboch rovníc sú teda deliteľné deviatimi, avšak 2 013 deviatimi deliteľné nie je. Preto ani v tomto prípade nemá žiadna z oboch rovníc riešenie v obore kladných celých čísel.

B – S – 2

Označme n číslo pokryté stredným políčkom štvorcovej dosky. Potom prvý riadok tejto dosky pokrýva čísla $n-12$, $n-11$, $n-10$, jej druhý riadok pokrýva čísla $n-1$, n a $n+1$ a tretí riadok pokrýva čísla $n + 10$, $n + 11$ a $n + 12$. Súčet všetkých čísel pokrytých doskou tak je $9n$.

Súčet čísel pokrytých štvorcovou doskou bude druhou mocninou celého čísla práve vtedy, keď jej stred pokryje číslo n, ktoré je samo druhou mocninou celého čísla. Medzi číslami $1, 2, \dots, 121$ majú túto vlastnosť iba čísla z množiny $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121\}$, z nich ale čísla 1, 4, 9, 100 a 121 ležia v krajnom riadku alebo krajnom stĺpci mriežky 11×11, a nemôžu tak byť pokryté stredným políčkom štvorcovej dosky 3×3.

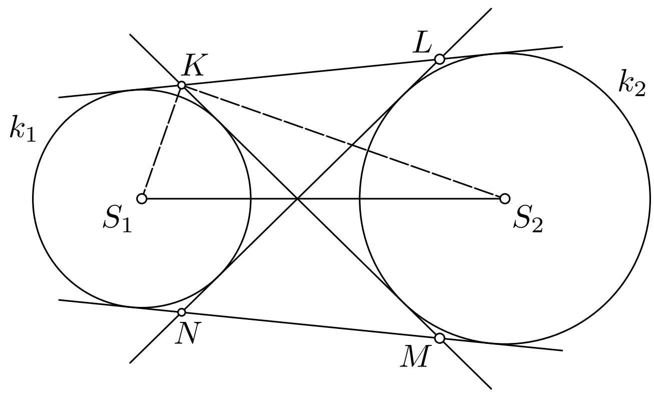
Zo všetkých možných pokrytí mriežky má požadovanú vlastnosť 6 pokrytí, keď stred dosky pokrýva niektoré z čísel 16, 25, 36, 49, 64 a 81.

B – S – 3

Označme k_1 kružnicu so stredom S_1 a k_2 kružnicu so stredom S_2. Priesečníky vnútorných a vonkajších dotyčníc označme K, L, M, N (obr. 22).

Pri uvedenom označení sú priamky KL a KM dotyčnicami ako kružnice k_1, tak aj kružnice k_2, takže polpriamky KS_1 a KS_2 sú osami dvoch susedných uhlov so spoločným ramenom KM. Veľkosť uhla S_1KS_2 je teda $\frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$, a preto bod K leží na Tálesovej kružnici nad priemerom S_1S_2.

Podobným spôsobom ukážeme, že na tejto kružnici ležia aj body L, M a N. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.



Obr. 22

B – II – 1

Čísla x_1, x_2 sú koreňmi danej kvadratickej rovnice práve vtedy, keď platí

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{a} \quad x_1 x_2 = q. \tag{1}$$

Predpokladajme, že daná kvadratická rovnica má reálne korene $x_1 = \alpha$, $x_2 = k\alpha$. Dosadením do (1) dostaneme $(k+1)\alpha = -p$ a $k\alpha^2 = q$. Pre obe strany dokazovanej rovnosti $kp^2 = (k+1)^2 q$ odtiaľ vyplýva

$$kp^2 = k\bigl(-(k+1)\alpha\bigr)^2 = k(k+1)^2\alpha^2,$$
$$(k+1)^2 q = (k+1)^2 \cdot k\alpha^2 = k(k+1)^2\alpha^2,$$

teda daná rovnosť skutočne platí.

Nech naopak pre reálne čísla p, q a $k \neq -1$ platí $kp^2 = (k+1)^2 q$. Uvažujme dvojicu reálnych čísel

$$x_1 = \frac{-kp}{k+1} \quad \text{a} \quad x_2 = \frac{-p}{k+1}.$$

Také čísla (pre ktoré platí $x_1 = kx_2$) sú koreňmi danej kvadratickej rovnice, ak spĺňajú obe rovnosti (1). Overenie urobíme dosadením:

$$x_1 + x_2 = \frac{-kp}{k+1} + \frac{-p}{k+1} = \frac{-(k+1)p}{k+1} = -p,$$
$$x_1 x_2 = \frac{-kp}{k+1} \cdot \frac{-p}{k+1} = \frac{kp^2}{(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 q}{(k+1)^2} = q.$$

Tým je celý dôkaz hotový.

B – II – 2

a) Predpokladajme, že existuje skupina N majúca k osôb, v ktorej nie je dvojica známych. (Určite aspoň pre $k = 1$ taká skupina existuje.) Do skupiny O zaraďme všetky osoby, ktoré majú aspoň jedného známeho v skupine N. V skupine O je nanajvýš $3k$ osôb. V oboch skupinách O a N je teda dokopy nanajvýš $4k$ osôb. Preto v prípade $4k < 100$ ($k < 25$) môžeme v obci nájsť osobu, ktorá nepatrí do žiadnej zo skupín N a O. Ak ju pridáme do skupiny N, nebude v takto vytvorenej skupine žiadna dvojica známych a táto skupina bude mať $k + 1$ osôb. Opakovaním tohto postupu tak získame skupinu aspoň 25 osôb, v ktorej neexistuje dvojica známych, čo dokazuje tvrdenie a).

b) Ukážeme, že skupina, v ktorej neexistuje dvojica známych, pozostáva nanajvýš z 50 osôb. Predpokladajme, že existuje skupina M majúca m osôb, v ktorej neexistuje dvojica známych. Každý človek zo skupiny M sa teda pozná s tromi osobami zo zvyšnej skupiny $100 - m$ osôb. To je spolu $3m$ známostí, čo nemôže byť viac, ako je celkový počet známostí ľudí zo skupiny mimo M, a ten je nanajvýš (niektorí sa môžu poznať navzájom) $3(100 - m)$, preto $3m \leqq 3(100 - m)$, čiže $m \leqq 50$, čo sme chceli dokázať.

V obci môžu existovať dokonca dve 50-členné skupiny, v ktorých sa nevyskytuje žiadna dvojica známych. Napr. keď sa osoba 1 pozná s osobami 51, 52, 53, osoba 2 sa pozná s osobami 52, 53 a 54, …, osoba 48 sa pozná s osobami 98, 99 a 100, osoba 49 sa pozná s osobami 99, 100, 51 a osoba 50 sa pozná s osobami 100, 51, 52. Každá z osôb tak má troch známych a v skupinách osôb $1, 2, \ldots, 50$ a $51, 52, \ldots, 100$ neexistuje žiadna dvojica známych.

Číslo $n = 51$ je teda najmenším prirodzeným číslom s vlastnosťou, že v skupine n osôb, z ktorých každá má v obci so 100 obyvateľmi práve troch známych, vždy existuje dvojica známych.

B – II – 3

Danú rovnicu môžeme prepísať ako

$$2^{a+2b+1} + 2^{2a} + 2^{4b} = 2^{2c}. \tag{1}$$

Označme $m = \min(a + 2b + 1, 2a, 4b)$. Ľavú stranu rovnice (1) tak môžeme zapísať v tvare

$$2^{a+2b+1} + 2^{2a} + 2^{4b} = 2^m(2^{a+2b+1-m} + 2^{2a-m} + 2^{4b-m}).$$

Pritom aspoň jeden z exponentov $(a+2b+1-m, 2a-m, 4b-m)$ je nulový a príslušná mocnina dvojky je tak rovná 1. Ak by zvyšné dva exponenty boli kladné, bolo by v zátvorke číslo nepárne, čo by znamenalo, že 2^{2c} je deliteľné nepárnym číslom väčším ako 1. Preto sú nulové aspoň dva z exponentov, takže v trojici $(a+2b+1, 2a, 4b)$ existujú dve rovnaké čísla, ktoré sú nanajvýš rovné tretiemu z nich.

Ak by bolo $a+2b+1 = 2a$, dostali by sme $a = 2b+1$, čo je v spore s predpokladanou nerovnosťou $2a \leqq 4b$. Podobne z rovnosti $a + 2b + 1 = 4b$ vyplýva $a = 2b - 1$, čo je v spore s nerovnosťou $4b \leqq 2a$. Nutne teda platí $2a = 4b$, t. j. $a = 2b$.

Ľavá strana danej rovnice tak má tvar

$$2^{a+2b+1} + 2^{2a} + 2^{4b} = 2^{4b+1} + 2^{4b} + 2^{4b} = 4 \cdot 2^{4b} = 2^{4b+2}.$$

Preto je rovnica splnená práve vtedy, keď $2c = 4b + 2$, čiže $c = 2b + 1$.

Pre ľubovoľné prirodzené číslo b je tak trojica $(a, b, c) = (2b, b, 2b+1)$ riešením danej rovnice a žiadne iné riešenia neexistujú.

Iné riešenie. Ľavú stranu danej rovnice môžeme upraviť nasledujúcim spôsobom:

$$2^{a+2b+1} + 4^a + 16^b = 2 \cdot 2^a \cdot 4^b + (2^a)^2 + (4^b)^2 = (2^a + 4^b)^2.$$

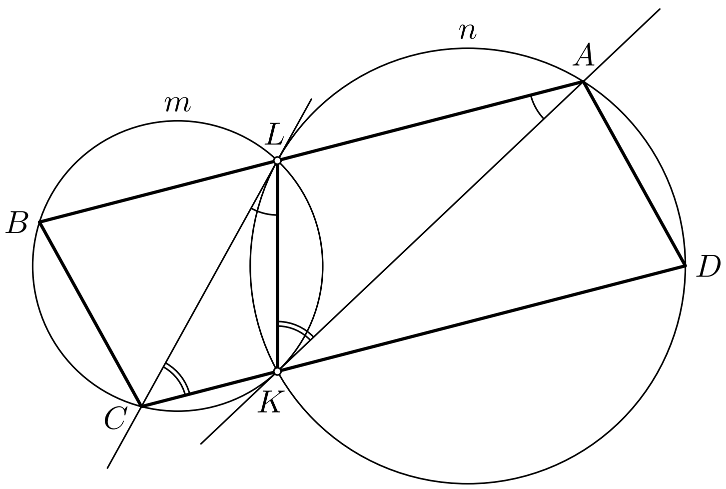
Po odmocnení oboch strán tak dostaneme ekvivalentnú rovnicu

$$2^a + 4^b = 2^c, \qquad \text{čiže} \qquad 2^a + 2^{2b} = 2^c.$$

Z jednoznačnosti zápisu čísla v dvojkovej sústave alebo spôsobom podobným riešeniu úlohy B–I–1 potom môžeme zistiť, že $a = 2b$, odkiaľ vyplýva $c = 2b + 1$. Rovnako ako v predchádzajúcom riešení sme tak došli k záveru, že všetky riešenia rovnice sú tvaru $(a, b, c) = (2b, b, 2b + 1)$, pričom b je ľubovoľné prirodzené číslo.

B – II – 4

Obvodový uhol KAL a úsekový uhol CLK tetivy KL v kružnici n sú zhodné. Podobne sa zhodujú aj obvodový uhol KCL a úsekový uhol AKL tetivy KL v kružnici m (obr. 23). Trojuholníky AKL a LCK sa tak zhodujú v dvoch vnútorných uhloch, a preto sa zhodujú aj v treťom uhle. Uhly ALK a LKC sú teda zhodné, a preto sú zhodné aj ich doplnky do 180°, ktorými sú obvodové uhly ADK, resp. LBC v uvažovaných kružniciach. Zhodnosť uhlov ALK a LKC dokazuje rovnobežnosť priamok AL a CK (teda priamok AB a CD), ktorá spolu so zhodnosťou uhlov ADK a LBC znamená, že aj priamky AD a BC sú rovnobežné. Štvoruholník $ABCD$ je teda rovnobežník, čo sme chceli dokázať.



Obr. 23

Poznámka. Akonáhle pomocou zhodných uhlov ALK a LKC zistíme, že priamky AB a CD sú rovnobežné, môžeme konštatovať, že oba tetivové štvoruholníky $ADLK$ a $BLKC$ sú buď pravouholníky, alebo rovnoramenné lichobežníky so zhodnými uhlami pri základniach. V oboch prípadoch to už zrejme zaručuje rovnobežnosť druhej dvojice priamok AD a BC.

Kategória A

A – I – 1

Budeme sa najskôr zaoberať prípadom, keď hľadané prvočísla p a q sú rôzne. Vtedy sú čísla pq a $p+q$ nesúdeliteľné: súčin pq je totiž deliteľný len dvoma prvočíslami p a q, ale súčet $p+q$ žiadnym z týchto prvočísel deliteľný nie je.

Zistíme, ktoré prirodzené číslo r môže byť spoločným deliteľom čísel $a+1$ a a^2+1. Ak $r \mid a+1$ a súčasne $r \mid a^2+1$, potom $r \mid (a+1)(a-1)$ a tiež $r \mid (a^2+1)-(a^2-1)=2$, takže r musí byť niektoré z čísel 1 a 2. Buď je teda zlomok

$$\frac{a^2+1}{a+1}$$

v základnom tvare, alebo základný tvar vznikne vykrátením dvoma. Preskúmame obidve možnosti.

V prvom prípade, ktorý zrejme nastáva, keď je číslo a párne, musí platiť

$$pq = a^2+1 \quad \text{a} \quad p+q = a+1.$$

Čísla p, q sú teda korene kvadratickej rovnice $x^2-(a+1)x+a^2+1=0$; jej diskriminant

$$(a+1)^2-4(a^2+1) = -3a^2+2a-3 = -2a^2-(a-1)^2-2$$

je ale záporný, preto rovnica nemá v množine reálnych čísel riešenie.

Ak je a nepárne, je najväčším spoločným deliteľom čísel a^2+1 a $a+1$ číslo 2. Preto

$$2pq = a^2+1 \quad \text{a} \quad 2(p+q) = a+1.$$

Čísla p, q sú teda korene kvadratickej rovnice $2x^2-(a+1)x+a^2+1=0$; jej diskriminant je ale taktiež záporný. Žiadna dvojica rôznych prvočísel p, q teda úlohe nevyhovuje.

Ostala možnosť $p=q$. Potom

$$\frac{p\cdot q}{p+q} = \frac{p\cdot p}{p+p} = \frac{p}{2},$$

preto

$$p = \frac{2(a^2+1)}{a+1} = 2a-2+\frac{4}{a+1};$$

to je celé číslo práve vtedy, keď $a+1 \mid 4$ čiže $a \in \{1,3\}$, takže $p=2$ alebo $p=5$.

Úlohe teda vyhovujú dvojice $p=q=2$ a $p=q=5$.

A – I – 2

Úsečky AS_2 a BS_1 ležia na uhlopriečkach štvorca, sú teda navzájom kolmé a pretínajú sa v strede P štvorca. Platí

$$|DS_1| = r_1 \cdot \sqrt{2}, \quad |BS_1| = (a - r_1)\sqrt{2}, \quad |PS_1| = \left(\frac{a}{2} - r_1\right)\sqrt{2},$$
$$|CS_2| = r_2 \cdot \sqrt{2}, \quad |AS_2| = (a - r_2)\sqrt{2}, \quad |PS_2| = \left(\frac{a}{2} - r_2\right)\sqrt{2}.$$

Preto má trojuholník AS_1S_2 obsah

$$S_{AS_1S_2} = \frac{1}{2}|AS_2| \cdot |PS_1| = (a - r_2)\left(\frac{a}{2} - r_1\right)$$

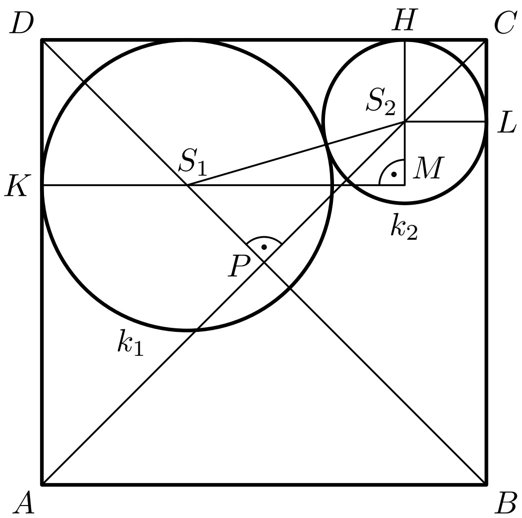
a trojuholník BS_1S_2 obsah

$$S_{BS_1S_2} = \frac{1}{2}|BS_1| \cdot |PS_2| = (a - r_1)\left(\frac{a}{2} - r_2\right).$$

Súčet oboch obsahov je

$$S = (a - r_2)\left(\frac{a}{2} - r_1\right) + (a - r_1)\left(\frac{a}{2} - r_2\right) = a^2 - \frac{3}{2}a(r_1 + r_2) + 2r_1r_2.$$

Označme K bod dotyku kružnice k_1 so stranou AD, H a L body dotyku kružnice k_2 so stranami CD a BC a M priesečník priamok KS_1 a HS_2 (obr. 24).



Obr. 24

Podľa Pytagorovej vety pre trojuholník S_1MS_2 je

$$(a - r_1 - r_2)^2 + (r_1 - r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2.$$

Odtiaľ dostávame

$$\begin{aligned}(a - r_1 - r_2)^2 &= 4r_1r_2,\\ a - r_1 - r_2 &= 2\sqrt{r_1r_2},\\ a = r_1 + r_2 + 2\sqrt{r_1r_2} &= \left(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}\right)^2 \geqq 4\sqrt{r_1r_2}\end{aligned}$$

čiže

$$r_1r_2 \leqq \frac{a^2}{16}.$$

Ďalej zrejme dĺžka úsečky DC nemôže byť väčšia ako dĺžka lomenej čiary KS_1S_2L, a teda

$$2r_1 + 2r_2 \geqq a.$$

(To vyplýva aj z rovnosti $a = r_1 + r_2 + 2\sqrt{r_1r_2}$, lebo podľa AG-nerovnosti je $2\sqrt{r_1r_2} \leqq$ $\leqq r_1 + r_2$.)

Preto

$$S = a^2 - \frac{3}{2}a(r_1 + r_2) + 2r_1r_2 \leqq a^2 - \frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{8}a^2 = \frac{3}{8}a^2.$$

To znamená, že aspoň jeden z obsahov $S_{AS_1S_2}$, $S_{BS_1S_2}$ je najviac $\frac{3}{16}a^2$.

Iné riešenie. Môžeme položiť $a = 1$. Rozdiel obsahov trojuholníkov AS_1S_2 a BS_1S_2 je (podľa vyjadrenia z prvého riešenia)

$$S_{AS_1S_2} - S_{BS_1S_2} = (1 - r_2)\Big(\frac{1}{2} - r_1\Big) - (1 - r_1)\Big(\frac{1}{2} - r_2\Big) = \frac{1}{2}(r_2 - r_1).$$

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $r_1 \geqq r_2$. Potom $S_{AS_1S_2} \leqq S_{BS_1S_2}$. Počítajme teda obsah trojuholníka AS_1S_2. Podľa Pytagorovej vety je $(1 - r_1 - r_2)^2 +$ $+ (r_1 - r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2$, odtiaľ $\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} = 1$, a teda $r_2 = \left(1 - \sqrt{r_1}\right)^2$. Označme $x = \sqrt{r_1}$. Z nerovností $r_1 + r_2 \geqq \frac{1}{2}$ a $r_1 \geqq r_2$ vyplýva $r_1 \geqq \frac{1}{4}$ a z druhej strany platí $r_1 \leqq \frac{1}{2}$, pretože kružnica k_1 leží vo štvorci $ABCD$. Odtiaľ vyplýva $\frac{1}{2} \leqq x \leqq \sqrt{\frac{1}{2}}$. Obsah trojuholníka AS_1S_2 je

$$\begin{aligned}S_{AS_1S_2} &= (1 - r_2)\Big(\frac{1}{2} - r_1\Big) = \frac{1}{2} - r_1 - \frac{r_2}{2} + r_1r_2 =\\ &= \frac{1}{2} - x^2 - \frac{1}{2}(1 - x)^2 + x^2(1 - x)^2 = x^4 - 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x;\\ S_{AS_1S_2} - \frac{3}{16} &= x^4 - 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{16} = \Big(x - \frac{1}{2}\Big)\Big(x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{8}\Big) =\\ &= \Big(x - \frac{1}{2}\Big)\Big[x^2\Big(x - \frac{3}{2}\Big) - \frac{5}{4}\Big(x - \frac{3}{10}\Big)\Big] \leqq 0\end{aligned}$$

vďaka tomu, že $\frac{3}{10} < \frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}\sqrt{2} < \frac{3}{2}$. Preto $S_{AS_1S_2} \leqq \frac{3}{16}$.

A – I – 3

Odtrhnutím poslednej číslice vyhovujúceho $(n+1)$-ciferného čísla dostaneme vyhovujúce n-ciferné číslo. Všimnime si, ako naopak z vyhovujúceho n-ciferného čísla vytvoríme vyhovujúce $(n + 1)$-ciferné číslo. Ak sa končí n-ciferné číslo číslicou 1, môžeme na koniec pridať niektorú z číslic 3, 4, 5. Za číslicu 2 môžeme pridať niektorú z číslic 4, 5, za číslicou 3 môže nasledovať 1 alebo 5, za číslicou 4 môže byť 1 alebo 2 a za číslicu 5 môžeme pridať jednu z číslic 1, 2, 3. Vidíme, že záleží na tom, aká je posledná číslica. Označme preto a_n počet vyhovujúcich čísel zakončených niektorou z číslic 1, 5, b_n počet čísel zakončených niektorou z číslic 2, 4 a c_n počet čísel zakončených číslicou 3. Potom $p(n) = a_n + b_n + c_n$. Zrejme $a_1 = b_1 = 2$, $c_1 = 1$, $p(1) = 5 = 5 \cdot 2{,}4^0 = 5 \cdot 2{,}5^0$, $a_2 = 6$, $b_2 = 4$, $c_2 = 2$, $p(2) = 12 = 5 \cdot 2{,}4^1 < 5 \cdot 2{,}5^1$.

Z predchádzajúcich úvah vyplýva platnosť rekurentných vzťahov

$$a_{n+1} = a_n + b_n + 2c_n, \quad b_{n+1} = a_n + b_n, \quad c_{n+1} = a_n. \tag{1}$$

Z nich vyplýva $a_3 = 14$, $b_3 = 10$, $c_3 = 6$, $p(3) = 30 \in \langle 5 \cdot 2{,}4^2; 5 \cdot 2{,}5^2\rangle$.

Matematickou indukciou dokážeme, že pre každé $n \geqq 3$ platí

$$a_n \geqq 2{,}4^n, \quad b_n \geqq \frac{2}{3} \cdot 2{,}4^n, \quad c_n \geqq 2{,}4^{n-1}.$$

Pre $n = 3$ to platí. Ak $a_n \geqq 2{,}4^n$, $b_n \geqq \frac{2}{3} \cdot 2{,}4^n$ a $c_n \geqq 2{,}4^{n-1}$, tak aj

$$\begin{aligned} a_{n+1} = a_n + b_n + 2c_n &\geqq 2{,}4^n + \frac{2}{3} \cdot 2{,}4^n + 2 \cdot 2{,}4^{n-1} = \\ &= 2{,}4^n \cdot \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{5}{6}\right) = 2{,}5 \cdot 2{,}4^n > 2{,}4^{n+1}, \\ b_{n+1} = a_n + b_n &\geqq 2{,}4^n + \frac{2}{3} \cdot 2{,}4^n = \frac{5}{3} \cdot 2{,}4^n > \frac{2}{3} \cdot 2{,}4^{n+1}, \\ c_{n+1} = a_n &\geqq 2{,}4^n. \end{aligned}$$

Z práve dokázaných nerovností vyplýva

$$p(n) = a_n + b_n + c_n \geqq 2{,}4^n + \frac{2}{3} \cdot 2{,}4^n + 2{,}4^{n-1} = (2{,}4 + 1{,}6 + 1) \cdot 2{,}4^{n-1} = 5 \cdot 2{,}4^{n-1}.$$

Podobne dokážeme druhú nerovnosť; dokážeme, že pre $n \geqq 3$ platí

$$a_n \leqq k \cdot 2{,}5^n, \quad b_n \leqq k \cdot \frac{2}{3} \cdot 2{,}5^n, \quad c_n \leqq k \cdot 2{,}5^{n-1}, \tag{2}$$

kde k je vhodne zvolené číslo. Potom bude

$$p(n) = a_n + b_n + c_n \leqq k \cdot 2{,}5^{n-1} \cdot \left(2{,}5 + \frac{5}{3} + 1\right) = k \cdot 2{,}5^{n-1} \cdot \frac{31}{6} = 5k \cdot \frac{31}{30} \cdot 2{,}5^{n-1}.$$

Ak teda zvolíme $k = \frac{30}{31}$, bude pre každé $n \geqq 3$ platiť $p(n) \leqq 5 \cdot 2{,}5^{n-1}$.

Ostáva matematickou indukciou dokázať nerovnosti (2), v ktorých $k = \frac{30}{31}$. Pre $n = 3$ nerovnosti platia. Ak platí (2), tak aj

$$\begin{aligned} a_{n+1} = a_n + b_n + 2c_n &\leqq k \cdot 2{,}5^n \cdot \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right) = k \cdot 2{,}5^n \cdot \frac{37}{15} < k \cdot 2{,}5^{n+1}, \\ b_{n+1} = a_n + b_n &\leqq k \cdot 2{,}5^n \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right) = k \cdot \frac{2}{3} \cdot 2{,}5^{n+1}, \\ c_{n+1} = a_n &\leqq k \cdot 2{,}5^n. \end{aligned}$$

Iné riešenie. Ukážeme, že každá z postupností $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, ktoré boli zavedené v prvom riešení, spĺňa v dôsledku rovností (1) rekurentnú rovnicu $x_{n+2} = 2x_{n+1} + 2x_n - 2x_{n-1}$, takže ju spĺňa aj postupnosť skúmaných hodnôt $p(n) = a_n + b_n + c_n$, čo ďalej zapíšeme vzťahom (3).

Naozaj, z prvej a tretej rovnosti v (1) dostávame $a_{n+1} = a_n + b_n + 2a_{n-1}$, odkiaľ

$$b_n = a_{n+1} - a_n - 2a_{n-1}, \quad \text{a teda aj} \quad b_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n.$$

Vzhľadom na druhú rovnosť v (1) tak platí

$$a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = b_{n+1} = a_n + b_n = a_n + (a_{n+1} - a_n - 2a_{n-1}),$$

odkiaľ porovnaním krajných výrazov vychádza avizovaná rovnosť

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 2a_n - 2a_{n-1}.$$

Teraz trikrát dosadíme $a_n = b_{n+1} - b_n$ do rovnosti $b_n = a_{n+1} - a_n - 2a_{n-1}$ a dostaneme

$$b_n = (b_{n+2} - b_{n+1}) - (b_{n+1} - b_n) - 2(b_n - b_{n-1}),$$

odkiaľ po úprave vychádza

$$b_{n+2} = 2b_{n+1} + 2b_n - 2b_{n-1}.$$

Napokon, postupnosť $\{c_n\}$ je len „posunutá“ postupnosť $\{a_n\}$, takže

$$c_{n+2} = a_{n+1} = 2a_n + 2a_{n-1} - 2a_{n-2} = 2c_{n+1} + 2c_n - 2c_{n-1}.$$

Spojením všetkých troch rekurencií máme

$$p(n+2) = 2p(n+1) + 2p(n) - 2p(n-1). \tag{3}$$

Matematickou indukciou dokážeme, že pre každé $k \geqq 1$ platí

$$2{,}4p(k) \leqq p(k+1) \leqq 2{,}5p(k). \tag{4}$$

Pre $k = 1$ aj pre $k = 2$ nerovnosti (4) platia. Ak platí (4) pre všetky $k \in \{1, 2, \ldots, n+1, n+2\}$, potom

$$\begin{aligned} p(n+3) &= 2\big(p(n+2) + p(n+1) - p(n)\big) \geqq \\ &\geqq 2\Big(p(n+2) + p(n+1) - \frac{p(n+1)}{2{,}4}\Big) = 2\Big(p(n+2) + \frac{7p(n+1)}{12}\Big) \geqq \\ &\geqq 2\Big(p(n+2) + \frac{7}{12} \cdot \frac{p(n+2)}{2{,}5}\Big) = \frac{74p(n+2)}{30} > 2{,}4p(n+2). \end{aligned}$$

Podobne tiež

$$\begin{aligned} p(n+3) &\leqq 2\Big(p(n+2) + p(n+1) - \frac{p(n+1)}{2{,}5}\Big) \leqq \\ &\leqq 2\Big(p(n+2) + \frac{3}{5} \cdot \frac{p(n+2)}{2{,}4}\Big) = 2{,}5p(n+2). \end{aligned}$$

Z rovností $5 \cdot 2{,}4^0 = p(1) = 5 \cdot 2{,}5^0$ a nerovností (4) vyplýva, že nerovnosť $5 \cdot 2{,}4^{n-1} \leqq p(n) \leqq 5 \cdot 2{,}5^{n-1}$ platí pre každé prirodzené n.

Poznámka. Rovnica (3) sa nazýva *lineárna diferenčná rovnica s konštantnými koeficientmi.* Známy rekurentný vzťah $g_{n+1} = g_n \cdot q$ pre geometrické postupnosti napovedá, že rovnici (3) by mohli vyhovovať niektoré geometrické postupnosti, teda $p(n) = q^n$. Dosadením do (3) dostaneme pre kvocient q tzv. *charakteristickú rovnicu*

$$q^3 - 2q^2 - 2q + 2 = 0,$$

ktorá má tri reálne korene $q_1 \doteq -1{,}170\,086\,487$, $q_2 \doteq 0{,}688\,892\,182$, $q_3 \doteq 2{,}481\,194\,304$. Dá sa dokázať, že každé riešenie rovnice (3) je lineárnou kombináciou postupností $\{q_1^n\}$, $\{q_2^n\}$ a $\{q_3^n\}$, teda

$$p(n) = \alpha \cdot q_1^n + \beta \cdot q_2^n + \gamma \cdot q_3^n.$$

Koeficienty α, β, γ vypočítame zo sústavy rovníc

$$\alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3 = p(1) = 5, \quad \alpha q_1^2 + \beta q_2^2 + \gamma q_3^2 = p(2) = 12, \quad \alpha q_1^3 + \beta q_2^3 + \gamma q_3^3 = p(3) = 30.$$

Namiesto tretej rovnice sa dá použiť $\alpha + \beta + \gamma = p(0) = 2$; číslo $p(0)$ sa síce nedá definovať ako počet 0-ciferných čísel, ale $p(0) = 2$ odpovedá vzťahu (3). Pre členy postupnosti tak dostaneme približné vyjadrenie

$$p(n) \approx -0{,}063\,627\,546 q_1^n + 0{,}108\,637\,179 q_2^n + 1{,}954\,990\,367 q_3^n.$$

(Táto približná rovnosť sa dá použiť zhruba po $n = 20$, pre väčšie n už sa prejavia zaokrúhľovacie chyby.)

A – I – 4

Dosadením $x = 1$ dostaneme

$$f(y) + f(-y) = f(1).$$

Ak označíme $f(1) = a$, máme $f(-y) = a - f(y)$. Ďalej dosadíme $y = -1$ a máme

$$x \cdot f(-x) + f(1) = x \cdot f(x),$$

čiže

$$x\bigl(a - f(x)\bigr) + a = x \cdot f(x)$$

a odtiaľ

$$f(x) = \frac{a(x+1)}{2x} = \frac{a}{2}\Bigl(1 + \frac{1}{x}\Bigr).$$

Skúškou overíme, že pre ľubovoľné reálne c vyhovuje každá funkcia $f(x) = c(1 + 1/x)$:

$$x \cdot f(xy) + f(-y) = x \cdot c\Bigl(1 + \frac{1}{xy}\Bigr) + c\Bigl(1 + \frac{1}{-y}\Bigr) = c\Bigl(x + \frac{1}{y} + 1 - \frac{1}{y}\Bigr) =$$
$$= c(x+1) = cx\Bigl(1 + \frac{1}{x}\Bigr) = x \cdot f(x).$$

Iné riešenie. Označme $f(1) = a$. Dosadením $y = -1$ do danej rovnice dostaneme

$$xf(-x) + a = xf(x)$$

a odtiaľ

$$f(-x) = f(x) - \frac{a}{x}. \tag{1}$$

Danú rovnicu upravíme na tvar

$$f(xy) + \frac{1}{x} \cdot f(-y) = f(x)$$

a po použití (1) máme

$$f(xy) + \frac{1}{x}\Bigl(f(y) - \frac{a}{y}\Bigr) = f(x),$$
$$f(xy) + \frac{f(y)}{x} - \frac{a}{xy} = f(x).$$

Zámenou x a y navyše dostaneme

$$f(yx) + \frac{f(x)}{y} - \frac{a}{yx} = f(y),$$

takže odčítaním posledných dvoch rovníc

$$\frac{f(x)}{y} - \frac{f(y)}{x} = f(y) - f(x)$$

a po dosadení $y = 1$ vyjde

$$2f(x) = a\Bigl(1 + \frac{1}{x}\Bigr).$$

Opäť sa skúškou presvedčíme, že každá funkcia $f(x) = c(1 + 1/x)$ je riešením.

Iné riešenie. Dosadením $y = -1$ dostaneme

$$xf(-x) + f(1) = xf(x),$$

po úprave

$$f(x) - f(-x) = \frac{f(1)}{x}. \tag{2}$$

Dosadením $x = 1$ dostaneme

$$f(y) + f(-y) = f(1),$$

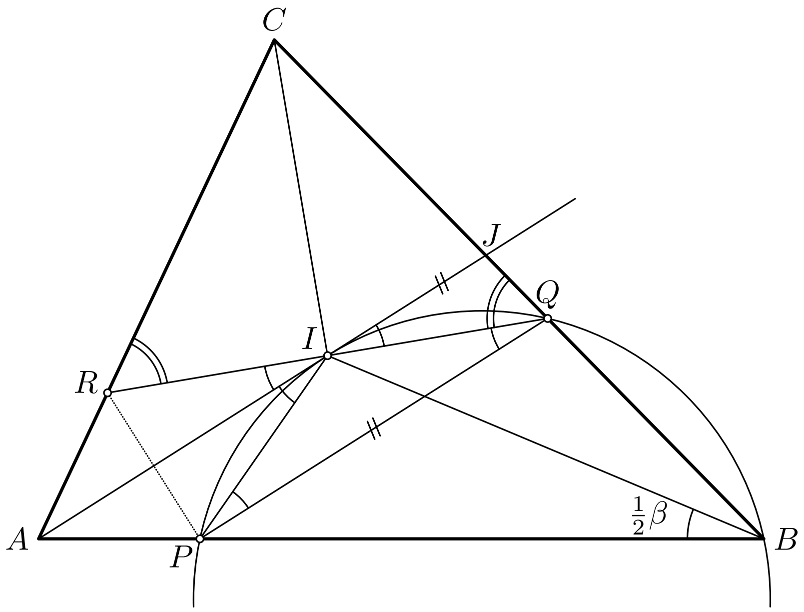
teda aj

$$f(x) + f(-x) = f(1) \tag{3}$$

a po sčítaní rovníc (2) a (3) máme $f(x) = \dfrac{f(1)}{2}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$; opäť ostáva urobiť jednoduchú skúšku.

A – I – 5

Označme α, β, γ veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC pri vrcholoch A, B, C a J priesečník priamky AI so stranou BC (obr. 25). Uhol PBI je obvodový uhol príslušný k tetive PI a uhol QBI je obvodový uhol príslušný k tetive IQ. Pretože oba tieto obvodové uhly majú rovnakú veľkosť $\frac{1}{2}\beta$, majú úsečky PI a IQ rovnakú dĺžku.



Obr. 25

Úsekový uhol JIQ je zhodný s obvodovým uhlom QBI, jeho veľkosť je preto $\frac{1}{2}\beta$. Zo zhodnosti vrcholových uhlov potom vyplýva $|\measuredangle RIA| = \frac{1}{2}\beta$. Tú istú veľkosť má i úsekový uhol PIA, ktorý je zhodný s obvodovým uhlom PBI. Ďalej platí $|\measuredangle RAI| = |\measuredangle PAI| = \frac{1}{2}\alpha$. Podľa vety *usu* sú trojuholníky RIA a PIA zhodné, a preto $|RI| = |PI|$.

Uhol QIB má veľkosť

$$|\measuredangle QIB| = 180^\circ - |\measuredangle AIB| - |\measuredangle JIQ| = 180^\circ - \left(90^\circ + \frac{\gamma}{2}\right) - \frac{\beta}{2} = \\ = 90^\circ - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} = |\measuredangle RAI|.$$

Veľkosť uhla QIB se dá určiť i nasledovne: Podľa vety o úsekovom uhle platí $|\measuredangle AIP| = \frac{1}{2}\beta = |\measuredangle IPQ|$. Zo zhodnosti striedavých uhlov vyplýva $AI \parallel PQ$. Odtiaľ $|\measuredangle QPB| = |\measuredangle IAB| = \frac{1}{2}\alpha$ a zo zhodnosti obvodových uhlov máme $|\measuredangle QIB| = \frac{1}{2}\alpha$.

