61. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Správa o riešení úloh zo súťaže konanej v školskom roku 2011/2012

53. MEDZINÁRODNÁ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA
6. STREDOEURÓPSKA MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

S pomocou spolupracovníkov spracovali
Mgr. Peter Novotný, PhD.,
RNDr. Karel Horák, CSc.,
RNDr. Ján Mazák, PhD.,
Bc. Filip Sládek,
Bc. Alexander Slávik
a členovia Úlohovej komisie MO.

Obsah

O priebehu 61. ročníka Matematickej olympiády

V školskom roku 2011/2012 sa konal 61. ročník Matematickej olympiády (MO), ktorá je medzi predmetovými olympiádami a ostatnými postupovými súťažami na Slovensku najstaršia a svojimi kategóriami pokrýva všetky ročníky od piatej triedy ZŠ po maturantov. Súťaž vyhlasuje Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky (MŠVVŠ SR) v spolupráci s Jednotou slovenských matematikov a fyzikov (JSMF).

Súťaž riadi Slovenská komisia Matematickej olympiády (SKMO), ktorá v 61. ročníku pracovala v nasledovnom zložení:

Mgr. Peter Novotný, PhD., FMFI UK Bratislava, predseda
mim. prof. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., F-PEDAS ŽU Žilina, podpredseda
Mgr. Ján Brajerčík, PhD., FHPV PU Prešov, predseda KKMO PO
prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc., FPV UKF Nitra, predseda KKMO NR
Mgr. Martin Kollár, PhD., FMFI UK Bratislava, predseda KKMO BA
doc. RNDr. Stanislav Krajči, PhD., PF UPJŠ Košice, predseda KKMO KE
doc. RNDr. Mária Lucká, CSc., PF TU Trnava, predsedníčka KKMO TT
doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc., F-PEDAS ŽU Žilina, predseda KKMO ZA
RNDr. Eva Oravcová, Gymn. J. G. T. Banská Bystrica, predsedníčka KKMO BB
RNDr. Soňa Pavlíková, CSc., FCHPT STU Bratislava, predsedníčka KKMO TN
RNDr. Monika Dillingerová, PhD., FMFI UK Bratislava
Mgr. Štefan Gyürki, PhD., FCHPT STU, Bratislava
RNDr. Róbert Hajduk, PhD., PF UPJŠ Košice
Ing. RNDr. František Kardoš, PhD., PF UPJŠ Košice
doc. RNDr. Mária Kmeťová, PhD., FPV UKF Nitra
RNDr. Ján Mazák, PhD., FMFI UK Bratislava
PaedDr. Anna Pobešková, ŠŠI Levice
Mgr. Martin Potočný, Trojsten, FMFI UK Bratislava
RNDr. Oliver Ralík, CSc., Nitra
doc. RNDr. Roman Soták, PhD., PF UPJŠ Košice
prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc., FPV UKF Nitra
PhDr. Peter Barát, IUVENTA Bratislava, tajomník

Na konci 61. ročníka ukončila svoju činnosť v SKMO PaedDr. Anna Pobešková, ktorá v nej pôsobila od roku 2005. Touto cestou jej chceme vyjadriť vďaku za prácu pre MO.

*

Priebeh a organizovanie jednotlivých kôl MO ostali rovnaké ako v predošlých ročníkoch, avšak okrem zvyčajných sústredení a medzinárodných súťaží sa v tomto ročníku uskutočnilo po prvý raz Česko-poľsko-slovenské stretnutie juniorov, teda súťaž, na ktorú postúpili najlepší riešitelia z kategórie C. Stretnutie sa konalo sa v máji 2012 v Poľsku a je mu v ročenke venovaná osobitná kapitola, podobne ako ostatným pravidelným akciám.

Celoštátne kolo MO (CK MO) sa konalo v dňoch 25. – 28. 3. 2012 na Strednej odbornej škole v Rakoviciach (blízko Piešťan). Komunikáciu s vedením SOŠ pred konaním a počas konania súťaže zabezpečovala doc. RNDr. Mária Lucká, CSc., predsedníčka krajskej komisie MO Trnava. Poďakovanie patrí tiež sponzorom CK MO, najmä spoločnosti ALBI, ktorá pravidelne pre CK MO poskytuje ako ceny hodnotné spoločenské hry.

Po CK MO sa uskutočnilo výberové sústredenie, na ktorom sa rozhodlo o zložení družstiev pre Medzinárodnú matematickú olympiádu (IMO) a Stredoeurópsku matematickú olympiádu (MEMO). Nasledované bolo prípravným sústredením pre obe družstvá. Z prípravných medzinárodných akcií sa popri tradičnom Česko-poľsko-slovenskom stretnutí (konalo sa vo Fačkovskom sedle) uskutočnilo aj spoločné prípravné sústredenie IMO-družstiev ČR a SR. Finančne ho zabezpečuje Spoločnosť Otakara Borůvky a odborne Ústredný výbor Matematickej olympiády v ČR. Treba pripomenúť, že podobná akcia na Slovensku neprebieha, a aspoň na tomto mieste sa chceme poďakovať českým kolegom za pravidelné pozývanie.

Na 53. IMO v Argentíne sme získali jednu zlatú medailu, dve bronzové medaily a dve čestné uznania. Na 6. MEMO vo Švajčiarsku sme získali tri bronzové medaily. Každej súťaži je v ročenke venovaná osobitná kapitola. V súvislosti s cestami na IMO a MEMO patrí naša vďaka pracovníčkam sekcie medzinárodnej spolupráce MŠVVŠ SR, ktoré tento rok posledný krát zabezpečovali vybavenie všetkých cestovných náležitostí. (Od ďalšieho ročníka tieto kompetencie prevzala IUVENTA.)

Matematická olympiáda by neexistovala bez zaujímavých a originálnych úloh. O ich prípravu sa stará Úlohová komisia MO, ktorú máme spoločnú s Českou republikou. Každoročne sa konajú dve zasadnutia komisie, jedno v ČR, jedno na Slovensku. V 61. ročníku sa uskutočnili v novembri 2011 v Bílovci a v máji 2012 v Žiline. Úlohová komisia má dve sekcie: jednu pre stredoškolské kategórie, druhú pre kategórie pre ZŠ. Zo Slovenska pracovali v prvej sekcii mim. prof. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., RNDr. Tomáš Jurík, PhD., RNDr. Ján Mazák, PhD., doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc. a Mgr. Peter Novotný, PhD. a v druhej sekcii PaedDr. Svetlana Bednářová, PhD., RNDr. Monika Dillingerová, PhD., Mgr. Veronika Hucíková, Mgr. Erika Novotná, PhD. a Mgr. Miroslava Smitková, PhD. V ročenke okrem zadaní a riešení úloh kategórií A, B, C uvádzame aj zadania všetkých úloh kategórií Z5 až Z9.

Vymýšľať nové úlohy do MO nie je jednoduché, úlohová komisia preto uvíta zaslanie zaujímavých návrhov na úlohy aj od autorov, ktorí nie sú jej členmi. Návrhy je možné posielať napríklad na adresu *skmo@skmo.sk*, najlepšie aj s menom autora, s riešením a s odhadom, do ktorej kategórie sa úloha hodí.

V decembri 2009 bola založená a spustená oficiálna internetová stránka SKMO. Jej adresa je *skmo.sk* a zverejňujeme na nej všetky termíny a dokumenty týkajúce sa MO (archív zadaní a riešení úloh, poradia všetkých krajských a vyšších kôl, atď.). Okrem nej možno na internete nájsť viacero stránok súvisiacich s MO. Spomeňme aspoň niektoré z nich:

skmo.sk – oficiálna stránka SKMO,
matematika.okamzite.eu – archív zadaní, poradí a riešení MO,

fpedas.uniza.sk/~novotny/MO – aktuálne dokumenty, najmä pre kraj Žilina,
www.olympiady.sk – stránka IUVENTY,
oma.org.ar/imo2012/ – stránka 53. IMO v Argentíne,
www.imosuisse.ch/memo2012/ – stránka 6. MEMO vo Švajčiarsku,
imo-official.org – oficiálna stránka IMO,
kms.sk – stránka korešpondenčného seminára KMS,
iksko.org – stránka korešpondenčného seminára *i*KS.

Záver úvodu tejto ročenky by sme radi využili na poďakovanie všetkým učiteľom a nadšencom, ktorí pripravujú žiakov na MO a podieľajú sa na propagácii a organizácii MO na školách. Uznanie patrí tiež pracovníkom obvodných a krajských komisií MO, školských úradov a centier voľného času, ktorí zabezpečujú jednotlivé kolá. Napokon, ďakujeme pracovníkom IUVENTY podieľajúcim sa na organizácii CK MO, distribúcii úloh, komunikácii s MŠVVŠ SR a administratíve súvisiacej s financovaním MO.

Peter Novotný, predseda SKMO

Výsledky

Celoštátne kolo kategórie A

Víťazi

1.	Martin VODIČKA	3 G Alejová, Košice	7 7 3 7 7 7	38
2.	Marián HORŇÁK	4 G Párovská, Nitra	7 1 7 6 7 6	34
3.	Miroslav STANKOVIČ	2 G Poštová, Košice	6 6 0 6 5 6	29
4.	Klára FICKOVÁ	4 G Poštová, Košice	7 7 0 6 1 7	28
5.	Marta KOSSACZKÁ	3 G Grösslingová, Bratislava	7 2 0 6 0 7	22
6.	Filip HANZELY	3 G A. Prídavka, Sabinov	7 6 0 0 0 7	20
	Jakub ŠAFIN	3 G P. Horova, Michalovce	6 6 0 1 0 7	20
8.	Eduard BATMENDIJN	1 Cirk. g. sv. Mik., St. Ľubovňa	7 7 0 5 0 0	19

Ďalší úspešní riešitelia

9.	Patrik BAK	1 G Sobrance	6 4 0 0 0 7	17
10.	Vladimír MACKO	3 G Ľ. Štúra, Zvolen	5 1 0 3 0 7	16
11.	Soňa GALOVIČOVÁ	4 G Jura Hronca, Bratislava	1 0 0 7 0 7	15
12.	Monika DANILÁKOVÁ	4 G J. A. Raymana, Prešov	1 5 0 7 0 1	14
	Pavol KOPRDA	4 G A. Merici, Trnava	7 0 0 0 0 7	14
14.	Tamás BALOGH	2 G P. Pázmaňa, Nové Zámky	7 0 0 5 0 1	13
	Tomáš GONDA	3 G Grösslingová, Bratislava	7 0 1 5 0 0	13
	Michal TÓTH	4 G Jura Hronca, Bratislava	0 0 0 6 0 7	13
	Bui TRUC LAM	1 G Grösslingová, Bratislava	0 0 0 6 0 7	13

Ostatní riešitelia

18.	Dávid LIU ZHEN NING	2 G Grösslingová, Bratislava	6 0 0 1 0 4	11
19.	Viktor LUKÁČEK	4 G sv. Moniky, Prešov	1 0 0 2 0 7	10
	Matej MOLNÁR	4 G Jura Hronca, Bratislava	0 5 0 4 0 1	10
21.	Ján KUZMÍK	4 G Grösslingová, Bratislava	0 0 0 1 0 7	8
22.	Samuel CIBULKA	3 G Jura Hronca, Bratislava	7 0 0 0 0 0	7
23.	Barbora KLEMBAROVÁ	4 G Kukučínova, Poprad	0 5 0 0 0 1	6
	Tatiana MATEJOVIČOVÁ	3 G Grösslingová, Bratislava	0 0 1 5 0 0	6
	László MÁZIK	3 G J. Selyeho, Komárno	1 0 0 4 0 1	6
	Martin SMOLÍK	3 G Grösslingová, Bratislava	0 0 0 5 0 1	6
27.	Matúš HALAJ	11 G J. G. Tajovského, B. Bystrica	1 0 0 3 0 1	5
	Peter ŠICHMAN	4 G Grösslingová, Bratislava	0 4 0 0 0 1	5
	Máté ŠKODA	3 G J. Selyeho, Komárno	1 0 1 0 2 1	5
30.	Anna FAZEKAS	4 Súkr. gymn. Dunajská Streda	1 0 1 0 0 1	3
	Mário LIPOVSKÝ	2 G Jura Hronca, Bratislava	1 0 0 1 0 1	3
32.	Jakub CIMERMAN	3 G J. G. Tajovského, B. Bystrica	1 0 0 0 0 1	2
	Askar GAFUROV	3 G Grösslingová, Bratislava	1 0 0 0 0 1	2
	János LELKES	3 G I. Madácha, Šamorín	0 0 0 1 0 1	2
	László SEBŐ	3 Súkr. gymn. Dunajská Streda	0 0 1 1 0 0	2

Úspešnosť jednotlivých úloh je zaznamenaná v tabuľke.

Počet bodov	**Spolu**	**Číslo úlohy**					
		1.	2.	3.	4.	5.	6.
7 bodov	32	10	3	1	3	2	13
6 bodov	15	4	3	0	6	0	2
5 bodov	10	1	3	0	5	1	0
4 body	5	0	2	0	2	0	1
3 body	3	0	0	1	2	0	0
2 body	3	0	1	0	1	1	0
1 bod	38	10	2	5	6	1	14
0 bodov	104	10	21	28	10	30	5
Priemer	2,08	3,11	1,89	0,43	2,97	0,63	3,46

Krajské kolá

Z príslušného kraja a v príslušnej kategórii A, B, C a Z9 sú uvedení všetci, resp. aspoň prvých 10 úspešných riešiteľov.

Kraj Bratislava

Kategória A

1.	Bui TRUC LAM	1 Gymnázium Grösslingová
2.	Soňa GALOVIČOVÁ	4 Gymnázium Jura Hronca
3.	Michal TÓTH	4 Gymnázium Jura Hronca
4.	Samuel CIBULKA	3 Gymnázium Jura Hronca
	Marta KOSSACZKÁ	3 Gymnázium Grösslingová
	Tatiana MATEJOVIČOVÁ	3 Gymnázium Grösslingová
	Martin SMOLÍK	3 Gymnázium Grösslingová
8.	Ján KUZMÍK	4 Gymnázium Grösslingová
	Matej MOLNÁR	4 Gymnázium Jura Hronca
	Dávid LIU ZHEN NING	2 Gymnázium Grösslingová

Kategória B

1.	Mário LIPOVSKÝ	Gymnázium Jura Hronca
	Dávid LIU ZHEN NING	Gymnázium Grösslingová

3.	Barbora KOVÁČOVÁ	ŠpMNDaG Skalická
	Hana KRAKOVSKÁ	Gymnázium Grösslingová
5.	Lukáš IVAN	Gymnázium Jura Hronca
	Martin KOTULIAK	Gymnázium Grösslingová
	Karolína MOJŽIŠOVÁ	Gymnázium Grösslingová
8.	Bui DIEU LY	Gymnázium Jura Hronca
	Erik SZALAY	ŠpMNDaG Skalická
10.	Samuel KEBIS	Gymnázium Grösslingová

Kategória C

1.	Samuel SUČÍK	Gymnázium Jura Hronca
	Bui TRUC LAM	Gymnázium Grösslingová
3.	Ema KRAKOVSKÁ	Gymnázium Grösslingová
4.	Ondrej BOHDAL	Gymnázium Jura Hronca
5.	Marián LONGA	ŠpMNDaG Skalická
6.	Jakub KOJDA	ŠpMNDaG Skalická
7.	Jakub HRDINA	Gymnázium Jura Hronca
	Barbora LAKOTOVÁ	Gymnázium Grösslingová
9.	Michal BELÁK	Gymnázium Grösslingová
	Matej KRÁLIK	Gymnázium Jura Hronca

Kategória Z9

1.	Zuzana FRANKOVSKÁ	Gymnázium Grösslingová
	Juraj MÁJEK	Gymnázium Grösslingová
	Mikuláš POLÁK	Spojená škola sv. Františka z Assisi
	Richard VINCZE	ZŠ Nám. A. Molnára, Senec
5.	Juraj KUHN	Gymnázium Grösslingová
6.	Adam ŠKRLEC	ZŠ Ostredková
	Andrea TÓTHOVÁ	ŠpMNDaG Skalická
8.	Tomáš BÁNHEGYI	Gymnázium Jura Hronca
	Jaroslava KOKAVCOVÁ	ZŠ Ivanka pri Dunaji
10.	Daniel LISÝ	ZŠ s VJM, Tomášov

Kraj Nitra

Kategória A

1.	Marián HORŇÁK	4 Gymnázium Párovská, Nitra
2.	Tamás BALOGH	2 Gymnázium P. Pázmáňa, Nové Zámky

	László MÁZIK	3 Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	Máté ŠKODA	3 Gymnázium H. Selyeho, Komárno

Kategória B

1.	Ádám MARKÓ	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
2.	Samuel HORVÁTH	Gymnázium Párovská, Nitra
3.	Tamás BALOGH	Gymnázium P. Pázmáňa, Nové Zámky
	Juraj KOVÁČ	Gymnázium sv. Cyrila a Metoda, Nitra
5.	Ľudmila ŠIMKOVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
6.	Dominika BÁLEŠOVÁ	Piaristické gymn. sv. J. Kalazanského, Nitra
	Katarína BÁTOVSKÁ	Gymnázium A. Vrábla, Levice
	Tibor ZAUKO	SPŠ Komárno

Kategória C

1.	Daniel GULIŠ	Gymnázium P. Pázmáňa, Nové Zámky
	Štefan STANKO	Gymnázium A. Vrábla, Levice
3.	Dávid BUGÁR	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	Kristína PREŠINSKÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
5.	Barbora PAUČEKOVÁ	Piaristické gymn. sv. J. Kalazanského, Nitra
	Kristína PAULOVIČOVÁ	Piaristické gymn. sv. J. Kalazanského, Nitra
7.	Andrej ŠEDIVÝ	Gymnázium J. Kráľa, Zlaté Moravce
8.	Roman KLUVANEC	Gymnázium Párovská, Nitra
	Katarína MARČEKOVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
10.	Róbert SZABÓ	Gymnázium J. Fándlyho, Šaľa

Kategória Z9

1.	Tomáš DANIŠ	ZŠ Jasová
	Lucia TÓDOVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
3.	Juraj HALABRIN	ZŠ Komenského, Komárno
4.	Erik KELEMEN	ZŠ Bernolákova, Šaľa
5.	Tamara BARUSOVÁ	ZŠ Na Hôrke, Nitra
	Adam VENGER	ZŠ Mojzesovo
7.	Ottó IZSÓF	ZŠ Sokolce
	P. P. Arthur PETRÁŠ	ZŠ Tríbečská, Topoľčany
	Michal PORUBSKÝ	Gymnázium sv. Cyrila a Metoda, Nitra
10.	Éva Barbara JAKAB	ZŠ M. Korvína, Kolárovo

Kraj Trnava

Kategória A

1.	Pavol KOPRDA	4 Gymnázium A. Merici, Trnava
2.	Anna FAZEKAS	4 Súkr. gymnázium, D. Streda
	László SEBŐ	3 Súkr. gymnázium, D. Streda
4.	János LELKES	3 Gymnázium I. Madácha, Šamorín

Kategória B

1.	Michaela BIELIKOVÁ	Gymnázium V. Mihálika, Sereď
2.	Barnabás DOBOSSY	Gymnázium Z. Kodálya, Galanta
3.	Tamara TÖRÖKOVÁ	Gymnázium Z. Kodálya, Galanta
4.	András LÉPES	Športové gymnázium, D. Streda
	Valentína STRAKOVÁ	Gymnázium V. Mihálika, Sereď

Kategória C

1.	Tamás PAMMER	Gymnázium I. Madácha, Šamorín
2.	Tamás RÓZSA	Súkr. gymnázium, D. Streda
3.	Jozef BUCKO	Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany
4.	Zsolt BOGNÁR	Gymnázium Á. Vámbéryho, D. Streda
	Adela KRÍDLOVÁ	Gymnázium J. Bosca, Šaštín-Stráže
	Réka PENZINGER	Gymnázium Á. Vámbéryho, D. Streda
7.	Alexander TURAN	Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany

Kategória Z9

1.	Lucia BAČOVÁ	ZŠ Mojmírova, Piešťany
	Samuel OBUCH	ZŠ Vančurova, Trnava
3.	Pál SOMOGYI	ZŠ L. Batthyánya-Strattmanna, Horný Bar
4.	Samuel GORTA	ZŠ Školská, Holíč
5.	Terézia POTROKOVÁ	ZŠ Komenského, Vrbové
6.	Matej BENKO	ZŠ Mojmírova, Piešťany
	Roman SOBKULIAK	Gymnázium I. Kupca, Hlohovec

Kraj Trenčín

Kategória A

V kategórii A neboli žiadni úspešní riešitelia.

Kategória B

1.	Filip POKRÝVKA	Gymn. J. Jesenského, Bánovce nad Bebravou
2.	Michal KORBELA	Gymn. J. Jesenského, Bánovce nad Bebravou
3.	Jozef RAJNÍK	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
4.	Andrej ZBÍN	Gymnázium 1. mája, Púchov

Kategória C

1.	Filip AYAZI	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
	Pavel MADAJ	Gymnázium V. B. Nedožerského, Prievidza
3.	Andrej FÚSEK	SPŠ Dubnica nad Váhom
4.	Adam MEČIAR	Gymnázium V. B. Nedožerského, Prievidza

Kategória Z9

1.	Andrej HOFERICA	ZŠ Slov. partizánov, Považská Bystrica
	Ľubica JANČOVÁ	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
	Martin ŠTEFANEC	Gymnázium Dubnica nad Váhom
4.	Adam HLAVÁČ	ZŠ P. J. Šafárika, Prievidza
5.	Michaela GERBELOVÁ	ZŠ Duklianska, Bánovce nad Bebravou
6.	Radovan BEZÁK	ZŠ Mariánska, Prievidza
7.	Tomáš PALIESEK	ZŠ Mládežnícka, Púchov
8.	Lukáš KOTLABA	ZŠ Hodžova, Trenčín
9.	Katarína BEHANOVÁ	ZŠ Medňanská, Ilava
10.	Michal SLÁVIK	ZŠ Dolná Mariková

Kraj Žilina

Kategória A

V kategórii A neboli žiadni úspešní riešitelia.

Kategória B

1.	Miroslav PSOTA	Gymnázium Hlinská, Žilina
2.	Martin MORES	Gymnázium Varšavská, Žilina
3.	Zuzana HROMCOVÁ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
4.	Jakub MELO	Gymnázium sv. Františka z Assisi, Žilina

Kategória C

1.	Samuel SLÁDEK	Gymnázium A. Bernoláka, Námestovo
2.	Lukáš SADLEK	Gymnázium J. M. Hurbana, Čadca
3.	Filip ŠVÁBIK	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
	Tatiana ZBONČÁKOVÁ	Gymnázium J. M. Hurbana, Čadca

Kategória Z9

1.	Samuel SLÁDEK	Gymnázium A. Bernoláka, Námestovo
2.	Barbora STACHOVÁ	Gymnázium J. M. Hurbana, Čadca
3.	Katarína JAKUBJAKOVÁ	ZŠ Karpatská, Žilina
4.	Jakub BARÁNEK	Cirk. ZŠ R. Zaymusa, Žilina
5.	Daniel BACKOV	Gymnázium Ružomberok
	Jakub HOMOLKA	ZŠ P. Škrabáka, D. Kubín
7.	Filip LACO	Cirk. ZŠ R. Zaymusa, Žilina
	Emília MLYNARČÍKOVÁ	Gymnázium Sučany
9.	Miroslav HUTÁR	ZŠ Hruštín
	Ján CHUDÝ	Cirk. ZŠ R. Zaymusa, Žilina
	Mário KOŽIENKA	ZŠ M. Medveckej, Tvrdošín

Kraj Banská Bystrica

Kategória A

1.	Vladimír MACKO	3	Gymnázium Ľ. Štúra, Zvolen
2.	Matúš HALAJ	2	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
3.	Jakub CIMERMAN	3	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica

Kategória B

1.	Matúš HALAJ	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
2.	Matúš KULICH	Gymnázium Detva

	Jaroslav VALOVČAN	Gymnázium Ľ. Štúra, Zvolen
4.	Norbert SLIVKA	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
5.	Martin ŽILÁK	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica

Kategória C

1.	Filip ČONKA	Gymnázium Ľ. Štúra, Zvolen
2.	Norbert BARTO	Gymnázium Tornaľa
3.	Dávid BARBORA	Gymnázium F. Švantnera, Nová Baňa
	Kristína ŠULAJOVÁ	Gymnázium B. S.-Timravy, Lučenec
5.	Silvia NEPŠINSKÁ	Gymnázium J. Chalupku, Brezno
	Veronika VERESOVÁ	Ref. cirk. gymn. M. Tompu, Rimavská Sobota
7.	Anthony FILLO	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica

Kategória Z9

1.	Bial BENCE	ZŠ Mládežnícka, Fiľakovo
2.	Štefán RAČÁK	ZŠ Modrý Kameň
	Samuel SCHNEIDER	ZŠ Radvanská, B. Bystrica
4.	Martin HOŠALA	Športové gymnázium B. Bystrica
5.	Vladimír KRÁĽOVIČ	Kat. spoj. škola sv. Fr. Assiského, B. Štiavnica
6.	Milan KUBALA	ZŠ J. Alexyho, Zvolen
	Eva VARGOVÁ	ZŠ M. R. Štefánika, Žiar nad Hronom
8.	Marek OSLANEC	ZŠ M. R. Štefánika, Žiar nad Hronom
9.	Veronika BALOGHOVÁ	ZŠ P. Jilemnického, Zvolen
	Peter BURSKÝ	ZŠ sv. Alžbety, Nová Baňa
	Dana RUDÍKOVÁ	ZŠ Obrancov mieru, Detva
	Martin SKLENÁR	ZŠ P. Dobšinského, Rimavská Sobota

Kraj Košice

Kategória A

1.	Klára FICKOVÁ	4 Gymnázium Poštová, Košice
2.	Martin VODIČKA	3 Gymnázium Alejová, Košice
3.	Miroslav STANKOVIČ	2 Gymnázium Poštová, Košice
	Jakub ŠAFIN	3 Gymnázium P. Horova, Michalovce
5.	Patrik BAK	1 Gymnázium Sobrance

Kategória B

1.	Miroslav STANKOVIČ	Gymnázium Poštová, Košice
2.	Jakub DARGAJ	Gymnázium Poštová, Košice
3.	Patrik BAK	Gymnázium Sobrance
	Martin RAPAVÝ	Gymnázium Alejová, Košice
5.	Marko PUZA	Gymnázium Poštová, Košice
6.	Patrik TURZÁK	Gymnázium Poštová, Košice
7.	Michal ŠTEFANČÍK	Gymnázium Ľ. Štúra, Michalovce

Kategória C

1.	Patrik BAK	Gymnázium Sobrance
2.	Katarína KRAJČIOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
3.	Peter VOOK	Gymnázium Poštová, Košice
4.	Peter KOVÁCS	Gymnázium Alejová, Košice
5.	Daniel KUPEC	Gymnázium Krompachy
	Henrieta MICHEĽOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
	Róbert SCHÖNFELD	Gymnázium Poštová, Košice

Kategória Z9

1.	Patrik LENÁRT	ZŠ M. Lechkého, Košice
2.	Ivan GREGA	ZŠ Veľký Folkmar
	Tomáš KEKEŇÁK	ZŠ S. Máraiho, Košice
	Petra PLŠKOVÁ	ZŠ Starozagorská, Košice
5.	René Michal CEHLÁR	ZŠ Krosnianska, Košice
6.	Terézia VOLAVKOVÁ	ZŠ Krosnianska, Košice
7.	Dominik DORČÁK	ZŠ Švermova, Michalovce
	Henrieta MICHEĽOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
	Kristína MIŠLANOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
	Daniel ONDUŠ	Gymnázium Trebišovská, Košice

Kraj Prešov

Kategória A

1.	Eduard BATMENDIJN	1	Cirk. gymn. sv. Mikuláša, Stará Ľubovňa
2.	Filip HANZELY	3	Gymnázium A. Prídavka, Sabinov
	Viktor LUKÁČEK	4	Gymnázium sv. Moniky, Prešov
4.	Monika DANILÁKOVÁ	4	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov

	Marcel SCHICHMAN	4 Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
6.	Barbora KLEMBAROVÁ	4 Gymnázium Kukučínova, Poprad

Kategória B

1.	Robert ECKHAUS	Gymnázium Konštantínova, Prešov
2.	Dominik GRIGĽÁK	Gymnázium P. O. Hviezdoslava, Kežmarok
	Jozef LUKÁČ	Gymnázium L. Stöckela, Bardejov
4.	Irena BAČINSKÁ	Gymnázium Lipany
5.	Juraj DŽAMA	Gymnázium sv. Moniky, Prešov
	Jaroslav HOFIERKA	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
	Roman PIVOVARNÍK	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov

Kategória C

1.	Henrieta KOPNICKÁ	Gymnázium D. Tatarku, Poprad
2.	Zuzana KOŠELOVÁ	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
3.	Kristián KATANIK	Gymnázium L. Stöckela, Bardejov
	Andrea ŽENČUCHOVÁ	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
5.	Marek BIROŠ	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
	Slavomír HANZELY	Gymnázium A. Prídavka, Sabinov

Kategória Z9

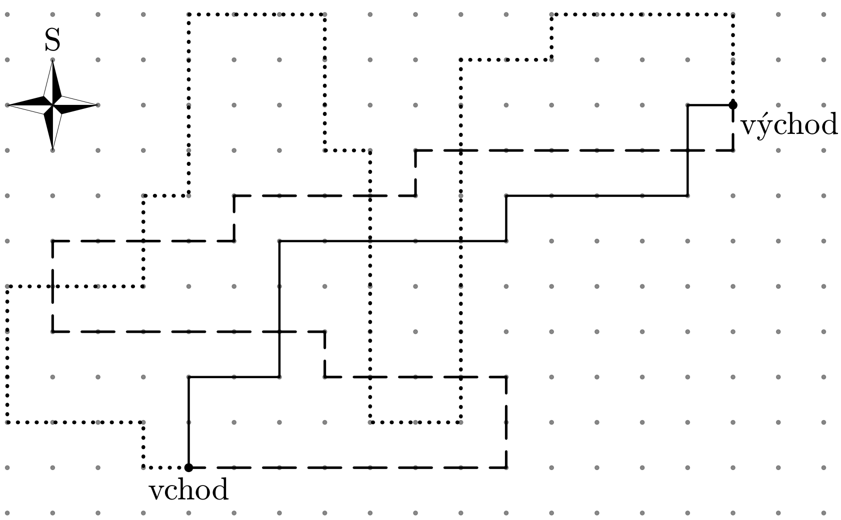
1.	Andrej JURČO	Súkr. gymnázium Letná, Poprad
	Ján KURIMSKÝ	Cirk. ZŠ sv. Gorazda, Prešov
	Samuel MOLČAN	ZŠ Komenského, Sabinov
	Michal ŠČUR	ZŠ Pod Vinbargom, Bardejov
5.	Klaudia BACHLEDOVÁ	ZŠ Dr. Fischera, Kežmarok
6.	Lukáš HAVRIŠÁK	ZŠ Kudlovská, Humenné
	Samuel STAŠKO	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
8.	Róbert KLUČÁR	ZŠ Kúpeľná, Prešov
9.	Jakub ČOPÁK	ZŠ Pod Vinbargom, Bardejov
10.	Jakub CEHULA	Gymnázium P. O. Hviezdoslava, Kežmarok

Zadania súťažných úloh

Kategória Z5

Z5 – I – 1

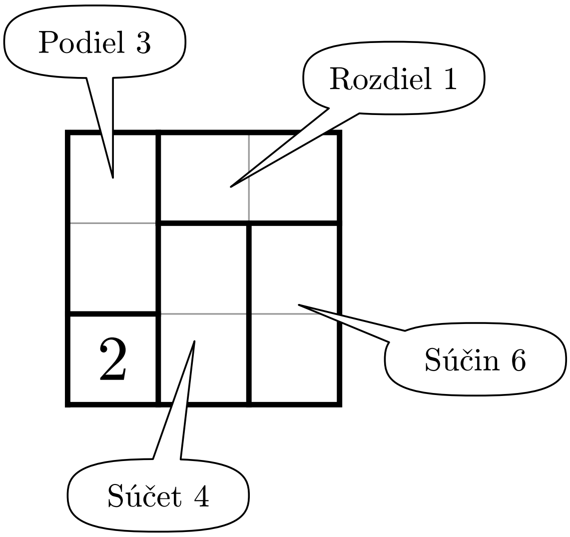
Traja kamaráti Pankrác, Servác a Bonifác išli cez prázdniny na nočnú prechádzku prírodným labyrintom. Pri vstupe dostal každý sviečku a vydal sa iným smerom ako zvyšní dvaja. Všetci traja labyrintom úspešne prešli, ale každý išiel inou cestou. V štvorcovej sieti na obr. 1 sú vyznačené ich cesty. Vieme, že Pankrác nikdy nešiel na juh a že Servác nikdy nešiel na západ. Koľko metrov prešiel v labyrinte Bonifác, keď vieme, že Pankrác prešiel presne 500 m? (*Michaela Petrová*)



Obr. 1

Z5 – I – 2

Do každého nevyplneného štvorčeka na obr. 2 doplňte číslo 1, 2 alebo 3 tak, aby v každom stĺpci a riadku bolo každé z týchto čísel práve raz a aby boli splnené dodatočné požiadavky v každej vyznačenej oblasti. (Ak vo vyznačenej oblasti požadujeme určitý podiel, máme na mysli podiel, ktorý získame vydelením väčšieho čísla menším. Podobne pracujeme aj s rozdielom.) (*Svetlana Bednářová*)



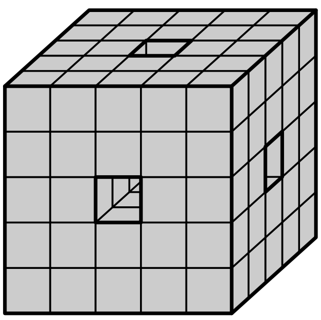
Obr. 2

Z5 – I – 3

Julka pripravuje pre svoje kamarátky občerstvenie – chlebíčky. Natrie ich zemiakovým šalátom a navrch chce dať ešte prísady: šunku, tvrdý syr, plátok vajíčka a prúžok nakladanej papriky. Nechce však, aby niektoré dva chlebíčky obsahovali úplne rovnakú kombináciu prísad. Aký najväčší počet navzájom rôznych chlebíčkov môže nachystať, ak žiadny z nich nemá mať všetky štyri prísady a žiadny z nich nie je iba so šalátom (t. j. bez ďalších prísad)? (*Michaela Petrová*)

Z5 – I – 4

Na obr. 3 je nakreslená stavba zlepená z rovnako veľkých kociek. Stavba je vlastne veľká kocka s tromi rovnými tunelmi, ktorými sa dá pozerať skrz a ktoré majú všade rovnaký prierez. Z koľkých kociek je stavba zlepená? (*Marie Krejčová*)



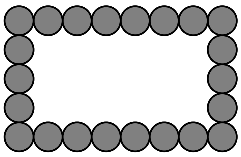
Obr. 3

Z5 – I – 5

V rozprávke o siedmich zhavranených bratoch bolo sedem bratov, z ktorých každý sa narodil presne rok a pol po predchádzajúcom bratovi. Keď bol najstarší z bratov práve štyrikrát starší ako najmladší, matka všetkých bratov zakliala. Koľko rokov mali jednotliví bratia, keď ich matka zakliala? (*Marta Volfová*)

Z5 – I – 6

Janka a Hanka sa rady hrajú s modelmi zvieratiek. Hanka pre svoje kravičky postavila z uzáverov z PET fliaš obdĺžnikovú ohradu ako na obr. 4. Janka zo všetkých svojich uzáverov zložila pre ovečky ohradu tvaru rovnostranného trojuholníka. Potom ju rozobrala a postavila pre ne štvorcovú ohradu, takisto zo všetkých svojich uzáverov. Koľko mohla mať Janka uzáverov? Nájdite aspoň dve riešenia. (*Marta Volfová*)



Obr. 4

Z5 – II – 1

Vojto si kúpil 24 rovnako veľkých štvorcových dlaždíc. Strana každej dlaždice merala 40 cm. Zo všetkých dlaždíc postavil pred svoju chatku obdĺžnikovú plošinu s najmenším možným obvodom. Koľko meral obvod tejto obdĺžnikovej plošiny? (Vojto dlaždice nerezal ani inak nelámal.) (*Libuše Hozová*)

Z5 – II – 2

Lúpežník Rumcajs učil Cipúšika písať čísla. Ako prvé napísal Cipúšik číslo 1, potom napísal číslo 2 a potom pokračoval písaním ďalších bezprostredne po sebe idúcich prirodzených čísel. O chvíľu to Cipúšika prestalo baviť a prosil, aby prestali. Rumcajs sa nechal prehovoriť a písanie skončili. Ktoré číslo napísal Cipúšik ako posledné, ak sa cifra nula nachádza v napísaných číslach 35-krát? (*Marie Krejčová*)

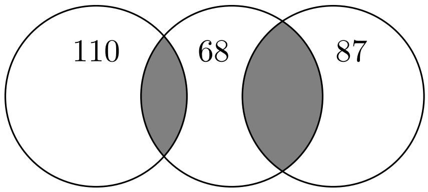
Z5 – II – 3

Na drôte sedí 9 lastovičiek, pričom vzdialenosť každých dvoch susedných lastovičiek je rovnaká. Vzdialenosť prvej a poslednej lastovičky je 720 cm. Aká je vzdialenosť dvoch susedných lastovičiek? Koľko by na drôte sedelo lastovičiek, keby si medzi každé dve susedné lastovičky, ktoré práve teraz sedia na drôte, sadli ďalšie tri? (*Marie Krejčová*)

Kategória Z6

Z6 – I – 1

Mirka čistila fazuľu do polievky na papieri, ktorý vytiahla zo stolíka svojej sestry. Na papieri boli nakreslené tri rovnako veľké kruhy, v ktorých spoločné časti boli vyfarbené sivou pastelkou. Do bielych častí jednotlivých kruhov umiestnila toľko fazuliek, koľko je napísané na obr. 5. Koľko fazuliek má umiestniť do sivých častí, aby bol v každom kruhu rovnaký počet fazuliek? (*Libor Šimůnek*)



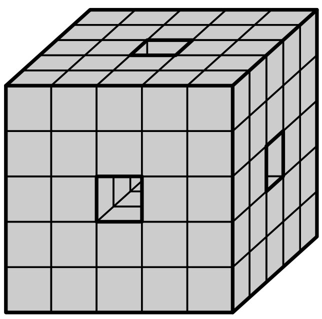
Obr. 5

Z6 – I – 2

Do hračkárstva priviezli nové plyšové zvieratká: vážky, pštrosy a kraby. Každá vážka má 6 nôh a 4 krídla, každý pštros má 2 nohy a 2 krídla a každý krab má 8 nôh a 2 klepetá. Dohromady majú tieto privezené hračky 118 nôh, 22 krídiel a 22 klepiet. Koľko majú dohromady hláv? (*Michaela Petrová*)

Z6 – I – 3

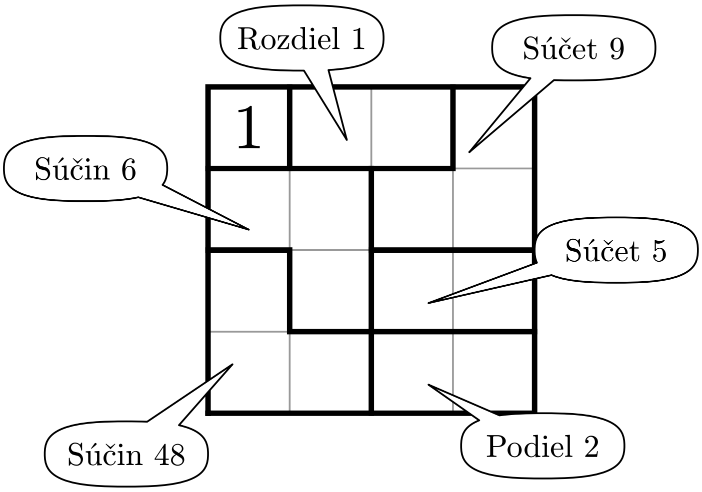
Na obr. 6 je stavba zlepená z rovnakých kociek. Stavba je vlastne veľká kocka s tromi rovnými tunelmi, ktorými sa dá pozerať skrz a ktoré majú všade rovnaký prierez. Túto stavbu sme celú ponorili do farby. Koľko kociek, z ktorých je kocka zložená, má zafarbenú aspoň jednu stenu? (*Marie Krejčová*)



Obr. 6

Z6 – I – 4

Do každého nevyplneného štvorčeka na obr. 7 doplňte číslo 1, 2, 3 alebo 4 tak, aby v každom stĺpci a riadku bolo každé z týchto čísel práve raz a aby boli splnené dodatočné požiadavky v každej vyznačenej oblasti. (Ak vo vyznačenej oblasti požadujeme určitý



Obr. 7

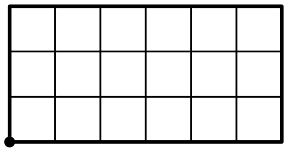
podiel, máme na mysli podiel, ktorý získame vydelením väčšieho čísla menším. Podobne pracujeme aj s rozdielom.) (*Svetlana Bednářová*)

Z6 – I – 5

Ondro, Maťo a Kubo dostali na Vianoce od prarodičov každý jednu z nasledujúcich hračiek: veľké hasičské auto, vrtuľník na diaľkové ovládanie a stavebnicu Merkur. Bratranec Peťo doma hovoril: *„Ondro dostal to veľké hasičské auto. Želal si ho síce Kubo, ale ten ho nedostal. Maťo nemá v obľube stavebnice, takže Merkur nebol pre neho.“* Ukázalo sa, že Peťo sa dvakrát mýlil v informácii, kto dostal či nedostal daný darček a len raz povedal pravdu. Ako to teda s darčekmi bolo a kto teda dostal aký darček? (*Marta Volfová*)

Z6 – I – 6

Marta, Libuška a Mária si vymysleli hru, ktorú by chceli hrať na obdĺžnikovom ihrisku zloženom z 18 rovnakých štvorcov ako na obr. 8. Na hru potrebujú ihrisko rozdeliť

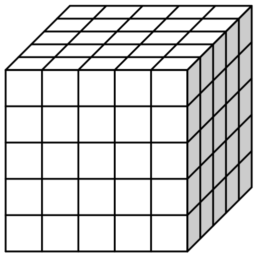


Obr. 8

dvoma rovnými čiarami na tri rovnako veľké časti. Navyše tieto čiary musia obe prechádzať tým rohom ihriska, ktorý je na obrázku vľavo dole. Poraďte dievčatám, ako majú dokresliť čiary, aby sa mohli začať hrať. (*Erika Novotná*)

Z6 – II – 1

Danka a Janka dostali na narodeniny dve rovnako veľké biele kocky. Každá kocka bola zlepená zo 125 malých kociek, tak ako vidíte na obr. 9. Aby kocky rozoznali, dohodli sa, že ich omaľujú. Danka vzala štetec a tri celé steny svojej kocky omaľovala červenou farbou. Janka vzala štetec a tri celé steny svojej kocky ofarbila zelenou farbou. Po čase sa dievčatá rozhodli, že každú z kociek rozkrájajú na jednotlivé malé kocky. Keď to urobili, zistili, že počet kociek, ktoré majú aspoň jednu stenu červenú, je iný, ako počet kociek, ktoré majú aspoň jednu stenu zelenú. Zistite, aký je rozdiel týchto počtov.
(*Erika Novotná*)



Obr. 9

Z6 – II – 2

Jurko zbiera podpisy známych športovcov a spevákov. Na podpisy si kúpil zvláštny zošit. Rozhodol sa, že podpisy budú vždy na každom liste zošita iba na prednej strane. Tieto strany postupne očísloval číslami 1, 3, 5, 7, 9, ... aby zistil, keby sa mu nejaký list zo zošita stratil. V celom zošite tak napísal dokopy 125 cifier. Koľko mal Jurkov zošit listov? Koľko jednotiek napísal do zošita? (*Marta Volfová*)

Z6 – II – 3

Na nočný pochod dostali družiny Vlkov a Líšok po jednej rovnakej sviečke. Sviečky zapálili spoločne na štarte a vyrazili. Počas pochodu každý člen družiny Vlkov niesol sviečku takú dobu, za ktorú sa jej dĺžka skrátila na polovicu. Vlci dobehli do cieľa v momente, keď mal šiesty člen družiny podať sviečku siedmemu. Od toho okamihu ich sviečka celá dohorela o tri minúty. Líšky dobehli do cieľa za 2 hodiny a 57 minút. Ktorá družina bola v cieli ako prvá? O koľko minút dobehla víťazná družina do cieľa skôr ako druhá družina? (Sviečka horí rovnomerne: za rovnaký čas vždy rovnaký kúsok.)
(*Monika Dillingerová*)

KATEGÓRIA Z7

Z7 – I – 1

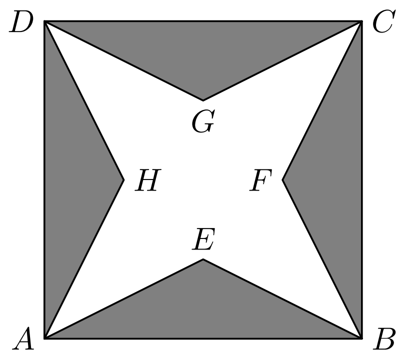
Trpaslíci chodia na vodu k potoku. Džbánik každého z trpaslíkov je inak veľký: majú objemy 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 litrov. Trpaslíci si džbániky medzi sebou nepožičiavajú a vždy ich prinesú úplne plné vody.

- Kýchal prinesie vo svojom džbániku viac vody ako Smejko.
- Spachtoš by musel ísť po vodu trikrát, aby priniesol práve toľko vody, koľko Plaško v jednom svojom džbániku.
- Vedkov džbánik je len o dva litre väčší ako Smejkov.
- Sám Kýblik prinesie toľko vody, koľko Spachtoš a Smejko dokopy.
- Keď idú po vodu Vedko a Kýblik, prinesú rovnako vody ako Dudroš, Kýchal a Smejko dokopy.

Koľko vody prinesú Kýchal a Kýblik dohromady? (*Michaela Petrová*)

Z7 – I – 2

Na obr. 10 je štvorec $ABCD$, v ktorom sú umiestnené štyri zhodné rovnoramenné trojuholníky ABE, BCF, CDG a DAH, všetky vyfarbené sivou. Strany štvorca $ABCD$ sú základňami týchto rovnoramenných trojuholníkov. Vieme, že sivé plochy štvorca $ABCD$ majú dokopy rovnaký obsah ako biela plocha štvorca. Ďalej vieme, že $|HF| = 12$ cm. Určte dĺžku strany štvorca $ABCD$. (*Libor Šimůnek*)



Obr. 10

Z7 – I – 3

Sedem bezprostredne po sebe idúcich celých čísel stálo v rade, zoradené od najmenšieho po najväčšie. Po chvíli sa čísla začali nudiť, a tak sa najskôr vymenilo prvé s posledným. Potom sa druhé najväčšie posunulo úplne na začiatok radu a nakoniec sa najväčšie z čísel postavilo do stredu. Na svoju veľkú spokojnosť sa tak ocitlo vedľa čísla, ktoré bolo presne jeho polovicou. Ktorých sedem čísel mohlo stáť pôvodne v rade?

(*Svetlana Bednářová*)

Z7 – I – 4

Učiteľka Smoliarska pripravovala previerku pre svoju triedu v troch verziách, aby žiaci nemohli odpisovať. V každej verzii zadala tri hrany kvádra v centimetroch a úlohou bolo vypočítať jeho objem. Úlohy si ale dopredu nepreriešila, a tak netušila, že výsledok je vo všetkých troch verziách rovnaký. Do zadaní žiakom napísala tieto dĺžky hrán: 12, 18, 20, 24, 30, 33 a 70. Z deviatich celočíselných dĺžok hrán, ktoré učiteľka Smoliarska zadala, sme vám teda prezradili iba sedem a ani sme vám neprezradili, ktoré dĺžky patria do toho istého zadania. Podarí sa vám napriek tomu určiť zostávajúce dve dĺžky hrán?

(*Libor Šimůnek*)

Z7 – I – 5

Jeden vnútorný uhol trojuholníka má 50°. Aký veľký uhol zvierajú osi dvoch zostávajúcich vnútorných uhlov trojuholníka?

(*Libuše Hozová*)

Z7 – I – 6

Hľadáme šesťciferný číselný kód, o ktorom vieme, že:

- žiadna cifra v ňom nie je viackrát,
- obsahuje aj 0, tá však nie je na predposlednom mieste,
- vo svojom zápise nemá nikdy vedľa seba dve párne ani dve nepárne cifry,
- susedné cifry sa od seba líšia aspoň o 3,
- keď číslo rozdelíme na tri dvojčíslia, tak prvé aj druhé dvojčíslie sú obe násobkom tretieho, teda posledného dvojčíslia.

Určte hľadaný kód.

(*Marta Volfová*)

Z7 – II – 1

Peter a Karol spolu hrali veľa partií dámy. Dohodli sa, že za výhru si hráč pripočíta 3 body, za prehru si 2 body odčíta a za remízu sa žiadne body nepripočítavajú ani neodčitujú. Petrova sestra chcela vedieť, koľko už Peter a Karol odohrali partií a kto vedie, ale dozvedela sa iba, že Peter šesťkrát vyhral, dvakrát remizoval a niekoľkokrát prehral a Karol má práve 9 bodov. Zistite, koľko partií chlapci hrali a kto práve teraz vedie.

(*Marta Volfová*)

Z7 – II – 2

V trojuholníku ABC sa osi jeho vnútorných uhlov pretínajú v bode S. Uhol BSC

má veľkosť $130°$ a uhol ASC má $120°$. Zistite veľkosti všetkých vnútorných uhlov trojuholníka ABC. (*Eva Patáková*)

Z7 – II – 3

Trojciferné prirodzené číslo budeme nazývať *párnomilné*, ak obsahuje dve párne cifry a cifru 1. Trojciferné prirodzené číslo budeme nazývať *nepárnomilné*, ak obsahuje dve nepárne cifry a cifru 2. Zistite, koľko je všetkých trojciferných párnomilných a koľko nepárnomilných čísel. (*Erika Novotná*)

Kategória Z8

Z8 – I – 1

Korešpondenčná matematická súťaž prebieha v troch kolách, ktorých náročnosť sa stupňuje. Do druhého kola postupujú len tí riešitelia, ktorí boli úspešní v prvom kole, do tretieho kola postupujú len úspešní riešitelia druhého kola. Víťazom je každý, kto je úspešným riešiteľom posledného, teda tretieho kola. V poslednom ročníku tejto súťaže bolo presne 14 % riešiteľov úspešných v prvom kole, presne 25 % riešiteľov druhého kola postúpilo do tretieho kola a presne 8 % riešiteľov tretieho kola zvíťazilo. Aký je najmenší počet súťažiacich, ktorí sa mohli zúčastniť prvého kola? Koľko by bolo v takomto prípade víťazov? (*Michaela Petrová*)

Z8 – I – 2

Je daný rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB dlhou 10 cm a ramenami dlhými 20 cm. Bod S je stred základne AB. Rozdeľte trojuholník ABC štyrmi priamkami prechádzajúcimi bodom S na päť častí s rovnakým obsahom. Zistite, aké dlhé úseky vytnú tieto priamky na ramenách trojuholníka ABC. (*Erika Novotná*)

Z8 – I – 3

Hľadáme päťciferné číslo s nasledujúcimi vlastnosťami: je to palindróm (t. j. číta sa odzadu rovnako ako odpredu), je deliteľné dvanástimi a vo svojom zápise obsahuje cifru 2 bezprostredne za cifrou 4. Určte všetky možné čísla, ktoré vyhovujú zadaným podmienkam. (*Martin Mach*)

Z8 – I – 4

Na stred hrnčiarskeho kruhu sme položili kocku, ktorá mala na každej svojej stene napísané jedno prirodzené číslo. Tesne predtým, ako sme kruh roztočili, sme z miesta, kde stojíme, videli tri steny kocky a teda len tri čísla. Ich súčet bol 42. Po otočení hrnčiarskeho kruhu o 90° sme z rovnakého miesta videli tri steny s číslami, ktoré mali súčet 34 a po otočení o ďalších 90° sme videli tri čísla so súčtom 53.

a) Určte súčet troch čísel, ktoré z nášho miesta uvidíme, keď sa kruh otočí ešte o ďalších 90°.
b) Kocka celý čas ležala na stene s číslom 6. Určte maximálny možný súčet všetkých šiestich čísel na kocke. (*Libor Šimůnek*)

Z8 – I – 5

Pankrác, Servác a Bonifác sú traja bratia, ktorí majú P, S a B rokov. Vieme, že P, S a B sú prirodzené čísla menšie ako 16, pre ktoré platí:

$$\begin{aligned} P &= \frac{5}{2}(B-S),\\ S &= 2(B-P),\\ B &= 8(S-P). \end{aligned}$$

Určte vek všetkých troch bratov. (*Libuše Hozová*)

Z8 – I – 6

Janka narysovala obdĺžnik s obvodom 22 cm a dĺžkami strán vyjadrenými v centimetroch celými číslami. Potom obdĺžnik rozdelila bezo zvyšku na tri obdĺžniky, z ktorých jeden mal rozmery 2 cm × 6 cm. Súčet obvodov všetkých troch obdĺžnikov bol o 18 cm väčší ako obvod pôvodného obdĺžnika. Aké rozmery mohol mať pôvodný obdĺžnik? Nájdite všetky riešenia. (*Monika Dillingerová*)

Z8 – II – 1

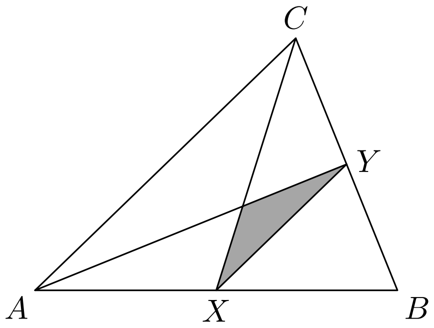
Divadelný súbor uviedol počas sezóny tridsaťkrát „Večer plný improvizácie“. Filoména, obdivovateľka hlavného hrdinu, si na začiatku sezóny vypočítala, koľko by dokopy minula peňazí, keby chodila na každé predstavenie. Po niekoľkých predstaveniach však vstupné nečakane vzrástlo o 6 €. Neskôr získal súbor sponzora a túto novú cenu znížil o 8,50 €. Na konci sezóny Filoména mohla povedať, že nevynechala ani jedno predstavenie a na vstupné minula presne toľko, koľko si vypočítala na začiatku sezóny. Koľkokrát išla Filoména na predstavenie za vstupné v pôvodnej výške? (*Libor Šimůnek*)

Z8 – II – 2

Nájdite najmenšie také prirodzené číslo, že jeho polovica je deliteľná tromi, jeho tretina je deliteľná štyrmi, jeho štvrtina je deliteľná jedenástimi a jeho polovica dáva po delení siedmimi zvyšok 5. (*Eva Patáková*)

Z8 – II – 3

Je daný trojuholník ABC, ktorého náčrt vidíte na obr. 11. Na strane AB leží bod X a na strane BC leží bod Y tak, že CX je ťažnica, AY je výška a XY je stredná priečka trojuholníka ABC. Vypočítajte obsah trojuholníka vyznačeného na obrázku sivou farbou, ak obsah trojuholníka ABC je $24\,\mathrm{cm}^2$. (*Monika Dillingerová*)



Obr. 11

Kategória Z9

Z9 – I – 1

Pokladníčka v galérii predáva návštevníkom vstupenky s číslom podľa toho, koľkí v poradí v ten deň prišli. Prvý návštevník dostane vstupenku s číslom 1, druhý s číslom 2, atď. Počas dňa sa však minul žltý papier, na ktorý sa vstupenky tlačili, preto musela pokladníčka pokračovať tlačením na červený papier. Za celý deň predala rovnako veľa žltých vstupeniek ako červených. Večer zistila, že súčet čísel na žltých vstupenkách bol o 1 681 menší ako súčet čísel na červených vstupenkách. Koľko vstupeniek v ten deň predala? (*Martin Mach*)

Z9 – I – 2

Filoména má mobil s rozmiestnením tlačidiel ako na obr. 12. Deväťciferné telefónne číslo

1	2	3
4	5	6
7	8	9
	0	

Obr. 12

jej najlepšej kamarátky Kláry má tieto vlastnosti:

- všetky cifry Klárinho telefónneho čísla sú rôzne,
- prvé štyri cifry sú zoradené podľa veľkosti od najmenšej po najväčšiu a stredy ich tlačidiel tvoria štvorec,
- stredy tlačidiel posledných štyroch cifier takisto tvoria štvorec,
- telefónne číslo je deliteľné tromi aj piatimi.

Koľko rôznych deväťciferných čísel by mohlo byť Kláriným telefónnym číslom?

(*Karel Pazourek*)

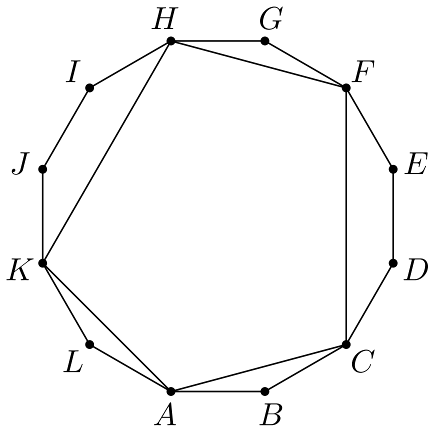
Z9 – I – 3

Alenka pozorovala veveričky na záhradke, kde rástli tieto tri stromy: smrek, buk a jedľa. Veveričky sedeli pokojne na stromoch, takže ich mohla spočítať – bolo ich 34. Keď preskákalo 7 veveričiek zo smreka na buk, bolo ich na buku rovnako veľa ako na oboch ihličnanoch dokopy. Potom ešte preskákalo 5 veveričiek z jedle na buk, a vtedy bolo na jedli rovnako veľa veveričiek ako na smreku. Na buku ich bolo vtedy dvakrát viac, ako na jedli na úplnom začiatku. Koľko veveričiek pôvodne sedelo na každom strome?

(*Martin Mach*)

Z9 – I – 4

V pravidelnom dvanásťuholníku $ABCDEFGHIJKL$ vpísanom do kružnice s polomerom 6 cm určte obvod päťuholníka $ACFHK$ (obr. 13). (*Karel Pazourek*)



Obr. 13

Z9 – I – 5

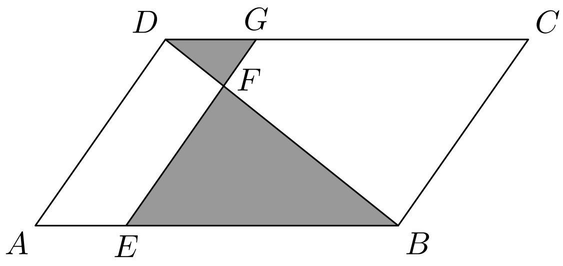
Pred vianočným koncertom ponúkali žiaci na predaj 60 výrobkov z hodín výtvarnej výchovy. Cenu si mohol každý zákazník určiť sám a celý výťažok išiel na dobročinné účely. Na začiatku koncertu žiaci spočítali, koľko centov v priemere utŕžili za jeden predaný výrobok, a vyšlo im celé číslo. Keďže ale nepredali všetkých 60 výrobkov, ponúkali ich aj po koncerte. Po koncerte si ľudia kúpili ešte sedem výrobkov, za ktoré dali dokopy 2 505 centov. Tým sa priemerná tržba za jeden predaný výrobok zvýšila na rovných 130 centov. Koľko výrobkov potom ostalo nepredaných? (*Libor Šimůnek*)

Z9 – I – 6

V obdĺžnikovej záhrade rastie broskyňa. Tento strom je od dvoch susedných rohov záhrady vzdialený 5 metrov a 12 metrov a vzdialenosť medzi spomínanými dvoma rohmi je 13 metrov. Ďalej vieme, že broskyňa stojí na uhlopriečke záhrady. Aká veľká môže byť plocha záhrady? (*Martin Mach*)

Z9 – II – 1

Daný je kosodĺžnik $ABCD$ ako na obr. 14. Po strane AB sa pohybuje bod E a po strane DC sa pohybuje bod G tak, že úsečka EG je stále rovnobežná s AD. Keď bol priesečník F úsečiek EG a DB v pätine uhlopriečky DB (bližšie k bodu D), bol obsah vyfarbenej časti kosodĺžnika o $1\,\mathrm{cm}^2$ väčší, ako keď bol F v dvoch pätinách DB (opäť bližšie k D). Určte obsah kosodĺžnika $ABCD$. (*Eva Patáková*)



Obr. 14

Z9 – II – 2

Snehulienka má na záhrade 101 sadrových trpaslíkov zoradených podľa hmotnosti od najťažšieho po najľahšieho, pričom rozdiel hmotností každých dvoch susedných trpaslíkov je rovnaký. Raz Snehulienka trpaslíkov vážila a zistila, že prvý (teda najťažší) trpaslík váži presne 5 kg. Snehulienku však najviac prekvapilo, že keď na váhu postavila všetkých trpaslíkov od 76. po 80., vážili dokopy rovnako ako všetci trpaslíci od 96. po 101. Koľko váži najľahší trpaslík? (*Martin Mach*)

Z9 – II – 3

Turistický oddiel usporiadal trojdňový cyklistický výlet. Prvý deň chceli prejsť $\frac{1}{3}$ celej plánovanej trasy, ale prešli o 4 km menej ako chceli. Druhý deň chceli prejsť viac: polovicu zvyšku, ale prešli o 2 km menej ako chceli. Tretí deň však všetko dobehli a prešli $\frac{10}{11}$ zvyšku trasy a ešte 4 km, takže dorazili do plánovaného cieľa. Aká dlhá bola trasa a koľko prešli prvý, druhý a tretí deň? (*Marta Volfová*)

Z9 – II – 4

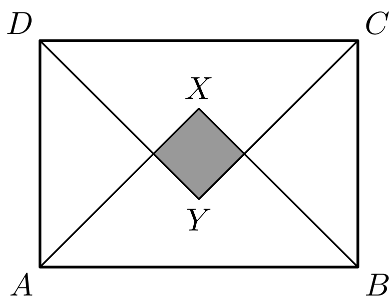
Organizátor výstavy „Staviam, staviaš, staviame“ rozdelil výstavu na dve časti: „Vývoj stavebných techník“ a „Budovy z iného uhla“. Keďže ho zaujímala reakcia návštevníkov, vyplnil každý návštevník pri odchode jednoduchý dotazník. Vyplynuli z neho tieto zaujímavé skutočnosti:

- medzi tými, ktorým sa páčila prvá časť, bolo 96 % takých, ktorým sa páčila aj druhá časť;
- medzi tými, ktorým sa páčila druhá časť, bolo 60 % takých, ktorým sa páčila aj prvá časť;
- medzi všetkými návštevníkmi bolo 59 % takých, ktorým sa nepáčila ani prvá ani druhá časť.

Koľko percent všetkých návštevníkov uviedlo, že sa im páčila prvá časť výstavy? (*Michaela Petrová*)

Z9 – III – 1

Na obr. 15 je obdĺžnik $ABCD$, ktorého dĺžky strán AB a BC sú v pomere $7:5$. Vnútri obdĺžnika $ABCD$ ležia body X a Y tak, že trojuholníky ABX a CDY sú pravouhlé rovnoramenné s pravými uhlami pri vrcholoch X a Y. Spoločná sivá plocha oboch trojuholníkov tvorí štvorec s obsahom $72\,\mathrm{cm}^2$. Určte dĺžky strán AB a BC obdĺžnika $ABCD$. (*Libor Šimůnek*)



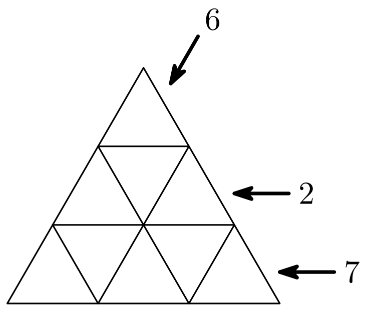
Obr. 15

Z9 – III – 2

Marienka mala desať kartičiek, na ktoré napísala desať po sebe idúcich prirodzených čísel, na každú kartičku práve jedno. Nešťastnou náhodou však jednu kartičku stratila. Súčet čísel na zostávajúcich deviatich kartičkách bol 2 012. Zistite, aké číslo bolo napísané na stratenej kartičke. (*Libuše Hozová*)

Z9 – III – 3

Zistite, koľkými rôznymi spôsobmi sa dajú do jednotlivých políčok trojuholníka na obr. 16 vpísať čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 tak, aby súčet v každom štvorpolíčkovom trojuholníku bol 23 a aby na niektorom políčku v smere každej šípky bolo vpísané číslo zadané pri šípke. (*Erika Novotná*)



Obr. 16

Z9 – III – 4

Vojto chcel na kalkulačke sčítať niekoľko trojciferných prirodzených čísel. Na prvý pokus dostal výsledok 2 224. Pre kontrolu sčítal tieto čísla ešte raz a vyšlo mu 2 198. Preto sčítal čísla ešte raz a teraz dostal súčet 2 204. Piate pripočítavané číslo bolo totiž prekliate – Vojto pri každom pokuse nestlačil niektorú z jeho cifier dostatočne silno a do kalkulačky zadal vždy namiesto trojciferného čísla len dvojciferné. Žiadne ďalšie chyby pri sčitovaní neurobil. Aký je správny súčet Vojtových čísel? (*Libor Šimůnek*)

KATEGÓRIA C

C – I – 1

Nájdite všetky trojčleny $p(x) = ax^2 + bx + c$, ktoré dávajú po delení dvojčlenom $x + 1$ zvyšok 2 a po delení dvojčlenom $x + 2$ zvyšok 1, pričom $p(1) = 61$. (*Jaromír Šimša*)

C – I – 2

Dĺžky strán trojuholníka sú v metroch vyjadrené celými číslami. Určte ich, ak má trojuholník obvod 72 m a ak je najdlhšia strana trojuholníka rozdelená bodom dotyku vpísanej kružnice v pomere 3 : 4. (*Pavel Leischner*)

C – I – 3

Nájdite všetky trojice prirodzených čísel a, b, c, pre ktoré platí množinová rovnosť

$$\{(a,b),(a,c),(b,c),[a,b],[a,c],[b,c]\} = \{2,3,5,60,90,180\},$$

pričom (x,y) a $[x,y]$ označuje postupne najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok čísel x a y. (*Tomáš Jurík*)

C – I – 4

Reálne čísla a, b, c, d vyhovujú rovnici $ab + bc + cd + da = 16$.

a) Dokážte, že medzi číslami a, b, c, d sa nájdu dve so súčtom najviac 4.

b) Akú najmenšiu hodnotu môže mať súčet $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$? (*Ján Mazák*)

C – I – 5

Daný je rovnoramenný trojuholník so základňou dĺžky a a ramenami dĺžky b. Pomocou nich vyjadrite polomer R kružnice opísanej a polomer r kružnice vpísanej tomuto trojuholníku. Potom ukážte, že platí $R \geqq 2r$, a zistite, kedy nastane rovnosť.

(*Leo Boček*)

C – I – 6

Na hracej ploche $n \times n$ tvorenej bielymi štvorcovými políčkami sa Monika a Tamara striedajú v ťahoch jednou figúrkou pri nasledujúcej hre. Najskôr Monika položí figúrku na ľubovoľné políčko a toto políčko zafarbí namodro. Ďalej vždy hráčka, ktorá je na ťahu, urobí s figúrkou *skok* na políčko, ktoré je doposiaľ biele, a toto políčko zafarbí namodro. Pritom pod *skokom* rozumieme bežný ťah šachovým jazdcom, t. j. presun figúrky o dve políčka zvislo alebo vodorovne a súčasne o jedno políčko v druhom smere. Hráčka, ktorá je na rade a už nemôže urobiť ťah, prehráva. Postupne pre $n = 4, 5, 6$ rozhodnite, ktorá z hráčok môže hrať tak, že vyhrá nezávisle na ťahoch druhej hráčky.

(*Pavel Calábek*)

C – S – 1

Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b, pre ktoré platí rovnosť množín

$$\{a \cdot [a,b],\ b \cdot (a,b)\} = \{45, 180\},$$

pričom (x,y) označuje najväčší spoločný deliteľ a $[x,y]$ najmenší spoločný násobok čísel x a y. (*Tomáš Jurík*)

C – S – 2

Označme S stred základne AB daného rovnoramenného trojuholníka ABC. Predpokladajme, že kružnice vpísané trojuholníkom ACS, BCS sa dotýkajú priamky AB v bodoch, ktoré delia základňu AB na tri zhodné diely. Vypočítajte pomer $|AB| : |CS|$.
(*Jaromír Šimša*)

C – S – 3

Reálne čísla p, q, r, s spĺňajú rovnosti

$$p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = 4 \qquad \text{a} \qquad pq + rs = 1.$$

Dokážte, že niektoré dve z týchto štyroch čísel sa líšia najviac o 1 a niektoré dve sa líšia najmenej o 1. (*Jaromír Šimša*)

C – II – 1

Pre všetky reálne čísla x, y, z také, že $x < y < z$, dokážte nerovnosť

$$x^2 - y^2 + z^2 > (x - y + z)^2.$$

(*Jaromír Šimša*)

C – II – 2

Janko má tri kartičky, na každej je iná nenulová cifra. Súčet všetkých trojciferných čísel, ktoré možno z týchto kartičiek zostaviť, je číslo o 6 väčšie ako trojnásobok jedného z nich. Aké cifry sú na kartičkách? (*Tomáš Jurík*)

C – II – 3

Nech E je stred strany CD rovnobežníka $ABCD$, v ktorom platí $2|AB| = 3|BC|$. Dokážte, že ak sa dá do štvoruholníka $ABCE$ vpísať kružnica, dotýka sa táto kružnica strany BC v jej strede. (*Ján Mazák*)

C – II – 4

Na tabuli je napísaných prvých n celých kladných čísel. Marína a Tamara sa striedajú v ťahoch pri nasledujúcej hre. Najskôr Marína zotrie jedno z čísel na tabuli. Ďalej vždy hráčka, ktorá je na ťahu, zotrie jedno z čísel, ktoré sa od predchádzajúceho zotretého čísla ani nelíši o 1, ani s ním nie je súdeliteľné. Hráčka, ktorá je na ťahu a nemôže už žiadne číslo zotrieť, prehrá. Pre $n = 6$ a pre $n = 12$ rozhodnite, ktorá z hráčok môže hrať tak, že vyhrá nezávisle na ťahoch druhej hráčky. (*Pavel Calábek*)

Kategória B

B – I – 1

Medzi všetkými desaťcifernými číslami deliteľnými jedenástimi, v ktorých sa žiadna cifra neopakuje, nájdite najmenšie a najväčšie. (*Jaroslav Zhouf*)

B – I – 2

Daný je pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C, ktorého obsah označme P. Nech F je päta výšky z vrcholu C na preponu AB. Na kolmiciach na priamku AB, ktoré prechádzajú vrcholmi A a B, v polrovine opačnej k polrovine ABC uvažujme postupne body D a E, pre ktoré platí $|AF| = |AD|$ a $|BF| = |BE|$. Obsah trojuholníka DEF označme Q. Dokážte, že platí $P \geqq Q$, a zistite, kedy nastáva rovnosť. (*Jaroslav Švrček*)

B – I – 3

Nájdite všetky dvojice reálnych čísel x, y, ktoré vyhovujú sústave rovníc

$$x \cdot \lfloor y \rfloor = 7,$$
$$y \cdot \lfloor x \rfloor = 8.$$

(Zápis $\lfloor a \rfloor$ označuje *dolnú celú časť* čísla a, t. j. najväčšie celé číslo, ktoré neprevyšuje a.) (*Pavel Novotný*)

B – I – 4

Dané sú dve rôznobežky a, c prechádzajúce bodom P a bod B, ktorý na nich neleží. Zostrojte pravouholník $ABCD$ s vrcholmi A, C a D postupne na priamkach a, c a PB. (*Jaromír Šimša*)

B – I – 5

V istom meste majú vybudovanú sieť na šírenie klebiet, v ktorej si každý klebetník vymieňa informácie s tromi klebetnicami a každá klebetnica si vymieňa informácie s tromi klebetníkmi. Inak sa klebety nešíria.

a) Dokážte, že klebetníkov a klebetníc je rovnako veľa.
b) Predpokladajme, že sieť na šírenie klebiet je súvislá (klebety od ľubovoľného klebetníka a ľubovoľnej klebetnice sa môžu dostať ku všetkým ostatným). Dokážte, že aj keď sa jeden klebetník z mesta odsťahuje, zostane sieť súvislá. (*Ján Mazák*)

B – I – 6

Anna a Boris hrajú kartovú hru. Každý z nich má päť kariet s hodnotami 1 až 5 (z každej jednu). V každom z piatich kôl obaja vyložia jednu kartu a kto má vyššie číslo, získa bod. V prípade kariet s rovnakými číslami nezíska bod nikto. Použité karty sa do hry nevracajú. Ten, kto získa na konci viac bodov, vyhral. Koľko percent zo všetkých možných priebehov takej hry skončí výhrou Anny? (*Tomáš Jurík*)

B – S – 1

V obore celých čísel vyriešte rovnicu

$$x^2 + y^2 + x + y = 4.$$

(*Jaroslav Švrček*)

B – S – 2

Daný je pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C. Nech F je päta výšky z vrcholu C na preponu AB. Na kolmiciach na priamku AB, ktoré prechádzajú vrcholmi A a B, sú v polrovine opačnej k polrovine ABC zvolené postupne body D a E, pre ktoré platí $|AF| = |AD|$ a $|BF| = |BE|$. Označme ďalej R stred úsečky DE. Dokážte, že platí nerovnosť $|RF| \geqq |CF|$ a zistite, kedy nastane rovnosť.

(*Jaroslav Švrček*)

B – S – 3

V istom meste majú vybudovanú súvislú sieť na šírenie klebiet (klebety od ľubovoľného klebetníka a ľubovoľnej klebetnice sa môžu dostať ku všetkým ostatným). V nej si každý klebetník vymieňa informácie s dvoma klebetnicami a každá klebetnica si vymieňa informácie s troma klebetníkmi. Predpokladajme, že v uvedenej sieti sa nájde taký muž aj taká žena, že po prípadnom odsťahovaní ktorejkoľvek z týchto dvoch osôb prestane byť sieť súvislou. Nájdite najmenší možný počet členov tejto siete. (*Pavel Calábek*)

B – II – 1

Daných je 2 012 kladných čísel menších ako 1, ktorých súčet je 7. Dokážte, že tieto čísla sa dajú rozdeliť na štyri skupiny tak, aby súčet čísel v každej skupine bol aspoň 1.

(*Vojtech Bálint*)

B – II – 2

Určte, koľkými spôsobmi možno vrcholom pravidelného 9-uholníka $ABCDEFGHI$ priradiť čísla z množiny $\{17, 27, 37, 47, 57, 67, 77, 87, 97\}$ tak, aby každé z nich bolo priradené inému vrcholu a aby súčet čísel priradených každým trom susedným vrcholom bol deliteľný tromi. (*Jaroslav Švrček*)

B – II – 3

Pravouhlému trojuholníku ABC je vpísaná kružnica, ktorá sa dotýka prepony AB v bode K. Úsečku AK otočíme o $90°$ do polohy AP a úsečku BK otočíme o $90°$ do polohy BQ tak, aby body P, Q ležali v polrovine opačnej k polrovine ABC.

a) Dokážte, že obsahy trojuholníkov ABC a PQK sú rovnaké.

b) Dokážte, že obvod trojuholníka ABC nie je väčší ako obvod trojuholníka PQK. Kedy nastane rovnosť obvodov? (*Jaroslav Zhouf*)

B – II – 4

Nájdite všetky reálne čísla x, y, ktoré vyhovujú sústave rovníc

$$x \cdot \left\lfloor \frac{y}{x} \right\rfloor = 5,$$
$$y \cdot \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor = -6.$$

(Zápis $\lfloor a \rfloor$ označuje *dolnú celú časť* čísla a, t. j. najväčšie celé číslo, ktoré neprevyšuje a.) (*Pavel Calábek*)

Kategória A

A – I – 1

Označme n súčet všetkých desaťciferných čísel, ktoré majú vo svojom dekadickom zápise každú z cifier $0, 1, \dots, 9$. Zistite zvyšok po delení čísla n sedemdesiatimi siedmimi. (*Pavel Novotný*)

A – I – 2

Na stretnutí bolo niekoľko ľudí. Každí dvaja, ktorí sa nepoznali, mali medzi ostatnými prítomnými práve dvoch spoločných známych. Účastníci A a B sa poznali, ale nemali ani jedného spoločného známeho. Dokážte, že A aj B mali medzi prítomnými rovnaký počet známych. Ukážte tiež, že na stretnutí mohlo byť práve šesť osôb. (*Vojtech Bálint*)

A – I – 3

Označme S stred kružnice vpísanej, T ťažisko a V priesečník výšok daného rovnoramenného trojuholníka, ktorý nie je rovnostranný.

a) Dokážte, že bod S je vnútorným bodom úsečky TV.

b) Určte pomer dĺžok strán daného trojuholníka, ak je bod S stredom úsečky TV.

(*Jaromír Šimša*)

A – I – 4

Nech p, q sú dve rôzne prvočísla, m, n prirodzené čísla a súčet

$$\frac{mp-1}{q}+\frac{nq-1}{p}$$

je celé číslo. Dokážte, že platí nerovnosť

$$\frac{m}{q}+\frac{n}{p}>1.$$

(*Jaromír Šimša*)

A – I – 5

Dané sú dve zhodné kružnice k_1, k_2 s polomerom rovným vzdialenosti ich stredov. Ich priesečníky označme A a B. Na kružnici k_2 zvoľme bod C tak, že úsečka BC pretne kružnicu k_1 v bode rôznom od B, ktorý označíme L. Priamka AC pretne kružnicu k_1 v bode rôznom od A, ktorý označíme K. Dokážte, že priamka, na ktorej leží ťažnica z vrcholu C trojuholníka KLC, prechádza pevným bodom nezávislým od polohy bodu C.

(*Tomáš Jurík*)

A – I – 6

Nájdite najväčšie reálne číslo k také, že nerovnosť

$$\frac{2(a^2+kab+b^2)}{(k+2)(a+b)}\geqq\sqrt{ab}$$

platí pre všetky dvojice kladných reálnych čísel a, b.

(*Ján Mazák*)

A – S – 1

V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} y+3x&=4x^3,\\ x+3y&=4y^3. \end{aligned}$$

(*Pavel Calábek*)

A – S – 2

V rovine uvažujme lichobežník $ABCD$ so základňami AB a CD a označme M stred jeho uhlopriečky AC. Dokážte, že ak majú trojuholníky ABM a ACD rovnaké obsahy, tak sú priamky DM a BC rovnobežné. (*Jaroslav Švrček*)

A – S – 3

Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré je súčin $(2^n+1)(3^n+2)$ deliteľný číslom 5^n. (*Ján Mazák*)

A – II – 1

Označme S_n súčet všetkých n-ciferných čísel, ktorých dekadický zápis obsahuje iba cifry 1, 2, 3, každú aspoň raz. Nájdite všetky celé čísla $n \geqq 3$, pre ktoré je číslo S_n deliteľné siedmimi. (*Pavel Novotný*)

A – II – 2

Dané je celé číslo a väčšie ako 1. Nájdite aritmetickú postupnosť s prvým členom a, ktorá obsahuje práve dve z čísel a^2, a^3, a^4, a^5 a má čo najväčšiu diferenciu. (Nepredpokladáme, že diferencia je nutne celočíselná.) (*Jaromír Šimša*)

A – II – 3

Do kružnice je vpísaný šesťuholník $ABCDEF$, v ktorom platí $AB \perp BD$, $|BC| = |EF|$. Predpokladajme, že priamky BC, EF pretínajú polpriamku AD postupne v bodoch P, Q. Označme S stred uhlopriečky AD a K, L stredy kružníc vpísaných trojuholníkom BPS, EQS. Dokážte, že trojuholník KLD je pravouhlý. (*Tomáš Jurík*)

A – II – 4

Predpokladajme, že pre kladné reálne čísla a, b, c, d platí

$$ab + cd = ac + bd = 4 \qquad \text{a} \qquad ad + bc = 5.$$

Nájdite najmenšiu možnú hodnotu súčtu $a+b+c+d$ a zistite, ktoré vyhovujúce štvorice a, b, c, d ju dosahujú. (*Jaromír Šimša*)

A – III – 1

Nájdite všetky celé čísla n, pre ktoré je $n^4 - 3n^2 + 9$ prvočíslo. (*Aleš Kobza*)

A – III – 2

Zistite, aký je najväčší možný obsah trojuholníka ABC, ktorého ťažnice majú dĺžky spĺňajúce nerovnosti $t_a \leqq 2$, $t_b \leqq 3$, $t_c \leqq 4$. (*Pavel Novotný*)

A – III – 3

Dokážte, že medzi ľubovoľnými 101 reálnymi číslami existujú dve čísla u a v, pre ktoré platí

$$100\,|u-v| \cdot |1-uv| \leqq (1+u^2)(1+v^2).$$

(*Pavel Calábek*)

A – III – 4

Vnútri rovnobežníka $ABCD$ je daný bod X. Zostrojte priamku, ktorá prechádza bodom X a rozdeľuje daný rovnobežník na dve časti, ktorých obsahy sa navzájom líšia čo najviac. (*Vojtech Bálint*)

A – III – 5

V skupine 90 detí má každé aspoň 30 kamarátov (kamarátstvo je vzájomné). Dokážte, že ich možno rozdeliť do troch 30-členných skupín tak, aby každé dieťa malo vo svojej skupine aspoň jedného kamaráta. (*Ján Mazák*)

A – III – 6

V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x^4 + y^2 + 4 &= 5yz, \\ y^4 + z^2 + 4 &= 5zx, \\ z^4 + x^2 + 4 &= 5xy. \end{aligned}$$

(*Jaroslav Švrček*)

Riešenia súťažných úloh

Kategória C

C – I – 1

Dvojnásobným použitím algoritmu delenia dostaneme

$$ax^2+bx+c=(ax+b-a)(x+1)+c-b+a,$$
$$ax^2+bx+c=(ax+b-2a)(x+2)+c-2b+4a.$$

Dodajme k tomu, že nájdené zvyšky $c-b+a$ a $c-2b+4a$ sú zrejme rovné hodnotám $p(-1)$, resp. $p(-2)$, čo je v zhode s poznatkom, že akýkoľvek mnohočlen $q(x)$ dáva pri delení dvojčlenom $x-x_0$ zvyšok rovný číslu $q(x_0)$.

Podľa zadania platí $c-b+a=2$ a $c-2b+4a=1$. Tretia rovnica $a+b+c=61$ je vyjadrením podmienky $p(1)=61$. Získanú sústavu troch rovníc vyriešime jedným z mnohých možných postupov.

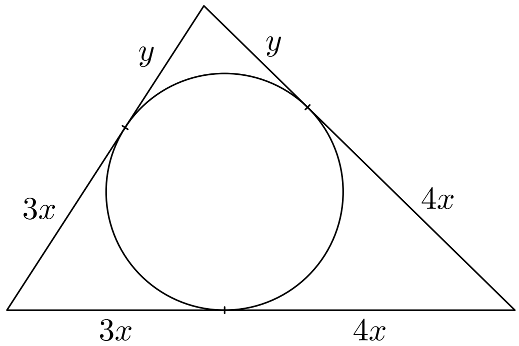
Z prvej rovnice vyjadríme $c=b-a+2$, po dosadení do tretej rovnice dostaneme $a+b+(b-a+2)=61$, čiže $2b=59$. Odtiaľ $b=59/2$, čo po dosadení do prvej a druhej rovnice dáva $a+c=63/2$, resp. $c+4a=60$. Ak odčítame posledné dve rovnice od seba, dostaneme $3a=57/2$, odkiaľ $a=19/2$, takže $c=63/2-19/2=22$. Hľadaný trojčlen je teda jediný a má tvar

$$p(x)=\frac{19}{2}\cdot x^2+\frac{59}{2}\cdot x+22=\frac{19x^2+59x+44}{2}.$$

C – I – 2

Využijeme všeobecný poznatok, že body dotyku vpísanej kružnice delia hranicu trojuholníka na šesť úsečiek, a to tak, že každé dve z nich, ktoré vychádzajú z toho istého vrcholu trojuholníka, sú zhodné. (Dotyčnice z daného bodu k danej kružnici sú totiž súmerne združené podľa spojnice daného bodu so stredom danej kružnice.)

V našej úlohe je najdlhšia strana trojuholníka rozdelená na úseky, ktorých dĺžky označíme $3x$ a $4x$; dĺžku úsekov z vrcholu oproti najdlhšej strane označíme y (obr. 17). Strany trojuholníka majú teda dĺžky $7x$, $4x+y$ a $3x+y$, kde x, y sú neznáme kladné čísla (dĺžky berieme bez jednotiek). Ak má byť $7x$ dĺžka najdlhšej strany, musí platiť $7x>4x+y$, čiže $3x>y$. Zdôraznime, že hľadané čísla x, y nemusia byť nutne celé, podľa zadania to však platí o číslach $7x$, $4x+y$ a $3x+y$.



Obr. 17

Údaj o obvode trojuholníka zapíšeme rovnosťou

$$72 = 7x + (3x + y) + (4x + y), \quad \text{čiže} \quad 36 = 7x + y.$$

Pretože $7x$ je celé číslo, je celé i číslo $y = 36 - 7x$; a pretože podľa zadania i čísla $4x + y$ a $3x + y$ sú celé, je celé i číslo $x = (4x + y) - (3x + y)$. Preto od tohto okamihu už hľadáme dvojice *celých* kladných čísel x, y, pre ktoré platí

$$3x > y \quad \text{a} \quad 7x + y = 36.$$

Odtiaľ vyplýva $7x < 36 < 7x + 3x = 10x$, teda $x \leqq 5$ a súčasne $x \geqq 4$.

Pre $x = 4$ je $y = 8$ a $(7x, 4x + y, 3x + y) = (28, 24, 20)$, pre $x = 5$ je $y = 1$ a $(7x, 4x + y, 3x + y) = (35, 21, 16)$. Strany trojuholníka sú teda $(28, 24, 20)$ alebo $(35, 21, 16)$. (Trojuholníkové nerovnosti sú zrejme splnené.)

C – I – 3

Prvky danej množiny M rozložíme na prvočinitele:

$$M = \{2,\ 3,\ 5,\ 2^2 \cdot 3 \cdot 5,\ 2 \cdot 3^2 \cdot 5,\ 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5\}.$$

Odtiaľ vyplýva, že v rozklade hľadaných čísel a, b, c vystupujú iba prvočísla 2, 3 a 5. Každé z nich je pritom prvočiniteľom práve dvoch z čísel a, b, c: keby bolo prvočiniteľom len jedného z nich, chýbalo by v rozklade troch najväčších spoločných deliteľov a jedného najmenšieho spoločného násobku, teda v štyroch číslach z M; keby naopak bolo prvočiniteľom všetkých troch čísel a, b, c, nechýbalo by v rozklade žiadneho čísla z M. Okrem toho vidíme, že v rozklade každého z čísel a, b, c je prvočíslo 5 najviac v jednom exemplári.

Podľa uvedených zistení môžeme čísla a, b, c usporiadať tak, že rozklady čísel a, b obsahujú po jednom exemplári prvočísla 5 (potom $(c, 5) = 1$) a že $(a, 2) = 2$ (ako vieme, aspoň jedno z čísel a, b musí byť párne). Číslo 5 z množiny M je potom nutne rovné (a, b), takže platí $(b, 2) = 1$, a preto $(b, 3) = 3$ (inak by platilo $(b, c) = 1$), odtiaľ zase s ohľadom na $(a, b) = 5$ vyplýva $(a, 3) = 1$. Máme teda $a = 5 \cdot 2^s$ a $b = 5 \cdot 3^t$ pre vhodné prirodzené čísla s a t.

Z rovnosti $[a,b] = 2^s \cdot 3^t \cdot 5$ vyplýva, že nastane jeden z troch nasledovných prípadov.

(1) $2^s \cdot 3^t \cdot 5 = 60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5$. Vidíme, že platí $s = 2$ a $t = 1$, čiže $a = 20$ a $b = 15$. Ľahko určíme, že tretím číslom je $c = 18$.

(2) $2^s \cdot 3^t \cdot 5 = 90 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5$. V tomto prípade $a = 10$, $b = 45$ a $c = 12$.

(3) $2^s \cdot 3^t \cdot 5 = 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Teraz $a = 20$, $b = 45$ a $c = 6$.

Odpoveď. Hľadané čísla a, b, c tvoria jednu z množín $\{20, 15, 18\}$, $\{10, 45, 12\}$ a $\{20, 45, 6\}$.

Iné riešenie. V danej rovnosti je množina napravo tvorená šiestimi rôznymi číslami väčšími ako 1, takže čísla (a,b), (a,c), (b,c) musia byť netriviálnymi deliteľmi postupne čísel $[a,b]$, $[a,c]$, $[b,c]$. Čísla 2, 3, 5 ale žiadne netriviálne delitele nemajú, musí teda platiť

$$\{(a,b), (a,c), (b,c)\} = \{2, 3, 5\} \quad \text{a} \quad \{[a,b], [a,c], [b,c]\} = \{60, 90, 180\}.$$

Pretože poradie čísel a, b, c nehrá žiadnu úlohu, môžeme predpokladať, že platí $(a,b) = 2$, $(a,c) = 3$ a $(b,c) = 5$. Odtiaľ vyplývajú vyjadrenia

$$a = 2 \cdot 3 \cdot x = 6x, \quad b = 2 \cdot 5 \cdot y = 10y, \quad c = 3 \cdot 5 \cdot z = 15z$$

pre vhodné prirodzené čísla x, y, z. Zo známej rovnosti $[x,y] \cdot (x,y) = xy$ tak dostaneme vyjadrenia najmenších spoločných násobkov v tvare

$$[a,b] = \frac{6x \cdot 10y}{2} = 30xy, \quad [a,c] = \frac{6x \cdot 15z}{3} = 30xz, \quad [b,c] = \frac{10y \cdot 15z}{5} = 30yz.$$

Z rovnosti $\{30xy, 30xz, 30yz\} = \{60, 90, 180\}$ upravenej na $\{xy, xz, yz\} = \{2, 3, 6\}$ potom vďaka tomu, že 2 a 3 sú prvočísla, vyplýva $\{x, y, z\} = \{1, 2, 3\}$. Pretože z podmienky $5 = (b,c) = (10y, 15z)$ vyplýva $y \neq 3$ a $z \neq 2$, prichádzajú do úvahy len trojice (x, y, z) rovné $(1, 2, 3)$, $(2, 1, 3)$ a $(3, 2, 1)$, ktorým postupne zodpovedajú trojice (a, b, c) rovné $(6, 20, 45)$, $(12, 10, 45)$, $(18, 20, 15)$. Skúškou sa presvedčíme, že všetky tri vyhovujú množinovej rovnosti zo zadania úlohy.

C – I – 4

a) Z rovnosti $16 = ab + bc + cd + da = (a + c)(b + d)$ vyplýva, že obidva súčty $a + c$ a $b + d$ nemôžu byť väčšie ako 4 súčasne, lebo v opačnom prípade by bol ich súčin väčší ako 16. Preto vždy aspoň jeden zo súčtov $a + c$ alebo $b + d$ má požadovanú vlastnosť.

b) Využijeme všeobecnú rovnosť

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \tfrac{1}{2}(a - b)^2 + \tfrac{1}{2}(b - c)^2 + \tfrac{1}{2}(c - d)^2 + \tfrac{1}{2}(d - a)^2 + ab + bc + cd + da,$$

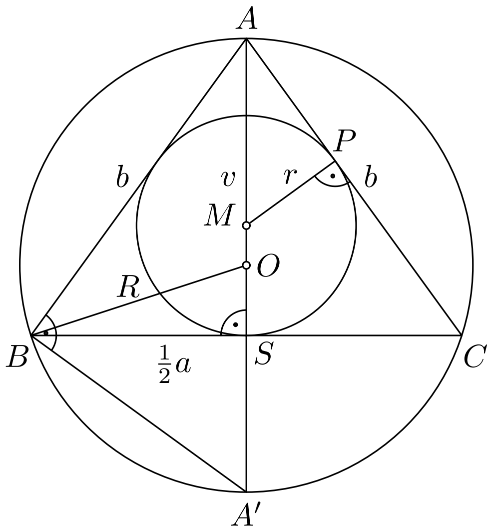
o platnosti ktorej sa ľahko presvedčíme úpravou pravej strany. Vzhľadom na nezápornosť druhých mocnín $(a-b)^2$, $(b-c)^2$, $(c-d)^2$ a $(d-a)^2$ dostávame pre ľavú stranu rovnosti odhad

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqq ab + bc + cd + da = 16.$$

Je nájdené číslo 16 najmenšou hodnotou uvažovaných súčtov?Ináč povedané: nastane pre niektorú vyhovujúcu štvoricu v odvodenej nerovnosti rovnosť? Z nášho postupu je jasné, že musíme rozhodnúť, či pre niektorú z uvažovaných štvoríc platí $a-b=b-c=c-d=d-a=0$, čiže $a=b=c=d$. Pre takú štvoricu má rovnosť $ab+bc+cd+da=16$ tvar $4a^2=16$, čomu vyhovuje $a=\pm 2$. Pre vyhovujúce štvorice $a=b=c=d=2$ a $a=b=c=d=-2$ má súčet $a^2+b^2+c^2+d^2$ naozaj hodnotu 16, preto ide o hľadané minimum.

C – I – 5

Označme S stred základne BC daného rovnoramenného trojuholníka ABC, O stred jeho opísanej kružnice, M stred vpísanej kružnice a P pätu kolmice z bodu M na rameno AC (obr. 18).



Obr. 18

Z pravouhlého trojuholníka BSA pomocou Pytagorovej vety vyjadríme veľkosť v výšky AS, pričom v pravouhlom trojuholníku BSO s preponou dĺžky R pre odvesnu OS platí $|OS|=\big||AS|-|AO|\big|=|v-R|$ (musíme si uvedomiť, že v tupouhlom trojuholníku ABC bude bod S ležať medzi bodmi A a O!). Dostávame tak dve rovnosti

$$v^2=b^2-\frac{a^2}{4},$$
$$R^2=\frac{a^2}{4}+(v-R)^2;$$

ich sčítaním vyjde

$$v^2+R^2=b^2+(v-R)^2, \quad \text{čiže} \quad b^2=2vR.$$

Dosadením z prvej rovnice $v=\frac{1}{2}\sqrt{4b^2-a^2}$ do poslednej rovnosti dostaneme hľadaný vzorec pre R.

Dodajme, že rovnosť $b^2 = 2vR$, ktorú sme práve odvodili a z ktorej už ľahko vyplýva vzorec pre polomer R, je Euklidovou vetou o odvesne AB pravouhlého trojuholníka ABA' s preponou AA', ktorá je priemerom kružnice opísanej trojuholníku ABC (obr. 18).

Nájdený vzorec pre polomer R zapíšeme prehľadne spolu s druhým hľadaným vzorcom pre polomer r, ktorého odvodeniu sa ešte len budeme venovať:

$$R = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}} \quad \text{a} \quad r = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2(a + 2b)}. \tag{1}$$

Druhý zo vzorcov (1) sa dá získať okamžite zo známeho vzťahu $r = 2S/(a+b+c)$ pre polomer r kružnice vpísanej do trojuholníka so stranami a, b, c a obsahom S; v našom prípade stačí len dosadiť $b = c$ a $2S = av$, kde $v = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$ podľa úvodnej časti riešenia.

Ďalšie dva spôsoby odvodenia druhého zo vzorcov (1) založíme na úvahe o pravouhlom trojuholníku AMP, ktorého strany majú dĺžky

$$|AM| = v - r, \quad |MP| = r, \quad |AP| = |AC| - |PC| = b - |SC| = b - \frac{a}{2}.$$

Pre tento trojuholník môžeme napísať Pytagorovu vetu alebo využiť jeho podobnosť s trojuholníkom ACS, konkrétne zapísať rovnosť sínusov ich spoločného uhla pri vrchole A. Podľa toho dostaneme rovnice

$$(v - r)^2 = r^2 + \left(b - \frac{a}{2}\right)^2, \quad \text{resp.} \quad \frac{r}{v - r} = \frac{\frac{1}{2}a}{b},$$

ktoré sú obidve lineárne vzhľadom na neznámu r a majú riešenie

$$r = \frac{v}{2} - \frac{1}{2v} \cdot \left(b - \frac{a}{2}\right)^2, \quad \text{resp.} \quad r = \frac{av}{a + 2b}.$$

Po dosadení za v v oboch prípadoch dostaneme hľadaný vzorec pre r. V druhom prípade je to zrejmé, v prvom to ukážeme:

$$\begin{aligned} r &= \frac{v}{2} - \frac{1}{2v} \cdot \left(b - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{v^2 - b^2 + ab - \frac{1}{4}a^2}{2v} = \frac{2ab - a^2}{4v} = \\ &= \frac{a(2b - a)}{2\sqrt{(2b - a)(2b + a)}} = \frac{a\sqrt{2b - a}}{2\sqrt{2b + a}} = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2(a + 2b)}. \end{aligned}$$

Ešte ostáva dokázať nerovnosť $R \geqq 2r$. Využijeme na to odvodené vzorce (1), z ktorých dostávame (pripomíname, že $2b > a > 0$)

$$\frac{R}{2r} = R \cdot \frac{1}{2r} = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}} \cdot \frac{a + 2b}{a\sqrt{4b^2 - a^2}} = \frac{b^2}{a(2b - a)}.$$

Nerovnosť $R \geqq 2r$ teda platí práve vtedy, keď $b^2 \geqq a(2b-a)$. Posledná nerovnosť je však ekvivalentná s nerovnosťou $(a-b)^2 \geqq 0$, ktorej platnosť je už zrejmá. Tým je dôkaz nerovnosti $R \geqq 2r$ hotový. Navyše vidíme, že rovnosť v nej nastane jedine v prípade, keď $(a-b)^2 = 0$, čiže $a = b$, teda práve vtedy, keď je pôvodný trojuholník nielen rovnoramenný, ale dokonca rovnostranný.

C – I – 6

Ak je celkový počet políčok hracej plochy párny (v zadaní pre $n = 4$ a $n = 6$), môže v poradí druhá hráčka pomýšľať na túto víťaznú stratégiu: spárovať všetky políčka hracej dosky do dvojíc tak, aby v každom páre boli políčka navzájom dosiahnuteľné jedným skokom. Pokiaľ také spárovanie políčok druhá hráčka nájde, má víťaznú stratégiu: v každom ťahu urobí skok na druhé políčko toho páru, na ktorého prvom políčku figúrka práve leží.

Ak je celkový počet políčok hracej plochy nepárny (v zadaní pre $n = 5$), môže v poradí prvá hráčka pomýšľať na túto víťaznú stratégiu: spárovať všetky políčka hracej dosky okrem jedného do dvojíc tak, aby v každom páre boli políčka navzájom dosiahnuteľné jedným skokom. Pokiaľ také spárovanie prvá hráčka nájde, má víťaznú stratégiu: v prvom ťahu položí figúrku na (jediné) nespárované políčko a v každom ďalšom ťahu urobí skok na druhé políčko toho páru, na ktorého prvom políčku figúrka práve leží.

Nájsť požadované spárovania políčok je pre zadané príklady ľahké a je to možné urobiť viacerými spôsobmi. Ukážme tie z nich, ktoré majú určité črty pravidelnosti. Na obr. 19 zľava je vidno, ako je možné spárovať políčka časti hracej plochy o rozmeroch 4×2; celú hraciu plochu 4×4 rozdelíme na dva také bloky a urobíme spárovanie v každom z nich. I na spárovanie políčok hracej plochy 6×6 môžeme využiť spárovanie v dvoch blokoch 4×2; na obr. 19 uprostred je znázornené možné stredovo súmerné spárovanie všetkých políčok. Nakoniec na obr. 19 vpravo je príklad spárovania políčok hracej plochy 5×5 s nespárovaným políčkom v ľavom hornom rohu (nespárované políčko nemusí byť nutne rohové); opäť je pritom využitý jeden blok 4×2.

1	2
3	4
2	1
4	3

1	2	E'	A'	D'	B'
3	4	D'	B'	C'	A'
2	1	C'	E'	$3'$	$4'$
4	3	E	C	$1'$	$2'$
A	C	B	D	$4'$	$3'$
B	D	A	E	$2'$	$1'$

•	A	B	C	D
1	2	E	A	B
3	4	C	D	F
2	1	G	E	H
4	3	H	F	G

Obr. 19

C – S – 1

Z danej rovnosti vyplýva, že číslo b je nepárne (inak by obe čísla naľavo boli párne), a teda číslo a je párne (inak by obe čísla naľavo boli nepárne). Rovnosť množín preto musí byť splnená nasledovne:

$$a \cdot [a, b] = 180 \quad \text{a} \quad b \cdot (a, b) = 45. \tag{1}$$

Keďže číslo a delí číslo $[a, b]$, je číslo $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ deliteľné druhou mocninou (párneho) čísla a, takže musí platiť buď $a = 2$, alebo $a = 6$. V prípade $a = 2$ (vzhľadom na to, že b je nepárne) platí

$$a \cdot [a, b] = 2 \cdot [2, b] = 2 \cdot 2b = 4b,$$

čo znamená, že prvá rovnosť v (1) je splnená jedine pre $b = 45$. Vtedy $b \cdot (a, b) = 45 \cdot (2, 45) = 45$, takže je splnená aj druhá rovnosť v (1), a preto dvojica $a = 2$, $b = 45$ je riešením úlohy.

V prípade $a = 6$ podobne dostaneme

$$a \cdot [a, b] = 6 \cdot [6, b] = 6 \cdot 2 \cdot [3, b] = 12 \cdot [3, b],$$

čo znamená, že prvá rovnosť v (1) je splnená práve vtedy, keď $[3, b] = 15$. Tomu vyhovujú jedine hodnoty $b = 5$ a $b = 15$. Z nich však iba hodnota $b = 15$ spĺňa druhú rovnosť v (1), ktorá je teraz v tvare $b \cdot (6, b) = 45$. Druhým riešením úlohy je teda dvojica $a = 6$, $b = 15$, žiadne ďalšie riešenia neexistujú.

Odpoveď. Hľadané dvojice sú dve, a to $a = 2$, $b = 45$ a $a = 6$, $b = 15$.

Iné riešenie. Označme $d = (a, b)$. Potom $a = ud$ a $b = vd$, pričom u, v sú nesúdeliteľné prirodzené čísla, takže $[a, b] = uvd$. Z rovností

$$a \cdot [a, b] = ud \cdot uvd = u^2vd^2 \quad \text{a} \quad b \cdot (a, b) = vd \cdot d = vd^2$$

vidíme, že číslo $a \cdot [a, b]$ je u^2-násobkom čísla $b \cdot (a, b)$, takže zadaná rovnosť množín môže byť splnená jedine tak, ako sme zapísali vzťahmi (1) v prvom riešení. Tie teraz môžeme vyjadriť rovnosťami

$$u^2vd^2 = 180 \quad \text{a} \quad vd^2 = 45.$$

Preto platí $u^2 = \frac{180}{45} = 4$, čiže $u = 2$. Z rovnosti $vd^2 = 45 = 3^2 \cdot 5$ vyplýva, že buď $d = 1$ (a $v = 45$), alebo $d = 3$ (a $v = 5$). V prvom prípade $a = ud = 2 \cdot 1 = 2$ a $b = vd = 45 \cdot 1 = 45$, v druhom $a = ud = 2 \cdot 3 = 6$ a $b = vd = 5 \cdot 3 = 15$.

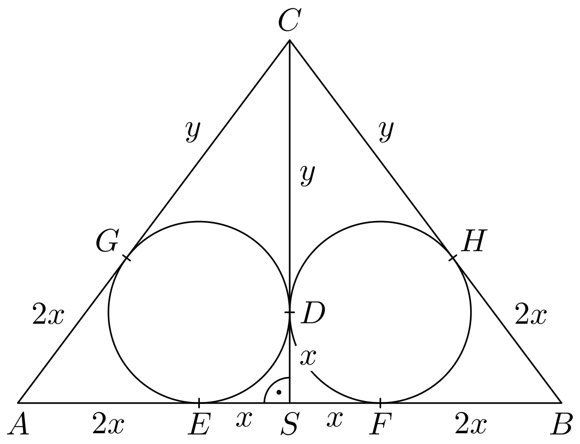
Poznámka. Keďže zo zadanej rovnosti okamžite vyplýva, že obe čísla a, b sú deliteľmi čísla 180 (takým deliteľom je dokonca aj ich najmenší spoločný násobok $[a, b]$), je možné úlohu vyriešiť rôznymi inými cestami, založenými na testovaní konečného počtu dvojíc konkrétnych čísel a a b. Takýto postup urýchlime, keď vopred zistíme niektoré nutné podmienky, ktoré musia čísla a, b spĺňať. Napríklad spresnenie rovnosti množín na dvojicu rovností (1) možno (aj bez použitia úvahy o parite čísel a, b) vysvetliť všeobecným postrehom: súčin $a \cdot [a, b]$ je *vždy* deliteľný súčinom $b \cdot (a, b)$, pretože ich podiel možno zapísať v tvare

$$\frac{a \cdot [a,b]}{b \cdot (a,b)} = \frac{a}{(a,b)} \cdot \frac{[a,b]}{b},$$

teda ako súčin dvoch *celých* čísel.

C – S – 2

Vďaka súmernosti podľa priamky CS sa obe vpísané kružnice dotýkajú výšky CS v rovnakom bode, ktorý označíme D. Body dotyku týchto kružníc s úsečkami AS, BS, AC, BC označíme postupne E, F, G, H (obr. 20). Pre vyjadrenie všetkých potrebných dĺžok ešte zavedieme označenie $x = |SD|$ a $y = |CD|$.



Obr. 20

Vzhľadom na symetriu dotyčníc z daného bodu k danej kružnici platia rovnosti

$$|SD| = |SE| = |SF| = x \quad \text{a} \quad |CD| = |CG| = |CH| = y.$$

Úsečka EF má preto dĺžku $2x$, ktorá je podľa zadania zároveň dĺžkou úsečiek AE a BF, a teda aj dĺžkou úsečiek AG a BH (opäť vďaka symetrii dotyčníc). Odtiaľ už bezprostredne vyplývajú rovnosti

$$|AB| = 6x, \quad |AC| = |BC| = 2x + y \quad \text{a} \quad |CS| = x + y.$$

Závislosť medzi dĺžkami x a y zistíme použitím Pytagorovej vety pre pravouhlý trojuholník ACS (s odvesnou AS dĺžky $3x$):

$$(2x + y)^2 = (3x)^2 + (x + y)^2.$$

Roznásobením a ďalšími úpravami odtiaľ dostaneme (x a y sú kladné hodnoty)

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4xy + y^2 &= 9x^2 + x^2 + 2xy + y^2, \\ 2xy &= 6x^2, \\ y &= 3x. \end{aligned}$$

Hľadaný pomer tak má hodnotu

$$|AB| : |CS| = 6x : (x + y) = 6x : 4x = 3 : 2.$$

Poznamenajme, že prakticky rovnaký postup celého riešenia možno zapísať aj pri štandardnom označení $c = |AB|$ a $v = |CS|$. Keďže podľa zadania platí $|AE| = \frac{1}{3}c$, a teda $|SE| = \frac{1}{6}c$, z rovnosti $|SD| = |SE|$ vyplýva $|CD| = |CS| - |SD| = v - \frac{1}{6}c$, odkiaľ

$$|AC| = |AG| + |CG| = |AE| + |CD| = \tfrac{1}{3}c + (v - \tfrac{1}{6}c) = v + \tfrac{1}{6}c,$$

takže z Pytagorovej vety pre trojuholník ACS,

$$(v + \tfrac{1}{6}c)^2 = (\tfrac{1}{2}c)^2 + v^2,$$

vychádza $3v = 2c$, čiže $c : v = 3 : 2$.

C – S – 3

Druhá zo zadaných rovníc napovedá, že by sme mali skúmať odchýlky čísel v dvojiciach p, q a r, s. Pre súčet druhých mocnín týchto odchýlok platí

$$(p - q)^2 + (r - s)^2 = \left(p^2 + q^2 + r^2 + s^2\right) - 2(pq + rs) = 4 - 2 \cdot 1 = 2.$$

Avšak ak je súčet dvoch reálnych čísel rovný číslu 2, nemôžu byť oba sčítance ani väčšie ako 1, ani menšie ako 1. Jedno z čísel $(p - q)^2$, $(r - s)^2$ je teda najviac 1 a jedno je najmenej 1. To isté potom platí aj o číslach $|p - q|$ a $|r - s|$, čo sme chceli dokázať.

C – II – 1

Aby sme mohli použiť vzorec $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, presuňme najskôr jeden z krajných členov ľavej strany, napríklad člen z^2, na pravú stranu:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &> (x - y + z)^2 - z^2, \\ (x - y)(x + y) &> (x - y + z - z)(x - y + z + z), \\ (x - y)(x + y) &> (x - y)(x - y + 2z). \end{aligned}$$

Keďže spoločný činiteľ $x - y$ oboch strán poslednej nerovnosti je podľa predpokladu úlohy číslo záporné, budeme s dôkazom hotoví, keď ukážeme, že zvyšné činitele spĺňajú opačnú nerovnosť $x + y < x - y + 2z$. Tá je však zrejme ekvivalentná s nerovnosťou $2y < 2z$, čiže $y < z$, ktorá podľa zadania úlohy naozaj platí.

Iné riešenie. Podľa vzorca pre druhú mocninu trojčlena platí

$$(x - y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz.$$

Dosaďme to do pravej strany dokazovanej nerovnosti a urobme niekoľko ďalších ekvivalentných úprav:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + z^2 &> x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz, \\ 0 &> 2y^2 - 2xy + 2xz - 2yz, \\ 0 &> 2y(y - x) + 2z(x - y), \\ 0 &> 2(y - x)(y - z). \end{aligned}$$

Posledná nerovnosť už vyplýva z predpokladov úlohy, podľa ktorých je činiteľ $y - x$ kladný, zatiaľ čo činiteľ $y - z$ je záporný.

C – II – 2

Označme $\overline{abc}$ to trojciferné číslo, o ktorého trojnásobku sa píše v texte úlohy. Platí tak rovnica

$$3\overline{abc} + 6 = \overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba}.$$

Keďže na pravej strane je každá z cifier a, b, c dvakrát na mieste jednotiek, desiatok aj stoviek, môžeme rovnicu prepísať na tvar

$$300a + 30b + 3c + 6 = 222a + 222b + 222c, \quad \text{čiže} \quad 78a + 6 = 192b + 219c.$$

Po vydelení číslom 3 dostaneme rovnicu $26a + 2 = 64b + 73c$, z ktorej vidíme, že c je párna cifra. Platí preto $c \geqq 2$, čo spolu so zrejmou nerovnosťou $b \geqq 1$ (pripomíname, že všetky tri neznáme cifry sú podľa zadania nenulové) vedie na odhad

$$64b + 73c \geqq 64 + 146 = 210.$$

Musí preto platiť $26a + 2 \geqq 210$, odkiaľ $a \geqq (210 - 2) : 26 = 8$, takže cifra a je buď 8, alebo 9. Pre $a = 8$ však v nerovnosti z predošlej vety nastane rovnosť, takže nutne $b = 1$ a $c = 2$ (a rovnica zo zadania úlohy je potom splnená). Pre $a = 9$ dostávame rovnicu

$$64b + 73c = 26 \cdot 9 + 2 = 236,$$

z ktorej vyplýva, že c je jednak deliteľné štyrmi, jednak je menšie ako 4, čo nemôže nastať súčasne.

Odpoveď. Cifry na kartičkách sú 8, 2 a 1.

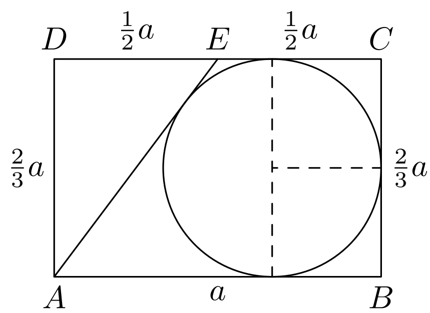
Poznámka. Riešiť odvodenú rovnicu $26a + 2 = 64b + 73c$ pre neznáme (nenulové a navzájom rôzne) cifry a, b, c možno viacerými úplnými a systematickými postupmi, uviedli sme len jeden z nich.

C – II – 3

Keďže štvoruholník $ABCE$ je podľa zadania dotyčnicový, pre dĺžky jeho strán platí známa rovnosť[1]

$$|AB| + |CE| = |BC| + |AE|.$$

V našej situácii pri označení $a = |AB|$ platí $|BC| = |AD| = \frac{2}{3}a$ a $|CE| = |DE| = \frac{1}{2}a$ (obr. 21), odkiaľ po dosadení do uvedenej rovnosti zistíme, že $|AE| = \frac{5}{6}a$.



Obr. 21

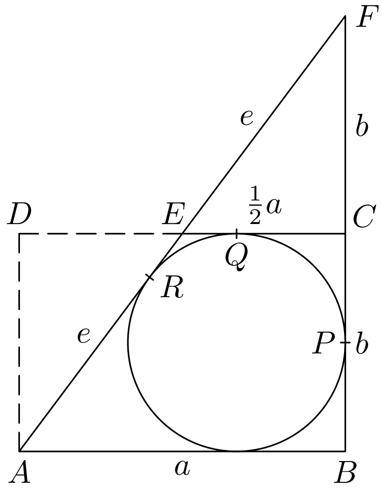
Teraz si všimneme, že pre dĺžky strán trojuholníka ADE platí

$$|AD| : |DE| : |AE| = \tfrac{2}{3}a : \tfrac{1}{2}a : \tfrac{5}{6}a = 4 : 3 : 5,$$

takže podľa (obrátenej časti) Pytagorovej vety má trojuholník ADE pravý uhol pri vrchole D, a teda rovnobežník $ABCD$ je obdĺžnik. Dotyčnica BC kružnice vpísanej štvoruholníku $ABCE$ je teda kolmá na dve jej (navzájom rovnobežné) dotyčnice AB a CE. To už zrejme znamená, že bod dotyku dotyčnice BC je stredom úsečky BC (vyplýva to zo zistenej kolmosti vyznačeného priemeru kružnice na jej vyznačený polomer).

Iné riešenie. Ukážeme, že požadované tvrdenie možno dokázať aj bez všimnutia si, že rovnobežník $ABCD$ je v danej úlohe obdĺžnikom. Namiesto toho využijeme, že úsečka CE je stredná priečka trojuholníka ABF, pričom F je priesečník polpriamok BC a AE (obr. 22), lebo $CE \parallel AB$ a $|CE| = \frac{1}{2}|AB|$. Označme preto $a = |AB| = 2|CE|$,

[1] Rovnosť sa odvodí rozpísaním dĺžok strán na ich úseky vymedzené bodmi dotyku vpísanej kružnice a následným využitím toho, že každé dva z týchto úsekov, ktoré vychádzajú z rovnakého vrcholu štvoruholníka, sú zhodné.



Obr. 22

$b = |BC| = |CF|$ a $e = |AE| = |EF|$ (rovnosť $2a = 3b$ použijeme až neskôr). Rovnako ako v prvom riešení využijeme rovnosť $b+e = a+\frac{1}{2}a$ $(=\frac{3}{2}a)$, ktorá platí pre dĺžky strán dotyčnicového štvoruholníka $ABCE$. Kružnica jemu vpísaná sa dotýka strán BC, CE, AE postupne v bodoch P, Q, R tak, že platia rovnosti

$$|CP| = |CQ|, \quad |EQ| = |ER| \quad \text{a tiež} \quad |FP| = |FR|.$$

Pre súčet zhodných dĺžok $|FP|$ a $|FR|$ teda platí

$$|FP| + |FR| = (b + |CP|) + (e + |ER|) = (b + e) + (|CP| + |ER|) = \\ = \tfrac{3}{2}a + (|CQ| + |EQ|) = \tfrac{3}{2}a + \tfrac{1}{2}a = 2a,$$

čo znamená, že $|FP| = |FR| = a$.

Teraz už riešenie úlohy ľahko dokončíme. Rovnosť $|BP| = \frac{1}{2}b$, ktorú máme v našej situácii dokázať, vyplýva z rovnosti

$$|BP| = |BF| - |FP| = 2b - a,$$

keď do nej dosadíme zadaný vzťah $a = \frac{3}{2}b$.

C – II – 4

Úloha dvoch po sebe zotieraných čísel je v zadanej hre symetrická: ak je po čísle x možné zotrieť číslo y, je (pri inom priebehu hry) po čísle y možné zotrieť číslo x. Preto si môžeme celú hru (so zadaným číslom n) „sprehľadniť“ tak, že najskôr vypíšeme všetky takéto (nazývajme ich *prípustné*) dvojice (x, y). Keďže na poradí čísel v prípustnej dvojici nezáleží, stačí vypisovať len tie dvojice (x, y), v ktorých $x < y$.

V prípade $n = 6$ všetky prípustné dvojice sú

$$(1, 3),\ (1, 4),\ (1, 5),\ (1, 6),\ (2, 5),\ (3, 5).$$

Z tohto zoznamu ľahko odhalíme, že víťaznú stratégiu má (prvá) hráčka Marína. Ak totiž zotrie na začiatku hry číslo 4, musí Tamara zotrieť číslo 1, a keď potom Marína zotrie číslo 6, nemôže už Tamara žiadne ďalšie číslo zotrieť. Okrem tohto priebehu $4 \to 1 \to 6$ si môže Marína zaistiť víťazstvo aj inými, pre Tamaru „vynútenými“ priebehmi, napríklad $6 \to 1 \to 4$ alebo $4 \to 1 \to 3 \to 5 \to 2$.

V prípade $n = 12$ je všetkých prípustných dvojíc výrazne väčšie množstvo. Preto si položíme otázku, či všetky čísla od 1 do 12 možno rozdeliť na šesť prípustných dvojíc. Ak totiž nájdeme takú šesticu, môžeme opísať víťaznú stratégiu druhej hráčky (Tamary): ak zotrie Marína pri ktoromkoľvek svojom ťahu číslo x, Tamara potom vždy zotrie to číslo y, ktoré s číslom x tvorí jednu zo šiestich nájdených dvojíc. Tak nakoniec Tamara zotrie aj posledné (dvanáste) číslo a vyhrá (prípadne hra skončí skôr tak, že Marína nebude môcť zotrieť žiadne číslo).

Hľadané rozdelenie všetkých 12 čísel do šiestich dvojíc naozaj existuje, napríklad

$$(1,4),\ (2,9),\ (3,8),\ (5,12),\ (6,11),\ (7,10).$$

Iné vyhovujúce rozdelenie dostaneme, keď v predošlom dvojice $(1,4)$ a $(6,11)$ zameníme dvojicami $(1,6)$ a $(4,11)$. Ďalšie, menej podobné vyhovujúce rozdelenie je napríklad

$$(1,6),\ (2,5),\ (3,10),\ (4,9),\ (7,12),\ (8,11).$$

Odpoveď. Pre $n = 6$ má víťaznú stratégiu Marína, pre $n = 12$ Tamara.

Kategória B

B – I – 1

Uvažované desaťciferné čísla označme $\overline{a_9a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$, pričom a_9, a_8, …, a_0 sú navzájom rôzne cifry, teda všetky cifry 0, 1, 2, …, 9 v nejakom poradí. Ďalej označme $s_2 = a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + a_8$ súčet jeho cifier na párnych[2] miestach a $s_1 = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$ súčet cifier na nepárnych miestach.

Na zistenie deliteľnosti jedenástimi použijeme známe kritérium: Číslo $\overline{a_9a_8\dots a_1a_0}$ je deliteľné jedenástimi práve vtedy, keď je jedenástimi deliteľný príslušný rozdiel $s_2 - s_1$. Zrejme $|s_2 - s_1| \leqq (9+8+7+6+5) - (4+3+2+1+0) = 25$, čiže $-25 \leqq s_2 - s_1 \leqq 25$. Súčet $s_2 + s_1 = 0 + 1 + 2 + \ldots + 9 = 45$ je nepárne číslo, preto musí byť nepárne aj číslo $s_2 - s_1$. Pre vyhovujúce číslo môžu teda nastať dve možnosti: $s_2 - s_1 = -11$ alebo $s_2 - s_1 = 11$.

V prvom prípade zo sústavy rovníc $s_2 + s_1 = 45$, $s_2 - s_1 = 11$ dostaneme $s_2 = 28$, $s_1 = 17$, v druhom naopak $s_2 = 17$, $s_1 = 28$.

[2] Miesta číslujeme podľa mocnín desiatky v dekadickom zápise; pre riešenie samozrejme nie je podstatné, ktoré miesta označíme za párne a ktoré za nepárne, dôležité je len to, že sa párne a nepárne miesta striedajú.

Číslo 17 rozpíšeme všetkými možnými spôsobmi na súčet piatich navzájom rôznych cifier:

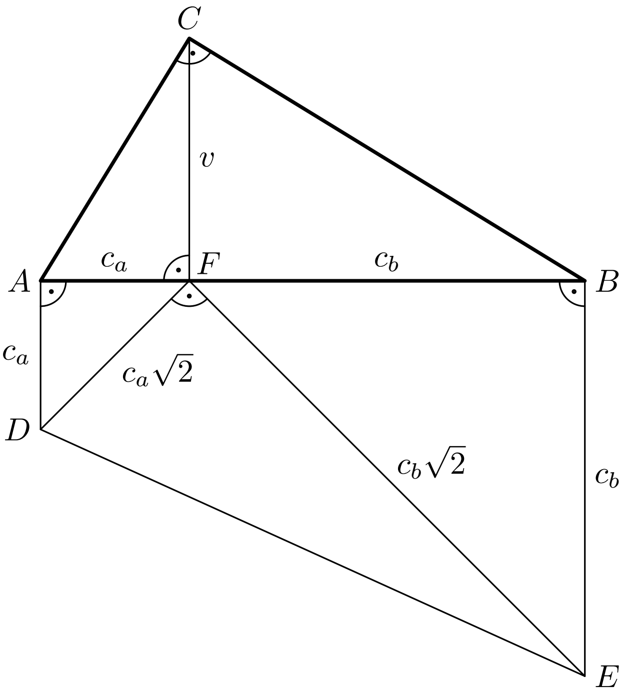
$$\begin{aligned}17 &= 9+5+2+1+0 = 9+4+3+1+0 =\\ &= 8+6+2+1+0 = 8+5+3+1+0 = 8+4+3+2+0 =\\ &= 7+6+3+1+0 = 7+5+4+1+0 = 7+5+3+2+0 = 7+4+3+2+1 =\\ &= 6+5+4+2+0 = 6+5+3+2+1.\end{aligned}$$

Medzi desaťcifernými číslami zapísanými všetkými desiatimi ciframi sú určite najväčšie tie, ktoré začínajú ciframi 987 alebo dokonca 9876. Vzhľadom na nájdené rozklady čísla 17 to zrejme nemožno dosiahnuť pre $s_1 = 17$, zato pre $s_2 = 17$ áno: stačí za s_2 zobrať súčet $17 = 8+6+2+1+0$, čo je zároveň jediná možnosť. Ostatné cifry už na základe tejto voľby doplníme jednoznačne tak, aby sme dostali číslo čo najväčšie. Hľadané najväčšie číslo je teda 9 876 524 130.