Zo zhodnosti uhlov $|\measuredangle QIB| = |\measuredangle RAI|$ a $|\measuredangle QBI| = |\measuredangle RIA|$ vyplýva podobnosť trojuholníkov AIR a IBQ a odtiaľ $|AR|/|RI| = |IQ|/|QB|$, takže

$$|AR| \cdot |QB| = |RI| \cdot |IQ| = |PI|^2.$$

Na dôkaz podobnosti trojuholníkov AIR a IBQ môže poslúžiť i rovnoramennosť trojuholníka CRQ, v ktorom os uhla je súčasne ťažnicou.

A – I – 6

Substitúciou $\cos^2 x = a$, $\cos^2 y = b$, $\cos^2 z = c$ vznikne sústava

$$\begin{aligned} 1 - a + b &= \frac{1}{c} - 1, \\ 1 - b + c &= \frac{1}{a} - 1, \\ 1 - c + a &= \frac{1}{b} - 1, \end{aligned} \tag{1}$$

přičom $a, b, c \in (0, 1\rangle$.

Sčítaním týchto rovníc dostaneme

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 6,$$

teda harmonický priemer čísel a, b, c je $\frac{1}{2}$.

Po vynásobení rovníc postupne číslami c, a, b máme

$$\begin{aligned} c - ac + bc &= 1 - c, \\ a - ab + ac &= 1 - a, \\ b - bc + ab &= 1 - b \end{aligned}$$

a po sčítaní $2(a+b+c) = 3$. Aritmetický priemer čísel a, b, c je teda taktiež $\frac{1}{2}$. Z rovnosti aritmetického a harmonického priemeru vyplývajú rovnosti $a = b = c = \frac{1}{2}$. Skúškou sa ľahko presvedčíme, že táto trojica vyhovuje sústave (1). Riešením danej sústavy sú všetky trojice $(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi, \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}l\pi, \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}m\pi)$, kde k, l, m sú celé čísla.

Iné riešenie. Použijeme substitúciu z prvého riešenia. Sústava (1) je cyklická; ak je jej riešením trojica (p, q, r), vyhovujú aj trojice (q, r, p) a (r, p, q). Stačí teda nájsť všetky riešenia, pre ktoré platí $a \geqq b, a \geqq c$, a všetky ostatné dostaneme cyklickou zámenou.

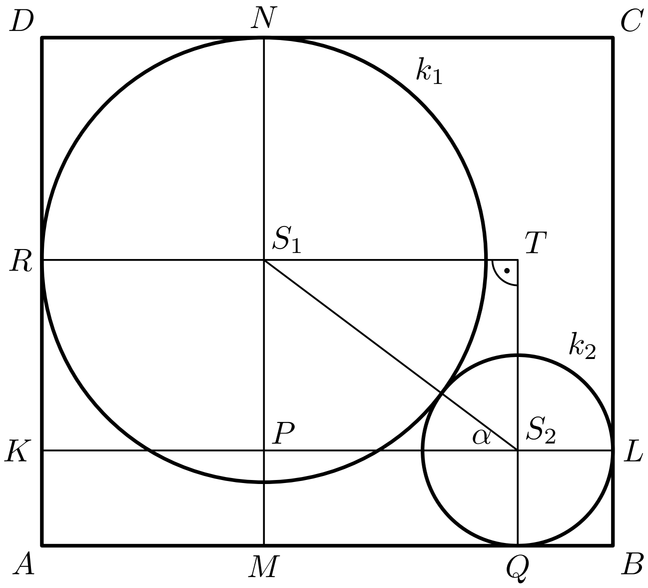
Nech teda $a \geqq b, a \geqq c$. Z prvej rovnice potom vyplýva $1/c = 2 - a + b \leqq 2$, a preto $c \geqq \frac{1}{2}$. Podobne z tretej rovnice $1/b = 2 - c + a \geqq 2$, preto $b \leqq \frac{1}{2}$, a teda aj $b \leqq c$. Podľa druhej rovnice potom $1/a = 2 - b + c \geqq 2$, takže $a \leqq \frac{1}{2}$. Dokopy teda platí

$$\frac{1}{2} \geqq a \geqq c \geqq \frac{1}{2},$$

a preto $a = c = \frac{1}{2}$. Teraz už z ktorejkoľvek rovnice dostaneme $b = \frac{1}{2}$. Rovnako ako v prvom riešení overíme, že nájdená trojica sústave (1) vyhovuje a vyjadríme všeobecné riešenie zadanej sústavy.

A – S – 1

a) Bodom S_1 veďme rovnobežku so stranou AD a jej priesečníky so stranami AB a CD označme M a N. Podobne vedieme bodom S_2 rovnobežku s AB a jej priesečníky so



Obr. 26

stranami AD a BC označíme K a L; priesečník priamok KL a MN nech je P (obr. 26). Podľa Pytagorovej vety pre trojuholník S_1PS_2 platí

$$(r_1 + r_2)^2 = (8 - r_1 - r_2)^2 + (9 - r_1 - r_2)^2$$

a odtiaľ

$$\begin{aligned}(r_1+r_2)^2-34(r_1+r_2)+145&=0,\\(r_1+r_2-5)(r_1+r_2-29)&=0.\end{aligned}$$

Keďže $2r_1 \leqq 8$, $2r_2 \leqq 8$ (priemer kružníc nemôže byť väčší ako dĺžka strany AD), musí platiť $r_1+r_2=5$.

b) Označíme Q pätu kolmice z bodu S_2 na stranu AB, R pätu kolmice z bodu S_1 na stranu AD a T priesečník priamok QS_2 a RS_1. Obsah S trojuholníka AS_2S_1 vypočítame tak, že od obsahu pravouholníka $AQTR$ odčítame súčet obsahov pravouhlých trojuholníkov AQS_2, AS_1R a S_1S_2T:

$$\begin{aligned}S&=(9-r_2)(8-r_1)-\frac{1}{2}r_2(9-r_2)-\frac{1}{2}r_1(8-r_1)-\frac{1}{2}(9-r_1-r_2)(8-r_1-r_2)=\\&=72-9r_1-8r_2+r_1r_2-\frac{9}{2}r_2+\frac{1}{2}r_2^2-4r_1+\frac{1}{2}r_1^2-36+\frac{17}{2}(r_1+r_2)-\frac{1}{2}(r_1+r_2)^2\end{aligned}$$

a po využití rovnosti $r_1+r_2=5$ dostaneme

$$S=\frac{157}{2}-13r_1-\frac{25}{2}r_2=16-\frac{1}{2}r_1.$$

Z rovnosti $r_1+r_2=5$ a nerovností $2r_1 \leqq 8$, $2r_2 \leqq 8$ vyplýva $r_1 \in \langle 1,4\rangle$, a teda

$$S\in\left\langle 14,\frac{31}{2}\right\rangle;$$

obsah má najmenšiu hodnotu 14, keď $r_1=4$ a $r_2=1$, a najväčšiu hodnotu $\frac{31}{2}$, keď $r_1=1$ a $r_2=4$.

Iné riešenie. a) Označme α uhol medzi priamkami KL a S_1S_2 (obr. 26). Z rovnosti $|AB|=|KP|+|PS_2|+|S_2L|$ máme $r_1+(r_1+r_2)\cos\alpha+r_2=9$ čiže

$$(1+\cos\alpha)(r_1+r_2)=9.$$

Podobne z rovnosti $|AD|=|MP|+|PS_1|+|S_1N|$ vyplýva

$$(1+\sin\alpha)(r_1+r_2)=8.$$

Z posledných dvoch rovníc máme po úprave a umocnení

$$\begin{aligned}8(1+\cos\alpha)&=9(1+\sin\alpha),\\8\cos\alpha&=1+9\sin\alpha,\\64(1-\sin^2\alpha)&=1+18\sin\alpha+81\sin^2\alpha,\\145\sin^2\alpha+18\sin\alpha-63&=0\end{aligned}$$

a odtiaľ[4]

$$\sin\alpha = \frac{3}{5} \qquad \text{a} \qquad r_1 + r_2 = \frac{8}{1+\sin\alpha} = 5.$$

b) Obsah S trojuholníka AS_2S_1 môžeme vypočítať pomocou vektorového súčinu vektorov $S_2 - A$ a $S_1 - A$. Zvolíme sústavu súradníc, v ktorej $A = [0,0,0], B = [9,0,0], D = [0,8,0]$. Potom $S_2 = [9 - r_2, r_2, 0], S_1 = [r_1, 8 - r_1, 0]$ a skúmaný obsah je

$$S = \frac{1}{2}|(S_2 - A) \times (S_1 - A)| = \frac{1}{2}[(9-r_2)(8-r_1) - r_1r_2] = \frac{1}{2}(72 - 9r_1 - 8r_2) = 16 - \frac{1}{2}r_1.$$

Dostali sme rovnaký výraz ako v prvom riešení, a tak tým istým postupom zistíme, že skúmaný obsah má najmenšiu hodnotu 14 a najväčšiu hodnotu $\frac{31}{2}$.

A – S – 2

Označme b súčet čísel na bočných stenách ihlana, a číslo na jeho podstave. Ak zvolíme niektorý z vrcholov podstavy, číslo b sa zväčší o 2 alebo zmenší o 2 a číslo a sa zväčší o 1 alebo zmenší o 1. Hodnota výrazu $V = b - 2a$ sa teda nezmení. Pri voľbe hlavného vrcholu ostane číslo a nezmenené a číslo b sa zväčší alebo zmenší o n, takže hodnota výrazu V sa zväčší alebo zmenší o n. Keďže na začiatku je $V = 0$, po ľubovoľnom počte krokov bude V deliteľné číslom n. Keby boli na všetkých stenách jednotky, mal by výraz V hodnotu $n - 2$. Toto číslo ale nie je deliteľné číslom n, lebo $n \geqq 3$.

Iné riešenie. Nech pri voľbe hlavného vrcholu sa u-krát čísla zväčšujú a v-krát zmenšujú. Podobne nech sa pri voľbe vrcholu A_i podstavy čísla w_i-krát zväčšujú a z_i-krát zmenšujú. Označme $y = u - v$, $x_i = w_i - z_i$. Keby boli na všetkých stenách jednotky, platili by rovnosti

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + y &= 1,\\
x_2 + x_3 + y &= 1,\\
&\vdots\\
x_{n-1} + x_n + y &= 1,\\
x_n + x_1 + y &= 1,\\
x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= 1. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Sčítaním prvých n rovností dostaneme $2(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + ny = n$ a podľa (1) máme

$$2 + ny = n.$$

Odtiaľ vyplýva $n \mid 2$, ale to pre žiadne $n \geqq 3$ neplatí.

[4] Druhý koreň $t = -\frac{21}{29}$ kvadratickej rovnice $145t^2 + 18t - 63$ nemusíme uvažovať, keďže v našej situácii $\sin\alpha > 0$.

A – S – 3

Ukážeme, že úlohe vyhovuje jediná trojica čísel: $a = 1$, $b = 4$ a $c = 3$.

Označme $s = b + c \geqq 7$. Dosadením $a = 5 - b$ a $c = s - b$ do prvej podmienky dostaneme

$$a^2 + b^2 + c^2 = (5 - b)^2 + b^2 + (s - b)^2 = 26,$$

a teda

$$3b^2 - 2(s + 5)b + s^2 - 1 = 0. \tag{1}$$

Táto kvadratická rovnica s parametrom s má v množine reálnych čísel riešenie práve vtedy, keď pre jej diskriminant platí $4(s+5)^2 - 12(s^2 - 1) \geqq 0$. Úpravou tejto nerovnice dostaneme $s^2 - 5s - 14 \leqq 0$ čiže $(s + 2)(s - 7) \leqq 0$. Odtiaľ $s \in \langle -2, 7\rangle$ a vzhľadom na podmienku $s \geqq 7$ musí byť $s = 7$. Po dosadení do (1) máme

$$3b^2 - 24b + 48 = 0;$$

táto rovnica má jediné riešenie $b = 4$. Ľahko potom dopočítame $a = 1$ a $c = 3$.

Iné riešenie. Ak uhádneme vyhovujúcu trojicu $a = 1$, $b = 4$ a $c = 3$, tak jej jedinečnosť ľahko zdôvodníme, keď ukážeme, že hodnota nezáporného súčtu

$$S = (a - 1)^2 + (b - 4)^2 + (c - 3)^2$$

musí byť pre každú vyhovujúcu trojicu rovná nule. Pri podmienkach zo zadania úlohy totiž platí

$$\begin{aligned} S &= (a^2 + b^2 + c^2) - 2(a + b) - 6(b + c) + (1^2 + 4^2 + 3^2) = \\ &= 26 - 2 \cdot 5 - 6(b + c) + 26 = 42 - 6(b + c) \leqq 42 - 6 \cdot 7 = 0, \end{aligned}$$

takže naozaj $S = 0$, a teda $a = 1$, $b = 4$ a $c = 3$.

A – II – 1

a) Označme dané čísla $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{21}$. Keďže sú tieto čísla celé, platí pre každé $i \in \{1, 2, \ldots, 20\}$ nerovnosť $a_{i+1} - a_i \geqq 1$, a preto $a_{i+10} - a_i \geqq 10$ pre každé $i \in \{2, 3, \ldots, 11\}$. Podmienka zo zadania je splnená práve vtedy, keď súčet najmenších jedenástich čísel je väčší ako súčet desiatich najväčších, teda

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{11} > a_{12} + a_{13} + \ldots + a_{21}. \tag{1}$$

Odtiaľ

$$a_1 > (a_{12} - a_2) + (a_{13} - a_3) + \ldots + (a_{21} - a_{11}) \geqq 10 \cdot 10 = 100;$$

najmenšie z daných čísel je väčšie ako 100, takže väčšie ako 100 sú všetky dané čísla.

b) Dokázali sme nerovnosť $a_1 \geqq 101$. Všetky ostatné čísla sú preto väčšie ako 101. Ak teda skupina daných čísel obsahuje číslo 101, musí platiť $a_1 = 101$. Z ostrej nerovnosti (1) tak vyplýva neostrá nerovnosť

$$(a_{12} - a_2) + (a_{13} - a_3) + \ldots + (a_{21} - a_{11}) \leqq a_1 - 1 = 100,$$

a pretože $a_{i+10} - a_i \geqq 10$, musí byť splnená rovnosť $a_{i+10} - a_i = 10$ pre každé $i \in \{2, 3, \ldots, 11\}$. To nastane práve vtedy, keď sú $a_2, a_3, \ldots, a_{21}$ po sebe idúce celé čísla.

Hľadané skupiny teda okrem čísla 101 obsahujú ešte ľubovoľných 20 po sebe idúcich celých čísel väčších ako 101. Súčet jedenástich najmenších čísel z takej skupiny je o 1 väčší ako súčet desiatich najväčších.

A – II – 2

Najskôr dokážeme, že v množine A môžu byť najviac dve čísla. Pripusťme, že A obsahuje tri čísla $a < b < c$. Potom do B patria čísla $a + b < a + c < b + c$, a teda do A musí patriť číslo

$$\frac{b+c}{a+c} = 1 + \frac{b-a}{a+c};$$

to ale nie je celé, lebo $0 < b - a < a + c$.

Keby množina B obsahovala štyri čísla $k < l < m < n$, patrili by do A tri rôzne čísla n/k, n/l, n/m. Množina B má teda nanajvýš tri prvky a $A \cup B$ nemôže mať viac ako 5 prvkov.

Tento počet dosiahneme práve vtedy, keď $A = \{a, b\}$, $B = \{k, l, m\}$, pričom $a < b$ a $l/k = m/l = a$, $m/k = b$. Potom $b = a^2$ ($a \geqq 2$) a jedným z prvkov množiny B je $a + a^2$; ďalšími dvoma sú potom buď $a^2 + a^3$ a $a^3 + a^4$ alebo $1 + a$ a $a^2 + a^3$. Päť prvkov tak majú dokopy napríklad množiny $A = \{2, 4\}$, $B = \{3, 6, 12\}$.

A – II – 3

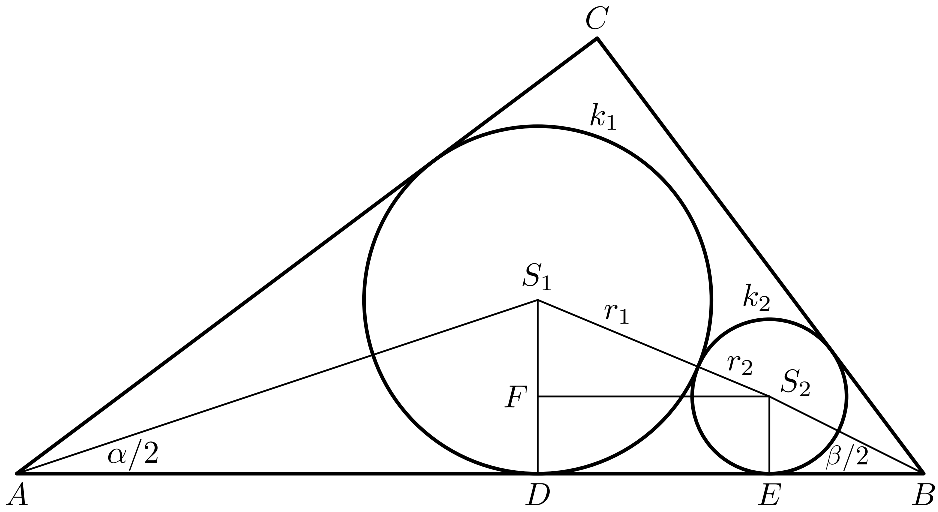
Prepona AB má podľa Pytagorovej vety dĺžku $|AB| = 5$. Pri zvyčajnom označení veľkostí strán a uhlov ďalej platí $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$,

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = 3,$$
$$\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\beta}{1-\cos\beta}} = 2.$$

Keďže podľa zadania ležia obe kružnice k_1, k_2 celé v trojuholníku ABC, musia mať vonkajší dotyk – keby mali vnútorný dotyk (v bode prepony), bola by väčšia kružnica preťatá odvesnou dotýkajúcou sa menšej kružnice. Označme D a E dotykové body kružníc k_1 a k_2 so stranou AB a F kolmý priemet bodu S_2 na úsečku S_1D (obr. 27, podľa predpokladu je $r_1 > r_2$). Podľa Pytagorovej vety pre trojuholník FS_2S_1 platí

$$(r_1 + r_2)^2 = (r_1 - r_2)^2 + |DE|^2,$$

odtiaľ $|DE| = 2 \cdot \sqrt{r_1 r_2}$.



Obr. 27

Z rovnosti $|AB| = |AD| + |DE| + |EB|$ máme

$$c = r_1 \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} + 2\sqrt{r_1 r_2} + r_2 \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} = 3r_1 + 2\sqrt{r_1 r_2} + 2r_2,$$

a keďže $r_1 = \frac{9}{4} r_2$, dostávame

$$\frac{27}{4} r_2 + 3r_2 + 2r_2 = 5,$$

a teda

$$r_2 = \frac{20}{47} \quad \text{a} \quad r_1 = \frac{45}{47}.$$

Kružnica vpísaná trojuholníku ABC má polomer $\varrho = ab/(a+b+c) = 1$. Keďže $r_1 < \varrho$, $r_2 < \varrho$, ležia obe kružnice v trojuholníku ABC.

Inú možnosť, ako vypočítať hodnotu $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha$, poskytuje pravouhlý trojuholník ATS, kde S je stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC a T bod dotyku tejto kružnice so stranou AB. Platí

$$\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} = \frac{|AT|}{|ST|} = \frac{b+c-a}{2\varrho} = 3;$$

podobne

$$\operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} = \frac{a+c-b}{2\varrho} = 2.$$

Ešte iná možnosť: V pravouhlom trojuholníku XCB s odvesnami dĺžok $|XC| = c+b$, $|CB| = a$ má uhol BXC veľkosť $\frac{1}{2}\alpha$ (pri umiestnení bodu X na polpriamku CA totiž vznikne rovnoramenný trojuholník XBA), a preto

$$\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} = \frac{c+b}{a} \quad \text{a podobne} \quad \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} = \frac{c+a}{b}.$$

A – II – 4

Nech a, b, c sú kladné čísla. Hľadáme riešenie sústavy rovníc v množine kladných čísel. Vzhľadom na podmienku $x + y + z = 1$ musia byť čísla x, y, z v intervale $(0, 1)$. Dosadením $z = 1 - x - y$ do zvyšných rovníc dostaneme

$$a(y - xy - y^2 + x) = c(xy + 1 - x - y), \quad b(x - x^2 - xy + y) = c(xy + 1 - x - y),$$

po úprave

$$ay(1 - y) + ax(1 - y) = c(1 - x)(1 - y), \quad bx(1 - x) + by(1 - x) = c(1 - x)(1 - y),$$

a keďže $x < 1$, $y < 1$, máme

$$ay + ax = c - cx, \quad bx + by = c - cy.$$

Odtiaľ už ľahko vyjadríme

$$x = \frac{b + c - a}{a + b + c}, \quad y = \frac{c + a - b}{a + b + c}, \quad z = \frac{a + b - c}{a + b + c}. \tag{1}$$

Riešenie v množine kladných čísel teda existuje práve vtedy, keď platí $b + c > a$, $c + a > b$, $a + b > c$, čo sú známe trojuholníkové nerovnosti.

Iné riešenie. Uvedieme ešte jeden spôsob odvodenia vzťahov (1). Vďaka podmienke $x + y + z = 1$ možno zrejme prepísať prvú časť uvažovanej sústavy rovníc na tvar

$$a(1 - y)(1 - z) = b(1 - z)(1 - x) = c(1 - x)(1 - y), \tag{2}$$

odkiaľ po vydelení výrazom $(1 - x)(1 - y)(1 - z)$ (rôznym od nuly, dokonca ako vieme kladným) dostaneme ekvivalentné rovnice

$$\frac{a}{1 - x} = \frac{b}{1 - y} = \frac{c}{1 - z}.$$

Ak označíme s spoločnú (kladnú) hodnotu posledných troch zlomkov, ľahko získame vyjadrenia

$$x = 1 - \frac{a}{s}, \quad y = 1 - \frac{b}{s}, \quad z = 1 - \frac{c}{s}, \tag{3}$$

ktoré po dosadení do rovnice $x + y + z = 1$ vedú k určeniu hodnoty

$$s = \frac{a + b + c}{2}.$$

Pre také s potom už z vyjadrenia (3) dostaneme želané vzťahy (1), a tým aj dôkaz tvrdenia úlohy.

Dodajme, že vďaka prepisu (2) by bolo teraz možné urobiť skúšku priamym dosadením, avšak ani teraz to nie je – vzhľadom na platné vyjadrenia (3) – nutné.

A – III – 1

Zrejme $a \neq 1$, preto môžeme danú rovnosť prepísať v tvare

$$\frac{a^2+1}{a-1} = \frac{2b^2-3}{2b-1}. \tag{1}$$

Najskôr preskúmame možnosť, že čitateľ druhého zlomku je záporný, t. j. $b \in \{-1, 0, 1\}$:

▷ Pre $b = -1$ dostaneme po úprave kvadratickú rovnicu $3a^2 - a + 4 = 0$, ktorá nemá reálne riešenie.

▷ Pre $b = 0$ dostaneme rovnicu $a^2 - 3a + 4 = 0$, ani táto rovnica reálne riešenie nemá.

▷ Pre $b = 1$ dostaneme rovnicu $a^2+1 = -a+1$, ktorú upravíme na tvar $a(a+1) = 0$. Rovnica má dve riešenia $a \in \{0, -1\}$, máme teda dve dvojice $(0, 1)$ a $(-1, 1)$, ktoré vyhovujú zadaniu.

Ďalej predpokladáme, že $2b^2 - 3 > 0$, teda že oba zlomky v (1) majú kladné čitatele. Zistíme, akými prirodzenými číslami sa dajú tieto zlomky krátiť.

Ak $n \mid a^2 + 1$ a zároveň $n \mid a - 1$, tak $n \mid (a^2 + 1) - (a + 1)(a - 1) = 2$. Podobne, ak $n \mid 2b^2 - 3$ a zároveň $n \mid 2b - 1$, tak $n \mid (2b - 1)(2b + 1) - 2(2b^2 - 3) = 5$. Sú teda štyri možnosti, ako dosiahnuť rovnosť zlomkov (1):

i) $a^2 + 1 = 2b^2 - 3$ a $a - 1 = 2b - 1$; dosadením $a = 2b$ do prvej rovnice dostaneme $4b^2 + 1 = 2b^2 - 3$, táto rovnica však nemá reálne riešenie.

ii) $a^2 + 1 = 2(2b^2 - 3)$ a $a - 1 = 2(2b - 1)$; dosadíme $a = 4b - 1$ do prvej rovnice, po úprave dostaneme rovnicu $3b^2 - 2b + 2 = 0$, ktorá v obore reálnych čísel riešenie nemá.

iii) $5(a^2 + 1) = 2b^2 - 3$ a $5(a - 1) = 2b - 1$; dosadíme $a = \frac{1}{5}(2b + 4)$ do prvej rovnice, po úprave dostaneme kvadratickú rovnicu $3b^2 - 8b - 28 = 0$, ktorá má celočíselné riešenie $b = -2$. Tomu zodpovedá $a = 0$.

iv) $5(a^2 + 1) = 2(2b^2 - 3)$ a $5(a - 1) = 2(2b - 1)$; dosadíme $a = \frac{1}{5}(4b + 3)$ do prvej rovnice a dostaneme $b^2 - 6b - 16 = 0$. Táto kvadratická rovnica má dva celočíselné korene $b = -2$ a $b = 8$, ktorým zodpovedajú hodnoty $a = -1$ a $a = 7$.

Vyhovuje teda 5 celočíselných dvojíc (a, b):

$$(0, 1),\ (-1, 1),\ (0, -2),\ (-1, -2),\ (7, 8).$$

Iné riešenie. Rovnicu (1) z prvého riešenia upravíme na tvar

$$a + 1 + \frac{2}{a-1} = b + \frac{b-3}{2b-1}. \tag{2}$$

Zrejme platí, že

$$\text{ak } a \leqq -2, \text{ tak} \quad -1 < \frac{2}{a-1} < 0 \qquad \text{a ak } a \geqq 4, \text{ tak} \quad 0 < \frac{2}{a-1} < 1. \tag{3}$$

Taktiež možno ľahko ukázať, že

$$\text{ak } b \leqq -3 \text{ alebo } b \geqq 4, \text{ tak} \quad 0 < \frac{b-3}{2b-1} < 1. \tag{4}$$

Preto najskôr vypočítame hodnoty oboch zlomkov v (1) pre $a \in \{-1, 0, 2, 3\}$ ($a \neq 1$) a $b \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$:

a	-1	0	2	3
$\dfrac{a^2+1}{a-1}$	-1	-1	5	5

b	-2	-1	0	1	2	3
$\dfrac{2b^2-3}{2b-1}$	-1	$\frac{1}{3}$	3	-1	$\frac{5}{3}$	3

Porovnaním oboch tabuliek nájdeme rýchlo štyri riešenia: $(-1, -2)$, $(-1, 1)$, $(0, -2)$, $(0, 1)$. Žiadne iné riešenia pre $a \in \{-1, 0, 2, 3\}$ neexistujú, pretože z prvej tabuľky vidíme, že ľavá strana v (2) je pre tieto hodnoty celočíselná, zatiaľ čo pre $b \notin \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ pravá strana podľa (4) celočíselná nie je. Podobne neexistujú ďalšie riešenia ani pre $b \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$: prípady $b = -1$ a $b = 2$ možno overiť priamym dosadením a vyriešením rovnice s neznámou a, v ostatných prípadoch je pravá strana v (2) celočíselná, zatiaľ čo ľavá strana pre $a \notin \{-1, 0, 2, 3\}$ podľa (3) celočíselná nie je.

Pre zvyšné hodnoty a, b platí

$$-1 < \frac{b-3}{2b-1} - \frac{2}{a-1} = a + 1 - b < 2,$$

a pretože $a + 1 - b$ je celé číslo, sú len dve možnosti: $a + 1 - b = 0$ alebo $a + 1 - b = 1$.

Ak $a = b - 1$, dostaneme z (2)

$$\frac{2}{b-2} = \frac{b-3}{2b-1} \qquad \text{a odtiaľ} \quad b^2 - 9b + 8 = 0,$$

čiže $b = 1$ alebo $b = 8$. Máme teda jedno ďalšie riešenie $(7, 8)$.

Ak $a = b$, dostaneme z (2)

$$\frac{2}{b-1} + 1 = \frac{b-3}{2b-1}, \qquad \text{odtiaľ} \quad b^2 + 5b - 4 = 0;$$

táto rovnica celočíselné riešenie nemá.

A – III – 2

Označme z_i počet mincí, ktoré má i-ty zbojník (čísla z_i sa v priebehu delenia menia).

Nech $n = 3$. Po ľubovoľnom kroku sa nezmení zvyšok po delení čísla $z_1 - z_2$ tromi[5]. Ak teda napríklad boli začiatočné stavy $z_1 = 101$, $z_2 = 100$ a $z_3 = 99$, nemôže nikdy nastať rovnosť $z_1 = z_2$. Takže číslo $n = 3$ nevyhovuje.

Ukážeme, že pre každé $n \geqq 4$ a ľubovoľné začiatočné hodnoty z_i dosiahneme po konečnom počte vhodných krokov stav, v ktorom bude mať každý zbojník 100 mincí.

Označme $s = \sum_{i=1}^{n} |z_i - 100|$. Číslo s budeme zmenšovať, kým to bude možné, tak, že v každom kroku niektorý zo zbojníkov, ktorí majú najviac, dá po jednej minci niektorým dvom, ktorí majú najmenej. Nech už sa takým spôsobom číslo s nedá zmenšiť. Ak $s = 0$, skončili sme.

Ak $s \neq 0$, má niektorý zbojník $100 - k$ mincí ($k > 0$), k zbojníkov má po 101 mincí a všetci ostatní majú po 100 (v každej inej situácii, t. j. ak by existovali dvaja zbojníci s počtom mincí menším ako 100 alebo ak by existoval zbojník s aspoň 102 mincami, by sme zrejme hodnotu s jedným krokom opísaným vyššie zmenšili). Ak $k \geqq 2$, zmenšíme hodnotu s dvoma krokmi:

$$100 - k, 101, 101 \quad \longrightarrow \quad 100 - k + 1, 102, 99 \quad \longrightarrow \quad 100 - k + 2, 100, 100.$$

Ak je k párne, po $\frac{1}{2}k$ takých dvojkrokoch bude mať každý zbojník 100 mincí. Ak je k nepárne, dostaneme sa do stavu, v ktorom má jeden zbojník 99 mincí, jeden ich má 101 a všetci ostatní (tí sú pri $n \geqq 4$ aspoň dvaja) majú po 100. Potom už delenie ľahko dokončíme:

$$99, 100, 100, 101 \quad \longrightarrow \quad 99, 101, 101, 99 \quad \longrightarrow \quad 99, 102, 99, 100 \quad \longrightarrow \quad 100, 100, 100, 100.$$

Iné riešenie. (Prípad $n \geqq 4$.) Pre neprázdnu množinu zbojníkov Z označme $r(Z)$ rozdiel medzi počtami mincí najbohatšieho a najchudobnejšieho člena množiny Z. Na začiatku vyberieme niektorého najbohatšieho zbojníka A (ľubovoľného z tých, ktorí nazbíjali najviac mincí). Označme Z množinu zvyšných zbojníkov. Ak $r(Z) \geqq 2$, tak jeden z najbohatších zbojníkov zo Z dá jednu mincu najchudobnejšiemu a jednu zbojníkovi A. Takto pokračujeme ďalej, pokiaľ platí $r(Z) \geqq 2$. Keďže počet mincí zbojníka A stále narastá a mincí je len konečný počet, po konečnom počte krokov bude $r(Z) \leqq 1$.

Od takého okamihu v každom ďalšom kroku dá zbojník A, ak má aspoň 102 mincí, po jednej minci dvom najchudobnejším. Nerovnosť $r(Z) \leqq 1$ ostáva zrejme zachovaná. Keď prvý raz nastane situácia, že zbojník A bude mať menej ako 102 mincí, budú dve možnosti: Ak bude mať zbojník A 100 mincí, je delenie skončené. Ak bude mať 101 mincí, musí mať jeden zo zbojníkov 99 mincí a všetci ostatní zo Z po 100. Delenie potom skončíme tak ako v prvom riešení.

[5] Buď sa obe čísla zväčšia o 1, teda ich rozdiel sa nezmení, alebo sa jedno zmenší o 2 a druhé zväčší o 1, teda ich rozdiel sa zmenší alebo zväčší o 3.

A – III – 3

Označme $a = |AB|$, $b = |AD|$ a $c = |BD|$. Prípad $a = b$ je triviálny: $ABCD$ je kosoštvorec a obidve priamky OS a CT sú totožné s priamkou AC. Budeme teda predpokladať, že $a > b$ (v prípade $a < b$ stačí vymeniť označenie bodov B a D).

Označme T' obraz bodu T v stredovej súmernosti podľa stredu S, v ktorej A je obrazom bodu C. Keďže $CT \parallel AT'$, môžeme namiesto vzťahu $OS \parallel CT$ dokazovať, že $OS \parallel AT'$. Označme P priesečník priamky AO s uhlopriečkou BD. Dokážeme, že trojuholníky POS a PAT' sú rovnoľahlé (obr. 28). Predpoklad $a > b$ zaručuje, že P je vnútorným bodom úsečky DS, T je vnútorným bodom úsečky DP a T' vnútorným bodom úsečky SB.

Bod T' je dotykovým bodom kružnice vpísanej trojuholníku DBC so stranou BD, a ako je známe, je to súčasne bod, v ktorom sa strany BD dotýka kružnica k' pripísaná trojuholníku ABD. Označme ϱ polomer kružnice k vpísanej trojuholníku ABD a ϱ' polomer kružnice k'. Bod P leží na spojnici stredov kružníc k a k' aj na ich spoločnej dotyčnici, je teda stredom rovnoľahlosti týchto kružníc. Preto platí rovnosť

$$\frac{|PT'|}{|PT|} = \frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{a+b+c}{a+b-c}.$$

Ak označíme $|ST'| = |ST| = x$ a $|SP| = y$, máme

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{a+b+c}{a+b-c}, \qquad \text{odtiaľ} \quad \frac{x}{y} = \frac{a+b}{c},$$

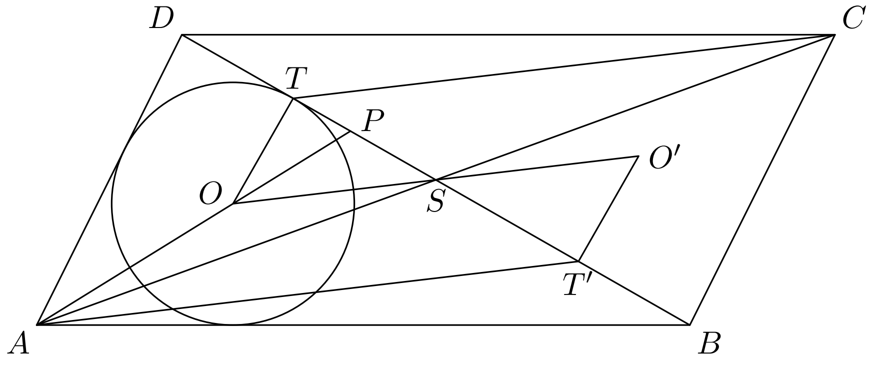
takže

$$\frac{|PT'|}{|PS|} = \frac{x+y}{y} = \frac{a+b+c}{c}.$$

Ak označíme v veľkosť výšky trojuholníka ABD z vrcholu A, platí

$$\frac{|PA|}{|PO|} = \frac{v}{\varrho} = \frac{a+b+c}{c} = \frac{|PT'|}{|PS|}.$$

Tým je rovnoľahlosť trojuholníkov PAT' a POS, a teda aj rovnobežnosť priamok AT' a OS, dokázaná.



Obr. 28

Iné riešenie. Ako je známe,

$$|DT| = \frac{b+c-a}{2}, \quad \text{a preto} \quad |T'S| = |TS| = \frac{c}{2} - \frac{b+c-a}{2} = \frac{a-b}{2}.$$

Keďže AP je osou uhla BAD a DO je osou uhla ADB, platia známe rovnosti

$$|BP| : |PD| = |AB| : |AD| \quad \text{a} \quad |AO| : |OP| = |AD| : |DP|,$$

z ktorých postupne dostaneme

$$|BP| = \frac{ac}{a+b} \quad \text{a} \quad |DP| = \frac{bc}{a+b},$$
$$|SP| = |BP| - |BS| = \frac{ac}{a+b} - \frac{c}{2} = \frac{c(a-b)}{2(a+b)},$$
$$\frac{|AO|}{|OP|} = \frac{|AD|}{|DP|} = \frac{b}{\frac{bc}{a+b}} = \frac{a+b}{c}.$$

Dokážeme, že takú istú hodnotu má zlomok $|T'S|/|SP|$:

$$\frac{|T'S|}{|SP|} = \frac{\frac{a-b}{2}}{\frac{c(a-b)}{2(a+b)}} = \frac{a+b}{c}.$$

Tým je rovnoľahlosť trojuholníkov PAT' a POS dokázaná.

Iné riešenie. (Analytické.) Zvoľme karteziánsku súradnicovú sústavu tak, že $A = [0,0]$, $B = [1,0]$, $D = [a,b]$. Potom $C = [a+1,b]$, $S = [\frac{1}{2}(a+1), \frac{1}{2}b]$. Bod O má rovnakú vzdialenosť od strán trojuholníka ABD, jeho súradnice $[x,y]$ teda vyhovujú sústave rovníc

$$y = \frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{-bx+(a-1)y+b}{\sqrt{(a-1)^2+b^2}}.$$

Ak označíme $c = \sqrt{(a-1)^2+b^2}$, $d = \sqrt{a^2+b^2}$, dostaneme

$$O = \left[\frac{a+d}{c+d+1}, \frac{b}{c+d+1}\right].$$

Ďalej

$$T = B + \left(1 - \frac{a+d}{c+d+1}\right)\frac{D-B}{c} = \frac{1}{c+d+1}\left[c+d+a-\frac{(1-a)^2}{c}, b\left(\frac{1-a}{c}+1\right)\right].$$

Overenie lineárnej závislosti vektorov

$$S - O = \left[\frac{a+1}{2} - \frac{a+d}{c+d+1}, \frac{b}{2}\left(1 - \frac{2}{c+d+1}\right)\right]$$

a

$$C-T=\left[a+1-\frac{c+d+a-\frac{(1-a)^2}{c}}{c+d+1},b\left(1-\frac{\frac{1-a}{c}+1}{c+d+1}\right)\right],$$

čiže rovnosti

$$[(a+1)(c+d+1)-2a-2d]\left(c+d-\frac{1-a}{c}\right)=$$
$$=\left[(a+1)(c+d+1)-c-d-a+\frac{(1-a)^2}{c}\right](c+d-1),$$

je už rutinnou záležitosťou.

A – III – 4

Pre viacciferné číslo $N=10m+c$ (pričom $c\in\{0,1,\dots,9\}$ a m je prirodzené) označme $u(N)=|m-3c|$. Najskôr zistíme, pre ktoré čísla N platí $u(N)=0$. Rovnosť $|m-3c|=0$ platí práve vtedy, keď $m=3c$; potom $N=10m+c=31c$. Dokážeme, že úlohe vyhovujú práve všetky násobky čísla 31. Platí totiž

$$31\mid 10m+c\quad\Leftrightarrow\quad 31\mid 30m+3c\quad\Leftrightarrow\quad 31\mid -m+3c,$$

čiže

$$31\mid N\quad\Leftrightarrow\quad 31\mid u(N). \tag{1}$$

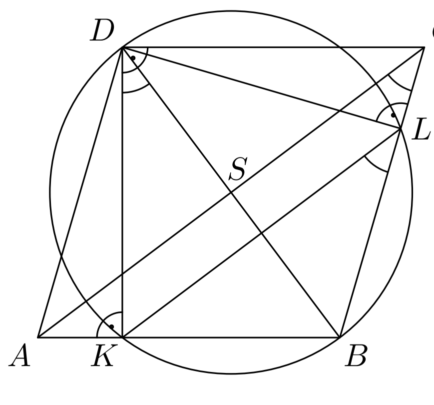
Keďže pre každé $N\geqq 20$ platí $u(N)<N$, po konečnom počte krokov z každého čísla N vznikne nejaké celé nezáporné číslo menšie ako 20. Číslo 0 podľa (1) vznikne práve vtedy, keď je N násobok čísla 31.

A – III – 5

Striedavé uhly ABD a CDB sú zhodné (obr. 29), preto $|\measuredangle BCA|+|\measuredangle ABD|+|\measuredangle BDA|+$ $+|\measuredangle ACD|=180°$. Rovnosť $|\measuredangle BCA|+|\measuredangle ABD|=|\measuredangle BDA|+|\measuredangle ACD|$ teda platí práve vtedy, keď

$$|\measuredangle BCA|+|\measuredangle ABD|=90°. \tag{1}$$

Body K a L ležia na Tálesovej kružnici s priemerom BD. Obvodový uhol BDK je



Obr. 29

zhodný s uhlom BLK, preto (vzhľadom na rovnosť striedavých uhlov ABD a CDB)

$$|\measuredangle BLK| + |\measuredangle ABD| = |\measuredangle BDK| + |\measuredangle CDB| = 90^\circ.$$

Priamky KL a AC sú zrejme rovnobežné práve vtedy, keď $|\measuredangle BLK| = |\measuredangle BCA|$, čo je podľa predošlej rovnosti ekvivalentné s (1). Tým je požadovaná ekvivalencia dokázaná.

A – III – 6

Pre dvojicu $a = b = 1$ dostaneme pre parameter $p > 0$ nerovnicu, ktorú vyriešime:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{p+1} &\geqq p+1, \\ 2 &\geqq \sqrt{p+1}, \\ p &\leqq 3. \end{aligned}$$

Ukážeme, že každé $p \in (0, 3\rangle$ vyhovuje.

Pre $p \in (0, 1\rangle$ daná nerovnosť platí, lebo vtedy

$$\sqrt{a^2 + pb^2} > a, \quad \sqrt{b^2 + pa^2} > b \quad \text{a} \quad (p-1)\sqrt{ab} \leqq 0.$$

Zaoberajme sa preto ďalej iba prípadom $p \in (1, 3\rangle$. Ľavú stranu L dokazovanej nerovnosti môžeme chápať ako súčet veľkostí dvoch vektorov $(a, b\sqrt{p})$, $(b, a\sqrt{p}) \in \mathbb{R}^2$, preto podľa trojuholníkovej nerovnosti

$$\begin{aligned} L = \sqrt{a^2 + pb^2} + \sqrt{b^2 + pa^2} &= |(a, b\sqrt{p})| + |(b, a\sqrt{p})| \geqq \\ &\geqq |(a+b, (a+b)\sqrt{p})| = (a+b)\sqrt{1+p}. \end{aligned} \tag{1}$$

Pre pravú stranu P pomocou nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom naopak dostávame horný odhad

$$P = a + b + (p-1)\sqrt{ab} \leqq a + b + (p-1)\frac{a+b}{2} = \frac{(p+1)(a+b)}{2}.$$

Nerovnosť $L \geqq P$ je tak dokázaná, pretože silnejšia nerovnosť

$$(a+b)\sqrt{p+1} \geqq \frac{(p+1)(a+b)}{2}$$

je ekvivalentná s nerovnosťou $\sqrt{p+1} \leqq 2$, ktorá je pre každé $p \in (1, 3\rangle$ zrejme splnená.

Poznámka. Odhad (1) sa dá dostať aj použitím Cauchyho-Schwarzovej nerovnosti pre dvojice $(a, b\sqrt{p})$ a $(1, \sqrt{p})$: z nerovnosti

$$a + pb \leqq \sqrt{a^2 + pb^2} \cdot \sqrt{1+p},$$

vyplýva prvá z nerovností

$$\sqrt{a^2 + pb^2} \geqq \frac{a + pb}{\sqrt{1+p}}, \qquad \sqrt{b^2 + pa^2} \geqq \frac{b + pa}{\sqrt{1+p}},$$

druhú odvodíme analogicky.

Prípravné sústredenia pred IMO a MEMO

Pred medzinárodnou matematickou olympiádou (IMO) a stredoeurópskou matematickou olympiádou (MEMO) sa každoročne koná jedno výberové a jedno prípravné sústredenie pre najlepších riešiteľov celoštátneho kola kategórie A (CK MO). Od 55. ročníka MO sa navyše každoročne koná aj spoločné prípravné sústredenie českého a slovenského IMO-družstva.

Po výberovom sústredení SKMO vyberie 6 najlepších študentov do reprezentačného družstva Slovenska pre IMO a určí jedného náhradníka. Spomedzi tých, ktorí sa nedostali na IMO a zároveň nie sú v maturitnom ročníku (t. j. majú možnosť súťažiť v MO aj nasledujúci školský rok), vyberie SKMO najlepších 6 študentov do družstva pre MEMO. Na výberovom sústredení pred IMO sa zúčastnilo 17 súťažiacich, najúspešnejších riešiteľov tretieho kola MO kategórie A. Sústredenie sa konalo v dňoch 17. – 24. 4. 2013 v Bratislave. Úlohy zadávali okrem členov úlohovej komisie aj študenti či učitelia z FMFI UK Bratislava:

RNDr. Ján Mazák, PhD., Róbert Tóth, úlohy 1 – 4,

Dominik Csiba, Bc. Tomáš Kocák, úlohy 5 – 8,

RNDr. Tomáš Jurík, PhD., Mgr. Martin Kollár, PhD., úlohy 9 – 12,

Mgr. Richard Kollár, PhD., Mgr. Peter Novotný, PhD., úlohy 13 – 15,

Michal Kopf, Filip Sládek, úlohy 16 – 18.

Každý deň študenti riešili sériu troch či štyroch úloh pri podobných podmienkach ako na IMO. V poobedňajších hodinách sa konal spoločný rozbor úloh s lektorom. Na konci sústredenia sa získané body za jednotlivé dni sčítali a s prihliadnutím na výsledky tretieho kola MO boli vybrané šesťčlenné družstvá pre účasť na IMO a MEMO.

Výsledky sústredenia:

Martin Vodička	84
Eduard Batmendijn	60
Filip Hanzely	46,5
Miroslav Stankovič	46,5
Vladimír Macko	41,5
Jakub Šafin	40
Patrik Bak	35,5
Bui Truc Lam	35,5
Marta Kossaczká	32,5
Marko Puza	31,5
Tamás Balogh	29,5
Zhen Ning David Liu	27
Jakub Dargaj	20,5
Tomáš Gonda	20,5
Matúš Halaj	18,5
Ľudmila Šimková	13,5
Samuel Sučík	7,5

Poradie po zohľadnení výsledkov CK MO:

1.	*Martin Vodička*	126	10.	*Marta Kossaczká*	60,5
2.	*Eduard Batmendijn*	89	11.	*Tamás Balogh*	55,5
3.	*Filip Hanzely*	88,5	12.	*Zhen Ning David Liu*	51
4.	*Miroslav Stankovič*	84,5	13.	*Jakub Dargaj*	49,5
5.	*Jakub Šafin*	79	14.	*Tomáš Gonda*	45,5
6.	*Patrik Bak*	72,5	15.	*Matúš Halaj*	34,5
7.	*Bui Truc Lam*	70,5	16.	*Ľudmila Šimková*	33,5
8.	*Vladimír Macko*	69,5	17.	*Samuel Sučík*	22,5
9.	*Marko Puza*	61,5			

Prípravné sústredenie sa konalo v dňoch 3. – 7. 6. 2013 v Bratislave. Sústredenie bolo zamerané obzvlášť na prípravu reprezentačných družstiev na IMO a MEMO. Lektormi boli prevažne študenti a učitelia z FMFI UK Bratislava:

Mgr. Peter Novotný, PhD. (kombinatorika),
RNDr. Ján Mazák, PhD. (nerovnosti, teória grafov),
Filip Sládek (geometria),
Bc. Tomáš Kocák (teória čísel),
Michal Kopf (geometria).

V poradí ôsme spoločné sústredenie českého a slovenského družstva sa uskutočnilo v dňoch 16. – 21. 6. 2013 v ČR v Uherskom Hradišti v regionálnom vzdelávacom stredisku Eduha. Sústredenie sa uskutočnilo pod záštitou Společnosti Otakara Borůvky a bolo finančne zabezpečené z neštátnych prostriedkov. Pedagogický dozor slovenským (a na mieste aj českým) študentom robil Filip Sládek z FMFI UK Bratislava. Odborné prednášky viedli

doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., MÚ AV ČR, Brno (teória čísel),
RNDr. Pavel Calábek, PhD., PF UP, Olomouc (algebra),
Mgr. Martin Panák, PhD., MÚ AV ČR, Brno (kombinatorika),
RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., PF UP, Olomouc (syntetická planimetria).

Zadania súťažných úloh výberového sústredenia pred IMO

1. Dokážte, že pre každé celé číslo $n \geqq 2$ a ľubovoľné kladné reálne čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí

$$\sum_{k=1}^{n} kx_k \leqq \binom{n}{2} + \sum_{k=1}^{n} x_k^k.$$

2. Polpriamky OA a OB sa dotýkajú kružnice k v rôznych bodoch A a B. Nech K je vnútorný bod kratšieho oblúka AB kružnice k. Priesečník polpriamky OB s rovnobežkou s priamkou OA prechádzajúcou bodom K označme L. Priesečník priamky AK s kružnicou l opísanou trojuholníku KLB (rôzny od K) označme M. Dokážte, že priamka OM sa dotýka kružnice l.

3. V každej z troch krajín žije $2n$ matematikov. Nájdite najmenšie celé číslo k s nasledujúcou vlastnosťou: Ak každý matematik pozná aspoň k kolegov z iných krajín, tak existujú traja matematici, ktorí sa poznajú navzájom. (Vzťah „poznať sa“ je vzájomný.)

4. Nájdite všetky usporiadané trojice kladných celých čísel (a, b, c) také, že $\text{nsd}(a, b, c) = 1$, $a \leqq b \leqq c$ a číslo $a + b + c$ je deliteľom čísla $a^n + b^n + c^n$ pre každé kladné celé číslo n.

5. Nájdite všetky trojice (x, y, z) reálnych čísel, ktoré sú riešením sústavy rovníc

$$\begin{aligned} x^3 &= 3x - 12y + 50, \\ y^3 &= 12y + 3z - 2, \\ z^3 &= 27z + 27x. \end{aligned}$$

6. Nájdite všetky polynómy $P(x)$ s reálnymi koeficientmi, pre ktoré je

$$(x + 1)P(x - 1) - (x - 1)P(x)$$

konštantný polynóm.

7. Nech P, Q a R sú body na stranách BC, CA a AB ostrouhlého trojuholníka ABC také, že trojuholník PQR je rovnostranný a má minimálny obsah spomedzi všetkých takých rovnostranných trojuholníkov. Dokážte, že kolmice z bodov A, B a C postupne na strany QR, RP a PQ sa pretínajú v jednom bode.

8. Dokážte, že neexistuje celé číslo n také, že $n^7 + 7$ je druhou mocninou celého čísla.

9. Pre $n = 1, 2, 3$ budeme za číslo n-tého typu považovať nulu, ľubovoľný člen geometrickej postupnosti 1, $(n+2)$, $(n+2)^2$, $(n+2)^3$, … a tiež súčet niekoľkých jej rôznych členov. Dokážte, že každé prirodzené číslo sa dá vyjadriť ako súčet čísla prvého typu, čísla druhého typu a čísla tretieho typu.

10. Je možné zafarbiť štvorčeky nekonečnej štvorčekovej siete dvoma farbami (bielou a čiernou) tak, že ľubovoľná priamka rovnobežná so stranami štvorčekov prechádza konečne veľa bielymi štvorčekmi a ľubovoľná priamka nerovnobežná so stranami štvorčekov prechádza konečne veľa čiernymi štvorčekmi? (Priamka prechádza štvorčekom, ak s ním má spoločný aspoň jeden bod.)

11. Kružnice k_1 a k_2 so stredmi v bodoch O_1 a O_2 sa pretínajú v dvoch bodoch A a B. Priamky O_2B a O_1B pretínajú kružnice k_1 a k_2 postupne v bodoch E a F (rôznych od B). Rovnobežka s priamkou EF prechádzajúca bodom B pretína kružnice k_1 a k_2 v bodoch M a N (rôznych od B). Dokážte, že ak bod B leží vnútri úsečky MN, tak $|MN| = |AE| + |AF|$.

12. Dokážte, že ak pre nezáporné čísla x, y platí nerovnosť $x^2 + y^3 \geqq x^3 + y^4$, tak platí aj nerovnosť $x^3 + y^3 \leqq 2$.

13. Pre každé prirodzené číslo $n \geqq 3$ nájdite najmenšie k také, že množinu ľubovoľných n bodov v rovine, z ktorých žiadne tri neležia na jednej priamke, možno oddeliť systémom k priamok. (Systém priamok oddeľuje body množiny, ak pre každé dva body množiny existuje priamka, od ktorej ležia na opačných stranách.)

14. Na šachovnici $n \times n$ (pričom $n \geqq 2$) je položených niekoľko domín rozmerov 2×1, pričom na šachovnicu už nie je možné umiestniť ďalšie domino tak, aby sa neprekrývalo s nejakým už položeným dominom. Dokážte, že voľných políčok na šachovnici nie je viac ako $n^2/3$.

15. Nech $1 \leqq a_1 < a_2 < \ldots < a_n \leqq 2n$ je konečná postupnosť prirodzených čísel, pričom $n \geqq 6$.

a) Dokážte, že pre $k = 6$ platí

$$\min_{1 \leqq i < j \leqq n} \operatorname{nsn}(a_i, a_j) \leqq k\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right), \tag{1}$$

kde $\operatorname{nsn}(a_i, a_j)$ označuje najmenší spoločný násobok čísel a_i, a_j. Ukážte, že koeficient $k = 6$ je najlepší možný, t. j. pre žiadne $n \geqq 6$ neexistuje $k < 6$ také, že (1) platí pre všetky postupnosti $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ vyhovujúce zadaniu.

b) Dokážte, že

$$\max_{1 \leqq i < j \leqq n} \operatorname{nsd}(a_i, a_j) > \frac{38}{147}\, n - \frac{310}{21},$$

kde $\operatorname{nsd}(a_i, a_j)$ označuje najväčší spoločný deliteľ čísel a_i, a_j.

16. Neprázdnu množinu $A \subseteq \mathbb{Z}$ nazveme *čarovná*, ak spĺňa podmienku: Ak $x, y \in A$ (môže byť aj $x = y$), potom aj $x^2 + kxy + y^2 \in A$ pre všetky $k \in \mathbb{Z}$. Nájdite všetky také dvojice nenulových celých čísel m, n (vrátane prípadov $m = n$), že jediná čarovná množina obsahujúca aj m aj n je $\mathbb{Z}$.

17. Daný je trojuholník ABC, pričom $|AB| \neq |AC|$. Označme O stred jeho opísanej kružnice. Os uhla BAC pretína stranu BC v bode D. Bod E je obrazom bodu D v stredovej súmernosti podľa stredu strany BC. Priamky kolmé na BC prechádzajúce postupne bodmi D, E pretínajú AO a AD postupne v X, Y. Dokážte, že body B, X, C a Y ležia na jednej kružnici.

18. Filip a Miki hrajú hru s $N > 2013$ účastníkmi výberového sústredenia a 2013 stoličkami umiestnenými na kružnici. Najprv Filip posadí účastníkov na stoličky tak, aby na každej stoličke sedel aspoň jeden človek. V ďalšom ťahu ide Miki a už sa budú stále striedať.

- Miki v každom svojom ťahu presadí z každej stoličky práve jedného človeka na susednú.
- Filip vyberie niekoľko ľudí, ktorí sedia navzájom na rôznych stoličkách a ktorých Miki v predchádzajúcom ťahu nepresadil, a každého z nich presadí na susednú stoličku.

Nájdite najmenšie N také, že Filipovi sa vždy podarí, aby po jeho ťahu boli obsadené všetky stoličky bez ohľadu na Mikiho snaženie a dĺžku partie.

2. Česko-poľsko-slovenské stretnutie juniorov

Druhý ročník súťaže sa uskutočnil v termíne 13. – 16. 5. 2013 v Mszane Dolnej v Poľsku, teda na rovnakom mieste ako prvý ročník. Za vznikom súťaže v predošlom ročníku stáli organizátori z Poľska, kde sa v školskom roku 2011/2012 konala po prvý raz súťaž *Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów*, teda matematická olympiáda pre študentov tzv. gymnázií. (Školský systém v Poľsku je nasledovný: žiaci prvých 6 rokov navštevujú základnú školu, ďalšie 3 roky študujú na gymnáziu a ďalšie 3 roky na lýceu, z ktorého môžu ďalej pokračovať v štúdiu na vysokej škole. Do školského roku 2010/2011 organizovali v Poľsku len *Olimpiadu Matematycznu*, teda súťaž pre študentov lýceí.)

Kolegovia z Poľska nám túto súťaž navrhli s ponukou, že prvé tri ročníky zorganizujú oni. Našou snahou bude spraviť z tohto podujatia tradíciu, teda v budúcnosti by sa organizácia mala striedať medzi krajinami podobne ako pri klasickom Česko-poľsko-slovenskom stretnutí.

Na túto súťaž SKMO nominovala najlepších riešiteľov krajského kola v kategórii C. Výber družstva bol urobený na základe koordinácie riešení najlepších cca. 20 študentov. Slovensko reprezentovali

Zuzana Frankovská, Gymnázium Grösslingová, Bratislava,

Slavomír Hanzely, Gymnázium A. Prídavka, Sabinov,

Tomáš Kekeňák, Gymnázium S. Máraiho, Košice,

Milan Kubala, Gymnázium J. G. Tajovského, Banská Bystrica,

Samuel Sládek, Gymnázium A. Bernoláka, Námestovo,

Lucia Tódová, Gymnázium Párovská, Nitra.

Ako vedúci ich sprevádzali Mgr. Peter Novotný, PhD. a Filip Sládek.

Samotná súťaž sa delila na dve časti – súťaž jednotlivcov a súťaž družstiev. V súťaži jednotlivcov, ktorá sa konala v pondelok doobeda, žiaci samostatne riešili 5 úloh podobnou formou ako býva zvykom na jednotlivých kolách MO. Pre súťaž družstiev bolo lósom určených 6 družstiev – v každom družstve bol jeden žiak zo Slovenska, jeden z ČR a jeden z Poľska. Počas súťaže v utorok doobeda mala každá trojica vyriešiť 6 úloh, pričom na príprave riešení mali spolupracovať a odovzdať za celé družstvo ku každej úlohe jedno riešenie. Zaujímavé bolo pravidlo, že každá úloha bola zadaná len v jednom z niektorých troch jazykov a každá úloha mala predpísané, v akom jazyku musí byť vypracované jej riešenie. Pritom zadanie bolo napísané v inom jazyku, ako malo byť vypracované jej riešenie. Žiaci tak museli pri riešení spolupracovať a mimo matematických schopností sa precvičili aj v jazykoch. Pre zaujímavosť uvádzame zadania súťaže družstiev v takom jazyku, v akom ich dostali aj žiaci na súťaži.

V tabuľkách uvádzame výsledky oboch súťaží, plný počet za každú úlohu bol 5 bodov. Najlepší v oboch súťažiach získali hodnotné vecné ceny.

Prehľad výsledkov:

Por.	Meno	Štát	1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$
1.	Pavel Turek	Česká rep.	5	4	5	3	5	22
2.	Wiktoria Kośny	Poľsko	5	5	5	5	0	20
	Paweł Piwek	Poľsko	5	4	5	5	1	20
4.	Paweł Burzyński	Poľsko	4	5	0	5	5	19
5.	Marian Poljak	Česká rep.	4	5	5	4	0	18
6.	Stanisław Kurdziałek	Poľsko	5	4	0	5	0	14
	Samuel Sládek	Slovensko	2	5	0	3	4	14
8.	Jan Šorm	Česká rep.	4	4	5	0	0	13
9.	Filip Bialas	Česká rep.	3	4	0	5	0	12
	Lucia Tódová	Slovensko	0	4	0	4	4	12
11.	Jan Gocník	Česká rep.	1	5	0	3	0	9
	Slavomír Hanzely	Slovensko	1	3	0	5	0	9
	Tomasz Kościuszko	Poľsko	4	5	0	0	0	9
	Daniel Pišťák	Česká rep.	5	4	0	0	0	9
15.	*Zuzana Frankovská*	Slovensko	0	4	4	0	0	8
	Adam Kucz	Poľsko	4	4	0	0	0	8
17.	*Tomáš Kekeňák*	Slovensko	3	1	0	1	0	5
18.	*Milan Kubala*	Slovensko	3	0	0	0	0	3

Por.	Zloženie družstva	Štát	1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$
1.	Pavel Turek Stanisław Kurdziałek *Samuel Sládek*	Česká rep. Poľsko Slovensko	5	4	0	0	5	0	14
2.	Filip Bialas Paweł Piwek *Milan Kubala*	Česká rep. Poľsko Slovensko	5	4	0	0	0	2	11
3.	Jan Gocník Tomasz Kościuszko *Tomáš Kekeňák*	Česká rep. Poľsko Slovensko	5	5	0	0	0	0	10
4.	Daniel Pišťák Paweł Burzyński *Slavomír Hanzely*	Česká rep. Poľsko Slovensko	0	4	0	0	5	0	9
5.	Marian Poljak Wiktoria Kośny *Zuzana Frankovská*	Česká rep. Poľsko Slovensko	0	3	0	0	0	2	5
6.	Jan Šorm Adam Kucz *Lucia Tódová*	Česká rep. Poľsko Slovensko	0	3	0	0	0	0	3

Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia juniorov

Súťaž jednotlivcov

Úloha 1.
Určte všetky dvojice celých čísel (x, y) spĺňajúcich rovnosť

$$\sqrt{x-\sqrt{y}}+\sqrt{x+\sqrt{y}}=\sqrt{xy}.$$

Úloha 2.
Každé kladné celé číslo chceme natrieť načerveno alebo nazeleno, pričom musia byť splnené nasledujúce podmienky:

- Nech n je ľubovoľné červené číslo. Súčet ľubovoľných n (nie nutne rôznych) červených čísel je červený.
- Nech m je ľubovoľné zelené číslo. Súčet ľubovoľných m (nie nutne rôznych) zelených čísel je zelený.

Určte všetky také ofarbenia.

Úloha 3.
Päťuholník $ABCDE$ je vpísaný do kružnice a platí $|AB| = |BC| = |CD|$. Úsečky AC a BE sa pretínajú v bode K, úsečky AD a CE sa pretínajú v bode L. Dokážte, že $|AK| = |KL|$.

Úloha 4.
Nájdite najväčšie dvojciferné číslo d s nasledujúcou vlastnosťou: pre každé šesťciferné číslo $\overline{aabbcc}$ platí, že číslo d je deliteľom čísla $\overline{aabbcc}$ práve vtedy, keď d je deliteľom trojciferného čísla $\overline{abc}$.

Úloha 5.
Nech M je stred strany AB v ostrouhlom trojuholníku ABC. Pre ľubovoľný bod P vnútri úsečky AB označíme postupne S_1 a S_2 stredy kružníc opísaných trojuholníkom APC a BPC. Dokážte, že stred úsečky S_1S_2 leží na osi úsečky CM. (*Ján Mazák*)

Súťaž družstiev

Úloha 1.
Rozhodnite, či existuje nekonečne veľa prvočísel p, ktoré majú násobok v tvare $n^2 + n + 1$ pre nejaké prirodzené číslo n. (*Ján Mazák*)

Úloha 2.
Nájdite všetky prirodzené čísla n také, že súčet troch najväčších deliteľov čísla n je 1457. (*Pavel Novotný*)

Úloha 3.
W pewnej grupie jest $n \geqq 5$ osób, przy czym każde dwie osoby, które się nie znają, mają dokładnie jednego wspólnego znajomego oraz żadna osoba nie zna wszystkich

pozostałych. Udowodnij, że można 5 spośród danych n osób usadzić przy okrągłym stole tak, aby każda z nich siedziała pomiędzy swoimi
a) znajomymi,
b) nieznajomymi.

Úloha 4.
W czworokącie wypukłym $ABCD$

$$\measuredangle DAB = \measuredangle ABC = \measuredangle BCD > 90^\circ.$$

Okrąg opisany na trójkącie ABC przecina boki AD i CD odpowiednio w punktach K i L, różnych od wierzchołków czworokąta. Odcinki AL i CK przecinają się w punkcie P. Udowodnij, że $\measuredangle ADB = \measuredangle PDC$.

Úloha 5.
Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla, pro něž platí $ab + ac + bc \geqq a + b + c$. Dokažte, že

$$a + b + c \geqq 3.$$

Úloha 6.
V rovině je dán čtverec $ABCD$, kde $|AB| = a$. Určete nejmenší možnou hodnotu poloměrů tří shodných kruhů, pomocí nichž je možno pokrýt daný čtverec.

13. Česko-poľsko-slovenské stretnutie

V rámci záverečnej prípravy pred IMO sa aj tento rok uskutočnilo prípravné stretnutie medzi družstvami Českej republiky, Poľska a Slovenska. Jednotlivé krajiny reprezentovali šestice študentov, ktorí si vybojovali vo svojich krajinách účasť na 54. IMO v Kolumbii.

Súťaž sa uskutočnila 23. – 26. 6. 2013 v Bílovci v ČR. Organizácia a priebeh súťaže zostali nezmenené z predchádzajúcich ročníkov – je prispôsobená štýlu celoštátneho kola našej MO a podmienkam IMO. Súťažiacim boli počas dvoch dní predložené dve trojice súťažných úloh, pričom za každú správnu úlohu mohli získať najviac 7 bodov, t. j. dovedna 42 bodov (rovnako ako na IMO). Na každú trojicu úloh mali súťažiaci vymedzené 4,5 hodiny čistého času.

Opravu riešení zabezpečila medzinárodná porota, v ktorej Slovensko zastupovali RNDr. Róbert Hajduk, PhD. z PF UPJŠ Košice a Bc. Tomáš Kocák z FMFI UK Bratislava. Po prvýkrát v histórii v neoficiálnom poradí krajín, ktoré vznikne súčtom bodov jednotlivých súťažiacich, zvíťazili žiaci zo Slovenska.

Prehľad výsledkov:

Por.	Meno	Štát	1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$
1.	Konrad Paluszek	Poľsko	7	7	7	7	7	7	42
	Kamil Rychlewicz	Poľsko	7	7	7	7	7	7	42
3.	*Filip Hanzely*	Slovensko	7	7	5	7	7	7	40
4.	*Martin Vodička*	Slovensko	7	7	7	7	7	0	35
5.	*Patrik Bak*	Slovensko	7	7	6	7	0	7	34
6.	Michal Buráň	Česká rep.	7	0	7	7	7	5	33
7.	*Jakub Šafin*	Slovensko	7	7	1	7	7	0	29
8.	*Eduard Batmendijn*	Slovensko	7	7	0	7	7	0	28
	Miroslav Stankovič	Slovensko	7	7	0	7	7	0	28
	Štěpán Šimsa	Česká rep.	7	7	7	7	0	0	28
11.	Radovan Švarc	Česká rep.	7	7	6	7	0	0	27
12.	Jakub Skorupski	Poľsko	7	0	0	7	5	7	26
13.	Marek Sokołowski	Poľsko	7	7	4	7	0	0	25
14.	Mark Karpilovskij	Česká rep.	7	7	1	7	0	0	22
15.	David Hruška	Česká rep.	7	7	0	7	0	0	21
	Marcin Kostrzewa	Poľsko	0	7	7	7	0	0	21
	Karol Marcinkowski	Poľsko	7	7	0	7	0	0	21
18.	Josef Svoboda	Česká rep.	7	7	5	1	0	0	20

Štát	1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$
Česká rep.	42	35	26	36	7	5	151
Poľsko	35	35	25	42	19	21	177
Slovensko	42	42	19	42	35	14	194

Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia

Úloha 1.
Daný je tetivový štvoruholník $ABCD$, pričom $|BC| = |CD|$. Nech ω je kružnica so stredom C dotýkajúca sa uhlopriečky BD. Označme I stred kružnice vpísanej trojuholníku ABD. Dokážte, že priamka prechádzajúca bodom I, ktorá je rovnobežná s AB, sa dotýka kružnice ω. (*Kamil Duszenko*)

Úloha 2.
Dokážte, že pre každé reálne číslo $x > 0$ a každé celé číslo $n > 0$ platí

$$x^n + \frac{1}{x^n} - 2 \geqq n^2\Big(x + \frac{1}{x} - 2\Big).$$

(*Kamil Duszenko*)

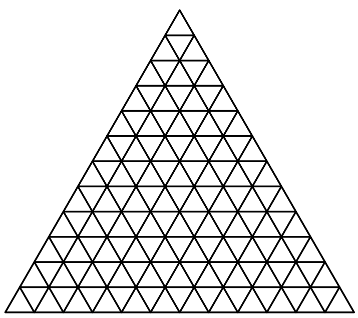
Úloha 3.
Pre každé racionálne číslo r uvažujme tvrdenie: Ak x je reálne číslo také, že čísla $x^2 - rx$ a $x^3 - rx$ sú obe racionálne, tak x je tiež racionálne.

a) Dokážte tvrdenie pre $r \geqq \frac{4}{3}$ a pre $r \leqq 0$.
b) Nech p, q sú rôzne nepárne prvočísla také, že $3p < 4q$. Dokážte, že tvrdenie pre $r = \frac{p}{q}$ neplatí.

(*Jaromír Šimša*)

Úloha 4.
Nech a, b sú celé čísla, pričom b nie je druhou mocninou celého čísla. Dokážte, že $x^2 + ax + b$ môže byť druhou mocninou celého čísla len pre konečne veľa celočíselných hodnôt x. (*Martin Panák*)

Úloha 5.
Trojuholníková sieť rozdeľuje rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky n na n^2 trojuholníkových buniek (obr. 30). Niektoré bunky sú infikované. Bunka, ktorá zatiaľ nie je infikovaná, sa infikuje, ak susedí (stranou) s aspoň dvoma už infikovanými bunkami. Určte pre $n = 12$ najmenší možný počet na začiatku infikovaných buniek, pri ktorom je možné, že po čase budú infikované všetky bunky pôvodného trojuholníka.
(*Radek Horenský*)



Obr. 30

Úloha 6.
Daný je trojuholník ABC a jemu opísaná kružnica. Bod P je stredom oblúka BAC. Kružnica s priemerom CP pretína os uhla BAC v bodoch K, L ($|AK| < |AL|$). Bod M je obrazom bodu L v osovej súmernosti podľa priamky BC. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku BKM prechádza stredom úsečky BC.

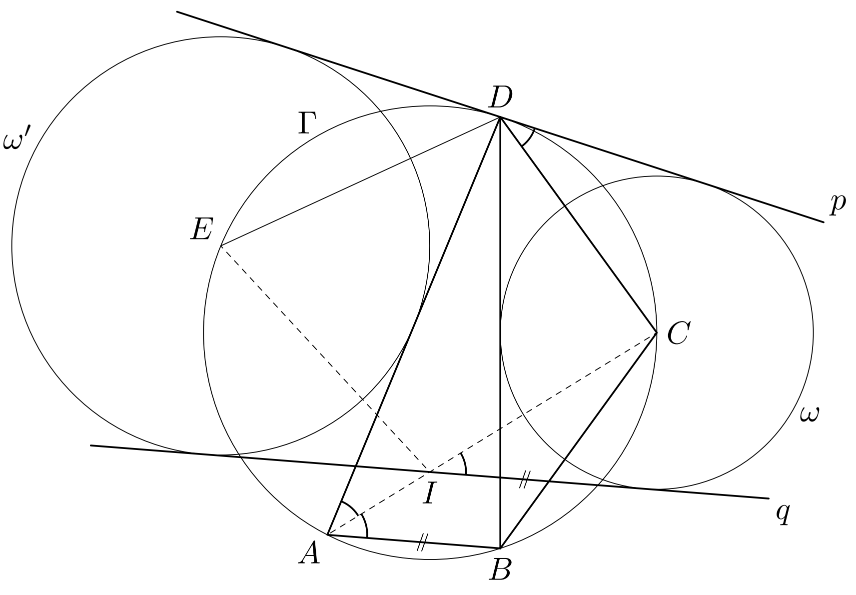
(*Dominik Burek, Tomasz Cieśla*)

Riešenia úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia

Úloha 1.
Označme Γ kružnicu opísanú štvoruholníku $ABCD$ a p priamku, ktorá sa dotýka kružnice Γ v bode D. Keďže C je stredom oblúka BD, z úsekových a obvodových uhlov máme $|\measuredangle(CD,p)| = |\measuredangle CAD| = |\measuredangle BAC| = |\measuredangle BDC|$, a teda priamka p sa dotýka aj kružnice ω. Podobne ak označíme E stred oblúka DA kružnice Γ, dostaneme, že p sa dotýka kružnice ω', ktorá má stred E a dotýka sa strany DA. Preto priamka q, ktorá je obrazom priamky p v osovej súmernosti podľa priamky CE, sa tiež dotýka kružníc ω a ω' (obr. 31). Pritom zo známych vzťahov[6] $|CD| = |CI|$ a $|ED| = |EI|$ dostávame, že aj body D a I sú súmerne združené podľa priamky CE. Takže I leží na priamke q a zostáva dokázať, že $q \parallel AB$. To vyplýva z rovností

$$|\measuredangle(q,IC)| = |\measuredangle(CD,p)| = |\measuredangle CAD| = |\measuredangle BAC|$$

(všetky používané uhly dvoch priamok považujeme za orientované).