Najmenšie číslo nájdeme analogickým postupom. Keďže $a_9 \neq 0$, sú medzi uvažovanými číslami určite najmenšie tie, ktoré začínajú ciframi 102. Z nájdených rozkladov čísla 17 opäť vidíme, že to možno dosiahnuť jedine voľbou $s_1 = 17 = 6+5+3+2+1$. Tomu potom zodpovedá číslo (keďže poznáme všetky jeho cifry na nepárnych aj párnych miestach, je ich usporiadanie určené požiadavkou, aby výsledné číslo bolo najmenšie) 1 024 375 869.

B – I – 2

Označme úsečky (a ich dĺžky) ako na obr. 23. Keďže DAF a EBF sú pravouhlé rovnoramenné trojuholníky, majú uhly pri ich preponách veľkosť 45°, takže $|\angle DFE| =$



Obr. 23

$= 90°$ a trojuholník DEF je pravouhlý s odvesnami, ktoré sú zároveň preponami oboch rovnoramenných pravouhlých trojuholníkov. Pre obsahy P a Q oboch uvažovaných trojuholníkov preto platí

$$P = \frac{1}{2}(c_a + c_b)v \qquad \text{a} \qquad Q = \frac{1}{2} \cdot c_a\sqrt{2} \cdot c_b\sqrt{2}.$$

Podľa Euklidovej vety o výške v danom pravouhlom trojuholníku platí $v = \sqrt{c_a c_b}$. Na dôkaz danej nerovnosti stačí teda overiť, že

$$\frac{1}{2}(c_a + c_b)\sqrt{c_a c_b} \geqq \frac{1}{2} \cdot c_a\sqrt{2} \cdot c_b\sqrt{2}.$$

Po jednoduchej (ekvivalentnej) úprave dostaneme

$$c_a + c_b \geqq 2\sqrt{c_a c_b}, \qquad \text{čiže} \qquad (\sqrt{c_a} - \sqrt{c_b})^2 \geqq 0.$$

Keďže posledná nerovnosť očividne platí, je dôkaz tvrdenia ukončený. Rovnosť pritom nastane práve vtedy, keď $c_a = c_b$, t. j. práve vtedy, keď je daný pravouhlý trojuholník ABC rovnoramenný.

Iné riešenie. Rovnako ako v prvom riešení vyjdeme zo zrejmého poznatku, že trojuholník DEF je pravouhlý. Odvesny oboch uvažovaných pravouhlých trojuholníkov majú rovnaké kolmé priemety na priamku AB, pritom

$$|AF| = |AC|\cos\gamma_1 = |DF|\cos 45°, \quad |BF| = |BC|\cos\gamma_2 = |EF|\cos 45°,$$

kde γ_1, γ_2 označujú zodpovedajúce časti pravého uhla pri vrchole C, takže $\gamma_2 = 90° - \gamma_1$. Keďže $\cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, vyplýva odtiaľ pre dvojnásobky oboch obsahov

$$\begin{aligned} 2P = |AC| \cdot |BC| &= |DF| \cdot |EF| \cdot \frac{\cos 45°}{\cos\gamma_1} \cdot \frac{\cos 45°}{\cos\gamma_2} = \\ &= 2Q \cdot \frac{1}{2\cos\gamma_1 \sin\gamma_1} = 2Q \cdot \frac{1}{\sin 2\gamma_1} \geqq 2Q. \end{aligned}$$

Rovnosť $P = Q$ zrejme nastane práve vtedy, keď $\sin 2\gamma_1 = 1$, čiže $\gamma_1 = \gamma_2 = 45°$, teda práve vtedy, keď je daný trojuholník ABC rovnoramenný.

B – I – 3

Z druhej rovnice vyplýva, že $\lfloor x \rfloor \neq 0$, a $y = 8/\lfloor x \rfloor$ je tým pádom nenulové číslo v absolútnej hodnote nie väčšie ako 8. Po dosadení do prvej rovnice dostaneme rovnicu

$$x \cdot \left\lfloor \frac{8}{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = 7, \tag{1}$$

ktorá je v skutočnosti s danou sústavou ekvivalentná v nasledujúcom zmysle: ak priradíme ľubovoľnému riešeniu x rovnice (1) hodnotu $y = 8/\lfloor x\rfloor$, bude zrejme dvojica (x, y) riešením pôvodnej sústavy.

Budeme preto postupne hľadať riešenia rovnice (1) pre jednotlivé hodnoty celých čísel $a = \lfloor 8/\lfloor x\rfloor\rfloor \in \{-8, \dots, -1, 1, \dots, 8\}$ tak, že vypočítame $x = 7/a$, $y = 8/\lfloor x\rfloor$ a overíme, či $\lfloor y\rfloor = a$. Navyše je vzhľadom na nerovnosť $\lfloor x\rfloor \neq 0$ z rovnice (1) zrejmé, že $a \neq 8$.

Pre $a = -8$ je $x = -\frac{7}{8}$, $\lfloor x\rfloor = -1$ a $y = -8$, teda $\lfloor y\rfloor = a$.

Pre $a = -7$ je $x = -1 = \lfloor x\rfloor$ a $y = -8$, teda $\lfloor y\rfloor < a$.

Pre $a = -6$ je $x = -\frac{7}{6}$, $\lfloor x\rfloor = -2$ a $y = -4$, teda $\lfloor y\rfloor > a$.

Pre $a = -5$ je $x = -\frac{7}{5}$, $\lfloor x\rfloor = -2$ a $y = -4$, teda $\lfloor y\rfloor > a$.

Pre $a = -4$ je $x = -\frac{7}{4}$, $\lfloor x\rfloor = -2$ a $y = -4$, teda $\lfloor y\rfloor = a$.

Pre $a = -3$ je $x = -\frac{7}{3}$, $\lfloor x\rfloor = -3$ a $y = -\frac{8}{3}$, teda $\lfloor y\rfloor = a$.

Pre $a = -2$ je $x = -\frac{7}{2}$, $\lfloor x\rfloor = -4$ a $y = -2$, teda $\lfloor y\rfloor = a$.

Pre $a = -1$ je $x = -7 = \lfloor x\rfloor$ a $y = -\frac{8}{7}$, teda $\lfloor y\rfloor < a$.

Pre $a = 1$ je $x = 7 = \lfloor x\rfloor$ a $y = \frac{8}{7}$, teda $\lfloor y\rfloor = a$.

Pre $a = 2$ je $x = \frac{7}{2}$, $\lfloor x\rfloor = 3$ a $y = \frac{8}{3}$, teda $\lfloor y\rfloor = a$.

Pre $a = 3$ je $x = \frac{7}{3}$, $\lfloor x\rfloor = 2$ a $y = 4$, teda $\lfloor y\rfloor > a$.

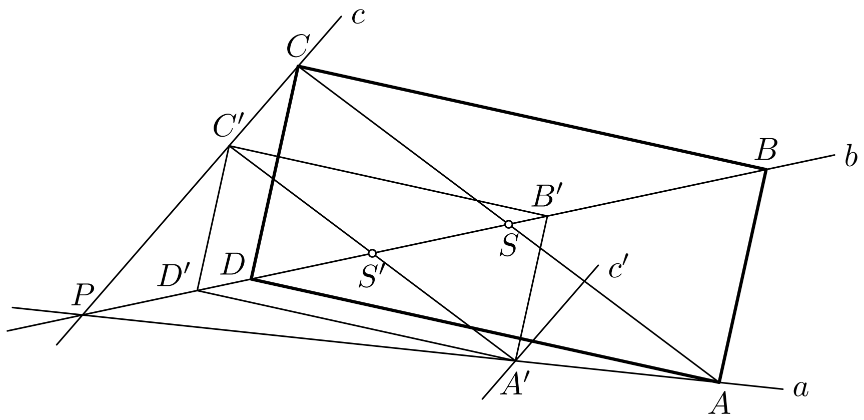
Pre $a \in \{4, 5, 6, 7\}$ je $\lfloor x\rfloor = 1$ a $y = 8$, teda $\lfloor y\rfloor > a$.

Záver. Sústava rovníc má 6 riešení, sú nimi usporiadané dvojice $\left(-\frac{7}{8}, -8\right)$, $\left(-\frac{7}{4}, -4\right)$, $\left(-\frac{7}{3}, -\frac{8}{3}\right)$, $\left(-\frac{7}{2}, -2\right)$, $\left(7, \frac{8}{7}\right)$ a $\left(\frac{7}{2}, \frac{8}{3}\right)$.

B – I – 4

Označme S priesečník uhlopriečok AC a BD, ktorý má ležať na priamke $b = PB$. Pritom nemôže byť $S = P$, pretože potom by na priamke a ležal aj vrchol C. Taká možnosť odporuje zadaniu.

Preto ak zvolíme na priamke b ľubovoľný bod S', $S' \neq P$, existuje práve jedna rovnoľahlosť so stredom P, ktorá zobrazí bod S na S'. V tejto rovnoľahlosti sa pravouholník $ABCD$ zobrazí na pravouholník $A'B'C'D'$ s priesečníkom uhlopriečok S', pritom $A' \in a$, $B', D' \in b$ a $C' \in c$. Keďže vrcholy A', C' sú súmerne združené podľa zvoleného stredu S' (obr. 24), zostrojíme bod A' ako priesečník priamky a s priamkou c', ktorá je súmerne združená s priamkou c podľa stredu S'. Potom už ľahko z bodov A', S' určíme bod C' a napokon – vďaka pravým uhlom $A'B'C'$ a $A'D'C'$ – nájdeme body B', D' ako priesečníky priamky b s Tálesovou kružnicou nad priemerom $A'C'$. Pritom tieto dva priesečníky môžeme označiť ako B', D' v ľubovoľnom poradí s výnimkou prípadu, keď jeden z priesečníkov splynie s bodom P; v takom prípade môže byť jedine $D' = P$, lebo z $B \neq P$ vyplýva $B' \neq P$. Nakoniec zobrazíme pravouholník $A'B'C'D'$ v „spätnej“ rovnoľahlosti, v ktorej $B' \mapsto B$. Tak dostaneme štvoruholník $ABCD$, ktorý má zrejme všetky požadované vlastnosti.



Obr. 24

Diskusia. Pre zvolený bod $S' \in b$, $S' \neq P$, body A' a C' existujú a sú jediné (priamky a, c' sú totiž rôznobežky a žiadna z nich stredom súmernosti S' neprechádza). Kružnica nad priemerom $A'C'$ má kladný polomer, a preto má s priamkou b prechádzajúcou jej stredom S' vždy dva priesečníky. Ak sú oba rôzne od bodu P, má úloha dve riešenia. Jeden z týchto dvoch priesečníkov splynie s bodom P práve vtedy, keď bude uhol $A'PC'$ pravý, teda práve vtedy, keď dané priamky a, c budú navzájom kolmé. V takom prípade bude $D' = P$ a úloha bude mať jediné riešenie (vrchol D splynie s bodom P).

B – I – 5

a) Nech m je počet klebetníkov. Keďže každý klebetník je v spojení s tromi klebetnicami, je medzi všetkými celkom $3m$ spojení. A keďže k rovnakému výsledku musíme dôjsť, keď spočítame všetky spojenia jednotlivých klebetníc, z ktorých každá je v spojení s tromi klebetníkmi, je klebetníc tiež m.

b) Predpokladajme, že po odsťahovaní jedného z klebetníkov sa sieť rozpadne na niekoľko súvislých častí. To znamená, že odsťahovaný klebetník bol v spojení s aspoň jednou klebetnicou v každej zo vzniknutých častí, inak by príslušná časť nebola prepojená so zvyškom siete už pred jeho odchodom. Odtiaľ je ďalej zrejmé, že vzniknuté časti sú nanajvýš tri, pričom počet klebetníc, ktoré boli v spojení s odsťahovaným klebetníkom, musí v každej z nich byť 1 alebo 2.

Uvažujme ľubovoľnú z častí, na ktoré sa sieť rozpadla, a označme m a n prislúchajúce počty klebetníkov a klebetníc v tejto časti. Ak teraz spočítame počet spojení všetkých klebetníkov v tejto časti, dostaneme $3m$. Vzhľadom na to, že jedna alebo dve klebetnice o jedno spojenie prišli, je celkový počet ich spojení s klebetníkmi $3n-2$ alebo $3n-1$. Ani jedno z týchto čísel však nie je deliteľné tromi, preto sa nemôže nikdy rovnať celkovému počtu spojení klebetníkov vo zvolenej časti. To je spor, ktorý dokazuje tvrdenie b) úlohy.

B – I – 6

Opísaná hra je zrejme spravodlivá v tom zmysle, že obaja hráči majú rovnaký počet možností ako vyhrať. Aby sme zistili požadovaný počet, stačí zistiť, koľkými spôsobmi môže nastať remíza, teda jeden z výsledkov 0 : 0, 1 : 1 a 2 : 2.

Prípad 0 : 0 nastane, ak obaja hráči vyložia v každom kole rovnaké karty. Takých možností je $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$.

Výsledok 1 : 1 znamená, že hráči vyložia rovnaké karty v troch kolách a v dvoch zvyšných kolách vyložia dve rôzne karty (x, y), každý v inom poradí. Každý taký výsledok je teda jednoznačne určený poradím kariet jedného z hráčov a výberom kôl, v ktorých druhý hráč zahrá rovnako. Tri kolá z piatich možno vybrať 10 spôsobmi a päť kariet možno usporiadať 5! spôsobmi. Výsledok 1 : 1 tak nastane v $10 \cdot 5!$ prípadoch.

Ostáva vyšetriť, kedy nastane výsledok 2 : 2. Tú kartu x, ktorú vyložia hráči v jednom z piatich kôl obaja naraz, je možné vybrať 5 spôsobmi. Anne aj Borisovi potom zvýšia štyri karty $a < b < c < d$. Keďže na poradí kôl nezáleží, spočítajme najprv, koľko je možností v prípade, že Anna vyloží karty x, a, b, c, d v tomto poradí. Aby nedošlo k ďalšej remíze, musí Anna získať ďalší bod v poslednom kole za kartu d, zatiaľ čo Boris musí získať bod v druhom kole, keď Anna vyloží kartu a. Preto stačí zistiť, aké má Boris v treťom a štvrtom kole možnosti, aby tieto dve kolá skončili 1 : 1.

V týchto kolách musí Boris vyložiť jednu z dvojíc (a, d), (c, a), (c, b), (d, a), (d, b), ktoré možno doplniť kartami pre druhé a piate kolo tak, aby v nich nenastala remíza, do celkom siedmich poradí:

$$(x, b, a, d, c),\ (x, c, a, d, b),\ (x, d, c, a, b),\ (x, d, c, b, a),\ (x, b, d, a, c),$$
$$(x, c, d, a, b),\ (x, c, d, b, a).$$

Anna môže karty x, a, b, c, d vyložiť 5! spôsobmi. Výsledok 2 : 2 tak nastane v $5 \cdot 7 \cdot 5!$ prípadoch.

Celkovo môžu ako Anna, tak Boris vyložiť karty 5! spôsobmi, to je dokopy $5!^2$ možností. Keďže počet všetkých možných priebehov hry, v ktorých nastane remíza, je rovný $5! + 10 \cdot 5! + 5 \cdot 7 \cdot 5! = 5! \cdot 46$, je počet možných výhier každého z nich $\frac{1}{2}(5!^2 - 5! \cdot 46) = 5! \cdot 37$. Výhrou Anny teda skončí

$$\frac{5! \cdot 37}{5!^2} = \frac{37}{120} \approx 0{,}31 = 31\,\%$$

všetkých možných hier.

B – S – 1

Vynásobením oboch strán danej rovnice štyrmi dostaneme

$$4x^2 + 4y^2 + 4x + 4y = 16.$$

Výraz na ľavej strane takto upravenej rovnice doplníme na súčet druhých mocnín dvoch dvojčlenov. Obdržíme tak

$$(4x^2 + 4x + 1) + (4y^2 + 4y + 1) = (2x + 1)^2 + (2y + 1)^2 = 18.$$

Stačí teda vyšetriť všetky rozklady čísla 18 na súčet dvoch kladných nepárnych čísel, pretože čísla $2x+1$ a $2y+1$ nie sú deliteľné dvoma pre žiadne celé x a y.

Uvažujme preto nasledujúce rozklady:

$$18 = 1 + 17 = 3 + 15 = 5 + 13 = 7 + 11 = 9 + 9.$$

Medzi uvedenými súčtami je iba jeden ($18 = 9 + 9$) súčtom druhých mocnín dvoch celých čísel. Môžu teda nastať nasledujúce štyri prípady:

$$\begin{aligned}
&2x+1=3, && 2y+1=3, && \text{t. j. } x=1, && y=1,\\
&2x+1=3, && 2y+1=-3, && \text{t. j. } x=1, && y=-2,\\
&2x+1=-3, && 2y+1=3, && \text{t. j. } x=-2, && y=1,\\
&2x+1=-3, && 2y+1=-3, && \text{t. j. } x=-2, && y=-2.
\end{aligned}$$

Záver. Danej rovnici vyhovujú práve štyri dvojice celých čísel (x,y), a to $(1,1)$, $(1,-2)$, $(-2,1)$ a $(-2,-2)$.

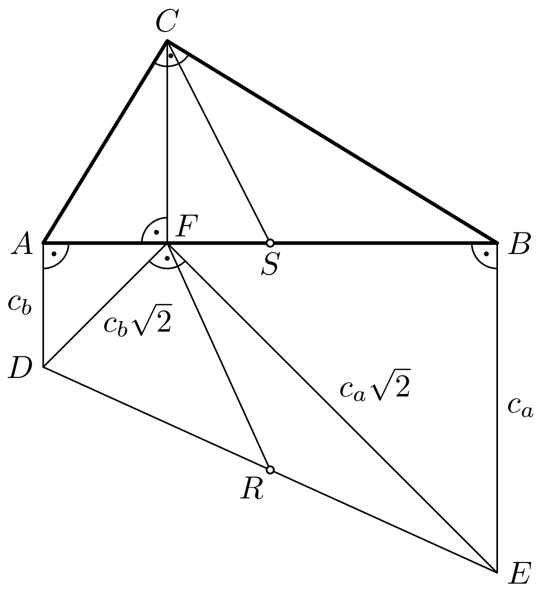
Iné riešenie. Danú rovnicu možno upraviť na tvar $x(x+1)+y(y+1)=4$, z ktorého vidno, že číslo 4 je nutné rozložiť na súčet dvoch celých čísel, z ktorých každé je súčinom dvoch po sebe idúcich celých čísel. Keďže najmenšie hodnoty výrazu $t(t+1)$ pre kladné aj záporné celé t sú $0, 2, 6, 12, \dots$, do úvahy prichádza iba rozklad $4 = 2 + 2$, takže každá z neznámych x, y sa rovná jednému z čísel 1 či -2 – jediných celých čísel t, pre ktoré $t(t+1)=2$. Navyše je jasné, že naopak každá zo štyroch dvojíc (x,y) zostavených z čísel 1, -2 je riešením danej úlohy.

B – S – 2

Keďže DAF a EBF sú pravouhlé rovnoramenné trojuholníky, majú uhly pri ich preponách veľkosť 45°, takže trojuholník DEF je pravouhlý. Označme S stred úsečky AB (obr. 25). Keďže stred prepony pravouhlého trojuholníka je zároveň stredom jeho opísanej kružnice, zrejme platí $|RF| = \frac{1}{2}|DE|$ a $|CS| = \frac{1}{2}|AB|$. Pritom AD a BE sú dve rovnobežné priamky, ktorých vzdialenosť je rovná $|AB|$, a preto $|DE| \geqq |AB|$. Platí teda

$$|RF| = \frac{1}{2}|DE| \geqq \frac{1}{2}|AB| = |CS| \geqq |CF|,$$

čo sme chceli dokázať.



Obr. 25

Rovnosť nastane práve vtedy, keď $|DE| = |AB|$ a $|CS| = |CF|$, teda práve vtedy, keď $S = F$ (potom je aj $|AD| = |AS| = |BS| = |BE|$ a $|DE| = |AB|$), čiže práve vtedy, keď je trojuholník ABC rovnoramenný.

Iné riešenie. Označme $c_a = |BF|$ a $c_b = |AF|$. Vzhľadom na to, že $|AD| = c_b$ a $|BE| = c_a$ (obr. 25), vidíme, že pre dĺžku prepony DE v pravouhlom trojuholníku DEF (poz. riešenie 2. úlohy domáceho kola) dostaneme použitím nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom pre dvojicu kladných čísel c_a^2 a c_b^2 a ďalej použitím Euklidovej vety o výške CF v pravouhlom trojuholníku ABC odhad

$$|DE| = \sqrt{2(c_a^2 + c_b^2)} \geqq \sqrt{2 \cdot 2c_a c_b} = 2\sqrt{c_a c_b} = 2|CF|.$$

Keďže v pravouhlom trojuholníku DEF platí $|RF| = \frac{1}{2}|DE|$, dostávame využitím uvedenej nerovnosti

$$2|RF| = |DE| \geqq 2|CF| \quad \text{a odtiaľ} \quad |RF| \geqq |CF|,$$

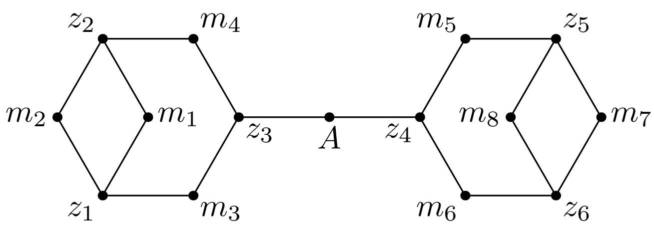
čo sme chceli dokázať.

Rovnosť nastane práve vtedy, keď sa obe priemerované hodnoty c_a^2 a c_b^2 rovnajú, t. j. keď platí $c_a = c_b$, čo nastane práve v prípade pravouhlého rovnoramenného trojuholníka ABC.

B – S – 3

Označme A toho klebetníka, po ktorého odsťahovaní sa sieť rozpadne, a M_1, Z_1 počty klebetníkov a klebetníc v jednej oddelenej skupine, M_2 a Z_2 v druhej. Keďže v každej skupine existuje aspoň jedna klebetnica a tá je ešte stále v spojení s aspoň dvoma klebetníkmi, je $M_1 \geqq 2$ a $M_2 \geqq 2$. V každej skupine medzi počtami klebetníc a klebetníkov platia teraz vzťahy $3Z_1 - 1 = 2M_1$ a $3Z_2 - 1 = 2M_2$. Rovnica tvaru $3z - 1 = 2m$ nemá celočíselné riešenie z ani pre $m = 2$, ani pre $m = 3$, až pre $m = 4$ vychádza celé $z = 3$. Najmenší možný počet členov siete tak môže byť $M_1 = M_2 = 4$, $Z_1 = Z_2 = 3$.

Takú sieť ľahko zostrojíme podľa obr. 26, v ktorom z_i sú klebetnice a m_i klebetníci.



Obr. 26

Zároveň vidíme, že uvedená sieť sa stane nesúvislou po odsťahovaní jednej z klebetníc z_3 či z_4. Najmenší počet členov siete s požadovanou vlastnosťou je preto 15.

B – II – 1

Dané čísla označme $a_1, a_2, \dots, a_{2012}$. Zrejme existuje index $k \geqq 1$ taký, že

$$a_1 + \dots + a_k < 1 \leqq a_1 + \dots + a_k + a_{k+1} < 2.$$

Čísla $a_1, \dots, a_{k+1}$ tvoria prvú požadovanú skupinu. Ďalej zrejme existuje index $l \geqq k + 2$ taký, že

$$a_{k+2} + \dots + a_l < 1 \leqq a_{k+2} + \dots + a_l + a_{l+1} < 2.$$

Čísla $a_{k+2}, \dots, a_{l+1}$ tvoria druhú požadovanú skupinu. Analogicky zrejme existuje index $m \geqq l + 2$ taký, že

$$a_{l+2} + \dots + a_m < 1 \leqq a_{l+2} + \dots + a_m + a_{m+1} < 2.$$

Čísla $a_{l+2}, \dots, a_{m+1}$ tvoria tretiu požadovanú skupinu. Keďže $a_1 + \dots + a_{m+1} < 6$, platí $a_{m+2} + \dots + a_{2012} \geqq 1$, takže čísla $a_{m+2}, \dots, a_{2012}$ tvoria štvrtú požadovanú skupinu.

B – II – 2

Najskôr si uvedomme, že čísla 27, 57 a 87 sú deliteľné tromi, čísla 37, 67 a 97 dávajú po delení tromi zvyšok 1 a čísla 17, 47 a 77 dávajú po delení tromi zvyšok 2. Označme $\overline{0} = \{27, 57, 87\}$, $\overline{1} = \{37, 67, 97\}$ a $\overline{2} = \{17, 47, 77\}$. Uvažujme teraz pravidelný deväťuholník $ABCDEFGHI$. Pri skúmaní deliteľnosti tromi súčtu trojíc prirodzených čísel priradených trom susedným vrcholom uvažovaného deväťuholníka stačí uvažovať namiesto daných čísel iba ich zvyšky po delení tromi. Pritom tri čísla môžu dať v súčte číslo deliteľné tromi jedine tak, že buď všetky tri dávajú po delení tromi rovnaký zvyšok (patria do rovnakej zvyškovej triedy), alebo sú každé z inej zvyškovej triedy. Keby však boli tri čísla priradené po sebe idúcim vrcholom z rovnakej zvyškovej triedy, muselo by z tej istej triedy byť aj číslo priradené nasledujúcemu vrcholu (ktorýmkoľvek smerom), a tým pádom aj všetky ďalšie čísla. Takých deväť čísel k dispozícii nemáme, preto ľubovoľným trom susedným vrcholom musia byť priradené čísla z navzájom rôznych zvyškových tried.

Predpokladajme najskôr, že vrcholu A je priradené niektoré číslo z množiny $\overline{0}$. V takom prípade možno vrcholom uvažovaného deväťuholníka vzhľadom na podmienky úlohy priradiť zvyškové triedy $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$ iba dvoma spôsobmi podľa toho, ktorému z dvoch susedných vrcholov vrcholu A priradíme $\overline{1}$ a ktorému $\overline{2}$. Ďalším vrcholom sú potom už zvyškové triedy vzhľadom na podmienku deliteľnosti priradené jednoznačne. Výsledné priradenie môžeme zapísať ako

$$(A,B,C,D,E,F,G,H,I) \leftrightarrow (\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{0},\overline{1},\overline{2}),$$

alebo

$$(A,B,C,D,E,F,G,H,I) \leftrightarrow (\overline{0},\overline{2},\overline{1},\overline{0},\overline{2},\overline{1},\overline{0},\overline{2},\overline{1}).$$

Podobne, ak je vrcholu A priradená zvyšková trieda $\overline{1}$, platí buď

$$(A,B,C,D,E,F,G,H,I) \leftrightarrow (\overline{1},\overline{0},\overline{2},\overline{1},\overline{0},\overline{2},\overline{1},\overline{0},\overline{2}),$$

alebo

$$(A,B,C,D,E,F,G,H,I) \leftrightarrow (\overline{1},\overline{2},\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{0}).$$

Napokon, ak je vrcholu A priradená zvyšková trieda $\overline{2}$, platí buď

$$(A,B,C,D,E,F,G,H,I) \leftrightarrow (\overline{2},\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{0},\overline{1}),$$

alebo

$$(A,B,C,D,E,F,G,H,I) \leftrightarrow (\overline{2},\overline{1},\overline{0},\overline{2},\overline{1},\overline{0},\overline{2},\overline{1},\overline{0}).$$

Podľa počtu možností, ako postupne vyberať čísla z jednotlivých zvyškových tried, každému z uvedených prípadov prislúcha podľa pravidla súčinu práve

$$(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) = 6^3$$

možností. Vzhľadom na to, že iný prípad okrem šiestich uvedených nemôže nastať, vidíme, že hľadaný počet možností, ako priradiť vrcholom uvažovaného deväťuholníka daných deväť čísel, je

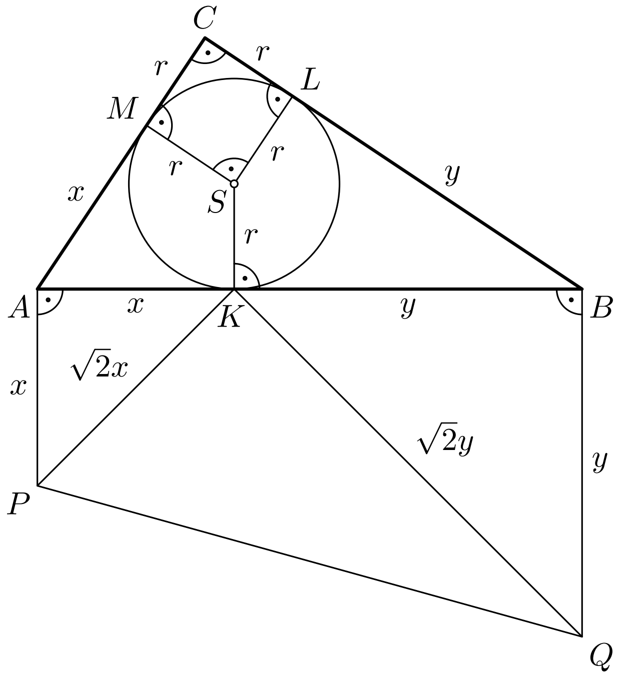
$$6 \cdot 6^3 = 6^4 = 1\,296.$$

B – II – 3

a) Označme S stred a r polomer kružnice vpísanej trojuholníku ABC a L, M body dotyku tejto kružnice postupne so stranami BC, CA (obr. 27). Ak označíme $|AK| = x$,

$|BK| = y$, tak $|AP| = |AM| = x$, $|KP| = x\sqrt{2}$, $|BQ| = |BL| = y$, $|KQ| = y\sqrt{2}$. Keďže oba uhly AKP, BKQ majú veľkosť 45°, je trojuholník PQK pravouhlý, takže jeho obsah je

$$S_{PQK} = \frac{x\sqrt{2} \cdot y\sqrt{2}}{2} = xy.$$



Obr. 27

Štvoruholník $SLCM$ je štvorec so stranou dĺžky r a $|AM| = x$, $|BL| = y$. Obsah trojuholníka ABC je rovný súčtu obsahov trojuholníkov ABS, BCS a CAS, teda

$$S_{ABC} = \frac{(x+y)r + (y+r)r + (x+r)r}{2} = (x+y+r)r.$$

Obsah trojuholníka ABC je zároveň rovný

$$S_{ABC} = \frac{|AC| \cdot |BC|}{2} = \frac{(x+r)(y+r)}{2} = \frac{xy}{2} + \frac{(x+y+r)r}{2} = \frac{xy}{2} + \frac{S_{ABC}}{2}.$$

Odtiaľ dostávame $S_{ABC} = xy$, čiže $S_{ABC} = S_{PQK}$, čo sme mali dokázať.

b) V trojuholníku ABC sú dĺžky strán $a = y+r$, $b = x+r$, $c = x+y$. Obvod trojuholníka ABC je $a + b + |AB|$, obvod trojuholníka PQK je $x\sqrt{2} + y\sqrt{2} + |PQ|$.

Zrejme platí $|AB| \leqq |PQ|$ ($|AB|$ je vzdialenosťou rovnobežiek AP, BQ, obr. 27). Rovnosť nastane jedine v prípade $|AP| = |BQ|$, čiže $x = y$.

Ešte dokážeme, že $a + b \leqq x\sqrt{2} + y\sqrt{2}$, teda že $a + b \leqq c\sqrt{2}$. Posledná nerovnosť je ekvivalentná s nerovnosťou, ktorú dostaneme jej umocnením na druhú, pretože obe jej strany sú kladné. Dostaneme tak $a^2+b^2+2ab \leqq 2c^2$. Keďže v pravouhlom trojuholníku ABC platí $a^2+b^2=c^2$, máme dokázať nerovnosť $2ab \leqq a^2+b^2$, ktorá je však ekvivalentná s nerovnosťou $0 \leqq (a-b)^2$. Tá platí pre všetky reálne čísla a, b a rovnosť v nej nastane jedine pre $a=b$, t. j. $x=y$.

Celkovo vidíme, že obvod trojuholníka ABC je menší alebo rovný obsahu trojuholníka PQK a rovnosť nastane práve vtedy, keď je pravouhlý trojuholník ABC rovnoramenný.

B – II – 4

Nutne platí $xy \neq 0$. Zrejme tiež $x \neq y$; keby bolo $x=y$, dostali by sme $\lfloor x/y \rfloor = \lfloor y/x \rfloor = 1$, takže z prvej rovnice by vyšlo $x=5$ a z druhej rovnice $y=-6$, čo je v rozpore s rovnosťou $x=y$. Podobne nemôže byť ani $x=-y$, takže dokonca $|x| \neq |y|$.

Ak by obe neznáme mali rovnaké znamienka, bolo by jedno z čísel x/y, y/x z intervalu $(0,1)$, takže jeho celá časť by bola 0, čo nevedie k riešeniu. Jedna z neznámych teda musí byť kladná a druhá záporná a obe celé časti v rovniciach sú záporné. Z nich preto tiež vyplýva, že $x<0$ a $y>0$.

Znamienka čísel x, y sú rôzne a absolútne hodnoty týchto čísel sú tiež rôzne, preto práve jedno z čísel x/y, y/x je z intervalu $(-1,0)$, a jeho celá časť je teda -1.

Najskôr preskúmame prípad $\lfloor x/y \rfloor = -1$. Z druhej zadanej rovnice dostaneme $y=6$. Prvá zadaná rovnica má potom tvar $\lfloor 6/x \rfloor = 5/x$. Ak navyše využijeme definíciu celej časti, dostaneme

$$\frac{5}{x} = \left\lfloor \frac{6}{x} \right\rfloor \leqq \frac{6}{x}, \quad \text{t. j.} \quad \frac{5}{x} \leqq \frac{6}{x}.$$

Posledná nerovnica však nemôže pre záporné číslo x platiť, lebo je ekvivalentná s nerovnosťou $5 \geqq 6$. Daná sústava rovníc nemá teda v prípade $\lfloor x/y \rfloor = -1$ riešenie.

Ostáva prípad $\lfloor y/x \rfloor = -1$. Z prvej zadanej rovnice máme $x=-5$. Druhá zadaná rovnica má potom tvar $\lfloor -5/y \rfloor = -6/y$. Podľa definície celej časti teda platí

$$\frac{-5}{y} < \left\lfloor \frac{-5}{y} \right\rfloor + 1 = \frac{-6}{y} + 1, \quad \text{t. j.} \quad \frac{-5}{y} < \frac{-6}{y} + 1,$$

odkiaľ po vynásobení kladným číslom y dostaneme $y>1$. Keď využijeme definíciu celej časti aj pre rovnicu $\lfloor y/-5 \rfloor = -1$, dostaneme

$$-1 \leqq \frac{y}{-5} < 0, \quad \text{čiže} \quad 0 < y \leqq 5.$$

Spojením oboch podmienok pre neznámu y tak dostávame $1 < y \leqq 5$. Naopak, pre každé také y a $x=-5$ je prvá rovnica sústavy splnená. Túto podmienku postupne upravíme na ekvivalentné nerovnosti $1 > 1/y \geqq \frac{1}{5}$ a $-5 < -5/y \leqq -1$. Z tej poslednej vyplýva, že výraz $\lfloor -5/y \rfloor$ môže nadobúdať jedine hodnoty -5, -4, -3, -2, -1.

Z druhej rovnice upravenej na tvar $y = -6/\lfloor -5/y \rfloor$ tak vyplýva, že neznáma y môže nadobúdať jedine hodnoty $\frac{6}{5}$, $\frac{3}{2}$, 2, 3, 6. Posledná z nich však (na rozdiel od prvých štyroch) nespĺňa odvodené kritérium $1 < y \leqq 5$ platnosti prvej rovnice sústavy. Či je pre prvé štyri hodnoty splnená druhá rovnica sa musíme presvedčiť aspoň tak, že overíme hodnotu výrazu $\lfloor -5/y \rfloor$, ktorá nás k nim doviedla. Pre y rovné postupne $\frac{6}{5}$, $\frac{3}{2}$, 2, 3 je zlomok $-5/y$ postupne rovný $-\frac{25}{6}$, $-\frac{10}{3}$, $-\frac{5}{2}$ a $-\frac{5}{3}$ s prislúchajúcimi celými časťami skutočne -5, -4, -3, -2.

Záver. Zhrnutím všetkých úvah dostávame, že riešením danej sústavy sú nasledujúce dvojice čísel (x, y): $(-5, \frac{6}{5})$, $(-5, \frac{3}{2})$, $(-5, 2)$, $(-5, 3)$.

Kategória A

A – I – 1

Najskôr vypočítame hodnotu čísla n, potom už jeho zvyšok po delení číslom 77 určíme jednoducho. V zadaní opísané desaťciferné čísla nebudeme sčitovať priamo. Hľadaný súčet ľahšie nájdeme tak, že zistíme, koľkokrát sa ktorá cifra nachádza vo všetkých číslach na mieste jednotiek, desiatok, stoviek, atď. Následne určíme, aký je „príspevok“ každej cifry do celkového súčtu n.

Ak je cifra 1 na mieste jednotiek, potom na zvyšných deväť pozícií môžeme zvyšných deväť cifier rozmiestniť ľubovoľne, akurát na prvú pozíciu nesmieme dať cifru 0. Na prvú pozíciu teda môžeme umiestniť niektorú z ôsmich rôznych cifier (každú okrem 0), následne na druhú pozíciu niektorú z ôsmich rôznych cifier (každú okrem tej, ktorú sme dali na prvé miesto), na tretiu pozíciu niektorú zo siedmich rôznych cifier (každú okrem cifier na prvých dvoch pozíciách), atď. Cifra 1 sa preto na mieste jednotiek nachádza $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8 \cdot 8!$-krát.[3]

Rovnakou úvahou zistíme, že cifra 1 sa nachádza $8 \cdot 8!$-krát aj na mieste desiatok, stoviek, tisísok, atď. Len na prvej pozícii sa nachádza až $9!$-krát, pretože vtedy na zvyšných deväť pozícií môžeme zvyšných deväť cifier rozmiestniť ľubovoľne – nemáme obmedzenie pre cifru 0.

Takže príspevok cifry 1 do celkového súčtu je

$$8 \cdot 8! + 8 \cdot 8! \cdot 10 + 8 \cdot 8! \cdot 100 + \cdots + 8 \cdot 8! \cdot 10^8 + 9! \cdot 10^9 =$$
$$= 8 \cdot 8! \cdot 111\,111\,111 + 9 \cdot 8! \cdot 10^9 = 8! \cdot 9\,888\,888\,888.$$

Cifra 2 sa zrejme nachádza vo všetkých číslach na jednotlivých pozíciách rovnako veľakrát ako cifra 1, takže jej príspevok do celkového súčtu je dvojnásobný. Príspevok cifry 3 je trojnásobný, príspevok cifry 4 je štvornásobný, atď. Počet výskytov cifry 0 na jednotlivých pozíciách je síce iný ako pri ostatných cifrách, ale nemusíme ho určovať, keďže príspevok cifry 0 do súčtu je nulový. Spolu teda máme

$$n = 8! \cdot 9\,888\,888\,888 \cdot (1 + 2 + \cdots + 9) = 45 \cdot 8! \cdot 9\,888\,888\,888. \tag{1}$$

[3] K rovnakému výsledku by sme dospeli aj inou úvahou: Ak by sme cifru 0 pripustili aj na prvej pozícii, všetkých čísel končiacich cifrou 1 by bolo $9!$. Nevyhovujúcich čísel s nulou na prvej pozícii je $8!$. Vyhovujúcich čísel je teda $9! - 8! = 9 \cdot 8! - 8! = 8 \cdot 8!$.

Hľadaný zvyšok by sme už teraz mohli určiť vyčíslením hodnoty n a následným delením číslom 77. My sa však vyhneme zdĺhavému násobeniu a deleniu veľkých čísel. Z vyjadrenia (1) vidíme, že n je deliteľné siedmimi (pretože činiteľ 8! je násobok siedmich). Keďže $77 = 7 \cdot 11$, zvyšok n po delení sedemdesiatimi siedmimi musí byť násobkom siedmich.

Ešte určíme zvyšok čísla n po delení jedenástimi. Triviálne platí $45 \equiv 1 \pmod{11}$ a ľahko vypočítame, že $8! = 40\,320 \equiv 5 \pmod{11}$. Určenie zvyšku čísla $9\,888\,888\,888$ môžeme urýchliť známym tvrdením: Číslo s dekadickým zápisom $\overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$ dáva po delení jedenástimi rovnaký zvyšok ako číslo $a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^k a_k$. Takže dostávame

$$9\,888\,888\,888 \equiv 8 - 8 + 8 - 8 + \dots + 8 - 9 = -1 \equiv 10 \pmod{11}.$$

Spolu máme

$$n = 45 \cdot 8! \cdot 9\,888\,888\,888 \equiv 1 \cdot 5 \cdot 10 = 50 \equiv 6 \pmod{11}$$

(využili sme vlastnosť, že súčin činiteľov dáva rovnaký zvyšok ako súčin zvyškov činiteľov).

Zvyškom po delení čísla n sedemdesiatimi siedmimi je teda číslo z množiny $\{6, 17, 28, 39, 50, 61, 72\}$, ktoré je deliteľné siedmimi, teda číslo 28.

Iné riešenie. Pripusťme, že na prvom mieste môže byť aj nula. Potom medzi všetkými číslami, ktoré majú vo svojom dekadickom zápise každú z cifier 0, 1, ..., 9, sa každá cifra vyskytuje na každom z desiatich miest 9!-krát. Preto je súčet všetkých takých čísel

$$s_1 = 9!(0 + 1 + 2 + \dots + 9) \cdot (1 + 10 + \ldots + 10^9) = 9! \cdot 45 \cdot \frac{10^{10} - 1}{9} = 9! \cdot 5 \cdot (10^{10} - 1).$$

Musíme ale odčítať súčet tých (navyše zarátaných) desaťciferných čísel, ktoré začínajú nulou. To sú vlastne deväťciferné čísla, ktoré majú vo svojom dekadickom zápise každú z cifier 1, 2, ..., 9. Analogicky ako v pred chvíľou odvodíme, že ich súčet je

$$s_2 = 8!(1 + 2 + \dots + 9) \cdot (1 + 10 + \ldots + 10^8) = 8! \cdot 45 \cdot \frac{10^9 - 1}{9} = 8! \cdot 5 \cdot (10^9 - 1).$$

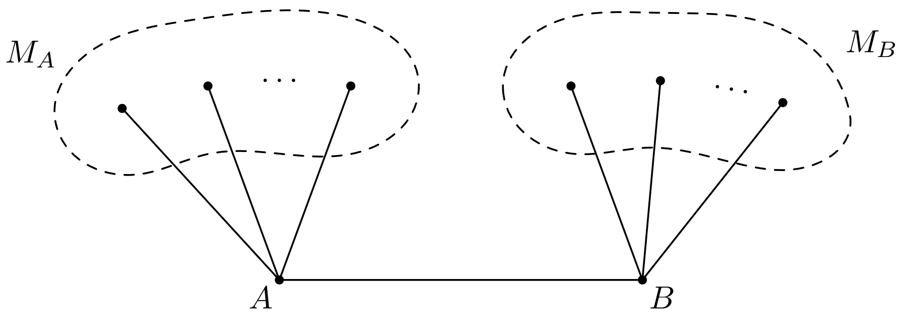
Zrejme $7 \mid s_1$ a $7 \mid s_2$, takže aj $7 \mid s_1 - s_2 = n$. Ďalej s využitím známeho rozkladu $(10^{2k+1} + 1) = (10 + 1)(10^{2k} - 10^{2k-1} + \dots + 1)$ máme

$$\begin{aligned} s_1 &= 9! \cdot 5(10^5 - 1)(10^5 + 1) \equiv 9! \cdot 5(10^5 - 1) \cdot 0 \equiv 0 && \pmod{11}, \\ s_2 &= 8! \cdot 5 \cdot (10^9 - 1) = (8 \cdot 7) \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4) \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot (10^9 + 1 - 2) \equiv \\ &\equiv 1 \cdot (-1) \cdot 30 \cdot (-2) \equiv 5 && \pmod{11}, \end{aligned}$$

čiže $n = s_1 - s_2 \equiv 6 \pmod{11}$. Záver je rovnaký ako pri prvom riešení.

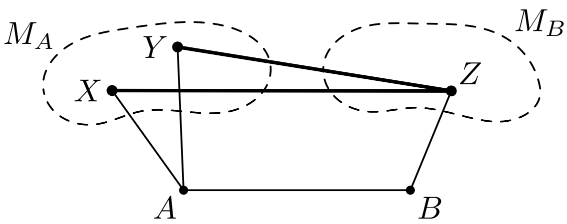
A – I – 2

Účastníkov stretnutia budeme znázorňovať plnými krúžkami a to, že sa dvaja ľudia poznajú, budeme znázorňovať spojením príslušných krúžkov čiarou[4]. Zadanú situáciu zakreslíme na obr. 28.

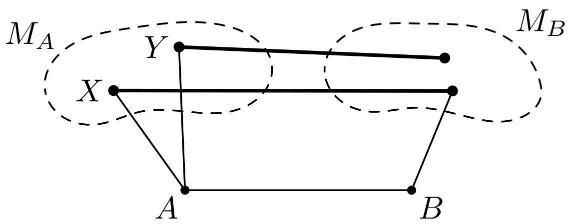


Obr. 28

Množinu známych účastníka A rôznych od B označme M_A a množinu známych účastníka B rôznych od A označme M_B. Ani jeden človek z M_A sa nepozná s B, lebo A a B nemajú spoločného známeho. Takže každý z M_A má s B práve dvoch spoločných známych: jeden z nich je A, druhý sa nachádza medzi zvyšnými známymi účastníka B, teda v M_B. Pritom žiadni dvaja ľudia X, Y z M_A nemôžu poznať toho istého človeka Z v M_B. V opačnom prípade by sa totiž Z nepoznal s A (lebo A, B nemajú spoločných známych) a zároveň by X, Y, B tvorili trojicu ich spoločných známych (obr. 29a), čo je v rozpore so zadaním.



Obr. 29a



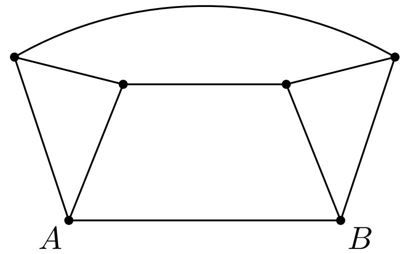
Obr. 29b

Zhrňme ešte raz poznatky odvodené v predošlom odseku: Každý človek z M_A pozná niekoho z M_B a žiadni dvaja ľudia z M_A nepoznajú toho istého v M_B (obr. 29b). Z toho vyplýva, že v množine M_B je aspoň toľko ľudí ako v množine M_A, t. j. $|M_B| \geqq |M_A|$. Tou istou úvahou (po zámene úloh A a B) vieme samozrejme dokázať, že $|M_A| \geqq |M_B|$. Nutne teda $|M_A| = |M_B|$, čiže A a B majú medzi prítomnými rovnaký počet známych.

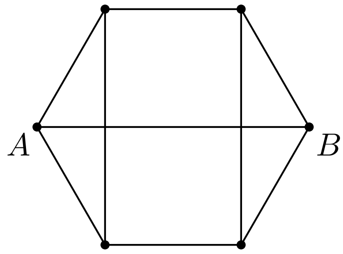
V druhej časti riešenia už len vymyslíme a znázorníme nejaké vyhovujúce rozloženie známostí medzi šesticou osôb, z ktorých dve osoby sú A a B, poznajú sa a nemajú

[4] Takému znázorneniu sa hovorí *graf*; účastníci sú *vrcholy* a známosti sú *hrany* grafu

spoločných známych. Z prvej časti už vieme, že tieto osoby musia mať rovnaký počet známych. Stačí teda napríklad nakresliť spojené osoby A, B, každú z nich spojiť s dvoma ďalšími osobami a medzi štvoricou osôb dokresliť čiary tak, aby bolo splnené zadanie. Ľahko objavíme vyhovujúce rozloženie ako na obr. 30a (ktoré možno prekresliť napr. do tvaru na obr. 30b).



Obr. 30a



Obr. 30b

Iné riešenie. Nech M_A, M_B sú tie isté množiny ako v prvom riešení. Budeme používať pojmy z teórie grafov. Nech M_A obsahuje m vrcholov a M_B obsahuje n vrcholov. Keďže každý vrchol z M_A má s B spoločného známeho A a zároveň nie je známym vrcholu B, musí mať s B práve jedného známeho v M_B (aby bola splnená podmienka zo zadania, že majú práve dvoch spoločných známych). Takže z každého vrcholu v M_A vychádza práve jedna hrana do M_B. Spolu preto vychádza z M_A do M_B práve m hrán. Analogicky z M_B vychádza do M_A práve n hrán. Sú to však tie isté hrany, takže nutne $m = n$.

A – I – 3

Označme vrcholy daného trojuholníka písmenami A, B, C tak, aby BC bola základňa. Veľkosti strán a uhlov trojuholníka budeme označovať štandardným spôsobom, t. j. $|BC| = a$, $|AC| = |AB| = b$, $\beta = \gamma = 90° - \frac{1}{2}\alpha$. Nech H je stred základne BC.

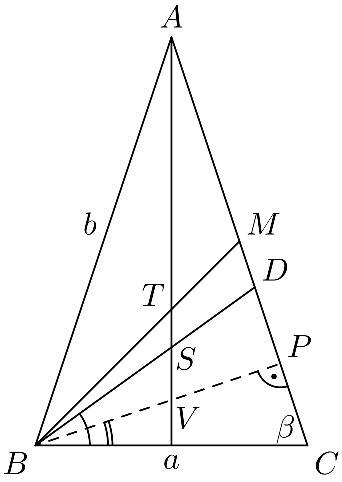
a) Veďme vrcholom B výšku, os uhla a ťažnicu trojuholníka ABC a ich priesečníky s priamkou CA označme postupne P, D a M. Všetky tri ležia na polpriamke CA (body D, M dokonca na úsečke CA). Zrejme stačí dokázať, že bod D je vnútorným bodom úsečky MP. Rozoberieme dva prípady.

Ak $b > a$ (obr. 31a), tak zrejme $\beta > 60°$. Odtiaľ máme

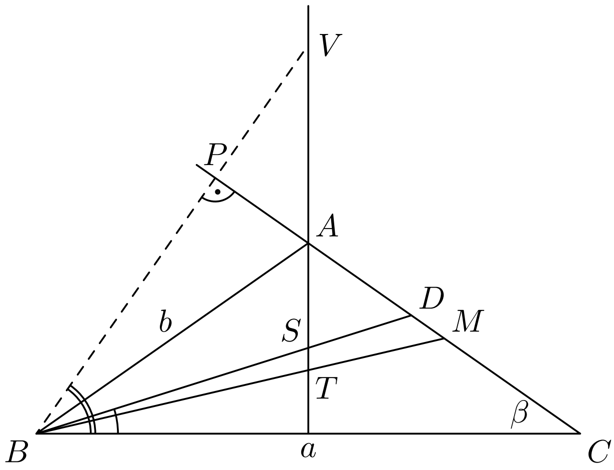
$$|\angle CBP| = 90° - \beta < 90° - 60° = 30° < \tfrac{1}{2}\beta = |\angle CBD|,$$

takže $|CP| < |CD|$. Os uhla delí stranu trojuholníka v pomere priľahlých strán, preto $|CD|/|AD| = a/b < 1$, odkiaľ $|CD| < \frac{1}{2}|CA| = |CM|$. Spolu teda $|CP| < |CD| < |CM|$, čiže D leží vnútri úsečky MP.

Ak $a > b$ (obr. 31b), tak $\beta < 60°$ a analogicky dostávame $|\angle CBP| = 90° - \beta > 90° - 60° = 30° > \frac{1}{2}\beta = |\angle CBD|$, $|CD|/|AD| = a/b > 1$, takže $|CP| > |CD| > \frac{1}{2}|CA| = |CM|$, čiže aj v tomto prípade D leží vnútri úsečky MP.



Obr. 31a



Obr. 31b

b) Najskôr vyjadríme dĺžky úsečiek TH, SH, VH pomocou dĺžok strán trojuholníka a pomocou dĺžky $|AH|$, ktorú označme v (obr. 32). Z Pytagorovej vety v trojuholníku ABH máme $v^2 = b^2 - \frac{1}{4}a^2$, takže neskôr budeme vedieť za v dosadiť vyjadrenie len pomocou dĺžok a, b.

Ťažisko T delí ťažnicu AH v pomere $2:1$, takže $|TH| = \frac{1}{3}v$.

Úsečka SH je polomerom vpísanej kružnice, takže jej dĺžku vypočítame zo známeho vzorca $S_{ABC} = \varrho \cdot s$ pre obsah trojuholníka ABC, pričom s označuje polovicu obvodu. Dostávame

$$|SH| = \varrho = \frac{S_{ABC}}{s} = \frac{\frac{1}{2}av}{\frac{1}{2}(a+2b)} = \frac{av}{a+2b}.$$

Trojuholníky BVH a ABH sú podobné, pretože sú oba pravouhlé a $|\measuredangle VBH| = 90^\circ - \beta = \frac{1}{2}\alpha = |\measuredangle BAH|$. Pre prislúchajúce dĺžky strán preto máme $|VH| : |BH| = |BH| : |AH|$, odkiaľ

$$|VH| = \frac{|BH|^2}{|AH|} = \frac{a^2}{4v}.$$

Ak je S stredom úsečky TV, platí $|TS| = |SV|$. Pritom

$$|TS| = \big||TH| - |SH|\big|, \qquad |SV| = \big||SH| - |VH|\big| \tag{1}$$

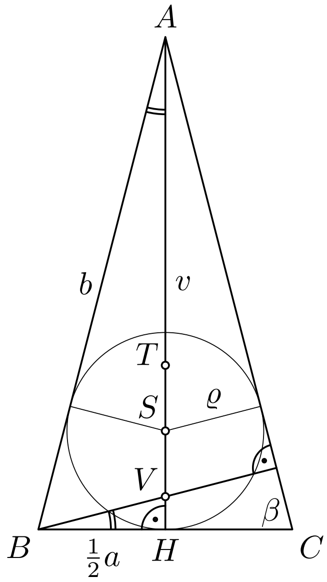
a z časti a) vieme, že rozdiely v absolútnych hodnotách v (1) sú buď oba kladné, alebo oba záporné. Rovnosť $|TS| = |SV|$ je teda ekvivalentná s rovnosťou

$$|TH| - |SH| = |SH| - |VH|, \qquad \text{čiže} \qquad |TH| + |VH| = 2|SH|.$$

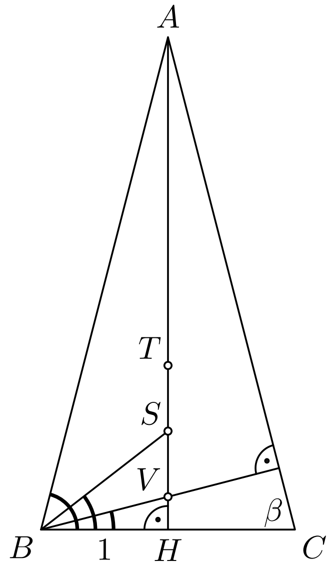
Dosadením odvodených dĺžok po ekvivalentných úpravách dostávame

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{3}v + \frac{a^2}{4v} &= \frac{2av}{a+2b},\\
4v^2(a+2b) + 3a^2(a+2b) &= 24av^2,\\
3a^2(a+2b) &= 4v^2(5a-2b),\\
3a^2(a+2b) &= 4(b^2 - \tfrac{1}{4}a^2)(5a-2b),\\
3a^2(a+2b) &= (2b+a)(2b-a)(5a-2b),\\
3a^2 &= (2b-a)(5a-2b),\\
3a^2 &= 12ab - 5a^2 - 4b^2,\\
2a^2 - 3ab + b^2 &= 0,\\
(2a-b)(a-b) &= 0.
\end{aligned}
$$

Keďže podľa zadania je $a \neq b$, bod S je stredom úsečky TV práve vtedy, keď $2a = b$, teda keď pomer dĺžok strán trojuholníka je $1:2:2$.



Obr. 32



Obr. 33

Iné riešenie. a) Keďže S, T, V sú vnútorné body polpriamky HA (body S, T sú dokonca vnútorné body úsečky HA), stačí ukázať, že oba rozdiely $|HS|-|HT|$ a $|HV|-|HS|$ sú nenulové a majú rovnaké znamienko.

Bez ujmy na všeobecnosti nech $a = 2$, t. j. $|BH| = |HC| = 1$. Z pravouhlých trojuholníkov BSH, BAH a BVH dostávame (obr. 33)

$$
|HS| = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}, \quad |HT| = \frac{|HA|}{3} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{3} \quad \text{a} \quad |HV| = \operatorname{tg}(90^\circ - \beta) = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}.
$$

Vďaka vzťahu $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ pri označení $t = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta$ máme

$$|HS| - |HT| = t - \frac{2t}{3(1-t^2)} = \frac{t(1-3t^2)}{3(1-t^2)},$$

$$|HV| - |HS| = \frac{1-t^2}{2t} - t = \frac{1-3t^2}{2t}.$$

Keďže β je ostrý uhol rôzny od $60°$, platí $\frac{1}{2}\beta \in (0°, 45°)$ a $\frac{1}{2}\beta \neq 30°$, odkiaľ pre hodnotu $t = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta$ vyplývajú vzťahy $0 < t < 1$ a $3t^2 \neq 1$, takže oba skúmané rozdiely sú buď kladné (ak $\beta < 60°$), alebo záporné (ak $\beta > 60°$).

b) Podiel rozdielov z časti a) má vyjadrenie

$$\frac{|HS| - |HT|}{|HV| - |HS|} = \frac{t(1-3t^2)}{3(1-t^2)} \cdot \frac{2t}{1-3t^2} = \frac{2t^2}{3(1-t^2)}.$$

V obore $(0, 1)$ riešime rovnicu

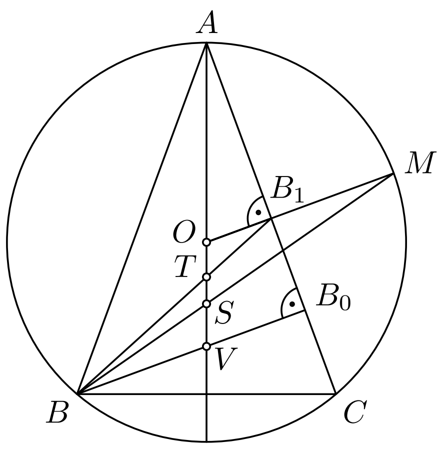
$$\frac{2t^2}{3(1-t^2)} = 1,$$

ktorá tam má zrejme jediný koreň

$$t = \sqrt{\tfrac{3}{5}}, \quad \text{odkiaľ} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{2t}{1-t^2} = \sqrt{15}.$$

Teda v trojuholníku BHA okrem $|BH| = 1$ platí $|HA| = \operatorname{tg} \beta = \sqrt{15}$, takže podľa Pytagorovej vety máme $|BA| = \sqrt{1 + 15} = 4$. Strany trojuholníka ABC sú teda v pomere $2 : 4 : 4$, čiže $1 : 2 : 2$.

Iné riešenie. a) Označme vrcholy daného trojuholníka rovnako ako v prvom riešení, ďalej O stred opísanej kružnice, B_0 pätu výšky z vrcholu B a B_1 stred strany AC. Keďže os uhla pri vrchole B pretína oblúk CA opísanej kružnice v jeho strede M (obr. 34), je zrejmé, že vďaka podmienke $O \neq V$ (ktorá je ekvivalentná s tým, že daný trojuholník nie je rovnostranný) pretne táto os stranu AC vnútri úsečky B_0B_1, a teda bod S leží vnútri úsečky TV.



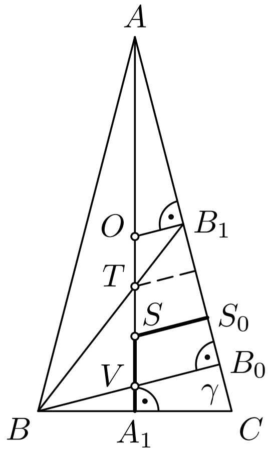
Obr. 34

b) Využijeme známu vlastnosť troch základných bodov trojuholníka: ťažiska T, stredu O opísanej kružnice a priesečníka V výšok. Uvedené tri body ležia totiž na priamke v ľubovoľnom trojuholníku, pričom ťažisko T vždy delí úsečku OV v pomere $1:2$.[5] Ak teda stred S kružnice vpísanej trojuholníku ABC rozpoľuje úsečku TV, delia body T a S (v tomto poradí) orientovanú úsečku OV na tri zhodné časti.