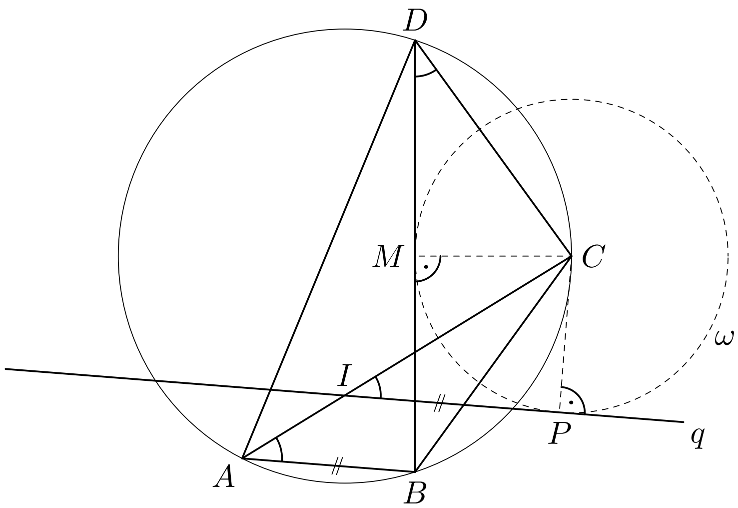
Obr. 31

[6] Je známe, že stred kružnice vpísanej danému trojuholníku leží na kružnici, ktorá má stred v strede oblúka kružnice opísanej a prechádza krajnými bodmi tohto oblúka. Tento fakt možno ľahko nahliadnuť pomocou obvodových uhlov, keďže osi vnútorných uhlov trojuholníka, na ktorých stred vpísanej kružnice leží, pretínajú kružnicu opísanú práve v stredoch oblúkov určených vrcholmi trojuholníka.

Iné riešenie. Označme q priamku, ktorá prechádza bodom I a je rovnobežná s AB. Nech P päta kolmice z bodu C na q a M je stred BD (obr. 32). Zo súhlasných a obvodových uhlov dostávame

$$|\angle CIP| = |\angle CAB| = |\angle CDB| = |\angle CDM|.$$

Keďže $|CD| = |CI|$, sú pravouhlé trojuholníky CDM a CIP zhodné podľa vety *usu*, odkiaľ $|CM| = |CP|$. Z toho už priamo vyplýva dokazované tvrdenie.



Obr. 32

Úloha 2.
Pre $x = 1$ zrejme platí rovnosť. Ďalej bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $y = \sqrt{x} > 1$. Vzhľadom na identitu

$$a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2$$

stačí dokázať nerovnosť

$$y^n - \frac{1}{y^n} \geqq n\left(y - \frac{1}{y}\right),$$

ktorá je ekvivalentná s nerovnosťou $y^{2n} - n(y^{n+1} - y^{n-1}) - 1 \geqq 0$. Jej ľavú stranu vydelíme kladným výrazom $y - 1$ a upravíme na tvar, z ktorého bude jej kladnosť zrejmá:

$$\frac{y^{2n} - 1}{y - 1} - \frac{ny^{n-1}(y^2 - 1)}{y - 1} = \sum_{i=0}^{2n-1} y^i - n(y^{n-1} + y^n) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (y^{2n-1-i} - y^n - y^{n-1} + y^i) = \sum_{i=0}^{n-1} y^i (y^{n-1-i} - 1)(y^{n-i} - 1) \geqq 0.$$

Úloha 3.

a) Nech čísla $s = x^2 - rx$ a $t = x^3 - rx$ sú racionálne. Úpravami dostávame

$$x^2 = s + rx, \quad x^3 = x^2 \cdot x = (s + rx)x = sx + rx^2 = sx + r(s + rx) = \bigl(r^2 + s\bigr)x + rs,$$

a teda

$$t = x^3 - rx = \bigl(\bigl(r^2 + s\bigr)x + rs\bigr) - rx = \bigl(r^2 - r + s\bigr)x + rs.$$

Ak $(r^2 - r + s) \neq 0$ (čiže ak $x^2 - rx + r^2 - r \neq 0$), tak číslo

$$x = \frac{t - rs}{r^2 - r + s}$$

je racionálne.

Odvodili sme, že dané tvrdenie platí práve vtedy, keď rovnica

$$x^2 - rx + r^2 - r = 0 \tag{1}$$

nemá žiadne iracionálne korene. Dodajme, že pre ľubovoľný koreň x rovnice (1) sú hodnoty s a t racionálne:

$$s = x^2 - rx = r - r^2 \quad \text{a} \quad t = 0 \cdot x + rs = rs = r\bigl(r - r^2\bigr).$$

Pokiaľ diskriminant $D = r(4-3r)$ rovnice (1) je menší alebo rovný 0, tá nemá reálne korene alebo má jediný koreň $x = \frac{1}{2}r$, ktorý je racionálny. Keďže $D \leqq 0$ nastáva práve vtedy, keď $r \geqq \frac{4}{3}$ alebo $r \leqq 0$, prvá časť úlohy je vyriešená.

b) Podľa výsledkov prvej časti stačí ukázať, že $D > 0$ a číslo $\sqrt{D}$ je iracionálne. Po úprave máme

$$D = r(4 - 3r) = \frac{p}{q}\left(4 - \frac{3p}{q}\right) = \frac{p(4q - 3p)}{q^2} > 0.$$

Keďže $p \nmid 4q$, je výraz $p(4q - 3p)$ deliteľný prvočíslom p, nie však jeho druhou mocninou, preto tento výraz nie je druhou mocninou prirodzeného čísla a číslo $\sqrt{D} = \sqrt{p(4q - 3p)}/q$ je iracionálne.

Úloha 4.

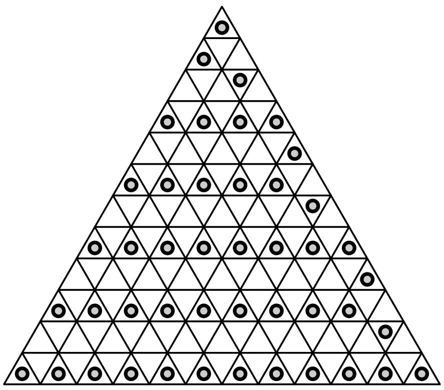
Uvažujme diofantickú rovnicu $x^2+ax+b = y^2$ s neznámymi x a y. Tú možno upraviť na tvar $(2x + 2y + a)(2x - 2y + a) = a^2 - 4b$. Keďže b nie je druhou mocninou celého čísla, je $a^2 - 4b \neq 0$. Existuje len konečne veľa spôsobov zápisu čísla $a^2 - 4b$ v tvare súčinu dvoch celých čísel. Z každého takého rozkladu dostaneme dve nezávislé lineárne rovnice s neznámymi x, y, ktoré majú nanajvýš jedno celočíselné riešenie. Preto existuje len konečne veľa takých x.

Úloha 5.

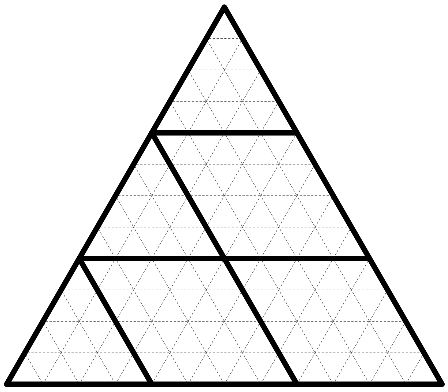
Všimnime si, že pri infikovaní jednej bunky sa obvod infikovanej plochy zmenší aspoň o 1. Nech je na začiatku infikovaných k buniek. Potom obvod infikovanej plochy je nanajvýš $3k$. Na infikovanie všetkých buniek potrebujeme $n^2 - k$ infikovaní a obvod infikovanej plochy sa pritom zmení na $3n$. Preto $3n \leqq 3k - (n^2 - k)$, odkiaľ

$$k \geqq \frac{n^2 + 3n}{4}.$$

Pre $n = 12$ z tohto odhadu dostávame $k \geqq 45$. Jedno možné rozloženie 45 na začiatku infikovaných buniek, ktoré stačia na infikovanie celého systému, je znázornené na obr. 33.

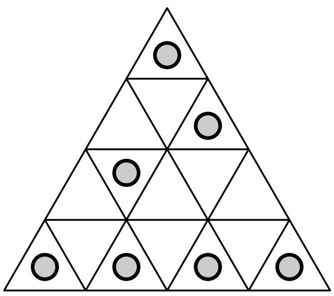


Obr. 33

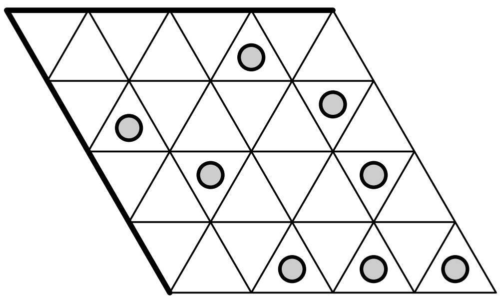


Obr. 34

Inou možnosťou je pokrytie trojuholníka tromi menšími rovnostrannými trojuholníkmi a tromi kosoštvorcami ako na obr. 34. Na infikovanie každého z menších trojuholníkov stačí 7 buniek, na každý kosoštvorec stačí 8 buniek. Možné počiatočné rozloženia infikovaných buniek sú na obr. 35a a 35b. (Každý trojuholník sa celý infikuje nezávisle na tom, čo sa udeje mimo neho. Pre infikovanie celých kosoštvorcov potrebujeme, aby boli infikované plochy „naľavo“ od nich a „nad“ nimi, čo zabezpečia infikované trojuholníky.)



Obr. 35a



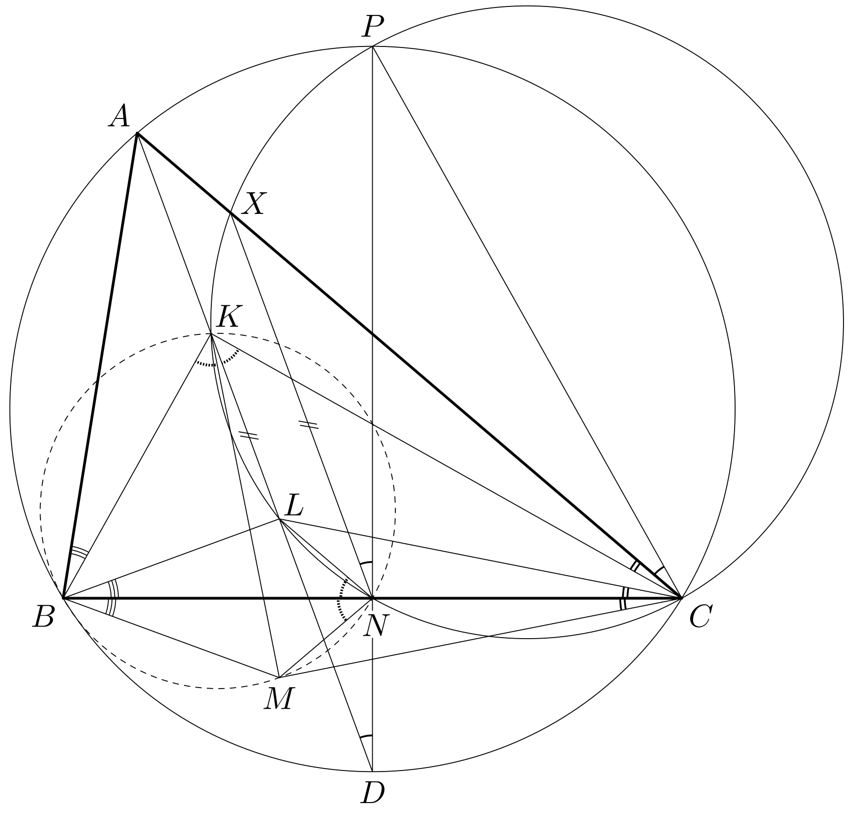
Obr. 35b

Úloha 6.
Označme D stred oblúka BC, N stred strany BC a X pätu kolmice z bodu P na stranu AC. Body X, K, L, N ležia na Tálesovej kružnici s priemerom PC (obr. 36).

Z obvodových uhlov máme $|\measuredangle PNX| = |\measuredangle PCA| = |\measuredangle PDA|$, preto $XN \parallel KL$. Odtiaľ $|LN| = |KX|$, z čoho vyplýva $|\measuredangle LCN| = |\measuredangle KCA|$. Keďže $|\measuredangle BAK| = |\measuredangle LAC|$, sú body K, L izogonálne združené[7] vzhľadom na trojuholník ABC. Z toho dostávame

$$|\measuredangle MBC| = |\measuredangle CBL| = |\measuredangle KBA| \qquad \text{a} \qquad |\measuredangle BCM| = |\measuredangle LCB| = |\measuredangle ACK|.$$

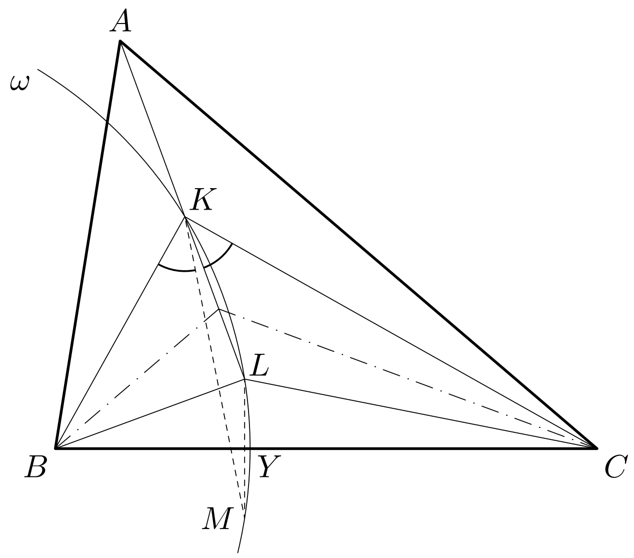
To znamená, že body A, M sú izogonálne združené vzhľadom na trojuholník KBC. S využitím tetivového štvoruholníka $CKLN$ preto $|\measuredangle BNM| = |\measuredangle LNB| = |\measuredangle LKC| = |\measuredangle BKM|$, a teda body B, M, N, K ležia na jednej kružnici.



Obr. 36

Iné riešenie. V predošlom riešení sme ukázali, že body K, L sú izogonálne združené vzhľadom na trojuholník ABC. Preto osi uhlov CBA a BCA sú zároveň osami uhlov

[7] Ak Z je daný bod ležiaci mimo priamok určených stranami trojuholníka ABC, tak obrazy priamok ZA, ZB, ZC v osových súmernostiach postupne podľa osí vnútorných uhlov trojuholníka pri vrcholoch A, B, C sa pretínajú v jednom bode – o ňom hovoríme, že je *izogonálne združený* s bodom Z vzhľadom na trojuholník ABC.



Obr. 37

LBK a KCL. Zo známeho tvrdenia o tom, v akom pomere delí v trojuholníku os uhla protiľahlú stranu, máme $|BK|/|BL| = |KC|/|LC|$. To znamená, že body K, L ležia na Apollóniovej kružnici ω prislúchajúcej bodom B, C. Keďže ω je súmerne združená podľa priamky BC, leží na nej aj bod M (obr. 37). Označme Y priesečník kružnice ω so stranou BC. Potom KY je zároveň osou uhla MKL (pretože Y je stredom oblúka LM) aj uhla BKC (pretože K leží na Apollóniovej kružnici). Odtiaľ $|\measuredangle BKM| = |\measuredangle LKC|$ a dôkaz môžeme dokončiť podobne ako v prvom riešení.

54. Medzinárodná matematická olympiáda

V dňoch 18. – 28. 7. 2013 sa v kolumbijskej Barranquille a Santa Marte uskutočnil 54. ročník Medzinárodnej matematickej olympiády (IMO), teda najstaršej celosvetovej intelektuálnej súťaže žiakov stredných škôl. Zúčastnilo sa jej 527 žiakov z 97 štátov. Zloženie delegácie SR bolo nasledovné:

doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., mim. prof., Žilinská univerzita, vedúci družstva SR,
Filip Sládek, FMFI UK Bratislava, pedagogický vedúci,
doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc., Žilinská univerzita, pozorovateľ.

Podstatu družstva samozrejme tvorilo 6 súťažiacich:

Patrik Bak, Gymnázium Sobrance, 2. ročník,
Eduard Batmendijn, Cirk. g. sv. Mikuláša, St. Ľubovňa, 2. ročník,
Filip Hanzely, Gymnázium A. Prídavka, Sabinov, 4. ročník,
Miroslav Stankovič, Gymnázium Poštová, Košice, 3. ročník,
Jakub Šafin, Gymnázium P. Horova, Michalovce, 4. ročník,
Martin Vodička, Gymnázium Alejová, Košice, 4. ročník.

Obr. 38
(Zľava hore: E. Batmendijn, P. Bak, J. Šafin, M. Stankovič, F. Hanzely; dole: M. Vodička.)

IMO je predovšetkým súťaž jednotlivcov a na prvých dvoch miestach so 41 bodmi spoločne skončili Eunsoo Jee z Kórei a Yutao Liu z Číny; na 3. mieste so 40 bodmi skončili Chung Song Hong z KĽDR a Jeck Lim zo Singapuru. Potom Izraelčan, Číňan, Kórejčan, … Výsledky našich žiakov sú v tabuľke (maximálny počet bodov za každý príklad je 7).

Meno	1.	2.	3.	4.	5.	6.	Súčet	Cena
Patrik Bak	1	0	0	7	2	0	10	ČU
Eduard Batmendijn	0	7	0	7	7	0	21	bronz
Filip Hanzely	7	7	0	7	0	0	21	bronz
Miroslav Stankovič	2	0	0	7	0	0	9	ČU
Jakub Šafin	7	2	0	7	7	0	23	bronz
Martin Vodička	7	7	0	7	7	0	28	striebro

Získali sme teda jedno striebro, tri bronzy a dve čestné uznania, takže každý náš žiak si z Kolumbie – okrem dojmov a nadviazaných priateľstiev – odniesol aj certifikát úspechu.

Vzhľadom na dlhotrvajúcu dominanciu Číňanov (a vo všeobecnosti ázijských krajín, samozrejme okrem Rusov a Američanov) by si niekto mohol myslieť, že matematické schopnosti sú „národné“, ba dokonca možno „rasové“. Z rozhovorov s vedúcimi družstiev, v ktorých sa to ázijskými priezviskami súťažiacich len tak hemží, sa však dá s istotou usúdiť, že to tak nie je! Ak sa totiž nadaný 13-ročný Číňan (Kórejčan, Vietnamec, …) presťahuje do Nórska (Brazílie, Veľkej Británie, Austrálie, Kanady, USA, …), tak tam dostane občianstvo a potom bude úspešným členom tamojšieho IMO-tímu. Lenže ak sa Číňan (Kórejčan, Vietnamec, …) už narodil v Nórsku (Brazílii, Veľkej Británii, Austrálii, Kanade, USA, …), tak jeho šanca na IMO-úspech je podstatne nižšia, lebo neabsolvoval mimoriadne náročnú a nekompromisnú (čínsku, kórejskú, vietnamskú, …) školu, kde je konkurencia obrovská. Aj keď v menšej miere, ale v podstate to isté platí aj o priezviskách ruských a ukrajinských, a donedávna to platilo aj o priezviskách maďarských, poľských, bulharských a rumunských, ktoré sa neraz vyskytovali v najrôznejších družstvách. Lenže v Maďarsku, Poľsku, Bulharsku, Rumunsku – podobne ako u nás a v ČR – sa na školách už upustilo od tvrdej driny a populistické heslo „škola hrou“, ktoré je pre mládež samozrejme veľmi príťažlivé, už prinieslo svoje veľmi trpké ovocie: za svetovou špičkou nemálo zaostávame a pracovití Ázijčania (a nielen oni!) nám ukazujú, čo všetko sa dá poctivou prácou dosiahnuť.

K samotnej zostave družstva SR treba povedať, že na IMO chodia od nás vždy najlepší a v tomto roku východ Slovenska prevalcoval všetko ostatné. Je to však len zaslúžený výsledok cieľavedomej práce tamojších učiteľov, a samozrejme – aj kúska povestného šťastia.

Množstvo zaujímavých informácií sa dá nájsť na webovej stránke *imo-official.org*, a odtiaľ je už ľahké dohľadať všetko ostatné.

Na IMO býva zvykom sledovať aj neoficiálne poradie 6-členných družstiev, ktoré je uvedené v tabuľke (čísla v zátvorke sú uvedené za krajinami, ktoré mali na IMO menší počet účastníkov).

Por.	Štát	Z	S	B	$\sum$	Por.	Štát	Z	S	B	$\sum$
1.	Čína	5	1		208		Rakúsko		1	1	77
2.	Kórejská republika	5	1		204	51.	Gruzínsko			2	75
3.	USA	4	2		190	52.	Azerbajdžan			2	73
4.	Rusko	4	2		187	53.	Filipíny (5)			3	72
5.	KĽDR	2	4		184	54.	Moldavsko			2	71
6.	Singapur	1	5		182	55.	Estónsko			2	67
7.	Vietnam	3	3		180	56.	Srí Lanka			1	65
8.	Taiwan	2	4		176		Tadžikistan			1	65
9.	Spojené kráľovstvo	2	3	1	171	58.	Južná Afrika			2	64
10.	Irán	2	3	1	168	59.	Španielsko			2	63
11.	Japonsko		6		163	60.	Švédsko		1	1	62
	Kanada	2	2	2	163	61.	Bangladéš (4)			3	60
13.	Izrael	1	3	2	161	62.	Kostarika			1	59
	Thajsko	1	4	1	161	63.	Bosna a Hercegovina			1	56
15.	Austrália	1	2	3	148	64.	Cyprus (5)			1	52
16.	Ukrajina	1	3	1	146	65.	Tunisko (5)			1	49
17.	Mexiko		3	3	139	66.	Lotyšsko			1	47
	Turecko	1	2	3	139	67.	Argentína			1	46
19.	Indonézia	1	1	4	138		Fínsko		1		46
20.	Taliansko	1	2	1	137	69.	Ekvádor			1	45
21.	Francúzsko		2	4	136	70.	Paraguaj			2	38
22.	Bielorusko	1	2	3	134	71.	Kirgizstan			1	36
	Maďarsko		2	4	134		Nórsko			1	36
	Rumunsko		3	3	134	73.	Chile (3)			1	35
25.	Holandsko		2	3	133	74.	Macedónsko			1	34
26.	Peru		3	2	132		Slovinsko				34
27.	Nemecko		2	4	127	76.	Írsko				33
28.	Brazília		3	1	124	77.	Dánsko				31
29.	India		2	3	122	78.	Island				27
30.	Chorvátsko	2		2	119	79.	Kosovo				25
31.	Hongkong		1	5	117		Luxembursko (2)			1	25
	Malajzia		2	3	117		Pakistan				25
33.	Kazachstan		1	4	116	82.	Nikaragua (3)				22
34.	Slovensko		1	3	112	83.	Panama (4)				19
	Srbsko	1	1	2	112	84.	Nigéria (1)			1	18
36.	Portugalsko	1		4	111	85.	Maroko (5)				17
37.	Česká republika	1		3	108	86.	Trinidad a Tobago				16
38.	Bulharsko		1	2	101	87.	Lichtenštajnsko (1)			1	15
	Grécko		2	1	101	88.	Portoriko (4)				14
40.	Arménsko		1	1	88		Salvádor (2)				14
	Švajčiarsko			3	88		Sýria (4)				14
42.	Mongolsko			3	84	91.	Kuba (1)				11
	Saudská Arábia			4	84	92.	Venezuela (1)				9
44.	Belgicko		1	2	82	93.	Uruguaj				7
45.	Poľsko		1	1	79	94.	Bolívia (5)				5
46.	Litva			3	78	95.	Čierna Hora (4)				1
	Turkmenistan			4	78		Uganda (5)				1
48.	Kolumbia			2	77	97.	Honduras (1)				0
	Nový Zéland			2	77						

Družstvo SR skončilo so 112 bodmi na 34. mieste spolu so Srbskom, pričom z krajín EÚ za nami zaostali Portugalsko, ČR, Bulharsko, Grécko, Belgicko, Poľsko, Litva, Rakúsko, Estónsko, Španielsko, Švédsko, Cyprus, Lotyšsko, Fínsko (46 bodov, teda len 41 % nášho výkonu; enormne vychvaľovaný tamojší školský systém stačí teda nanajvýš pre základnú školu a aj to len preto, že otázky PISA tvoria severské krajiny; takže na tom systéme sú dobré len platy fínskych učiteľov), Nórsko, Slovinsko, Írsko, Dánsko. Predbehli sme však aj také krajiny, ako napr. Švajčiarsko, domácu Kolumbiu, Nový Zéland, ... a vlastne 2/3 zúčastnených krajín. Takže viac krajín nám závidí, ako nás ľutuje. Za zmienku stojí, že veľké krajiny s obrovskou matematickou tradíciou, Nemecko a Poľsko, dosiahli svoje historicky najslabšie výsledky.

Znovu sa potvrdilo to, čo som písal už dávnejšie a viackrát: treba dobre zrátať obe tzv. ľahké úlohy (č. 1 a č. 4), a ak sa k tomu pridá dobre zrátaná aj jedna z tzv. stredne ťažkých úloh (č. 2 a 5), tak výsledok družstva je už obvykle veľmi dobrý. Na toto sa v príprave sústreďujeme aj my, ale príklady musia počítať žiaci. Platí totiž, že naučiť žiakov spoľahlivo riešiť ťažké úlohy (č. 3 a 6 na IMO) sa v podstate nedá – na to potrebuje mať žiak mimoriadne nadanie. Napr. úlohu č. 6 tento rok vyriešilo len 7 žiakov.

Našim žiakom sa tento rok podarilo vcelku dobre zrátať dokonca obe stredne ťažké úlohy (č. 2 a 5), pričom z najľahšej úlohy č. 4 získali plný počet bodov, ale, bohužiaľ, stratili hodne bodov na ľahkej úlohe č. 1. Škoda, namiesto štyroch medailí sme ich mohli mať možno aj šesť.

Veľkým smoliarom sa stal Wijelath Mohotalage Don Kanchana Nisal Ranasinghe zo Srí Lanky, ktorý získal 13 bodov, takže chýbali mu dva body k bronzovej medaile, ale nakoniec nedostal ani čestné uznanie (ktoré sa udeľuje za 7-bodové, teda kompletné riešenie jednej úlohy), lebo mal len 6 bodov z úlohy č. 1 a 5 bodov z úlohy č. 4 (a ešte 2 body z úlohy č. 2). Súťaž je neúprosná.

Dovolím si aj touto cestou v mene SKMO poďakovať firme VALIN s. r. o., ktorá našej výprave financovala reprezentačné tričká a pridala aj krásne čapice (ako ochranu pred naozaj neúprosným slnkom) a perá na písanie. Ďakujem tiež primátorovi mesta Žilina za darčekové perá pre našich žiakov a vedúcich všetkých delegácií.

Je treba pochváliť usporiadateľov za podmienky, ktoré pripravili žiakom a až na dlhé čakania v horúčave vlastne aj nám, dospelákom. Žiaci boli totiž po celý čas v areáli hotela Irotama s krásnou veľkou plážou na pobreží, spústou ihrísk a s veľkým výberom dostatočného množstva stravy. V žiadnom prípade sa nedá pripísať na vrub usporiadateľom, že v Kolumbii je veľmi ťažké kúpiť akékoľvek pohľadnice, ale asi už vôbec nie je možné kúpiť poštové známky. Dokonca ani na medzinárodnom letisku v Bogote.

Vzhľadom na značný úbytok hodín matematiky na všetkých typoch škôl sa dá očakávať, že v budúcnosti bude čoraz ťažšie dosiahnuť úspech, a ak sa taký úspech aj dosiahne, tak nebude ukazovateľom mimoriadnej kvality nášho školstva, lebo úroveň v matematike a v prírodných vedách bude upadať – úbytok hodín matematiky a prírodných vied, ktoré matematiku používajú, sa bude totiž prejavovať oveľa výraznejšie. Slovenská komisia MO však urobí všetko preto, aby navzdory zhubným účinkom školskej reformy výsledky našich žiakov boli na takýchto súťažiach aspoň obstojné.

S pokračujúcou školskou reformou u nás a s rozvojom vyučovania všade inde, aj v tzv. zaostalých krajinách, to však bude čoraz ťažšie, lebo tam stále považujú školu nie za miesto zábavy, ale za miesto serióznej a tvrdej práce.

Udržanie aspoň dnešnej úrovne vedomostí špičky stredoškolákov bude teda čoraz viac závisieť od nadpráce, ktorú sú schopní vykonávať len niektorí učitelia v rámci odborných krúžkov. Množstvo tej nadpráce však bude silne závislé na množstve financií, ktoré ministerstvo školstva bude ochotné do toho investovať – sústredenia žiakov sa totiž nedajú robiť zadarmo. Musím konštatovať, že (ani) v tomto smere MŠVVŠ SR neplní svoje verejne hlásané sľuby o podpore prírodných vied a matematiky zvlášť, lebo na matematickú olympiádu sa – namiesto valorizovania – dostane menej ako 60 % financií z úrovne spred 10 rokov. A to už nehovorím o špičkových platoch, ktoré sú ako lákadlo pre špičkových mladých (ale aj starých) odborníkov na našich školách prichystané.

Vojtech Bálint

Zadania úloh IMO

Úloha 1.
Dokážte, že ku každej dvojici kladných celých čísel k a n existuje k kladných celých čísel $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (nie nutne rôznych) takých, že

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

(*Japonsko*)

Úloha 2.
Konfigurácia 4027 bodov v rovine sa nazýva *kolumbijská*, ak pozostáva z 2013 červených a 2014 modrých bodov a žiadne tri body tejto konfigurácie neležia na jednej priamke. Ak nakreslíme niekoľko priamok, rovina sa rozdelí na niekoľko oblastí. Rozloženie priamok je *dobré* pre kolumbijskú konfiguráciu, ak sú splnené dve nasledovné podmienky:

- žiadna priamka neprechádza žiadnym bodom konfigurácie;
- žiadna oblasť neobsahuje body oboch farieb.

Nájdite najmenšiu hodnotu k takú, že pre každú kolumbijskú konfiguráciu 4027 bodov existuje dobré rozloženie k priamok. (*Austrália*)

Úloha 3.
Nech kružnica pripísaná k strane BC trojuholníka ABC sa dotýka strany BC v bode A_1. Definujme body B_1 na CA a C_1 na AB analogicky, použijúc pripísané kružnice k stranám CA a AB. Predpokladajme, že stred kružnice opísanej trojuholníku $A_1B_1C_1$ leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC. Dokážte, že trojuholník ABC je pravouhlý. (*Rusko*)

Úloha 4.
Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s ortocentrom H a nech W je vnútorný bod

strany BC. Body M a N sú postupne päty výšok z bodov B a C. Označme ω_1 kružnicu opísanú trojuholníku BWN a nech X je taký bod na ω_1, že WX je jej priemerom. Analogicky označme ω_2 kružnicu opísanú trojuholníku CWM a nech Y je taký bod na ω_2, že WY je jej priemerom. Dokážte, že body X, Y a H ležia na jednej priamke.

(*Thajsko*)

Úloha 5.
Nech $\mathbb{Q}^+$ je množina kladných racionálnych čísel. Nech $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{R}$ je funkcia spĺňajúca nasledovné tri podmienky:

(i) pre všetky $x, y \in \mathbb{Q}^+$ platí $f(x)f(y) \geqq f(xy)$;
(ii) pre všetky $x, y \in \mathbb{Q}^+$ platí $f(x+y) \geqq f(x) + f(y)$;
(iii) existuje racionálne číslo $a > 1$ také, že $f(a) = a$.

Dokážte, že $f(x) = x$ pre všetky $x \in \mathbb{Q}^+$. (*Bulharsko*)

Úloha 6.
Nech $n \geqq 3$ je celé číslo. Uvažujme kružnicu a na nej $n+1$ rovnomerne rozložených bodov. Uvažujme všetky také označenia týchto bodov znakmi $0, 1, \dots, n$, že každý znak je použitý práve raz. Dve takéto označenia sa považujú za zhodné, ak jedno z nich je možné dostať z druhého rotáciou kružnice. Označenie sa nazýva *krásne*, ak pre ľubovoľné štyri znaky $a < b < c < d$ také, že $a+d = b+c$, tetiva spájajúca body označené znakmi a a d nepretína tetivu spájajúcu body označené znakmi b a c. Nech M je počet krásnych označení a nech N je počet usporiadaných dvojíc (x, y) nesúdeliteľných kladných celých čísel takých, že $x + y \leqq n$. Dokážte, že

$$M = N + 1.$$

(*Rusko*)

Riešenia úloh IMO

Úloha 1.
Postupujme indukciou vzhľadom na k. Pre $k = 1$ je tvrdenie zrejmé. Pre k väčšie ako 1 použijeme dva typy rozkladu podľa parity n. Ak n je nepárne, teda $n = 2t-1$ pre nejaké kladné celé číslo t, tak

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = 1 + \frac{2^k - 1}{2t-1} = \left(1 + \frac{2^{k-1} - 1}{t}\right)\left(1 + \frac{1}{2t-1}\right).$$

Ak n je párne, teda $n = 2t$ pre nejaké kladné celé číslo t, tak

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = 1 + \frac{2^k - 1}{2t} = \left(1 + \frac{2^{k-1} - 1}{t}\right)\left(1 + \frac{1}{2t + 2^k - 2}\right).$$

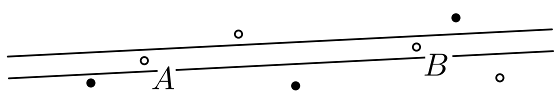
Hľadané $m_1, \dots, m_{k-1}$ dostaneme z indukčného predpokladu pre $n = t$ z prvej zátvorky. Stačí už len položiť $m_k = 2t-1$ v prvom prípade a $m_k = 2t + 2^k - 2$ v druhom prípade (zrejme $2t + 2^k - 2 > 0$).

Úloha 2.

Ukážeme, že hľadaná najmenšia hodnota je 2013.

V prvej časti riešenia uvedieme kolumbijskú konfiguráciu, pre ktorú neexistuje dobré rozloženie s menej ako 2013 priamkami. Rozostavme na kružnicu striedavo 2013 červených a 2013 modrých bodov. Zvyšný jeden bod zvoľme ľubovoľne tak, aby spĺňal podmienky zadania. Takto sme rozdelili kružnicu na 4026 disjunktných oblúkov, pričom pri dobrom rozložení každý z nich musí byť preťatý aspoň raz nejakou priamkou, aby boli oddelené jeho rôznofarebné konce. Keďže však každá priamka pretína kružnicu najviac dvakrát a priesečníkov potrebujeme aspoň je 4026, minimálny počet priamok v dobrom rozložení je $4026/2 = 2013$.

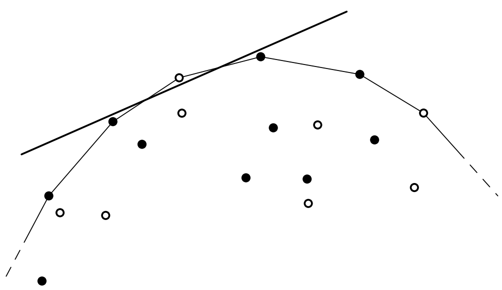
V druhej časti dokážeme, že na vytvorenie dobrého rozloženia stačí pre každú kolumbijskú konfiguráciu 2013 priamok. Použijeme jednoduchý trik $\mathcal{T}$: Majme dva body A a B s rovnakou farbou. Z dvoch priamok rovnobežných s priamkou AB zostrojme pás obsahujúci oba tieto body. Pretože žiadne tri body konfigurácie neležia na jednej priamke a bodov je konečne veľa, vieme pás urobiť dostatočne úzky tak, aby okrem bodov A a B neobsahoval žiadne ďalšie body konfigurácie (obr. 39).



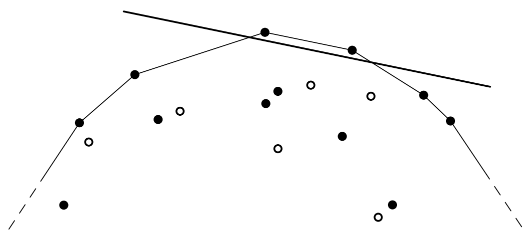
Obr. 39

Uvažujme teraz ľubovoľnú kolumbijskú konfiguráciu a zostrojme konvexný obal jej bodov. Rozlíšime dva prípady.

- ▷ Ak konvexný obal obsahuje aspoň jeden červený bod, tak jednou priamkou vieme tento bod oddeliť od všetkých ostatných bodov (obr. 40a). Zvyšných 2012 červených bodov zoskupíme ľubovoľne do dvojíc a na každú dvojicu použijeme trik $\mathcal{T}$. Stačí nám teda $1 + 2 \cdot (2012/2) = 2013$ priamok.
- ▷ Ak konvexný obal obsahuje iba modré body, zoberieme z neho ľubovoľné dva susedné body (t. j. niektoré susedné vrcholy mnohouholníka tvoriaceho konvexný obal), tie oddelíme jednou priamkou (obr. 40b) a zvyšných 2012 modrých bodov zoskupíme do dvojíc, na ktoré aplikujeme trik $\mathcal{T}$. Opäť nám stačí 2013 priamok.



Obr. 40a



Obr. 40b

Úloha 3.

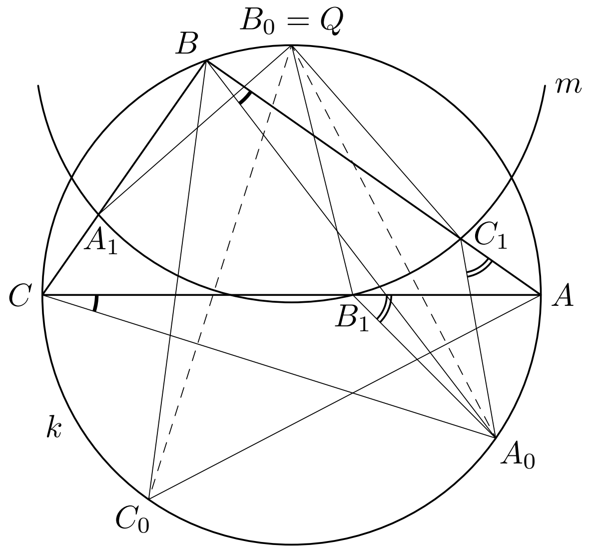
Označme k a m kružnice opísané trojuholníkom ABC a $A_1B_1C_1$. Nech A_0 je stred oblúka CB kružnice k obsahujúceho A; B_0 a C_0 definujeme analogicky. Podľa zadaného predpokladu stred kružnice m, ktorý označíme Q, leží na k.

Lema. Platí $|A_0B_1| = |A_0C_1|$. Body A, A_0, B_1, C_1 ležia na jednej kružnici, pričom body A, A_0 ležia v rovnakej polrovine určenej priamkou B_1C_1. Rovnaké tvrdenie platí po cyklickej zmene označenia.

Dôkaz. Ak $A = A_0$, tak trojuholník ABC je rovnoramenný so základňou BC, čiže $|AB_1| = |AC_1|$ a lema zrejme platí. Predpokladajme ďalej, že $A \neq A_0$.

Z definície bodu A_0 máme $|A_0B| = |A_0C|$. Je známe (a ľahko možno dokázať), že $|BC_1| = |CB_1|$. Zároveň $|\measuredangle C_1BA_0| = |\measuredangle ABA_0| = |\measuredangle ACA_0| = |\measuredangle B_1CA_0|$. Teda trojuholníky A_0BC_1 a A_0CB_1 sú zhodné. Z toho vyplýva $|A_0C_1| = |A_0B_1|$, čím je dokázaná prvá časť lemy.

Taktiež dostávame $|\measuredangle A_0C_1A| = |\measuredangle A_0B_1A|$, pretože sú to zodpovedajúce si vonkajšie uhly pri vrcholoch C_1 a B_1 v zhodných trojuholníkoch A_0BC_1 a A_0CB_1 (obr. 41). Preto body A, A_0, B_1 a C_1 tvoria tetivový štvoruholník s protiľahlými stranami AA_0 a B_1C_1. Tým je lema dokázaná.



Obr. 41

Evidentne body A_1, B_1 a C_1 ležia vnútri nejakej polkružnice na kružnici m, takže trojuholník $A_1B_1C_1$ je tupouhlý. Bez ujmy na všeobecnosti nech tupý uhol je pri vrchole B_1. Potom Q a B_1 ležia v rôznych polrovinách určených priamkou A_1C_1. To isté platí pre body B a B_1. Dokopy tak dostávame, že body Q a B ležia v rovnakej polrovine určenej priamkou A_1C_1.

Všimnime si, že os úsečky A_1C_1 pretína kružnicu k v dvoch bodoch v rôznych polrovinách určených priamkou A_1C_1. Keďže B_0 a Q ležia v rovnakej polrovine, podľa prvého tvrdenia lemy sú totožné. Z prvej časti lemy potom zároveň vyplýva, že priamky QA_0 a QC_0 sú postupne osami úsečiek B_1C_1 a A_1B_1. Preto

$$|\measuredangle C_1B_0A_1| = |\measuredangle C_1B_0B_1| + |\measuredangle B_1B_0A_1| = 2|\measuredangle A_0B_0B_1| + 2|\measuredangle B_1B_0C_0| =$$
$$= 2|\measuredangle A_0B_0C_0| = 180^\circ - |\measuredangle ABC|.$$

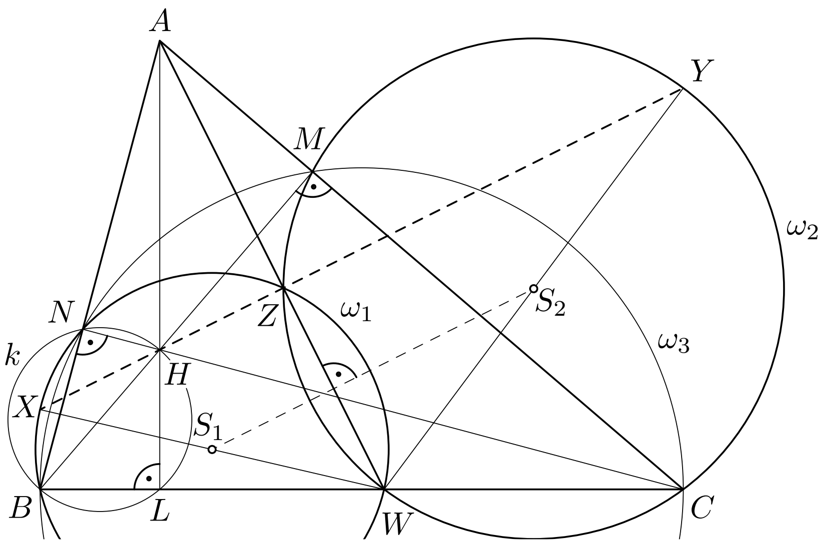
Posledná úprava vyplýva z toho, že A_0 a C_0 sú stredmi oblúkov CB a BA – pri zvyčajnom označení veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka ABC totiž oblúk C_0B kružnice k zodpovedá stredovému uhlu $180° - \gamma$ a oblúk A_0B stredovému uhlu $180° - \alpha$. Oblúk A_0C_0 preto zodpovedá stredovému uhlu $\alpha + \gamma = 180° - \beta = 180° - |\measuredangle ABC|$.

Na druhej strane, z druhej časti lemy máme

$$|\measuredangle C_1B_0A_1| = |\measuredangle C_1BA_1| = |\measuredangle ABC|.$$

Spojením odvodených dvoch rovností dostávame $|\measuredangle ABC| = 90°$.

Úloha 4.
Stredy kružníc ω_1, ω_2 označme S_1, S_2 a ich priesečník rôzny od W nech je Z. Ďalej označme L pätu výšky z bodu A a ω_3 kružnicu nad priemerom BC, ktorá podľa Tálesovej vety prechádza aj bodmi M a N (obr. 42).



Obr. 42

Potenčným stredom[8] trojice kružníc $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ je priesečník chordál BN a CM, teda bod A. Preto body A, Z, W ležia na jednej priamke – chordále kružníc ω_1 a ω_2. Tá je kolmá na spojnicu stredov S_1S_2, ktorá rozpoľuje úsečku ZW. Pritom úsečka S_1S_2 je strednou priečkou v trojuholníku XWY, takže body X, Z, Y ležia na priamke kolmej na priamku určenú bodmi A, Z, W.

Body B, L, H, N ležia podľa Tálesovej vety na kružnici, označme ju k. Z mocnosti bodu A ku kružniciam k a ω_1 máme $|AL| \cdot |AH| = |AB| \cdot |AN| = |AW| \cdot |AZ|$, preto buď sú úsečky HL a ZW totožné, alebo body L, W, Z, H ležia na jednej kružnici. V prvom prípade $H = Z$, čiže dokazované tvrdenie platí triviálne; v druhom prípade podľa Tálesovej vety $|\measuredangle HZW| = 90°$, odkiaľ taktiež dostávame želaný záver.

[8] Je známe, že ak ku každej dvojici kružníc spomedzi danej trojice rôznych po dvoch nesústredných kružníc zostrojíme chordálu, výsledné tri chordály sú buď navzájom rovnobežné, alebo sa pretínajú v jednom bode – tento bod sa potom nazýva *potenčným stredom* danej trojice kružníc.

Úloha 5.
Dosadením $x = 1$ a $y = a$ do (i) dostaneme $f(1) \geqq 1$. Následne jednoduchou matematickou indukciou z (ii) odvodíme

$$f(nx) \geqq nf(x) \tag{1}$$

pre všetky $n \in \mathbb{N}$ a všetky $x \in \mathbb{Q}^+$. Špeciálne pre $x = 1$ máme

$$f(n) \geqq nf(1) \geqq n \tag{2}$$

pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

Podľa (i) platí $f(m/n)f(n) \geqq f(m)$, takže s využitím (2) dostávame $f(q) > 0$ pre všetky $q \in \mathbb{Q}^+$. Preto vzťah (ii) implikuje rýdzu rastúcosť funkcie f, vďaka čomu z (2) máme

$$f(x) \geqq f(\lfloor x \rfloor) \geqq \lfloor x \rfloor > x - 1$$

pre všetky $x \geqq 1$. Použitím matematickej indukcie zo vzťahu (i) obdržíme $f(x)^n \geqq$ $\geqq f(x^n)$, takže

$$f(x)^n \geqq f(x^n) \geqq x^n - 1 \tag{3}$$

pre všetky $x > 1$ a $n \in \mathbb{N}$. Z toho vyplýva nerovnosť

$$f(x) \geqq x \qquad \text{pre všetky } x > 1; \tag{4}$$

formálne ju možno dokázať napríklad takto: Uvažujme ľubovoľné číslo $y \in (1, x)$. Potom $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + y^{n-1}) > n(x - y)$, teda pre dostatočne veľké n máme $x^n - 1 > y^n$. Podľa (3) potom $f(x) > y$.

Zo vzťahov (i) a (4) máme $a^n = f(a)^n \geqq f(a^n) \geqq a^n$, takže $f(a^n) = a^n$. Vezmime ľubovoľné $x \geqq 1$ a vyberme k nemu $n \in \mathbb{N}$ také, že $a^n - x > 1$. Potom z (ii) a (4) dostávame

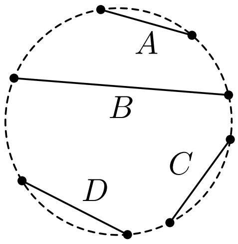
$$a^n = f(a^n) \geqq f(x) + f(a^n - x) \geqq x + (a^n - x) = a^n$$

a preto $f(x) = x$ pre $x \geqq 1$. Napokon pre všetky $n \in \mathbb{N}$ a všetky $x \in \mathbb{Q}^+$ z (i) a (1) dostávame

$$nf(x) = f(n)f(x) \geqq f(nx) \geqq nf(x),$$

odkiaľ $f(nx) = nf(x)$. Preto $f(m/n) = f(m)/n = m/n$ pre všetky $m, n \in \mathbb{N}$.

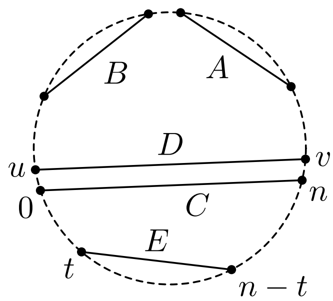
Úloha 6.
Pre dané krásne rozloženie čísel $\{0, 1, \ldots, n\}$ nazveme *k-tetivou* takú (prípadne aj degenerovanú) tetivu, ktorej krajné body majú súčet čísel rovný k. Tri tetivy nazveme *zoradené*, ak jedna z nich oddeľuje zvyšné dve. Skupina viacerých (aspoň štyroch) tetív je zoradená, ak sú každé tri jej tetivy zoradené. Napríklad na obr. 43 trojica tetív A, B, C je zoradená, zatiaľ čo trojica B, C, D nie je.



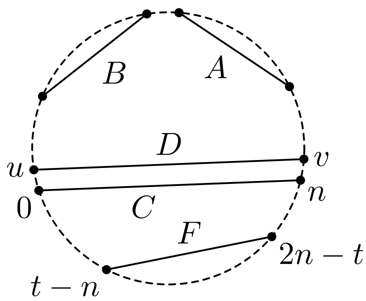
Obr. 43

Lema. V každom krásnom rozložení sú pre ľubovoľné celé číslo k všetky k-tetivy zoradené.

Dôkaz. Budeme postupovať matematickou indukciou vzhľadom na n. Pre $n \leqq 3$ je tvrdenie triviálne. Nech teda $n \geqq 4$ a predpokladajme sporom, že tvrdenie neplatí. Uvažujme krásne rozloženie $\mathcal{S}$ s tromi k-tetivami A, B, C, ktoré nie sú zoradené. Ak by číslo n nebolo v žiadnom z krajných bodov tetív A, B, C, tak odstránením n z $\mathcal{S}$ by sme dostali krásne rozloženie čísel $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, teda A, B, C by boli podľa indukčného predpokladu zoradené. Podobne ak by 0 nebola v žiadnom krajnom bode daných tetív, dostali by sme krásne rozloženie čísel $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ jej odobratím a zmenšením každého zvyšného čísla o 1. Preto čísla 0 aj n ležia v krajných bodoch uvedených tetív. Zrejme ležia obe v krajných bodoch tej istej tetivy, povedzme C, pretože inak by súčet čísel v krajných bodoch každej tetivy nemohol byť rovnaký ($n + x > 0 + y$ pre každé $x > 0$ a $y < n$).



Obr. 44a



Obr. 44b

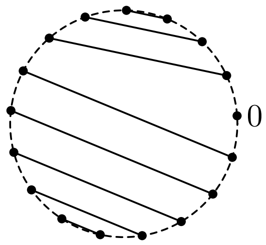
Označme D tetivu s krajnými bodmi označenými číslami u a v, ktoré v $\mathcal{S}$ susedia s číslami 0 a n a sú na rovnakej strane od C ako tetivy A a B. Nech $t = u + v$.

- Ak $t = n$, tak tetivy A, B, D sú nezoradené n-tetivy v krásnom rozložení, ktoré vznikne odstránením n z $\mathcal{S}$, čo je spor s indukčným predpokladom.
- Ak $t < n$, tak t-tetiva spájajúca body s číslami 0 a t nesmie pretínať tetivu D, takže tetiva C oddeľuje číslo t a tetivu D (obr. 44a). Pritom n-tetiva E spájajúca body s číslami t a $n - t$ nesmie pretínať tetivu C, takže A, B, E sú nezoradené n-tetivy, z čoho dostaneme analogický spor.
- Ak $t > n$, tak t-tetiva spájajúca body s číslami n a $t - n$ nesmie pretínať tetivu D, takže tetiva C oddeľuje číslo $t - n$ a tetivu D (obr. 44b). Pritom n-tetiva F

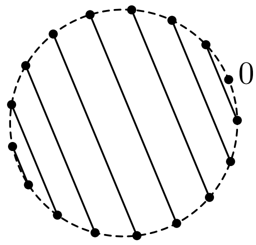
spájajúca body s číslami $t - n$ a $2n - t$ nesmie pretínať tetivu C, takže A, B, F sú nezoradené n-tetivy, čo opäť vedie k sporu.

Tým je lema dokázaná.

Samotné tvrdenie zo zadania budeme dokazovať tiež indukciou. Overiť, že pre $n = 2$ platí, je triviálne. Ďalej uvažujme prípad $n \geqq 3$. Nech $\mathcal{S}$ je ľubovoľné krásne rozloženie čísel $\{0, 1, \ldots, n\}$. Po odstránení n dostaneme krásne rozloženie čísel $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, ktoré označme $\mathcal{T}$. V ňom sú n-tetivy zoradené a ich koncové body obsahujú všetky čísla okrem nuly. Budeme hovoriť, že rozloženie $\mathcal{T}$ je *prvého typu*, ak 0 leží medzi dvomi n-tetivami (obr. 45a). V opačnom prípade (t. j. keď degenerovaná tetiva s koncovými bodmi v čísle 0 je zoradená s ostatnými n-tetivami) je $\mathcal{T}$ rozložením *druhého typu* (obr. 45b). Ukážeme, že každé krásne rozloženie čísel $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ prvého typu pochádza práve z jedného krásneho rozloženia čísel $\{0, 1, \ldots, n\}$ a každé krásne rozloženie druhého typu pochádza práve z dvoch krásnych rozložení.

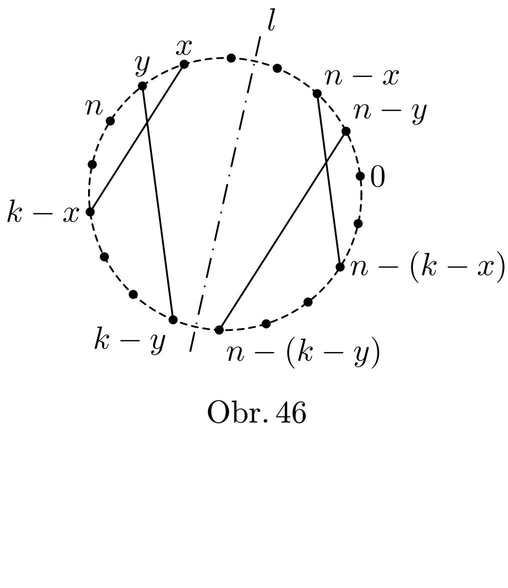


Obr. 45a



Obr. 45b

Ak $\mathcal{T}$ je prvého typu, leží 0 medzi dvoma n-tetivami, povedzme A a B. Keďže tetiva spájajúca čísla 0 a n musí byť v $\mathcal{S}$ zoradená s tetivami A, B, môže číslo n ležať na jedinom mieste – na oblúku medzi A, B na opačnej strane ako 0. Teda existuje jediné rozloženie $\mathcal{S}$, z ktorého mohlo $\mathcal{T}$ vzniknúť. Takto zrekonštruované $\mathcal{S}$ pritom naozaj je krásne. Pre $k < n$ sú totiž všetky k-tetivy v $\mathcal{S}$ zároveň k-tetivami v $\mathcal{T}$, takže sú zoradené. Taktiež n-tetivy sú zrejme v poriadku, pričom vzhľadom na konštrukciu $\mathcal{S}$ vieme, že sú navzájom rovnobežné, t. j. majú spoločnú os, ktorú označme l. To využijeme na zdôvodnenie toho, že aj pre $k > n$ sa žiadne dve k-tetivy nepretínajú. Ak by sa totiž nejaké dve pretínali, tak ich obrazy v osovej súmernosti podľa l by sa tiež pretínali. Avšak číslo x je podľa osi l súmerné s číslom $n - x$, čiže obrazom k-tetív sú



Obr. 46

$(2n-k)$-tetivy (obr. 46), a pre $k > n$ je $2n-k < n$, čo je v spore s tým, čo sme ukázali pred chvíľou.

Ak $\mathcal{T}$ je druhého typu, môžeme číslo n vložiť až na dve rôzne pozície – musí susediť s nulou buď z jednej, alebo z druhej strany. To, že obe takto vzniknuté rozloženia sú krásne, sa ukáže rovnako ako pri prvom type.

Označme M_n počet krásnych rozložení čísel $\{0, 1, \ldots, n\}$ a L_n počet tých z nich, ktoré sú druhého typu. Ukázali sme, že

$$M_n = (M_{n-1} - L_{n-1}) + 2L_{n-1} = M_{n-1} + L_{n-1}.$$

Vzhľadom na indukčný predpoklad ostáva dokázať, že hodnota L_{n-1} je rovná počtu usporiadaných dvojíc (x, y) kladných celých čísel takých, že $x + y = n$ a $\mathrm{nsd}(x, y) = 1$, t. j. že $L_{n-1} = \varphi(n)$.[9]

Uvažujme teda ľubovoľné krásne rozloženie čísel $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ druhého typu. Pozície budeme označovať číslami 0, 1, …, $n-1$ v smere hodinových ručičiek tak, že 0 je na pozícii 0. Pri označovaní pozícií pripúšťame aj čísla mimo intervalu od 0 po $n-1$, pričom ich chápeme modulo n (t. j. pozícia p zodpovedá zvyšku čísla p po delení číslom n). Nech $f(i)$ je číslo na pozícii i. Pozíciu čísla $n-1$ označme a.

Keďže n-tetivy sú zoradené s degenerovanou tetivou majúcou koncové body v čísle 0 a každé číslo okrem nuly je v nejakej n-tetive, sú tieto tetivy všetky rovnobežné, preto

$$f(i) + f(-i) \equiv 0 \pmod{n} \qquad \text{pre všetky } i.$$

Podobne aj $(n-1)$-tetivy sú zoradené a každý bod je v nejakej $(n-1)$-tetive, takže aj tieto tetivy sú všetky rovnobežné a

$$f(i) + f(a-i) = n-1 \qquad \text{pre všetky } i.$$

Preto $f(a-i) \equiv f(-i) - 1 \pmod{n}$, a keďže $f(0) = 0$, postupným dosadením $i = a, 2a, \ldots$ dostávame

$$f(-ak) \equiv k \pmod{n} \qquad \text{pre všetky } k. \tag{1}$$

Keďže f je permutáciou množiny $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, musia hodnoty $-ak$ pre $k = 0, 1, \ldots, n-1$ pokrývať všetky zvyšky po delení číslom n, čo nastáva, len keď $\mathrm{nsd}(a, n) = 1$. Pritom pre dané a nesúdeliteľné s n už predpis (1) jednoznačne určuje rozloženie všetkých čísel. Odtiaľ $L_{n-1} \leqq \varphi(n)$.

Pre dôkaz rovnosti ostáva ukázať, že rozloženie určené predpisom (1) je krásne pre ľubovoľné a spĺňajúce $\mathrm{nsd}(a, n) = 1$. Nech w, x, y, z sú rôzne čísla z množiny $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, pričom $w + y = x + z$. Ich pozície na kružnici spĺňajú $(-aw) + (-ay) = (-ax) + (-az)$, čo znamená že tetivy z w do y a z x do z sú rovnobežné, a teda sa nepretínajú. Preto uvedené rozloženie je krásne a vzhľadom na konštrukciu je zrejme druhého typu.

[9] Funkcia φ, ktorá prirodzenému číslu n priraďuje počet čísel, ktoré sú menšie alebo rovné n a sú s n nesúdeliteľné, sa nazýva Eulerova funkcia. V teórii čísel je známa veľmi často používaná.

7. Stredoeurópska matematická olympiáda

Siedmeho ročníka Stredoeurópskej matematickej olympiády (MEMO), ktorý sa konal od 22. do 28. augusta v maďarskom Vespréme, sa tradične zúčastnilo 60 súťažiacich z 10 krajín. Slovensko reprezentovali

Tamás Balogh, Gymnázium P. Pázmáňa, Nové Zámky, 3. ročník,

Bui Truc Lam, Gymnázium Grösslingová, Bratislava, 2. ročník,

Jakub Dargaj, Gymnázium Poštová, Košice, 3. ročník,

Matúš Halaj, Gymnázium J. G. Tajovského, Banská Bystrica, 3. ročník,

Zhen Ning David Liu, Gymnázium Grösslingová, Bratislava, 3. ročník,

Marko Puza, Gymnázium Poštová, Košice, 3. ročník.

Vedúcim družstva SR bol RNDr. Róbert Hajduk, PhD. (Prírodovedecká fakulta Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach), zástupcom vedúceho bol Mgr. Tomáš Kocák (Inria Lille – Nord Europe).

Súťaž tak ako i po minulé roky pozostávala z dvoch súťažných dní. V prvý deň prebiehala súťaž jednotlivcov. V nej sa našim súťažiacim celkom darilo, keď získali dve strieborné medaily a traja získali bronzovú medailu. V neoficiálnom poradí štátov v súťaži jednotlivcov zvíťazilo Maďarsko pred Poľskom a Českou republikou a štvrtým Slovenskom. V súťaži družstiev (t. j. v súťaži, v ktorej súťažiacich z jedného štátu tvoria jeden tím a teda spolu riešia a odovzdávajú jedno spoločné riešenie každej z ôsmich zadaných úloh) sme zopakovali umiestnenie spred roka a skončili sme na 4. mieste, tentokrát spoločne s Českou republikou. Víťazom v súťaži družstiev sa stalo družstvo Poľska, ktoré, až na jednu úlohu, malo všetky úlohy na plný počet bodov. Druhé skončilo Maďarsko a tretie Nemecko. Z pohľadu umiestnení bol tento ročník pre SR najúspešnejším od začiatku súťaže. Úspešnosť ešte podčiarkol fakt, že štyri z dvanástich súťažných úloh boli navrhnuté Slovenskom a ich autorom bol Patrik Bak, ktorý pred rokom získal medailu na MEMO v Chorvátsku a je ešte len druhákom na strednej škole.

Výsledky družstva SR v súťaži jednotlivcov sú uvedené v prvej tabuľke. Prehľad výsledkov všetkých krajín v súťaži jednotlivcov je v druhej tabuľke. Krajiny sú v nej zoradené podľa súčtu bodov celého družstva, podobne ako pri neoficiálnom poradí krajín na IMO. Výsledky súťaže družstiev sú uvedené v tretej tabuľke.

Meno	I1	I2	I3	I4	Súčet	Cena
Tamás Balogh	0	0	8	8	16	striebro
Bui Truc Lam	0	1	8	8	17	striebro
Jakub Dargaj	0	7	4	1	12	bronz
Matúš Halaj	0	2	1	1	4	
Zhen Ning David Liu	0	0	8	2	10	bronz
Marko Puza	0	1	8	1	10	bronz

Por.	Štát	Z	S	B	ČU	$\sum$	Por.	Štát	Z	S	B	ČU	$\sum$
1.	Maďarsko	3	2			114	6.	Švajčiarsko		2	2	1	65
2.	Poľsko		3	3		90	7.	Chorvátsko		1	1	2	56
3.	Česká rep.		2	1	3	73	8.	Rakúsko			2	4	53
4.	Slovensko		2	3		69	9.	Nemecko			3	2	52
5.	Slovinsko		1	2	3	68	10.	Litva			2	1	38

	Štát	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	$\sum$
1.	Poľsko	8	8	8	8	1	8	8	8	57
2.	Maďarsko	8	3	8	8	8	8	8	2	53
3.	Nemecko	8	4	6	8	1	2	8	3	40
4.	Slovensko	1	0	7	8	1	8	8	0	33
	Česká rep.	2	0	6	8	8	2	7	0	33
6.	Rakúsko	2	0	7	8	2	2	8	0	29
7.	Švajčiarsko	0	0	7	5	6	3	6	0	27
8.	Chorvátsko	1	0	8	8	0	2	6	0	25
9.	Slovinsko	3	0	6	5	2	0	5	0	21
10.	Litva	3	0	7	0	3	0	7	0	20

Účastníci aj vedúci boli ubytovaní v študentskom hosteli Panónskej univerzity vo Vespréme. Samotná súťaž oba dni, ako i zasadnutia jury, prebiehali v priestoroch Panónskej univerzity na fakulte informačných technológií. Pre súťažiacich bolo pripravených viacero sprievodných aktivít, medzi ktoré patrila prehliadka Veprému, prehliadka zoo vo Vespréme ako i kúpanie sa v neďalekom jazere Balaton. V deň vyhodnotenia bola zorganizovaná spoločná exkurzia na niekoľko miest v okolí jazera Balaton, medzi ktoré patrilo kúpeľné mestečko Balatonfüred a dedinka, v ktorej je múzeum červenej papriky, ktorou je Maďarsko preslávené.

Vyhlásenie výsledkov súťaže prebehlo v študentskom hosteli. Medaily a čestné uznania odovzdal tým najlepším významný maďarský matematik v oblasti kombinatoriky a teórie grafov, profesor Zsolt Tuza, ktorý pôsobí na miestnej univerzite.

8. ročník MEMO sa bude konať vo Nemecku v Drážďanoch v septembri 2014.

Róbert Hajduk

Zadania úloh MEMO

Súťaž jednotlivcov

Úloha I-1.

Nech a, b a c sú kladné reálne čísla, pre ktoré platí

$$a+b+c=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Dokážte, že

$$2(a+b+c) \geqq \sqrt[3]{7a^2b+1}+\sqrt[3]{7b^2c+1}+\sqrt[3]{7c^2a+1}.$$

Nájdite všetky trojice (a,b,c), pre ktoré nastáva rovnosť. (*Slovensko, Patrik Bak*)

Úloha I-2.
Nech n je kladné celé číslo. Na šachovnici pozostávajúcej z $4n \times 4n$ políčok je rozmiestnených $4n$ žetónov. Každý riadok a každý stĺpec obsahuje práve jeden žetón. Pri ťahu je žetón presunutý na stranou susediace políčko. Na políčkach môže byť aj viac ako jeden žetón. Cieľom je presunúť žetóny tak, že nakoniec budú umiestnené na všetkých políčkach jednej z dvoch diagonál šachovnice. Určte najmenšie $k(n)$ také, že pre ľubovoľné počiatočné rozloženie žetónov vieme dosiahnuť výsledné rozloženie na najviac $k(n)$ ťahov. (*Nemecko, Bernd Mulansky*)

Úloha I-3.
Je daný rovnoramenný trojuholník ABC taký, že $|AC| = |BC|$. Nech N je vnútorný bod trojuholníka ABC, pre ktorý platí

$$2|\measuredangle ANB| = 180^\circ + |\measuredangle ACB|.$$

Nech D je priesečníkom priamky BN a priamky rovnobežnej s AN prechádzajúcej bodom C. Označme P priesečník osí uhlov CAN a ABN. Dokážte, že priamky DP a AN sú na seba kolmé. (*Chorvátsko, Matija Basić*)

Úloha I-4.
Nech a a b sú kladné celé čísla. Dokážte, že existujú kladné celé čísla x a y také, že

$$\binom{x+y}{2} = ax + by.$$

(*Maďarsko, Bálint Hujter*)

Súťaž družstiev

Úloha T-1.
Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(xf(x) + 2y) = f(x^2) + f(y) + x + y - 1.$$

(*Slovensko, Patrik Bak*)

Úloha T-2.
Nech $x, y, z, w \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sú také, že $x+y \neq 0$, $z+w \neq 0$ a $xy+zw \geqq 0$. Ukážte platnosť nerovnosti

$$\left(\frac{x+y}{z+w} + \frac{z+w}{x+y}\right)^{-1} + \frac{1}{2} \geqq \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right)^{-1} + \left(\frac{y}{w} + \frac{w}{y}\right)^{-1}.$$

(*Švajčiarsko, Raphael Steiner*)

Úloha T-3.
Na jednej strane ulice sa nachádza $n \geqq 2$ domov. Zo západu na východ sú označené číslami od 1 po n. Číslo každého domu je napísané na ceduľke. Jedného dňa sa obyvatelia ulice rozhodli vystreliť si z poštára a pomiešali ceduľky s číslami domov nasledujúcim spôsobom: každej dvojici susedných domov vymenili počas dňa ceduľky s ich aktuálnym číslom práve raz. Koľko rôznych usporiadaní ceduliek s číslami môže na konci dňa nastať? (*Maďarsko, Bálint Hujter*)

Úloha T-4.
Uvažujme konečne veľa bodov v rovine takých, že žiadne tri neležia na jednej priamke. Každý z týchto bodov ofarbíme červenou alebo zelenou farbou tak, že vo vnútri trojuholníka s vrcholmi jednej farby sa nachádza aspoň jeden bod ofarbený druhou farbou. Aký je maximálny počet bodov s touto vlastnosťou? (*Maďarsko, Bálint Hujter*)

Úloha T-5.
Je daný ostrouhlý trojuholník ABC. Skonštruujte trojuholník PQR, pre ktorý platí $|AB| = 2|PQ|$, $|BC| = 2|QR|$, $|CA| = 2|RP|$ a priamky PQ, QR a RP prechádzajú postupne bodmi A, B a C. (*Rakúsko, Gerd Baron*)

Úloha T-6.
Nech K je bod vnútri ostrouhlého trojuholníka ABC taký, že BC je spoločnou dotyčnicou kružníc opísaných trojuholníkom AKB a AKC. Nech D je priesečník priamok CK a AB a bod E je priesečník priamok BK a AC. Označme F priesečník priamky BC a osi úsečky DE. Kružnica opísaná trojuholníku ABC a kružnica k so stredom F a polomerom FD sa pretínajú v bodoch P a Q. Dokážte, že úsečka PQ je priemerom kružnice k. (*Slovensko, Patrik Bak*)

Úloha T-7.
Do tabuľky pozostávajúcej z 2013×2013 políčok sú po riadkoch napísané čísla od 1 do 2013^2. Všetky stĺpce a všetky riadky obsahujúce aspoň jednu z druhých mocnín 1, 4, 9, $\ldots$, 2013^2 naraz odstránime. Koľko políčok tabuľky ostane? (*Rakúsko, Gerd Baron*)

Úloha T-8.
Na tabuli je napísaný výraz

$$\pm\Box\pm\Box\pm\Box\pm\Box\pm\Box\pm\Box.$$

Hráči A a B sa striedajú pri nahrádzaní symbolov $\Box$ kladnými celými číslami. Hráč A začína. Keď sú všetky symboly $\Box$ nahradené, hráč A nahradí každý znak $\pm$ znamienkom $+$ alebo $-$, nezávisle na ostatných nahradeniach znakov $\pm$. Hráč A vyhrá, ak hodnota výrazu na tabuli nie je deliteľná žiadnym z čísel 11, 12, $\ldots$, 18. Inak vyhrá hráč B. Určte, ktorý z hráčov má víťaznú stratégiu. (*Česká republika, Michal Rolínek*)

Riešenia úloh MEMO

Úloha I-1.
Použitím nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom dostávame postupne pre výrazy $\sqrt[3]{7a^2b+1}$, $\sqrt[3]{7b^2c+1}$ a $\sqrt[3]{7c^2a+1}$ odhady

$$\sqrt[3]{7a^2b+1} = 2\cdot\sqrt[3]{a\cdot a\cdot\left(\frac{7b}{8}+\frac{1}{8a^2}\right)} \leqq \frac{2}{3}\left(a+a+\frac{7b}{8}+\frac{1}{8a^2}\right), \tag{1}$$

$$\sqrt[3]{7b^2c+1} = 2\cdot\sqrt[3]{b\cdot b\cdot\left(\frac{7c}{8}+\frac{1}{8b^2}\right)} \leqq \frac{2}{3}\left(b+b+\frac{7c}{8}+\frac{1}{8b^2}\right), \tag{2}$$

$$\sqrt[3]{7c^2a+1} = 2\cdot\sqrt[3]{c\cdot c\cdot\left(\frac{7a}{8}+\frac{1}{8c^2}\right)} \leqq \frac{2}{3}\left(c+c+\frac{7a}{8}+\frac{1}{8c^2}\right). \tag{3}$$

Sčítaním nerovností (1), (2) a (3) dostávame

$$\sqrt[3]{7a^2b+1}+\sqrt[3]{7b^2c+1}+\sqrt[3]{7c^2a+1} \leqq \frac{2}{3}\left(\frac{23(a+b+c)}{8}+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\right).$$

Dosadením rovnosti zo zadania a pár úpravami dostávame

$$\sqrt[3]{7a^2b+1}+\sqrt[3]{7b^2c+1}+\sqrt[3]{7c^2a+1} \leqq 2(a+b+c).$$

Rovnosť v pôvodnej nerovnosti nastáva práve vtedy, keď nastáva rovnosť v (1), (2) a (3), t. j. pre a, b, c, ktoré sú riešením sústavy rovníc

$$a=\frac{7b}{8}+\frac{1}{8a^2},\qquad b=\frac{7c}{8}+\frac{1}{8b^2},\qquad c=\frac{7a}{8}+\frac{1}{8c^2}.$$

Označme $f(x)=\frac{8}{7}(x-1/(8x^2))$, potom

$$b=f(a),\qquad c=f(b),\qquad a=f(c).$$

Dokážeme, že $f(x)$ je neklesajúca funkcia. Nech $u\geqq v$. Potom

$$f(u)-f(v)=\frac{8}{7}\left((u-v)+\frac{1}{8v^2}-\frac{1}{8u^2}\right)=\frac{8}{7}\left((u-v)+\frac{(u-v)(u+v)}{8u^2v^2}\right)=$$
$$=\frac{8}{7}(u-v)\left(1+\frac{u+v}{8u^2v^2}\right)\geqq 0.$$

Keďže sústava rovníc je cyklická, môžeme predpokladať, že $a=\max\{a,b,c\}$. Z toho postupne dostávame

$$a\geqq b \;\Rightarrow\; f(a)\geqq f(b) \;\Rightarrow\; b\geqq c \;\Rightarrow\; f(b)\geqq f(c) \;\Rightarrow\; c\geqq a \;\Rightarrow\; f(c)\geqq f(a).$$

Z toho vyplýva $c \geqq a \geqq b \geqq c$, a teda $a = b = c$.

Ostáva nájsť riešenie pre $f(a) = a$:

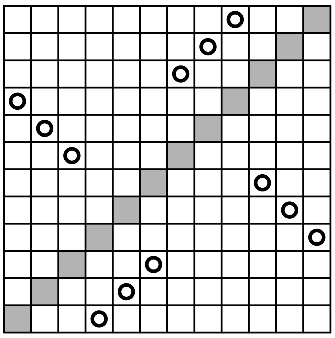
$$\begin{aligned} \frac{8}{7}\left(a - \frac{1}{8a^2}\right) &= a, \\ 8a - \frac{1}{a^2} &= 7a, \\ \frac{1}{a^2} &= a, \\ 1 &= a^3. \end{aligned}$$

Rovnosť nastáva pre $a = b = c = 1$.