Pre kolmé priemety B_1, S_0 a B_0 bodov O, S a V na stranu AC (obr. 35) preto platí

$$CB_1 = CB_0 + 3(CS_0 - CB_0) = 3CS_0 - 2CB_0.$$

Ak uvedenú rovnosť chápeme ako rovnosť orientovaných úsečiek (alebo vektorov) na priamke CA, vyhneme sa nutnosti rozlišovať, či je uhol pri vrchole A väčší alebo menší ako $60°$, pretože ako už vieme, na poradie spomenutých bodov to nemá vplyv.



Obr. 35

Do odvodenej rovnosti teraz môžeme dosadiť $\frac{1}{2}b$ za CB_1, $\frac{1}{2}a$ za CS_0 ($|CS_0| = |CA_1|$ je dĺžka úsekov oboch dotyčníc z vrcholu C ku kružnici vpísanej trojuholníku ABC) a napokon z dvoch podobných pravouhlých trojuholníkov BCB_0 a ACA_1 (zhodujú sa v spoločnom uhle BCA) vychádza $CB_0 = \frac{1}{2}a^2/b$. Dostávame tak

$$\frac{b}{2} = \frac{3a}{2} - \frac{a^2}{b}, \quad \text{čiže} \quad b^2 - 3ab + 2a^2 = 0.$$

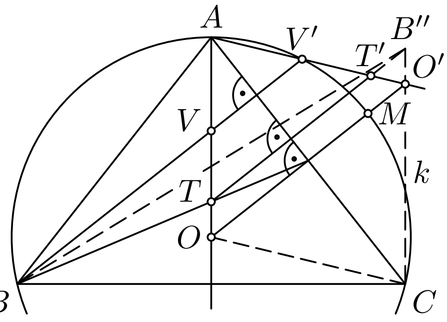
Poslednú rovnosť možno prepísať ako $(b-a)(b-2a) = 0$, a keďže $a \neq b$, musí byť $b = 2a$.

Iné riešenie. Časť a) už nebudeme znovu dokazovať, použijeme rovnaký postup aj označenie ako v predošlom riešení.

---

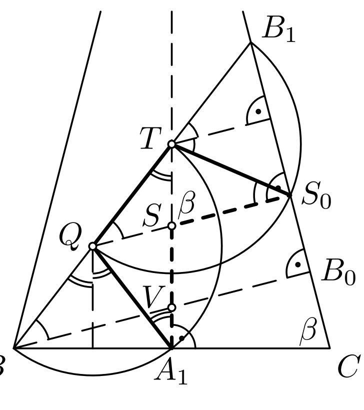
[5] Uvedená vlastnosť jednoducho vyplýva z toho, že trojuholník $A_1B_1C_1$ tvorený strednými priečkami daného trojuholníka ABC je jeho obrazom v rovnoľahlosti so stredom v ťažisku a koeficientom $\frac{1}{2}$. A keďže os každej zo strán trojuholníka ABC je zároveň výškou trojuholníka $A_1B_1C_1$, je stred O kružnice opísanej danému trojuholníku ABC zároveň priesečníkom výšok trojuholníka $A_1B_1C_1$, takže bod O je v uvedenej rovnoľahlosti obrazom bodu V a $|TO| = \frac{1}{2}|TV|$.

b) Najskôr ukážeme, že v trojuholníku, v ktorom je pri vrchole A uhol väčší ako $60°$, nemôže os uhla stredom úsečky VT vôbec prechádzať. Na to využijeme známu vlastnosť priesečníka výšok: jeho obraz V' v osovej súmernosti podľa strany AC leží na kružnici k trojuholníku ABC opísanej (obr. 36). Keďže za uvedeného predpokladu ležia body T a O (v tomto poradí) na polpriamke AO až za bodom V, ležia zrejme obrazy T', O' bodov T, O v uvedenej osovej súmernosti vo vonkajšej oblasti kružnice k. V jej vonkajšej oblasti leží však aj obraz B'' vrcholu B v stredovej súmernosti podľa stredu úsečky VT: bod B'' je totiž priesečníkom polpriamok TT' a CO', pretože CO' je zároveň kolmá na BC ($AOCO'$ je kosoštvorec) a je tak obrazom priamky AO v rovnoľahlosti so stredom B a koeficientom 2. Uhlopriečka BB'' rovnobežníka $BTB''V$ (na ktorej leží ťažnica trojuholníka BTV) preto určite pretne kružnicu k vnútri pásu rovnobežiek BV a TT'. Os uhla pri vrchole B však pretína kružnicu k v strede M príslušného oblúka AC a priamka OM leží mimo spomenutého pásu.



Obr. 36

Predpokladajme teda, že v danom trojuholníku je pri vrchole A uhol menší ako $60°$ a že stred S vpísanej kružnice rozpoľuje úsečku VT. Označme Q stred úsečky BT, S_0 bod dotyku vpísanej kružnice so stranou AC. Teda $|SA_1| = |SS_0|$. Bod S_0 leží zrejme na Tálesovej kružnici s priemerom QB_1 a zároveň bod A_1 leží na Tálesovej kružnici s priemerom BT (obr. 37), takže $|S_0T| = |TQ| = |QA_1|$. Trojuholníky STS_0



Obr. 37

a SQA_1 sa zhodujú v dvoch stranách a v uhle oproti jednej z nich. Oba trojuholníky preto majú zhodné opísané kružnice a pre ich uhly pri vrcholoch T, resp. Q oproti zhodným tetivám SS_0 a SA_1 zodpovedajúcich kružníc platí, že sú buď zhodné, alebo doplnkové (t. j. ich súčet dáva $180°$).

Ak sú oba uhly zhodné, ležia body A_1, S_0, T, Q na kružnici, a keďže $|QA_1| = |TS_0|$, je A_1S_0TQ lichobežník alebo pravouholník, takže úsečka A_1S_0 je rovnobežná s QT, a je teda strednou priečkou trojuholníka BCB_1. Trojuholník A_1S_0C je rovnoramenný, preto je rovnoramenný aj trojuholník BB_1C. Odtiaľ ihneď vyplýva, že $b = 2a$.

Ukážeme teraz, že vďaka predpokladu $\alpha < 60°$ nemôže druhá možnosť nastať, teda že súčet oboch uhlov STS_0 a SQA_1 je menší ako $180°$. Na obr. 37 sú vyznačené jednoduchým oblúčikom uhly, ktoré sa zhodujú s uhlom SQT (všade sa jedná o súhlasné uhly alebo o uhly pri základni rovnoramenného trojuholníka). Podobne dva oblúčiky vyznačujú uhly zhodné s uhlom STQ. Z trojuholníka STQ navyše vyplýva, že $|\measuredangle SQT| + |\measuredangle STQ| = \beta > 60°$. Z kombinácie uhlov pri bodoch Q, T priamky BB_1 vidíme, že na vyšetrovaný súčet uhlov STS_0 a SQA_1 ostáva len $2 \cdot 180° - 3\beta < 180°$. Tým je požadovaná vlastnosť dokázaná.

A – I – 4

Aby sa dala jednoduchšie využiť podmienka celočíselnosti, súčet z prvej vety zadania prepíšeme na jeden zlomok do tvaru

$$\frac{mp-1}{q} + \frac{nq-1}{p} = \frac{p(mp-1)+q(nq-1)}{pq}.$$

Čitateľ posledného zlomku je násobkom jeho menovateľa, takže je deliteľný ako prvočíslom p, tak aj prvočíslom q. Keďže prvý sčítanec čitateľa je násobkom p, musí ním byť aj druhý sčítanec, teda $p \mid q(nq-1)$. Z nesúdeliteľnosti prvočísel p, q odtiaľ dostávame $p \mid nq-1$. Podobne máme $q \mid p(mp-1)$, čiže $q \mid mp-1$.

Prirodzené číslo $mp + (nq-1)$ (ktoré možno zapísať aj v tvare $(mp-1)+nq$) je preto deliteľné ako číslom p, tak aj číslom q, a teda aj (vďaka nesúdeliteľnosti p, q) súčinom pq. Pre jeho veľkosť potom platí odhad

$$mp + nq - 1 \geqq pq, \quad \text{odkiaľ} \quad mp + nq > pq.$$

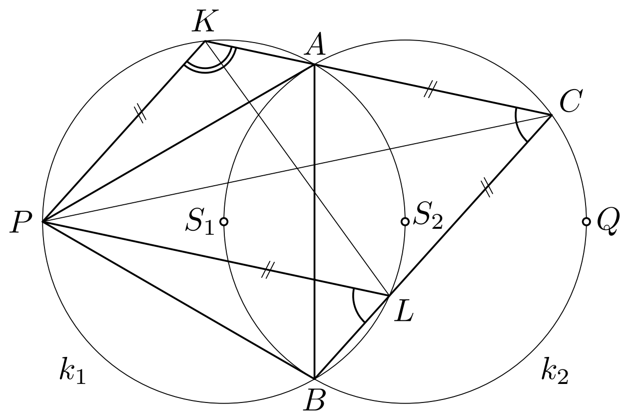
Po vydelení oboch strán číslom pq dostaneme nerovnosť, ktorú sme mali dokázať.

Poznámka. Kľúčové tvrdenie $pq \mid mp+nq-1$ možno dokázať aj inak. Keďže $p \mid nq-1$ a $q \mid mp-1$, nutne $pq \mid (nq-1)(mp-1) = mnpq+1-mp-nq$. Odtiaľ $pq \mid 1-mp-nq$.

A – I – 5

Označme S_1, S_2 stredy kružníc k_1, k_2. Nech P je taký bod kružnice k_1, že PS_2 je jej priemerom. Ukážeme, že hľadaným pevným bodom je P, t. j. dokážeme, že stred úsečky KL leží s bodmi P, C na jednej priamke.

Aby úsečka BC preťala kružnicu k_1, musí bod C ležať vnútri kratšieho oblúka AQ kružnice k_2, pričom S_1Q je priemerom k_2. Bod L je potom vnútorným bodom kratšieho oblúka AB a bod K vnútorným bodom kratšieho oblúka PA kružnice k_1 (obr. 38).



Obr. 38

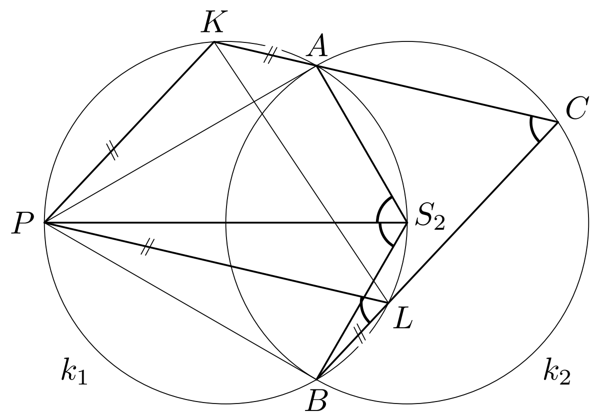
Keďže kružnice majú rovnaké polomery, sú trojuholníky S_1S_2A, S_1S_2B rovnostranné a veľkosť stredového uhla BS_1A je 120°. Príslušný obvodový uhol BPA má preto veľkosť 60°. Navyše body A, B sú súmerne združené podľa priamky PS_2, takže $|PA| = |PB|$ a trojuholník ABP je rovnostranný[6]. Všetky obvodové uhly nad zhodnými tetivami PA, PB, AB majú teda veľkosť 60° (ak vrchol leží na dlhšom oblúku), resp. 120° (ak vrchol leží na kratšom oblúku). Pri tetive AB to platí aj pre obvodové uhly na kružnici k_2, keďže obe kružnice sú zhodné.

Z uvedeného dostávame

$$|\measuredangle ACB| = 60^\circ, \qquad |\measuredangle PLB| = 60^\circ, \qquad |\measuredangle PKA| = 120^\circ.$$

Z rovnosti prvých dvoch uhlov vyplýva rovnobežnosť priamok PL a KC a z toho, že súčet prvého a tretieho uhla je 180°, vyplýva rovnobežnosť priamok PK a LC. Štvoruholník $PLCK$ je teda rovnobežník, z čoho už priamo vyplýva dokazované tvrdenie (uhlopriečky rovnobežníka sa rozpoľujú, takže priamka PC prechádza stredom úsečky KL).

Iné riešenie. Označme body rovnako ako v prvom riešení. Odlišným spôsobom dokážeme, že $PLCK$ je rovnobežník.



Obr. 39

[6] To ihneď vyplýva aj z toho, že P, B, S_2, A sú štyri zo šiestich vrcholov pravidelného šesťuholníka vpísaného do k_1.

Body A, B sú súmerne združené podľa priamky PS_2, preto s využitím vlastností obvodových a stredových uhlov dostávame

$$|\measuredangle PLB| = |\measuredangle PS_2B| = \frac{1}{2}|\measuredangle AS_2B| = |\measuredangle ACB|,$$

odkiaľ vyplýva $PL \parallel KC$. Štvoruholník $PLAK$ je teda lichobežník, a keďže je tetivový (má opísanú kružnicu k_1), musí byť rovnoramenný. Jeho uhlopriečky KL, PA sú teda zhodné, a keďže z vyššie spomenutej súmernosti máme $|PA| = |PB|$, platí tiež $|KL| = |PB|$. Štvoruholník $KPBL$ je tetivový a jeho protiľahlé strany KL, PB sú zhodné, takže to tiež musí byť rovnoramenný lichobežník[7] (obr. 39). Z toho už dostávame $PK \parallel LC$.

Poznámka. Zadané tvrdenie platí, aj keď pripustíme, že kružnice k_1, k_2 majú rôzne polomery, pričom S_2 leží na k_1; v druhom uvedenom riešení sme nikde nevyužili zhodnosť kružníc. V takom prípade však bod K môže ležať aj mimo kratšieho oblúka PA, takže treba osobitne rozlíšiť dva prípady.

A – I – 6

Pre $k = 2$ sa dá nerovnosť po vykrátení upraviť na tvar $\frac{1}{2}(a + b) \geqq \sqrt{ab}$, čo je známa nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom platná pre ľubovoľné kladné a, b. Hľadané najväčšie k je teda určite aspoň 2. Skúmajme ďalej danú nerovnosť len za predpokladu $k \geqq 2$.

Ekvivalentnou úpravou (keďže $k + 2 > 0$) dostaneme

$$2(a^2 + kab + b^2) \geqq (k + 2)(a + b)\sqrt{ab}$$

a po vydelení oboch strán členom b^2 máme

$$2\left(\frac{a^2}{b^2} + k\frac{a}{b} + 1\right) \geqq (k + 2)\left(\frac{a}{b} + 1\right)\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Označme $\sqrt{a/b} = x$. Zrejme x môže nadobudnúť ľubovoľnú kladnú hodnotu. Ďalej sa preto stačí zaoberať nerovnosťou

$$2(x^4 + kx^2 + 1) \geqq (k + 2)(x^2 + 1)x$$

a hľadať najväčšie k také, že je splnená pre každé kladné x. Po jednoduchých úpravách smerujúcich k osamostatneniu k dostávame

$$\begin{aligned} k\bigl((x^2 + 1)x - 2x^2\bigr) &\leqq 2\bigl(x^4 + 1 - (x^2 + 1)x\bigr),\\ k(x^3 - 2x^2 + x) &\leqq 2(x^4 - x^3 - x + 1),\\ kx(x^2 - 2x + 1) &\leqq 2\bigl(x^3(x - 1) - (x - 1)\bigr),\\ kx(x - 1)^2 &\leqq 2(x - 1)^2(x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

[7] Vyplýva to napríklad z rovnosti obvodových uhlov PLB, KPL nad zhodnými tetivami PB, KL, alebo jednoducho zo súmernosti podľa osi úsečky BL.

pre $x=1$ je posledná nerovnosť splnená vždy. Pre $x \neq 1$ nerovnosť vydelíme kladným výrazom $x(x-1)^2$ a získame priamo ohraničenie pre k:

$$k \leqq \frac{2(x^2+x+1)}{x} = 2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right). \tag{1}$$

Pre kladné x je $x + 1/x \geqq 2$, pričom rovnosť platí jedine pre $x = 1$. Pre $x \neq 1$ výraz $x+1/x$ nadobúda všetky hodnoty z intervalu $(2, \infty)$. Teda pravá strana v (1) nadobúda všetky hodnoty z intervalu $(6, \infty)$. Z toho je jasné, že najväčšie k také, že (1) platí pre všetky kladné $x \neq 1$, je $k = 6$.

Iné riešenie. Zadanú nerovnosť ekvivalentne upravíme:

$$\frac{2}{k+2} \cdot \frac{(a+b)^2 + (k-2)ab}{a+b} \geqq \sqrt{ab},$$

$$\frac{2}{k+2}\left(\frac{a+b}{\sqrt{ab}} + (k-2)\frac{\sqrt{ab}}{a+b}\right) \geqq 1. \tag{2}$$

Označme $x = (a+b)/\sqrt{ab}$. Potom $x \geqq 2$, pretože $\frac{1}{2}(a+b) \geqq \sqrt{ab}$. Úpravou (2) za podmienky $k+2>0$ získame

$$\frac{2}{k+2}\left(x + (k-2)\frac{1}{x}\right) \geqq 1,$$

$$x^2 - \frac{k+2}{2}x + (k-2) \geqq 0. \tag{3}$$

Kvadratická funkcia na ľavej strane poslednej nerovnosti má pre každé k koreň $x = 2$ a jej koeficient pri kvadratickom člene je kladný. Takže (3) platí pre každé $x \geqq 2$ práve vtedy, keď je vrchol paraboly tejto funkcie na číselnej osi naľavo od bodu 2, teda práve vtedy, keď

$$\frac{k+2}{4} \leqq 2, \qquad \text{čiže} \quad k \leqq 6.$$

Záver. Hľadaná najväčšia hodnota je $k = 6$.

A – S – 1

Sčítaním, resp. odčítaním oboch rovníc a úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} 4(x+y) &= 4(x^3+y^3),\\ (x+y) &= (x+y)(x^2-xy+y^2), \end{aligned} \qquad \text{resp.} \qquad \begin{aligned} 2(x-y) &= 4(x^3-y^3),\\ \frac{1}{2}(x-y) &= (x-y)(x^2+xy+y^2). \end{aligned}$$

Ak $x+y=0$, tak dosadením $y=-x$ napríklad do prvej rovnice pôvodnej sústavy dostaneme $2x = 4x^3$, teda po úprave $x(2x^2-1)=0$. Riešením tejto rovnice sú zrejme hodnoty $x = 0$ a $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, máme tak prvé tri riešenia sústavy: usporiadané dvojice $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$ a $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$.

Ak $x - y = 0$, tak dosadením $y = x$ do prvej rovnice dostaneme $4x = 4x^3$, čiže $x(x^2 - 1) = 0$. Riešením tejto rovnice sú $x = 0$ a $x = \pm 1$. Pre $x = 0$ dostaneme už skôr objavené riešenie $(0, 0)$, pre $x = \pm 1$ máme ďalšie dve riešenia sústavy $(1, 1)$ a $(-1, -1)$.

Ostáva rozobrať prípad, keď sú oba výrazy $x+y$, $x-y$ nenulové. Pri tejto podmienke môžeme rovnice odvodené na začiatku uvedenými výrazmi vydeliť a dostaneme sústavu rovníc

$$\begin{aligned} 1 &= x^2 - xy + y^2, \\ \frac{1}{2} &= x^2 + xy + y^2. \end{aligned}$$

Z nej opäť sčítaním, resp. odčítaním oboch rovníc odvodíme $x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$ a $xy = -\frac{1}{4}$. Na základe toho máme

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

teda $x+y = \frac{1}{2}$ alebo $x+y = -\frac{1}{2}$. Hodnoty neznámych x, y vieme potom podľa Viètových vzťahov dostať riešením kvadratických rovníc

$$t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} = 0, \qquad \text{resp.} \qquad t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} = 0.$$

Keďže ich koreňmi sú $t_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{5}$, resp. $t_{3,4} = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{5}$, dostávame štyri riešenia (t_1, t_2), (t_2, t_1), (t_3, t_4), (t_4, t_3).

Záver. Sústava má spolu 9 rôznych riešení, sú nimi usporiadané dvojice

$$\begin{gathered} (0, 0),\ \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right),\ \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right), (1, 1),\ (-1, -1), \\ \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}, \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5}\right),\ \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5}, \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}\right), \\ \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}, -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5}\right),\ \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5}, -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}\right). \end{gathered}$$

Z postupu vyplýva, že všetky spĺňajú pôvodnú sústavu, skúška teda (pri tomto postupe) nie je nutná.

Iné riešenie. Ak $|x| > 1$, tak z prvej rovnice vyplýva $|y| = |x|(4x^2 - 3) > |x| > 1$. Z druhej rovnice následne rovnako odvodíme $|x| > |y|$, čo je spor. Preto $-1 \leqq x \leqq 1$ a existuje t v intervale $\langle 0, \pi\rangle$ také, že $x = \cos t$. Dosadením do prvej rovnice dostaneme $y = 4\cos^3 t - 3\cos t = \cos 3t$,[8] z druhej potom podobne $x = 4\cos^3 3t - 3\cos 3t = \cos 9t$.

[8] Na odvodenie rovnosti $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$ stačí použiť známy vzorec $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

Preto musí platiť $\cos t = \cos 9t$, odkiaľ po úprave

$$\begin{aligned} \cos 9t - \cos t &= 0, \\ -2\sin\frac{9t+t}{2}\sin\frac{9t-t}{2} &= 0, \\ \sin 5t \sin 4t &= 0. \end{aligned}$$

Preto $5t$ alebo $4t$ musí byť násobkom π. Spolu s podmienkou $0 \leqq t \leqq \pi$ dostávame riešenia tvaru $(\cos t, \cos 3t)$ pre

$$t \in \left\{0, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{5}, \frac{3\pi}{4}, \frac{4\pi}{5}, \pi\right\}.$$

(Skúška ani v tomto prípade nie je nutná.)

Iné riešenie. Vyjadrením $y = 4x^3 - 3x$ z prvej rovnice a dosadením za y do druhej dostaneme po úprave

$$\begin{aligned} x + 3(4x^3 - 3x) &= 4(4x^3 - 3x)^3, \\ 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 8x &= 0, \\ x(32x^8 - 72x^6 + 54x^4 - 15x^2 + 1) &= 0. \end{aligned}$$

Mnohočlen v zátvorke po substitúcii $x^2 = z$ prejde na mnohočlen štvrtého stupňa $32z^4 - 72z^3 + 54z^2 - 15z + 1$, ktorý môžeme rozložiť na súčin tak, že uhádneme jeho korene $z = 1$ a $z = \frac{1}{2}$ a následne ho vydelíme príslušnými koreňovými činiteľmi. Odvodená rovnica pre neznámu x tak prejde na tvar

$$2x(x^2 - 1)(x^2 - \tfrac{1}{2})(16x^4 - 12x^2 + 1) = 0.$$

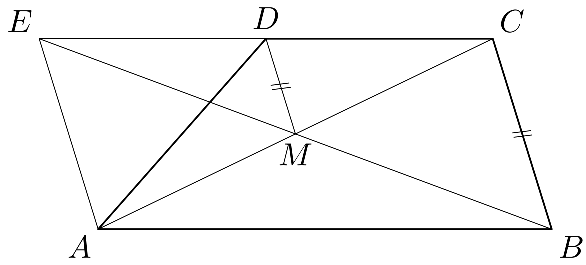
Doriešením bikvadratickej rovnice $16x^4 - 12x^2 + 1 = 0$ (napríklad substitúciou $x^2 = z$) už ľahko určíme všetky riešenia. Sú nimi

$$x \in \left\{0,\ \pm 1,\ \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ \pm\sqrt{\tfrac{3}{8} \pm \tfrac{1}{8}\sqrt{5}}\right\}$$

(treba sa presvedčiť, že výraz pod odmocninou je pre každú kombináciu znamienok kladný). Ku každej z uvedených deviatich hodnôt x už ľahko dopočítame riešenie tvaru $(x, 4x^3 - 3x)$, skúška opäť vzhľadom na postup nie je nutná.

A – S – 2

Úsečka BM je ťažnicou v trojuholníku ABC, delí ho teda na dva trojuholníky s rovnakým obsahom. Podľa zadania má jeden z týchto trojuholníkov rovnaký obsah ako trojuholník ACD. Preto má trojuholník ABC dvakrát väčší obsah ako trojuholník ACD. Tieto trojuholníky majú pritom zhodné výšky na strany AB, CD (ktoré sa zhodujú s výškou uvažovaného lichobežníka). Vzhľadom na ich obsahy teda platí $|AB| = 2|CD|$.



Obr. 40

Na priamke CD uvažujme taký bod E, že D je stredom úsečky CE (obr. 40). Z odvodenej rovnosti $|AB| = 2|CD|$ vyplýva zhodnosť úsečiek CE a AB. Štvoruholník $ABCE$ je preto rovnobežník a bod M (ako stred jeho uhlopriečky AC) je súčasne stredom jeho uhlopriečky BE. Úsečka DM je teda strednou priečkou v trojuholníku BCE, čiže je rovnobežná s jeho stranou BC, čo sme chceli dokázať.

Poznámka. Dôkaz rovnobežnosti priamok DM a BC možno podobne urobiť s využitím stredu F základne AB uvažovaného lichobežníka $ABCD$ (čím vznikne rovnobežník $AFCD$). Iným možným postupom je zostrojiť priesečník G priamok AD a BC a využiť vlastnosti stredných priečok v trojuholníkoch ABG a CGA.

A – S – 3

Skúmajme pre ktoré hodnoty n sú jednotlivé činitele zadaného súčinu deliteľné piatimi. Vypíšeme činitele pre malé hodnoty n a vypíšeme tiež ich zvyšky po delení piatimi.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$2^n + 1$	3	5	9	17	33	65	129	257	...
zvyšok po delení 5	3	0	4	2	3	0	4	2	...
$3^n + 2$	5	11	29	83	245	731	2 189	6 563	...
zvyšok po delení 5	0	1	4	3	0	1	4	3	...

Ako možno uhádnuť z tabuľky, postupnosť zvyškov činiteľa 2^n+1 po delení piatimi je tvorená štvoricou 3, 0, 4, 2, ktorá sa periodicky opakuje. Dokázať to môžeme napríklad tak, že ukážeme, že čísla $2^n + 1$ a $2^{n+4} + 1$ dávajú pre každé prirodzené n po delení piatimi rovnaký zvyšok, teda že ich rozdiel je deliteľný piatimi:

$$(2^{n+4} + 1) - (2^n + 1) = 2^{n+4} - 2^n = 2^n(2^4 - 1) = 5 \cdot 3 \cdot 2^n.$$

Podobne postupnosť zvyškov činiteľa $3^n + 2$ po delení piatimi tvorí periodicky sa opakujúca štvorica 0, 1, 4, 3, lebo rozdiel

$$(3^{n+4} + 2) - (3^n + 2) = 3^{n+4} - 3^n = 3^n(3^4 - 1) = 5 \cdot 16 \cdot 3^n$$

je pre každé prirodzené n deliteľný piatimi.

Z uvedeného vyplýva, že $2^n + 1$ je deliteľné piatimi len pre $n = 2, 6, 10, \ldots$, zatiaľ čo $3^n + 2$ je deliteľné piatimi len pre $n = 1, 5, 9, \ldots$, čiže pre žiadne n nie sú piatimi deliteľné oba činitele zadaného súčinu. Aby bol teda súčin deliteľný číslom 5^n, musí ním byť deliteľný jeden z činiteľov. Avšak pre každé $n \geqq 2$ je zrejme $5^n > 3^n + 2$ a tiež $5^n > 2^n + 1$, takže 5^n nemôže deliť ani jedného z činiteľov. Jedine pre $n = 1$ máme $5^1 = 3^1 + 2$. Preto jediné vyhovujúce číslo je $n = 1$.

A – II – 1

Súčet S_n nájdeme tak, že zistíme, koľkokrát sa ktorá cifra nachádza vo všetkých uvažovaných číslach na mieste jednotiek, desiatok, stoviek, atď. Potom určíme, aký je „príspevok“ jednotlivých cifier do celkového súčtu.

Ak je cifra 1 na mieste jednotiek, tak zvyšných $n - 1$ pozícií môžeme zaplniť 3^{n-1} spôsobmi (pre každú pozíciu máme tri možnosti). Takto sme ale bohužiaľ započítali aj čísla zložené len z jednotiek a dvojok, teda čísla neobsahujúce *aspoň jednu* cifru 3; tých je zrejme 2^{n-1}. Takisto nesmieme započítať ani čísla zložené len z jednotiek a trojok, ktorých je tiež 2^{n-1}. (Stále počítame s cifrou 1 na mieste jednotiek.)[9] Keďže číslo zložené zo samých jednotiek sa nachádza v obidvoch nesprávne započítaných skupinách (a žiadne iné také číslo nie je), navyše sme započítali $2 \cdot 2^{n-1} - 1$ čísel. Cifra 1 sa teda na mieste jednotiek nachádza k-krát, pričom $k = 3^{n-1} - (2 \cdot 2^{n-1} - 1) = 3^{n-1} - 2^n + 1$.

Rovnako veľa krát sa nachádza cifra 1 aj na každej ďalšej pozícii (za rovnakých podmienok zapĺňame vždy $n - 1$ zvyšných pozícií). Pre príspevok p cifry 1 do celkového súčtu preto platí

$$p = k + 10k + 100k + \cdots + 10^{n-1}k = (1 + 10 + 100 + \cdots + 10^{n-1})k = \frac{10^n - 1}{9}k.$$

Príspevok cifry 2, resp. 3, je zrejme 2-krát, resp. 3-krát väčší ako príspevok cifry 1, keďže na jednotlivých pozíciách sa tieto cifry nachádzajú rovnako veľa krát ako cifra 1. Spolu máme

$$S_n = p + 2p + 3p = 6p = 6 \cdot \frac{10^n - 1}{9}k = \frac{2}{3}(10^n - 1)(3^{n-1} - 2^n + 1).$$

Toto číslo je deliteľné *prvočíslom* 7 práve vtedy, keď je ním deliteľný aspoň jeden z činiteľov $10^n - 1$, $3^{n-1} - 2^n + 1$ (činiteľ $\frac{2}{3}$ deliteľnosť siedmimi samozrejme neovplyvňuje). Vypíšeme činitele pre malé hodnoty n a vypíšeme tiež ich zvyšky po delení siedmimi.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$10^n - 1$	9	99	999	9 999	99 999	999 999	...	
zvyšok po delení 7	2	1	5	3	4	0	2	1
$3^{n-1} - 2^n + 1$	0	0	2	12	50	180	602	1 932
zvyšok po delení 7	0	0	2	5	1	5	0	0

[9] Čísla majúce na zvyšných $n - 1$ pozíciách len dvojky a trojky započítavať budeme, pretože požadovanú aspoň jednu (a zároveň práve jednu) cifru 1 majú na mieste jednotiek.

Ako možno uhádnuť z tabuľky, postupnosť zvyškov činiteľa $10^n - 1$ po delení siedmimi je tvorená šesticou 2, 1, 5, 3, 4, 0, ktorá sa periodicky opakuje[10]. Dokázať to môžeme napríklad tak, že ukážeme, že čísla $10^n - 1$ a $10^{n+6} - 1$ dávajú pre každé prirodzené n po delení siedmimi rovnaký zvyšok, teda že ich rozdiel je deliteľný siedmimi:

$$(10^{n+6} - 1) - (10^n - 1) = 10^{n+6} - 10^n = 10^n(10^6 - 1) = 7 \cdot 142\,857 \cdot 10^n.$$

(Pri poslednej úprave sa možno vyhnúť priamemu deleniu a skonštatovať, že z malej Fermatovej vety vyplýva $7 \mid 10^6 - 1$.)

Postupnosť zvyškov činiteľa $3^{n-1} - 2^n + 1$ po delení siedmimi je taktiež periodická a tvorí ju opakujúca sa šestica 0, 0, 2, 5, 1, 5, pretože rozdiel

$$\begin{aligned}(3^{n+5} - 2^{n+6} + 1) - (3^{n-1} - 2^n + 1) &= (3^{n+5} - 3^{n-1}) - (2^{n+6} - 2^n) = \\ &= 3^{n-1}(3^6 - 1) - 2^n(2^6 - 1) = 7 \cdot (104 \cdot 3^{n-1} - 9 \cdot 2^n)\end{aligned}$$

je pre každé prirodzené n deliteľný siedmimi.

Z uvedeného vyplýva, že S_n je deliteľné siedmimi (t. j. dáva zvyšok 0 po delení siedmimi) práve pre tie prirodzené čísla $n \geqq 3$, ktoré možno zapísať v tvare $6m$, $6m+1$ alebo $6m+2$ pre nejaké prirodzené číslo m, čiže pre čísla n dávajúce po delení šiestimi zvyšok 0, 1 alebo 2.

A – II – 2

Aritmetická postupnosť $\mathcal{A}$ s prvým členom a a kladnou diferenciou d obsahuje práve tie z čísel a^2, a^3, a^4, a^5, pre ktoré je príslušný rozdiel

$$\begin{aligned} a^2 - a &= a(a-1), \\ a^3 - a &= a(a-1)(a+1), \\ a^4 - a &= a(a-1)(a^2+a+1), \\ a^5 - a &= a(a-1)(a+1)(a^2+1) \end{aligned} \tag{1}$$

celým násobkom čísla d. Predpokladajme, že $\mathcal{A}$ obsahuje práve dve z čísel a^2, a^3, a^4, a^5.

Ak $a^2 \in \mathcal{A}$, tak prvý rozdiel $a(a-1)$ je celým násobkom d. Keďže $a \in \mathbb{Z}$, sú potom aj ostatné tri rozdiely v (1) (ktoré sú očividne celočíselnými násobkami prvého rozdielu) celými násobkami d. To však znamená, že $\mathcal{A}$ obsahuje všetky čísla a^2, a^3, a^4, a^5, čo je v spore s predpokladom, že obsahuje práve dve z nich. Preto $a^2 \notin \mathcal{A}$, teda $\mathcal{A}$ obsahuje práve dve z čísel a^3, a^4, a^5.

Ak $a^3 \notin \mathcal{A}$, tak nutne $a^4, a^5 \in \mathcal{A}$, čiže výrazy

$$\frac{a^4 - a}{d}, \qquad \frac{a^5 - a}{d}$$

[10] Pri vypĺňaní tabuľky nemusíme prácne deliť siedmimi čísla $10^n - 1$. Stačí využiť, že 10^{n+1} dáva po delení siedmimi rovnaký zvyšok ako 10-násobok *zvyšku* čísla 10^n.

sú oba celočíselné. Potom je celým číslom aj ich kombinácia

$$\frac{a^5 - a}{d} - a \cdot \frac{a^4 - a}{d} = \frac{a^2 - a}{d},$$

teda $a^2 \in \mathcal{A}$, čo je spor. Preto $a^3 \in \mathcal{A}$.

Dokázali sme, že hľadaná aritmetická postupnosť $\mathcal{A}$ musí obsahovať číslo a^3. Pre jej diferenciu d tak platí odhad $d \leqq a^3 - a$, pričom rovnosť nastane (t. j. diferencia bude najväčšia) v prípade, že a^3 je jej druhým členom. Aritmetická postupnosť s prvým členom a a diferenciou $d = a^3 - a$ určite neobsahuje číslo a^2, obsahuje a^3 a obsahuje aj $a + (a^2 + 1)(a^3 - a) = a^5$. Stačí už iba overiť, že neobsahuje a^4. To vyplýva z toho[11], že výraz

$$\frac{a^4 - a}{d} = \frac{a^4 - a}{a^3 - a} = \frac{a^2 + a + 1}{a + 1} = a + \frac{1}{a + 1}$$

nie je celým číslom pre žiadne kladné celé číslo a.

Záver. Hľadaná postupnosť je aritmetická postupnosť s prvým členom a a diferenciou $d = a^3 - a$.

Poznámka. Ak uhádneme výsledok a ukážeme, že postupnosť s diferenciou $d = a^3 - a$ obsahuje a^3, a^5 a neobsahuje a^2, a^4, na dokončenie riešenia už stačí ukázať iba to, že diferencia nemôže byť väčšia ako $a^3 - a$. Ak je však diferencia väčšia, tak $\mathcal{A}$ zrejme neobsahuje a^2 ani a^3, musí teda obsahovať a^4 aj a^5 a z toho rovnako ako v uvedenom riešení možno odvodiť $a^2 \in \mathcal{A}$ a tým dôjsť k sporu.

A – II – 3

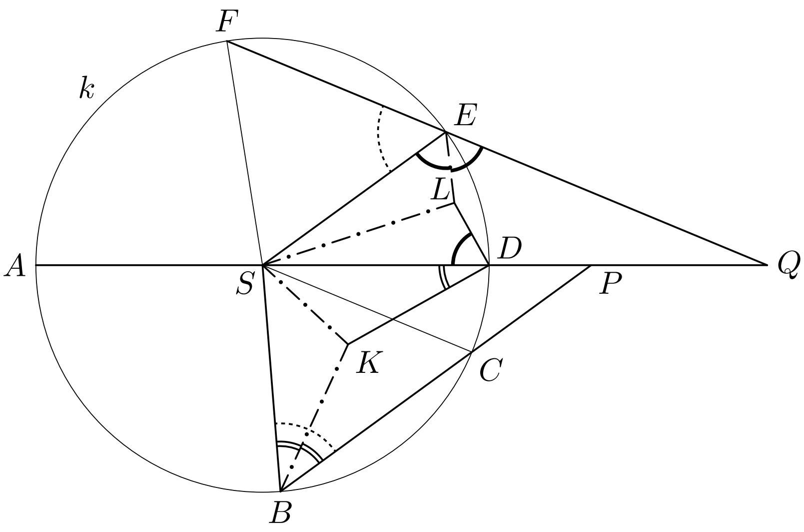
Označme k kružnicu opísanú zadanému šesťuholníku. Keďže $AB \perp BD$, je k Tálesovou kružnicou nad priemerom AD a stred S uhlopriečky AD je zároveň stredom kružnice k.

Dokážeme, že trojuholník KLD má pravý uhol pri vrchole D. Veľkosť uhla KDL je súčtom veľkostí uhlov KDS a LDS. Trojuholníky KDS, KBS sú zhodné podľa vety *sus*: stranu SK majú spoločnú, strany SD, SB sú obe polomerom kružnice k a uhol pri vrchole S majú trojuholníky zhodný, lebo SK je osou uhla BSP (obr. 41). Preto $|\measuredangle KDS| = |\measuredangle KBS|$. Odtiaľ vzhľadom na to, že BK je osou uhla SBP, vyplýva $|\measuredangle KDS| = \frac{1}{2}|\measuredangle CBS|$.

Analogickou úvahou (s využitím zhodnosti trojuholníkov LDS, LES) dostaneme $|\measuredangle LDS| = \frac{1}{2}|\measuredangle QES|$.

---

[11] Argumentovať možno aj takto: V predošlom odseku sme všeobecne dokázali, že ak $a^4, a^5 \in \mathcal{A}$, tak $a^2 \in \mathcal{A}$. My už o $\mathcal{A}$ vieme, že obsahuje a^5 a neobsahuje a^2. Preto nemôže obsahovať a^4.



Obr. 41

Pre dokončenie riešenia stačí aplikovať zatiaľ nepoužitý predpoklad $|BC| = |EF|$. Vďaka nemu sú podľa vety *sss* trojuholníky BCS, EFS zhodné (všetky ich zvyšné strany sú polomermi kružnice k), teda $|\measuredangle CBS| = |\measuredangle FES|$. Spojením odvodených poznatkov máme

$$|\measuredangle KDL| = |\measuredangle KDS| + |\measuredangle LDS| = \frac{1}{2}|\measuredangle CBS| + \frac{1}{2}|\measuredangle QES| = \frac{1}{2}|\measuredangle FES| + \frac{1}{2}|\measuredangle QES| =$$
$$= \frac{1}{2}(|\measuredangle FES| + |\measuredangle QES|) = \frac{1}{2}\cdot 180^\circ = 90^\circ.$$

A – II – 4

Keďže zadané rovnosti obsahujú zmiešané súčiny premenných, výhodné je skúmať druhú mocninu súčtu $a+b+c+d$. Úpravou s dosadením zadaných rovností dostaneme

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^2 &= a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+cd+ac+bd+ad+bc) = \\ &= a^2+b^2+c^2+d^2+2(4+4+5) = a^2+d^2+b^2+c^2+26.\end{aligned} \tag{1}$$

Využijeme známe nerovnosti $a^2+d^2 \geqq 2ad$, $b^2+c^2 \geqq 2bc$, v ktorých rovnosť platí práve vtedy, keď $a=d$ a $b=c$. Na základe toho z (1) máme

$$(a+b+c+d)^2 \geqq 2ad+2bc+26 = 2\cdot 5+26 = 36.$$

Preto pre kladné čísla a, b, c, d musí platiť $a+b+c+d \geqq \sqrt{36} = 6$.

Rovnosť platí práve vtedy, keď $a=d$ a $b=c$. Dosadením do pôvodných rovností dostaneme sústavu

$$2ab = 4, \qquad a^2+b^2 = 5.$$

Tú možno vyriešiť viacerými rôznymi postupmi. Napríklad môžeme vyjadriť

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 5 + 4 = 9,$$

teda $a+b=3$ (keďže $a,b>0$). Podľa Viètových vzťahov sú a, b koreňmi kvadratickej rovnice $x^2-3x+2=0$, teda $\{a,b\}=\{1,2\}$. Ľahko overíme, že štvorice $a=d=1$, $b=c=2$, resp. $a=d=2$, $b=c=1$ skutočne spĺňajú zadané rovnosti a platí pre ne $a+b+c+d=6$.

Odpoveď. Najmenšia možná hodnota súčtu $a+b+c+d$ je 6, dosahujú ju štvorice $(1,2,2,1)$ a $(2,1,1,2)$.

Iné riešenie. Z rovnosti $ab+cd=ac+bd$ vyplýva $a(b-c)=d(b-c)$, takže platí $a=d$ alebo $b=c$. Vzhľadom na symetriu môžeme uvažovať iba vyhovujúce štvorice (a,b,c,d), v ktorých je $d=a$, a hľadať tak najmenšiu hodnotu súčtu $S=2a+b+c$ za predpokladu, že kladné čísla a, b, c spĺňajú rovnosti $a(b+c)=4$ a $a^2+bc=5$.

Podľa Viètových vzťahov sú potom kladné čísla b, c koreňmi kvadratickej rovnice

$$x^2 - \frac{4}{a}x + (5-a^2) = 0.$$

Tá má dva kladné (nie nutne rôzne) korene práve vtedy, keď je jej diskriminant

$$D = \frac{16}{a^2} - 4(5-a^2) = \frac{4(a^2-1)(a^2-4)}{a^2}$$

nezáporný a keď okrem nerovnosti $a>0$ platí aj $a^2<5$. Dokopy to znamená, že $a \in \in (0,1\rangle \cup \langle 2,\sqrt{5})$.

Všimnime si, že pre $a=1$ vychádzajú korene $b=c=2$, naopak pre $a=2$ je $b=c= =1$. V oboch týchto prípadoch má zrejme výraz $S=2a+b+c$ hodnotu 6. Ak ukážeme, že pre ostatné prípustné a platí $S>6$, bude to znamenať, že $\min S=6$ a že $(1,2,2,1)$ a $(2,1,1,2)$ sú jediné štvorice dávajúce nájdené minimum (keďže v oboch z nich platí $b=c$, žiadne iné také štvorice – napriek obmedzeniu našich úvah na prvú z možností $a=d$, $b=c$ – neexistujú). Z vyjadrenia rozdielu $S-6$ v tvare

$$S-6 = 2a+b+c-6 = 2a + \frac{4}{a} - 6 = \frac{2(a-1)(a-2)}{a}$$

vidíme, že žiadaná nerovnosť $S>6$ naozaj platí pre každé $a \in (0,1) \cup (2,\sqrt{5})$.

Iné riešenie. Sčítaním rovníc $ab+cd=4$ a $ad+bc=5$ dostaneme $(a+c)(b+d)=9$, odkiaľ podľa AG-nerovnosti pre dvojicu čísel $a+c$ a $b+d$ obdržíme

$$(a+c)+(b+d) \geqq 2\sqrt{(a+c)(b+d)} = 2\sqrt{9} = 6.$$

Rovnosť nastane práve vtedy, keď bude platiť $a+c=b+d=3$ (a tiež $a+b=c+d=3$, čo odvodíme rovnakou úvahou z podobne získanej rovnosti $(a+b)(c+d)=9$). Z toho už ľahko zistíme (napr. postupom ako v závere prvého riešenia), že minimálnu hodnotu

$a+b+c+d=6$ dávajú len vyhovujúce štvorice $b=c=1$ a $a=d=2$, resp. $b=c=2$ a $a=d=1$.

A – III – 1

Zadaný výraz možno jednoduchou úpravou rozložiť na súčin:

$$n^4-3n^2+9=n^4+6n^2+9-9n^2=(n^2+3)^2-(3n)^2=(n^2+3n+3)(n^2-3n+3).$$

Oba činitele sú celými číslami, teda deliteľmi súčinu. Aby súčin bol prvočíslom p, musí byť niektorý z činiteľov rovný 1, resp. -1 (a druhý p, resp. $-p$). Avšak diskriminant oboch kvadratických činiteľov je $(\pm 3)^2-4\cdot 4=-3$, teda záporný, čiže oba nadobúdajú len kladné hodnoty. Vzhľadom na to nemôžu nadobúdať hodnotu -1 a stačí uvažovať kvadratické rovnice

$$n^2+3n+3=1 \qquad \text{a} \qquad n^2-3n+3=1.$$

Riešením prvej rovnice sú hodnoty $n=-1$ a $n=-2$, pre ktoré druhý činiteľ nadobúda hodnoty 7 a 13, čo sú prvočísla.

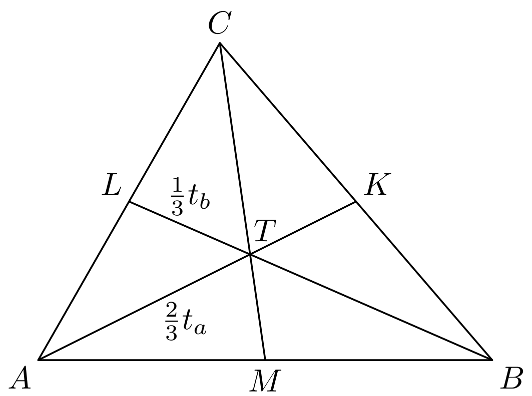
Riešením druhej rovnice sú $n=1$ a $n=2$, pre ktoré prvý činiteľ nadobúda opäť prvočíselné hodnoty 7 a 13.

Odpoveď. Zadaný výraz je prvočíslom práve vtedy, keď $n\in\{-2,-1,1,2\}$.

A – III – 2

Označme T ťažisko trojuholníka ABC a K, L, M stredy strán BC, CA, AB. Ťažnice delia trojuholník ABC na šesť menších trojuholníkov s rovnakým obsahom: Napr. trojuholník AMT má stranu $|AM|=\frac12 c$ a jeho výška na stranu AM má zrejme veľkosť $\frac13 v_c$, takže $S_{AMT}=\frac12\cdot\frac12 c\cdot\frac13 v_c=\frac16\cdot\frac12 c\cdot v_c=\frac16 S_{ABC}$ a analogicky to platí aj pre zvyšných päť trojuholníkov.

Úloha určiť najväčší možný obsah trojuholníka ABC je teda ekvivalentná s úlohou určiť najväčší možný obsah jedného zo šiestich menších trojuholníkov – výsledok stačí vynásobiť šiestimi.



Obr. 42

Uvažujme napríklad trojuholník ATL (obr. 42). Pre jeho dve strany platí

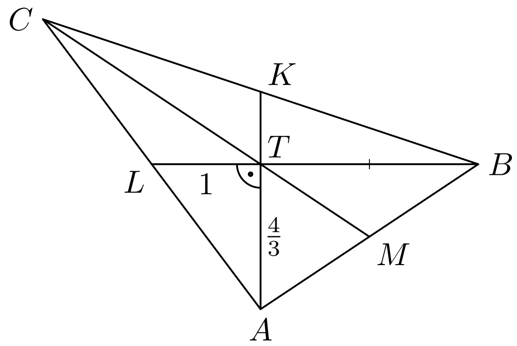
$$|AT| = \frac{2}{3}t_a \leqq \frac{4}{3}, \qquad |TL| = \frac{1}{3}t_b \leqq 1.$$

Preto pre jeho obsah dostávame

$$S_{ATL} = \frac{1}{2}|AT| \cdot |TL| \cdot \sin|\measuredangle ATL| \leqq \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 1 \cdot \sin|\measuredangle ATL| = \frac{2}{3}\sin|\measuredangle ATL| \leqq \frac{2}{3}.$$

Tým sme dokázali, že obsah trojuholníka ABC, ktorého ťažnice spĺňajú zadané nerovnosti, nemôže byť väčší ako $6 \cdot \frac{2}{3} = 4$. Pritom rovnosť $S_{ATL} = \frac{2}{3}$ (t. j. $S_{ABC} = 4$) nastane len vtedy, keď $t_a = 2$, $t_b = 3$ a $|\measuredangle ATL| = 90°$.[12]

Trojuholník ABC s takýmito vlastnosťami vieme ľahko „zrekonštruovať“: Najskôr narysujeme pravouhlý trojuholník ATL, v ktorom poznáme dĺžky oboch odvesien $|AT| = \frac{4}{3}$, $|TL| = 1$ a následne zostrojíme bod C ako obraz bodu A v stredovej súmernosti so stredom L a bod B ako obraz bodu L v rovnoľahlosti so stredom T a koeficientom -2 (obr. 43). Stačí už len overiť, že v takomto trojuholníku ABC platí $t_c \leqq 4$.



Obr. 43

Dĺžku t_c možno vypočítať rôznymi spôsobmi. Napríklad v pravouhlom trojuholníku ABT má prepona AB podľa Pytagorovej vety dĺžku

$$|AB| = \sqrt{|AT|^2 + |TB|^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + 4} = \sqrt{\frac{52}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{13},$$

takže veľkosť polomeru Tálesovej kružnice nad priemerom AB je

$$|MT| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{3}\sqrt{13}.$$

Odtiaľ $t_c = 3|MT| = \sqrt{13} < 4$.[13]

Odpoveď. Najväčší možný obsah trojuholníka ABC je 4.

---

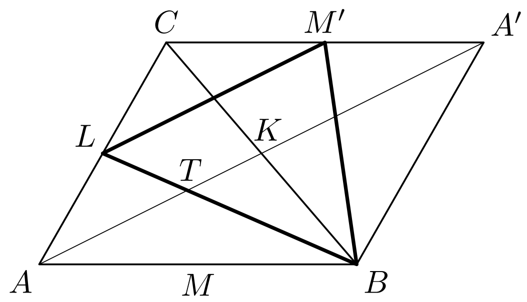
[12] Rovnaký výsledok vieme ľahko dostať aj bez použitia funkcie sínus: Pre výšku v na stranu AT v trojuholníku ATL zrejme platí $v \leqq |TL|$, takže $S_{ATL} = \frac{1}{2}v|AT| \leqq \frac{1}{2}|TL||AT|$, pričom rovnosť platí, keď $AT \perp TL$.

[13] Ak si nevšimneme Tálesovu kružnicu nad AB, môžeme postupovať tak, že aj z pravouhlých trojuholníkov ATL a BTK dopočítame prepony, ktoré sú polovicami strán b, a trojuholníka ABC: $\frac{1}{2}b = \sqrt{1 + \frac{16}{9}} = \frac{5}{3}$, $\frac{1}{2}a = \sqrt{4 + \frac{4}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{10}$. Teda $a = \frac{4}{3}\sqrt{10}$, $b = \frac{10}{3}$, $c = \frac{2}{3}\sqrt{13}$ a na výpočet ťažnice môžeme použiť známy vzorec $t_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

Iné riešenie. Obsah trojuholníka ABC možno vypočítať podľa vzorca

$$S_{ABC} = \frac{1}{3}\sqrt{2(t_a^2t_b^2 + t_b^2t_c^2 + t_c^2t_a^2) - (t_a^4 + t_b^4 + t_c^4)}. \tag{1}$$

Tento vzorec možno ľahko odvodiť nasledovnou úvahou: Ak zobrazíme trojuholník ABC v stredovej súmernosti so stredom K (pri označení bodov ako v prvom riešení) a obrazy bodov M, A označíme M', A', tak trojuholník $BM'L$ má zrejme dĺžky strán rovné t_a, t_b, t_c (obr. 44). Pritom jeho obsah tvorí $\frac{3}{8}$ obsahu rovnobežníka $ABA'C$, čiže $\frac{3}{4}$ obsahu trojuholníka ABC. Takže podľa Herónovho vzorca máme $S_{ABC} = \frac{4}{3}S_{BM'L} = \frac{4}{3}\sqrt{u(u-t_a)(u-t_b)(u-t_c)}$, pričom $u = \frac{1}{2}(t_a + t_b + t_c)$, a po úprave dostaneme (1).



Obr. 44

Označme $t_a^2 = x$, $t_b^2 = y$, $t_c^2 = z$. Výraz na pravej strane (1) má najväčšiu hodnotu vtedy, keď v ňom má najväčšiu hodnotu výraz pod odmocninou. Zabudnime teda na geometrický význam vzorca a hľadajme najväčšiu možnú hodnotu výrazu

$$V = 2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2)$$

pri podmienkach $0 \leqq x \leqq 4$, $0 \leqq y \leqq 9$, $0 \leqq z \leqq 16$.

Ak zvolíme hodnoty x, y pevné, výraz V je kvadratický v premennej z. Úpravou na štvorec dostaneme

$$V = -\big(z - (x+y)\big)^2 + 4xy \leqq 4xy \leqq 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144.$$

Rovnosť pritom nastane pre $x = 4$, $y = 9$ a $z = x + y = 13$. Našli sme teda najväčšiu možnú hodnotu výrazu V pri stanovených podmienkach. Keď tento výsledok dosadíme do (1), obdržíme

$$S_{ABC} = \frac{1}{3}\sqrt{V} \leqq \frac{1}{3}\sqrt{144} = 4.$$

Rovnosť $S_{ABC} = 4$ je splnená pre trojuholník s ťažnicami $t_a = \sqrt{4} = 2$, $t_b = \sqrt{9} = 3$ a $t_c = \sqrt{13} < 4$. Trojuholník s takýmito dĺžkami ťažníc naozaj existuje – uvedené dĺžky totiž spĺňajú trojuholníkové nerovnosti $(2 + 3 > \sqrt{13})$, takže vieme zostrojiť trojuholník $BM'L$ z obr. 44 ($|BM'| = t_c = \sqrt{13}$, $|M'L| = t_a = 2$, $|LB| = t_b = 3$) a následne dorysovať trojuholník ABC (bod K je ťažiskom trojuholníka

$BM'L$, vrchol C je obrazom B v stredovej súmernosti podľa K, vrchol A je obrazom C v stredovej súmernosti podľa L).

A – III – 3

Ekvivalentnými úpravami nerovnosti zo zadania (s využitím toho, že výraz $1+x^2$ je kladný pre každé $x \in \mathbb{R}$) dostaneme

$$\begin{aligned} 100\,|(u-v)(1-uv)| &\leqq (1+u^2)(1+v^2), \\ 100\,\left|u-v-u^2v+uv^2\right| &\leqq (1+u^2)(1+v^2), \\ \left|u(1+v^2)-v(1+u^2)\right| &\leqq \frac{1}{100}(1+u^2)(1+v^2), \\ \left|\frac{u}{1+u^2}-\frac{v}{1+v^2}\right| &\leqq \frac{1}{100}. \end{aligned} \tag{1}$$

Všetky hodnoty funkcie

$$f(x)=\frac{x}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

ležia v intervale $\langle -\frac12, \frac12 \rangle$, pretože pre každé reálne číslo x platí

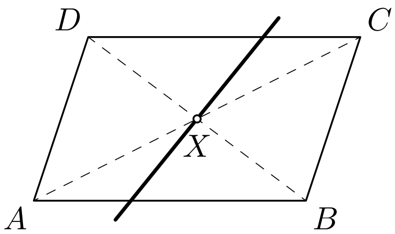
$$\begin{aligned} (1-x)^2 &\geqq 0, \\ 1+x^2 &\geqq 2x, \\ \frac12 &\geqq \frac{x}{1+x^2} \end{aligned} \qquad \text{a} \qquad \begin{aligned} (1+x)^2 &\geqq 0, \\ 1+x^2 &\geqq -2x, \\ -\frac12 &\leqq \frac{x}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Rozdeľme interval $\langle -\frac12, \frac12 \rangle$ s dĺžkou 1 rovnomerne na sto malých intervalov s dĺžkou $\frac{1}{100}$. Podľa Dirichletovho princípu medzi ľubovoľnými 101 číslami nájdeme dve čísla u, v také, že $f(u)$, $f(v)$ ležia v tom istom malom intervale. Pre túto dvojicu zrejme platí $|f(u)-f(v)| \leqq \frac{1}{100}$, čo je presne nerovnosť (1), ktorá je ekvivalentná so zadanou nerovnosťou.

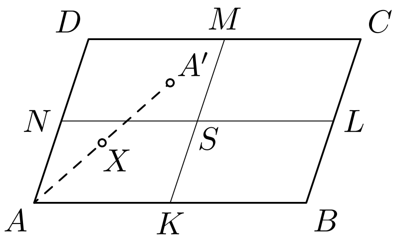
A – III – 4

Keďže súčet obsahov oboch častí, na ktoré priamka delí rovnobežník $ABCD$, je stále rovnaký, líšiť sa budú čo najviac práve vtedy, keď menší z obsahov bude najmenší možný. Riešenie začneme pozorovaním, že ak bod X leží v strede rovnobežníka $ABCD$, tak každá priamka, ktorá ním prechádza, delí rovnobežník na dve časti s rovnakým obsahom. Obe časti sú totiž v takom prípade zhodné – jedna sa zobrazí na druhú v stredovej súmernosti podľa stredu X (obr. 45).

Uvedený fakt využijeme aj pri všeobecnej polohe bodu X. Predpokladajme, že bod A', ktorý je obrazom bodu A v stredovej súmernosti podľa X, leží vnútri rovnobežníka $ABCD$. Ak označíme K, L, M, N postupne stredy strán AB, BC, CD, DA a S stred rovnobežníka $ABCD$, tak opísaná situácia nastane práve vtedy, keď X leží vnútri rovnobežníka $AKSN$ (obr. 46).

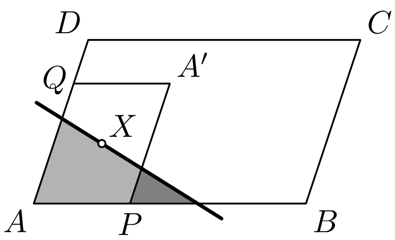


Obr. 45

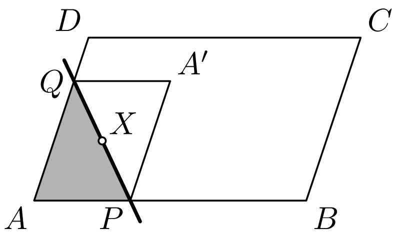


Obr. 46

Bodom A' veďme rovnobežky so stranami rovnobežníka a ich priesečníky so stranami AB a AD označme P a Q. Štvoruholník $APA'Q$ je zrejme rovnobežník a bod X je jeho stredom. Preto každá priamka prechádzajúca cez X rozdeľuje $APA'Q$ na dva útvary s rovnakým obsahom. Každý z týchto dvoch útvarov pritom patrí do inej časti rovnobežníka $ABCD$ (obr. 47a), takže žiadna z dvoch častí rovnobežníka $ABCD$ nemôže mať obsah menší ako polovica obsahu rovnobežníka $APA'Q$. Najmenší obsah menšej časti dosiahneme, keď okrem útvaru pochádzajúceho z rovnobežníka $APA'Q$ nebude časť obsahovať nič iné, čo je možné len v prípade, že deliaca priamka je totožná s priamkou PQ (obr. 47b).



Obr. 47a

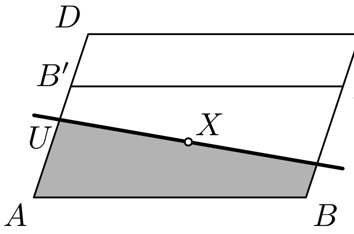


Obr. 47b

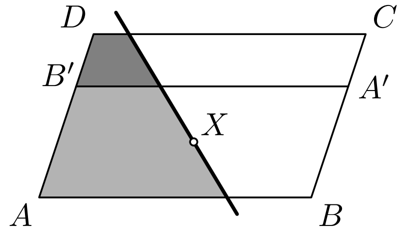
Ak bod X leží vnútri rovnobežníka $KBLS$, $SLCM$, resp. $NSMD$ (obr. 46), deliacu priamku zostrojíme obdobným postupom: Pomocou obrazu bodu B, C resp. D v stredovej súmernosti podľa X zostrojíme menší rovnobežník, ktorý leží celý vnútri rovnobežníka $ABCD$, má stred X a dve jeho strany ležia na stranách pôvodného rovnobežníka. Rozdeľujúcou priamkou musí byť uhlopriečka menšieho rovnobežníka oddeľujúca jeho polovicu od zvyšku rovnobežníka $ABCD$.

Ostáva vyšetriť prípad, keď X leží vnútri jednej z úsečiek KM, NL (mimo stredu rovnobežníka $ABCD$). Aj v tejto situácii vieme zostrojiť menší rovnobežník, ktorý celý leží v rovnobežníku $ABCD$, bod X je jeho stredom a strany (tentoraz až tri) má na stranách pôvodného rovnobežníka.