Úloha I-2.

Naším cieľom bude ukázať, že $k(n) = 6n^2$. Definujme vzdialenosť políčka od danej diagonály ako najmenší počet ťahov potrebných na presun z políčka na danú diagonálu. Všimnime si, že táto vzdialenosť je rovnaká ako počet horizontálnych, respektíve vertikálnych ťahov potrebných na presun na danú diagonálu. Pre dané rozloženie žetónov definujeme vzdialenosť rozloženia od danej diagonály ako súčet vzdialeností jednotlivých žetónov od danej diagonály.

Najskôr ukážeme nerovnosť $k(n) \geqq 6n^2$. Zvoľme súradnicový systém tak, že vrcholy šachovnice majú súradnice $\pm 2n$. Žetóny umiestnime na políčka so súradnicami stredu spĺňajúcimi $x > 0$ a $y - x = n$. Túto konfiguráciu doplníme žetónmi tak, aby sme otočením o $90°$ dostali to isté rozloženie. (Prípad pre $n = 3$ je znázornený na obr. 47.) Vzdialenosť takéhoto rozloženia od ľubovoľnej diagonály je $2n \cdot n + 2n \cdot 2n = 6n^2$. Preto $k(n) \geqq 6n^2$.



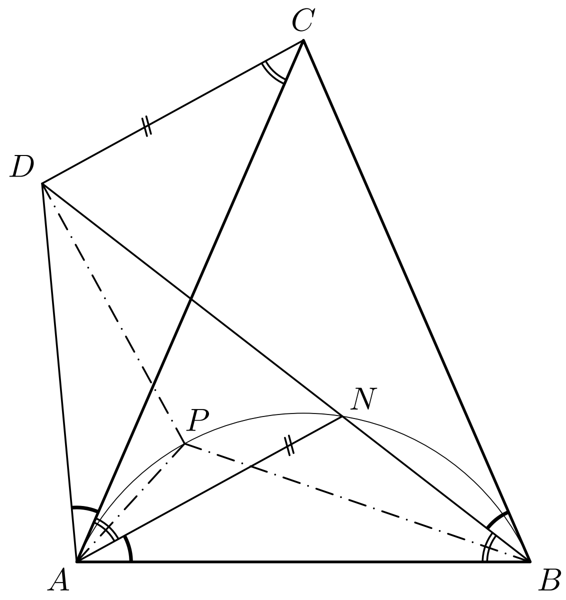
Obr. 47

Pre opačnú nerovnosť ukážeme, že pre ľubovoľné rozloženie žetónov je súčet vzdialeností od oboch diagonál nanajvýš $12n^2$, čiže $k(n) \leqq 6n^2$.

Všimnime si, že súčet vzdialeností žetónu na políčku so stredom (x, y) od oboch diagonál je $2 \cdot \max\{|x|, |y|\}$. Toto číslo môže nadobúdať len hodnoty 1, 3, ..., $4n - 1$ a každú z týchto hodnôt maximálne štyrikrát. Preto maximálny súčet vzdialeností ľubovoľnej konfigurácie od oboch diagonál je nanajvýš

$$4\big((4n-1) + (4n-3) + \ldots + (2n+1)\big) = 4n \cdot 3n = 12n^2.$$

Úloha I-3.
Nech k je taká kružnica, že priamky AC a BC sú jej dotyčnice a dotýkajú sa jej postupne v bodoch A a B. Podmienka zo zadania definujúca bod N implikuje, že N leží na kružnici k.



Obr. 48

Z vety o úsekovom uhle vieme, že $|\measuredangle BAN| = |\measuredangle CBD|$ a $|\measuredangle CAN| = |\measuredangle ABD|$. Z rovnobežnosti DC a AN dostávame $|\measuredangle CAN| = |\measuredangle ACD|$ a preto aj $|\measuredangle ACD| = |\measuredangle ABN|$, z čoho dostávame, že štvoruholník $ABCD$ je tetivový. Z toho vyplýva $|\measuredangle CAD| = |\measuredangle CBD| = |\measuredangle BAN|$ (obr. 48). Preto os uhla CAN je totožná s osou uhla BAD a P je stredom kružnice vpísanej do trojuholníka ABD, čiže DP je osou uhla ADB.

Keďže priamka CD je rovnobežná s AN, dostávame $|\measuredangle AND| = |\measuredangle BDC| = |\measuredangle BAC| = |\measuredangle BAN| + |\measuredangle NAC| = |\measuredangle CAD| + |\measuredangle NAC| = |\measuredangle NAD|$. Preto $|AD| = |ND|$, z čoho vyplýva, že os uhla ADB je osou strany AN, t. j. priamka DP je kolmá na priamku AN.

Poznámky. Prvú časť riešenia je jednoduché dostať dopočítaním uhlov bez použitia, že AC a BC sú dotyčnice k.

Je známe, že priesečník osi strany AN a osi uhla ABN leží na kružnici opísanej trojuholníku ABN. Preto bod P leží na kružnici k. Tento fakt je jednoduché dostať vyjadrením veľkosti uhla APB.

Úloha I-4.
Označme $A = 2a + 1$ a $B = 2b + 1$. Dokazovaná rovnosť sa po úpravách zmení na

$$\frac{B - (x + y)}{x} = \frac{(x + y) - A}{y}.$$

Ak $A = B$, ľubovoľné x, y také, že $x + y = A$, spĺňajú rovnosť.

Zaoberajme sa ďalej prípadom $A < B$. Nech n je celé číslo z intervalu $\langle A, B)$ deliteľné číslom $d = B - A$. Potom $n \neq A$, pretože A je nepárne a d je párne. Zoberme

$$x = (B - n) \cdot \frac{n}{d}, \qquad y = (n - A) \cdot \frac{n}{d}.$$

Teda $n = x + y$ a rovnosť je splnená.

Úloha T-1.
Dosadením $x = y = 0$ dostaneme $f(0) = 1$. Voľbou $x = 0$, $y = z$ získame

$$f(2z) = f(z) + z \tag{1}$$

a pre $x = z$, $y = -z \cdot f(z)$ dostaneme

$$f(z^2) = zf(z) - z + 1. \tag{2}$$

Dosadením $2t$ za z do (2) a použitím (1) máme

$$f(4t^2) = 2tf(2t) - 2t + 1 = 2t(f(t) + t) - 2t + 1 = 2tf(t) + 2t^2 - 2t + 1. \tag{3}$$

Dosadením $2t^2$ za z do (1) a použitím (1) a (2) dostaneme

$$f(4t^2) = f(2t^2) + 2t^2 = f(t^2) + t^2 + 2t^2 = tf(t) - t + 1 + 3t^2. \tag{4}$$

Z porovnania (3) a (4) vyplýva

$$\begin{aligned} 2tf(t) + 2t^2 - 2t + 1 &= tf(t) - t + 1 + 3t^2, \\ tf(t) - t^2 - t &= 0, \\ t(f(t) - t - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Za predpokladu $t \neq 0$ dostávame $f(t) = t + 1$. Pre $t = 0$ sme už skôr ukázali, že $f(0) = 1$. Preto pre všetky $t \in \mathbb{R}$ platí

$$f(t) = t + 1.$$

Úloha T-2.
Najprv odpočítajme 1 od oboch strán a upravme nerovnosť na tvar

$$\frac{(x+y)(z+w)}{(x+y)^2 + (z+w)^2} - \frac{1}{2} \geqq \left(\frac{xz}{x^2 + z^2} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{yw}{y^2 + w^2} - \frac{1}{2} \right),$$

ktorý je ekvivalentný s

$$\frac{(x-z)^2}{x^2 + z^2} + \frac{(y-w)^2}{y^2 + w^2} \geqq \frac{(x+y-z-w)^2}{(x+y)^2 + (z+w)^2}.$$

Táto nerovnosť platí vďaka nerovnostiam

$$\frac{(x-z)^2}{x^2+z^2}+\frac{(y-w)^2}{y^2+w^2} \geqq \frac{((x-z)+(y-w))^2}{x^2+z^2+y^2+w^2} \geqq \frac{(x+y-z-w)^2}{(x+y)^2+(z+w)^2},$$

pričom prvá časť vyplýva z Cauchyho-Schwarzovej nerovnosti a druhá časť z nerovnosti $xy+zw \geqq 0$ zo zadania.

Úloha T-3.
Označme $f(n)$ hľadaný počet usporiadaní pre n domov. Matematickou indukciou dokážeme, že $f(n) = 2^{n-2}$. Pre $n = 2$ to tak je; $f(2) = 2^{2-2} = 1$. Definujme $f(1) = 1$. Ďalej budeme predpokladať, že $n > 2$.

Označme H_i dom s číslom i na začiatku dňa a označme $(i \rightleftarrows i+1)$ výmenu medzi domami H_i a H_{i+1}. Nech H_k je dom, ktorý má na konci dňa ceduľku n. To znamená, že výmeny $(n-1 \rightleftarrows n)$, $(n-2 \rightleftarrows n-1)$, …, $(k \rightleftarrows k+1)$ nasledovali v tomto poradí, až sa ceduľka n ocitla na dome H_k. Navyše výmena $(k-1 \rightleftarrows k)$ musela byť skôr ako výmena $(k \rightleftarrows k+1)$, inak by ceduľka n skončila na niektorom z domov H_1 až H_{k-1}.

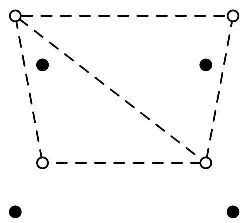
To znamená, že pre každé i spĺňajúce $k \leqq i < n$ bude ceduľka i na dome H_{i+1}, zatiaľ čo ceduľky 1, 2, …, k budú na domoch H_1, H_2, …, H_{k-1} a H_{k+1} v nejakom rozložení. Rovnako by sme postupovali, keby sme mali len domy H_1, H_2, …, H_k; s jediným rozdielom, že na konci dom H_k bude mať ceduľku n. Spolu tak máme $f(k)$ rôznych konečných usporiadaní ceduliek, ak n je na dome H_k (pre $k = 1, \ldots, n-1$).

Dostávame

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) = 1 + \sum_{i=0}^{n-3} 2^i = 2^{n-2}.$$

Úloha T-4.
Odpoveď je 8.

Nazvime množinu pozostávajúcu z červených a zelených bodov dobrou, ak žiadne tri body neležia na jednej priamke a ľubovoľný z trojuholníkov vytvorený z bodov

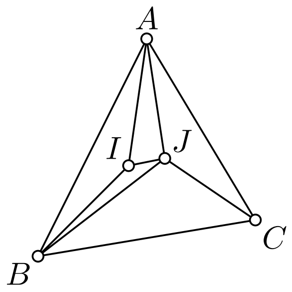


Obr. 49

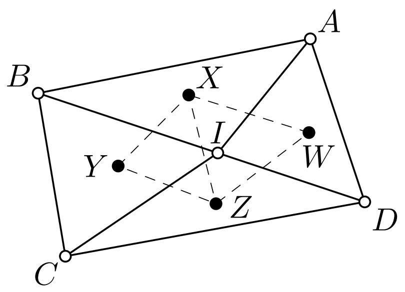
rovnakej farby obsahuje bod druhej farby. Na obr. 49 vidíme takúto množinu s 8 bodmi (červené body sú znázornené prázdnym krúžkom, zelené plným; sú tu zobrazené dva typy jednofarebných trojuholníkov, vďaka symetrii podmienku spĺňa aj zvyšných šesť trojuholníkov).

Chceme dokázať, že dobrá množina môže mať najviac 4 body z každej farby. Dokážeme to dvoma spôsobmi.

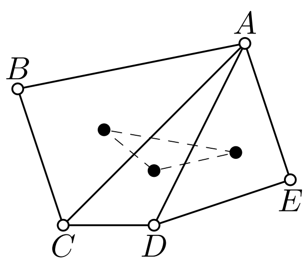
V prvom prípade postupujeme sporom. Nech množina S je kontrapríkladom s minimálnou mohutnosťou. Predpokladajme, že S obsahuje aspoň päť červených bodov. Nech P je nejaký vrchol z konvexného obalu množiny S. Potom P neleží vo vnútri žiadneho jednofarebného trojuholníka a množina $S \setminus \{P\}$ je dobrá. Ale množina S bola najmenším kontrapríkladom, teda $S \setminus \{P\}$ má najviac štyri body z každej farby. Preto S má práve päť červených bodov, všetky vrcholy konvexného obalu množiny S sú červené a S má najviac štyri zelené body. Konvexný obal množiny S je trojuholník, štvoruholník alebo päťuholník. Rozoberieme jednotlivé prípady.



Obr. 50a



Obr. 50b



Obr. 50c

Ak je konvexný obal trojuholník, označme A, B a C jeho vrcholy a I, J červené body vo vnútri trojuholníka. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že priamka IJ pretína strany AB a AC (a nepretína BC). Navyše nech I je k AB bližšie ako J (obr. 50a). Trojuholníky ABI, AIJ, AJC, BIJ a BJC sú trojuholníky vytvorené z červených vrcholov, ktoré nemajú spoločné vnútro. Preto aspoň jeden z týchto trojuholníkov je prázdny, keďže máme najviac štyri zelené body.

Ak je konvexný obal štvoruholník, označme A, B, C, D jeho vrcholy a I nech je zvyšný červený bod vo vnútri. Trojuholníky ABI, BCI, CDI a DAI sú vytvorené z červených vrcholov, nemajú spoločné vnútro a každý z nich má zelený bod vo svojom vnútri. Označme tieto zelené body postupne X, Y, Z, W (obr. 50b). Potom trojuholníky XYZ a ZWX majú zelené vrcholy, ale obidva nemôžu mať bod I (jediný možný červený bod) vo svojom vnútri.

Ak je konvexný obal päťuholník, označme A, B, C, D, E jeho vrcholy. Trojuholníky ABC, ACD a ADE sú tri trojuholníky vytvorené z červených vrcholov, ktoré nemajú spoločné vnútro a každý z nich musí mať zelený bod vo svojom vnútri. Tieto zelené body tvoria trojuholník, ktorý nemá žiaden červený bod vo svojom vnútri (obr. 50c).

Vo všetkých troch prípadoch sme odvodili, že S nie je dobrá množina, čo je spor s naším predpokladom.

Iné riešenie. Najskôr dokážeme pomocné tvrdenie: *Majme dobrú množinu bodov. Ak konvexný obal nejakých červených bodov obsahuje práve x červených bodov a práve y z nich je v jeho vnútri, tak v jeho vnútri je aspoň $x+y-2$ zelených bodov.* (Analogické tvrdenie platí samozrejme aj s vymenenými farbami.)

Dôkaz. Ak konvexný obal nie je mnohouholník (t. j. $x \leqq 2$), tvrdenie je triviálne. Inak uvažujme rozdelenie konvexného obalu na trojuholníky, ktorých vrcholy sú červené body a nemajú vo svojom vnútri červený bod. Označme N počet týchto trojuholníkov.

Potom súčet ich vnútorných uhlov je $N\pi$. Na druhej strane, pre každý vnútorný bod je súčet uhlov okolo neho vždy 2π a body z hranice konvexného obalu tvoria konvexný $(x-y)$-uholník so súčtom vnútorných uhlov $(x-y-2)\pi$. Porovnaním máme

$$N\pi = 2y\pi + (x-y-2)\pi,$$

odkiaľ po úprave dostávame $N = x+y-2$. Každý z N trojuholníkov musí obsahovať jeden zelený bod vo svojom vnútri, z čoho vyplýva dokazované tvrdenie.

Aplikujme tvrdenie na všetkých n červených bodov, pričom m červených bodov je vo vnútri ich konvexného obalu. Dostávame, že vo vnútri konvexného obalu zloženého z červených bodov je aspoň $n+m-2$ zelených bodov. Teraz aplikujme tvrdenie na tieto zelené body a dostávame, že je aspoň $(n+m-2)-2$ červených bodov v ich konvexnom obale. Avšak tieto červené body sú tiež vnútornými bodmi konvexného obalu všetkých červených bodov a teda

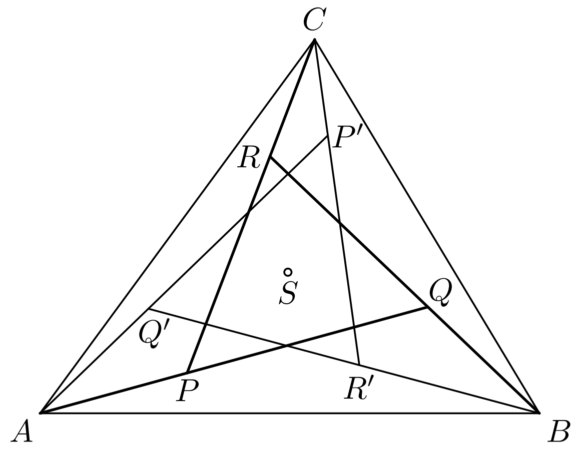
$$(n+m-2)-2 \leqq m.$$

Odtiaľ dostávame $n \leqq 4$ a naše tvrdenie je dokázané.

Poznámka. Uvedené pomocné tvrdenie možno dokázať aj matematickou indukciou vzhľadom na x.

Úloha T-5.

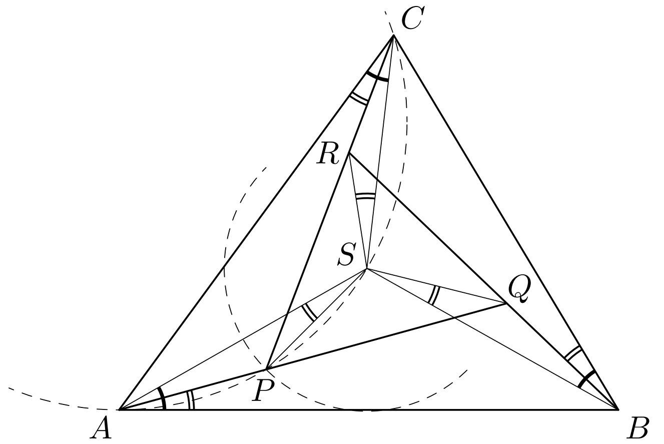
Existujú dva trojuholníky PQR spĺňajúce podmienky zadania (obr. 51). Uvedieme konštrukciu jedného z nich (takého, že bod P leží medzi A a Q).



Obr. 51

Keďže uhly trojuholníkov PQR a ABC sú rovnaké, je $|\measuredangle QAB| = |\measuredangle RBC| = |\measuredangle PCA|$. Označme S Brocardov bod v trojuholníku ABC, t. j. taký bod, že $|\measuredangle SAB| = |\measuredangle SBC| = |\measuredangle SCA|$. Vzhľadom na vlastnosti obvodových a úsekových uhlov sa kružnica opísaná trojuholníku APC dotýka priamky AB. Podobne kružnica opísaná trojuholníku ASC sa dotýka AB. Keďže existuje jediná kružnica prechádzajúca cez C a dotýkajúca sa priamky AB v bode A, dostávame, že $APSC$ je tetivový štvoruholník. Podobne sú tetivové aj štvoruholníky $BQSA$ a $CRSB$.

Ukážeme, že trojuholník APS je podobný trojuholníku BQS. Vieme, že $|\measuredangle SAP| = |\measuredangle SBQ|$, pretože $|\measuredangle SAB| = |\measuredangle SBC|$ a $|\measuredangle PAB| = |\measuredangle QBC|$. Taktiež $|\measuredangle ASP| = |\measuredangle QSB|$, pretože $|\measuredangle ASP| = |\measuredangle ACP| = |\measuredangle QAB| = |\measuredangle QSB|$. Trojuholníky APS a BQS teda majú rovnaké uhly a to isté platí aj pre trojuholník CRS. Otočme trojuholník PQR okolo bodu S o uhol PSA a zobrazme ho v rovnoľahlosti so stredom S a koeficientom $|SA|/|SP|$. Vzhľadom na podobnosť trojuholníkov APS, BQS a CRS bude výsledkom zobrazenia trojuholník ABC (obr. 52).



Obr. 52

Konštrukcia trojuholníka PQR bude preto nasledovná: Najskôr zostrojíme kružnicu prechádzajúcu cez body A, C a dotýkajúcu sa priamky AB; analogicky zostrojíme ďalšie dve kružnice. Priesečníkom týchto troch kružníc je Brocardov bod, označíme ho S. Následne zostrojíme kružnicu so stredom S a polomerom $|SA|/2$. Jej priesečník s oblúkom AS kružnice opísanej trojuholníku ASC neobsahujúcim bod C označíme P. Analogicky zostrojíme body Q a R.

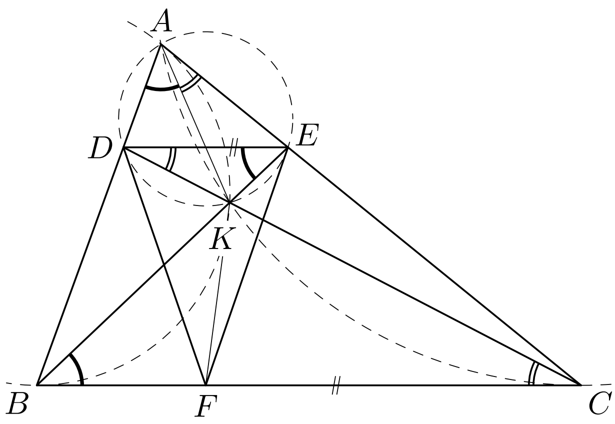
Vieme, že Brocardov bod S vždy existuje a je vo vnútri trojuholníka. Ľahko možno overiť, že oblúky AS, BS a CS využité v konštrukcii sú vo vnútri trojuholníka (napr. oblúk AS sa dotýka strany AB a tiež je vo vnútri tupouhlého trojuholníka ASB). To znamená, že bod P je jednoznačne určený a je vo vnútri trojuholníka ABC. Podobne Q je jednoznačne určený a s využitím definície úsekového uhla dostávame $|\measuredangle PAB| = |\measuredangle QBC|$. Bod R je tiež jednoznačne určený a $|\measuredangle QBC| = |\measuredangle RCA|$. Uhol PCA je taký istý, nakoľko opäť využitím úsekového uhla dostávame $|\measuredangle PCA| = |\measuredangle PAB|$. To znamená, že body R, P a C sú kolineárne.

Úloha T-6.

Priamka BC je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku AKC, takže $|\measuredangle BCD| = |\measuredangle CAK|$. Analogicky $|\measuredangle CBE| = |\measuredangle BAK|$. Preto

$$180^\circ = |\measuredangle KBC| + |\measuredangle KCB| + |\measuredangle BKC| = \measuredangle DAK| + |\measuredangle EAK| + |\measuredangle DKE|$$

a teda $ADKE$ je tetivový štvoruholník. Potom $|\measuredangle KBC| = |\measuredangle DAK| = |\measuredangle DEK|$, čiže $DE \parallel BC$ (obr. 53).



Obr. 53

Všimnime si, že F je jediný bod na BC, pre ktorý sú uhly DFB a CFE rovnaké. Označme F' taký bod na BC, pre ktorý je štvoruholník $BF'KD$ tetivový. Potom

$$|\measuredangle F'KE| = 360^\circ - |\measuredangle EKD| - |\measuredangle DKF'| =$$
$$= 360^\circ - (180^\circ - |\measuredangle BAC|) - (180^\circ - |\measuredangle CBA|) = 180^\circ - |\measuredangle ACB|,$$

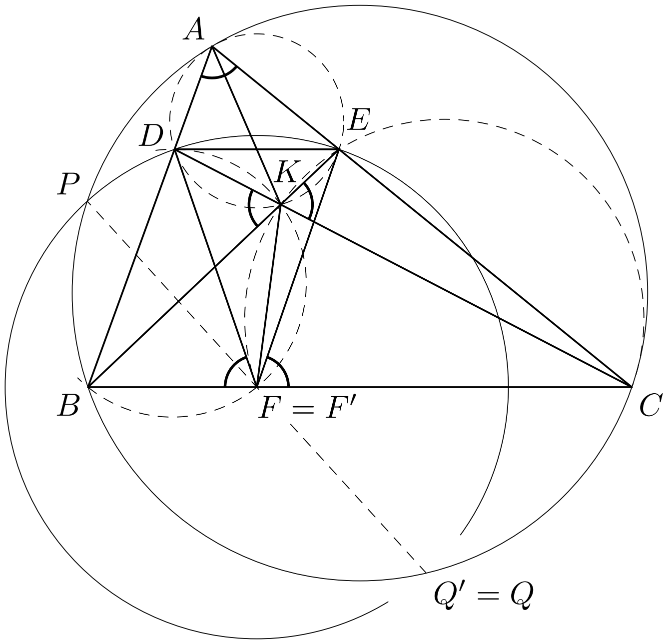
a teda štvoruholník $F'CEK$ je tiež tetivový a

$$|\measuredangle DF'B| = |\measuredangle DKB| = |\measuredangle CKE| = |\measuredangle CF'E|.$$

Z toho vyplýva, že $F = F'$ a $|\measuredangle DFB| = |\measuredangle CFE| = 180^\circ - |\measuredangle BKC| = |\measuredangle BAC|$, takže trojuholníky FBD a FEC sú oba podobné s trojuholníkom ABC, čiže

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|FE|}{|FC|} = \frac{|FB|}{|FD|}.$$

Odtiaľ $|FB| \cdot |FC| = |FD|^2$. Označme Q' priesečník priamky PF a kružnice opísanej



Obr. 54

trojuholníku ABC (obr. 54). Použitím mocnosti bodu F dostávame

$$|FD|^2 = |FB| \cdot |FC| = |FP| \cdot |FQ'| = |FD| \cdot |FQ'|.$$

Preto $|FQ'| = |FD|$ a $Q = Q'$, z čoho už vyplýva dokazované tvrdenie.

Poznámka. Bod F sa nazýva Miquelov bod štvoruholníka $ADKE$.

Úloha T-7.
Nech $m = 503$ a $n = 4m + 1 = 2013$. Všimnime si, že

$$(m-1)n = (m-1)(4m+1) < m \cdot 4m = (2m)^2 < m(4m+1) = mn,$$

takže mocnina $(2m)^2$ je v m-tom riadku.

Poznamenajme, že ak $k \leqq 2m$, tak hodnota výrazu $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ je nanajvýš n, a ak $k \geqq 2m$, je táto hodnota aspoň n. Takže prvých $2m+1$ mocnín je rozmiestnených tak, že nevynechajú žiaden zo za sebou idúcich riadkov a teda prvých $m+1$ riadkov bude odstránených. Na druhej strane posledných $n - (2m-1) = 2m+2$ mocnín je po dvojiciach v rôznych riadkoch. Z toho vyplýva, že prvých $m+1$ riadkov a ďalších $2m$ riadkov bude odstránených a m riadkov zostane.

Stĺpec j bude odstránený práve vtedy, keď j je zvyškom nejakej druhej mocniny po delení číslom $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$. Podľa čínskej vety o zvyškoch to nastane vtedy, keď j je zvyškom nejakej druhej mocniny po delení 3, 11 a 61. Keďže počet vyhovujúcich zvyškov pre tieto tri čísla je postupne 2, 6 a 31, hľadaný počet vyhovujúcich zvyškov po delení 2013 (opäť podľa čínskej zvyškovej vety) je $2 \cdot 6 \cdot 31 = 372$. Počet stĺpcov, ktoré ostanú, je $2013 - 372 = 1641$. Spolu teda ostane $503 \cdot 1641 = 825\,423$ políčok.

Úloha T-8.
Číslo budeme nazývať *dobré*, ak má deliteľa z množiny $\{11, 12, \ldots, 18\}$.

Ukážeme, že hráč B má víťaznú stratégiu. Vo svojom prvom i druhom ťahu nahradí hráč B symbol $\square$ číslom 18!. Vo svojom poslednom ťahu ho nahradí číslom x (určíme ho neskôr), ktoré zabezpečí, že každá možná hodnota výrazu, ktorý získame po určení znamienok, bude v prospech hráča B.

Pri výbere čísla x môžeme pracovať v množine zvyškov po delení číslom 18!. V takomto prípade prvé dva ťahy hráča B sa vo výraze budú počítať ako 0 a znamienko pred nimi výsledok neovplyvní. Pred posledným ťahom hráča B máme osem možných kombinácií pre znamienka pred číslami napísanými hráčom A, čo dáva osem rôznych výsledkov $a_1, a_2, \ldots, a_8$. Ak voľbou čísla x zabezpečíme, že každé z čísel $a_1 + x$, $a_2 + x$, $\ldots$, $a_8 + x$ bude dobré, potom taktiež čísla $a_1 - x$, $a_2 - x$, $\ldots$, $a_8 - x$ budú dobré, pretože pre každé $i \in \{1, \ldots, 8\}$ existuje $j \in \{1, \ldots, 8\}$ také, že $a_i - x = -(a_j + x)$.

Čísla $a_1, \ldots, a_8$ majú rovnakú paritu a teda sa medzi nimi nachádzajú najviac dva rôzne zvyšky po delení číslom 4. Aspoň tri z ôsmich čísel dávajú rovnaký zvyšok po delení tromi, bez ujmy na všeobecnosti nech $a_1 \equiv a_2 \equiv a_3 \pmod 3$. Môžeme tiež predpokladať, že $a_4 \equiv a_3 \pmod 4$.

Hľadané x môžeme na základe čínskej zvyškovej vety vybrať tak, že

$$9 \mid a_1 + x, \quad 5 \mid a_2 + x, \quad 16 \mid a_4 + x, \quad 7 \mid a_5 + x, \quad 11 \mid a_6 + x, \quad 13 \mid a_7 + x, \quad 17 \mid a_8 + x.$$

Na základe tohto výberu x sme zabezpečili, že

$$\begin{aligned} &18 \mid a_1 + x, \quad 15 \mid a_2 + x, \quad 12 \mid a_3 + x, \quad 16 \mid a_4 + x,\\ &14 \mid a_5 + x, \quad 11 \mid a_6 + x, \quad 13 \mid a_7 + x, \quad 17 \mid a_8 + x. \end{aligned}$$

iKS – korešpondenčný seminár SKMO

Korešpondenčný seminár Slovenskej komisie Matematickej olympiády (KS SKMO) vznikol v 24. ročníku MO v školskom roku 1974/75 ako jeden z prvých matematických korešpondenčných seminárov (vtedy ešte ako československý seminár) preto, aby bolo umožnené venovať individuálnu starostlivosť aj tým študentom, ktorí nenavštevovali triedy so zameraním na matematiku. Úlohy tohto seminára svojou náročnosťou prevyšujú akúkoľvek inú matematickú súťaž na Slovensku pre stredoškolákov, seminár je preto dôležitou súčasťou prípravy aj na medzinárodnú matematickú olympiádu (IMO).

Počas svojej existencie prešiel seminár viacerými zmenami. V školskom roku 2003/04 jeho organizovanie prebrali vedúci korešpondenčného seminára KMS a až do 60. ročníka MO bol KS SKMO jeho kategóriou GAMA a KMS oficiálnym seminárom SKMO.

V školskom roku 2011/12 seminár dostal novú tvár pod názvom iKS a stal sa z neho medzinárodný seminár, nakoľko série striedavo pripravujú organizátori zo Slovenska (vedúci KMS; poz. ďalšiu kapitolu) a z Českej republiky (vedúci seminára MKS organizovaného na Matematicko-fyzikálnej fakulte Univerzity Karlovej v Prahe) – svojim záberom sa tak opäť vrátil na územie celého bývalého Československa, kde pôvodne vznikol. Riešiteľská základňa sa stala česko-slovenská, čo má napomôcť motivácii a konkurencii medzi študentmi, ako i odovzdávaniu skúseností medzi vedúcimi.

Súťaž zmenila formát na 6 sérií po 4 úlohy, v každej sérii je jedna úloha z každej zo štyroch tradičných olympiádnych disciplín – algebra, geometria, kombinatorika, teória čísel. Bývajú zoradené podľa odhadovanej náročnosti. Najlepších cca. 10 študentov má na konci ročníka možnosť zúčastniť sa sústredenia, ktoré má bohatý matematický program. Po prvom „skúšobnom" ročníku sa v tomto školskom roku konal druhý ročník iKS a organizátori sa dohodli na presune záveru ročníka tak, aby sa sústredenie konalo tesne pred celoštátnym kolom MO a riešitelia mohli skúsenosti na ňom získané v súťaži využiť. Kvôli tomu mal seminár v tomto ročníku iba 5 sérií. Plný počet bodov za jednu úlohu je 7 – rovnako ako na IMO, spolu sa teda za všetky série dalo získať max. 140 bodov.

Celkové poradie iKS 2012/2013

1. *Martin Vodička*, 4. ročník, Gymnázium Alejová, Košice, SR, 131 bodov
2. *Jakub Šafin*, 4. ročník, Gymnázium Pavla Horova, Michalovce, SR, 118 bodov
3. *Anh Dung Le*, 3. ročník, Gymnázium Tachov, ČR, 107 bodov
4. *Radovan Švarc*, 2. ročník, Gymnázium Česká Třebová, ČR, 79 bodov
5. *Štepán Šimsa*, 4. ročník, Gymnázium Litoměřice, ČR, 75 bodov

Uvádzame všetky príklady tohto ročníka súťaže spolu s riešeniami, často študentskými. Série pripravované v ČR ponechávame v češtine. Zadania poslednej série sú uvedené v angličtine, pretože organizátori súťaž otvorili aj pre prípadných riešiteľov zo zahraničia. Príklady boli zväčša vyberané z národných olympiád či iných súťaží, prípadne z literatúry, pôvod (pokiaľ bol zaevidovaný) uvádzame pri zadaniach.

Všetky informácie o seminári možno nájsť na internetovej stránke *iksko.org*.

Zadania súťažných úloh *i*KS

Prvá séria

G1. Daný je kruh k. Nájdite všetky možné polohy vrcholu A rovnobežníkov $ABCD$, v ktorých $|AC| < |BD|$ a úsečka BD leží vnútri k. (*návrhy na IMO, 1973*)

N1. Nájdite všetky prvočísla p také, že $p(2^{p-1} - 1)$ je k-ta mocnina prirodzeného čísla pre nejaké $k > 1$. (*Singapur, 2003*)

C1. Dané sú celé čísla $1 \leqq a_1, a_2, \ldots, a_m \leqq n$ a $1 \leqq b_1, b_2, \ldots, b_n \leqq m$. Dokážte, že existujú indexy $p \leqq q$ a $r \leqq s$ také, že

$$a_p + a_{p+1} + \ldots + a_q = b_r + b_{r+1} + \ldots + b_s.$$

(*E. Lozansky, C. Rousseau: Winning Solutions*)

A1. Dokážte, že ak reálne čísla a, b, c spĺňajú $a + b + c = 0$, potom

$$\frac{(2a+1)^2}{2a^2+1} + \frac{(2b+1)^2}{2b^2+1} + \frac{(2c+1)^2}{2c^2+1} \geqq 3.$$

Kedy nastáva rovnosť? (*Spojené kráľovstvo, 2011*)

Druhá séria

N2. Je dáno přirozené číslo d. Dokažte, že je možné najít takové kladné reálné číslo c, že pro všechna přirozená čísla $n > d$ platí nerovnost

$$[n-1, n-2, \ldots, n-d] > cn^d.$$

Hranatými závorkami značíme nejmenší společný násobek.

G2. Je dán trojúhelník ABC a dále mimo rovinu danou tímto trojúhelníkem bod S takový, že $|SA| = |SB| = |SC|$. Na úsečkách SA, SB, SC nalezneme postupně body X, Y, Z tak, aby rovina XYZ byla rovnoběžná s rovinou ABC. Buď O střed sféry opsané čtyřstěnu $SABZ$. Dokažte, že přímka SO je kolmá na rovinu XYC. (*Rusko, 1994*)

C2. Pepa s Mirkem hrají deskovou hru. Její součástí je hrací plán a jedna figurka. Na hracím plánu jsou políčka a některé dvojice políček jsou spojeny rourou (roury jsou obousměrné a mohou vést nad sebou a pod sebou)[10]. Na začátku hry položí Mirek figurku na jedno políčko a dále se hráči střídají v tazích. První posune figurku Pepa podél některé roury na další políčko, pak Mirek, atd. Figurku je zakázáno posunout na políčko, na kterém už někdy stála. Kdo nemůže táhnout, prohrál. Dokažte, že když je počet políček na hracím plánu lichý, tak má Mirek vyhrávající strategii. (*Miroslav Olšák*)

A2. Dokažte, že pokud polynom p s reálnými koeficienty splňuje

$$p(x)^2 - 1 = p(x^2 + 1)$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pak to je konstantní polynom. (*Miroslav Olšák*)

Tretia séria

G3. V trojuholníku ABC body K, L ležia postupne na stranách AB, AC. Úsečky BL a CK sa pretínajú v bode P. Dokážte, že ak

$$|BC|^2 = |BK| \cdot |BA| + |CL| \cdot |CA|,$$

tak A, K, L, P ležia na jednej kružnici. (*Baltic Way, 2006*)

A3. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ spĺňajúce

$$f(2f(x) + f(y)) = 2x + y$$

pre všetky $x, y \in \mathbb{Q}$. (*Kanada, 2008*)

C3. Majme $n \geqq 3$ bodov ležiacich v rovine, pričom žiadne tri neležia na jednej priamke. Koľko je možností, ako vybrať $\binom{n-1}{2}$ trojuholníkov tak, aby každý z vybraných trojuholníkov obsahoval stranu, ktorá nie je stranou žiadneho iného z vybraných trojuholníkov (trojuholníky môžu mať vrcholy len z daných n bodov)? (*Baltic Way, 2002*)

N3. Dokážte, že pre každé nepárne prvočíslo p je

$$1^{p-2} + 2^{p-2} + \ldots + \left(\frac{p-1}{2}\right)^{p-2} \equiv \frac{2 - 2^p}{p} \pmod{p}.$$

(*Singapur, 2001*)

[10] V grafové terminologii jsou políčka vrcholy a roury hrany obecného grafu.