Ak X leží vnútri úsečky KS, tak takým rovnobežníkom je $ABA'B'$, pričom A', B' sú obrazy bodov A, B v stredovej súmernosti podľa X. Aj v tomto prípade musíme deliacu priamku cez X viesť tak, aby jedna z častí rovnobežníka $ABCD$ neobsahovala okrem útvaru pochádzajúceho z rovnobežníka $ABA'B'$ nič iné. Je zrejmé, že vyhovujúcou bude práve každá priamka UX, kde U je ľubovoľný bod úsečky AB' (obr. 48a, b).



Obr. 48a



Obr. 48b

Analogicky nájdeme deliace priamky v prípade, že X leží vnútri niektorej z úsečiek SM, NS či SL.

Záver. Ak X je stredom rovnobežníka $ABCD$, riešením je ľubovoľná priamka prechádzajúca cez X. Ak X leží mimo úsečiek KM, NL, riešením je jediná priamka. Ak X leží vnútri niektorej z úsečiek KS, SM, NS, SL, riešením je nekonečne veľa priamok. V každom z týchto prípadov je konštrukcia zrejmá z predošlých úvah.

A – III – 5

Rozdelenie vyhovujúce zadaniu priamo neskonštruujeme, iba dokážeme, že také rozdelenie existuje. Všetkých možných rozdelení 90 detí na tri 30-členné skupiny (pokiaľ nezáleží na poradí skupín) je dokopy

$$V = \binom{90}{30} \cdot \binom{60}{30} \cdot \frac{1}{3!},$$

pretože každé také rozdelenie môžeme vytvoriť tak, že najskôr vyberieme zo všetkých detí jednu 30-člennú skupinu a potom zo zvyšných 60 detí vyberieme druhú 30-člennú skupinu. Tretia skupina bude tvorená deťmi, ktoré ostali (členom 3! treba výsledný súčin prirodzene vydeliť, keďže každé rozdelenie sme započítali pre každé možné poradie troch skupín).

Rozdelenie nazveme *zlé kvôli dieťaťu A*, ak pri ňom dieťa A nemá vo svojej skupine žiadneho kamaráta. Zaoberajme sa tým, koľko je všetkých zlých rozdelení (teda takých, ktoré nevyhovujú zadaniu), ich počet označme Z. Stačí, ak ukážeme, že zlých rozdelení je menej ako všetkých, t. j. $Z < V$.

Skúmajme, aký je počet rozdelení, ktoré sú zlé kvôli A – ich počet označme Z_A. Ak A má medzi všetkými n kamarátov (čiže má $89 - n$ „nekamarátov“), tak existuje[14]

$$\binom{89-n}{29}$$

30-členných skupín, v ktorých je A spoločne s ďalšími 29 deťmi, z ktorých ani jedno nie je jeho kamarát. Pre každú takúto skupinu vieme zvyšných 60 detí rozdeliť

$$\binom{60}{30} \cdot \frac{1}{2}$$

[14] V prípade, že $n > 60$, tak prirodzene neexistuje žiadne rozdelenie zlé kvôli A. Aby sme sa vyhli rozoberaniu osobitných prípadov, dodefinujeme, tak ako je zvykom, $\binom{k}{l} = 0$ v prípade, že $k < l$.

spôsobmi na dve 30-členné skupiny (stále neberieme ohľad na poradie skupín). Takže počet rozdelení zlých kvôli A je

$$Z_A = \binom{89-n}{29} \cdot \binom{60}{30} \cdot \frac{1}{2} \leqq \binom{59}{29} \cdot \binom{60}{30} \cdot \frac{1}{2} \tag{1}$$

(v nerovnosti sme využili zadané ohraničenie $n \geqq 30$, čiže $89 - n \leqq 59$ – zrejme z čím väčšej množiny 29 prvkov vyberáme, tým viac kombinácií dostaneme).

Celkový počet zlých rozdelení určite nie je väčší ako súčet počtov zlých rozdelení pre jednotlivé deti (každé zlé rozdelenie je totiž zlé kvôli jednému alebo viacerým deťom). Keďže detí je 90, podľa (1) máme

$$Z \leqq 90 \cdot \binom{59}{29} \cdot \binom{60}{30} \cdot \frac{1}{2}.$$

Na dôkaz nerovnosti $Z < V$ tak stačí dokázať nerovnosť

$$90 \cdot \binom{59}{29} \cdot \binom{60}{30} \cdot \frac{1}{2} < \binom{90}{30} \cdot \binom{60}{30} \cdot \frac{1}{3!}, \tag{2}$$

ktorú ekvivalentne upravíme:

$$45 \cdot \binom{59}{29} < \binom{90}{30} \cdot \frac{1}{6},$$

$$6 \cdot 45 \cdot \frac{59!}{29! \cdot 30!} < \frac{90!}{30! \cdot 60!},$$

$$6 \cdot 45 \cdot 59 \cdot 58 \cdot \ldots \cdot 30 < 90 \cdot 89 \cdot \ldots \cdot 61,$$

$$6 \cdot 45 < \frac{90}{59} \cdot \frac{89}{58} \cdot \ldots \cdot \frac{61}{30}. \tag{3}$$

Každý z tridsiatich zlomkov na pravej strane poslednej nerovnosti je zrejme väčší ako 1,5. Preto pravá strana je väčšia ako $1{,}5^{30} = 2{,}25^{15} > 2^{15} > 270 = 6 \cdot 45$. Takže nerovnosť (3) a teda aj (2) platí, čo znamená, že existuje rozdelenie, ktoré nie je zlé.

A – III – 6

Najskôr odhadneme ľavú stranu prvej rovnice danej sústavy pomocou nerovnosti $4x^2 \leqq \leqq x^4 + 4$, ktorá je splnená pre ľubovoľné reálne číslo x, pretože je ekvivalentná s nerovnosťou $0 \leqq (x^2 - 2)^2$. Rovnosť v nej nastane práve vtedy, keď $x^2 = 2$, t. j. práve vtedy, keď $x = \sqrt{2}$ alebo $x = -\sqrt{2}$.

Dostaneme tak

$$4x^2 + y^2 \leqq x^4 + y^2 + 4 = 5yz.$$

Analogicky odhadneme aj ľavé strany zvyšných dvoch rovníc sústavy. Obdržíme tak trojicu nerovníc

$$\begin{aligned} 4x^2 + y^2 &\leqq 5yz, \\ 4y^2 + z^2 &\leqq 5zx, \\ 4z^2 + x^2 &\leqq 5xy. \end{aligned} \tag{1}$$

Ich súčtom dostaneme po jednoduchej úprave nerovnicu

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqq xy + yz + zy,$$

ktorú ekvivalentne upravíme na tvar

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \leqq 0. \tag{2}$$

Súčet druhých mocnín nemôže byť záporný. Preto v nerovnici (2) nutne nastáva rovnosť, t. j. platí $x = y = z$. Rovnosť musí ale platiť tiež v každej nerovnici v (1). Odtiaľ vyplýva

$$x = y = z = \sqrt{2} \quad \text{alebo} \quad x = y = z = -\sqrt{2}.$$

Skúškou sa ľahko presvedčíme, že obe nájdené trojice danej sústave vyhovujú.

Záver. Daná sústava rovníc má v obore reálnych čísel práve dve riešenia, sú to trojice $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ a $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Iné riešenie. Po substitúcii $x = \sqrt{2}a$, $y = \sqrt{2}b$, $z = \sqrt{2}c$ (ktorú prirodzene urobíme, aby sústava mala triviálne riešenie $a = b = c = \pm 1$) riešime sústavu

$$\begin{aligned} 4a^4 + 2b^2 + 4 &= 10bc, \\ 4b^4 + 2c^2 + 4 &= 10ca, \\ 4c^4 + 2a^2 + 4 &= 10ab. \end{aligned} \tag{3}$$

Pritom podľa nerovnosti medzi váženým aritmetickým a geometrickým priemerom (nezáporných) čísel a^4, b^4, a^2, b^2, 1 máme

$$\frac{2a^4 + 2b^4 + a^2 + b^2 + 4}{10} \geqq \sqrt[10]{a^{10}b^{10}} = |ab| \geqq ab,$$

teda $2a^4 + 2b^4 + a^2 + b^2 + 4 \geqq 10ab$. Sčítaním tejto nerovnosti s dvoma nerovnosťami, ktoré z nej získame cyklickou zámenou premenných, dostaneme, že súčet ľavých strán v (3) je väčší alebo rovný súčtu pravých strán v (3), pričom rovnosť nastane jedine ak nastane v použitých AG-nerovnostiach, teda keď $a^2 = b^2 = c^2 = 1$. Pritom a, b, c musia mať totožné znamienka, aby platila rovnosť v nerovnosti $|ab| \geqq ab$ a v podobných nerovnostiach s premennou c. Teda jediným riešením sústavy (3) sú trojice $(1, 1, 1)$ a $(-1, -1, -1)$, ktorým zodpovedajú rovnaké trojice (x, y, z), aké sme našli v prvom riešení (a urobili pre ne skúšku).

Prípravné sústredenia pred IMO a MEMO

Pred medzinárodnou matematickou olympiádou (IMO) a stredoeurópskou matematickou olympiádou (MEMO) sa každoročne koná jedno výberové a jedno prípravné sústredenie pre najlepších riešiteľov celoštátneho kola kategórie A (CK MO). Od 55. ročníka MO sa navyše každoročne koná aj spoločné prípravné sústredenie českého a slovenského IMO-družstva.

Po výberovom sústredení SK MO vyberie 6 najlepších študentov do reprezentačného družstva Slovenska pre IMO a určí jedného náhradníka. Spomedzi tých, ktorí sa nedostali na IMO a zároveň nie sú v maturitnom ročníku (t. j. majú možnosť súťažiť v MO aj nasledujúci školský rok), vyberie SKMO najlepších 6 študentov do družstva pre MEMO. Na výberovom sústredení pred IMO sa zúčastnilo 17 súťažiacich, najúspešnejších riešiteľov tretieho kola MO kategórie A. Sústredenie sa konalo v dňoch 18. – 25. 4. 2012 v Bratislave. Úlohy zadávali lektori z FMFI UK Bratislava:

Dominik Csiba, Mgr. Richard Kollár, PhD., úlohy 1 – 4,

Bc. Tomáš Kocák, úlohy 5 – 7,

RNDr. Tomáš Jurík, PhD., Mgr. Martin Kollár, PhD., úlohy 8 – 11,

Peter Csiba, Jakub Santer, Matúš Stehlík, úlohy 12 – 15,

Filip Sládek, úlohy 16 – 18.

Každý deň študenti riešili sériu troch či štyroch úloh pri podobných podmienkach ako na IMO. V poobedňajších hodinách sa konal spoločný rozbor úloh s lektorom. Na konci sústredenia sa získané body za jednotlivé dni sčítali a s prihliadnutím na výsledky tretieho kola MO boli vybrané šesťčlenné družstvá pre účasť na IMO a MEMO.

Výsledky sústredenia:

Martin Vodička	81	*Bui Truc Lam*	42
Miroslav Stankovič	66,5	*Soňa Galovičová*	40,5
Eduard Batmendijn	65,5	*Marta Kossaczká*	37,5
Michal Tóth	58	*Patrik Bak*	36,5
Marián Horňák	49	*Tomáš Gonda*	33,5
Klára Ficková	46,5	*Pavol Koprda*	33,5
Jakub Šafin	46	*Monika Daniláková*	21,5
Filip Hanzely	42,5	*Tamás Balogh*	16
Vladimír Macko	42,5		

Poradie po zohľadnení výsledkov CKMO:

1.	*Martin Vodička*	119
2.	*Miroslav Stankovič*	95,5
3.	*Eduard Batmendijn*	84,5
4.	*Marián Horňák*	83
5.	*Klára Ficková*	74,5
6.	*Michal Tóth*	71
7.	*Jakub Šafin*	66
8.	*Filip Hanzely*	62,5
9.	*Marta Kossaczká*	59,5
10.	*Vladimír Macko*	58,5
11.	*Soňa Galovičová*	55,5
12.	*Bui Truc Lam*	55
13.	*Patrik Bak*	53,5
14.	*Pavol Koprda*	47,5
15.	*Tomáš Gonda*	46,5
16.	*Monika Daniláková*	35,5
17.	*Tamás Balogh*	29

Prípravné sústredenie sa konalo v dňoch 3. – 8. 6. 2012 v Bratislave. Sústredenie bolo zamerané obzvlášť na prípravu reprezentačných družstiev na IMO a MEMO. Lektormi boli študenti a učitelia z FMFI UK Bratislava:

Bc. Tomáš Kocák (geometria),
Mgr. Richard Kollár, PhD. (teória čísel),
Matúš Stehlík (algebra),
Mgr. Peter Novotný, PhD. (analytická geometria),
Filip Sládek (algebra),
Peter Csiba (kombinatorika).

V poradí siedme spoločné sústredenie českého a slovenského družstva sa uskutočnilo v dňoch 17. – 22. 6. 2012 v ČR v Uherskom Hradišti v regionálnom vzdelávacom stredisku Eduha. Sústredenie sa uskutočnilo pod záštitou Společnosti Otakara Borůvky a bolo finančne zabezpečené z neštátnych prostriedkov. Pedagogický dozor slovenským (a na mieste aj českým) študentom robil Bc. Tomáš Kocák z FMFI UK Bratislava. Odborné prednášky viedli

doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., MÚ AV ČR, Brno (teória čísel),
RNDr. Pavel Calábek, PhD., PF UP, Olomouc (funkc. rovnice a iné algebraické úl.),
Mgr. Martin Panák, PhD., MÚ AV ČR, Brno (kombinatorika),
RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., PF UP, Olomouc (syntetická planimetria).

Zadania súťažných úloh výberového sústredenia pred IMO

1. Nech W je vnútorný bod trojuholníka ABC. Bodom W vedieme priamky p_1, p_2, p_3 rovnobežné so stranami trojuholníka AB, BC a CA, ktoré pretínajú strany trojuholníka ABC postupne v bodoch K ($p_1 \cap CA$), N ($p_1 \cap BC$), L ($p_2 \cap AB$), O ($p_2 \cap CA$), M ($p_3 \cap BC$) a P ($p_3 \cap AB$). Uhlopriečky KB, LC a MA lichobežníkov $ABNK$, $BLOC$ a $CMPA$ delia trojuholník ABC na sedem častí, z ktorých štyri sú trojuholníky. Dokážte, že súčet obsahov troch z týchto trojuholníkov, ktoré ležia pri stranách trojuholníka ABC, je rovný obsahu štvrtého (vnútorného).

2. Dané je prirodzené číslo $n \geqq 2$. Množina M uzavretých intervalov má tieto vlastnosti:

(i) Pre každý interval $\langle u, v\rangle \in M$ platí, že u aj v sú prirodzené čísla, $1 \leqq u < < v \leqq n$.
(ii) Pre každé dva rôzne intervaly $I \in M$ a $J \in M$ platí $I \subset J$, alebo $J \subset I$, alebo $I \cap J = \emptyset$.

Určte najväčší možný počet prvkov množiny M.

3. Nájdite najmenšie reálne číslo k také, že platí: ak je daný ľubovoľný trojuholník ABC so stranami $a \leqq b \leqq c$, tak existuje
a) rovnoramenný trojuholník XYZ,
b) pravouhlý rovnoramenný trojuholník XYZ,

ktorý obsahuje trojuholník ABC, a pre ktorého obsah platí

$$S_{XYZ} \leqq kb^2.$$

c) Ako sa zmení výsledok v časti b), ak predpokladáme, že trojuholník ABC je ostrouhlý?

4. Dané sú kladné celé čísla n a k, $n > k$. Dokážte, že existujú celé kladné čísla $c_1, c_2, \ldots, c_n$ také, že nerovnosť

$$k(c_1 + \cdots + c_k) + (n-k)(c_{k+1} + \cdots + c_n) \leqq$$
$$\leqq p(c_1 + \cdots + c_p) + (n-p)(c_{p+1} + \cdots + c_n)$$

platí pre všetky $p \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

5. Dané sú dve kružnice, ktoré majú vnútorný dotyk v bode M a priamka, ktorá sa dotýka vnútornej kružnice v bode P a pretína vonkajšiu kružnicu v bodoch Q a R. Dokážte, že uhly QMP a RMP sú zhodné.

6. Nájdite najväčšie prirodzené číslo k, pre ktoré platí: Množina prirodzených čísel sa dá rozdeliť na k navzájom disjunktných podmnožín $A_1, A_2, \ldots, A_k$ takých, že pre všetky prirodzené čísla $n \geqq 15$ a všetky $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ existujú dva rôzne prvky z množiny A_i, ktorých súčet je n.

7. Nech n je dané prirodzené číslo. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ také, že pre všetky celé čísla x a y platí

$$f(x + y + f(y)) = f(x) + ny.$$

8. Nájdite minimum výrazu $a^4 + b^4 + c^4 - 3abc$ pre reálne čísla a, b, c spĺňajúce podmienky $a \geqq 1$ a $a + b + c = 0$.

9. Nech $ABCDE$ je tetivový päťuholník. Označme a, b, c, d postupne vzdialenosti priamok BC, CD, DE a BE od bodu A. Vyjadrite d pomocou a, b, c.

10. Šachovnica 8×8 je bez medzier pokrytá 32 kameňmi domina. Potom k šachovnici pridáme na koniec prvého riadka deviate políčko. Je dovolené vziať ľubovoľný kameň domina a umiestniť ho na ľubovoľné dve prázdne susedné políčka upravenej šachovnice. Dokážte, že takými ťahmi sa dajú všetky kamene domina uložiť vodorovne.

11. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo d existuje také prirodzené číslo n, ktoré je deliteľné číslom d, a aj číslo, ktoré vznikne vyškrtnutím vhodnej nenulovej číslice z čísla n, je deliteľné číslom d.

12. Nech x, y a z sú kladné celé čísla také, že $1/x - 1/y = 1/z$. Nech d je najväčším spoločným deliteľom x, y a z. Dokážte, že obe čísla $dxyz$ a $d(y-x)$ sú štvorcami celých čísel.

13. Nájdite všetky konečné množiny A nezáporných reálnych čísel, pre ktoré platia obe podmienky:
(i) množina A obsahuje aspoň 4 čísla;
(ii) pre ľubovoľné 4 rôzne čísla $a, b, c, d \in \mathsf{A}$ je číslo $ab + cd$ tiež prvkom množiny A.

14. Tri rôzne body A, B a C ležia na priamke v tomto poradí. Nech k je kružnica prechádzajúca cez A a C, ktorej stred neleží na priamke AC. Dotyčnice ku k v bodoch A a C sa pretínajú v bode P. Úsečka PB pretína kružnicu k v bode Q. Dokážte, že priesečník osi uhla AQC s priamkou AC je rovnaký nezávisle na výbere kružnice k.

15. Do triedy chodí konečný počet dievčat a chlapcov. *Živá* skupina chlapcov je taká, že každé dievča pozná aspoň jedného chlapca zo skupiny. Podobne, *živá* skupina dievčat je taká, že každý chlapec pozná aspoň jedno dievča zo skupiny. Dokážte, že počet živých skupín chlapcov má rovnakú paritu ako počet živých skupín dievčat. (Poznanie sa je vzájomné, ak Fero pozná Aničku, tak aj Anička pozná Fera).

16. Majme pevne dané prirodzené číslo n. Nájdite všetky n-tice celých čísel $(a_1, \ldots, a_n)$, ktoré splňujú obidve nasledovné podmienky:
(i) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqq n^2$,
(ii) $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \leqq n^3 + 1$.

17. Nech ABC je rovnoramenný trojuholník so základňou AB. Ďalej nech M je stred AB a P je bod vnútri trojuholníka ABC taký, že $|\measuredangle PAB| = |\measuredangle PBC|$. Dokážte, že
$$|\measuredangle APM| + |\measuredangle BPC| = 180^\circ.$$

18. Nech n je nepárne prirodzené číslo. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ také, aby pre všetky celé čísla x a y platilo $f(x) - f(y) \mid x^n - y^n$.

1. Česko-poľsko-slovenské stretnutie juniorov

V termíne 20. – 23. 5. 2012 v Mszane Dolnej v Poľsku sa uskutočnil prvý ročník súťaže, ktorá dostala názov Česko-poľsko-slovenské stretnutie juniorov. Za vznikom súťaže stáli organizátori z Poľska, kde sa v školskom roku 2011/2012 konala po prvý raz súťaž *Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów*, teda matematická olympiáda pre študentov tzv. gymnázií. (Školský systém v Poľsku je nasledovný: žiaci prvých 6 rokov navštevujú základnú školu, ďalšie 3 roky študujú na gymnáziu a ďalšie 3 roky na lýceu, z ktorého môžu ďalej pokračovať v štúdiu na vysokej škole. Do školského roku 2010/2011 organizovali v Poľsku len *Olimpiadu Matematycznu*, teda súťaž pre študentov lýceí.)

Kolegovia z Poľska sa rozhodli vyvrcholiť svoju novú súťaž medzinárodným kolom, a keďže sa s organizátormi MO zo Slovenska a ČR poznajú už dlhé roky vďaka súťaži Česko-poľsko-slovenské stretnutie, ktorú každoročne organizujeme pre družstvá IMO, oslovili nás s ponukou usporiadania podobného stretnutia pre mladších žiakov. Vzhľadom na charakter súťaže v Poľsku sme sa rozhodli na túto súťaž nominovať najlepších riešiteľov krajského kola v kategórii C. Výber družstva bol urobený na základe koordinácie riešení najlepších cca. 20 študentov. Slovensko tak reprezentovali

Patrik Bak, Gymnázium Kpt. Nálepku, Sobrance,
Dávid Bugár, Gymnázium H. Selyeho, Komárno,
Ema Krakovská, Gymnázium Grösslingová, Bratislava,
Tamás Pammer, Gymnázium I. Madácha, Šamorín,
Samuel Sučík, Gymnázium Jura Hronca, Bratislava,
Bui Truc Lam, Gymnázium Grösslingová, Bratislava.

Samotná súťaž sa delila na dve časti – súťaž jednotlivcov a súťaž družstiev. V súťaži jednotlivcov, ktorá sa konala v pondelok doobeda, žiaci samostatne riešili 5 úloh podobnou formou ako býva zvykom na jednotlivých kolách MO. Pre súťaž družstiev bolo lósom určených 6 družstiev – v každom družstve bol jeden žiak zo Slovenska, jeden z ČR a jeden z Poľska. Počas súťaže v utorok doobeda mala každá trojica vyriešiť 6 úloh, pričom na príprave riešení mali spolupracovať a odovzdať za celé družstvo ku každej úlohe jedno riešenie. Zaujímavé bolo pravidlo, že každá úloha bola zadaná len v jednom z niektorých troch jazykov a každá úloha mala predpísané, v akom jazyku musí byť vypracované jej riešenie. Pritom zadanie bolo napísané v inom jazyku, ako malo byť vypracované jej riešenie. Žiaci tak museli pri riešení spolupracovať a mimo matematických schopností sa precvičili aj v jazykoch. Pre zaujímavosť uvádzame zadania súťaže družstiev v takom jazyku, v akom ich dostali aj žiaci na súťaži.

Opravu riešení zabezpečila medzinárodná porota, ktorú tvorili RNDr. Pavel Calábek, PhD., doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc. a RNDr. Jaroslav Švrček, CSc. z Českej republiky, dr Jerzy Bednarczuk, mgr Andrzej Grzesik, mgr Joanna Ochremiak, dr Waldemar Pompe a mgr Filip Smentek z Poľska a Mgr. Peter Novotný, PhD. a Filip Sládek zo Slovenska.

V tabuľkách uvádzame výsledky oboch súťaží, plný počet za každú úlohu bol 5 bodov. Najlepší v oboch súťažiach získali hodnotné vecné ceny.

Súťaž jednotlivcov

Por.	Meno	Štát	1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$
1.	Konrad Majewski	Poľsko	5	5	5	5	5	25
2.	Marcin Michorzewski	Poľsko	4	5	4	5	5	23
3.	Oskar Szymański	Poľsko	5	5	2	5	5	22
4.	*Patrik Bak*	Slovensko	4	5	5	1	5	20
	Anna Czerwińska	Poľsko	5	5	5	0	5	20
	Radovan Švarc	Česká rep.	5	5	5	3	2	20
7.	Jan Tabaszewski	Poľsko	5	5	3	0	5	18
8.	Konrad Paluszek	Poľsko	0	5	5	5	2	17
9.	Viktor Němeček	Česká rep.	0	5	5	5	0	15
10.	*Bui Truc Lam*	Slovensko	4	5	3	1	0	13
	Pavel Turek	Česká rep.	0	5	0	5	3	13
12.	*Samuel Sučík*	Slovensko	0	5	4	0	0	9
13.	*Ema Krakovská*	Slovensko	2	5	0	0	0	7
14.	*Dávid Bugár*	Slovensko	0	5	1	0	0	6
	Petr Vincena	Česká rep.	0	0	3	3	0	6
16.	*Tamás Pammer*	Slovensko	0	5	0	0	0	5
	Martin Zahradníček	Česká rep.	5	0	0	0	0	5
18.	Karolína Kuchyňová	Česká rep.	0	1	0	0	0	1

Súťaž družstiev

Por.	Zloženie družstva	Štát	1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$
1.	Viktor Němeček Konrad Majewski *Ema Krakovská*	Česká rep. Poľsko Slovensko	4	5	5	5	5	5	29
2.	Petr Vincena Konrad Paluszek *Dávid Bugár*	Česká rep. Poľsko Slovensko	5	5	5	1	5	5	26
	Radovan Švarc Jan Tabaszewski *Samuel Sučík*	Česká rep. Poľsko Slovensko	4	2	5	5	5	5	26
4.	Pavel Turek Marcin Michorzewski *Patrik Bak*	Česká rep. Poľsko Slovensko	5	2	5	3	5	5	25
5.	Martin Zahradníček Anna Czerwińska *Tamás Pammer*	Česká rep. Poľsko Slovensko	3	2	5	0	5	2	17
6.	Karolína Kuchyňová Oskar Szymański *Bui Truc Lam*	Česká rep. Poľsko Slovensko	2	2	5	0	4	0	13

Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia juniorov

Súťaž jednotlivcov

Úloha 1.
Nech P je bod ležiaci vnútri trojuholníka ABC. Body K, L, M sú obrazmi bodu P v stredovej súmernosti postupne podľa stredov strán BC, CA, AB. Dokážte, že priamky AK, BL, CM sa pretínajú v jednom bode. (*Jaroslav Švrček*)

Úloha 2.
Nájdite všetky trojice prvočísel (a, b, c) spĺňajúcich rovnosť

$$a^2 + ab + b^2 = c^2 + 3.$$

(*Poľsko*)

Úloha 3.
Na kružnici so stredom O sú zvolené štyri rôzne body A, B, C, D, pričom

$$|\measuredangle AOB| = |\measuredangle BOC| = |\measuredangle COD| = 60^\circ.$$

Nech P je ľubovoľný bod ležiaci na kratšom oblúku BC danej kružnice. Body K, L, M sú päty kolmíc spustených z bodu P postupne na priamky AO, BO, CO. Dokážte, že

a) trojuholník KLM je rovnostranný,
b) obsah trojuholníka KLM nezávisí od polohy bodu P na kratšom oblúku BC.

(*Poľsko*)

Úloha 4.
Dokážte, že ak zvolíme ľubovoľných 51 vrcholov pravidelného 101-uholníka, tak niektoré tri zo zvolených bodov budú vrcholmi rovnoramenného trojuholníka. (*Jaromír Šimša*)

Úloha 5.
Nech a, b, c sú kladné celé čísla spĺňajúce $a^2 + b^2 = c^2$. Dokážte, že číslo $\frac{1}{2}(c-a)(c-b)$ je druhou mocninou celého čísla. (*Poľsko*)

Súťaž družstiev

Úloha 1.
Na tabuli je napísaných niekoľko rôznych reálnych čísel. Vieme, že hodnota súčinu ľubovoľných dvoch rôznych čísel z tabule je tiež napísaná na tabuli. Určte, koľko najviac čísel môže byť napísaných na tabuli. (*Ján Mazák*)

Úloha 2.
Na kružnici k sú dané body A a B, pričom AB nie je priemerom kružnice k. Bod C sa pohybuje po dlhšom oblúku AB kružnice k tak, že trojuholník ABC je ostrouhlý. Nech

D je päta výšky z vrcholu A na stranu BC a E je päta výšky z B na AC. Ďalej nech F je päta kolmice z bodu D na priamku AC a G je päta kolmice z E na BC.

a) Dokážte, že priamky AB a FG sú rovnobežné.

b) Určte množinu stredov S úsečiek FG prislúchajúcim ku všetkým prípustným polohám bodu C.

(*Ján Mazák*)

Úloha 3.

Udowodnij, że jeśli n jest dodatnią liczbą całkowitą, to liczba $2(n^2+1)-n$ nie jest kwadratem liczby całkowitej. (*Poľsko*)

Úloha 4.

Dany jest romb $ABCD$, w którym $\measuredangle BAD = 60°$. Punkt P leży wewnątrz rombu, przy czym spełnione są równości $BP = 1$, $DP = 2$, $CP = 3$. Wyznacz długość odcinka AP. (*Poľsko*)

Úloha 5.

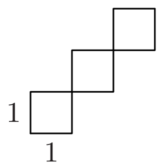
Určete všechny trojice (a, k, m) kladných celých čísel, které vyhovují rovnici

$$k + a^k = m + 2a^m.$$

(*Poľsko*)

Úloha 6.

Šachovnicovou desku 8×8 máme pokrýt pomocí rovinných útvarů stejných jako na obr. 49 (každý z útvarů můžeme otočit o $90°$) tak, že se žádné dva nepřekrývají



Obr. 49

ani nepřesahuji přes okraj šachovnice. Určete, jaký největší možný počet polí této šachovnice můžeme uvedeným způsobem pokrýt. (*Poľsko*)

12. Česko-poľsko-slovenské stretnutie

V rámci záverečnej prípravy pred IMO sa uskutočnilo po 12. raz prípravné stretnutie medzi družstvami Českej republiky, Poľska a Slovenska. Jednotlivé krajiny reprezentovali šestice študentov, ktorí si vybojovali vo svojich krajinách účasť na 53. IMO v Argentíne.

Súťaž sa uskutočnila 24. – 27. 6. 2012 vo Fačkovskom sedle. Organizácia a priebeh súťaže zostali nezmenené z predchádzajúcich ročníkov – je prispôsobená štýlu celoštátneho kola našej MO a podmienkam IMO. Súťažiacim boli počas dvoch dní predložené dve trojice súťažných úloh, pričom za každú správnu úlohu mohli získať najviac 7 bodov, t. j. celkove 42 bodov (rovnako ako na IMO). Na každú trojicu úloh mali súťažiaci vymedzené 4,5 hodiny čistého času.

Opravu riešení zabezpečila medzinárodná porota, ktorú tvorili RNDr. Pavel Calábek, PhD., a Mgr. Martin Panák, PhD. z Českej republiky. mgr Andrzej Grzesik a mgr Joanna Ochremiak z Poľska a doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc., Mgr. Peter Novotný, PhD. a Filip Sládek zo Slovenska.

V budúcom roku sa spoločné prípravné stretnutie uskutoční v Českej republike.

Prehľad výsledkov

Por.	Meno	Štát	1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$
1.	*Martin Vodička*	Slovensko	7	7	7	7	7	7	42
2.	Wojciech Nadara	Poľsko	7	7	7	7	7	0	35
3.	Michał Zając	Poľsko	7	7	7	7	3	–	31
4.	Maciej Dulęba	Poľsko	6	–	–	7	7	7	27
	Anh Dung Le	Česká rep.	5	7	7	7	1	0	27
6.	*Eduard Batmendijn*	Slovensko	5	7	–	7	7	0	26
7.	*Marián Horňák*	Slovensko	6	2	0	7	7	0	22
	Igor Kotrasiński	Poľsko	6	1	–	7	1	7	22
9.	Grzegorz Białek	Poľsko	7	5	–	7	–	0	19
10.	Łukasz Bożyk	Poľsko	5	1	0	7	3	0	16
	Martin Töpfer	Česká rep.	6	1	–	7	2	–	16
12.	*Jakub Šafin*	Slovensko	6	1	0	7	1	0	15
13.	Josef Svoboda	Česká rep.	6	1	–	7	0	0	14
	Michal Tóth	Slovensko	1	2	0	7	4	0	14
15.	Michal Kopf	Česká rep.	3	1	–	7	0	0	11
	Jan Stopka	Česká rep.	1	3	0	7	0	0	11
17.	*Miroslav Stankovič*	Slovensko	0	1	0	7	2	0	10
18.	Michal Buráň	Česká rep.	0	1	–	7	1	0	9

Štát	1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$
Česká rep.	21	14	7	42	4	0	88
Poľsko	38	21	14	42	21	14	150
Slovensko	25	20	7	42	28	7	129

Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia

Úloha 1.
Pre dané kladné celé číslo n označme $\tau(n)$ počet kladných deliteľov čísla n a $\varphi(n)$ počet kladných celých čísel, ktoré nie sú väčšie ako n a sú s n nesúdeliteľné. Nájdite všetky n, pre ktoré je niektoré z troch čísel n, $\tau(n)$, $\varphi(n)$ aritmetickým priemerom zvyšných dvoch. (*Peter Novotný*)

Úloha 2.
Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že rovnosť

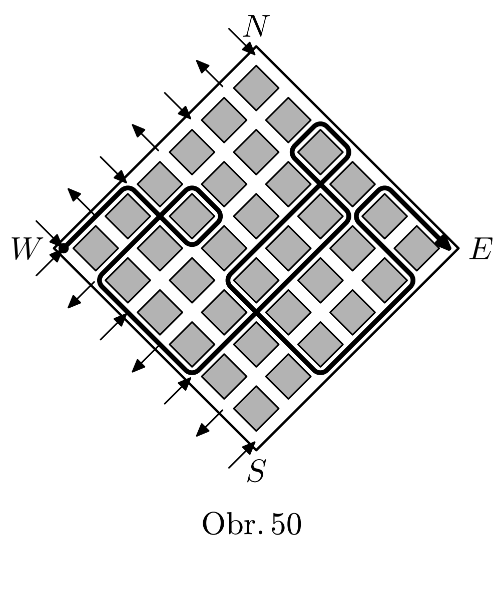
$$f(x + f(y)) - f(x) = (x + f(y))^4 - x^4$$

platí pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$. (*Kamil Duszenko*)

Úloha 3.
Daný je tetivový štvoruholník $ABCD$ s opísanou kružnicou ω. Označme postupne I, J, K stredy kružníc vpísaných do trojuholníkov ABC, ACD, ABD. Nech E je stred oblúka DB kružnice ω obsahujúceho bod A. Priamka EK pretína kružnicu ω v bode F ($F \neq E$). Dokážte, že body C, F, I, J ležia na jednej kružnici. (*Kamil Duszenko*)

Úloha 4.
Daný je pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB a bod P ležiaci vnútri kratšieho oblúka AC kružnice opísanej trojuholníku ABC. Kolmica na priamku CP prechádzajúca bodom C pretína priamky AP, BP postupne v bodoch K, L. Dokážte, že pomer obsahov trojuholníkov BKL a ACP nezávisí od polohy bodu P. (*Tomáš Jurík*)

Úloha 5.
Mesto Mar del Plata má tvar štvorca $WSEN$ a je rozdelené $2(n + 1)$ ulicami na $n \times n$ blokov, pričom n je dané párne číslo (ulice vedú aj po obvode štvorca). Každý blok má rozmer 100×100 metrov. Všetky ulice v Mar del Plata sú jednosmerné, majú rovnaký smer v celej svojej dĺžke a susedné rovnobežné ulice majú vždy opačný smer. Ulicou WS



Obr. 50

sa jazdí v smere z W do S a ulicou WN sa jazdí z W do N. V bode W štartuje polievacie auto. Chce sa dostať do bodu E a poliať pritom čo najviac ciest. Aká je dĺžka najdlhšej trasy, ktorú môže prejsť, ak po žiadnom 100-metrovom úseku nechce ísť viac ako raz? (Na obr. 50 je pre $n = 6$ znázornený plán mesta a jedna z možných – nie však najdlhších – trás polievacieho auta. Poz. tiež http://goo.gl/maps/JAzD.) (*Peter Novotný*)

Úloha 6.
Kladné reálne čísla a, b, c, d spĺňajú podmienky

$$abcd = 4, \qquad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 10.$$

Určte najväčšiu možnú hodnotu výrazu $ab + bc + cd + da$. (*Ján Mazák*)

Riešenia úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia

Úloha 1.
Keďže $\tau(1) = \varphi(1) = 1$, hodnota $n = 1$ zadaniu vyhovuje. Ďalej predpokladajme, že $n > 1$. V takom prípade zrejme $\tau(n) \leqq n$ a $\varphi(n) < n$, takže n nemôže byť aritmetickým priemerom čísel $\tau(n)$ a $\varphi(n)$. Rozoberieme preto dve možnosti.

Prípad 1. Nech $\tau(n) = \frac{1}{2}(\varphi(n) + n)$. Potom $\tau(n) > \frac{1}{2}n$. Pre každý deliteľ d čísla n je aj n/d deliteľom n. Aspoň jedno z čísel d, n/d je menšie alebo rovné $\sqrt{n}$, teda množina $\{1, 2, \dots, \lfloor\sqrt{n}\rfloor\}$ obsahuje aspoň polovicu[15] deliteľov čísla n. Z toho vyplýva nerovnosť $\frac{1}{2}\tau(n) \leqq \sqrt{n}$, odkiaľ máme

$$2\sqrt{n} \geqq \tau(n) > \frac{1}{2}n \qquad \Rightarrow \qquad 4n > \frac{1}{4}n^2 \qquad \Rightarrow \qquad 16 > n.$$

Pre $1 < n < 16$ spočítame hodnotu $\tau(n)$, skontrolujeme podmienku $\tau(n) > \frac{1}{2}n$ a vo zvyšných málo prípadoch dopočítame $\varphi(n)$:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\tau(n)$	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4
$\tau(n) > \frac{1}{2}n$?	✓	✓	✓	×	✓	×	×	×	×	×	×	×	×	×
$\varphi(n)$	1	2	2		2									
$\tau(n) = \frac{1}{2}(\varphi(n) + n)$?	×	×	✓		✓									

Zistili sme, že v tomto prípade vyhovujú zadaniu jedine $n = 4$ a $n = 6$.

Prípad 2. Nech $\varphi(n) = \frac{1}{2}(\tau(n) + n)$. Upravíme tento vzťah na

$$\tau(n) = 2\varphi(n) - n. \tag{1}$$

---

[15] Presne polovicu obsahuje práve vtedy, keď n nie je druhou mocninou celého čísla.

Ak n je párne, tak žiadne párne číslo nie je nesúdeliteľné s n, čiže $\varphi(n) \leqq \frac{1}{2}n$. Potom však z (1) dostaneme $\tau(n) \leqq 0$, čo je spor. Preto n musí byť nepárne. Z (1) následne vyplýva, že aj $\tau(n)$ musí byť nepárne, čo znamená, že n je druhou mocninou celého (nepárneho) čísla. Predpokladajme, že rozklad na súčin prvočísel čísla n je

$$n = p_1^{2\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{2\alpha_k}, \qquad k \geqq 1, \quad p_i \geqq 3, \quad \alpha_i \geqq 1.$$

Na základe známych vzorcov[16] pre výpočet $\tau(n)$ a $\varphi(n)$ upravíme (1) na

$$\begin{aligned}(2\alpha_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (2\alpha_k + 1) &= 2p_1^{2\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) \cdot \ldots \cdot p_k^{2\alpha_k - 1}(p_k - 1) - p_1^{2\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{2\alpha_k} = \\ &= p_1^{2\alpha_1 - 1} \cdot \ldots \cdot p_k^{2\alpha_k - 1}\big(2(p_1 - 1) \cdot \ldots \cdot (p_k - 1) - p_1 \cdot \ldots \cdot p_k\big).\end{aligned}$$

Pravá strana je deliteľná súčinom $p_1^{2\alpha_1 - 1} \cdot \ldots \cdot p_k^{2\alpha_k - 1}$, takže aj ľavá ním musí byť deliteľná. Z toho dostávame

$$p_1^{2\alpha_1 - 1} \cdot \ldots \cdot p_k^{2\alpha_k - 1} \leqq (2\alpha_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (2\alpha_k + 1). \tag{2}$$

Avšak pre každé celé čísla $p \geqq 3$ a $\alpha \geqq 1$ platí nerovnosť $p^{2\alpha - 1} \geqq (2\alpha + 1)$, pričom rovnosť nastáva jedine pre $p = 3$ a $\alpha = 1$. To dokážeme matematickou indukciou vzhľadom na α: Prípad $\alpha = 1$ je triviálny (s rovnosťou nastávajúcou jedine pre $p = 3$) a keď α zväčšíme o 1, pravá strana sa zväčší o 2, zatiaľ čo ľavá strana sa zväčší až o

$$p^{2(\alpha+1)-1} - p^{2\alpha - 1} = p^{2\alpha - 1}(p^2 - 1) > 2.$$

Každý z činiteľov na ľavej strane (2) je teda väčší alebo rovný ako prislúchajúci činiteľ napravo a všetky činitele sú kladné. jediný spôsob, ako splniť nerovnosť (2), je položiť $k = 1$, $p_1 = 3$, $\alpha_1 = 1$, čiže $n = 9$. V takom prípade naozaj dostávame $\tau(9) = 3$ a $\varphi(9) = 6$, t. j. rovnosť (1) je splnená.

Odpoveď. Zadaniu vyhovujú hodnoty $n \in \{1, 4, 6, 9\}$.

Úloha 2.

Zadanú rovnosť prepíšeme na ekvivalentný tvar

$$f(x + f(y)) = (x + f(y))^4 - x^4 + f(x). \tag{1}$$

Dosaďme do (1) $x = -f(z)$, $y = z$:

$$f(0) = -(f(z))^4 + f(-f(z)) \quad \text{pre všetky } z \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Keď do (1) dosadíme $x = -f(z)$, s využitím (2) dostávame

$$f(f(y) - f(z)) = (f(y) - f(z))^4 - (f(z))^4 + f(-f(z)) = (f(y) - f(z))^4 + f(0)$$

[16] Ak $m = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, tak $\tau(m) = (\alpha_1 + 1) \ldots (\alpha_k + 1)$ a $\varphi(m) = m(1 - 1/p_1) \ldots (1 - 1/p_k)$.

pre všetky $y, z \in \mathbb{R}$. To znamená, že ak sa číslo t dá vyjadriť ako rozdiel dvoch hodnôt funkcie f, t. j. $t = f(y) - f(z)$ pre nejaké $y, z \in \mathbb{R}$, tak $f(t) = t^4 + f(0)$. Ukážeme, že ak f nadobúda nejakú nenulovú hodnotu, tak každé číslo je rozdielom nejakých dvoch hodnôt funkcie f.

Nech $f(a) = b \neq 0$. Dosadením $y = a$ do zadanej rovnosti obdržíme

$$f(x+b) - f(x) = (x+b)^4 - x^4.$$

Keďže $b \neq 0$, výraz na pravej strane je v premennej x mnohočlenom stupňa 3, a preto jeho oborom hodnôt je celá množina $\mathbb{R}$. Z toho vyplýva, že aj ľavá strana, na ktorej je rozdiel dvoch hodnôt funkcie f, nadobúda pre $x \in \mathbb{R}$ všetky reálne hodnoty. Spojením zistených vlastností dostávame $f(t) = t^4 + f(0)$ pre všetky $t \in \mathbb{R}$. Ľahko možno overiť, že všetky funkcie tvaru $f(x) = x^4 + k$ spĺňajú zadanú rovnosť.

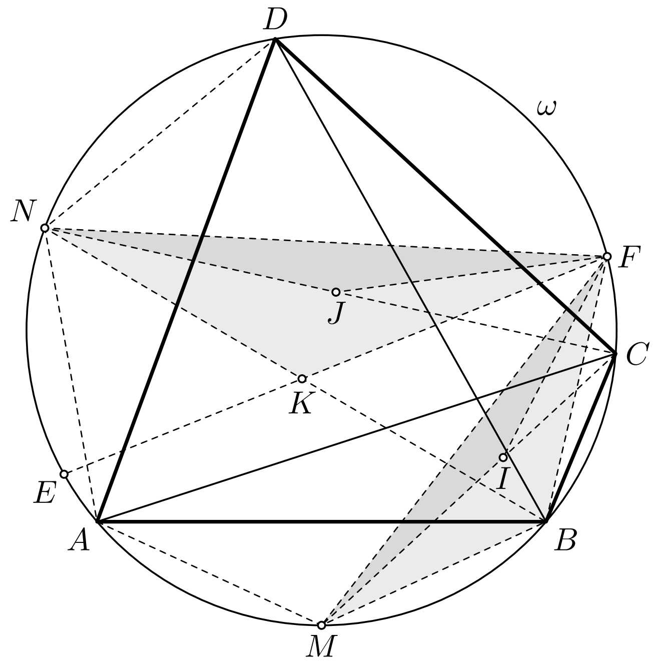
Konštantná nulová funkcia očividne takisto vyhovuje.

Odpoveď. Riešením úlohy sú funkcie $f(x) = 0$ a $f(x) = x^4 + k$ pre ľubovoľný reálny parameter k.

Úloha 3.
Nech M, N sú postupne stredy oblúkov AB, AD (neobsahujúcich žiadne iné vrcholy štvoruholníka $ABCD$). Ako vieme, stred I kružnice vpísanej trojuholníku ABC leží na priamke CM (ktorá je osou uhla BCA, čo vyplýva zo zhodnosti veľkostí obvodových uhlov nad zhodnými tetivami AM a BM), podobne J leží na CN a K leží na BN. Navyše platí

$$|MI| = |MA| = |MB| \qquad \text{a} \qquad |NJ| = |NA| = |ND| = |NK| \tag{1}$$

(tieto známe rovnosti vyplývajú z jednoduchého vyjadrenia veľkosti uhla AIB z trojuholníka AIB a veľkosti uhla AMB, resp. z analogických vyjadrení pre body J, K).



Obr. 51

Poznamenajme, že bod K nutne leží vnútri rovnoramenného trojuholníka BDE (pretože ľahko možno odvodiť nerovnosti $|\angle BDK| < |\angle BDE|$ a $|\angle DBK| < |\angle DBE|$), a teda priamka EK pretína úsečku BD a bod F leží v polrovine BDC (obr. 51).

Uvažujme oblúk BD kružnice ω obsahujúci bod A. Bod E je jeho stredom a body M a N sú stredy kratších oblúkov BA a AD, ktorých zjednotením je oblúk BD. Z toho vyplýva, že oblúky BM a EN majú rovnakú dĺžku (a podobne aj oblúky ME a ND). Z obvodových uhlov potom

$$|\angle BFM| = |\angle EFN| = |\angle KFN|. \tag{2}$$

Taktiež platí

$$|\angle BMF| = |\angle BNF| = |\angle KNF|. \tag{3}$$

Z rovností (2) a (3) dostávame podobnosť trojuholníkov MBF a NKF, preto

$$\frac{|MB|}{|MF|} = \frac{|NK|}{|NF|},$$

čo s využitím (1) upravíme na

$$\frac{|MI|}{|MF|} = \frac{|NJ|}{|NF|}.$$

Z toho vzhľadom na rovnosti

$$|\angle IMF| = |\angle CMF| = |\angle CNF| = |\angle JNF|$$

vyplýva podobnosť trojuholníkov MIF a NJF, odkiaľ

$$|\angle IFM| = |\angle JFN| \qquad \text{a} \qquad |\angle IFJ| = |\angle MFN|.$$

Spolu máme

$$|\angle IFJ| = |\angle MFN| = |\angle MCN| = |\angle ICJ|,$$

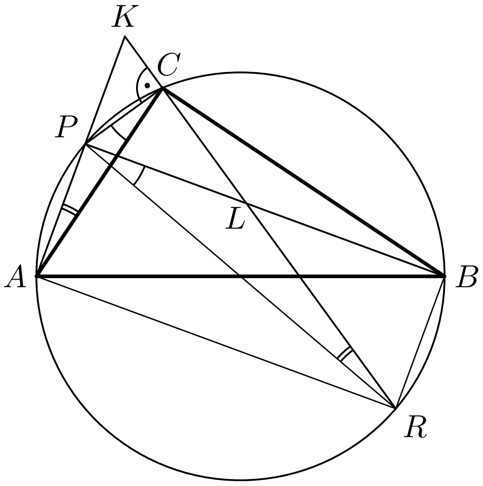
teda body C, F, I, J ležia na jednej kružnici.

Úloha 4.
V riešení budeme pre obsah trojuholníka XYZ používať označenie S_{XYZ}.

Nech PR je priemer kružnice opísanej trojuholníku ABC (obr. 52). Zrejme $ARBP$ je pravouholník. Keďže strany BR, PA sú rovnobežné, máme $S_{PBK} = S_{PRK}$, odkiaľ

$$S_{BKL} = S_{LPR}.$$

Z rovnosti $|PA| = |BR|$ vyplýva $|\angle PCA| = |\angle BPR| = |\angle LPR|$.



Obr. 52

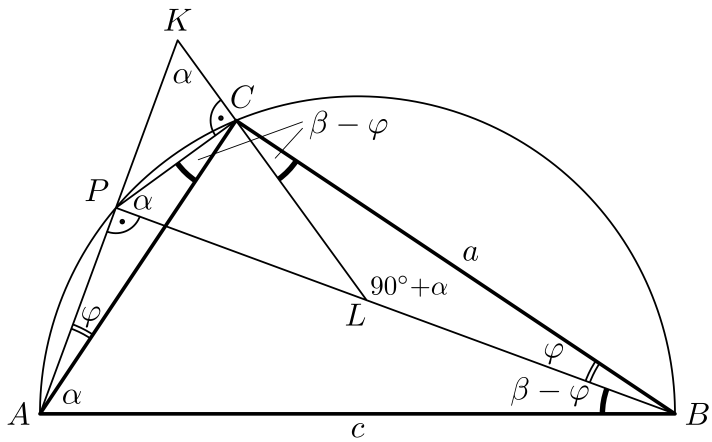
Štvoruholník $CPAR$ je tetivový, takže $|\measuredangle CAP| = |\measuredangle CRP|$ a teda trojuholníky LPR a PCA sú podobné.

Napokon dostávame

$$S_{BKL} : S_{ACP} = S_{LPR} : S_{ACP} = |PR|^2 : |AC|^2 = |AB|^2 : |AC|^2,$$

čo je hodnota nezávislá od polohy bodu P.

Iné riešenie. Veľkosti strán a uhlov trojuholníka ABC označíme zvyčajným spôsobom. Ďalej označíme $\varphi = |\measuredangle PAC|$ (obr. 53). Potom $|\measuredangle CPB| = \alpha$, $|\measuredangle PBC| = \varphi$, $|\measuredangle LCB| = |\measuredangle ACP| = |\measuredangle ABP| = \beta - \varphi$, $|\measuredangle BLC| = |\measuredangle APC| = 90^\circ + \alpha$, $|AP| = c\cos(\alpha+\varphi)$, $|BP| = c\sin(\alpha+\varphi)$, $|\measuredangle PKL| = \alpha$.



Obr. 53

Zo sínusových viet pre trojuholníky BCP a BCL máme

$$|CP| = \frac{|BC|\sin\varphi}{\sin\alpha} = \frac{a\sin\varphi}{\sin\alpha},$$

$$|BL| = \frac{|BC|\sin(\beta-\varphi)}{\sin(90^\circ+\alpha)} = \frac{a\cos(\alpha+\varphi)}{\cos\alpha}.$$

Ďalej

$$\begin{aligned}|PL| &= |BP| - |BL| = c\sin(\alpha+\varphi) - \frac{a\cos(\alpha+\varphi)}{\cos\alpha} = \\ &= \frac{c\sin(\alpha+\varphi)\cos\alpha - c\sin\alpha\cos(\alpha+\varphi)}{\cos\alpha} = \frac{c\sin\varphi}{\cos\alpha}, \\ |KL| &= \frac{|PL|}{\sin\alpha} = \frac{c\sin\varphi}{\sin\alpha\cos\alpha}.\end{aligned}$$

Pomer obsahov trojuholníkov je

$$\frac{S_{KLB}}{S_{APC}} = \frac{\frac{1}{2}|BL|\cdot|KL|\cdot\sin(90^\circ+\alpha)}{\frac{1}{2}|AP|\cdot|CP|\cdot\sin(90^\circ+\alpha)} = \frac{|BL|\cdot|KL|}{|AP|\cdot|CP|} = \frac{\frac{a\cos(\alpha+\varphi)}{\cos\alpha}\cdot\frac{c\sin\varphi}{\sin\alpha\cos\alpha}}{c\cos(\alpha+\varphi)\cdot\frac{a\sin\varphi}{\sin\alpha}} = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$

veľkosť uhla α je zrejme nezávislá od polohy bodu P.

Poznámka. Predošlé riešenie môžeme skrátiť, keď si všimneme, že z veľkostí uhlov vyplýva podobnosť trojuholníkov BLC a APC (obr. 53). Z toho $|BL|/|AP| = |LC|/|PC|$ a zadaný pomer možno vyjadriť vzťahom

$$\frac{S_{KLB}}{S_{APC}} = \frac{|BL|\cdot|KL|}{|AP|\cdot|CP|} = \frac{|LC|\cdot|KL|}{|PC|^2}.$$

Z pravouhlého trojuholníka KLP s výškou PC máme podľa Euklidovej vety o strane $|LC|\cdot|KL| = |LP|^2$, odkiaľ

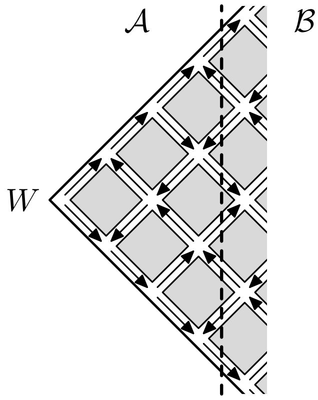
$$\frac{S_{KLB}}{S_{APC}} = \frac{|LP|^2}{|PC|^2} = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Úloha 5.
Každý 100-metrový úsek ulice medzi dvoma križovatkami budeme nazývať *šípka.* Šípku, ktorá má rovnaký smer ako ulica WS alebo WN (t. j. dá sa po nej ísť juhovýchodným alebo severovýchodným smerom), budeme nazývať *dopredná*, inak ju nazveme *spätná.*

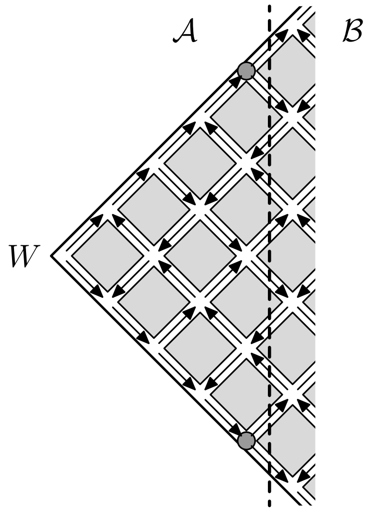
V riešení použijeme nasledovnú zrejmú lemu: *Uvažujme ľubovoľné rozdelenie množiny všetkých križovatiek na dve disjunktné množiny $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ také, že $W\in\mathcal{A}$ a $E\in\mathcal{B}$. Potom počet prejazdov auta pozdĺž šípok z $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$ je o 1 väčší ako počet prejazdov pozdĺž šípok z $\mathcal{B}$ do $\mathcal{A}$.*

Rozdeľme všetky križovatky mesta Mar del Plata na dve množiny $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ zvislou (t. j. severo-južnou) priamkou spájajúcou dva body vzdialené $100k+50$ metrov od W – jeden na ulici WN a druhý na ulici WS – pre nejaké $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$. Na obr. 54a a 54b je znázornené rozdelenie pre $k=3$, resp. $k=4$.

Ak k je nepárne, tak deliaca priamka pretína $k+1$ dopredných šípok (idúcich z $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$) a $k+1$ spätných šípok (idúcich z $\mathcal{B}$ do $\mathcal{A}$). Aj keby auto prešlo pozdĺž všetkých $k+1$ dopredných šípok, podľa lemy by prešlo len pozdĺž k spätných šípok. Preto aspoň jedna spätná šípka ostane nepoliata.



Obr. 54a

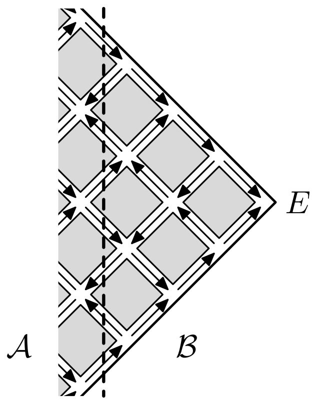


Obr. 54b

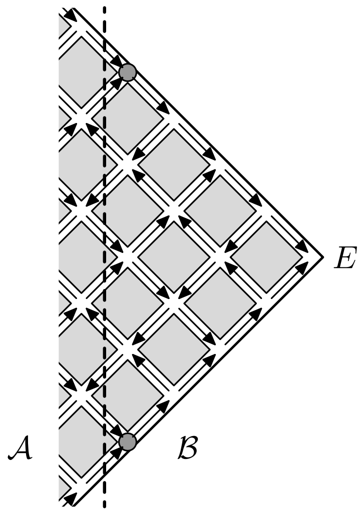
Ak k je párne a $k \geqq 2$, tak deliaca priamka pretína $k+2$ dopredných šípok a k spätných šípok. Dve najsevernejšie dopredné šípky preťaté priamkou začínajú v križovatke, ktorá má len jednu vchádzajúcu šípku. Túto križovatku dokáže auto prejsť len raz, takže aspoň jedna z dvoch najsevernejších dopredných šípok ostane nepoliata. To isté platí pre dve najjužnejšie dopredné šípky. Existuje teda nanajvýš k dopredných šípok, ktorými auto prejde, a podľa lemy nanajvýš $k-1$ spätných šípok. Spolu máme na tejto úrovni aspoň 3 nepoliate šípky.

Pre $k=0$ máme len dve dopredné šípky začínajúce vo W preťaté deliacou priamkou. Očividne iba jednou z nich môže auto prejsť, druhá ostane nepoliata.

Podobným spôsobom rozdelíme križovatky zvislými priamkami spájajúcimi dva body vo vzdialenostiach $100k+50$ metrov od E – jeden na ulici SE, druhý na ulici NE – pre $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Situácia je znázornená na obr. 55a a 55b pre $k=3$, resp. $k=4$.



Obr. 55a



Obr. 55b

Ak k je nepárne, deliaca priamka pretína $k+1$ dopredných a $k+1$ spätných šípok; aspoň jedna zo spätných šípok ostane nepoliata.

Ak k je párne a $k \geqq 2$, tak deliaca priamka pretína $k+2$ dopredných a k spätných šípok. Dve najsevernejšie dopredné šípky končia v križovatke, odkiaľ vychádza iba jedna šípka, takže aspoň jedna z nich ostane nepoliata. To isté platí pre dve najjužnejšie dopredné šípky. Opäť máme nanajvýš k dopredných a nanajvýš $k-1$ spätných šípok, pozdĺž ktorých auto prejde, čiže na tejto úrovni ostanú aspoň 3 nepoliate šípky.

Pre $k=0$ máme dve dopredné šípky končiace v E, jednu z nich auto prejde, druhá ostane nepoliata.

Pre každé nepárne k máme jednu, pre každé párne $k \geqq 2$ tri a pre $k=0$ jednu nepoliatu šípku a celý postup sa zopakoval dvakrát. Keďže n je párne a $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, dokopy máme

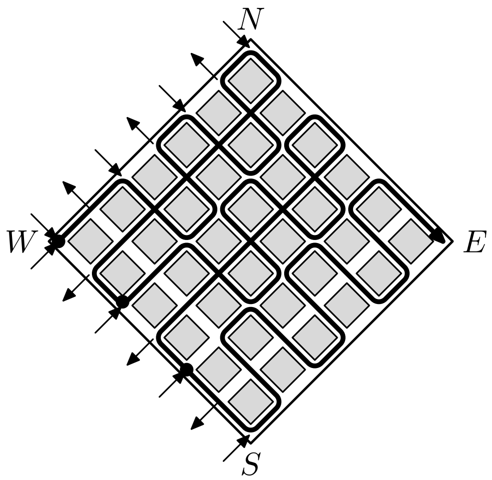
$$2\left(\tfrac{1}{2}n + 3(\tfrac{1}{2}n - 1) + 1\right) = 4n - 4$$

nepoliatych šípok. Celkový počet šípok je $n \cdot 2(n+1)$, takže auto nedokáže poliať viac ako

$$n \cdot 2(n+1) - (4n-4) = 2n^2 - 2n + 4$$

šípok.

Na druhej strane, existuje mnoho trás auta pozostávajúcich z $2n^2-2n+4$ šípok. Jedna je načrtnutá na obr. 56 pre $n=6$. Keď použijeme rovnaký vzor vo všeobecnom prípade, trasa bude rozdelená na $\frac{1}{2}n$ častí križovatkami ležiacimi na ulici WS vzdialenými $200k$ metrov od W pre $k = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}n - 1$.



Obr. 56

Prvých $\frac{1}{2}n-1$ častí sa líši len posunutím. Každá z nich pozostáva z n šípok majúcich rovnaký smer ako WN, z n šípok opačného smeru ako WN a $2(n-1)$ šípok kolmých na WN. Posledná časť pozostáva z n šípok majúcich rovnaký smer ako WN a $2(n+1)$ šípok kolmých na WN. Celkový počet šípok na trase je

$$\left(\tfrac{1}{2}n - 1\right)\left(2n + 2(n-1)\right) + n + 2(n+1) = 2n^2 - 2n + 4.$$

Odpoveď. Dĺžka najdlhšej možnej trasy polievacieho auta je $\frac{1}{10}(2n^2 - 2n + 4)$ km.

Úloha 6.
Označme $V = ab + bc + cd + da$. Určíme najväčšiu možnú hodnotu výrazu

$$V^2 = (a+c)^2(b+d)^2 = (a^2+c^2+2ac)(b^2+d^2+2bd). \tag{1}$$

Výraz V je „cyklický“ – jeho hodnota sa nezmení, ak hodnotu a zmeníme na b, b na c, c na d a d na a. Keďže $ac \cdot bd = 4$, aspoň jedno z čísel ac, bd je aspoň 2. Vzhľadom na cyklickosť bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $bd \geqq 2$.

Zo zadaných rovností odvodíme $ac = 4/bd$, $a^2 + c^2 = 10 - b^2 - d^2$ a tieto vyjadrenia dosadíme do (1):

$$\begin{aligned} V^2 &= \left(10 - b^2 - d^2 + \frac{8}{bd}\right)(b^2+d^2+2bd) = \\ &= 10(b^2+d^2) + 20bd + \frac{8(b^2+d^2)}{bd} + 16 - (b^2+d^2)^2 - 2bd(b^2+d^2). \end{aligned} \tag{2}$$

Označme $P = b^2 + d^2$ a $Q = bd$; potom zrejme $P \geqq 2Q$ a podľa predpokladu $Q \geqq 2$. Po dosadení do (2) pokračujeme v úpravách:

$$\begin{aligned} V^2 &= 10P + 20Q + \frac{8P}{Q} + 16 - P^2 - 2PQ = \\ &= -(P^2 - 10P + 25) + \left(41 - 2PQ + 20Q + \frac{8P}{Q}\right) = \\ &= -(P-5)^2 + \left[P\left(\frac{8}{Q} - 2Q\right) + 41 + 20Q\right]. \end{aligned}$$

Zrejme $-(P-5)^2 \leqq 0$. Z podmienky $Q \geqq 2$ vyplýva $8/Q - 2Q \leqq 8/2 - 2 \cdot 2 = 0$, takže výraz v hranatých zátvorkách je nerastúcou lineárnou funkciou v premennej P a nadobúda svoje maximum pre najmenšie možné P. Vzhľadom na $P \geqq 2Q$ dostávame

$$V^2 \leqq 2Q\left(\frac{8}{Q} - 2Q\right) + 41 + 20Q = -4Q^2 + 20Q + 57 = -(2Q-5)^2 + 82 \leqq 82.$$

Na záver stačí nájsť kladné reálne čísla a, b, c, d také, že $V = \sqrt{82}$. Rovnosť nastáva, keď $P = 2Q = 5$, čo je splnené pre $b = d = \frac{1}{2}\sqrt{10}$. Čísla a, c spĺňajú $a^2 + c^2 = 5$, $ac = 8/5$, teda

$$\{a, c\} = \left\{\frac{\sqrt{41} - 3}{2\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{41} + 3}{2\sqrt{5}}\right\}.$$

Odpoveď. Najväčšia možná hodnota výrazu $ab + bc + cd + da$ je $\sqrt{82}$.

53. Medzinárodná matematická olympiáda

V dňoch 4. – 16. 7. 2012 sa v Argentíne uskutočnila 53. Medzinárodná matematická olympiáda (IMO). Zúčastnilo sa jej 548 žiakov stredných škôl zo 100 krajín. Každá krajina mohla vyslať najviac 6 súťažiach. Slovensko reprezentovali

Eduard Batmendijn, Cirk. g. sv. Mikuláša, St. Ľubovňa, 1. ročník,
Klára Ficková, Gymnázium Poštová, Košice, 4. ročník,
Marián Horňák, Gymnázium Párovská, Nitra, 4. ročník,
Miroslav Stankovič, Gymnázium Poštová, Košice, 2. ročník,
Michal Tóth, Gymnázium Jura Hronca, Bratislava, 4. ročník,
Martin Vodička, Gymnázium Alejová, Košice, 3. ročník.

Obr. 57
(Zľava: M. Stankovič, E. Batmendijn, J. Mazák, M. Vodička, M. Horňák, M. Tóth, K. Ficková, P. Novotný.)

Vedúcim družstva SR bol Mgr. Peter Novotný, PhD. (odborný asistent na FMFI UK Bratislava), zástupcu vedúceho a pedagogický dozor vykonával Bc. Tomáš Kocák (študent na FMFI UK Bratislava), v role observera vystupoval RNDr. Ján Mazák, PhD.

Žiaci riešili počas dvoch dní (10. a 11. júla) dve trojice úloh, za každú úlohu bolo možné získať najviac 7 bodov. Absolútnym víťazom IMO s plným počtom 42 bodov sa stal Jeck Lim zo Singapuru. Výsledky družstva SR sú uvedené v tabuľke.

Meno	1	2	3	4	5	6	Súčet	Cena
Eduard Batmendijn	5	0	3	7	0	0	15	bronz
Klára Ficková	7	1	0	5	0	0	13	HM
Marián Horňák	7	0	0	7	0	0	14	bronz
Miroslav Stankovič	0	0	0	2	3	0	5	
Michal Tóth	7	0	0	3	0	0	10	HM
Martin Vodička	7	7	3	7	4	0	28	zlato

Naši žiaci získali jednu zlatú medailu, dve bronzové medaily a dve čestné uznania (ktoré sa udeľujú tým súťažiacim, ktorí nezískajú medailu, vyriešia však aspoň jednu zo šiestich úloh na plný počet bodov). Výborne si počínal najmä Martin Vodička, pre ktorého to bola už tretia medaila z IMO (spolu má teda po IMO v Argentíne dve zlaté a jednu striebornú). Vyzdvihnúť treba tiež výkon Eduarda Batmendijna, ktorý dokázal získať medailu vo veľmi mladom veku – ako prvák na gymnáziu (má možnosť bojovať o účasť v družstve IMO ešte 3-krát).

Najviac sa nám darilo na úlohách č. 3 a 4. V ťažkej úlohe č. 3 sme síce získali len 6 bodov, ale iba 12 krajín na nej dokázalo získať viac. Táto kombinatorická úloha mala dve časti a dvaja naši úspešne vyriešili prvú časť. Úloha č. 4 (funkcionálna rovnica) patrila medzi menej náročné, no korektne napísať celé riešenie vyžadovalo pomerne veľa času a tak viaceré krajiny na nej strácali body za chyby či neúplnosť. Za zmienku napr. stojí, že naši na nej dokázali získať rovnako veľa bodov ako veľmi silná Čína.

Tradične najviac bodov sme stratili na geometrických úlohách č. 1 a 5. Úloha č. 1 patrila medzi jednu z najľahších úloh v histórii IMO a tak každý stratený bod na nej znamenal značné zmenšenie šance na medailu. Úlohu č. 5 z našich nevyriešil nikto, i keď Martin Vodička bol veľmi blízko.

V úlohe č. 6 (teória čísel) sme síce nezískali žiadne body, ale podobne dopadla väčšina krajín. Naopak, úloha č. 2 (nerovnosť) mohla byť v silách viacerých našich (vyriešil ju len Martin Vodička).

V neoficiálnom poradí krajín, ktoré vznikne sčítaním bodov celého družstva, sme sa umiestnili so ziskom 85 bodov na 44. mieste. V rámci krajín EÚ sme sa zaradili na 13. miesto. Kompletné výsledky a štatistiky z tohtoročnej a aj z minulých IMO možno nájsť na internetovej stránke *http://imo-official.org*. Poradie krajín je uvedené v tabuľke (čísla v zátvorke sú uvedené za krajinami, ktoré mali na IMO menší počet účastníkov).

V Argentíne sa IMO konalo pomerne nedávno (pred 15 rokmi), a tak usporiadatelia mali dobré skúsenosti a priebeh bol zvládnutý po organizačnej stránke veľmi dobre. Miesto konania Mar del Plata je letnou dovolenkovou destináciou domáceho obyvateľstva a keďže na južnej pologuli je v júli zima, nebol problém s priestormi, ktoré ponúklo množstvo prázdnych hotelov. Mierne problémy nastali akurát pri koordinácii riešení, lebo organizátori IMO sa rozhodli nevymenovať nikoho do funkcie hlavného koordinátora jednotlivých úloh a chýbala tiež funkcia ústredného koordinátora všetkých úloh.

Por.	Štát	Z	S	B	∑	Por.	Štát	Z	S	B	∑
1.	Južná Kórea	6			209	51.	Turkmenistan		1	2	78
2.	Čína	5		1	195	52.	Švajčiarsko			3	76
3.	USA	5	1		194	53.	Nový Zéland			2	75
4.	Rusko	4	2		177	54.	Argentína			2	74
5.	Kanada	3	1	2	159		Bangladéš (5)		1	2	74
	Thajsko	3	3		159	56.	Južná Afrika			2	71
7.	Singapur	1	3	2	154		Slovinsko			2	71
8.	Irán	3	2	1	151	58.	Litva			3	69
9.	Vietnam	1	3	2	148	59.	Gruzínsko			1	68
10.	Rumunsko	2	3	1	144	60.	Španielsko		1		64
11.	India	2	3		136	61.	Azerbajdžan			2	60
12.	Severná Kórea	2	1	3	128		Dánsko			1	60
	Turecko	1	3	2	128	63.	Chile			1	59
14.	Taiwan	1	3		127		Macedónsko			2	59
15.	Srbsko	1	2	1	126	65.	Fínsko		1		57
16.	Peru		3	2	125	66.	Lotyšsko				55
17.	Japonsko		4	1	121	67.	Nigéria			1	52
18.	Poľsko		2	4	119	68.	Estónsko				50
19.	Brazília	1	1	3	116		Kirgizstan				50
	Bulharsko	1	2	2	116	70.	Maroko (5)			2	49
	Ukrajina		3	2	116	71.	Ekvádor			1	47
22.	Holandsko	2		3	115		Švédsko			1	47
	Veľká Británia	1	1	4	115	73.	Filipíny (3)			2	41
24.	Bielorusko		4	1	114		Pakistan (5)		1		41
25.	Chorvátsko	1	1	3	110	75.	Macao				40
26.	Grécko	1	1	3	107	76.	Cyprus				39
27.	Austrália		2	4	106	77.	Luxembursko (4)			1	36
	Hongkong		3	1	106	78.	Írsko				34
29.	Saudská Arábia		2	3	105	79.	Honduras (3)			1	33
30.	Moldavsko		2	3	104		Nórsko				33
31.	Izrael		3	1	102	81.	Portoriko (4)			1	32
	Mexiko	1	1	2	102	82.	Paraguaj				31
	Nemecko		2	3	102	83.	Srí Lanka (4)			1	30
34.	Kazachstan		1	4	101		Uruguaj				30
35.	Indonézia		1	3	100	85.	Pobrežie Slonoviny (4)				29
	Malajzia		2	3	100	86.	Salvádor (3)				28
37.	Portugalsko	1	1	2	96	87.	Trinidad a Tobago (5)				26
38.	Belgicko		2	1	93	88.	Tunisko (2)		1		25
	Francúzsko		1	4	93	89.	Island				21
	Maďarsko		2	1	93	90.	Sýria				19
	Taliansko		2	1	93	91.	Panama (3)				17
42.	Tadžikistan			4	91		Venezuela (3)				17
43.	Mongolsko	1		2	90	93.	Guatemala (2)				11
44.	Slovensko	1		2	85	94.	Kosovo				9
45.	Bosna a Hercegovina		1	2	84	95.	Kuba (1)				8
46.	Kolumbia			3	83	96.	Bolívia				6
47.	Arménsko		1	2	80	97.	Čierna Hora (2)				5
	Česká republika		1	1	80		Lichtenštajnsko (2)				5
	Kostarika			3	80	99.	Uganda (5)				2
50.	Rakúsko			4	79	100.	Kuvajt (3)				0

Aj tento rok si naše družstvo vybralo daň v podobe problémov pri cestovaní. Vedúcim družstva pri ceste do Argentíny meškalo lietadlo a tak nestihli prípoj vo Frankfurte a na miesto konania sa dostali o 12 hodín neskôr. Naopak, účastníci sa na IMO dostali podľa plánu, no letecká spoločnosť im doručila batožinu až o deň neskôr. Vyvrcholením cestovných problémov bolo, keď sa rovnaká situácia zopakovala aj pri spiatočnej ceste a celé družstvo vo Viedni po prílete nedostalo batožinu – tá doputovala na Slovensko až nasledujúci deň na domáce adresy.

Budúci ročník IMO sa uskutoční v Kolumbii. V roku 2014 sa IMO uskutoční v Južnej Afrike, nasledovať by mali Thajsko, Hongkong a Brazília.

Zadania úloh IMO

Úloha 1.
Daný je trojuholník ABC. Označme J stred kružnice pripísanej k strane BC. Táto kružnica sa dotýka strany BC v bode M a priamok AB, AC postupne v bodoch K, L. Priamky LM a BJ sa pretínajú v bode F, priamky KM a CJ v bode G. Nech S je priesečník priamok AF, BC a T priesečník priamok AG, BC. Dokážte, že M je stredom úsečky ST. (*Grécko*)

Úloha 2.
Dané je celé číslo $n \geqq 3$. Nech $a_2, a_3, \ldots, a_n$ sú kladné reálne čísla spĺňajúce $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Dokážte, že

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n > n^n.$$

(*Austrália*)

Úloha 3.
Hru „Myslím si číslo“ s povoleným klamaním hrajú dvaja hráči A a B. Pravidlá hry závisia od dvoch kladných celých čísel k a n, ktoré poznajú obaja hráči.

Na začiatku hry hráč A zvolí dve celé čísla x a N, pričom $1 \leqq x \leqq N$. Číslo x hráč A uchová v tajnosti a pravdivo prezradí hráčovi B číslo N. Hráč B sa potom pokúša zistiť informácie o čísle x kladením otázok hráčovi A nasledovným spôsobom: každá jeho otázka pozostáva z voľby ľubovoľnej množiny kladných celých čísel S (môže to byť aj rovnaká množina, akú použil v niektorej predošlej otázke) a opýtania sa hráča A, či číslo x patrí do S. Hráč B môže položiť toľko otázok, koľko len chce. Hráč A musí na každú z otázok hráča B okamžite odpovedať *áno* alebo *nie*, môže však klamať, koľko sa mu zachce. Jediným obmedzením je, že medzi každými $k+1$ po sebe idúcimi odpoveďami hráča A musí byť aspoň jedna odpoveď pravdivá.

Potom, ako hráč B položí toľko otázok, koľko chce, určí množinu X obsahujúcu nanajvýš n kladných celých čísel. Ak x patrí do X, hráč B vyhral; inak prehral. Dokážte nasledujúce tvrdenia:

1. Ak $n \geqq 2^k$, tak hráč B má víťaznú stratégiu.
2. Pre každé dostatočne veľké číslo k existuje celé číslo $n \geqq 1{,}99^k$ také, že B nemá víťaznú stratégiu. (*Kanada*)

Úloha 4.
Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ také, že pre všetky celé čísla a, b, c spĺňajúce $a + b + + c = 0$ platí

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

(*Južná Afrika*)

Úloha 5.
V danom pravouhlom trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole C označme D pätu výšky z vrcholu C. Nech X je ľubovoľný vnútorný bod úsečky CD. Označme K taký bod na úsečke AX, že $|BK| = |BC|$. Podobne označme L taký bod na úsečke BX, že $|AL| = |AC|$. Priesečník priamok AL a BK označme M. Dokážte, že $|MK| = |ML|$.

(*Česká rep., Josef Tkadlec*)

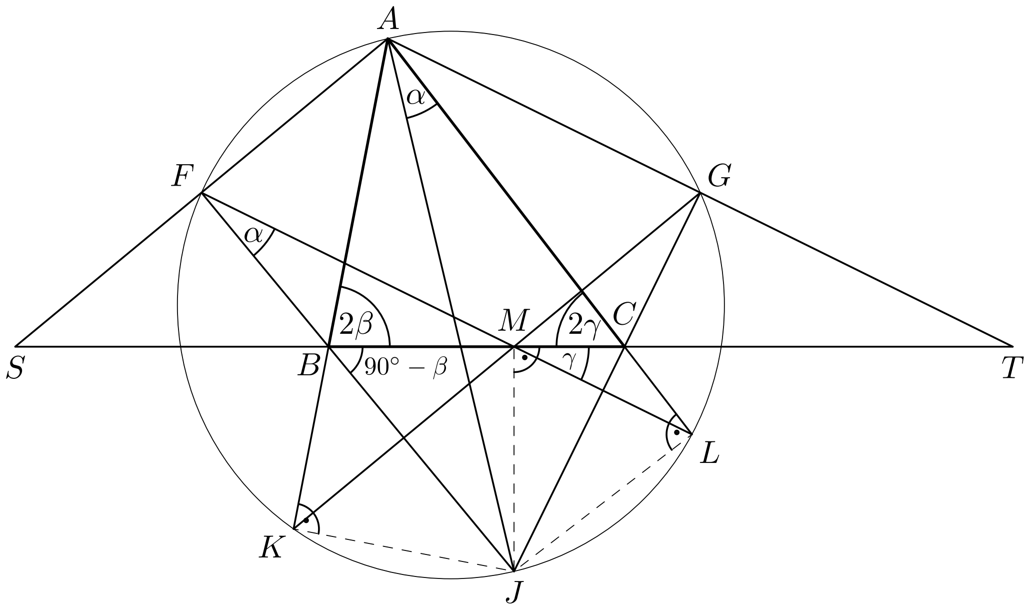
Úloha 6.
Určte všetky kladné celé čísla n, pre ktoré existujú nezáporné celé čísla a_1, a_2, …, a_n také, že

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

(*Srbsko*)

Riešenia úloh IMO

Úloha 1.
Označme veľkosti uhlov pri vrcholoch A, B, C postupne 2α, 2β, 2γ. Uhly AKJ a ALJ sú pravé, preto K aj L ležia na Tálesovej kružnici k s priemerom AJ. Kľúčovým pozorovaním je to, že aj body F a G ležia na tejto kružnici (obr. 58). To teraz dokážeme.



Obr. 58

Bod J leží na osi uhla CAB, preto uhol LAJ má veľkosť α. Stačí dokázať, že aj uhol LFJ má veľkosť α (body A a F ležia v tej istej polrovine vzhľadom na priamku JL, lebo polpriamka opačná k ML, na ktorej leží bod F, leží celá v polrovine BCA). Bod J leží na vonkajších osiach uhlov pri vrcholoch B a C, preto uhol CML má veľkosť γ a uhol MBJ má veľkosť $90° - \beta$. Z trojuholníka BMF dostaneme, že $|\measuredangle LFJ| = |\measuredangle MBJ| - |\measuredangle BMF| = 90° - \beta - \gamma = \alpha$, čiže bod F leží na kružnici k. Analogicky dokážeme, že aj G leží na k.

Keďže bod F leží na kružnici k, je priamka AF kolmá na FJ. Lenže FJ je osou vonkajšieho uhla pri vrchole B a $KM \perp FJ$, preto je úsečka SM osovo súmerná s úsečkou AK, a vďaka tomu $|SM| = |AK|$. Analogicky $|TM| = |AL|$. Avšak AK aj AL sú dotyčnice k pripísanej kružnici so stredom J, čiže $|AK| = |AL|$. Preto $|SM| = |MT|$ a teda bod M je stredom úsečky ST.

Úloha 2.
Keby sme priamočiaro použili nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom na každý súčet na ľavej strane, dostaneme jej dolný odhad, v ktorom sa mocniny čísel a_2, a_3, …, a_n líšia, a teda nebudeme môcť priamo využiť väzbu. Preto pred použitím tejto nerovnosti vhodne členy „navážime“. Dostaneme odhad

$$(1 + a_k)^k = \left((k-1)\frac{1}{k-1} + a_k\right)^k \geqq \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} a_k$$

platný pre každé celé číslo $k \geqq 2$. Rovnosť v tomto odhade nastáva pre $a_k = 1/(k-1)$, čo je pre $k > 2$ menej ako 1.

Vynásobením takýchto odhadov pre $k \in \{2, 3, \dots, n\}$ dostaneme

$$(1 + a_2)^2(1 + a_3)^3 \dots (1 + a_n)^n \geqq n^n a_2 a_3 \dots a_n = n^n.$$

Rovnosť však nemôže nastať: ak by nastala, tak $a_2 = 1$ a a_k by bolo menšie ako 1 pre všetky $k \geqq 3$, to je však pre $n \geqq 3$ spor s podmienkou $a_2 a_3 \dots a_n = 1$.

Iné riešenie. Matematickou indukciou dokážeme nasledujúce silnejšie tvrdenie:

$$(1 + a_2)^2(1 + a_3)^3 \dots (1 + a_n)^n \geqq n^n a_2 a_3 \dots a_n,$$

pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď zároveň platí $a_k = 1/(k-1)$ pre každé $k \in \{2, 3, \dots, n\}$.

Pre $n = 2$ je nerovnosť $(1 + a_2)^2 \geqq 4a_2$ ekvivalentná s $(a_2 - 1)^2 \geqq 0$; rovnosť nastane pre $a_2 = 1$.

V druhom kroku nám po využití indukčného predpokladu stačí dokázať, že

$$(1 + a_{n+1})^{n+1} \geqq \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} a_{n+1}. \tag{1}$$

Uvažujme funkciu

$$f(x) = (1 + x)^{n+1} - \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} x$$

definovanú na množine kladných reálnych čísel. Táto funkcia je na celom definičnom obore diferencovateľná a jej derivácia je

$$f'(x) = (n+1)(1+x)^n - \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \frac{n+1}{n^n}\bigl((n+nx)^n - (n+1)^n\bigr).$$

Funkcia f je klesajúca na intervale $(0, 1/n)$, kde má zápornú deriváciu, a rastúca na intervale $(1/n, \infty)$, kde má kladnú deriváciu. Preto funkcia f má v bode $x = 1/n$ globálne minimum. Z $f(1/n) = 0$ potom vyplýva platnosť odhadu (1) a tiež to, že v ňom rovnosť nastáva len pre $a_{n+1} = 1/n$.

Úloha 3.
a) (Podľa *Eduarda Batmendijna.*) Víťazná stratégia hráča B vyzerá nasledovne. Začneme s množinou $\mathsf{M} = \{1, 2, \dots, N\}$ a budeme túto množinu postupne zmenšovať tak, aby stále obsahovala číslo x. Keď bude mať M nanajvýš 2^k prvkov, prehlásime ju za finálnu odpoveď.

Predpokladajme, že M obsahuje viac ako 2^k prvkov. Ukážeme, ako ju zmenšiť. Zvoľme ľubovoľné $y \in \mathsf{M}$. Budeme sa hráča A opakovane pýtať na množinu $\{y\}$. Ak A odpovie $k+1$ ráz „nie“, vieme, že $y \neq x$, preto môžeme y z M odstrániť a zopakovať celý postup s novou menšou množinou M.

Ak hráč A na niektorú z našich otázok odpovedal „áno“, tak vlastne povedal „nie“ pre množinu $\mathsf{P}_1 = \mathsf{M} - \{y\}$. Množina P_1 obsahuje aspoň 2^k prvkov, lebo M obsahovala viac ako 2^k prvkov. Pritom vieme, že pre každý prvok množiny P_1 už A raz odpovedal „nie“. Množinu P_1 rozdelíme na dve rovnako veľké časti a spýtame sa na jednu z nich. Či už A odpovie „áno“ alebo „nie“, vieme to interpretovať ako „nie“ pre jednu z našich častí; označme ju P_2. Pre každý prvok v P_2 už A dvakrát odpovedal „nie“. Množinu P_2 opäť rozdelíme na dve rovnako veľké podmnožiny a tento postup opakujeme, až kým nedostaneme množinu P_{k+1}. (Množina P_{k+1} je neprázdna, lebo P_1 obsahovala aspoň 2^k prvkov.) Pre ľubovoľný jej prvok z hráč A dal $k+1$ po sebe idúcich odpovedí „nie“ a aspoň raz musel vravieť pravdu, preto $z \neq x$ a môžeme ho odstrániť z M.

b) Dokážeme, že ak $\lambda \in (1, 2)$ a $n = \lfloor (2-\lambda)\lambda^{k+1} \rfloor - 1$, hráč B si nedokáže zabezpečiť víťazstvo. Na dokončenie dôkazu potom stačí zvoliť $\lambda \in (1{,}99; 2)$ a k dostatočné veľké na to, aby platilo $n \geqq 1{,}99^k$.

Predpokladajme, že hráč B sa pýta na množinu S. O odpovedi hráča A budeme hovoriť, že *nie je v súlade s prvkom* i, ak $i \in \mathsf{S}$ a odpoveď je „nie“, alebo $i \notin \mathsf{S}$ a odpoveď je „áno“. Odpoveď je nepravdivá práve vtedy, keď nie je v súlade s prvkom x.

Uvažujme nasledujúcu stratégiu hráča A. Najprv zvolí $N = n+1$ a ľubovoľné $x \in \in \{1, 2, \dots, n+1\}$. Po každej svojej odpovedi hráč A pre každé $i \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ určí počet m_i po sebe idúcich predchádzajúcich odpovedí, ktoré nie sú v súlade s i. Pri rozhodovaní o svojej nasledujúcej odpovedi využije hodnotu

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda^{m_i}.$$

Bez ohľadu na otázku hráča B odpovie A tak, aby minimalizoval hodnotu φ.

Tvrdíme, že pri tejto stratégii je hodnota φ vždy menšia ako λ^{k+1}. Žiadny z exponentov m_i potom nemôže presiahnuť k, a teda hráč A pre žiadne i nepovie viac ako k po sebe idúcich odpovedí, ktoré nie sú v súlade s i. Preto nebude klamať viac ako k-krát po sebe. Takáto stratégia vyhovuje pravidlám; navyše vôbec nezávisí od voľby x, čiže nedáva hráčovi B žiadnu informáciu. Ostáva dokázať, že φ je vždy menšie ako λ^{k+1}.

Na začiatku je $m_i = 0$ pre každé i, preto $\varphi = n+1$ a platnosť nášho tvrdenia vyplýva z voľby $n = \lfloor(2-\lambda)\lambda^{k+1}\rfloor - 1$ a podmienky $\lambda \in (1, 2)$. Predpokladajme, že v niektorom momente je $\varphi < \lambda^{k+1}$ a hráč B sa pýta, či $x \in S$ pre nejakú množinu S. Podľa toho, či hráč A odpovie „áno" alebo „nie", bude nová hodnota φ

$$\varphi_1 = \sum_{i\in S} 1 + \sum_{i\notin S} \lambda^{m_i+1} \qquad \text{alebo} \qquad \varphi_2 = \sum_{i\in S} \lambda^{m_i+1} + \sum_{i\notin S} 1.$$

Keďže hráč A minimalizuje φ, bude nová hodnota rovná $\min\{\varphi_1, \varphi_2\}$. Pritom

$$\min\{\varphi_1, \varphi_2\} \leqq \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i\in S}(1 + \lambda^{m_i+1}) + \sum_{i\notin S}(\lambda^{m_i+1} + 1)\right) = \frac{1}{2}(\lambda\varphi + n + 1).$$

Keďže $\varphi < \lambda^{k+1}$, z predpokladov $\lambda < 2$ a $n = \lfloor(2-\lambda)\lambda^{k+1}\rfloor - 1$ dostaneme

$$\min\{\varphi_1, \varphi_2\} < \frac{1}{2}(\lambda^{k+2} + (2-\lambda)\lambda^{k+1}) = \lambda^{k+1}.$$

Tým sme dôkaz ukončili.

Úloha 4.
Po dosadení $a = b = c = 0$ vidíme, že $3f(0)^2 = 6f(0)^2$, preto $f(0) = 0$. Dosadením $b = -a$, $c = 0$ dostaneme $(f(a) - f(-a))^2 = 0$, a teda $f(-a) = f(a)$ pre každé celé číslo a, čiže funkcia f je párna.

Zvoľme $b = a$ a $c = -2a$; dostaneme $2f(a)^2 + f(2a)^2 = 2f(a)^2 + 4f(a)f(2a)$. Preto

$$f(2a) = 0 \quad \text{alebo} \quad f(2a) = 4f(a) \qquad \text{pre každé } a \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Ak $f(r) = 0$ pre nejaké $r \geqq 1$, zo substitúcie $b = r$ a $c = -a - r$ dostaneme $(f(a+r) - f(a))^2 = 0$, čiže funkcia f je periodická s periódou r.

Ak $f(1) = 0$, tak f je konštantná nulová funkcia. Tá je evidentne riešením zadanej rovnice. Vo zvyšku riešenia budeme predpokladať, že $f(1) = k \neq 0$.

Zo vzťahu (1) vidíme, že buď $f(2) = 0$, alebo $f(2) = 4k$. Ak $f(2) = 0$, tak funkcia f je periodická s periódou 2 a teda jej funkčné hodnoty v párnych číslach sú nulové a v nepárnych číslach sú všetky rovné k. Takáto funkcia je riešením; skúšku správnosti však v tejto chvíli odložíme a budeme vo zvyšku riešenia predpokladať, že $f(2) = 4k \neq 0$.

Opätovným využitím vzťahu (1) dostaneme, že buď $f(4) = 0$, alebo $f(4) = 16k$. V prvom prípade je funkcia f periodická s periódou 4. Pritom $f(3) = f(-1) = f(1) = k$, čiže periodicky sa budú postupne opakovať hodnoty 0, k, $4k$, k. Aj takáto funkcia je riešením (overíme neskôr); vo zvyšku riešenia budeme predpokladať, že $f(4) = 16k \neq \neq 0$.

Teraz dokážeme, že $f(3) = 9k$. Najprv zo substitúcie $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$ dostaneme $f(3)^2 - 10kf(3) + 9k^2 = 0$, preto $f(3) \in \{k, 9k\}$. Následne zo substitúcie $a = 1$, $b = 3$, $c = -4$ dostaneme $f(3)^2 - 34kf(3) + 225k^2 = 0$, preto $f(3) \in \{9k, 25k\}$. Niet teda inej možnosti ako $f(3) = 9k$.

Nakoniec matematickou indukciou dokážeme, že $f(x) = kx^2$ pre všetky celé čísla x. Doteraz sme ukázali, že je to pravda pre $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. V druhom kroku indukcie budeme predpokladať, že $n \geqq 4$ a že $f(x) = kx^2$ pre všetky celé čísla x z množiny $\{0, 1, \ldots, n\}$. Dosadenia $a = n$, $b = 1$, $c = -n - 1$ a $a = n - 1$, $b = 2$, $c = -n - 1$ vedú k tomu, že

$$f(n+1) \in \{k(n+1)^2, k(n-1)^2\} \qquad \text{a} \qquad f(n+1) \in \{k(n+1)^2, k(n-3)^2\}.$$

Keďže pre $n \neq 2$ sú hodnoty $k(n-1)^2$ a $k(n-3)^2$ rôzne, jedinou možnosťou je $f(n+1) = = k(n+1)^2$. Tým sme ukončili druhý krok indukcie a dokázali, že $f(x) = kx^2$ pre všetky nezáporné celé x. Keďže funkcia f je párna, platí to aj pre záporné x. Pri overovaní tohto riešenia stačí dokázať, že $a^4 + b^4 + (a+b)^4 = 2a^2b^2 + 2a^2(a+b)^2 + 2b^2(a+b)^2$, to však vidno z roznásobenia jednotlivých strán.

Jedinými možnými riešeniami zadanej funkcionálnej rovnice sú teda konštantná funkcia $f_1(x) = 0$ a funkcie $f_2(x) = kx^2$,

$$f_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \text{ párne,} \\ k & \text{pre } x \text{ nepárne,} \end{cases} \qquad f_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \equiv 0 \pmod 4, \\ k & \text{pre } x \equiv 1 \pmod 2, \\ 4k & \text{pre } x \equiv 2 \pmod 4 \end{cases}$$

pre ľubovoľné nenulové celé číslo k.[17] Ostáva spraviť skúšku správnosti pre funkcie f_3 a f_4. Začneme funkciou f_3. Ak $a + b + c = 0$, tak buď sú a, b, c všetky párne, vtedy $f(a) = f(b) = f(c) = 0$, alebo jedno je párne a dve sú nepárne, vtedy hodnota oboch strán zadanej rovnice je $2k^2$. Pre funkciu f_4 podobnou úvahou s využitím symetrie zadanej rovnice zistíme, že stačí overiť trojice $(0, k, k)$, $(4k, k, k)$, $(0, 0, 0)$, $(0, 4k, 4k)$. Pre každú z nich platí rovnosť.

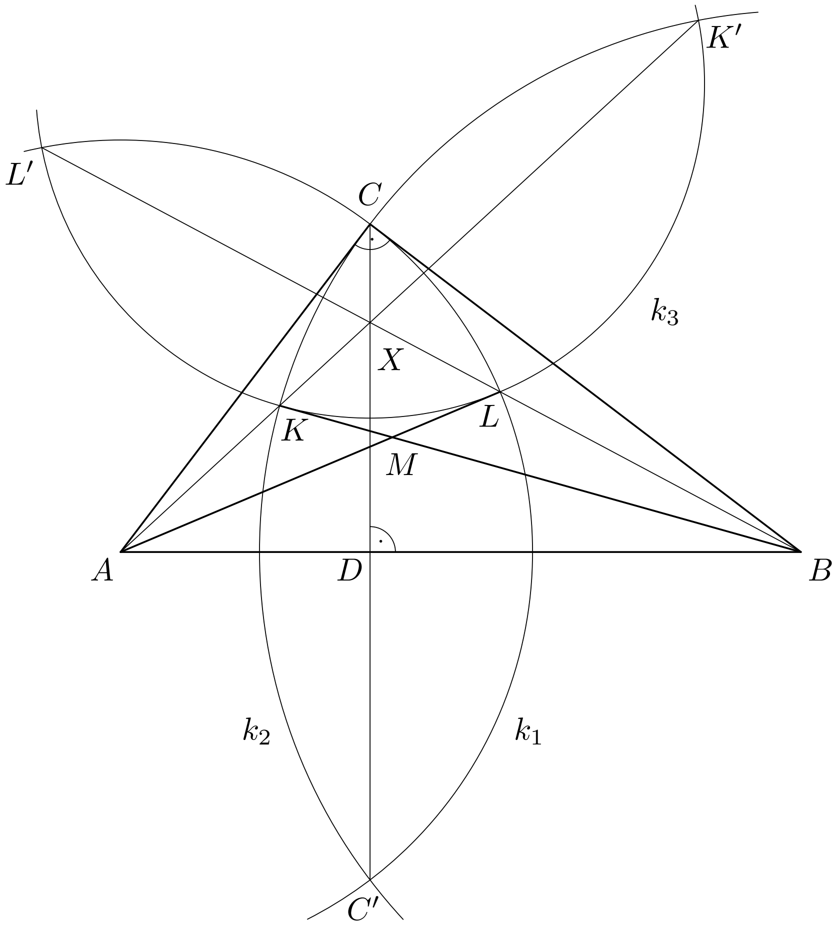
Úloha 5.
Označme C' obraz bodu C v osovej súmernosti podľa priamky AB. Kružnica k_1 má stred v bode A a prechádza bodmi C, L a C'. Kružnica k_2 má stred v bode B a prechádza bodmi C, K a C'. Keďže uhol ACB je pravý, v bode C sa priamka AC dotýka k_2 a priamka BC sa dotýka k_1. Označme K' priesečník priamky AX s k_2 rôzny od K a L' priesečník priamky BX s k_1 rôzny od L (obr. 59).

Z mocnosti bodu X ku kružniciam k_1 a k_2 dostaneme

$$|XK| \cdot |XK'| = |XC| \cdot |XC'| = |XL| \cdot |XL'|,$$

[17] Funkcie f_2, f_3, f_4 samozrejme vyhovujú aj pre $k = 0$, vtedy sú však totožné s funkciou f_1.

čiže body L', K, L, K' ležia na jednej kružnici k_3.



Obr. 59

Z mocnosti bodu A ku kružnici k_2 máme $|AL|^2 = |AC|^2 = |AK| \cdot |AK'|$, preto AL je dotyčnicou ku k_3 v bode L. Analogicky BK je dotyčnicou ku k_3 v bode K. Takže priamky MK a ML sú dotyčnice z bodu M ku kružnici k_3, a preto $|MK| = |ML|$.

Úloha 6.

Vhodné čísla a_1, a_2, $\ldots$, a_n existujú pre n so zvyškom 1 alebo 2 po delení štyrmi.

Najprv dokážeme, že táto podmienka je nutná. Predpokladajme, že $\sum_{k=1}^{n} k/3^{a_k} = 1$; nech a je najväčšie z čísel a_k. Po prenásobení 3^a dostaneme

$$1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + \ldots + n \cdot x_n = 3^a,$$

pričom x_k sú mocniny čísla 3. Pravá strana v získanej rovnosti je nepárna a ľavá má takú istú paritu ako súčet $1 + 2 + \cdots + n$. Preto n dáva zvyšok 1 alebo 2 po delení štyrmi. Ostáva dokázať, že uvedená podmienka je postačujúca.

Postupnosť b_1, b_2, $\ldots$, b_n budeme volať *prípustná*, ak existujú nezáporné celé čísla a_1, a_2, $\ldots$, a_n také, že

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{b_1}{3^{a_1}} + \frac{b_2}{3^{a_2}} + \ldots + \frac{b_n}{3^{a_n}} = 1.$$

Pre danú postupnosť vieme robiť na jej členoch rôzne operácie. Vezmime prípustnú postupnosť b_1, b_2, …, b_n (so zodpovedajúcimi exponentmi a_1, a_2, …, a_n z definície prípustnosti) a zvoľme nezáporné celé čísla u, v so súčtom $3b_k$. Postupnosť b_1, b_2, …, b_{k-1}, u, v, b_{k+1}, …, b_n je tiež prípustná, pretože

$$\frac{1}{2^{a_k+1}}+\frac{1}{2^{a_k+1}}=\frac{1}{2^{a_k}} \qquad \text{a} \qquad \frac{u}{3^{a_k+1}}+\frac{v}{3^{a_k+1}}=\frac{b_k}{3^{a_k}}.$$

Toto môžeme sformulovať aj naopak: ak v postupnosti nahradíme dva členy u a v jedným členom $(u+v)/3$ a dostaneme tým prípustnú postupnosť, tak aj pôvodná postupnosť bola prípustná. (Tieto dva členy nemusia nasledovať bezprostredne po sebe.)

Predpokladajme, že $n \equiv 1$ alebo $n \equiv 2 \pmod 4$ a označme α_n postupnosť $1, 2, \dots, n$. Ukážeme, že postupnými úpravami typu $\{u, v\} \mapsto (u+v)/3$ možno zredukovať túto postupnosť na jednoprvkovú postupnosť α_1, ktorá je zjavne prípustná (s exponentom $a_1 = 0$). Špeciálnym prípadom tejto operácie je $\{m, 2m\} \mapsto m$, čiže môžeme vynechať číslo $2m$, ak postupnosť okrem neho obsahuje aj číslo m.

Predpokladajme, že $n \geqq 16$. Ukážeme, že α_n vieme zredukovať na α_{n-12} pomocou 12 operácií. Pre vhodné $k \geqq 1$ a $0 \leqq r \leqq 11$ platí $n = 12k + r$. Ak $r \in \{0, 1, \dots, 5\}$, z posledných 12 členov α_n vynecháme $12k - 6$ a $12k$ a zvyšok rozdelíme na päť dvojíc

$$\{12k-6-i, 12k-6+i\},\ i \in \{1, 2, \dots, 5-r\}; \quad \{12k-j, 12k+j\},\ j \in \{1, 2, \dots, r\}.$$

Päť operácií vykonaných na uvedených pároch odstráni 10 čísel a pridá 5 nových čísel rovných $8k - 4$ alebo $8k$. Všetky pridané čísla však môžeme vynechať, lebo $4k - 2$ aj $4k$ ostali v postupnosti (nerovnosť $4k \leqq n - 12$ je ekvivalentná nerovnosti $8k \geqq 12 - r$, ktorej platnosť ľahko overíme pre každé r). Takto sme v tomto prípade úspešne zredukovali α_n na α_{n-12}.

V prípade $r \in \{6, 7, \dots, 11\}$ postupujeme analogicky. Čísla $12k$ a $12k+6$ vynecháme a zvyšok rozdelíme na dvojice

$$\{12k+6-i, 12k+6+i\},\ i \in \{1, 2, \dots, r-6\}; \quad \{12k-j, 12k+j\},\ j \in \{1, 2, \dots, 11-r\}.$$

Po aplikovaní operácie na jednotlivé páry nám pribudnú čísla $8k$ a $8k+4$, ktoré môžeme vynechať. Získame tak opäť α_{n-12}.

Ostáva vyšetriť $n \in \{2, 5, 6, 9, 10, 13, 14\}$. Prípady $n \in \{2, 6, 10, 14\}$ sa vynechaním posledného člena zredukujú na $n \in \{1, 5, 9, 13\}$. Pre $n = 5$ použijeme $\{4, 5\} \mapsto 3$, potom $\{3, 3\} \mapsto 2$ a nakoniec vynecháme dve dvojky. Pre $n = 9$ najprv vynecháme 6 a potom použijeme $\{5, 7\} \mapsto 4$, $\{4, 8\} \mapsto 4$, $\{3, 9\} \mapsto 4$. Ďalej vynecháme tri štvorky a nakoniec vynecháme dvojku. Prípad $n = 13$ sa dá použitím $\{11, 13\} \mapsto 8$ a vynechaním 8 a 12 previesť na prípad $n = 10$.

6. Stredoeurópska matematická olympiáda

Šiesty ročník Stredoeurópskej matematickej olympiády (MEMO) sa uskutočnil v termíne 6. – 12. 9. 2012 v malom švajčiarskom mestečku Solothurn, ktoré je hlavným mestom kantónu s rovnakým menom. Zúčastnilo sa ho 60 súťažiacich z 10 krajín. Slovenskú republiku reprezentovali

Patrik Bak, Gymnázium Sobrance, 1. ročník,

Filip Hanzely, Gymnázium A. Prídavka, Sabinov, 3. ročník,

Marta Kossaczká, Gymnázium Grösslingová, Bratislava, 3. ročník,

Vladimír Macko, Gymnázium Ľ. Štúra, Zvolen, 3. ročník,

Jakub Šafin, Gymnázium P. Horova, Michalovce, 3. ročník,

Bui Truc, Gymnázium Grösslingová, Bratislava, 1. ročník.

Vedúcim družstva SR bol Mgr. Peter Novotný, PhD. (FMFI UK, Bratislava), zástupca vedúceho bol doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc. (FPEDaS ŽU, Žilina).

Ako býva na MEMO pravidlom, súťaž bola rozdelená na dve nezávislé časti. V súťaži jednotlivcov, v ktorej každý žiak riešil počas 5 hodín štvoricu úloh, sme získali tri bronzové medaily, teda o 1 viac ako v roku 2011, pričom v súčte bodov sme dosiahli v neoficiálnom poradí 5. miesto spoločne s Litvou. V súťaži družstiev, v ktorej všetci šiesti študenti z jednej krajiny pracujú pri riešení 8 úloh spoločne a odovzdávajú spoločné riešenie, sme skončili na výbornom 4. mieste (na rovnakom mieste sa nám podarilo skončiť len na úplne 1. ročníku MEMO, pričom vtedy sa ešte nezúčastnili tradične silné družstvá Maďarska a Nemecka). Aj tento rok boli úspešní najmä študenti Maďarska (získali 6 medailí v jednotlivcoch a v súťaži družstiev skončili druhí) a Poľska (prví v súťaži družstiev, 5 medailí a absolútny víťaz v jednotlivcoch).

Výsledky družstva SR v súťaži jednotlivcov sú uvedené v prvej tabuľke. Prehľad výsledkov všetkých krajín v súťaži jednotlivcov je v druhej tabuľke. Krajiny sú v nej zoradené podľa súčtu bodov celého družstva, podobne ako pri neoficiálnom poradí krajín na IMO. Výsledky súťaže družstiev sú uvedené v tretej tabuľke.

Meno	I1	I2	I3	I4	Súčet	Cena
Patrik Bak	2	1	8	0	11	bronz
Filip Hanzely	0	4	2	5	11	bronz
Marta Kossaczká	0	0	2	0	2	
Vladimír Macko	1	0	0	1	2	
Jakub Šafin	1	0	2	2	5	
Bui Truc Lam	0	0	6	0	6	bronz

Por.	Štát	Z	S	B	ČU	$\sum$	Por.	Štát	Z	S	B	ČU	$\sum$
1.	Maďarsko	1	4	1		90		Slovensko			3		37
2.	Poľsko	1	1	3		72	7.	Česká rep.			3		36
3.	Nemecko		2	2		52	8.	Slovinsko			3		35
4.	Chorvátsko		2	1		45	9.	Rakúsko					22
5.	Litva		1	1		37	10.	Švajčiarsko			1		18

	Štát	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	$\sum$
1.	Poľsko	8	0	8	8	8	8	8	8	56
2.	Maďarsko	7	0	8	8	7	0	8	8	46
3.	Chorvátsko	8	2	8	2	8	8	8	1	45
4.	Slovensko	7	0	7	2	8	8	8	2	42
5.	Nemecko	8	0	8	2	8	8	5	1	40
6.	Česká rep.	8	2	7	0	8	8	6	0	39
7.	Litva	6	0	8	2	8	3	4	1	32
8.	Rakúsko	8	0	8	2	2	1	2	1	24
9.	Švajčiarsko	3	0	8	1	5	0	5	1	23
10.	Slovinsko	3	0	3	0	8	0	2	1	17

Účastníci boli počas celého pobytu ubytovaní v hosteli a vedúci vo vedľajšom hoteli priamo v centre Solothurnu. Súťaž prebiehala v tunajšej škole. Zasadnutia jury, na ktorých sa pripravovali úlohy, boli v hosteli, kde bývali študenti. Popri súťaži pripravili organizátori pre študentov vo voľnom čase exkurzie do tradičnej čokoládovne a syrárne a rôzne športové aktivity. V utorok sa konala pre všetkých prehliadka hlavného mesta Švajčiarska Bernu.

Výsledky súťaže boli vyhlásené na netradičnom mieste: na lokálnej farme. Organizátori tak chceli priblížiť účastníkom tradičný švajčiarsky vidiek. Slávnostného vyhodnotenia sa zúčastnil prof. Dr. Ralph Eichler – prezident renomovanej ETH Zürich.

Zadania úloh MEMO

Súťaž jednotlivcov

Úloha I-1.
Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ také, že rovnosť

$$f(x + f(y)) = yf(xy + 1)$$

platí pre všetky $x, y \in \mathbb{R}^+$. (Symbol $\mathbb{R}^+$ označuje množinu všetkých kladných reálnych čísel.) (*Chorvátsko*)

Úloha I-2.
Dané je kladné celé číslo N. Množina $S \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ sa nazýva *prípustná*, ak

neobsahuje také tri navzájom rôzne čísla a, b, c, že a delí b a súčasne b delí c. Určte najväčší možný počet prvkov, ktorý môže mať prípustná množina S. (*Maďarsko*)

Úloha I-3.
Daný je lichobežník $ABCD$, pričom $AB \parallel CD$, $|AB| > |CD|$ a priamka BD je osou uhla ADC. Priamka prechádzajúca bodom C rovnobežná s AD pretína úsečky BD a AB postupne v bodoch E a F. Označme O stred kružnice opísanej trojuholníku BEF. Predpokladajme, že $|\measuredangle ACO| = 60°$. Dokážte, že

$$|CF| = |AF| + |FO|.$$

(*Chorvátsko*)

Úloha I-4.
Postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je definovaná vzťahmi $a_0 = 2$, $a_1 = 4$ a

$$a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-1}}{2} + a_n + a_{n-1} \quad \text{pre všetky kladné celé čísla } n.$$

Určte všetky prvočísla p, pre ktoré existuje kladné celé číslo m také, že p je deliteľom $a_m - 1$. (*Švajčiarsko*)

Súťaž družstiev

Úloha T-1.
Nájdite všetky trojice (x, y, z) reálnych čísel také, že

$$\begin{aligned} 2x^3 + 1 &= 3zx, \\ 2y^3 + 1 &= 3xy, \\ 2z^3 + 1 &= 3yz. \end{aligned}$$

(*Česká rep., Jaroslav Švrček*)

Úloha T-2.
Nech a, b, c sú kladné reálne čísla, pre ktoré platí $abc = 1$. Dokážte, že

$$\sqrt{9 + 16a^2} + \sqrt{9 + 16b^2} + \sqrt{9 + 16c^2} \geqq 3 + 4(a + b + c).$$

(*Nemecko*)

Úloha T-3.
Nech n je kladné celé číslo. Uvažujme slová dĺžky n zložené z písmen množiny $\{M, E, O\}$. Označme a počet tých slov, ktoré obsahujú párny počet (môže byť aj nulový) blokov ME a párny počet (môže byť aj nulový) blokov MO. Podobne označíme b počet tých slov, ktoré obsahujú nepárny počet blokov ME a nepárny počet blokov MO. Dokážte, že $a > b$. (*Poľsko*)

Úloha T-4.
Nech $p > 2$ je prvočíslo. Pre ľubovoľnú permutáciu $\pi = (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(p))$ množiny $S = \{1, 2, \dots, p\}$ označme $f(\pi)$ počet tých čísel spomedzi

$$\pi(1),\ \pi(1) + \pi(2),\ \dots,\ \pi(1) + \pi(2) + \ldots + \pi(p),$$

ktoré sú deliteľné číslom p. Určte priemernú hodnotu čísla $f(\pi)$, ak uvažujeme všetky permutácie π množiny S. (*Maďarsko*)

Úloha T-5.
Nech K je stred strany AB daného trojuholníka ABC. Nech L a M sú také body ležiace postupne na stranách AC a BC, pre ktoré platí $|\measuredangle CLK| = |\measuredangle KMC|$. Dokážte, že kolmice na strany AB, AC a BC prechádzajúce postupne bodmi K, L a M sa pretínajú v jednom bode. (*Poľsko*)

Úloha T-6.
Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník, ktorého žiadne dve strany nie sú rovnobežné, pričom $|\measuredangle ABC| = |\measuredangle CDA|$. Predpokladajme, že priesečníky dvojíc osí uhlov pri susedných vrcholoch štvoruholníka $ABCD$ tvoria štvoruholník $EFGH$. Nech K je priesečník uhlopriečok štvoruholníka $EFGH$. Dokážte, že priesečník priamok AB a CD leží na kružnici opísanej trojuholníku BKD. (*Chorvátsko*)

Úloha T-7.
Nájdite všetky trojice (x, y, z) celých kladných čísel také, že

$$x^y + y^x = z^y,$$
$$x^y + 2012 = y^{z+1}.$$

(*Litva*)

Úloha T-8.
Pre ľubovoľné celé kladné číslo n označme $\tau(n)$ počet kladných deliteľov čísla n. Zistite, či existujú celé kladné čísla a a b také, že $\tau(a) = \tau(b)$ a $\tau(a^2) = \tau(b^2)$, ale $\tau(a^3) \neq \tau(b^3)$. (*Česká rep., Michal Rolínek*)

Riešenia úloh MEMO

Úloha I-1.
Skúmajme najskôr, pre aké hodnoty x platí $x + f(y) = xy + 1$. Po jednoduchej úprave dostaneme z tejto rovnosti za predpokladu $y \neq 1$ ekvivalentné vyjadrenie

$$x = \frac{f(y) - 1}{y - 1}. \tag{1}$$

Ak by existovalo kladné $y \neq 1$ také, že výraz (1) je kladný, mohli by sme takéto x a y dosadiť do zadanej rovnosti a dostali by sme $f(A) = yf(A)$ (pričom $A = x + f(y) = xy + 1$), čo je v spore s tým, že $y \neq 1$ a zároveň $f(A) \neq 0$. Preto výraz (1) je pre každé $y \neq 1$ záporný, čiže pre $y > 1$ platí $f(y) < 1$ a pre $y < 1$ platí $f(y) > 1$.

Zvoľme ľubovoľné $y > 1$ a položme $x = 1 - 1/y$. Dosadením týchto hodnôt do zadanej rovnosti dostaneme

$$f\left(1 - \frac{1}{y} + f(y)\right) = yf(y).$$

Ak $f(y) > 1/y$, tak pravá, a teda aj ľavá strana predošlej rovnosti je väčšia ako 1, z čoho vzhľadom na vlastnosť odvodenú v predošlom odseku vyplýva

$$1 - \frac{1}{y} + f(y) \leqq 1, \qquad \text{čiže} \quad f(y) \leqq \frac{1}{y},$$

čo je spor. Analogicky z predpokladu $f(y) < 1/y$ odvodíme spor $f(y) \geqq 1/y$. Preto pre všetky $y > 1$ platí $f(y) = 1/y$.

Napokon uvažujme ľubovoľné $0 < a \leqq 1$ a zvoľme ľubovoľné y spĺňajúce $y > 1/a \geqq 1$. Položením $x = a - 1/y$ dostaneme (s využitím zadanej rovnosti a už odvodených hodnôt f pre argumenty väčšie ako 1)

$$f(a) = f\left(x + \frac{1}{y}\right) = f(x + f(y)) = yf(xy + 1) = y \cdot \frac{1}{xy + 1} = \frac{1}{x + \frac{1}{y}} = \frac{1}{a}.$$

Preto jediným kandidátom na riešenie je funkcia $f(x) = 1/x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}^+$. O tom, že vyhovuje, sa presvedčíme triviálnou skúškou.

Úloha I-2.

Ak trojica rôznych prirodzených čísel a, b, c spĺňa $a \mid b$ a súčasne $b \mid c$ (takúto trojicu budeme nazývať *zakázaná*), tak $b \geqq 2a$ a $c \geqq 2b$, z čoho vyplýva $c \geqq 4a$. Ak teda najväčšie číslo z S je menšie ako štvornásobok najmenšieho čísla z S, neobsahuje množina S žiadnu zakázanú trojicu, čiže je prípustná. Dajme do S všetky čísla väčšie ako $\frac{1}{4}N$, teda položme

$$S = \left\{ \lfloor \tfrac{1}{4}N \rfloor + 1, \lfloor \tfrac{1}{4}N \rfloor + 2, \dots, N \right\}.$$

Táto prípustná množina má $N - \lfloor \frac{1}{4}N \rfloor = \lceil \frac{3}{4}N \rceil$ prvkov. Ukážeme, že viac prvkov žiadna prípustná množina obsahovať nemôže.

Množina $M = \{1, 2, \dots, N\}$ obsahuje $\lceil \frac{1}{2}N \rceil$ nepárnych čísel. Pre každé také nepárne číslo q uvažujme množinu

$$H_q = \left\{ q, 2q, 4q, \dots, 2^{i_q} q \right\},$$

pričom i_q je najväčšie nezáporné celé číslo i také, že $2^i \cdot q \leqq N$. Množiny H_q tvoria rozklad množiny M (každé číslo z M sa dá jednoznačne napísať v tvare $2^i \cdot q$ pre nejaké nepárne $q \leqq N$ a celé $i \geqq 0$). Je zrejmé, že ľubovoľná trojica čísel z tej istej množiny H_q

je zakázaná. V množine S teda môžu byť najviac dve čísla z každej množiny H_q. Avšak pre $q > \frac{1}{2}N$ je množina H_q jednoprvková – obsahuje iba číslo q.

Spolu dostávame, že S môže obsahovať z množín H_q najviac po dve čísla pre $1 \leqq q \leqq \frac{1}{2}N$ a po jednom čísle pre $\frac{1}{2}N < q \leqq N$, teda

$$|S| \leqq 2 \cdot \lceil \tfrac{1}{2} \lfloor \tfrac{1}{2}N \rfloor \rceil + 1 \cdot \left(\lceil \tfrac{1}{2}N \rceil - \lceil \tfrac{1}{2} \lfloor \tfrac{1}{2}N \rfloor \rceil \right) = \lceil \tfrac{1}{2} \lfloor \tfrac{1}{2}N \rfloor \rceil + \lceil \tfrac{1}{2}N \rceil = \lceil \tfrac{3}{4}N \rceil.$$

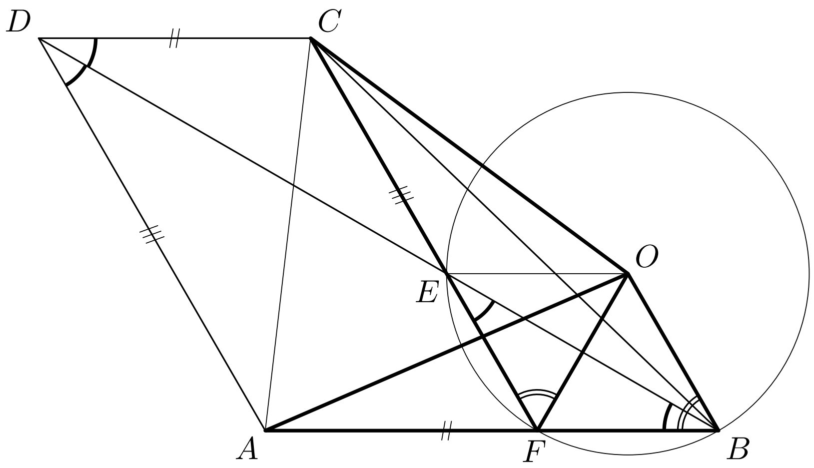
Poslednú úpravu je možné urobiť napríklad osobitným rozobraním dvoch prípadov podľa parity čísla N.

Odpoveď. Prípustná množina môže mať najviac $\lceil \frac{3}{4}N \rceil$ prvkov.

Úloha I-3.
Z rovnobežnosti priamok AD a FC, resp. priamok AB a CD vyplýva

$$|\measuredangle ADE| = |\measuredangle FEB|, \qquad \text{resp.} \qquad |\measuredangle CDB| = |\measuredangle ABD|.$$

Podľa zadania je však DB osou uhla ADC, takže všetky štyri uvedené uhly majú rovnakú veľkosť (obr. 60). Trojuholníky BDA a BEF sú teda rovnoramenné a vzhľadom



Obr. 60

na to, že $AFCD$ je rovnobežník, platí

$$|AB| = |AD| = |CF| \qquad \text{a} \qquad |FE| = |FB|. \tag{1}$$

Trojuholníky EFO a FBO sú oba rovnoramenné a ich ramená majú zhodné dĺžky rovné polomeru kružnice opísanej trojuholníku BEF. Podľa (1) majú zhodné aj základne, sú teda zhodné, čiže $|\measuredangle EFO| = |\measuredangle FBO|$. Z toho a z (1) dostávame, že aj trojuholníky CFO a ABO sú zhodné, a to podľa vety *sus*. Odtiaľ $|CO| = |AO|$, preto trojuholník ACO je rovnoramenný, a vzhľadom na to, že uhol ACO má veľkosť 60°, je dokonca rovnostranný. Potom $|\measuredangle AOC| = 60°$, t. j. trojuholník CFO je obrazom trojuholníka ABO v otočení o 60° (keďže sú zhodné). Preto aj $|\measuredangle BOF| = 60°$ a trojuholník FBO je rovnostranný.

S využitím (1) teda dostávame

$$|AF| + |FO| = |AF| + |FB| = |AB| = |CF|,$$

čo bolo treba dokázať.

Úloha I-4.
Pomocou matematickej indukcie možno ľahko nahliadnuť, že všetky členy zadanej postupnosti sú párne. Párne sú totiž prvé dva členy a ak sú párne členy a_{n-1} aj a_n pre nejaké n, tak súčin $a_n a_{n-1}$ je deliteľný štyrmi, čiže číslo $\frac{1}{2}a_n a_{n-1}$ je párne a člen a_{n+1} je ako súčet troch párnych čísel tiež párny. Prvočíslo $p = 2$ teda nevyhovuje. Naopak, $p = 3$ vyhovuje, pretože $3 \mid a_1 - 1$. Ďalej budeme predpokladať, že $p \geqq 5$.

Zadané vyjadrenie člena a_{n+1} možno upraviť na tvar

$$a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-1} + 2a_n + 2a_{n-1}}{2} = \frac{(a_n + 2)(a_{n-1} + 2)}{2} - 2.$$

Ak označíme $b_n = \frac{1}{2}(a_n + 2)$, platí $b_{n+1} = b_n b_{n-1}$. Vzhľadom na to, že $b_0 = 2$ a $b_1 = 3$, sú všetky b_n prirodzené čísla majúce v rozklade na súčin prvočísel len činitele 2 a 3, teda $p \nmid b_n$. Označme z_n zvyšok čísla b_n po delení p a skúmajme postupnosť týchto zvyškov. Keďže každý ďalší zvyšok z_{n+1} je jednoznačne určený dvojicou predošlých zvyškov (z_{n-1}, z_n) a rôznych dvojíc zvyškov je len konečne veľa, musí sa niektorá dvojica v postupnosti zopakovať a postupnosť $\{z_n\}$ je periodická, dĺžku periódy označme d.

Tvrdíme, že prvá dvojica (z_{n-1}, z_n), ktorá sa v postupnosti zopakuje, je dvojica (z_0, z_1) (t. j. postupnosť je periodická od začiatku – nemá predperiódu). Predpokladajme sporom, že prvá sa zopakuje nejaká dvojica $(z_{k-1}, z_k) = (z_{d+k-1}, z_{d+k})$ pre $k > 1$. Potom platí

$$\begin{aligned} z_k &\equiv z_{k-2} z_{k-1} \pmod p, \\ z_k &\equiv z_{d+k} \equiv z_{d+k-2} z_{d+k-1} \equiv z_{d+k-2} z_{k-1} \pmod p. \end{aligned}$$

Odčítaním kongruencií dostaneme

$$0 \equiv (z_{k-2} - z_{d+k-2}) z_{k-1} \pmod p,$$

z čoho vzhľadom na to, že $p \nmid b_{k-1}$, vyplýva $z_{k-2} = z_{d+k-2}$, teda aj $(z_{k-2}, z_{k-1}) = (z_{d+k-2}, z_{d+k-1})$. To je však spor s predpokladom, že prvá zopakovaná dvojica bola (z_{k-1}, z_k).