Štvrtá séria

C4. Slovem délky n rozumíme uspořádanou n-tici písmen a, b, c. Označme x_n počet všech slov délky n, která neobsahují jako podslovo aa ani bb. Označme y_n počet všech slov délky n takových, že v každé trojici po sobě jdoucích písmen některé z písmen a, b nebo c chybí. Ukažte, že $y_{n+1} = 3x_n$. (*Rumunsko, 1998*)

A4. Najděte všechny dvojice přirozených čísel a, b takových, že neexistuje nekonečná posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňující rekurentní vztah

$$x_{n+1} = \frac{2x_n - 1}{1 - x_n},$$

jejíž první člen je F_a/F_b, kde F_k značí k-té Fibonacciho číslo. (*Poľsko, 1998*)

N4. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel p takových, že pro každé z nich existuje přirozené číslo n_p, které nedělí $p-1$, a přitom $n_p! + 1$ je dělitelné p. (*Moldavsko, 2007*)

G4. Uvnitř trojúhelníku ABC zvolme bod P. Označme průsečíky polopřímek AP, BP, CP s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC postupně A_1, B_1, C_1. Dále označme A_2, B_2, C_2 obrazy bodů A_1, B_1, C_1 ve středových souměrnostech daných postupně středy stran BC, CA, AB. Dokažte, že ortocentrum trojúhelníku ABC a body A_2, B_2, C_2 leží na jedné kružnici. (*Bulharsko, 2012*)

Piata séria

G5. Let ABC be a triangle inscribed in a circle ω and P a variable point on the arc BC of ω not containing vertex A. Denote by I, J the incenters of triangles PAB, PAC, respectively. Prove that as P varies,

a) the circles with diameters IJ all have a common point,
b) the midpoints of the segments IJ all lie on a single circle,
c) the circumcircles of the triangles PIJ all have a common point.

(*Irán, 1997*)

A5. Let $n \geqq 2$. Given that $x_1, \ldots, x_n$ are positive real numbers satisfying $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$, determine (in terms of n) the minimal possible value of the expression

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^5}{-x_j + \sum_{k=1}^{n} x_k}.$$

(*Turecko, 1997*)

N5. Let $n \geqq 2$ and let $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + 1$ be a polynomial with positive integer coefficients such that $a_k = a_{n-k}$ for $k = 1, \ldots, n-1$. Prove that there exist infinitely many pairs (x, y) of positive integers such that both $x \mid P(y)$ and $y \mid P(x)$. (*Rumunsko, 1997*)

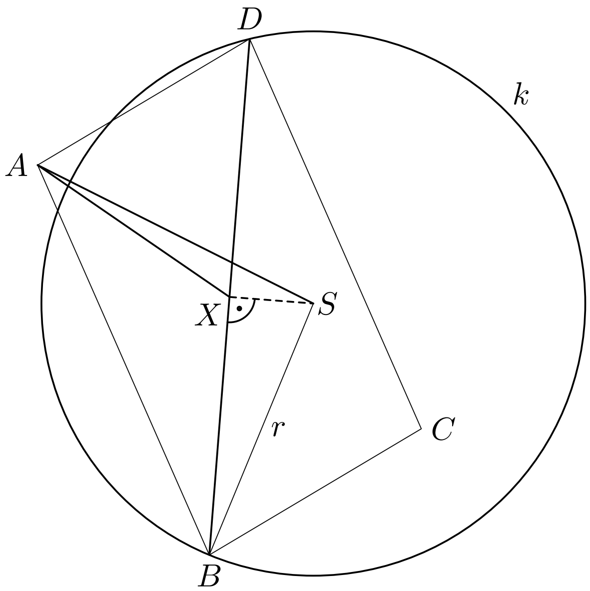
C5. Czechoslovakia is a country with at least one village in which some pairs of villages are connected by roads. Mirek the baker founded his M-Bakery company and wants to build stores in several villages (at most one store per village) in such a way that every citizen of Czechoslovakia who can't buy M-croissants in their own village can buy them in one of the neighbouring ones. Prove that the number of ways to do so is odd.

Riešenia súťažných úloh *i*KS

PRVÁ SÉRIA

G1.

Celé riešenie rozdelíme do dvoch krokov. Prvý krok bude ukázať, že vzdialenosť bodu A od stredu S zadanej kružnice k je ostro menšia ako $r\sqrt{2}$, kde r je polomer kružnice k. Druhý krok bude konštrukcia množiny bodov A, teda ukážeme, že množina bodov, ktoré spĺňajú podmienku zo zadania, je kruh bez hranice s polomerom $r\sqrt{2}$ a stredom S.



Obr. 55

Predpokladajme, že máme skonštruovaný rovnobežník $ABCD$, ktorý vyhovuje zadaniu. Nech X je stred BD. Ďalej pripusťme, že body B a D môžu ležať na kružnici k, teda nech BD je tetiva kružnice k (obr. 55). Ak by neležali, môžeme posunúť celý rovnobežník $ABCD$ ďalej od S a tým zväčšiť vzdialenosť bodu A od S. Teraz skúsme zhora odhadnúť vzdialenosť bodu A od S. Z trojuholníkovej nerovnosti vieme, že

$$|SA| \leqq |XA| + |SX|.$$

Zo zadania máme $|XA| < |XB|$, a teda

$$|XA| + |SX| < |XB| + |SX|.$$

Ďalej vieme, že priamka SX je kolmá na BD, a teda použitím Pytagorovej vety dostaneme $|SX| = \sqrt{r^2 - |XB|^2}$. Po dosadení do nerovnosti teda máme

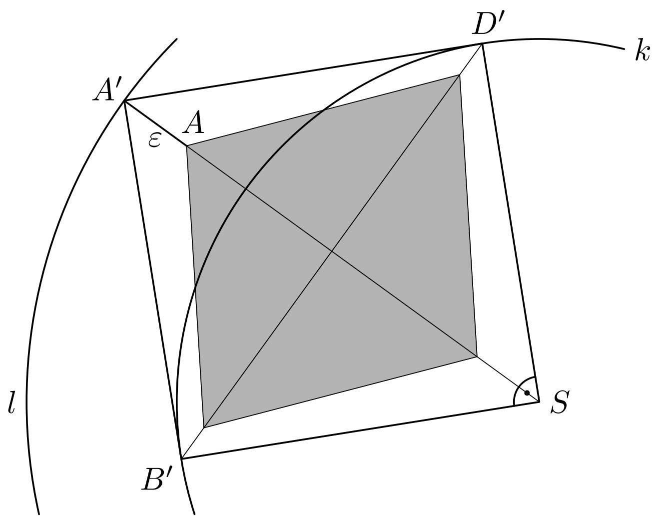
$$|XA| + |SX| < |XB| + |SX| = |XB| + \sqrt{r^2 - |XB|^2}.$$

Posledný výraz môžeme ešte odhadnúť nerovnosťou medzi kvadratickým a aritmetickým priemerom a dostaneme

$$|XB| + \sqrt{r^2 - |XB|^2} \leqq 2\sqrt{\frac{|XB|^2 + r^2 - |XB|^2}{2}} = r\sqrt{2}.$$

Spojením všetkých nerovností dostaneme $|SA| < r\sqrt{2}$. Nech l je kružnica so stredom S a polomerom $r\sqrt{2}$. Stačí ukázať, že ľubovoľný bod vo vnútri kružnice l vyhovuje zadaniu.

Najskôr ukážeme, že vieme zostrojiť taký rovnobežník $ABCD$ spĺňajúci podmienky zadania, že bod A bude ľubovoľne blízko ku kružnici l. Vezmime teda takú tetivu $B'D'$ kružnice k, že uhol $B'SD'$ je pravý. Zostrojme štvorec $B'SD'A'$. Zrejme bod A' leží na kružnici l. Na úsečke SA' zvoľme bod A tak, že $|AA'| = \varepsilon$ a na úsečke $B'D'$ zvoľme body B a D tak, aby $|BB'| = |DD'| = \varepsilon/2$. Bod C zostrojíme ako obraz bodu A v stredovej súmernosti podľa stredu úsečky BD. Takto vznikne rovnobežník $ABCD$, pričom bod A je ľubovoľne blízko ku kružnici l (obr. 56). Ak by sme ale ε volili ľubovoľne v intervale



Obr. 56

$(0, |B'D'|/2)$, vedeli by sme zostrojiť bod A v ľubovoľnej vzdialenosti medzi stredom úsečky $B'D'$ a kružnicou l. Navyše, ak vieme zostrojiť bod A v nejakej vzdialenosti od S, tak vieme tento bod otočiť okolo S o ľubovoľný uhol. Tento poznatok spolu s tým, že bod A vo vnútri k vieme zostrojiť jednoducho tak, že zostrojíme malý rovnobežník $ABCD$, aby bol celý v k, nám dáva konštrukciu rovnobežníka $ABCD$ pre ľubovoľnú polohu bodu A vnútri kružnice l. Teda riešením je množina $\{A; |SA| < r\sqrt{2}\}$.

N1.

Ľahko zistíme, že $p = 3$ je riešením, a naopak $p = 2$ nevyhovuje. Ďalej nech $p \geqq 5$, z čoho $(p-1)/2$ je prirodzené číslo väčšie ako 1 a výraz zo zadania sa rovná

$$p(2^{(p-1)/2} - 1)(2^{(p-1)/2} + 1).$$

Keďže čísla $2^{(p-1)/2}-1$ a $2^{(p-1)/2}+1$ sú nesúdeliteľné, práve jedno z nich je k-ta mocnina nejakého nepárneho prirodzeného čísla $a > 1$. V prvom prípade dostaneme podmienku

$$2^{(p-1)/2} - 1 = a^k \iff 2^{(p-1)/2} - a^k = 1$$

a v druhom

$$2^{(p-1)/2} + 1 = a^k \iff a^k - 2^{(p-1)/2} = 1.$$

Toto sa dá odbiť na jeden riadok. Totiž podľa Mihăilescuho vety (známej tiež ako Catalanova hypotéza) môže nastať iba druhá možnosť pre $(p-1)/2 = 3$. Ľahko overíme, že druhé možné riešenie $p = 7$ naozaj vyhovuje všetkým podmienkam našej úlohy.

Ukážme, ako postupovať bez uvedenej vety (podľa *Radovana Švarca*).

▷ Nech $2^{(p-1)/2} - 1 = a^k$. Máme

$$2(2^{(p-3)/2} - 1) = 2^{(p-1)/2} - 2 = a^k - 1 = (a-1)(a^{k-1} + a^{k-2} + \ldots + a + 1).$$

Keďže výraz naľavo je deliteľný dvoma, ale nie štyrmi, musí byť práve jedna zo zátvoriek párna. Ale a je nepárne, teda druhá zátvorka musí byť nepárna, preto k musí byť tiež nepárne. S touto vedomosťou upravme výraz ešte inak:

$$2^{(p-1)/2} = a^k + 1 = (a+1)(a^{k-1} - a^{k-2} + \ldots - a + 1).$$

Z nepárnosti druhej zátvorky dostávame $2^{(p-1)/2} = a + 1$ a

$$0 = a^{k-1} - a^{k-2} + \ldots - a = (a-1)(a^{k-2} + a^{k-4} + \ldots + a^3 + a).$$

Nakoniec z kladnosti druhej zátvorky posledného výrazu usúdime $a = 1$, čo vedie na prípad $p = 3$.

▷ Nech $2^{(p-1)/2} + 1 = a^k$. Z rovnosti

$$2^{(p-1)/2} = (a-1)(a^{k-1} + a^{k-2} + \ldots + a + 1)$$

vyplýva párnosť k, preto môžeme písať $2^{(p-1)/2} = m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$. Obe zátvorky sú mocniny dvoch, odkiaľ $m = 3$ a $p = 7$, čo overíme, že vyhovuje.

C1.

V príklade chceme skúmať súčty postupností, preto sa ponúka definovať postupnosti čiastočných súčtov $\{A_i\}_{i=0}^m$ a $\{B_j\}_{j=0}^n$, pričom

$$A_0 = 0, \quad A_i = a_1 + \ldots + a_i, \qquad B_0 = 0, \quad B_j = b_1 + \ldots + b_j.$$

Stačí ukázať, že existujú také $0 \leqq c_1 < c_2 \leqq m$ a $0 \leqq d_1 < d_2 \leqq n$, že $A_{c_2} - A_{c_1} = B_{d_2} - B_{d_1}$.

Bez ujmy na všeobecnosti nech $B_n \geqq A_m$. Pre každé $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ sa pozrime na postupnosť $\{S_j\}_{j=0}^n$ definovanú predpisom $S_j = A_i + B_j$. Týchto postupností je $m + 1$

a každá z nich obsahuje $n+1$ čísel. Vezmime jednu ľubovoľnú z nich pre pevné i. Rozdiel dvoch po sebe idúcich členov môže byť maximálne m, lebo

$$S_{j+1} - S_j = (A_i + B_{j+1}) - (A_i + B_j) = B_{j+1} - B_j = b_{j+1} \leqq m.$$

Prvý člen odhadneme zhora číslom A_m, pretože $S_0 = A_i + B_0 = A_i \leqq A_m$. Na druhej strane posledný člen je aspoň A_m, pretože $S_n = A_i + B_n \geqq B_n \geqq A_m$.

Pozrime sa na interval $\langle A_m, A_m + m)$. Každá postupnosť má aspoň jeden člen v tomto intervale, pretože prvý člen je najviac A_m, posledný člen je aspoň A_m a krok v postupnosti je maximálne m. Keďže máme $m+1$ postupností a náš interval obsahuje iba m čísel, podľa Dirichletovho princípu existujú dve rôzne postupnosti, ktoré obsahujú to isté číslo. Inak povedané, pre nejaké $0 \leqq c_1 < c_2 \leqq m$ existujú $0 \leqq d_1, d_2 \leqq n$ také, že $A_{c_1} + B_{d_2} = A_{c_2} + B_{d_1}$. Úpravou dostaneme $A_{c_2} - A_{c_1} = B_{d_2} - B_{d_1}$, z čoho hneď vyplýva $d_1 < d_2$, čím je dôkaz ukončený.

A1.

Zrejme vždy nájdeme dve neznáme s rovnakým znamienkom. Bez ujmy na všeobecnosti nech sú to a a b. Vyjadrime $c = -a-b$. Od tretieho zlomku aj od pravej strany odčítame číslo 3 a ekvivalentne upravujeme:

$$\frac{(2a+1)^2}{2a^2+1} + \frac{(2b+1)^2}{2b^2+1} + \frac{(2(-a-b)+1)^2}{2(-a-b)^2+1} - 3 \geqq 3 - 3,$$

$$\frac{4a^2+4a+1}{2a^2+1} + \frac{4b^2+4b+1}{2b^2+1} + \frac{4(a+b)^2 - 4(a+b) + 1 - 6(a+b)^2 - 3}{2(a+b)^2+1} \geqq 0,$$

$$\frac{4a^2+4a+1}{2a^2+1} + \frac{4b^2+4b+1}{2b^2+1} \geqq \frac{2(a+b)^2 + 4(a+b) + 2}{2(a+b)^2+1},$$

$$\frac{4a^2+4a+1}{2a^2+1} + \frac{4b^2+4b+1}{2b^2+1} \geqq \frac{2a^2+4a+1+2b^2+4b+1+4ab}{2(a+b)^2+1}.$$

Z toho vidno, že stačí „zmeniť“ $4ab$ na $2a^2 + 2b^2$ a dostaneme na pravej strane čitateľ rovný súčtu čitateľov z ľavej strany. Platí

$$(a-b)^2 \geqq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 2ab + b^2 \geqq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2a^2 + 2b^2 \geqq 4ab.$$

Kvôli kladnosti výrazu $2(a+b)^2 + 1$ pravú stranu nezmenšíme, ak $4ab$ nahradíme výrazom $2a^2 + 2b^2$, čiže stačí dokázať silnejšiu nerovnosť

$$\frac{4a^2+4a+1}{2a^2+1} + \frac{4b^2+4b+1}{2b^2+1} \geqq \frac{4a^2+4a+1+4b^2+4b+1}{2(a+b)^2+1}.$$

Rozdeľme ju na dve nerovnosti

$$\frac{4a^2+4a+1}{2a^2+1} \geqq \frac{4a^2+4a+1}{2(a+b)^2+1} \qquad \text{a} \qquad \frac{4b^2+4b+1}{2b^2+1} \geqq \frac{4b^2+4b+1}{2(a+b)^2+1}.$$

Tieto našťastie platia, a teda aj ich súčet platí. Totiž z toho, že a, b majú rovnaké znamienko, dostaneme $|a+b| \geqq |a|$. Odtiaľ

$$2(a+b)^2 + 1 = 2|a+b|^2 + 1 \geqq 2|a|^2 + 1 > 0$$

a $4a^2 + 4a + 1 = (2a+1)^2 > 0$, vďaka čomu platí prvá čiastková nerovnosť a analogicky aj druhá.

Ostáva vyriešiť, kedy nastáva rovnosť. Úpravy na začiatku boli ekvivalentné, čiže rovnosť v pôvodnej nerovnosti nastáva práve vtedy, keď „nahradením“ nič nestratíme a zároveň v oboch čiastkových nerovnostiach nastáva rovnosť. Z prvej podmienky dostaneme podmienku $a = b$ a vyšetrovanie čiastkových nerovností sa redukuje na vyšetrovanie jednej nerovnosti

$$\frac{4a^2+4a+1}{2a^2+1} \geqq \frac{4a^2+4a+1}{2(2a)^2+1} \quad\iff\quad \frac{(2a+1)^2}{2a^2+1} \geqq \frac{(2a+1)^2}{4a^2+1}.$$

Máme dva prípady – čitatele nulové alebo rovnaké menovatele. Prvý prípad nastáva pre $a = -\frac{1}{2}$ a druhý pre $a = 0$. Všetky prípady rovnosti preto realizujú trojice $(0,0,0)$ a permutácie $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$.

Iné riešenie. Platí

$$\begin{aligned} &(b-c)^2 \geqq 0 \quad\Leftrightarrow\quad b^2+c^2 \geqq 2bc \quad\Leftrightarrow\quad 2(b^2+c^2) \geqq (b+c)^2 \quad\Rightarrow \\ &\Rightarrow\quad \tfrac{4}{3}a^2 + \tfrac{4}{3}(b^2+c^2) \geqq \tfrac{4}{3}a^2 + \tfrac{2}{3}(b+c)^2 = \tfrac{4}{3}a^2 + \tfrac{2}{3}(-a)^2 = 2a^2, \end{aligned}$$

teda

$$\begin{aligned} \sum_{\text{cykl.}} \frac{(2a+1)^2}{2a^2+1} &\geqq \sum_{\text{cykl.}} \frac{(2a+1)^2}{\frac{4}{3}(a^2+b^2+c^2)+1} = 3 \cdot \frac{(2a+1)^2 + (2b+1)^2 + (2c+1)^2}{4(a^2+b^2+c^2)+3} = \\ &= 3 \cdot \frac{4a^2+4b^2+4c^2+4(a+b+c)+3}{4a^2+4b^2+4c^2+3} = 3 \cdot \frac{4a^2+4b^2+4c^2+3}{4a^2+4b^2+4c^2+3} = 3. \end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že rovnosť nastáva práve vtedy, keď platí rovnosť

$$\frac{(2a+1)^2}{2a^2+1} = \frac{(2a+1)^2}{\frac{4}{3}(a^2+b^2+c^2)+1}$$

a podobné rovnosti pre b a c. Analogicky ako v prvom riešení, buď sú nulové čitatele, alebo rovnaké menovatele. Rozobratím týchto prípadov aj v cyklických nerovnostiach dostaneme žiadaný výsledok.

Druhá séria

N2.

Pro další použití zavedeme

$$f(n) = (n-1)(n-2)\dots(n-d),$$
$$g(n) = [n-1, n-2, \dots, n-d].$$

Nyní chceme dokázat, že

$$L \cdot g(n) \geqq f(n) \tag{1}$$

pro nějaké L.

Označme prvočísla menší než d jako $p_1, p_2, \dots, p_k$, těch je určitě konečně. Označme ještě α_i pro $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ takové číslo, že $p_i^{\alpha_i} \leqq d-1$ a zároveň $p_i^{\alpha_i+1} \geqq d$. Konečně definujme

$$L = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\lceil d/p_i \rceil \alpha_i}.$$

Lemma. Pokud $p_i^\beta \geqq d$ dělí jedno z čísel tvaru $n-j$, pak už je[11] $p_i^{v_{p_i}(n-k)} \leqq d-1$ pro všechna $1 \leqq k \leqq d, k \neq j$.

Důkaz. Připusťme, že existují dvě β_1 a β_2. Vezměme menší z nich β, pak p^β dělí dvě z d po sobě jdoucích čísel, ale samo je větší než d. Spor.

Nyní (1) dokážeme tak, že se podíváme na $v_p(x)$ pravé i levé strany nerovnosti pro všechna p.

- ▷ Nechť q je prvočíslo, takové že $q \geqq d$, pak $v_q(L \cdot g(n)) = v_q(g(n)) \geqq v_q(f(n))$. Na to si stačí uvědomit, že $f(n)$ je součin d po sobě jdoucích čísel a z nich může q dělit pouze jedno nebo žádné, a tedy q bude v $g(n)$ ve stejné mocnině a platí tedy dokonce $v_q(g(n)) = v_q(f(n))$.
- ▷ Nechť q je jedno z prvočísel p_i, kde $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Pak chceme dokázat

  $$v_q(L \cdot g(n)) = v_q(L) + v_q(g(n)) = \left\lceil \frac{d}{q} \right\rceil \alpha_i + v_q(g(n)) \geqq v_q(f(n)),$$

  ekvivalentně

  $$\left\lceil \frac{d}{q} \right\rceil \alpha_i \geqq v_q(f(n)) - v_q(g(n)).$$

  Podle lemmatu $v_q(n-i) \leqq \alpha_i$ kromě toho největšího. Ten je ale roven $v_q(g(n))$, a proto se na pravé straně odečte. Teď už si stačí uvědomit, že čísel dělitelných q v $f(n)$ je maximálně $\lceil d/q \rceil$. Tím je nerovnost dokázaná.

Tím jsme dokázali (1). Podívejme se nyní na

$$h(n) = \frac{f(n)}{n^d} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{d}{n}\right).$$

---

[11] $v_p(x)$ značí takové největší číslo, že $p^{v_p(x)}$ dělí x.

To je součin d rostoucíh kladných posloupností, a tedy i jejich součin je rostoucí. Platí

$$\frac{f(n)}{n^d} = h(n) \geqq h(n-1) \geqq \ldots \geqq h(d+1) = C.$$

Máme tedy

$$g(n) \geqq \frac{1}{L} f(n) \geqq \frac{C}{L} n^d,$$

a to jsme měli dokázat.

G2.

(Volně podle *Anh Dung Le.*) V celém textu budeme jako $\mathbf{k}$ označovat vektor SK pro libovolný bod K.

Platí $|\mathbf{o}| = |\mathbf{o} - \mathbf{a}|$, tedy

$$\begin{aligned} |\mathbf{o}|^2 &= |\mathbf{o} - \mathbf{a}|^2, \\ \mathbf{o} \cdot \mathbf{o} &= \mathbf{o} \cdot \mathbf{o} - 2\mathbf{o} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}, \\ 2\mathbf{o} \cdot \mathbf{a} &= |\mathbf{a}|^2. \end{aligned}$$

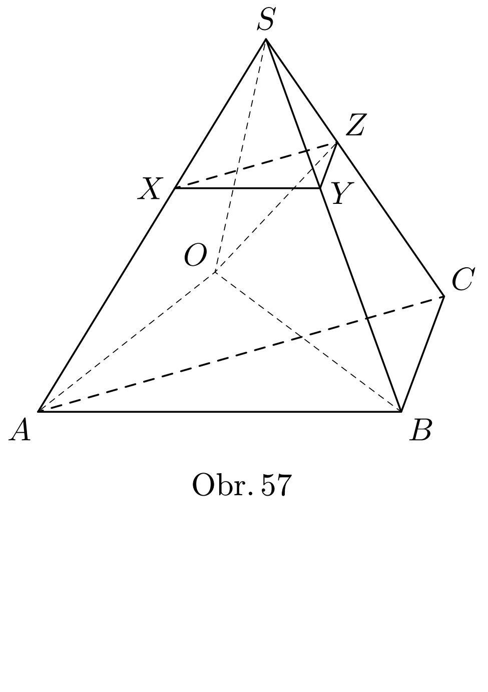
Analogicky obdržíme rovnosti $2\mathbf{o} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{b}|^2$, $2\mathbf{o} \cdot \mathbf{z} = |\mathbf{z}|^2$.

Z rovnoběžnosti rovin ABC a XYZ dostáváme existenci čísla $p \geqq 1$ takového, že $\mathbf{a} = p\mathbf{x}, \mathbf{b} = p\mathbf{y}, \mathbf{c} = p\mathbf{z}$.

K důkazu kolmosti přímky SO a roviny XYC nám stačí ukázat, že $\mathbf{o} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{x}) = 0$ a $\mathbf{o} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{y}) = 0$, protože pak je přímka SO kolmá na dvě nerovnoběžné přímky v XYC (konkrétně na XC a YC). Platí ovšem

$$\mathbf{o} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{x}) = \mathbf{o} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{o} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o} \cdot p\mathbf{z} - \mathbf{o} \cdot \frac{1}{p}\mathbf{a} = \frac{1}{2}p|\mathbf{z}|^2 - \frac{1}{2p}|\mathbf{a}|^2 = \frac{1}{2p}(|\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{a}|^2) = 0,$$
$$\mathbf{o} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{y}) = \mathbf{o} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{o} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{o} \cdot p\mathbf{z} - \mathbf{o} \cdot \frac{1}{p}\mathbf{b} = \frac{1}{2}p|\mathbf{z}|^2 - \frac{1}{2p}|\mathbf{b}|^2 = \frac{1}{2p}(|\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{b}|^2) = 0,$$

kde poslední rovnosti platí díky tomu, že podle zadání je $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}|$.



Obr. 57

Jiné řešení. (Stručně podle *Josefa Svobody*.) Uvažme kulovou inverzi[12] se středem v S a poloměrem $\sqrt{|SA| \cdot |SX|}$. V tomto zobrazení se body A, B, C zobrazí (po řadě) na body X, Y, Z, obrazem sféry opsané čtyřstěnu $SABZ$ je tedy rovina XYC. Jelikož kulová inverze zachovává symetrie podle přímek procházejících jejím středem a výše uvedená sféra je symetrická podle přímky SO, musí být rovina XYC rovněž symetrická podle této přímky. Protože však SO v XYC neleží, musí na ni být kolmá, což jsme měli dokázat.

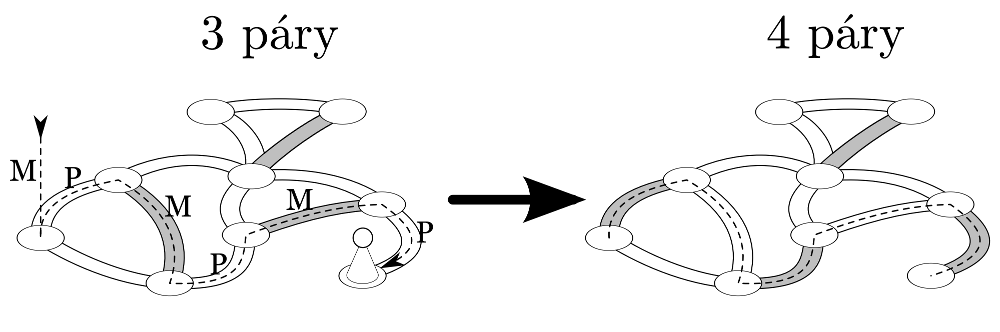
C2.

Mirkova vyhrávající strategie vypadá následovně. Nejprve seskupí políčka do párů tak, aby

i) žádné políčko nebylo ve více párech (ale některá políčka mohou zůstat nespárovaná),
ii) v každém páru byla dvě políčka spojená rourou,
iii) počet párů byl za podmínek i), ii) nejvyšší možný.

Některé políčko muselo zůstat nespárované, protože je počet políček lichý. Do nějakého takového políčka položí Mirek figurku. Pak pokaždé když Pepa táhne do spárovaného políčka P (později ukážeme, že do nespárovaného táhnout nemůže), tak Mirek posune figurku na políčko, s kterým je P v páru. Na začátku každého Pepova tahu budou z každého páru použitá buď obě políčka nebo žádné, Pepa vždy načíná nový pár a Mirek ho dokončuje. Mirek s takovou strategií tedy vždy může táhnout, nemůže prohrát, a proto (díky konečnosti hry) nakonec vyhraje.

Zbývá ukázat, proč Pepa nemůže táhnout do nespárovaného políčka. Předpokládejme tedy pro spor, že se Pepovi povedlo dostat figurku do nespárovaného políčka. První i poslední tah udělal Pepa, takže figurka do této doby prošla přes lichý počet rour, řekněme $2n+1$. Díky Mirkově strategii je každá druhá roura na trase figurky taková, která spojuje dvě spárovaná políčka, to je n párů, které figurka potkala. Tato trasa se ovšem dá spárovat i jinak, první políčko s druhým, třetí s čtvrtým, …, až předposlední s posledním. Tímto způsobem dostaneme $n+1$ párů na trase figurky, čili zvýšíme celkový počet párů. To je však spor s tím, že počet párů byl nejvyšší možný.



Obr. 58

[12] Kulová inverze (se středem v T a poloměrem r) je přímočarým zobecněním kruhové inverze do tří rozměrů – bod K (různý od T) se v ní zobrazí do takového bodu K' na polopřímce TK, který splňuje $|TK| \cdot |TK'| = r^2$.

Na obr. 58 je znázorněna situace, kdy Mirek hraje podle své strategie, avšak nevybral si nejvyšší možný počet párů. To, že ho Pepa porazil, znamená, že je možné počet párů zvýšit. Šedé roury značí roury mezi spárovanými políčky, čárkovaná čára trasu figurky a písmenka M, P značí, kdo provedl příslušný tah.

A2.

Připomeňme lemma, které je užitečné kdykoliv pracujeme s polynomy.

Lemma. Nechť p, q jsou polynomy. Pokud rovnost $p(x) = q(x)$ nastává pro nekonečně mnoho x, pak rovnost $p(x) = q(x)$ platí pro všechna x.

Důkaz. Každé x, pro které platí rovnost $p(x) = q(x)$, je kořenem polynomu $p - q$. Polynom $p - q$ má tudíž nekonečně mnoho kořenů. Podle základní věty algebry má každý nenulový polynom stupně n nejvýše n kořenů, takže polynom $p - q$ je nulový.

Prvně ukážeme, že ze vztahu $p(x)^2 - 1 = p(x^2 + 1)$ plyne, že polynom p je buďto sudý, nebo lichý.

Dosadíme za x nejdříve t a potom $-t$. Pravé strany jsou v obou případech stejné, takže jsou stejné i levé strany, což znamená, že $p(t)^2 = p(-t)^2$ pro libovolné t. Pro každé t tedy platí buď $p(t) = p(-t)$, nebo $p(t) = -p(-t)$. Pokud rovnost $p(t) = p(-t)$ platí pro nekonečně mnoho t, pak tato rovnost podle lemmatu platí pro každé t a polynom p je sudý. Podobně pokud rovnost $p(t) = -p(-t)$ platí pro nekonečně mnoho t, je polynom p lichý.

Postupně rozebereme oba případy. Ukážeme, že v případě, že je polynom p lichý, umíme „generovat“ nekonečně mnoho kořenů, takže nezbývá, než že p je nulový. V případě, že polynom p je sudý a nekonstantní, ukážeme, že existuje polynom q, který splňuje identitu ze zadání a je přitom polovičního stupně než p. Tím můžeme snižovat stupeň polynomu dokud nedostaneme nějaký polynom $\tilde{q}$ lichého stupně. Ten bude muset být nulový, což bude znamenat, že také p je nulový.

Je-li polynom p lichý, pak je $p(0) = -p(0)$, tj. $p(0) = 0$. Dosazením $x = 0$ do zadání dostáváme $-1 = p(1)$ a dosazením $x = 1$ dostáváme $0 = p(2)$. Tento postup můžeme libovolněkrát opakovat. Je-li t kořenem, pak dosazením $x = t$ dostáváme

$$-1 = p(t^2 + 1)$$

a dosazením $x = t^2 + 1$ dostáváme $0 = p[(t^2 + 1)^2 + 1]$. Vzhledem k nerovnosti

$$(t^2 + 1)^2 + 1 > t^2 + 1 \geqq 2t \geqq t$$

to znamená, že polynom p má nekonečně mnoho kořenů, takže je nulový.

Je-li polynom p sudý stupně $2n$, $n \in \mathbb{N}_0$, potom lze zapsat jako

$$p(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_0,$$

kde a_i jsou reálná čísla. To je víceméně zřejmé, přesto budeme podrobní. Jistě existují reálná čísla a_i taková, že

$$p(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Rovnost $p(x) = p(-x)$ platnou pro všechna x stačí přepsat do tvaru

$$p(x) - p(-x) = 2\left(a_{2n-1}x^{2n-1} + a_{2n-3}x^{2n-3} + \ldots + a_3x^3 + a_1x\right) = 0.$$

Vzhledem k tomu, že tato rovnost platí také pro všechna x, je

$$a_1 = a_3 = \ldots = a_{2n-1} = 0.$$

Dále předpokládejme, že polynom p je sudý stupně $2n$ a nekonstantní, tj. $n \in \mathbb{N}$. Potom můžeme definovat polynom

$$q(y) = a_{2n}y^n + a_{2n-2}y^{n-1} + \ldots + a_2y + a_0,$$

který je polovičního stupně n a přitom $p(x) = q(x^2)$. Ukážeme, že polynom q rovněž splňuje identitu ze zadání. Dosazením obdržíme rovnost

$$q(x^2)^2 - 1 = p(x)^2 - 1 = p(x^2 + 1) = q((x^2 + 1)^2).$$

Pišme y místo x^2, což nám dává

$$q(y)^2 - 1 = q((y + 1)^2),$$

a upravujme pravou stranu tak, aby měla stejný tvar jako pravá strana identity ze zadání. Místo y pišme $y - 1$, čímž dostaneme

$$q(y - 1)^2 - 1 = q(y^2).$$

Nakonec zvětšíme argument polynomu q o 1, neboli definujeme polynom $q_1(y) = q(y - 1)$. Dostaneme

$$q_1(y)^2 - 1 = q_1(y^2 + 1).$$

Tuto identitu jsme sice obdrželi jen pro některá y (konkrétně pro $y - 1 \geqq 0$), avšak podle lemmatu platí pro všechna y.

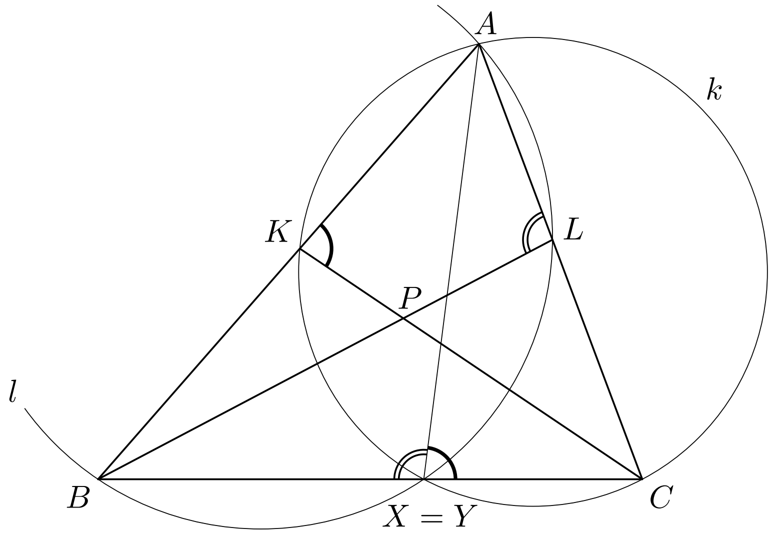
Vidíme, že polynom q_1 splňuje identitu ze zadání a přitom má poloviční stupeň n. Polynom q_1 je tedy opět lichý, nebo sudý. Je-lichý, je podle předchozího nulový, takže i původní polynom p je nulový. Je-li sudý, můžeme najít polynom q_2, který splňuje identitu ze zadání a jehož stupeň je opět poloviční oproti polynomu q_1. Takto můžeme pokračovat tak dlouho dokud nedostaneme polynom q_k lichého stupně. Ten je potom nulový a zpětně dostáváme, že i polynom p je nulový.