Zistili sme, že dvojica $(z_0, z_1) = (2, 3)$ sa v postupnosti zvyškov objaví aj na mieste (z_d, z_{d+1}). Potom máme

$$3 \equiv b_{d+1} = b_d b_{d-1} \equiv 2b_{d-1} \pmod p, \qquad \text{čiže} \qquad p \mid 2b_{d-1} - 3 = a_{d-1} - 1.$$

Odpoveď. Zadaným podmienkam vyhovujú všetky prvočísla okrem 2.

Úloha T-1.
Predpokladajme, že čísla x, y, z vyhovujú zadaniu. Z prvej rovnosti triviálne dostávame

$x \neq 0$ a podobne z ostatných dvoch rovností máme $y, z \neq 0$. Preto môžeme rovnice prepísať na tvar

$$z = \frac{2x^3+1}{3x}, \qquad x = \frac{2y^3+1}{3y}, \qquad y = \frac{2z^3+1}{3z}.$$

Z týchto vyjadrení vyplývajú implikácie

$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad z > 0 \quad \Rightarrow \quad y > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 0,$$

teda ak je ktorékoľvek z čísel x, y, z kladné, sú kladné aj zvyšné dve. Preto buď sú všetky tri čísla kladné, alebo všetky záporné. Tieto dva prípady vyšetríme osobitne, pričom v oboch rozboroch použijeme rovnosti, ktoré dostaneme vzájomným odčítaním dvojíc zadaných rovností:

$$2(x^3-y^3) = 3x(z-y), \tag{1}$$
$$2(y^3-z^3) = 3y(x-z), \tag{2}$$
$$2(z^3-x^3) = 3z(y-x). \tag{3}$$

- ▷ *Prípad* $x, y, z > 0$. Ak $x > y$, tak ľavá strana (1) je kladná, čiže aj pravá strana je kladná, t. j. $z > y$. Potom je ľavá strana (2) záporná, čiže aj pravá je záporná, t. j. $z > x$. Potom je však ľavá strana (3) kladná, čiže aj pravá je kladná, t. j. $y > x$, čo je v spore s úvodným predpokladom. Zrejme rovnako dostaneme spor z predpokladu $x < y$ (všetky nerovnosti sa len otočia). Nutne teda $x = y$ a napr. z (1) následne $x = y = z$.
- ▷ *Prípad* $x, y, z < 0$. Postupujeme podobne ako v predošlom prípade, avšak berieme do úvahy zápornosť činiteľov pred zátvorkami na pravých stranách, takže zátvorky na oboch stranách v každej rovnici majú opačné znamienka. Ak $x > y$, tak z (1) vyplýva $z < y$. Z toho podľa (2) máme $z > x$. Spolu teda $x > y > z > x$, čo je spor. Prípad $x < y$ vedie rovnako k sporu a znova dostávame $x = y = z$.

Ukázali sme, že všetky tri čísla musia byť rovnaké. Vyhovujúce trojice už nájdeme ľahko vyriešením rovnice $2x^3 + 1 = 3x^2$, ktorú možno po prevedení členov na jednu stranu rozložiť na súčinový tvar $(2x+1)(x-1)^2 = 0$, t. j. $x = 1$ alebo $x = -\frac{1}{2}$.

Odpoveď. Zadaniu vyhovujú trojice $(1, 1, 1)$ a $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Úloha T-2.

Pri riešení použijeme nasledovné pomocné tvrdenie: Ak pre kladné reálne čísla x, y, z platí $x + y + z < 3$, tak

$$\frac{9-x^2}{x} \cdot \frac{9-y^2}{y} \cdot \frac{9-z^2}{z} > 512.$$

Dôkaz. Podľa AG-nerovnosti pre štvoricu čísel platí

$$3 + x = 1 + 1 + 1 + x \geqq 4\sqrt[4]{x}$$

a analogicky $3+y \geqq 4\sqrt[4]{y}$, $3+z \geqq 4\sqrt[4]{z}$. Vynásobením týchto troch nerovností získame

$$(3+x)(3+y)(3+z) \geqq 64\sqrt[4]{xyz}. \tag{1}$$

Podľa AG-nerovnosti pre trojicu čísel máme $3 > x+y+z \geqq 3\sqrt[3]{xyz}$, z čoho vyplýva

$$1 > \sqrt[3]{xyz}, \qquad \text{takže aj} \qquad 1 > xyz \tag{2}$$

a tiež

$$xy+yz+zx \geqq 3(xyz)^{\frac{2}{3}}.$$

S využitím týchto odhadov dostávame

$$\begin{aligned}(3-x)(3-y)(3-z) &= 9(3-x-y-z)+3(xy+yz+zx)-xyz > \\ &> 9(xyz)^{\frac{2}{3}}-xyz = (xyz)^{\frac{2}{3}}\left(9-\sqrt[3]{xyz}\right) > 8(xyz)^{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

a po vynásobení s (1) vzhľadom na (2) platí

$$(9-x^2)(9-y^2)(9-z^2) > 512(xyz)^{\frac{11}{12}} > 512xyz.$$

Z toho už triviálne vyplýva dokazovaná nerovnosť.

Vráťme sa k pôvodne zadanému tvrdeniu. Označme

$$x = \sqrt{9+16a^2}-4a, \qquad y = \sqrt{9+16b^2}-4b, \qquad z = \sqrt{9+16c^2}-4c.$$

Zrejme $x, y, z > 0$. Navyše

$$9-x^2 = 9-(9+16a^2)-16a^2+8a\sqrt{9+16a^2} = 8a\left(\sqrt{9+16a^2}-4a\right) = 8ax$$

a podobne $9-y^2 = 8by$, $9-z^2 = 8cz$. Preto

$$\frac{9-x^2}{x}\cdot\frac{9-y^2}{y}\cdot\frac{9-z^2}{z} = 512abc = 512,$$

a aby sme nedostali spor s pomocným tvrdením, nutne musí byť $x+y+z \geqq 3$. To je však ekvivalentné so zadanou nerovnosťou.

Úloha T-3.
Označme A množinu slov dĺžky n s párnym počtom blokov ME aj MO a B množinu slov dĺžky n s nepárnym počtom oboch typov blokov. Uvažujme ľubovoľné slovo z B. Keď v tomto slove nájdeme prvý blok ME alebo MO (ten, ktorý sa vyskytne skôr) a nahradíme ho druhým blokom, čiže zmeníme E na O alebo naopak, v slove sa počet blokov jedného typu o jedna zmenší a počet blokov druhého typu o jedna zväčší. Keďže pred zmenou boli oba počty nepárne, po zmene budú oba párne, teda výsledné slovo

bude patriť do A. Takúto operáciu vieme vykonať s ľubovoľným slovom z B, pretože každé také slovo obsahuje nepárny, t. j. nenulový počet blokov oboch typov.

Pre každé slovo z A, ktoré vzniklo uvedenou operáciou, vieme spätne identifikovať prvý blok ME alebo MO a zmenou E na O alebo naopak dostaneme pôvodné slovo z B. To znamená, že každé slovo z B sa operáciou zmení na iné slovo z A, z čoho okamžite vyplýva $|A| \geqq |B|$. Na zdôvodnenie toho, že v skutočnosti dokonca $|A| > |B|$, si stačí uvedomiť, že v A existujú slová, ktoré nedostaneme opísanou operáciou zo žiadneho slova z B. Takými slovami sú zrejme tie, ktoré neobsahujú žiadny blok ME ani MO (podľa zadania takéto slová patria do A); ich počet je pre každé n nenulový.

Úloha T-4.

Nech π_0 je ľubovoľná permutácia. Uvažujme ďalších $p-1$ permutácií $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{p-1}$, ktoré dostaneme z π_0 postupným zväčšovaním zložiek o 1, pričom číslo p namiesto zväčšenia na $p+1$ nahradíme číslom 1. Platí teda $\pi_j(i) \equiv \pi_0(i) + j \pmod p$.

Spočítame, aká je priemerná hodnota $f(\pi)$, ak uvažujeme len permutácie $\pi_0, \ldots, \pi_{p-1}$. Na to stačí určiť, aký je počet násobkov p medzi všetkými číslami v zozname

$$\begin{array}{llll}
\pi_0(1), & \pi_0(1)+\pi_0(2), & \ldots, & \pi_0(1)+\pi_0(2)+\ldots+\pi_0(p), \\
\pi_1(1), & \pi_1(1)+\pi_1(2), & \ldots, & \pi_1(1)+\pi_1(2)+\ldots+\pi_1(p), \\
 & & \vdots & \\
\pi_{p-1}(1), & \pi_{p-1}(1)+\pi_{p-1}(2), & \ldots, & \pi_{p-1}(1)+\pi_{p-1}(2)+\ldots+\pi_{p-1}(p)
\end{array} \tag{1}$$

a výsledok vydeliť počtom riadkov, teda číslom p. Pre čísla v k-tom stĺpci zoznamu (1) platí

$$\begin{aligned}
\pi_j(1)+\pi_j(2)+\cdots+\pi_j(k) &\equiv (\pi_0(1)+j)+(\pi_0(2)+j)+\cdots+(\pi_0(k)+j) \equiv \\
&\equiv \pi_0(1)+\pi_0(2)+\cdots+\pi_0(k)+kj \pmod p.
\end{aligned}$$

Ak teda označíme $\pi_0(1)+\pi_0(2)+\cdots+\pi_0(k) = s_k$, dávajú čísla v k-tom stĺpci zoznamu (1) po delení p rovnaké zvyšky ako čísla

$$s_k, \quad s_k+k, \quad s_k+2k, \quad \ldots, \quad s_k+(p-1)k. \tag{2}$$

Ak $k < p$, sú čísla k a p nesúdeliteľné a zoznam (2) neobsahuje žiadne dve čísla s rovnakým zvyškom po delení p, pretože ak $j \neq j'$, tak

$$(s_k+jk)-(s_k+j'k) = k(j-j') \not\equiv 0 \pmod p.$$

V zozname (2) po delení p sa potom každý zvyšok objaví práve raz, čiže práve jedno číslo je v ňom násobkom p.

Ak $k = p$, tak $s_k = s_p = \pi_0(1)+\pi_0(2)+\cdots+\pi_0(p) = 1+2+\cdots+p = \frac{1}{2}p(p+1)$, čo je pre $p > 2$ násobkom p. V zozname (2) (resp. v poslednom stĺpci zoznamu (1), ktorý obsahuje p totožných čísel s_p) sú teda všetky čísla násobkom p.

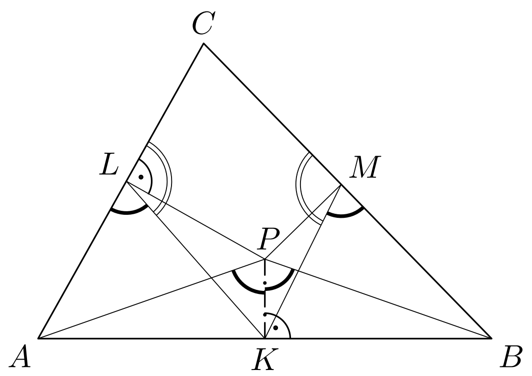
Spolu je počet násobkov prvočísla p v zozname (1) rovný $(p-1)\cdot 1+p=2p-1$ a priemerná hodnota $f(\pi)$ je rovná $(2p-1)/p$. Táto hodnota nie je závislá na zvolenej permutácii π_0. Pritom množinu všetkých permutácií množiny S vieme rozložiť na p-prvkové triedy tak, že v každej triede sa budú permutácie líšiť iba o posunutie zložiek modulo p (rovnako ako permutácie $\pi_0, \ldots, \pi_{p-1}$ opísané v úvode). Keďže pre každú takú triedu vychádza priemerná hodnota $f(\pi)$ rovná $(2p-1)/p$, je to zároveň priemerná hodnota pre množinu všetkých permutácií množiny S.

Úloha T-5.
Označme P priesečník osi strany AB s kolmicou na stranu AC vedenou bodom L.

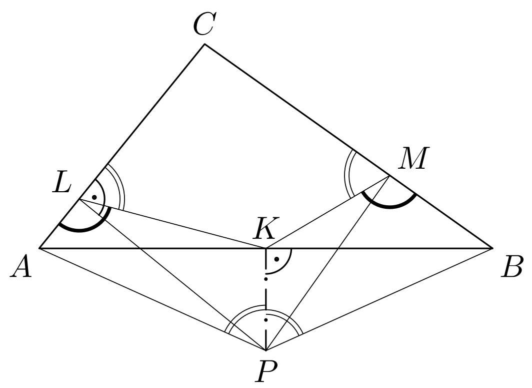
Uvažujme najskôr prípad, že P leží vnútri polroviny ABC (obr. 61a). Body K, L ležia na Tálesovej kružnici s priemerom AP. Z vlastností obvodových uhlov nad tetivou AK tejto kružnice potom vyplýva $|\measuredangle ALK|=|\measuredangle APK|$. Podľa zadania

$$|\measuredangle ALK| = 180^\circ - |\measuredangle CLK| = 180^\circ - |\measuredangle KMC| = |\measuredangle BMK|$$

a zo súmernosti podľa osi KP máme $|\measuredangle APK|=|\measuredangle BPK|$. Spolu dostávame $|\measuredangle BMK| = |\measuredangle BPK|$, teda body K, B, M, P ležia na jednej kružnici. Keďže $PK\perp KB$, je BP priemerom tejto kružnice a odtiaľ $PM\perp BM$, teda kolmice zo zadania sa pretínajú v bode P.



Obr. 61a



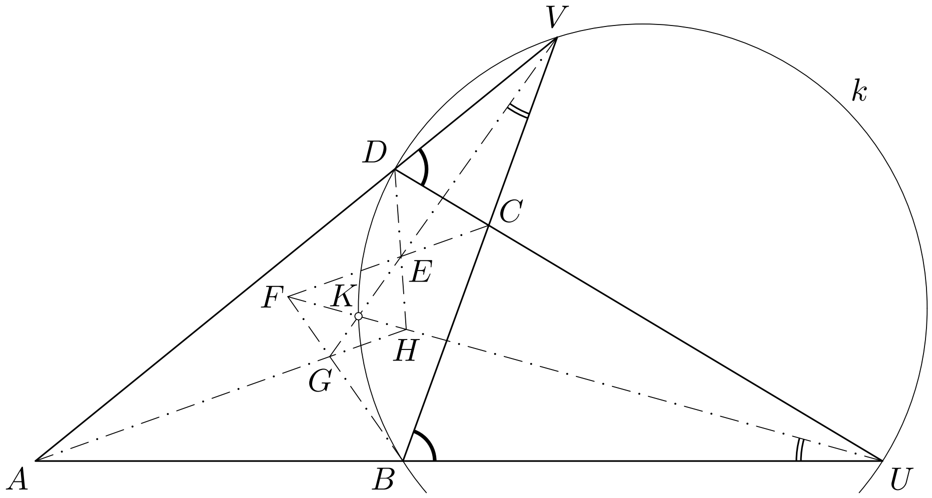
Obr. 61b

Prípad, keď P leží v polrovine opačnej k polrovine ABC (obr. 61b), vyšetríme analogicky. Z Tálesovej kružnice nad priemerom AP vyplýva $|\measuredangle ALK| = 180^\circ - |\measuredangle APK|$, takže postupom z predošlého prípadu odvodíme vzťah $|\measuredangle BMK| = 180^\circ - |\measuredangle BPK|$, z čoho vzhľadom na polohu bodov P, M v rôznych polrovinách určených priamkou BK vyplýva, že K, B, M, P ležia na jednej kružnici. Záver je rovnaký ako v prvom prípade.

Špeciálny prípad, keď $P=K$, vedie k záveru triviálne – vtedy $|\measuredangle BMK| = |\measuredangle ALK| = 90^\circ$, teda zadané kolmice sa pretínajú v bode K.

Úloha T-6.
Predpokladajme, že označenie bodov E, F, G, H je zvolené tak ako na obr. 62. Priesečník priamok AB a CD označme U a priesečník priamok AD a BC označme V.

Bod H je priesečníkom osí uhlov DAB a ADC, preto je – v závislosti od toho, či U leží na polpriamke AB alebo BA – buď stredom kružnice vpísanej trojuholníku ADU alebo stredom kružnice pripísanej k strane AD trojuholníka ADU. V oboch prípadoch leží na osi uhla AUD. Analogicky bod F leží na osi uhla BUC, ktorý je však totožný s uhlom AUD. Uhlopriečka HF štvoruholníka $EFGH$ je teda osou uhla AUD. Rovnakou úvahou odvodíme, že EG je osou uhla AVB. Takže K leží na priesečníku osí uhlov AUD a AVB.



Obr. 62

Označme $|\measuredangle BAD| = \alpha$ a $|\measuredangle ABC| = |\measuredangle CDA| = \beta$. Ak $\alpha+\beta < 180°$, ležia body U, V v polrovine BDC, ak $\alpha+\beta > 180$, ležia v polrovine BDA (prípad $\alpha+\beta = 180°$ vzhľadom na rôznobežnosť strán AB, CD nastať nemôže). V oboch prípadoch ležia body B, D v tej istej polrovine určenej priamkou UV, a keďže $|\measuredangle UBV| = |\measuredangle UDV| = 180° - \beta$, ležia body U, B, D, V na jednej kružnici, ktorú označme k. Uhly DVB, DUB nad tetivou DB kružnice k majú rovnakú veľkosť[18] a preto majú rovnakú veľkosť aj príslušné polovičné uhly, t. j. $|\measuredangle KVB| = |\measuredangle KUB|$. Z toho vyplýva, že body U, B, K, V ležia na jednej kružnici (zrejme K a B ležia v tej istej polrovine určenej priamkou UV). Táto kružnica je totožná s kružnicou k, pretože s ňou má spoločné body U, B, V. Na k teda leží všetkých päť bodov U, B, K, D, V, z čoho už triviálne dostaneme dokazované tvrdenie.

Úloha T-7.
Predpokladajme, že x, y, z vyhovujú zadaniu. Rozoberieme dva prípady podľa parity čísla x.

Ak x je nepárne, tak ľavá strana druhej rovnice je nepárna, takže y je nepárne. Ľavá strana prvej rovnice je potom párna a teda z je párne. Z druhej rovnice zjavne $y \neq 1$,

[18] Rovnosť veľkostí uhlov DVB, DUB možno odvodiť aj bez kružnice k z podobných trojuholníkov ADU, ABV – každý z nich má dva uhly s veľkosťami α, β (resp. $180° - \alpha$, $180° - \beta$, ak U, V ležia v polrovine BDA), čiže sú podobné podľa vety *uu*.

čiže $y \geqq 2$ a pravá strana prvej rovnice je deliteľná štyrmi. Ak celú sústavu prepíšeme v zvyškoch po delení štyrmi, nakoľko aj $4 \mid 2012$, dostaneme

$$x^y + y^x \equiv 0 \pmod 4, \qquad x^y \equiv y^{z+1} \pmod 4.$$

Dosadením za x^y z druhej kongruencie do prvej máme $y^{z+1} + y^x \equiv 0 \pmod 4$. Tomu však nevyhovuje žiadne nepárne y, pretože ak $y \equiv 1 \pmod 4$, tak

$$y^{z+1} + y^x \equiv 1^{z+1} + 1^x \equiv 2 \pmod 4$$

a ak $y \equiv 3 \pmod 4$, tak vzhľadom na nepárnosť x aj $z+1$ platí

$$y^{z+1} + y^x \equiv 3^{z+1} + 3^x \equiv (-1)^{z+1} + (-1)^x \equiv -2 \equiv 2 \pmod 4.$$

Ak x je párne, je ľavá strana druhej rovnice párna, takže y je párne. Z prvej rovnice potom aj z je párne, t. j. $z \geqq 2$. Pravá strana druhej rovnice je teda deliteľná ôsmimi. Ak by bolo $y > 2$, bolo by aj x^y deliteľné ôsmimi, a keďže $8 \nmid 2012$, druhá rovnica by nemohla byť splnená. Nutne teda $y = 2$ a sústava sa redukuje na tvar

$$x^2 + 2^x = z^2, \qquad x^2 + 2012 = 2^{z+1}. \tag{1}$$

Podľa prvej z týchto rovníc $z^2 > x^2$, teda $z > x$, takže $2^{z+1} > 2^{x+1}$, z čoho podľa druhej z rovníc $x^2 + 2012 > 2^{x+1}$. Ľahko sa dosadením presvedčíme, že pre $x = 12$ táto nerovnosť neplatí a matematickou indukciou dokážeme, že neplatí ani pre žiadne $x > 12$: Ak totiž x zväčšíme o 1, hodnota 2^{x+1} sa zväčší 2-krát, zatiaľ čo hodnota $x^2 + 2012$ sa zväčší iba q-krát, pričom

$$q = \frac{(x+1)^2 + 2012}{x^2 + 2012} = 1 + \frac{2x+1}{x^2+2012} = 1 + \frac{2 + \frac{1}{x}}{x + \frac{2012}{x}} < 1 + \frac{3}{x} < 2.$$

Ostáva prípad $x < 12$, t. j. $x \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Pre tieto hodnoty je číslo $z = \sqrt{x^2 + 2^x}$ celým jedine ak $x = 6$, vtedy $z = 10$. Ľahko sa presvedčíme, že potom je splnená aj druhá rovnica v (1).

Odpoveď. Jedinou vyhovujúcou trojicou je $(6, 2, 10)$.

Úloha T-8.

Čísla s vlastnosťami zo zadania existujú. Okrem príkladov takých dvojíc uvedieme aj postup, ako ich možno objaviť.

Pripomeňme známy vzorec, že ak číslo n má rozklad na súčin prvočísel $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, tak $\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$.[19] Podľa tohto vzorca máme

[19] Vzorec možno odvodiť takto: každý deliteľ čísla n má tvar $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, pričom $0 \leqq a_i \leqq \alpha_i$, každé a_i teda môže nadobúdať $(\alpha_i + 1)$ rôznych hodnôt, celkovo potom exponenty $a_1, \dots, a_k$ možno kombinovať $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$ spôsobmi.

tiež $\tau(n^2) = (2\alpha_1 + 1)\dots(2\alpha_k + 1)$ a $\tau(n^3) = (3\alpha_1 + 1)\dots(3\alpha_k + 1)$. Pre skrátenie zápisu označme $\alpha_i + 1 = \beta_i$. Potom

$$\tau(n) = \beta_1 \dots \beta_k, \quad \tau(n^2) = (2\beta_1 - 1)\dots(2\beta_k - 1), \quad \tau(n^3) = (3\beta_1 - 2)\dots(3\beta_k - 2).$$

Uvažujme dvojice

$$(2,3), \quad (3,5), \quad (4,7), \quad (8,15), \quad (18,35), \quad (32,63). \tag{1}$$

Všetky sú typu $(m, 2m-1)$ pre vhodné m a rozklad na súčin prvočísel každého z dvanástich čísel v uvedených dvojiciach obsahuje len prvočísla z množiny $\{2,3,5,7\}$. Čísla a, b budeme hľadať v takom tvare, aby exponenty z ich rozkladov zväčšené o 1, t. j. príslušné hodnoty β_i, boli spomedzi čísel nachádzajúcich sa na prvých zložkách dvojíc v (1); príslušné hodnoty $2\beta_i - 1$ potom budú na druhých zložkách. Rovnosti $\tau(a) = \tau(b)$ a $\tau(a^2) = \tau(b^2)$ prepíšme na tvar $\tau(a)/\tau(b) = 1$ a $\tau(a^2)/\tau(b^2) = 1$. Snažíme sa teda nájsť celé čísla u, v, w, x, y, z také, že

$$2^u \cdot 3^v \cdot 4^w \cdot 8^x \cdot 18^y \cdot 32^z = 1 \qquad \text{a} \qquad 3^u \cdot 5^v \cdot 7^w \cdot 15^x \cdot 35^y \cdot 63^z = 1. \tag{2}$$

Kladné čísla zo šestice (u,v,w,x,y,z) spĺňajúcej (2) použijeme na vytvorenie čísla a, záporné na vytvorenie čísla b.

Rovnosti (2) upravíme na tvar

$$2^{u+2w+3x+y+5z} \cdot 3^{v+2y} = 1, \qquad 3^{u+x+2z} \cdot 5^{v+x+y} \cdot 7^{w+y+z} = 1,$$

čiže

$$\begin{aligned} u + 2w + 3x + y + 5z &= 0,\\ v + 2y &= 0,\\ u + x + 2z &= 0,\\ v + x + y &= 0,\\ w + y + z &= 0. \end{aligned}$$

Táto sústava piatich lineárnych rovníc o šiestich neznámych má okrem triviálneho riešenia $u = v = w = x = y = z = 0$ (ktoré na vytvorenie vyhovujúcich a, b použiť nedokážeme) nekonečne veľa ďalších riešení, ktoré možno ľahko nájsť postupnou elimináciou neznámych. Všeobecné riešenie sústavy je $(u,v,w,x,y,z) = (t,-2t,0,t,t,-t)$, kde t je reálny parameter. Pre účely nášho postupu stačí zobrať nejaké celočíselné riešenie, napr. $(u,v,w,x,y,z) = (1,-2,0,1,1,-1)$. Podľa (1) následne na základe kladných hodnôt $u = x = y = 1$ zvolíme $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 8$, $\beta_3 = 18$ a zo záporných hodnôt $v = -2$, $z = -1$ určíme $\beta_1' = \beta_2' = 3$, $\beta_3' = 32$. Vzhľadom na postup platí

$$\beta_1\beta_2\beta_3 = \beta_1'\beta_2'\beta_3', \quad (2\beta_1 - 1)(2\beta_2 - 1)(2\beta_3 - 1) = (2\beta_1' - 1)(2\beta_2' - 1)(2\beta_3' - 1) \tag{3}$$

a ľahko možno nahliadnuť, že $(3\beta_1-2)(3\beta_2-2)(3\beta_3-2) \neq (3\beta'_1-2)(3\beta'_2-2)(3\beta'_3-2)$. Číslami vyhovujúcimi zadaniu sú teda napr.

$$a = 2^1 \cdot 3^7 \cdot 5^{17}, \qquad b = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^{31}$$

(trojice prvočísel v základoch môžeme samozrejme voliť ľubovoľne).

Iné riešenie. Podobne ako v prvom postupe budeme hľadať β_i, β'_i spĺňajúce (3). Pokúsime sa ich nájsť v tvare

$$\beta_1 = pq, \quad \beta_2 = r, \quad \beta_3 = s, \qquad \beta'_1 = p, \quad \beta'_2 = q, \quad \beta'_3 = rs$$

pre vhodné prirodzené čísla p, q, r, s. Prvá rovnosť z (3) je pri takomto vyjadrení splnená triviálne, pre splnenie druhej rovnosti musí platiť

$$\frac{(2p-1)(2q-1)}{2pq-1} = \frac{(2r-1)(2s-1)}{2rs-1}.$$

Označme $V(m,n) = (2m-1)(2n-1)/(2mn-1)$. Naším cieľom je nájsť dve rôzne dvojice $\{m,n\}$, pre ktoré tento výraz nadobúda rovnakú hodnotu. Úpravou dostávame

$$V(m,n) = \frac{4mn-2m-2n+1}{2mn-1} = 2 - \frac{2m+2n-3}{2mn-1}.$$

Hľadajme také m, n, že $V(m,n) = 2 - 1/k$ pre nejaké prirodzené číslo k. Po úprave získame ekvivalentné vyjadrenie

$$(m-k)(n-k) = \frac{1}{2}(2k-1)(k-1).$$

Dosadením povedzme $k = 5$ (na pravej strane predošlej rovnosti vtedy bude celé číslo a zároveň nie prvočíslo) dostaneme

$$(m-5)(n-5) = 18.$$

Riešením tejto rovnice sú napríklad dvojice $(6,23)$, $(7,14)$, stačí teda zvoliť $p = 6$, $q = 23$, $r = 7$, $s = 14$, z čoho dostávame (po presvedčení sa, že $\tau(a^3) \neq \tau(b^3)$) vyhovujúcu dvojicu

$$a = 2^{6\cdot 23-1} \cdot 3^{7-1} \cdot 5^{14-1} = 2^{137} \cdot 3^6 \cdot 5^{13}, \qquad b = 2^{6-1} \cdot 3^{23-1} \cdot 5^{7\cdot 14-1} = 2^5 \cdot 3^{22} \cdot 5^{97}.$$

*i*KS – korešpondenčný seminár SKMO

Korešpondenčný seminár Slovenskej komisie Matematickej olympiády (KS SKMO) vznikol v 24. ročníku MO v školskom roku 1974/75 ako jeden z prvých matematických korešpondenčných seminárov (vtedy ešte ako československý seminár) preto, aby bolo umožnené venovať individuálnu starostlivosť aj tým študentom, ktorí nenavštevovali triedy so zameraním na matematiku. Úlohy tohto seminára svojou náročnosťou prevyšujú akúkoľvek inú matematickú súťaž na Slovensku pre stredoškolákov, seminár je preto dôležitou súčasťou prípravy aj na medzinárodnú matematickú olympiádu (IMO).

Počas svojej existencie prešiel seminár viacerými zmenami. Naposledy v školskom roku 2003/04 jeho organizovanie prebrali vedúci korešpondenčného seminára KMS a až do 60. ročníka MO bol KS SKMO jeho kategóriou GAMA a KMS oficiálnym seminárom SKMO.

V školskom roku 2011/12 seminár dostal úplne novú tvár pod názvom *i*KS a stal sa z neho medzinárodný seminár, nakoľko série striedavo pripravujú organizátori so Slovenska (vedúci KMS; poz. ďalšiu kapitolu) a z Českej republiky (vedúci seminára MKS organizovaného na Matematicko-fyzikálnej fakulte Univerzity Karlovej v Prahe) – svojim záberom sa tak opäť vrátil na územie celého bývalého Československa, kde pôvodne vznikol. Samozrejme sa tak riešiteľská základňa stala česko-slovenská, čo má napomôcť motivácii a konkurencii medzi študentmi, ako i odovzdávaniu skúseností medzi vedúcimi. To však nie je všetko. Prvýkrát po mnohých rokoch končila táto súťaž koncoročným päťdňovým sústredením pre najlepších desať riešiteľov, ktoré patrilo bezpochyby medzi najnabitejšie matematické akcie roka.

Súťaž zmenila formát na 6 sérií po 4 úlohy, v každej sérii je jedna úloha z každej zo štyroch tradičných olympiádnych disciplín – algebra, geometria, kombinatorika, teória čísel. Od piatej série prvého ročníka *i*KS bývajú zoradené podľa odhadovanej náročnosti. Plný počet bodov za jednu úlohu je 7 – rovnako ako na IMO, spolu sa teda za všetky série dalo získať max. 168 bodov.

Celkové poradie *i*KS 2011/2012

1. *Martin Vodička*, 3. ročník, Gymnázium Alejová, Košice, SR, 149 bodov
2. *Viktor Lukáček*, 4. ročník, Gymnázium sv. Moniky, Prešov, SR, 124 bodov
3. *Anh Dung Le*, 2. ročník, Gymnázium Tachov, ČR, 108 bodov
4. *Štepán Šimsa*, 3. ročník, Gymnázium Litoměřice, ČR, 93 bodov
5. *Josef Svoboda*, 3. ročník, Gymnázium Frýdlant, ČR, 82 bodov

Uvádzame všetky príklady tohto ročníka súťaže spolu s riešeniami, často študentskými. Série pripravované v ČR ponechávame v češtine. Príklady boli zväčša vyberané z národných olympiád či iných súťaží, prípadne z literatúry, pôvod uvádzame pri zadaniach.

Všetky informácie o seminári možno nájsť na internetovej adrese *http://iksko.org*.

Zadania súťažných úloh *i*KS

Prvá séria

A1. Najděte nejmenší kladné reálné číslo t s následující vlastností: kdykoliv reálná čísla a, b, c, d splňují $a+b+c+d=6$ a $a^2+b^2+c^2+d^2=10$, lze z těchto čísel vybrat dvě, jejichž rozdíl je v absolutní hodnotě nejvýše t. (*Michal Rolínek*)

C1. *Mixáží* neuspořádané n-tice celých čísel[20] rozumíme neuspořádanou $\binom{n}{2}$-tici součtů všech dvojic prvků původní n-tice. Ukažte, že pokud mají dvě různé n-tice stejnou mixáž, pak n je mocnina dvojky. Pro každou mocninu dvojky také nalezněte příklad odpovídajících různých n-tic.
(*I. Tomescu: Problems in Combinatorics and Graph Theory*)

G1. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Sestrojme středy všech kružnic připsaných trojúhelníkům ABC, BCD, CDA, DAB (tedy celkem 12 bodů). Dokažte, že všechny tyto body leží na obvodu jednoho obdélníka nebo čtverce.
(*Rumunsko, 1996*)

N1. Řekneme, že přirozené číslo je *prvoliché*, pokud je součinem lichého počtu (ne nutně různých) prvočísel. O číslu, které není prvoliché, řekneme, že je *prvosudé*. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho přirozených čísel n takových, že čísla n a $n+1$ jsou obě
a) prvosudá;
b) prvolichá. (*Romanian Masters in Mathematics, 2011*)

Druhá séria

A2. Nech $P(x)$ je polynóm stupňa n s reálnymi koeficientmi a vedúcim koeficientom rovným 1. Ukážte, že vieme nájsť dva polynómy $Q(x)$ a $R(x)$, ktoré sú oba stupňa n, majú všetky korene reálne a ich vedúci koeficient je rovný 1, také, že $P(x)=\frac{1}{2}Q(x)+\frac{1}{2}R(x)$. (*USA, 2002*)

C2. Každému bodu v dvojrozmernej rovine je priradené reálne číslo tak, že pre každý trojuholník je číslo v strede jeho vpísanej kružnice rovné aritmetickému priemeru čísel v jeho vrcholoch. Dokážte, že každý bod v rovine má priradené rovnaké číslo. (*USA, 2001*)

G2. Kružnica pretína dvakrát každú zo strán BC, CA, AB trojuholníka ABC postupne v dvojiciach bodov (D_1,D_2), (E_1,E_2) a (F_1,F_2). Priamky D_1E_1

[20] V n-tici se na rozdíl od množiny mohou čísla opakovat.

a D_2F_2 sa pretínajú v bode L, E_1F_1 a E_2D_2 sa pretínajú v bode M, F_1D_1 a F_2E_2 sa pretínajú v bode N. Dokážte, že priamky AL, BM a CN sa pretínajú v jednom bode. (*Čína, 2005*)

N2. Prirodzené číslo n je *rozložiteľné*, ak existuje 2012 prirodzených čísel a_i s nasledujúcimi vlastnosťami:
(i) $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2012}$;
(ii) $1 \leqq a_1 < a_2 < \cdots < a_{2012}$;
(iii) $a_i \mid a_{i+1}$ pre $i = 1, 2, \ldots, 2011$.
Dokážte, že okrem konečného počtu čísel je každé prirodzené číslo rozložiteľné. (*Čína, 2004*)

Tretia séria

A3. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující zároveň:
(i) existuje reálné číslo M takové, že pro každé reálné číslo x je $f(x) < M$;
(ii) pro každou dvojici reálných čísel x a y platí

$$f\bigl(xf(y)\bigr) + yf(x) = xf(y) + f(xy).$$

(*APMO, 2011*)

C3. Na ultramaraton postupně vyběhlo a do cíle postupně dorazilo n běžců. Během závodu se mezi sebou různě předbíhali, po jeho skončení jsme zjistili tato fakta:
(i) každý běžec předběhl stejný počet běžců;
(ii) žádní dva běžci nebyli předběhnuti stejným počtem běžců;
(iii) žádný běžec nebyl předběhnut dvakrát tím samým běžcem.
Určete všechny možné hodnoty n. (*Turecko, 2003*)

G3. Uvnitř trojúhelníka je dán bod P. Označmě A', B', C' paty kolmic spuštěných z bodu P na příslušné strany. Dále nechť A'' je průsečík kružnice opsané trojúhelníku $A'B'C'$ a strany BC různý od A'. Konečně nalezněme na úsečce $A''B'$ bod X takový, že $|\measuredangle XAC| = |\measuredangle PAB|$. Ukažte, že $|\measuredangle AXB| = 90°$. (*J. L. Ayme: An Unlikely Concurrence*)

N3. a) Existuje 2011 po dvou různých přirozených čísel, jejichž součet je dělitelný každým z nich?
b) Existuje 2011 po dvou různých přirozených čísel, jejichž součet je dělitelný součtem každých dvou z nich? (*Maďarsko-Izrael, 2009*)

Štvrtá séria

A4. Nech a, b, c sú kladné reálne čísla. Dokážte, že platí

$$(a+b+c)^2(ab+bc+ca)^2 \leqq 3(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2).$$

(*India, 2007*)

C4. Nech $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ je preusporiadanie čísel $0, 1, \dots, n$. *Ťahom* nazývame výmenu čísel a_i a a_j, ak sú splnené podmienky $a_i = 0$, $i > 0$ a zároveň $a_{i-1} + 1 = a_j$. Pre ktoré n sa dá konečným počtom *ťahov* z usporiadania $(1, n, n-1, \dots, 3, 2, 0)$ vyrobiť usporiadanie $(1, 2, \dots, n, 0)$? (*APMO, 2000*)

G4. Nech $ABCD$ je štvoruholník vpísaný do kružnice k, body E, F, G, H sú stredy oblúkov AB, BC, CD, DA kružnice k, ktoré neobsahujú zvyšné body, a platí $|AC|\cdot|BD| = |EG|\cdot|FH|$. Dokážte, že priamky AC, BD, EG, FH sa pretínajú v jednom bode. (*India, 2011*)

N4. Nech $p \geqq 5$ je prvočíslo a $n = \frac{1}{3}(2^{2p} - 1)$. Ukážte, že n delí $2^n - 2$. (*VJIMC, 2003*)

Piata séria

C5. V řadě je N žárovek postupně očíslovaných 1 až N. *Krokem* rozumíme přepnutí tří žárovek, jejichž čísla a, b, c splňují $a + c = 2b$. Určete všechna N, pro něž lze konečnou posloupností kroků všechny žárovky zhasnout nezávisle na jejich počátečním stavu. (*Rusko, 1999*)

N5. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ platí $n \mid \underbrace{2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}}_{n+1} - \underbrace{2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}}_{n}$.

Poznámka. Patrové mocniny vyhodnocujeme shora, tj. $a^{b^c} = a^{(b^c)}$. (*Kazachstan, 2009*)

A5. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je tvořena pouze přirozenými čísly, přičemž každé z nich alespoň jednou obsahuje. Navíc existuje reálné číslo $k > 0$ takové, že kdykoliv $m \neq n$, pak

$$\frac{1}{k} < \frac{|a_n - a_m|}{|n-m|} < k.$$

Ukažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $|a_n - n| < \frac{1}{2}k^2$. (*Rusko, 1998*)

G5. Trojúhelník ABC splňující $|AB| \neq |AC|$ je vepsán do kružnice ω. Tečny vedené bodem A ke kružnici opsané středům jeho stran se jí dotýkají v bodech D, E. Ukažte, že přímka DE, přímka BC a tečna k ω vedená bodem A procházejí jedním bodem. (*Šariginova geometrická olympiáda, 2011*)

Šiesta séria

N6. Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré existujú také celé čísla $n_1, n_2, \dots, n_k$ všetky väčšie ako 3, že

$$n = n_1 n_2 \dots n_k = 2^{\frac{1}{2^k}(n_1-1)(n_2-1)\dots(n_k-1)} - 1.$$

(*Čína, 2000*)

A6. Majme prirodzené číslo $n \geqq 2$. Koľko riešení má sústava rovníc

$$\begin{aligned} x_1 + x_n^2 &= 4x_n, \\ x_2 + x_1^2 &= 4x_1, \\ &\vdots \\ x_n + x_{n-1}^2 &= 4x_{n-1} \end{aligned}$$

v obore nezáporných reálnych čísel? (*Poľsko, 2000*)

G6. Body I a H sú v tomto poradí stred kružnice vpísanej a ortocentrum ostrouhlého trojuholníka ABC. Body B_1 a C_1 sú postupne stredy strán AC a AB. Vieme, že polpriamka B_1I pretína stranu AB v bode B_2 ($B_2 \neq B_1$), polpriamka C_1I pretína predĺženie strany AC v bode C_2. Priamky B_2C_2 a BC sa pretínajú v bode K a A_1 je stredom kružnice opísanej trojuholníku BHC. Dokážte, že tri body A, I a A_1 ležia na jednej priamke práve vtedy, keď sa rovnajú obsahy trojuholníkov BKB_2 a CKC_2. (*Čína, 2003*)

C6. Nech M je množina n bodov v rovine, pre ktorú platí:

(i) dá sa z nej vybrať 7 bodov, ktoré sú vrcholmi konvexného sedemuholníka;

(ii) pre každých 5 bodov z M, ktoré sú vrcholmi konvexného päťuholníka, je v M aspoň jeden bod ležiaci vo vnútri tohto päťuholníka.

Nájdite najmenšie možné n. (*Čína, 2004*)

Riešenia súťažných úloh iKS

Prvá séria

A1.

Ukážeme, že $t = 1/\sqrt{5}$.

Nejprve nalezneme čtveřici čísel vyhovující daným podmínkám, která zároveň tvoří aritmetickou posloupnost. Tou čtveřicí je

$$\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2\sqrt{5}}, \ \frac{3}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}}, \ \frac{3}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}, \ \frac{3}{2} + \frac{3}{2\sqrt{5}}\right).$$

Vidíme tedy, že $t \geqq 1/\sqrt{5}$. Nyní předpokládejme, že $t > 1/\sqrt{5}$. Existují tedy taková reálná čísla $a > b > c > d$ splňující vztahy ze zadání, že

$$a - b > \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad b - c > \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad c - d > \frac{1}{\sqrt{5}}. \tag{1}$$

Tuto skutečnost dovedeme ke sporu několika způsoby.

První způsob. (Volně podle *Josefa Svobody.*) Spočítámě hodnotu výrazu

$$V = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2 + (a - c)^2 + (b - d)^2 + (d - a)^2.$$

Platí totiž

$$V = 3\sum_{\text{cykl.}} a^2 - 2\sum_{\text{sym.}} ab = 4\sum_{\text{cykl.}} a^2 - \left(\sum_{\text{cykl.}} a\right)^2 = 4.$$

Zároveň ale pokud užijeme nerovnosti z (1), získáme

$$V > \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{9}{5} = 4,$$

což je hledaný spor.

Druhý způsob. (Podle *Anh Dung Le.*) Nejprve dokážeme několik odhadů. Díky nerovnostem z (1) platí

$$(a - b)(c - d) > \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad ac + bd > \frac{1}{5} + ad + bc$$

a podobně i

$$(a - c)(b - d) > \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad ab + cd > \frac{4}{5} + ad + bc.$$

Jejich součtem je pak nerovnost

$$ab + ac + bd + cd > 1 + 2(ad + bc). \tag{2}$$

Před efektním závěrem si ještě uvědomíme, že

$$2\sum_{\text{sym.}} ab = \left(\sum_{\text{cykl.}} a\right)^2 - \sum_{\text{cykl.}} a^2 = 26$$

a zbytek si s úžasem vychutnáme:

$$\begin{aligned}27 &= 1 + 2(ad+bc) + 2(ab+ac+bd+cd) \overset{(2)}{<} 3(ab+ac+bd+cd) = \\ &= 3(a+d)(b+c) \overset{\text{AG}}{\leqq} 3\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2 = 27.\end{aligned}$$

Třetí způsob. (Koncentrovaně podle *Viktora Lukáčka.*) Přejděme k novým proměnným $a_1 = a - \frac{3}{2}$, $b_1 = b - \frac{3}{2}$, $d_1 = d - \frac{3}{2}$, $d_1 = d - \frac{3}{2}$. Nerovnosti typu (1) se zachovají a snadno spočítáme, že

$$a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 0, \qquad a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = 1.$$

Uvědomíme si, že AK nerovnost lze psát i ve tvaru

$$x^2 + y^2 \geqq \frac{1}{2}(x-y)^2, \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

dvakrát ji použijeme:

$$1 = \left(a_1^2 + d_1^2\right) + \left(b_1^2 + c_1^2\right) \geqq \frac{1}{2}(a_1 - d_1)^2 + \frac{1}{2}(b_1 - c_1)^2 \overset{(1)}{>} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{9}{5} + \frac{1}{5}\right) = 1,$$

a spor je opět na světě.

C1.

V celém řešení budeme pomocí závorek $\langle\!\langle \dots \rangle\!\rangle$ značit (neuspořádané) n-tice, dále nechť $\operatorname{Mix}(X)$ značí mixáž X.

Ukážeme nejprve, že pokud různé n-tice A, B splňují $\operatorname{Mix}(A) = \operatorname{Mix}(B)$, tak je n mocninou dvojky. Bez újmy na obecnosti se můžeme omezit na n-tice nezáporných čísel, protože pokud n-tice A, B vyhovují zadání, pak jistě vyhovují i n-tice $\langle\!\langle a + m \mid a \in A \rangle\!\rangle$, $\langle\!\langle b + m \mid b \in B \rangle\!\rangle$ pro libovolné $m \in \mathbb{Z}$.

Nechť $A = \langle\!\langle a_1, \dots, a_n \rangle\!\rangle$, $B = \langle\!\langle b_1, \dots, b_n \rangle\!\rangle$ jsou různé n-tice se stejnou mixáží. Definujme polynomy $f(x)$, $g(x)$ následovně:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x^{a_i}, \qquad g(x) = \sum_{i=1}^{n} x^{b_i}.$$

Podmínku $\operatorname{Mix}(A) = \operatorname{Mix}(B)$ můžeme přepsat jako

$$\sum_{1 \leqq i < j \leqq n} x^{a_i + a_j} = \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} x^{b_i + b_j},$$

odkud dostáváme

$$f(x)^2 - g(x)^2 = \Bigg(f\big(x^2\big) + 2\sum_{1\leqq i<j\leqq n} x^{a_i+a_j}\Bigg) - \Bigg(g\big(x^2\big) + 2\sum_{1\leqq i<j\leqq n} x^{b_i+b_j}\Bigg) = f\big(x^2\big) - g\big(x^2\big).$$

Protože $A \neq B$, není polynom $f(x) - g(x)$ identicky nulový, můžeme tedy psát

$$f(x) + g(x) = \frac{f(x)^2 - g(x)^2}{f(x) - g(x)} = \frac{f\big(x^2\big) - g\big(x^2\big)}{f(x) - g(x)}.$$

Navíc, jelikož $f(1) = g(1) = n$, je 1 kořenem $f(x) - g(x)$, lze tedy psát $f(x) - g(x) = (x-1)^k p(x)$, kde $k \in \mathbb{N}$ a p je polynom splňující $p(1) \neq 0$. Odtud plyne

$$f(x) + g(x) = \frac{f\big(x^2\big) - g\big(x^2\big)}{f(x) - g(x)} = \frac{\big(x^2-1\big)^k p\big(x^2\big)}{(x-1)^k p(x)} = (x+1)^k \frac{p\big(x^2\big)}{p(x)}$$

a po dosazení $x = 1$ máme

$$2n = f(1) + g(1) = (1+1)^k \frac{p\big(1^2\big)}{p(1)} = 2^k,$$

tudíž $n = 2^{k-1}$.

Induktivně sestrojíme pro každou mocninu dvojky příklad n-tic ze zadání. Pro $n = 2$ to jsou třeba $A = \langle\!\langle 1, 3\rangle\!\rangle$ a $B = \langle\!\langle 2, 2\rangle\!\rangle$. Předpokládejme nyní, že máme různé n-tice přirozených čísel $A = \langle\!\langle a_1, \dots, a_n\rangle\!\rangle$, $B = \langle\!\langle b_1, \dots, b_n\rangle\!\rangle$ se stejnou mixáží, navíc takové, že $1 \in A$, ale $1 \notin B$. Hledané $2n$-tice A', B' definujme následovně:

$$\begin{aligned} A' &= \langle\!\langle a_1, a_2, \dots, a_n, b_1+1, b_2+1, \dots, b_n+1\rangle\!\rangle, \\ B' &= \langle\!\langle b_1, b_2, \dots, b_n, a_1+1, a_2+1, \dots, a_n+1\rangle\!\rangle. \end{aligned}$$

Opět je $1 \in A'$ a $1 \notin B'$, odkud také dostáváme $A' \neq B'$. Nyní si všimněme, že $\mathrm{Mix}(A')$ se skládá ze tří částí: jednak jde o $\binom{n}{2}$ prvků tvaru $a_i + a_j$, kde $1 \leqq i < j \leqq n$ (tuto část označíme A'_{aa}), dále o $\binom{n}{2}$-tici A'_{bb} prvků tvaru $(b_i+1) + (b_j+1)$ a konečně n^2-tici A'_{ab} prvků tvaru $a_i + (b_j+1)$. Analogicky můžeme $\mathrm{Mix}(B')$ rozdělit na B'_{bb}, B'_{aa} a B'_{ba}.

Protože A'_{aa} je přesně $\mathrm{Mix}(A)$ a B'_{bb} je zase $\mathrm{Mix}(B)$, platí dle předpokladu $A'_{aa} = B'_{bb}$. Dále $A'_{bb} = \mathrm{Mix}(\langle\!\langle b+1 \mid b \in B\rangle\!\rangle)$ a $B'_{aa} = \mathrm{Mix}(\langle\!\langle a+1 \mid a \in A\rangle\!\rangle)$, je tedy jistě také $A'_{bb} = B'_{aa}$. Konečně $A'_{ab} = B'_{ba}$, protože to jsou n^2-tice prvků A' a B' tvaru $a_i + b_j + 1$, dostáváme tedy $\mathrm{Mix}(A') = \mathrm{Mix}(B')$.

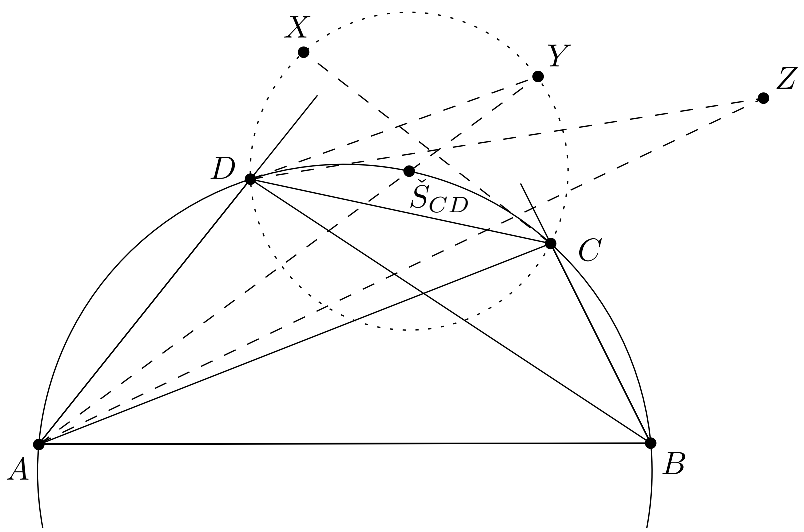
G1.

(Podle *Martina Vodičky.*) Označme E_{XYZ} střed kružnice připsané trojúhelníku XYZ vzhledem ke straně XY. Označme α, β, γ, δ obvodové úhly příslušné obloukům AB, BC, CD, DA.

V prvním kroku dokážeme, že $X = E_{CDB}$, $Y = E_{CDA}$ a $Z = E_{BDA}$ leží v tomto pořadí v přímce. Z toho díky analogickým tvrzením okamžitě dostaneme, že všech dvanáct středů připsaných kružnic leží na obvodu čtyřúhelníku s vrcholy E_{BDA}, E_{CAB}, E_{DBC}, E_{ACD}. Ve druhém kroku úlohu dokončíme tím, že ukážeme, že sousední strany tohoto čtyřúhelníku jsou na sebe kolmé.

Opakovaně přitom využijeme následující lemma: Označíme-li $\check{S}_{CD}$ střed kratšího oblouku CD kružnice opsané čtyřúhelníku $ABCD$, pak $\check{S}_{CD}$ je středem kružnice opsané (tětivovému) čtyřúhelníku $DCYX$ (pro důkaz si stačí všimnout, že $|\measuredangle D\check{S}_{CD}C| = 180^\circ - \gamma$ a $|\measuredangle DXC| = |\measuredangle DYC| = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$).

1. krok. Ukážeme, že čtyřúhelník $AZYD$ je tětivový. Jelikož DZ a DY jsou osy úhlů, které mají jedno rameno společné, a jejichž druhá ramena svírají úhel BDC, máme $|\measuredangle ZDY| = \frac{1}{2}|\measuredangle BDC| = \frac{1}{2}\beta$. Obdobně dostaneme $|\measuredangle ZAY| = \frac{1}{2}|\measuredangle BAC| = \frac{1}{2}\beta$. Čtyřúhelník $AZYD$ je proto opravdu tětivový.



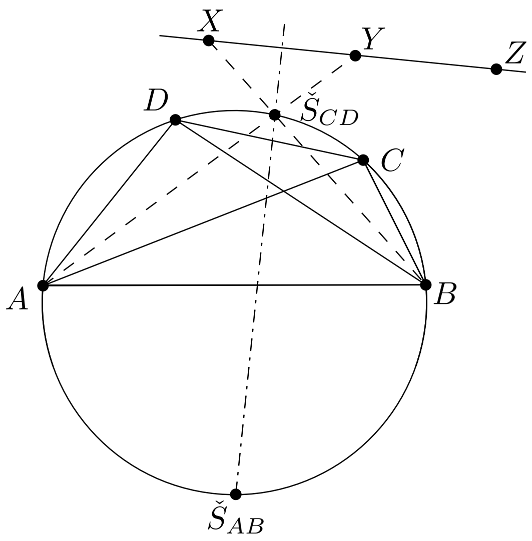
Obr. 63

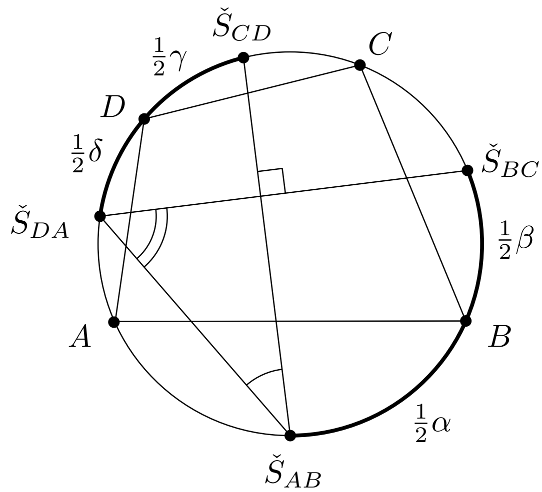
Pomocí toho a lemmatu už snadno odvodíme

$$|\measuredangle XYZ| = |\measuredangle XYD| + |\measuredangle DYZ| = |\measuredangle XCD| + (180^\circ - |\measuredangle ZAD|) =$$
$$= \frac{1}{2}(\beta + \gamma) + \left(180^\circ - \frac{1}{2}(\beta + \gamma)\right) = 180^\circ.$$

a jsme hotovi s prvním krokem.

2. krok. Označme ještě $\check{S}_{AB}$, $\check{S}_{BC}$, $\check{S}_{DA}$ středy kratších oblouků AB, BC, DA kružnice opsané $ABCD$.





Obr. 64

Jelikož $|\check{S}_{CD}X| = |\check{S}_{CD}Y|$, je přímka XY kolmá na osu úhlu $A\check{S}_{CD}B$, což je přímka $\check{S}_{CD}\check{S}_{AB}$. Pro důkaz, že sousední strany čtyřúhelníku $E_{BDA}E_{CAB}E_{DBC}E_{ACD}$ jsou kolmé, tak stačí dokázat, že $\check{S}_{CD}\check{S}_{AB} \perp \check{S}_{BC}\check{S}_{DA}$. To je ovšem snadné, neboť

$$|\measuredangle \check{S}_{CD}\check{S}_{AB}\check{S}_{DA}| + |\measuredangle \check{S}_{AB}\check{S}_{DA}\check{S}_{BC}| = \frac{1}{2}(\gamma + \delta) + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^\circ.$$

N1.

(Podle *Davida Hrušku.*) a) Sporem, předpokládáme, že prvosudých dvojic je konečně mnoho. Tedy najdeme n takové, že již žádná prvosudá dvojice nebude vyšší než n. Dále si uvědomíme, že existuje nekonečně mnoho lichých prvosudých čísel – například sudé mocniny trojky. Najdeme tedy nějaké takové liché prvosudé číslo k, které je větší než $2n$, například tedy $k = 3^{2n}$.

Nyní víme, že $k-1$, k nesmí tvořit prvosudou dvojici. A současně ji nesmí tvořit k, $k+1$. Takže obě čísla $k-1$ a $k+1$ jsou prvolichá a přitom i sudá. Vydělením dvojkou změníme prvoparitu (odebereme jedno prvočíslo) a získáme prvosudou dvojici $\frac{1}{2}(k-1)$, $\frac{1}{2}(k+1)$ větší než n, čímž získáváme spor. Tedy prvosudých dvojic je nekonečně.

b) Postupujeme obdobně. Najdeme liché prvoliché číslo větší než $2n$, například 3^{2n+1}, čísla kolem něj musí být prvosudá, po vydělení dvěma získáváme prvolichou dvojici.

Druhá séria

A2.

Máme dokázať, že vieme nájsť také dva polynómy. Preto sa pokúsime ich skonštruovať.

Lema. Pre každú množinu n usporiadaných reálnych dvojíc (x_i, y_i), kde $x_i \neq x_j$, pre $i \neq$ $\neq j$, existuje polynóm $Q(x)$ stupňa n s reálnymi koeficientmi a vedúcim koeficientom 1, taký, že $Q(x_i) = y_i$.

Dôkaz. Tento existenčný dôkaz urobíme konštrukciou takého polynómu.

Najprv zostrojíme polynóm $Q'(x)$, ktorý bude prechádzať danými bodmi (x_i, y_i) a bude mať stupeň $n-1$. Tento polynóm dostaneme ako súčet n polynómov $Q_j(x)$, pričom

- $Q_j(x_j) = y_j$
- $Q_j(x_i) = 0$ pre $i \neq j$.

Potom

$$Q'(x_i) = \sum_{j=1}^{n} Q_j(x_i) = y_i.$$

Čiastkové polynómy Q_j majú jasne daných $n-1$ koreňov. Aby navyše prechádzali bodom (x_j, y_j), predelíme ich vhodnou konštantou a dostaneme

$$Q_j(x) = y_1 \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}{(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}.$$

Potom $Q(x)$ dostaneme tak, že ku $Q'(x)$ pripočítame polynóm stupňa n s vedúcim koeficientom 1 a koreňmi $x_1, \dots, x_n$ (lebo taký nezmení hodnoty v bodoch $x_1, \dots, x_i$ a pridá člen x^n). Teda

$$Q(x) = Q'(x) + (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n).$$

Zrejme $Q(x)$ má reálne koeficienty, vedúci koeficient 1 a spĺňa $Q(x_i) = y_i$. Výsledný polynóm tohto typu sa volá Langrangeov interpolačný polynóm. □

Nech je daný polynóm $P(x)$ zo zadania. To, aby $P(x) = Q(x)/2 + R(x)/2$, nebude problém (zostrojíme $Q(x)$ a potom $R(x)$ bude $2P(x) - Q(x)$). Potrebujeme však zaručiť, že oba budú n-tého stupňa a budú mať všetky korene reálne. To, že budú mať oba stupeň n, už vieme dosiahnuť tak, že $Q(x)$ zostrojíme podľa lemy. Zaručiť, aby mali aj n reálnych koreňov, nám pomôže nasledujúce tvrdenie: *Ak pre $x_1 < x_2$ majú $Q(x_1)$ a $Q(x_2)$ rôzne znamienka, potom medzi x_1 a x_2 má polynóm $Q(x)$ reálny koreň.*

Totiž ak je graf $Q(x)$ niekde nad a inde pod x-ovou osou, tak medzi tými dvoma bodmi ju musel pretať (lebo $Q(x)$ je na tom intervale spojitá funkcia).

Teraz chceme zostrojiť vhodné $Q(x)$. Urobíme to pomocou lemy, čiže nám stačí určiť jeho n bodov. Potrebujeme, aby mal n reálnych koreňov, tak budeme tieto body dávať striedavo nad a pod x-ovú os. Aby to platilo aj pre $R(x) = 2P(x) - Q(x)$, musíme ich zároveň dávať striedavo nad a pod $2P(x)$. Keď $Q(a)$ bude kladné a zároveň väčšie ako $2P(a)$, tak potom $R(a)$ bude záporné. Podobne ak $Q(b)$ bude záporné a zároveň menšie ako $2P(b)$, tak potom $R(b)$ bude kladné. Takto dosiahneme, že $Q(x)$ a $R(x)$ budú mať aspoň $n-1$ reálnych koreňov. Avšak všetky polynómy majú párny počet komplexných koreňov, preto posledný koreň $Q(x)$ aj $R(x)$ nemôže byť sám komplexný a teda všetkých n koreňov je reálnych.

Takže pre nejakú rastúcu postupnosť $\{x_i\}_{i=1}^n$ vyberieme postupnosť $\{y_i\}_{i=1}^n$ tak, aby

- pre párne i bolo $y_i = \max\{2P(x_i), 0\} + 1$
- pre nepárne i bolo $y_i = \min\{2P(x_i), 0\} - 1$,

Potom $Q(x)$ zostrojíme podľa lemy tak aby $Q(x_i) = y_i$. Určíme $R(x) = 2P(x) - Q(x)$.