Jediný případ, kterým jsme se dosud nezabývali, je konstantní polynom p. Takové polynomy jsou tedy jedinými kandidáty, pro které může být splněna identita ze zadání.

Tretia séria

G3.

Majme trojuholník ABC a vyhovujúce body K, L. Opíšme trojuholníku AKC kružnicu k. Tá pretne polpriamku BC ešte v bode X (rozmyslite si, prečo „polpriamku“). Z mocnosti B ku k máme $|BK| \cdot |BA| = |BC| \cdot |BX|$. Analogicky kružnica l opísaná



Obr. 59

trojuholníku ALB pretína polpriamku CB v bode Y, pre ktorý platí $|CL| \cdot |CA| = |CB| \cdot |CY|$. Použitím získaných rovností a rovnosti v zadaní dostaneme

$$|BC|(|BX| + |CY|) = |BC| \cdot |BX| + |CB| \cdot |CY| = |BK| \cdot |BA| + |CL| \cdot |CA| = |BC|^2.$$

Keďže $|BC|$ je nenulové číslo a $|BX| + |CY| = |BC|$, musí byť $X = Y$ (znova si treba uvedomiť, kde sme využili špecifickú polohu bodov X, Y na polpriamkach). Z tetivových štvoruholníkov $AKXC$ a $ALXB$ (obr. 59) už teraz jednoducho dopočítame

$$|\measuredangle AKP| + |\measuredangle ALP| = |\measuredangle AKC| + |\measuredangle ALB| = |\measuredangle AXC| + |\measuredangle AXB| = 180°.$$

A3.

(Podľa *Anh Dung Le.*) Jednoduchým dosadením $x = y = 0$, resp. $x = y = 3f(0)$ obdržíme rovnosti $f(3f(0)) = 0$ a $f(0) = 9f(0)$, teda $f(0) = 0$. Dosadením $x = 0$ získame $f(f(y)) = y$ a následne nahradením $f(x)$ za x a $f(y)$ za y získame

$$f(2x + y) = 2f(x) + f(y).$$

Keď teraz v poslednej rovnici zvolíme $y = 0$, dostaneme $f(2x) = 2f(x)$, takže $f(2x + y) = f(2x + y)$, čo v našom prípade implikuje $f(x+y) = f(x)+f(y)$. Ale toto je známa *Cauchyho* funkcionálna rovnica na racionálnych číslach s riešeniami $f(x) = cx$ pre $c \in \mathbb{Q}$. Dosadením do pôvodnej rovnice dostaneme $c = \pm 1$. Skúškou zistíme, že naozaj funkcie $f(x) = x$ a $f(x) = -x$ vyhovujú, a preto sú to všetky riešenia zadanej úlohy.

C3.

(Podľa *Anh Dung Le.*) Prípad $n = 3$ vyriešme na začiatok, pre ten je to zrejme 1. Ďalej pre $n \geqq 4$ všetky úvahy budú korektné, lebo budeme predpokladať iba existenciu štyroch rôznych bodov. Úlohu môžeme preformulovať ako grafovú, keďže žiadne „patologické“ prípady nevznikajú, nakoľko množina neobsahuje tri kolineárne body.

Zoberme konkrétny výber vyhovujúcich trojuholníkov a množinu S pozostávajúcu z $\binom{n-1}{2}$ hrán takú, že každá hrana patrí práve jednému trojuholníku. Taká množina hrán podľa predpokladov existuje. Zostala množina M obsahujúca

$$\binom{n}{2} - \binom{n-1}{2} = n - 1$$

hrán. Každý trojuholník má dve strany v M a každým dvom trojuholníkom patrí iná dvojica. Keďže však z $n-1$ hrán vieme spraviť najviac $\binom{n-1}{2}$ dvojíc a toľko presne je trojuholníkov, existuje bijekcia medzi trojuholníkmi a dvojicami hrán z M. Z toho, že každé dve hrany v M určujú trojuholník, vyplýva, že každé dve hrany majú spoločný vrchol.

Teraz ukážeme, že dokonca všetky hrany z M majú spoločný vrchol. Nech to neplatí. Zoberme ľubovoľný vrchol A, z ktorého vychádzajú nejaké dve hrany $AB, AC \in M$. Ak existuje nejaká hrana v M, ktorá nevychádza z A, potom to musí byť BC (rozmyslite si). Vieme ale tiež, že AB a AC určovali trojuholník, teda $BC \in S$, a tu je spor, pretože $M \cap S = \emptyset$. Vidíme, že množinu M tvoria všetky hrany vychádzajúce z nejakého vrcholu.

Nech množinu M určuje jej hlavný vrchol, povedzme X. Každý trojuholník je určený dvoma hranami vychádzajúcimi z X. Ľahko si možno rozmyslieť, že takýto výber trojuholníkov (zoberieme všetky trojuholníky s vrcholom X) je korektný a jediný možný. Na druhej strane ľahko nahliadneme, že pre rôzne vrcholy dostaneme rôzne množiny trojuholníkov (aj tu využívame, že $n \geqq 4$). Teda máme prosté a surjektívne zobrazenie z množiny n vrcholov do možných konfigurácií trojuholníkov. Našli sme bijekciu n-prvkovej množiny na hľadanú množinu, teda výsledok je n.

N3.

Zrejme

$$\frac{2-2^p}{p} = \frac{2-(1+1)^p}{p} = \frac{2-\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}}{p} = \frac{-\sum_{i=1}^{p-1}\binom{p}{i}}{p} = -\sum_{i=1}^{p-1}\frac{\binom{p}{i}}{p} = \sum_{i=1}^{p-1} -\frac{(p-1)!}{i!(p-i)!}.$$

Keďže $p \mid \binom{p}{i}$ pre každé $i = 1, 2, \ldots, p-1$, v poslednom výraze je každý sčítanec celým číslom. Aký zvyšok dáva každé z týchto čísel po delení prvočíslom p? Použijeme Malú

Fermatovu a Wilsonovu vetu. S ich využitím máme

$$\begin{aligned}
-\frac{(p-1)!}{i!(p-i)!} &\equiv -\frac{(p-1)!}{i!(p-i)!}\cdot(-1)\cdot(p-1) = \frac{(p-1)!}{(p-i)!}\cdot\frac{(p-1)!}{(i)!} = \\
&= (p-(i-1))\dots(p-1)\cdot(i+1)\dots(p-1) \equiv \\
&\equiv (-(i-1))\dots(-1)\cdot(i+1)\dots(p-1) = \\
&= (-1)^{i-1}\cdot(i-1)\dots1\cdot(i+1)\dots(p-1) = (-1)^{i-1}\cdot\frac{(p-1)!}{i} \equiv \\
&\equiv (-1)^{i-1}\cdot\frac{(p-1)!}{i}\cdot i^{p-1} = (-1)^{i-1}\cdot(p-1)!\cdot i^{p-2} \equiv \\
&\equiv (-1)^{i}\cdot i^{p-2} \pmod p.
\end{aligned}$$

Náš výraz po delení p tak vieme napísať v tvare

$$-1^{p-2}+2^{p-2}-\ldots+(p-1)^{p-2}.$$

Všimnime si, že pri párnych sčítancoch je znamienko plus a pri nepárnych je mínus. Vieme ich zoskupiť do dvojíc spojením k-teho a $(p-k)$-teho člena, pričom za k volíme párne čísla. Keďže

$$(p-k)^{p-2} = (-1)^{p-2}\cdot(k-p)^{p-2} = -k^{p-2},$$

po zoskupení a sčítaní transformujeme výraz na želaný tvar

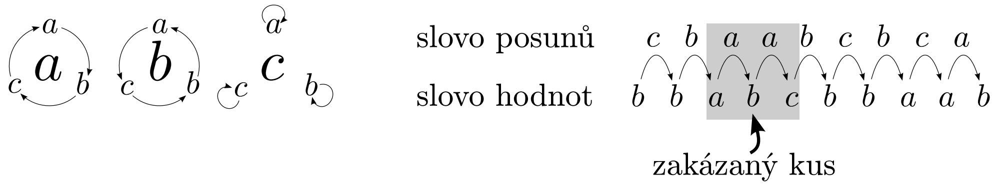
$$\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} 2\cdot(2i)^{p-2} = \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} 2^{p-1}\cdot i^{p-2} \equiv \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} i^{p-2} \pmod p.$$

Pre úplnosť si treba uvedomiť, kde sme potrebovali nepárnosť prvočísla p a ktoré kroky by inak neboli správne, ale to už necháme na čitateľa.

Štvrtá séria

C4.

Pod písmeny si budeme představovat zbytky modulo třema: $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$. Pak kdykoli si vezmeme slovo délky $n + 1$ (kterému budeme říkat slovo hodnot), můžeme spočíst rozdíl mezi každými dvěma sousedními písmeny modulo 3 (odečítáme vždy předchozí písmeno od následujícího). Takto vznikne slovo délky n, které budeme nazývat slovo posunů (obr. 60).



Obr. 60

Naopak, kdykoli máme dané slovo posunů a první písmeno slova hodnot, máme zbytek slova hodnot jednoznačně určen, stačí postupně přičítat písmena ze slova posunů. Jedno slovo posunů délky n tedy odpovídá třem slovům hodnot délky $n+1$ (máme na výběr tři možnosti, které počáteční písmeno zvolit).

Nakonec si stačí uvědomit, že slova posunů aa a bb přesně odpovídají těm trojpísmeným slovům hodnot, která obsahují všechna tři písmena a, b, c. Tedy slova posunů, ve kterých se aa ani bb nevyskytuje, odpovídají těm slovům hodnot, ve kterých se nevyskytuje abc, bca, cab, cba, bac ani acb. Každé slovo posunů odpovídá třem takovým, tedy $y_{n+1} = 3x_n$.

Poznámka. Pokusme se rozptýlit představu, že na tokovou trikovou bijekci nelze přijít, kterou by snad mohlo toto řešení u některých čtenářů vzbudit.

Chceme získat představu, jak zhruba vypadá x_n, tedy začneme si psát nějaké slovo bez aa i bb. Vždy, když píšeme další písmeno, se zamyslíme, z kolika písmen máme v daném okamžiku na výběr. Shledáváme, že vždy ze dvou nebo tří, tedy x_n bude něco mezi 2^n a 3^n. Kdy přitom máme tři možnosti? Pouze na začátku, nebo když je předchozí písmeno c. Je-li předchozí písmeno a nebo b, jsou možnosti jen dvě.

Nyní si pro změnu stranu zkusíme napsat některé slovo, která počítá y_n. Opět máme v každém okamžiku na výběr ze tří nebo dvou písmen. Ovšem kdy tentokrát máme na výběr všechna tři písmena? Kromě začátku jen tehdy, když předcházející dvě písmena jsou stejná. Jsou-li předchozí dvě písmena různá, musíme volit jedno z nich.

Vidíme tedy, že písmena c v prvním případě „nějak odpovídají“ dvojicím stejných písmen v druhém případě. Naopak písmena a, b v prvním případě „odpovídají“ dvojicím různých písmen. Toto je samozřejmě jen nepřesná úvaha, ale jak je vidět na řešení výše, je v tomto případě funkční a snadno formalizovatelná.

A4.

Připomínáme, že Fibonacciho posloupnost je zadaná vztahem $F_1 = 1$, $F_0 = 0$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Posloupnost nebude nekonečná, pokud se po nějaké době v posloupnosti objeví 1; řekněme, že se tak stane v x_m. Označíme $y_k = x_{m-k+1}$ pro $k \in \{1, \ldots, m\}$. Z rekurentního vztahu dostaneme $y_n = (2y_{n+1} - 1)/(1 - y_{n+1})$, což se dá přepsat jako

$$y_{n+1} = \frac{y_n + 1}{y_n + 2}$$

a $y_1 = 1$. Spočteme si prvních pár členů této posloupnosti: 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{13}{21}$, … ; chceme dokázat, že $y_n = F_{2n-1}/F_{2n}$. Indukcí, pro $n = 1$ je to jasné a pro $n+1$ platí

$$y_{n+1} = \frac{y_n + 1}{y_n + 2} = \frac{\frac{F_{2n-1}}{F_{2n}} + 1}{\frac{F_{2n-1}}{F_{n2}} + 2} = \frac{F_{2n-1} + F_{2n}}{F_{2n-1} + 2F_{2n}} = \frac{F_{2n+1}}{F_{2n+1} + F_{2n}} = \frac{F_{2(n+1)-1}}{F_{2(n+1)}},$$

kde v druhé rovnosti jsme použili indukční předpoklad, že naše tvrzení platí pro n. Tím důkaz indukcí končí.

Aby posloupnost byla konečná, musí se tedy x_1 rovnat některému z čísel y_n. Naopak pokud se nebude rovnat žádnému z nich, nikdy už posloupnost nenabyde 1, protože každý člen je jednoznačně určen svým předcházejícím i následujícím členem.

Stačí si tedy rozmyslet, pro které dvojice (a, b) je $F_a/F_b = F_{2n}/F_{2n-1}$ pro některé $n \in \mathbb{N}$. Rozebereme 4 případy:

▷ $a \leqq b - 2$. Pak
$$\frac{F_a}{F_b} = \frac{F_a}{F_{b-1} + F_{b-2}} \leqq \frac{F_a}{F_a + F_a} = \frac{1}{2}.$$
Na druhou stranu máme
$$\frac{F_{2n-1}}{F_{2n}} = \frac{F_{2n-1}}{F_{2n-1} + F_{2n-2}} > \frac{F_{2n-1}}{F_{2n-1} + F_{2n-1}} = \frac{1}{2}.$$
Ostrá nerovnost plyne z faktu $F_{2n-2} < F_{2n-1}$, jelikož $2n - 1$ nemůže nabývat dvojky.

▷ $a = b - 1$. Indukcí si snadno rozmyslíme, že dvě po sobě jdoucí Fibonacciho čísla jsou nesoudělná. Všechny zlomky tvaru F_b/F_{b-1} jsou tak v základním tvaru, a tedy navzájem různé. Proto z těchto dvojic (a, b) vyhovují právě ty, kde je b sudé.

▷ $a = b$. V takovém případě vždy $F_a/F_b = 1 = F_1/F_2$, tedy takové dvojice zadání vyhovují.

▷ $a > b$. Fibonacciho posloupnost je neklesající, tedy
$$\frac{F_a}{F_b} \geqq 1 \geqq \frac{F_{2n-1}}{F_{2n}}.$$
Aby nastala rovnost, musí nastat v obou nerovnostech, tedy $n = 1$, $F_a = F_b$. V tomto případě vyhovuje jen dvojice $(a, b) = (2, 1)$.

Máme tedy, že všechny hledané dvojice (a, b) jsou $(2, 1)$ a (n, n), $(2n-1, 2n)$ pro všechna přirozená čísla n.

N4.

Chceme alespoň pro některá prvočísla p najít takové n_p, že $n_p! \equiv -1 \pmod{p}$. Z Wilsonovy věty přitom víme, že

$$n_p!(n_p + 1)(n_p + 2)\dots(p - 2)(p - 1) \equiv n_p!\underbrace{(-l)(-(l - 1))\dots(-2)(-1)}_{l\ \text{činitelů}} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Protože nám stačí najít čísla n_p jen pro některá prvočísla p, můžeme volit číslo l a k němu teprve hledat prvočíslo p. Abychom se nemuseli obtěžovat znaménky a abychom později uměli zajistit podmínky (i) a (ii), zvolíme l sudé, tj. $l = 2k$. Nyní tedy ke zvolenému číslu $2k$ hledáme prvočíslo p tak, aby

$$2k \cdot (2k - 1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \equiv 1 \pmod{p}.$$

Jinými slovy volíme p jako prvočíselného dělitele čísla $(2k)!-1$. Toto číslo je liché, takže i p je liché.

Protože je $n_p+2k=p-1$, tj. $n_p=p-1-2k$, ukažme nejprve, že takto definované n_p je kladné pro každého prvočíselného dělitele čísla $(2k)!-1$. Kdyby $p \leqq 2k$, pak

$$(2k)!-1 \equiv -1 \pmod p.$$

Kdyby $p=2k+1$, pak podle Wilsonovy věty je

$$(2k)!-1 \equiv -1-1 \pmod p.$$

V obou případech p není dělitel čísla $(2k)!-1$, takže víme, že $p>2k+1$ a $n_p = p-1-2k>0$.

Druhým požadavkem je, aby n_p nedělilo číslo $p-1$. Zabývejme se nyní děliteli čísla $p-1$. Namísto dělitelů $p-1$ se však můžeme zabývat děliteli čísla $2k$, neboť

$$p-1-2k \mid p-1 \quad \Leftrightarrow \quad p-1-2k \mid 2k.$$

Bude tedy výhodné, když $2k$ bude mít málo dělitelů. Zvolme k prvočíslo, protože potom nám stačí zajistit jen to, aby se číslo $p-1-2k$ nerovnalo žádnému z čísel 1, 2, k, $2k$. Čísla $p-1-2k$ a 1 mají opačnou paritu, takže se jistě nerovnají. Totéž platí i pro čísla $p-1-2k$ a k, je-li k liché prvočíslo. Odteď proto budeme uvažovat jen lichá prvočísla k. Zbývá zajistit, aby se $p-1-2k$ nerovnalo číslu 2 ani $2k$.

(i) $p-1-2k \neq 2k$. Nerovnost $p \neq 4k+1$ můžeme zajistit výběrem vhodného prvočíselného dělitele čísla $(2k)!-1$. Všechna lichá prvočísla jsou tvaru $4j+1$ nebo $4j+3$ pro nějaké $j \in \mathbb{N}$, a tak by stačilo vědět, že lze vybrat prvočíselného dělitele čísla $(2k)!-1$ tvaru $4j-3$. To možné je, neboť $(2k)!-1 \equiv 3 \pmod 4$, takže existuje prvočíselný dělitel tvaru $4j+3$. Kdyby totiž všechna prvočísla dělící $(2k)!-1$ byla tvaru $4j+1$, dostali bychom spor modulo 4.

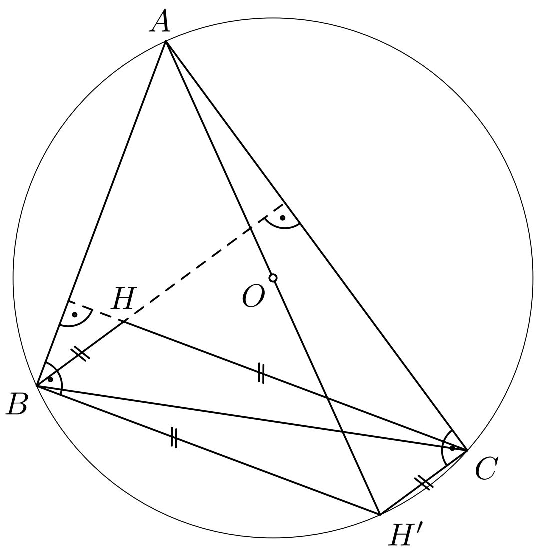
(ii) $p-1-2k \neq 2$. Nyní již máme vybráno prvočíslo p tvaru $4j+3$. Stačí si rozmyslet, že nerovnost $p \neq 2k+3$ je automaticky zajištěna, protože obě strany dávají různé zbytky modulo 4. Protože k je liché (prvo)číslo, je $2k \equiv 2 \pmod 4$, takže $2k+3 \equiv 1 \pmod 4$.

Ke každému lichému prvočíslu k (těch je nekonečně mnoho) umíme najít prvočíslo $p>2k+1$ tvaru $4j+3$ a ke každému z nich umíme najít přirozené číslo $n_p=p-1-2k$ požadovaných vlastností. Stačí tedy už jen zajistit, že vybíraných prvočísel p je nekonečně mnoho. To ovšem plyne z nerovnosti $p>2k+1$, ze které vidíme, že zvolíme-li k dostatečně velké, bude též p dostatečně velké. Tím jsme hotovi.

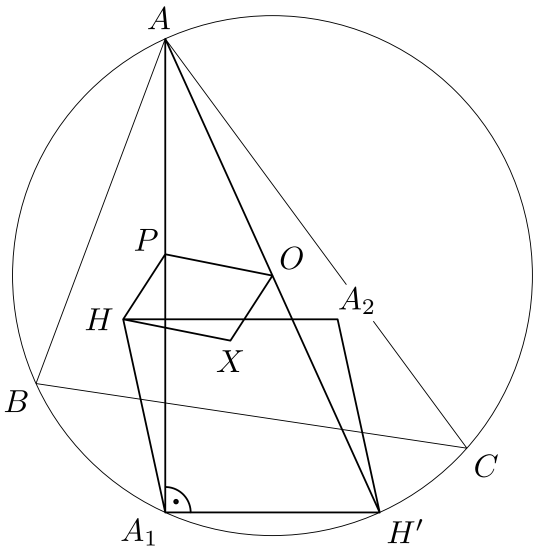
Poznámka. Celé řešení by se dalo napsat tak, že bychom zvolili rychle rostoucí posloupnost prvočísel $k_1, k_2, \dots$, například $k_{i+1} > (2k_i)!$, a poté navzájem různá prvočísla $p_1, p_2, \dots$ tvaru $4j+3$ taková, že $p_i \mid (2k_i)!-1$. K nim bychom pak zvolili $n_{p_i} = p_i-1-2k_i$ a ukázali, že n_{p_i} splňuje požadované vlastnosti. Úmyslně jsme však tento postup nezvolili, aby byla více vidět motivace, proč se co vybírá.

G4.

Nejprve si vzpomeňme na známý fakt: Je-li H' středový obraz ortocentra H trojúhelníku ABC podle středu BC, pak H' leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC, přičemž dokonce AH' tvoří její průměr (obr. 61a).



Obr. 61a



Obr. 61b

Nyní již k dokazované úloze. Označme O střed kružnice opsané trojúhelníku ABC a X takový bod, že $XOPH$ je (případně degenerovaný do úsečky či bodu) rovnoběžník (s vrcholy v tomto pořadí). Ukážeme, že X je středem hledané kružnice. S ohledem na symetrii stačí dokázat, že $|A_2X| = |HX|$, díky čemuž se můžeme omezit na jednodušší konfiguraci z obr. 61b.

Uvědomme si, že díky středové symetrii je $A_1H'A_2H$ rovnoběžník (také případně degenerovaný). Nakreslíme-li AA_1 svisle, jsou přímky A_1H' (AH' je průměr!) a HA_2 vodorovné nebo degenerované do bodů. Budeme-li nyní sledovat pouze x-ové souřadnice bodů (bez újmy na obecnosti AA_1 je osa y), stačí nám v každém případě ukázat

$$[X]_x = \frac{1}{2}([H]_x + [A_2]_x).$$

To je ale snadné, neboť z rovnoběžníků $XOPH$ a $A_1H'A_2H$ dostáváme

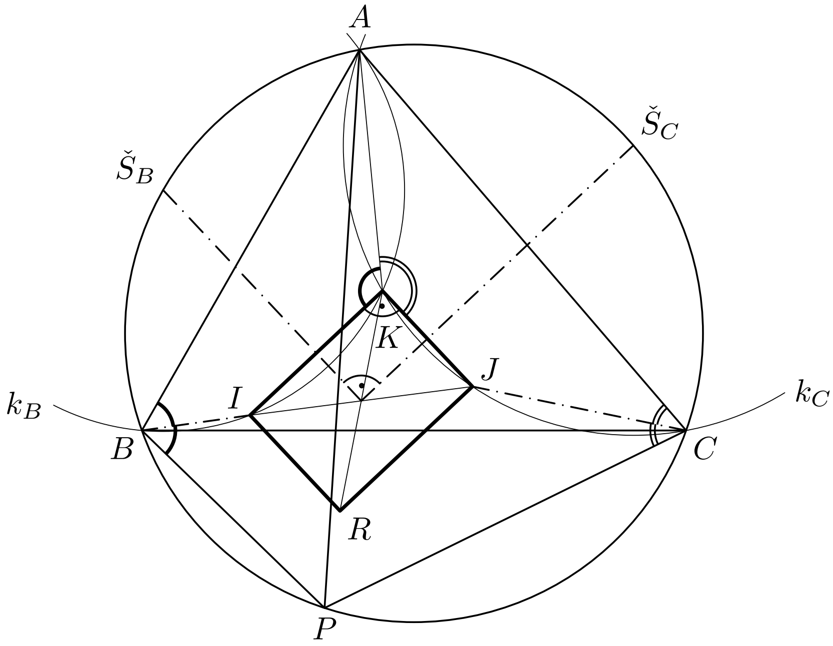
$$[X]_x = [O]_x + [H]_x = \frac{1}{2}([H']_x + [H]_x) + \frac{1}{2}[H]_x = \frac{1}{2}([A_2]_x + [H]_x),$$

kde jsme v prostřední rovnosti využili $[H']_x = 2[O]_x$ (O je střed AH').

PIATA SÉRIA

G5.

Stredy kružníc vpísaných trojuholníkom ABC, BCP označme postupne K, R. Švrčkove body[13] trojuholníka ABC prislúchajúce vrcholom A, B, C označme $\check{S}_A$, $\check{S}_B$, $\check{S}_C$.



Obr. 62

a) Hľadaný bod je K. Vyplýva to priamo z Japonskej vety, ktorá hovorí, že $KIRJ$ je obdĺžnik. Na dôkaz tejto vety stačí použiť iba známu vec, že A, K, I, B a A, K, J, C ležia na kružniciach k_C, k_B so stredmi $\check{S}_C$, $\check{S}_B$ (obr. 62). Ďalej je to jednoduché počítanie uhlov.

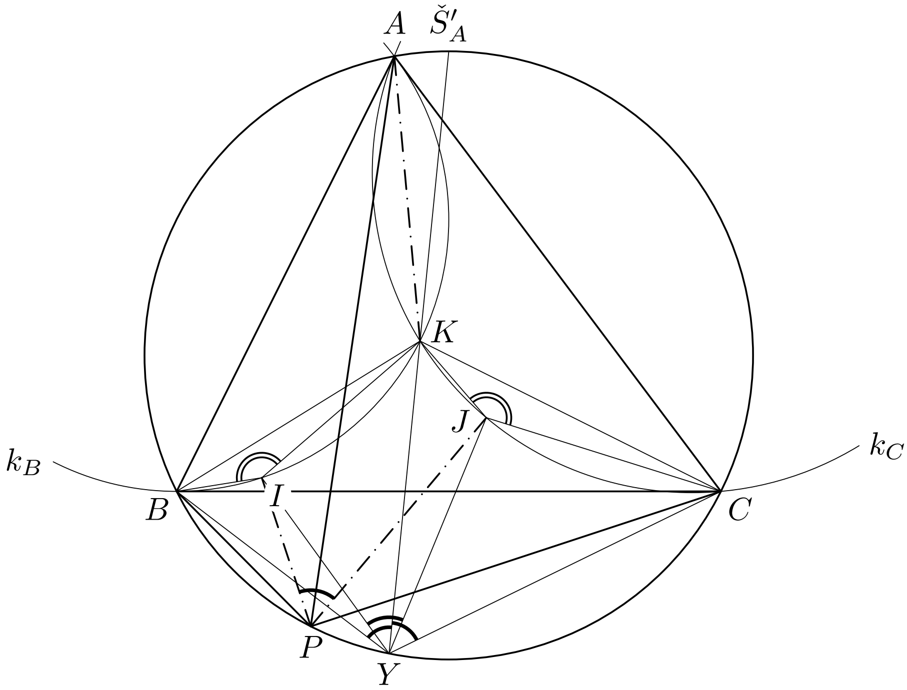
b) Keďže uhlopriečky v obdĺžniku sa rozpoľujú, z už spomenutej Japonskej vety vyplýva, že stred úsečky IJ je zároveň stredom úsečky KR. Teraz načrtneme viacero ciest k riešeniu:

- ▷ Keďže trajektória stredu úsečky IJ je obrazom trajektórie bodu R v rovnoľahlosti so stredom v bode K a koeficientom $\frac{1}{2}$, tvrdenie je zrejmé, lebo veľkosť uhla BRC je konštantná.
- ▷ Osi úsečiek KI a KJ sú na seba kolmé. Navyše prechádzajú po rade bodmi $\check{S}_C$, $\check{S}_B$ a teda stred úsečky IJ sa pohybuje po kružnici nad priemerom $\check{S}_C\check{S}_B$ (obr. 62).

---

[13] Švrčkov bod v trojuholníku XYZ prislúchajúci vrcholu X je stred oblúka YZ opísanej kružnice neobsahujúceho X. Pomenovaný je v komunite riešiteľov MO podľa člena úlohovej komisie Jaroslava Švrčka, ktorý na viacerých prednáškach na prípravných sústredeniach zdôrazňoval dôležitosť poznať vlastnosti tohto bodu.

▷ (Podľa *Davida Hrušku.*) Body I, J sa pohybujú po kružniciach k_C, k_B polovičnou uhlovou rýchlosťou a rovnakým smerom ako bod P po ω. Preto stred úsečky IJ leží na kružnici.[14]



Obr. 63

c) (Podľa *Davida Hrušku.*) Označme $\check{S}'_A$ anti-Švrčkov bod[15] a Y prienik priamky $\check{S}'_A K$ a kružnice ω rôzny od $\check{S}'_A$ (obr. 63). Potom zrejme $|\measuredangle BYK| = |\measuredangle KYC|$ a ľahko možno odvodiť, že $|\measuredangle BKC| + |\measuredangle BYK| = 180°$. Navyše

$$|\measuredangle BIK| = 180° - |\measuredangle BAK| = 180° - |\measuredangle CAK| = |\measuredangle KJC|,$$

takže existuje špirálová podobnosť so stredom v Y, ktorá zobrazí úsečku BK na úsečku KC a zároveň oblúk kružnice k_B na oblúk kružnice k_C nad týmito úsečkami. Ďalej sa v tomto zobrazení zobrazí bod I na J kvôli už spomínanej rovnakej uhlovej rýchlosti bodov I, J. Teda

$$|\measuredangle IYJ| = |\measuredangle BYK| = |\measuredangle KYC| = \frac{|\measuredangle BYK| + |\measuredangle KYC|}{2} = \frac{|\measuredangle BPC|}{2} = |\measuredangle IPJ|$$

a hľadaný bod je Y.

---

[14] To, že stred úsečky určenej bodmi pohybujúcimi sa po kružnici tým istým smerom rovnakou uhlovou rýchlosťou sa pohybuje tiež po kružnici, vidno najľahšie z komplexných čísel, keďže $(z_1 + r_1 e^{i\varphi} + z_2 + r_2 e^{i\varphi})/2 = (z_1 + z_2)/2 + (r_1 + r_2)/2 \cdot e^{i\varphi}$.

[15] Anti-Švrčkov bod je obraz Švrčkovho bodu v stredovej súmernosti podľa stredu príslušnej opísanej kružnice.

A5.

(Podľa *Davida Hrušku.*) Zadaný výraz označme V. Podľa Hölderovej nerovnosti je

$$n \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^6}{-x_i^2 + x_i \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j} \right) \cdot \left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) \geqq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^3 = 1,$$

odkiaľ dostávame odhad

$$V \geqq \frac{1}{n(S^2 - 1)},$$

pričom $S = x_1 + \ldots + x_n$. Z nerovnosti medzi kvadratickým a aritmetickým priemerom máme $S \leqq \sqrt{n}$, takže

$$V \geqq \frac{1}{n(n-1)}.$$

Tento odhad sa nadobúda pre

$$x_1 = \ldots = x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Pre úplnosť dodajme, že všetky použité výrazy boli kvôli podmienkam v zadaní kladné a nerovnosti preto korektné. Špeciálne overíme umocnením výrazu S, že $S \geqq 1$.

N5.

Dvojica $(1, P(1))$ vyhovuje, pričom $1 < P(1)$. Ak teraz $x < y$ a dvojica (x, y) vyhovuje, vytvorme dvojicu $(y, P(y)/x)$. K dokončeniu riešenia zrejme stačí ukázať, že nová dvojica vyhovuje a je v súčte väčšia. To spravíme v nasledujúcich krokoch:

- ▷ $\dfrac{P(y)}{x} \in \mathbb{N}$;
- ▷ $y + \dfrac{P(y)}{x} > y + \dfrac{y^n}{x} > y + x$;
- ▷ $\dfrac{P(y)}{x} \mid P(y)$;
- ▷ $P(y) \equiv 1 \pmod{y}$ a čísla x a y sú nesúdeliteľné, preto môžeme písať

$$\frac{P(y)}{x} \equiv \frac{1}{x} \pmod{y}$$

a dopočítame

$$P\left(\frac{P(y)}{x}\right) \equiv P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^n} \cdot P(x) \equiv 0 \pmod{y}.$$

C5.

Množině vesnic, do které když umístíme M-pekárny, splníme zadání, budeme říkat vyhovující.

Podíváme se na počet všech uspořádaných dvojic disjunktních množin vesnic (X, Y) takových, že mezi X a Y nevede žádná cesta. Tento počet je lichý, jelikož můžeme dát každou takovou dvojici do páru s obrácenou dvojicí s jedinou výjimkou – dvojice prázdných množin. Nyní zkusme dostat tento počet jako součet přes všechny možné množiny X. Pokud je X vyhovující, máme jedinou možnost (lichý počet!), jak zvolit Y – prázdnou. V opačném případě je počet možností 2^n (sudý počet!), kde n je počet měst, která nesousedí s X (ani v ní neleží). Aby tento součet vyšel lichý, musí být lichý i počet vyhovujících množin.

Iné korešpondenčné semináre

Okrem Matematickej olympiády sú pre študentov základných aj stredných škôl počas školského roka organizované aj iné matematické súťaže. Patria medzi ne predovšetkým korešpondenčné semináre. Tieto súťaže sa v detailoch istotne líšia, avšak základné črty majú spoločné. Počas školského roka prebiehajú dve časti (letná a zimná), ktoré pozostávajú zväčša z troch sérií úloh rozosielaných riešiteľom do škôl alebo domov. Riešenia súťažiaci vypracovávajú rovnakou formou ako v MO a v určenom termíne ich odosielajú na adresu príslušného seminára, odkiaľ sa po niekoľkých dňoch až týždňoch vrátia opravené spolu so vzorovými riešeniami a výsledkovou listinou. Mladší a menej skúsení riešitelia zväčša nemusia riešiť tie najzložitejšie príklady, aby aj oni mali šancu ovplyvniť poradie na prvých miestach. Na konci oboch častí súťaže sú približne tridsiati najúspešnejší riešitelia pozývaní na týždňové sústredenie, účasť na ktorom býva často najsilnejšou motiváciou na riešenie úloh. Nie je ale možné nespomenúť, že takýto pravidelný tréning sa odráža aj na výsledkoch dosahovaných v MO, a že drvivá väčšina reprezentantov Slovenska na IMO sa aktívne zapájala do viacerých z týchto seminárov.

Nižšie uvedené korešpondenčné semináre (KS) sú určené študentom stredných škôl, svojím záberom pokrývajú územie celého Slovenska a často majú aj riešiteľov z Českej republiky. Je však možné, že vo svojom okolí nájdete aj menšie súťaže podobného druhu.

Korešpondenčný matematický seminár – KMS

KMS vznikol v roku 2002 spojením Bratislavského a Stredoslovenského korešpondenčného matematického seminára. Organizovaný je študentmi FMFI UK v Bratislave. Má dve kategórie. Začínajúcim a mladším je určená kategória ALFA, pre skúsenejších je kategória BETA. Rozdelenie do kategórií umožňuje bojovať o miesta na sústredení aj neskúseným študentom, ktorí by v silnej konkurencii strácali motiváciu.

KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava
e-mail: kms@kms.sk
web: http://kms.sk

Súťaž talentovaných riešiteľov obľubujúcich matematiku – STROM

Seminár STROM je pokračovateľom najstaršieho korešpondenčného seminára v bývalom Československu. Je organizovaný z PF UPJŠ v Košiciach skupinou nadšencov, väčšinou bývalých riešiteľov seminára a študentov UPJŠ. Na organizovaní sa okrem košickej skupiny podieľajú aj študenti pochádzajúci z východného Slovenska študujúci v iných mestách v SR či ČR. Riešiteľskú základňu má prevažne na východnom Slovensku.

STROM, PF UPJŠ, Jesenná 5, 041 54 Košice
e-mail: strom@strom.sk
web: https://strom.sk

Ak ste sa rozhodli do niektorého zo seminárov zapojiť, najrozumnejšie je zadania a pravidlá nájsť na internete začiatkom septembra alebo začiatkom januára.

Šesťdesiatydruhý ročník
Matematickej olympiády

Názov:	Šesťdesiatydruhý ročník Matematickej olympiády
Autori:	Mgr. Peter Novotný, PhD., RNDr. Karel Horák, CSc., doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., mim. prof., RNDr. Róbert Hajduk, PhD., Mgr. Tomáš Kocák, Bc. Filip Sládek, Úlohová komisia MO, vedúci seminára *i*KS
Jazyková úprava:	neprešlo jazykovou úpravou
Grafická úprava:	Mgr. Peter Novotný, PhD., RNDr. Karel Horák, CSc., sadzba programom $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX
Vydavateľ:	Jednota slovenských matematikov a fyzikov
Tlač:	DOLIS, s. r. o.
Rok vydania:	2015
Náklad:	500 ks
Rozsah:	160 strán

ISBN **978-80-969508-9-8**

Tlač publikácie bola podporená Ministerstvom školstva, vedy, výskumu a športu SR.