Zrejme takto zvolené $Q(x)$ a $R(x)$ spĺňajú aj vzťah $P(x) = Q(x)/2 + R(x)/2$. Navyše oba majú vedúci koeficient 1, stupeň n, reálne koeficienty, všetky korene reálne. Totiž pre všetky i, $0 < i < n$, majú $Q(x_i)$ (resp. $R(x_i)$) a $Q(x_{i+1})$ (resp. $R(x_{i+1})$) rôzne znamienka. Preto medzi každými x_i a x_{i+1} je aspoň jeden koreň. Teda majú aspoň $n-1$ reálnych koreňov. Lenže oba majú reálne koeficienty, čiže musia mať párny počet komplexných koreňov. Preto budú mať n reálnych koreňov.

C2.

V príkladoch tohto typu je ideálne prísť k rovnostiam hodnôt v nejakých dvojiciach alebo trojiciach bodov. Potom sa tieto dvojice alebo trojice správnym spôsobom pootáčajú alebo poposúvajú a z toho vypadne, že ľubovoľné dva body majú nutne rovnakú hodnotu. Presne takto budeme postupovať.

Uvažujme rovnoramenný lichobežník $ABCD$ s rovnobežnými stranami AD a BC. Navyše predpokladáme, že $ABCD$ nie je zároveň obdĺžnikom. Potom existuje priesečník priamok AB a CD, ktorý si označíme P. Hodnoty v bodoch budeme označovať malými písmenami. Trojuholníky ACP a BDP majú zrejme rovnaký stred vpísanej kružnice I a preto

$$\frac{p+a+c}{3} = i = \frac{p+b+d}{3},$$

odkiaľ dostávame $a + c = b + d$.

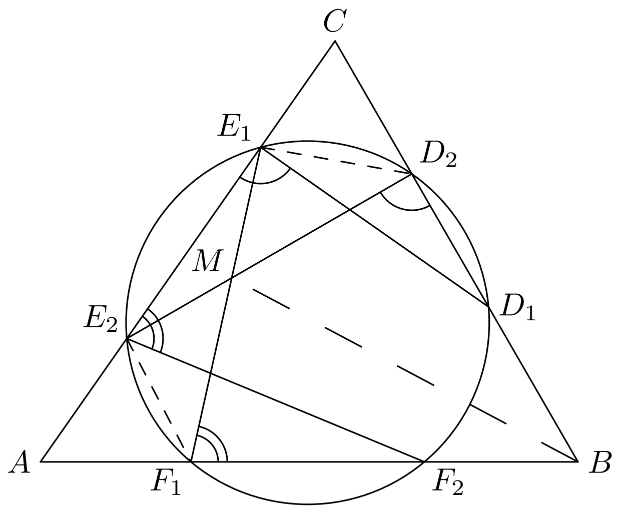
Náš plán nám hovorí, že potrebujeme správnym otáčaním tento vzťah využiť. Počet prstov na ruke je päť a preto si zoberme pravidelný päťuholník $A_1A_2A_3A_4A_5$. Aplikovaním predošlého vzťahu na rovnoramenné lichobežníky $A_1A_3A_4A_5$ a $A_2A_3A_4A_5$ jednoducho dostávame $a_1 + a_4 = a_3 + a_5$ a $a_2 + a_4 = a_3 + a_5$. Z predošlého zrejme vyplýva $a_1 = a_2$.

Aby sme náš dôkaz skompletizovali, tak pre každú dvojicu bodov vieme spätne skonštruovať túto situáciu, a preto sa hodnota každých dvoch bodov musí rovnať.

G2.

(Podľa *Martina Vodičku.*) Máme dokázať, že tri priamky sa pretínajú v jednom bode. Jednou z účinných zbraní je Cèvova veta. Navyše máme k dispozícii kružnicu, ktorá nám dodáva množstvo uhlov, a preto ako schodná cesta sa javí napasovať na úlohu Cèvovu vetu v goniometrickom tvare[21].

[21] Tá hovorí nasledujúce: ak sú body X, Y, Z po rade vnútorné body strán BC, AC, AB trojuholníka ABC, tak priamky AX, BY, CZ prechádzajú jedným bodom práve vtedy, keď $\frac{\sin|\measuredangle ACZ|\cdot\sin|\measuredangle BAX|\cdot\sin|\measuredangle CBY|}{\sin|\measuredangle BCZ|\cdot\sin|\measuredangle CAX|\cdot\sin|\measuredangle ABY|} = 1$.



Obr. 65

Najprv zistíme, čo vieme povedať o sínusoch skúmaných uhlov. Zo sínusovej vety pre trojuholník BMF_1 platí

$$\sin|\measuredangle ABM| = \sin|\measuredangle F_1BM| = |F_1M| \cdot \frac{\sin|\measuredangle BF_1M|}{|BM|}.$$

Analogicky pre trojuholník BMD_2 platí

$$\sin|\measuredangle CBM| = \sin|\measuredangle D_2BM| = |D_2M| \cdot \frac{\sin|\measuredangle BD_2M|}{|BM|}.$$

Podľa vety *uu* sú trojuholníky ME_2F_1 a ME_1D_2 podobné, teda

$$\frac{|F_1M|}{|D_2M|} = \frac{|E_2F_1|}{|E_1D_2|}.$$

Po spojení predchádzajúcich rovností obdržíme

$$\frac{\sin|\measuredangle ABM|}{\sin|\measuredangle CBM|} = \frac{|E_2F_1|}{|E_1D_2|} \cdot \frac{\sin|\measuredangle BF_1M|}{\sin|\measuredangle BD_2M|}.$$

Analogicky dostaneme

$$\frac{\sin|\measuredangle BCN|}{\sin|\measuredangle ACN|} = \frac{|F_2D_1|}{|F_1E_2|} \cdot \frac{\sin|\measuredangle CD_1N|}{\sin|\measuredangle CE_2N|} \qquad \text{a} \qquad \frac{\sin|\measuredangle CAL|}{\sin|\measuredangle BAL|} = \frac{|D_2E_1|}{|D_1F_2|} \cdot \frac{\sin|\measuredangle AE_1L|}{\sin|\measuredangle AF_2L|}.$$

V tomto okamihu už máme všetko prichystané, aby sme využili Cèvovu vetu:

$$\frac{\sin|\measuredangle ABM| \cdot \sin|\measuredangle BCN| \cdot \sin|\measuredangle CAL|}{\sin|\measuredangle CBM| \cdot \sin|\measuredangle ACN| \cdot \sin|\measuredangle BAL|} =$$

$$= \frac{|E_2F_1|}{|E_1D_2|} \cdot \frac{\sin|\measuredangle BF_1M|}{\sin|\measuredangle BD_2M|} \cdot \frac{|F_2D_1|}{|F_1E_2|} \cdot \frac{\sin|\measuredangle CD_1N|}{\sin|\measuredangle CE_2N|} \cdot \frac{|D_2E_1|}{|D_1F_2|} \cdot \frac{\sin|\measuredangle AE_1L|}{\sin|\measuredangle AF_2L|} = 1.$$

V poslednom kroku sme využili rovnosti obvodových uhlov na kružnici. Keďže súčin vyšiel 1, priamky AL, BM a CN sa naozaj pretínajú v jednom bode.

N2.

(Podľa *Anh Dung Le.*) Číslo n nazvime m-rozložiteľné, ak existuje m čísel, ktoré spĺňajú analogické podmienky ako v zadaní. Uveďme najskôr niekoľko pozorovaní.

- Ak n je m-rozložiteľné, tak číslo $l \cdot n$ je tiež m-rozložiteľné:

$$n = \sum_{i=1}^{m} a_i \quad \Rightarrow \quad l \cdot n = \sum_{i=1}^{m} l \cdot a_i.$$

- Číslo, ktoré sa dá zapísať v tvare p^{m-1}, je m-rozložiteľné:

$$p^{m-1} = 1 + (p-1) + p(p-1) + p^2(p-1) + \ldots + p^{m-2}(p-1).$$

Teraz dokážeme indukciou pomocné tvrdenie: *Pre každé prirodzené m existuje iba konečne veľa prvočísel, ktoré nie sú m-rozložiteľné.*

Dôkaz. Množinu takých prvočísel označme M_m. Pre $m = 1$ tvrdenie platí triviálne. Predpokladajme, že platí pre nejaké $m = k - 1$. Pozrime sa teraz na prvočísla q väčšie ako $2 \cdot \prod p_i^{k-2} + 1$, kde p_i sú prvočísla z množiny M_{k-1}. Ukážeme, že číslo $\frac{1}{2}(q-1)$ je $(k-1)$-rozložiteľné.

Ak obsahuje $\frac{1}{2}(q-1)$ prvočíslo, ktoré nie je v M_{k-1}, tak zrejme je $(k-1)$-rozložiteľné. Ak obsahuje iba prvočísla z M_{k-1}, tak musí obsahovať niektoré prvočíslo aspoň v mocnine $k-2$ (inak by q bolo menšie ako $2 \cdot \prod p_i^{k-2} + 1$). Číslo $\frac{1}{2}(q-1)$ je teda rozložiteľné na nejaké $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$, ktoré vyhovujú zadaniu a q potom vieme rozložiť na $1, 2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_{k-1}$, takže q je k-rozložiteľné. M_k je teda konečná pre každé prirodzené k. $\square$

O čísle n vieme povedať, že ak obsahuje nejaké prvočíslo p, ktoré je m-rozložiteľné, tak aj n je m-rozložiteľné. Ďalej, ak obsahuje niektoré prvočíslo v mocnine aspoň $m-1$, tak je takisto m rozložiteľné. Teda jediné čísla, ktoré nie sú m-rozložiteľné, sú iba tie, ktoré zároveň

- obsahujú iba provočísla z M_m;
- obsahujú každé prvočíslo v mocnine najviac $m-2$.

Tých je ale zrejme konečný počet. Riešenie našej úlohy dostaneme ako špeciálny prípad $m = 2012$.

Tretia séria

A3.

(Podle *Štěpána Šimsy.*) V celém řešení budeme hranatými závorkami $[r, s]$ značit dosazení $x = r$, $y = s$.

Dosaďme nejprve $[0,1]$. Dostaneme

$$f(0)+f(0)=f(0),$$

odkud $f(0)=0$.

Předpokládejme nyní pro spor, že $f(1)\neq 0$. Dosazením $[x/f(1),1]$ obdržíme

$$f(x)=x,$$

což je ovšem ve sporu s omezeností (shora) funkce f (platilo by totiž $f(M)=M$). Platí tedy $f(1)=0$.

Dále dosazením $[1,y]$ získáme

$$f(f(y))=2f(y). \tag{1}$$

Dokážeme nyní, že pro všechna $x\in\mathbb{R}$ platí $f(x)\leqq 0$. Předpokládejme, že existuje nějaké x_0, pro něž je $f(x_0)>0$. Definujme rekurzivně rostoucí posloupnost kladných čísel $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ předpisem $y_1=f(x_0)$, $y_n=f(y_{n-1})$ pro $n>1$. Dle (1) lze rekurenci přepsat na $y_n=2y_{n-1}$, neboli $y_n=2^{n-1}f(x_0)$. Protože je $f(x_0)>0$, jistě nalezneme takové n, že $2^nf(x_0)\geqq M$, ovšem $2^nf(x_0)=y_{n+1}=f(y_n)$, což vede ke sporu $f(y_n)\geqq$ $\geqq M$. Dostáváme tedy

$$f(x)\leqq 0 \quad \text{pro každé } x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Všimněme si nyní, že nulová funkce $f(x)=0$ vyhovuje zadání, a předpokládejme dále, že existuje x_0 takové, že $f(x_0)\neq 0$, tedy $f(x_0)<0$ díky (2). Ukážeme sporem, že pak už musí být f záporná ve všech záporných číslech: nechť tedy nějaké $y_0<0$ splňuje $f(y_0)=0$. Dosazení $[x_0,y_0]$ dává

$$0<y_0f(x_0)=f(x_0y_0),$$

což je spor s (2). Platí tedy

$$f(x)<0 \quad \text{pro každé } x<0. \tag{3}$$

Dosaďme nyní $[x,y]$ a $[y,x]$ a získané rovnosti sečtěme. Obdržíme rovnost

$$f\bigl(xf(y)\bigr)+f\bigl(yf(x)\bigr)=2f(xy),$$

do které dále (pro $x\neq 0$) dosadíme $[x,1/x]$:

$$f\left(xf\left(\frac{1}{x}\right)\right)+f\left(\frac{f(x)}{x}\right)=2f(1)=0.$$

Vzhledem k nekladnosti f jsou nutně oba sčítance na levé straně rovny 0, to však podle (3) znamená, že jejich argumenty musí být nezáporné. Musí tedy platit $f(x)/x\geqq 0$, což pro $x>0$ znamená $f(x)\geqq 0$ a v kombinaci s (2) je tedy

$$f(x)=0 \quad \text{pro každé } x>0. \tag{4}$$

Konečně dosaďme $[-1,-y]$, kde $y<0$. Díky (4) zůstane jen

$$-yf(-1)=f(y),$$

f je tedy na záporných číslech tvaru $f(x)=Cx$, kde $C=-f(-1)>0$. Dosazením dle tohoto předpisu do (1) zjistíme, že $C^2=2C$, neboli $C=2$ díky $C>0$.

V úvahu tedy připadá jen jediná funkce, a to

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{pro } x\geqq 0;\\ 2x & \text{pro } x<0.\end{cases}$$

Ta zřejmě splňuje podmínku (i) ze zadání. Podmínka (ii) se snadno ověří postupným vyzkoušením všech čtyř možností znamének x a y.

C3.

Díky pravidlu (iii) mohl být každý běžec předběhnut maximálně $n-1$ běžci, minimálně žádným, to je n možností. Kvůli pravidlu (ii) byli jednotliví běžci předběhnuti žádným, jedním, dvěma, …, až $n-1$ běžci. Celkový počet předběhnutí tak činí

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

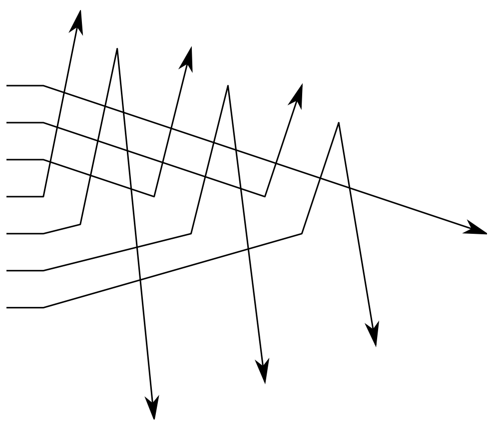
Spočítáme, kolik běžců každý běžec předběhnul, podle (i) to bude konstantní celé číslo:

$$\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n}=\frac{n-1}{2}.$$

Aby to bylo celé číslo, musí být počet běžců lichý. Ukážeme příklad, jak by se běžci mohli předbíhat pro obecné liché n.

Nejprve vyšleme prostředního běžce do cíle, pak běžec který byl těsně za ním, všechny před ním předběhne (kromě toho, kdo je už v cíli), následně usne a nechá se předběhnout všemi běžci na trati. Tím zbude $n-2$ běžících běžců. Provádíme takovou operaci tak dlouho, dokud nezbude jen jeden běžící běžec. Pak všechny běžce probudíme a necháme bez předbíhání dojít do cíle.

Schéma na obr. 66 ilustruje situaci pro 7 běžců, jak se předbíhají (zdola nahoru) v čase (zleva doprava).



Obr. 66

Vyslání jednoho běžce dopředu a jednoho dozadu nazveme kolem, kola informaticky očíslujeme $0, 1, \ldots, \frac{1}{2}(n-3)$. Běžce, který v kole k doběhne do cíle, nazveme k-rychlík, toho, který v kole k usne, nazveme k-spáč. Běžce, který na konci zbude nazveme středník.

Pro $k \geqq 1$ je na začátku k-rychlík těsně před $(k-1)$-rychlíkem a k-spáč je těsně za $(k-1)$-spáčem. Středník je na začátku závodu první. Ověříme platnost podmínek (i), (ii), (iii):

(i) V kole k předběhne k-rychlík i k-spáč $\frac{1}{2}((n-2k)-1)$ běžců, v každém předchozím kole jednoho spáče, takže celkem oba předběhnou běžců

$$\frac{(n-2k)-1}{2} + k = \frac{n-1}{2}.$$

Středník v každém kole předběhne jednoho spáče, tedy celkem zas $\frac{1}{2}(n-1)$ běžců.

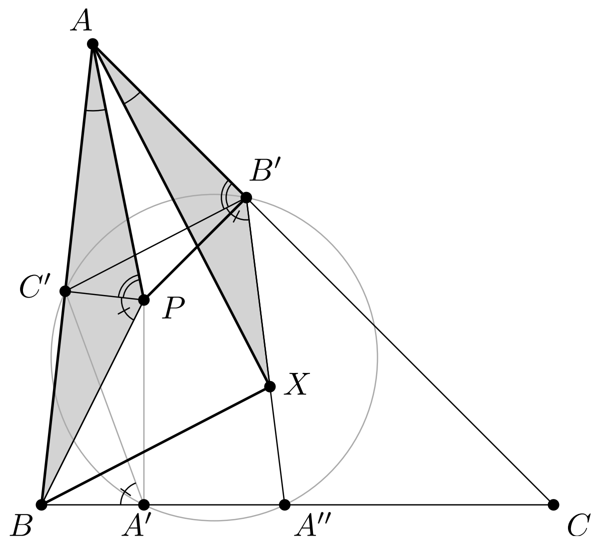
(ii) V kole k je k-spáč předběhnut $n-2(k+1)$ běžci, před tím není předběhnut nikdy. Tito běžci se navzájem liší v počtu předběhnutí jinými běžci a dané číslo je u nich vždy liché.

Zato k-rychlík je v každém kole menším než k předběhnut dvakrát – spáčem a rychlíkem, v kole k pak vůbec. Celkem je předběhnut $2k$-krát. Ze stejného důvodu je středník předběhnut $2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)$-krát. Tedy tito běžci jsou předběhnuti sudými navzájem různými počty běžců.

(iii) V kole k se každého předběhnutí dvou běžců účastní k-rychlík nebo k-spáč, po tomto kole se už žádného předbíhání neúčastní. Stačí si tak uvědomit, že je podmínka (iii) splněna v každém kole zvlášť.

G3.

(Podle *Martina Vodičky.*) Máme-li dokázat $|\measuredangle AXB| = 90°$, máme vlastně dokázat podobnost trojúhelníků AXB a $AB'P$, neboť $|\measuredangle BAX| = |\measuredangle PAB'|$ a $|\measuredangle AB'P| = 90°$.



Obr. 67

Trojúhelníky AXB a $AB'P$ jsou si podobné právě tehdy, když jsou si podobné trojúhelníky APB a $AB'X$ (obojí je ekvivalentní rovnosti poměrů $|AB| : |AP| = |AX| : |AB'|$).

Druhou podobnost však snadno vyúhlíme. Ze zadání máme $|\measuredangle BAP| = |\measuredangle XAB'|$ a z tětivových čtyřúhelníků $AC'PB'$, $A'A''B'C'$ a $BA'PC'$ plyne

$$\begin{aligned}|\measuredangle AB'X| &= |\measuredangle AB'C'| + |\measuredangle C'B'X| = |\measuredangle APC'| + |\measuredangle C'A'B| = \\ &= |\measuredangle APC'| + |\measuredangle C'PB| = |\measuredangle APB|\end{aligned}$$

nezávisle na tom, v jakém pořadí leží body A', A'' na straně BC. Podle věty *uu* jsou trojúhelníky APB a $AB'X$ podobné a my jsme hotovi.

N3.

a) Ano, taková čísla existují. Například 2011-prvková množina

$$\{1,\, 2,\, 3,\, 3\cdot 2,\, 3\cdot 2^2,\, \dots,\, 3\cdot 2^{2008}\}$$

má požadovanou vlastnost, neboť součet jejích prvků je $1+2+3(2^{2009}-1) = 3\cdot 2^{2009}$, což je skutečně dělitelné každým z uvedených čísel.

Poznámka. Tato čísla lze nalézt například tak, že začneme od množiny $\{1,2,3\}$, která má vlastnost ze zadání, a v každém kroku ji rozšíříme o součet prvků v ní obsažených.

b) Sporem ukážeme, že taková čísla neexistují. Mějme tedy přirozená čísla $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2011}$ mající vlastnost ze zadání a jejich součet označme S. Spor budeme hledat v tom, že S má „příliš mnoho“ „příliš velkých“ dělitelů.

Nejprve si uvědomme, že

$$\frac{S}{a_{2011}} < \frac{2011\cdot a_{2011}}{a_{2011}} = 2011.$$

Pak jsou ovšem hodnoty podílů

$$\frac{S}{a_{2011}+a_1},\quad \frac{S}{a_{2011}+a_2},\quad \dots,\quad \frac{S}{a_{2011}+a_{2010}}$$

navzájem různá přirozená čísla, přičemž každé z nich je menší než 2011 a větší než 1. To je ovšem spor, neboť ostře mezi 1 a 2011 tolik přirozených čísel není.

ŠTVRTÁ SÉRIA

A4.

Zaveďme štandardné označenie

$$[x,y,z] := \sum_{\text{sym.}} a^x b^y c^z = a^x b^y c^z + a^x b^z c^y + a^y b^x c^z + a^y b^z c^x + a^z b^x c^y + a^z b^y c^x.$$

Tu si treba dať pozor, že potom platí napr.

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{sym.}} a^3b^2c^2 = \sum_{\text{cykl.}} a^3b^2c^2 = a^3b^2c^2 + a^2b^3c^2 + a^2b^2c^3 \neq \sum_{\text{sym.}} a^3b^2c^2.$$

Keď teraz roznásobíme celú zadanú nerovnosť, dostaneme

$$\begin{aligned}[4,2,0] + [4,1,1] + [3,3,0] + 8[3,2,1] + \tfrac{5}{2}[2,2,2] \leqq \\ \leqq 3[4,2,0] + \tfrac{3}{2}[4,1,1] + \tfrac{3}{2}[3,3,0] + 6[3,2,1] + \tfrac{3}{2}[2,2,2].\end{aligned} \tag{1}$$

Po odčítaní rovnakých členov z nej zostane iba

$$2[3,2,1] + [2,2,2] \leqq 2[4,2,0] + \tfrac{1}{2}[4,1,1] + \tfrac{1}{2}[3,3,0].$$

Jedna z účinných zbraní na symetrické polynomické nerovnosti nezáporných čísel je Muirheadova nerovnosť[22], podľa ktorej platí

$$\begin{aligned}2[2,3,1] &\leqq 2[4,2,0],\\ \tfrac{1}{2}[2,2,2] &\leqq \tfrac{1}{2}[4,1,1],\\ \tfrac{1}{2}[2,2,2] &\leqq \tfrac{1}{2}[3,3,0].\end{aligned}$$

Jednoduchým sčítaním dostaneme (1). Pretože sme používali iba ekvivalentné úpravy, dokázali sme aj pôvodnú nerovnosť.

C4.

Usporiadanie $(1, 2, \dots, n, 0)$ nazvime *trefné*. Ak $n = 1$ alebo 2, tak vidíme, že počiatočné usporiadanie je trefné. Predpokladajme teraz $n > 2$. Ak n je párne, tak po $\frac{1}{2}(n-2)$ ťahoch dostaneme usporiadanie začínajúce 1, n, 0, … V tomto usporiadaní už nie je možný ďalší ťah a ani nie je trefné. Preto n musí byť nepárne.

Usporiadanie nazvime (s,t)-schodisko ak s je prirodzené, t je celé nezáporné a sú splnené podmienky:

- usporiadanie začína číslami $1, 2, \dots, s-1, 0$;
- potom sa v ňom striedajú t-tice a s-tice čísel, z ktorých každá obsahuje najväčšie dovtedy nepoužité čísla zoradené vzostupne.

Ak $s+t \mid n+1$ a zároveň $t > 0$ tak po $(n+1)/(s+t)$ ťahoch z (s,t)-schodiska dostaneme $(s+1, t-1)$-schodisko. Opakovaním postupu dostaneme $(s+t, 0)$- schodisko. Nech $s \mid n+1$. Potom ak $2s \nmid n+1$, tak z $(s,0)$-schodiska po $(n+1)/s - 2$ ťahoch dostaneme usporiadanie, ktoré nie je trefné a zároveň už nie je možný ďalší ťah. Ak $2s \mid n+1$, tak $(s,0)$-schodisko je zároveň aj (s,s)-schodiskom. Z (s,s)-schodiska dostaneme po konečnom počte ťahov $(2s,0)$-schodisko.

Teraz sme pripravený dokázať, že ak $n > 2$, tak $n+1 = 2^r$ pre r prirodzené. Kedže $n+1$ je párne, môžeme ho napísať ako $n+1 = 2^r q$, kde q je nepárne. Po $\frac{1}{2}(n-1)$ ťahoch

[22] Poz. napr. *http://mks.mff.cuni.cz/archive/29/9.pdf*

dostaneme z pôvodného usporiadania $(2, 0)$-schodisko. Ak $r > 1$, tak po konečnom počte ťahov dostaneme $(2^r, 0)$-schodisko, lebo $2^k \mid n + 1$ pre $k \in \{1, 2, \dots, r - 1\}$. Ak $q = 1$, tak naše schodisko je trefné usporiadanie. Ak $q > 1$, tak po $q - 2$ ťahoch vznikne usporiadanie, kde n je naľavo od 0 a nie je trefné. Teda trefné usporiadanie sa dá konečným počtom ťahov získať iba pre $n = 2$, alebo ak $n + 1$ je mocninou 2.

G4.

(Podľa *Martina Vodičku.*) Body $EFGH$ tvoria v tomto poradí tetivový štvoruholník, preto podľa Ptolemaiovej vety

$$|EG| \cdot |FH| = |EF| \cdot |GH| + |FG| \cdot |HE|.$$

Označme r polomer kružnice k a veľkosti uhlov $|\measuredangle BAD| = \alpha$ a $|\measuredangle ABC| = \beta$. Keďže na kružnici k je H stred oblúka AD, na ktorom neleží B, tak HB je os uhla ABD; obdobne GB je os uhla CBD. Teda $|\measuredangle HBG| = \frac{1}{2}|\measuredangle ABC| = \frac{1}{2}\beta$. Z predchádzajúceho môžeme použitím sínusových viet vyjadriť dĺžky

$$\begin{aligned} |AC| &= 2r \sin \beta, & |BD| &= 2r \sin \alpha, \\ |GH| &= 2r \sin \frac{\beta}{2}, & |EF| &= 2r \sin \frac{\pi - \beta}{2}, \\ |FG| &= 2r \sin \frac{\alpha}{2}, & |HE| &= 2r \sin \frac{\pi - \alpha}{2}. \end{aligned}$$

Po dosadení týchto vzťahov postupne dostávame

$$\begin{aligned} |EG| \cdot |FH| = |EF| \cdot |GH| + |FG| \cdot |HE| &= 4r^2 \sin \frac{\pi - \beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} + 4r^2 \sin \frac{\pi - \alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = \\ &= 4r^2 \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} + 4r^2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = 2r^2 \sin \beta + 2r^2 \sin \alpha, \end{aligned}$$

pričom sme využili, že $2 \sin \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\beta = \sin \beta$.

Takisto dosadením obdržíme

$$|AC| \cdot |BD| = 4r^2 \sin \alpha \sin \beta.$$

Vďaka nenulovosti r môžeme predeliť a podmienka zo zadania sa redukuje na ekvivalentnú podmienku

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \sin \alpha + \sin \beta.$$

Zrejme $\alpha, \beta \in (0, \pi)$, a preto $\sin \alpha, \sin \beta \in (0, 1\rangle$. Takže $\sin \alpha \sin \beta \leqq \sin \alpha$ a takisto $\sin \alpha \sin \beta \leqq \sin \beta$. Sčítaním týchto nerovníc dostávame

$$2 \sin \alpha \sin \beta \leqq \sin \alpha + \sin \beta.$$

Rovnosť nastane, iba ak bude rovnosť v oboch čiastkových nerovniciach, a to je práve vtedy, keď $\alpha = \frac{\pi}{2} = \beta$. Preto $ABCD$ je vždy obdĺžnik a tvrdenie zo zadania triviálne platí, dokonca hľadaný spoločný priesečník je stred kružnice k.

N4.

Číslo n je celé, pretože

$$2^{2p} - 1 \equiv 4^p - 1 \equiv 1^p - 1 \equiv 0 \pmod{3}.$$

Našim cieľom bude ukázať, že $n \mid 2^{2p} - 1$ a $2p \mid n - 1$. Zo zadania $3n = 2^{2p} - 1$, takže $n \mid 2^{2p} - 1$, čo vieme zapísať ako

$$2^{2p} \equiv 1 \pmod{n}. \tag{1}$$

Využitím Malej Fermatovej vety máme

$$\begin{aligned} &p \mid 4^{p-1} - 1 = 2^{2p-2} - 1, \\ &p \mid 2^{2p-2} - 1 \mid 2^{2p} - 4 = 3(n-1). \end{aligned}$$

Ľahko si všimneme, že n je nepárne, preto $2|n - 1$. Keďže p je prvočíslo väčšie ako 3, $(p, 3) = (p, 2) = 1$. Z týchto pozorovaní priamo dostávame $p \mid n-1$, a hneď aj $2p \mid n-1$. Preto existuje celé číslo k také, že

$$k \cdot 2p = n - 1. \tag{2}$$

Nakoniec dáme dokopy všetko, čo už máme (využijeme (2) a (1)):

$$2^n - 2 = 2(2^{n-1} - 1) = 2(2^{k \cdot 2p} - 1) = 2((2^{2p})^k - 1) \equiv 2(1^k - 1) = 0 \pmod{n}.$$

Teda $n \mid 2^n - 2$, čo sme mali dokázať.

Piata séria

C5.

Dokážeme, že podmínka na N ze zadání je ekvivalentní s $N \geqq 8$. Hranatými závorkami budeme v celém řešení značit kroky. Nejprve indukcí dokážeme, že pro $N \geqq 8$ je již podmínka ze zadání splněna. Jistě nám k tomu bude stačit, když ukážeme, že za této podmínky umíme pomocí nějaké posloupnosti kroků změnit stav libovolné žárovky a stavy ostatních žárovek přitom nezměnit.

Pomocí kroků $[1, 4, 7]$, $[4, 5, 6]$, $[5, 6, 7]$ lze změnit stav (jen) žárovky 1, stejně tak pomocí kroků $[2, 5, 8]$, $[5, 6, 7]$, $[6, 7, 8]$ změníme stav žárovky 2. Předpokládejme nyní, že umíme změnit stav žárovek n a $n + 1$, ukážeme, že umíme změnit stav žárovky $n + 2$ (samozřejmě za předpokladu $n+2 \leqq N$). To provedeme tak, že změníme stav žárovkám n a $n+1$ (což umíme dle předpokladu) a následně krokem $[n, n+1, n+2]$ těmto dvěma stav vrátíme a změníme stav $n+2$. Tím je dokázáno, že pro Nejprve indukcí dokážeme, že pro $N \geqq 8$ umíme změnit stav kterékoliv žárovky.

Nyní ukážeme, že pro $N < 8$ nejsme schopni zhasnout všechny žárovky např. pokud je na začátku rozsvícena pouze žárovka 2 (případ $N = 1$ je triviální). Rozdělme žárovky do tří skupin Z_0, Z_1, Z_2 podle jejich zbytku po dělení třemi. Snadno zjistíme, že každý krok buď přepne jednu žárovku v každé skupině, nebo tři žárovky v jedné skupině – pro $N < 8$ je ovšem jediným takovým krokem $[1, 4, 7]$. Stavy žárovek ze Z_0, Z_2 lze tedy měnit jen pomocí tahů, které mění stav jedné žárovky v každé skupině, tím pádem každá změna stavu nějaké žárovky v Z_0 nutně znamená i změnu stavu jedné žárovky v Z_2 a naopak. Mají-li tedy na začátku počty svítících žárovek v Z_0 a Z_2 různou paritu (což je např. když je rozsvícena pouze žárovka 2), budou ji mít i po libovolné posloupnosti kroků, nelze tedy dosáhnout zhasnutí všech žárovek.

N5.

Nejprve si dokážeme pomocné lemma:

Lemma. Pro přirozené číslo $k > 1$ existuje přirozené číslo $r < k$ s následující vlastností: Pro libovolná přirozené čísla $x, y \geqq k$ splňující navíc $r \mid x - y$ platí $k \mid 2^x - 2^y$.

Důkaz. Podívejme se na posloupnost $z_n = 2^n \bmod k$. Její hodnoty nabývají pouze $0, 1, 2, \dots, k-1$ a navíc je možné na tuto posloupnost nahlížet jako na posloupnost danou rekurentním vztahem $z_n = 2z_{n-1} \bmod k$ pro $n \geqq 1$. Pokud se mezi prvky $z_0, z_1, \dots, z_{k-1}$ této posloupnosti vyskytuje nějaká nula, všechny prvky za ní jsou už nulové, stačí tedy zvolit $r = 1$ a bude platit $r \mid 2^x$ pro libovolné $x \geqq k$, tedy i $r \mid 2^x - 2^y$.

Pokud se mezi prvními k hodnotami nula nevyskytuje, nějaká hodnota se musí objevit dvakrát. Nechť tedy $z_i = z_j$, pro $i < j < k$. Díky tomu, že posloupnost z_n splňuje rekurentní předpis, tak

$$z_{i+1} = z_{j+1}, \quad z_{i+2} = z_{j+2}, \quad \dots, \quad z_{i+n} = z_{j+n}$$

Zvolme $r = j - i$. Potom $z_n = z_{n+r} = z_{n+cr}$ pro libovolné $n \geqq i$ a celé $c \geqq 0$. Když dostaneme přirozená čísla $x, y \geqq k$ splňující $r \mid x - y$, označíme n jako menší z x, y a to druhé z nich budeme považovat za $n + cr$. Protože $i < k$, tak $n \geqq i$, a tedy $z_x = z_y$. Z toho již plyne, že $k \mid 2^x - 2^y$. □

A nyní se vrátíme k naší úloze. Označme

$$a_n = \underbrace{2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{n}.$$

Indukcí podle n dokážeme, že pro přirozené číslo n splňující $n > 1$ platí $n \leqq a_{n-1}$ a navíc pro libovolné přirozené $k \leqq n$ platí

$$k \mid a_n - a_{n-1}.$$

Pro první indukční krok $n = 2$ snadno spočítáme $a_2 - a_1 = 2$, což je dělitelné jak jedničkou, tak dvojkou a $n = 2 \leqq 2 = a_1$.

Nyní předpokládejme, že tvrzení platí pro n a dokažme ho pro $n+1$. Nejprve ověříme nerovnost, $n + 1 \leqq 2^n \leqq 2^{a_{n+1}}$.

Pro $k = 1$ platí tvrzení zřejmě. Zvolme k splňující $1 < k \leqq n$. Podle lemmatu existuje $r < k$ takové, že $k \mid 2^x - 2^y$ kdykoli $x, y \geqq k$ a $r \mid x - y$. Protože $r < k \leqq n + 1$, platí

$r \leqq n$. Využijeme indukční předpoklad $r \mid a_n - a_{n-1}$. Dále platí $n \leqq a_{n-1} < a_n$, tedy předpoklady lemmatu jsou splněny pro $x = a_{n-1}$, $y = a_n$. Tedy

$$k \mid 2^{a_n} - 2^{a_{n-1}}.$$

A5.

(Podle *Štěpána Šimsu.*) Nejprve si uvědomíme, že pro čísla a_l, a_p splňující $a_l - a_p = 1$ platí $|l - p| < k$. Tedy vzdálenost[23] dvou čísel v posloupnosti lišících se o jedničku je menší než k.

Nejprve dokážeme $a_n - n < \frac{1}{2}k^2$. Pro spor předpokládejme, že existuje n takové, že $a_n - n \geqq \frac{1}{2}k^2$.

Vezměme nejmenší číslo, které není mezi čísly $a_1, \dots, a_{n-1}$. Protože je někde v naší posloupnosti, označíme si ho a_z. Protože je těchto čísel $n-1$ a $n < a_n$, platí $a_z \leqq n < a_n$ a protože je až za číslem $n - 1$, máme $z \geqq n$.

Vezmeme číslo a_y takové, že $a_y \geqq a_n$ a $|y - z|$ je minimální (tedy nejbližší číslo posloupnosti velké aspoň a_n). Ze zadání máme

$$\frac{|a_y - a_z|}{|y - z|} < k, \quad \text{tedy} \quad |y - z| > \frac{|a_y - a_z|}{k} = \frac{a_y - a_z}{k} \geqq \frac{a_n - n}{k} > \frac{n + \frac{1}{2}k^2 - n}{k} = \frac{1}{2}k.$$

Tedy mezi prvky a_i naší posloupnosti, kde $i \in \langle z - \frac{1}{2}k, z + \frac{1}{2}k\rangle \cap \mathbb{N}$, není číslo velké aspoň a_n. To je ale aspoň $\lfloor k \rfloor$ čísel. Vezměme největší číslo před těmito prvky posloupnosti. To musí být alespoň a_n. Číslo o jedna větší musí být tedy až za touto posloupností, tedy jejich vzdálenost je větší než k. To je spor a $a_n - n < \frac{1}{2}k^2$ pro všechna n.

Naše posloupnost je prostá a na, tedy existuje něco jako „inverzní“ posloupnost b_n taková že $b_{a_n} = n$. Protože posloupnost b_n splňuje stejné podmínky jako a_n, platí $b_m - m < \frac{1}{2}k^2$ pro všechna m. Pokud položíme $a_n = m$, dostaneme $n - a_n < \frac{1}{2}k^2$ pro všechna n.

Celkově tedy dostáváme $|a_n - n| < \frac{1}{2}k^2$, což jsem chtěli dokázat.

G5.

Úlohu lze řešit mnoha způsoby. My uvedeme jeden standardní, jeden trikový a nastíníme jeden „dospělý“.

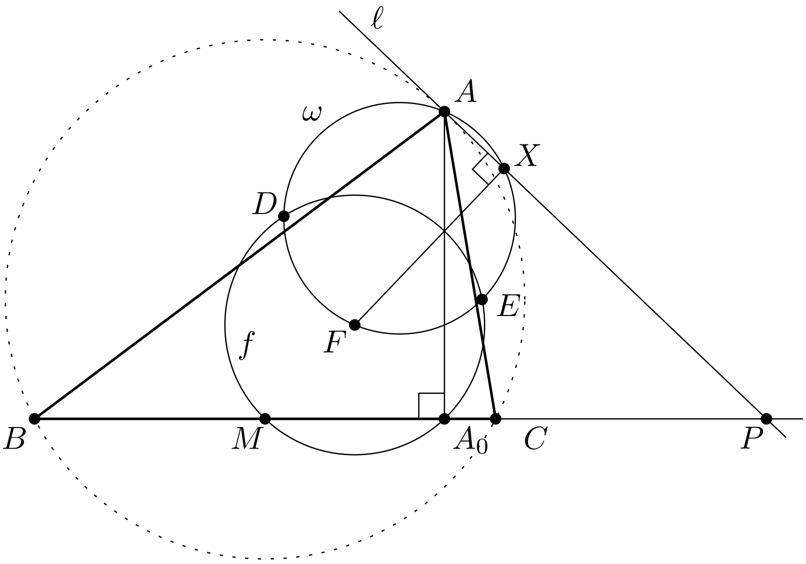
Standardní řešení. Označme f Feuerbachovu kružnici[24] trojúhelníka ABC a F její střed. Jelikož AD, AE jsou tečny k f, je $|\measuredangle ADF| = |\measuredangle AEF| = 90°$, takže body D, E lze definovat jako průsečíky f s kružnicí nad průměrem AF, kterou označíme ω. Přímka DE je pak chordálou f a ω.

---

[23] Vzdáleností čísel x, y myslíme číslo $|x - y|$.

[24] Feuerbachova kružnice (či kružnice devíti bodů) daného trojúhelníka je kružnice procházející středy jeho stran, patami výšek a středy spojnic vrcholů s jeho ortocentrem.

Označme ℓ tečnu ke kružnici opsané trojúhelníku ABC vedenou bodem A a P její průsečík s přímkou BC (ten existuje, neboť $AB \neq AC$). Budeme hotovi, ukážeme-li, že P má stejnou mocnost k f jako k ω.

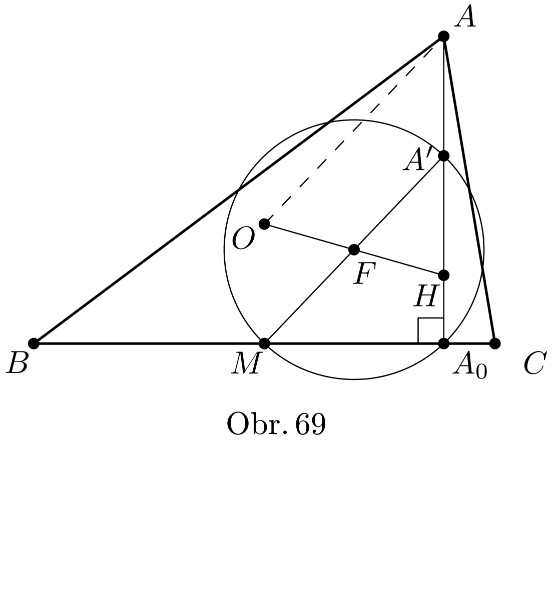


Obr. 68

Kružnice f protne BC ve středu M strany BC a v patě výšky A_0 z bodu A. Označme X druhý průsečík ω a ℓ. Stačí ukázat, že $|PM|\cdot|PA_0| = |PA|\cdot|PX|$, neboli že čtyřúhelník MA_0XA je tětivový.

Jelikož $|\measuredangle AA_0M| = 90°$, stačí ukázat $|\measuredangle AXM| = 90°$. My ale víme, že $|\measuredangle AXF| = 90°$ (AF je průměr ω), takže zbývá ukázat, že body M, X, F leží v přímce, neboli že MF je kolmá na ℓ. Tím jsme se definitivně zbavili bodů D a E i kružnice ω a převedli úlohu na jednoduché tvrzení o trojúhelníku, které lze dokázat například následovně:

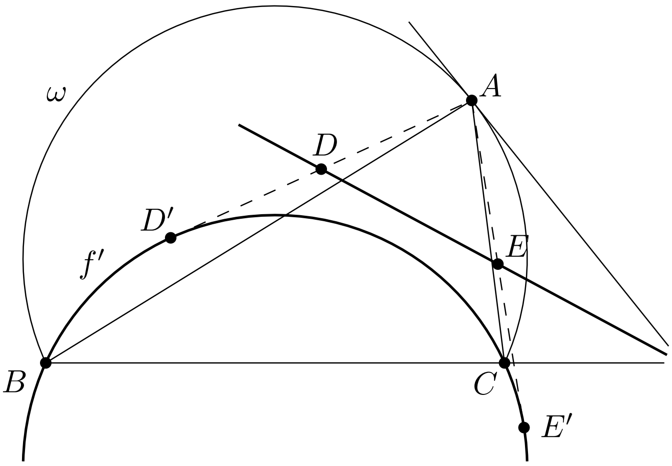
Označme H ortocentrum trojúhelníka ABC a A' druhý průsečík f a výšky AA_0. Pak $|\measuredangle A'A_0M| = 90°$, takže MA' je průměr kružnice f. Zároveň ve stejnolehlosti se středem H a koeficientem 2 přejde f na kružnici opsanou trojúhelníku ABC, takže speciálně F přejde na O a A' na A. V trojúhelníku OHA je tedy FA' střední příčka a jelikož OA je kolmá na ℓ, je na ni kolmá i MF.



Obr. 69

Trikové řešení. Opět využijeme mocnost, tentokrát však podstatně důmyslněji. Symbolem $p(X, \omega)$ budeme značit mocnost bodu X ke kružnici ω.

Označme f' obraz kružnice opsané středům stran trojúhelníku ABC ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem 2 a D', E' obrazy bodů D, E. Jelikož původní kružnice procházela středy stran, prochází f' body B a C. Přímka BC je proto chordálou f' a kružnice opsané trojúhelníku ABC, kterou budeme nadále značit ω.



Obr. 70

Vnímejme nyní bod A jako kružnici se středem A a nulovým poloměrem. Pak

$$p(D, A) = |DA|^2 = |DD'|^2 = p(D, f')$$

a podobně $p(E, A) = p(E, f')$, takže DE je chordála kružnice f' a bodu A.

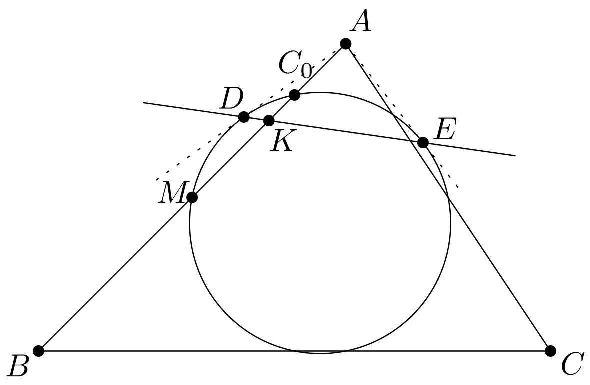
Chordálou kružnice ω a bodu A je tečna k ω vedená bodem A. Všechny tři přímky proto skutečně procházejí jedním bodem – potenčním středem kružnic f', ω a bodu A.

Nástin dospělého řešení. Označme M střed strany AB, C_0 patu výšky z vrcholu C a K průsečík AB a DE.

Jelikož DE je polára bodu A vzhledem ke kružnici opsané středům stran trojúhelníku ABC, je čtveřice $(A, K; C_0, M)$ díky známému tvrzení harmonická[25]. Délky úseček AC_0 a AM umíme vyjádřit pomocí délek stran trojúhelníku ABC, takže umíme vyjádřit i délky KC_0, KM, potažmo AK, KB.

Podobně umíme vyjádřit i poměr, v jakém přímka DE dělí stranu AC. Označíme-li tedy X průsečík DE a BC, můžeme pomocí Menelaovy věty vyjádřit poměr $|XB| : : |XC|$.

[25] Pro stručné obeznámení s tím, co to je harmonická čtveřice, lze přečíst například článek *http://mks.mff.cuni.cz/library/Harmonicky4PomerTP/Harmonicky4PomerTP.pdf.*



Obr. 71

Označíme-li Y průsečík BC a tečny ke kružnici opsané trojúhelníku ABC, pak poměr $|YB| : |YC|$ snadno vyjádříme pomocí sinové věty v trojúhelnících ABY a ACY. Jak se ukáže, vyjde tatáž hodnota jako pro X (konkrétně $|AB|^2 : |AC|^2$), takže body X a Y splývají a my jsme hotovi.

Šiesta séria

N6.

Ak prirodzené číslo n spĺňa zadanú podmienku, tak $n = 2^m - 1$ pre nejaké prirodzené číslo m. Ľahko overíme, že jediné vyhovujúce $m < 10$ je 3.

Majme $m \geqq 10$. Dokážeme, že $n = 2^m - 1$ nemôže vyhovovať podmienke zo zadania. Pre spor predpokladajme, že pre nejaké $k \geqq 1$ a $n_1, n_2, \ldots, n_k$ platí

$$10 \leqq m = \frac{1}{2^k}(n_1 - 1)(n_2 - 2) \cdots (n_k - 1).$$

Pre $l \geqq 10$ ľahko ukážeme, že $2^l - 1 > l^3$. Preto

$$2^m - 1 > m^3 = \left(\frac{n_1 - 1}{2}\right)^3 \left(\frac{n_2 - 1}{2}\right)^3 \cdots \left(\frac{n_k - 1}{2}\right)^3.$$

Keďže $n = 2^m - 1$ je nepárne, všetky $n_i > 3$ musia byť nepárne, teda všetky n_i sú aspoň 5. Takže

$$\left(\frac{n_i - 1}{2}\right)^3 \geqq 4 \cdot \frac{n_i - 1}{2} > n_i$$

pre $i = 1, 2, \ldots, k$. Dokopy s predošlým tak máme

$$n = 2^m - 1 > n_1 n_2 \cdots n_k = n,$$

čo je spor.

Jediné riešenie je $n = 2^3 - 1 = 7$.

A6.

Indexy berieme modulo n. Postupným vyjadrovaním dostaneme polynomickú rovnicu stupňa 2^n v premennej x_1. Pre x_1 teda existuje najviac 2^n vyhovujúcich riešení. Ostatné premenné sú jednoznačne určené voľbou x_1. Sústava ma preto najviac 2^n riešení.

Vidíme, že ak všetky x_i majú byť nezáporné, tak každé x_i musí ležať v intervale $[0, 4]$. Preto môžeme položiť $x_1 = 2 - 2\cos\alpha$ pre práve jedno $\alpha \in [0, \pi]$. Potom počítajme

$$x_2 = 4(2 - 2\cos\alpha) - (2 - 2\cos\alpha)^2 = 4 - 4\cos^2\alpha = 2 - 2\cos 2\alpha.$$

Keď budeme pokračovať, dostaneme postupne $x_i = 2 - 2\cos 2^{i-1}\alpha$ pre všetky $i \geqq 1$. Nakoniec samozrejme obdržíme $x_1 = x_{n+1} = 2 - 2\cos 2^n\alpha$. Teda musí platiť $\cos\alpha = \cos 2^n\alpha$. A zasa naopak: pre každé také α máme riešenie systému rovníc a pre rôzne α máme rôzne riešenia.

Všimnime si, že $\cos\alpha = \cos 2^n\alpha$ je ekvivalentné s $2^n\alpha = \pm\alpha + 2k\pi$ pre nejaké $k \in \mathbb{Z}$, a to je ekvivalentné s $\alpha = 2k\pi/(2^n \mp 1)$. Vzhľadom na podmienku $\alpha \in \langle 0, \pi\rangle$ máme riešenia $2k_1\pi/(2^n - 1)$ pre $k_1 = 0, 1, \ldots, 2^{n-1} - 1$ a $2k_2\pi/(2^n + 1)$ pre $k_2 = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$. Tvrdíme, že týchto 2^n hodnôt je rôznych. Pre spor predpokladajme, že

$$\frac{2k_1\pi}{2^n - 1} = \frac{2k_2\pi}{2^n + 1}, \qquad \text{teda} \qquad k_1(2^n + 1) = k_2(2^n - 1).$$

Keďže $2^n - 1$ a $2^n + 1$ sú nesúdeliteľné, $(2^n + 1) \mid k_2$, čo je spor. Takto máme 2^n rôznych hodnôt α, ku ktorým prislúcha 2^n rôznych riešení.

G6.

(Podľa *Patrika Baka.*) Najprv určme polohu A_1. Keďže $\alpha < 90°$, tak $|\measuredangle BHC| = 180° - \alpha > 90°$. Bod A_1 leží teda v polrovine opačnej k BCH a z vlastností stredového uhla platí $|\measuredangle BA_1C| = 2\alpha$. Celá pointa príkladu teraz spočíva v objave, že tvrdenie je ekvivalentné podmienke $\alpha = 60°$. K tomuto nás mala priviesť nutná podmienka vyplývajúca z predpokladu kolinearity bodov A, A_1, I. Naozaj, potom A_1 musí ležať na kružnici opísanej trojuholníku ABC, platí $|\measuredangle BA_1C| = 180° - \alpha$, čo dokopy s predošlým dáva $\alpha = 60°$. Ak naopak $\alpha = 60°$, tak A_1 je zjavne stred oblúka BC kružnice opísanej trojuholníku ABC neobsahujúceho bod A, teda bod A_1 leží na osi uhla α, čo je priamka AI. Tak sme dokázali, že body A, A_1, I ležia na priamke práve vtedy, keď $\alpha = 60°$.

Venujme sa teraz druhej časti ekvivalencie. Zrejme platí

$$S_{BKB_2} = S_{CKC_2} \quad \Leftrightarrow \quad S_{ABC} = S_{AB_2C_2}.$$

Oba tieto obsahy vyjadríme pomocou dĺžok strán trojuholníka ABC. Spočítame najprv $|AB_2|$. Označme D priesečník osi uhla γ s AB. Podľa Menelaovej vety pre trojuholník ACD platí

$$\frac{|ID|}{|IC|} \cdot \frac{|CB_1|}{|AB_1|} \cdot \frac{|AB_2|}{|DB_2|} = 1, \qquad \text{teda} \qquad \frac{|AB_2|}{|DB_2|} = \frac{|IC|}{|ID|}. \tag{1}$$

Označme ϱ polomer kružnice vpísanej trojuholníku ABC. Potom zrejme platí

$$\frac{|IC|}{|ID|}=\frac{|CD|}{|ID|}-1=\frac{S_{ABC}}{S_{ABI}}-1=\frac{\varrho(a+b+c)}{c\varrho}-1=\frac{a+b}{c}.$$

Označme $d=|AB_2|$. Zrejme $|DB_2|=|AB_2|-|AD|$. Je známe, že $|AD|=bc/(a+b)$. Rovnosť (1) môžme prepísať na

$$\frac{d}{d-\frac{bc}{a+b}}=\frac{a+b}{c}.$$

Odtiaľ vyjadríme $|AB_2|=d=bc/(a+b-c)$. Keďže sme v odvodeniach nepoužili, že B_2 je vnútorný bod AB, môžme analogicky odvodiť vzorec $|AC_2|=bc/(a+c-b)$. Potom

$$\begin{aligned}S_{A_2B_2C}&=\frac{1}{2}|AB_2||AC_2|\sin\alpha=\frac{\sin\alpha}{2}\cdot\frac{b^2c^2}{(a+b-c)(a-b+c)}=\\&=\frac{\sin\alpha}{2}\cdot\frac{b^2c^2}{a^2-b^2-c^2+2bc}=\frac{\sin\alpha}{2}\cdot\frac{b^2c^2}{2bc-2bc\cos\alpha}=\frac{bc\sin\alpha}{2}\cdot\frac{1}{2(1-\cos\alpha)}.\end{aligned}$$

Porovnaním so vzorcom $S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$ dostávame

$$S_{ABC}=S_{AB_2C_2}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1}{2(1-\cos\alpha)}=1\quad\Leftrightarrow\quad\alpha=60^\circ.$$

C6.

(Podľa *Miroslava Stankoviča*.) Najprv ujasnime zopár pojmov. *Vnútro* znamená, že hranica tam nepatrí. Navyše v tomto riešení do *polroviny* nebudeme počítať priamku, ktorá ju ohraničuje. Aby platilo (i), nutne $n\geqq 7$. Prejdime teda postupne malé hodnoty n, ktoré nevyhovujú, a keď to ďalej nepôjde, zostrojíme príklad, ktorý vyhovuje.

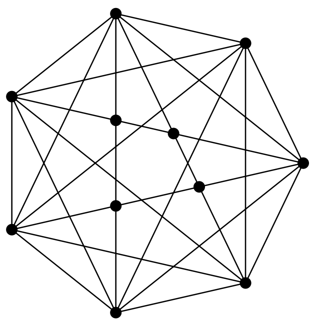
$n=7$: Podľa (i) tvorí týchto 7 bodov konvexný 7-uholník. Stačí teraz vziať ľubovoľný konvexný 5-uholník a je jasné, že v jeho vnútri neleží žiadny bod.

$n=8$: Nájdeme konvexný 7-uholník. Ak zvyšný bod neleží vnútri, tak postupujeme podľa predchádzajúceho prípadu. Inak vezmeme priamku prechádzajúcu týmto bodom, na ktorej neleží žiaden bod 7-uholníka. V jednej polrovine vyťatej touto priamkou sú aspoň 4 body. Tieto s našim vnútorným bodom tvoria konvexný 5-uholník bez bodu vo vnútri.

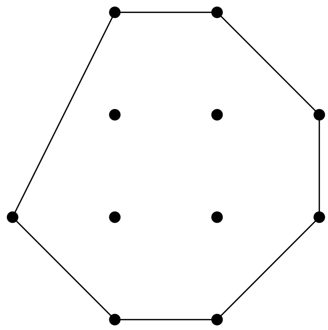
$n=9$: Body konvexného 7-uholníka označme A, B, C, D, E, F, G a ďalšie 2 body označme M, O. Ak M alebo O neleží v 7-uholníku, riešime to ako predošlé prípady. V opačnom prípade v jednej z polrovín vyťatých priamkou MO ležia aspoň 3 body 7-uholníka, lebo aspoň 5 bodov 7-uholníka neleží na MO. Znova tak máme konvexný 5-uholník, v ktorom neleží žiaden bod.

$n = 10$: Body konvexného 7-uholníka označme A, B, C, D, E, F, G a ďalšie 3 body označme I, K, S. Ak niektorý z bodov I, K, S neleží v 7-uholníku, riešime ako predošlé prípady. Inak zvolíme bod $\check{R}$ vnútri trojuholníka IKS tak, že priamky $\check{R}I, \check{R}K, \check{R}S$ neobsahujú žiadny bod 7-uholníka (rozmyslite si, prečo taký bod musí existovať). Polpriamky $\check{R}I$, $\check{R}K$ a $\check{R}S$ vytínajú v rovine tri disjunktné oblasti bez hranice, pričom v niektorej z nich ležia aspoň 3 body z $\{A, B, \dots, G\}$. Spolu s dvoma bodmi z $\{I, K, S\}$, ktoré padnú na priamky ohraničujúce spomínanú oblasť, tvoria konvexný 5-uholník bez vnútorného bodu.

Tu sa končí naše snaženie hľadať problémy, lebo ďalej to už ide. Príklady sú na obr. 72a a 72b.



Obr. 72a



Obr. 72b

Iné korešpondenčné semináre

Okrem Matematickej olympiády sú pre študentov základných aj stredných škôl počas školského roka organizované aj iné matematické súťaže. Patria medzi ne predovšetkým korešpondenčné semináre. Tieto súťaže sa v detailoch istotne líšia, avšak základné črty majú spoločné. Počas školského roka prebiehajú dve časti (letná a zimná), ktoré pozostávajú zväčša z troch sérií úloh rozosielaných riešiteľom do škôl alebo domov. Riešenia súťažiaci vypracovávajú rovnakou formou ako v MO a v určenom termíne ich odosielajú na adresu príslušného seminára, odkiaľ sa po niekoľkých dňoch až týždňoch vrátia opravené spolu so vzorovými riešeniami a výsledkovou listinou. Mladší a menej skúsení riešitelia zväčša nemusia riešiť tie najzložitejšie príklady, aby aj oni mali šancu ovplyvniť poradie na prvých miestach. Na konci oboch častí súťaže sú približne tridsiati najúspešnejší riešitelia pozývaní na týždňové sústredenie, účasť na ktorom býva často najsilnejšou motiváciou na riešenie úloh. Nie je ale možné nespomenúť, že takýto pravidelný tréning sa odráža aj na výsledkoch dosahovaných v MO, a že drvivá väčšina reprezentantov Slovenska na IMO sa aktívne zapájala do viacerých z týchto seminárov.

Nižšie uvedené korešpondenčné semináre (KS) sú určené študentom stredných škôl, svojím záberom pokrývajú územie celého Slovenska a často majú aj riešiteľov z Českej republiky. Je však možné, že vo svojom okolí nájdete aj menšie súťaže podobného druhu.

Korešpondenčný matematický seminár – KMS

KMS vznikol v roku 2002 spojením Bratislavského a Stredoslovenského korešpondenčného matematického seminára. Organizovaný je študentmi FMFI UK v Bratislave. Má dve kategórie. Začínajúcim a mladším je určená kategória ALFA, pre skúsenejších je kategória BETA. Rozdelenie do kategórií umožňuje bojovať o miesta na sústredení aj neskúseným študentom, ktorí by v silnej konkurencii strácali motiváciu.

KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava
e-mail: kms@kms.sk
web: http://kms.sk

Súťaž talentovaných riešiteľov obľubujúcich matematiku – STROM

Seminár STROM je pokračovateľom najstaršieho korešpondenčného seminára v bývalom Československu. Je organizovaný z PF UPJŠ v Košiciach skupinou nadšencov, väčšinou bývalých riešiteľov seminára a študentov UPJŠ. V posledných rokoch sa na organizovaní okrem košickej skupiny podieľajú aj študenti FMFI UK pochádzajúci z východného Slovenska. Riešiteľskú základňu má prevažne na východnom Slovensku.

STROM, PF UPJŠ, Jesenná 5, 041 54 Košice
e-mail: strom@strom.sk
web: http://www.strom.sk

Ak ste sa rozhodli do niektorého zo seminárov zapojiť, najrozumnejšie je zadania a pravidlá nájsť na internete začiatkom septembra alebo začiatkom januára, prípadne v tomto období požiadať e-mailom o zaslanie úloh prvej série.

Šesťdesiatyprvý ročník
Matematickej olympiády

Názov:	Šesťdesiatyprvý ročník Matematickej olympiády
Autori:	Mgr. Peter Novotný, PhD., RNDr. Karel Horák, CSc., RNDr. Ján Mazák, PhD., Bc. Filip Sládek, Bc. Alexander Slávik, Úlohová komisia MO, vedúci *i*KS
Jazyková úprava:	neprešlo jazykovou úpravou
Grafická úprava:	Mgr. Peter Novotný, PhD., RNDr. Karel Horák, CSc., sadzba programom $\mathcal{AMS}$-TEX
Fotografie:	Mgr. Peter Novotný, PhD.
Vydavateľ:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava
Grafika:	Mgr. Peter Novotný, PhD.
Tlač:	DOLIS, s. r. o.
Rok vydania:	2013
Náklad:	500 ks
Rozsah:	168 strán

ISBN **978–80–8072–150–3**

Vydané s finančnou podporou Ministerstva školstva SR.
Nepredajné.