60. ROČNÍK
MATEMATICKEJ
OLYMPIÁDY

Správa o riešení úloh zo súťaže konanej v školskom roku 2010/2011

52. MEDZINÁRODNÁ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA
5. STREDOEURÓPSKA MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

S pomocou spolupracovníkov spracovali
Mgr. Peter Novotný, PhD.,
RNDr. Karel Horák, CSc.,
Bc. Peter Csiba,
Mgr. Ivan Kováč,
Marek Kukan,
RNDr. Ján Mazák, PhD.,
Filip Sládek,
členovia Úlohovej komisie MO
a vedúci Korešpondenčného matematického seminára.

Obsah

O priebehu 60. ročníka Matematickej olympiády 5

Výsledky 9
Celoštátne kolo kategórie A 9
Krajské kolá 10

Zadania súťažných úloh 21
Kategória Z4 21
Kategória Z5 23
Kategória Z6 25
Kategória Z7 27
Kategória Z8 29
Kategória Z9 31
Kategória C 34
Kategória B 36
Kategória A 38

Riešenia súťažných úloh 43
Kategória C 43
Kategória B 53
Kategória A 62

Prípravné sústredenia pred IMO a MEMO 91
Zadania súťažných úloh 92

11. Česko-poľsko-slovenské stretnutie 95
Zadania súťažných úloh 96
Riešenia súťažných úloh 97

52. Medzinárodná matematická olympiáda 103
Zadania súťažných úloh 107
Riešenia súťažných úloh 108

5. Stredoeurópska matematická olympiáda 115
Zadania súťažných úloh 117
Riešenia súťažných úloh 119

Korešpondenčný seminár SKMO 129
Zadania súťažných úloh 130
Riešenia súťažných úloh 136

Iné korešpondenčné semináre 157

O priebehu 60. ročníka Matematickej olympiády

V školskom roku 2010/2011 sa uskutočnil okrúhly 60. ročník Matematickej olympiády (MO), ktorá je medzi predmetovými olympiádami a ostatnými postupovými súťažami na Slovensku najstaršia. Zároveň má najviac rôznych kategórií pokrývajúcich všetky ročníky od štvrtej (od školského roku 2011/2012 od piatej) triedy ZŠ po maturantov. Súťaž vyhlasuje Ministerstvo školstva, vedy výskumu a športu Slovenskej republiky (MŠVVŠ SR) v spolupráci s Jednotou slovenských matematikov a fyzikov (JSMF).

Súťaž riadi Slovenská komisia matematickej olympiády (SKMO). Tá v 60. ročníku začala pracovať v nasledovnom zložení:

Mgr. Peter Novotný, PhD., FMFI UK Bratislava, predseda
mim. prof. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., F-PEDAS ŽU Žilina, podpredseda
Mgr. Milan Demko, PhD., FHPV PU Prešov, predseda KKMO PO
Mgr. Martin Kollár, PhD., Gymn. FMFI UK Bratislava, predseda KKMO BA
doc. RNDr. Stanislav Krajči, PhD., PF UPJŠ Košice, predseda KKMO KE
doc. RNDr. Mária Lucká, CSc., PF TU Trnava, predsedníčka KKMO TT
doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc., F-PEDAS ŽU Žilina, predseda KKMO ZA
RNDr. Eva Oravcová, Gymn. J. G. T. Banská Bystrica, predsedníčka KKMO BB
RNDr. Soňa Pavlíková, CSc., FM TU Trenčín, predsedníčka KKMO TN
prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc., FPV UKF Nitra, predseda KKMO NR
RNDr. Monika Dillingerová, PhD., FMFI UK Bratislava
prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc., FPV UKF Nitra
Mgr. Štefan Gyürki, PhD., FCHPT STU, Bratislava
RNDr. Róbert Hajduk, PhD., PF UPJŠ Košice
Ing. RNDr. František Kardoš, PhD., PF UPJŠ Košice
doc. RNDr. Mária Kmeťová, PhD., FPV UKF Nitra
RNDr. Ján Mazák, FMFI UK Bratislava
PaedDr. Anna Pobešková, ŠŠI Levice
Mgr. Martin Potočný, Trojsten, FMFI UK Bratislava
RNDr. Oliver Ralík, CSc., FPV UKF Nitra
doc. RNDr. Roman Soták, PhD., PF UPJŠ Košice
Ing. Tomáš Lučenič, IUVENTA Bratislava, tajomník

V priebehu 60. ročníka funkciu tajomníka na IUVENTE namiesto Tomáša Lučeniča začal vykonávať PhDr. Peter Barát. Na začiatku 61. ročníka sa stal predsedom KKMO Prešov Mgr. Ján Brajercík, PhD. Funkciu prevzal po Milanovi Demkovi, ktorý v SKMO pôsobil už od jej vzniku po rozdelení Československa. Aj touto cestou mu chcem vysloviť veľkú vďaku za dlhé roky vynikajúcej práce pre MO.

*

V samotnom priebehu a organizovaní jednotlivých kôl MO oproti predchádzajúcemu rokom nenastala žiadna zmena, uskutočnili sa tiež všetky zvyčajné sústredenia a medzinárodné súťaže. V tomto roku sa však posledný krát konala kategória Z4. SKMO sa rozhodla ju od nasledujúceho ročníka zrušiť. Hlavné dôvody boli nasledovné:

- Na 8-ročné gymnáziá sa už po novom chodí len z 5. triedy ZŠ, takže žiaci nepotrebujú výsledky zo Z4 k prijímacím skúškam.
- Učiva je po novom na prvom stupni menej, domáce kolo by sa reálne muselo dávať len z učiva prvých troch ročníkov, čo je viac-menej len počítanie s číslami z oboru do 20.
- Z4 mala len domáce a školské kolo, takže žiaci neprídu o žiadnu možnosť súťažiť s deťmi z iných škôl.
- Napriek inflácii (a teda rastúcim nákladom) MŠVVŠ SR od roku 2004 ani raz nezvýšilo rozpočet pre MO a na rok 2011 bol rozpočet dokonca o 25 % znížený. Kvôli tomu bola SKMO nútená redukovať realizované aktivity.

Celoštátne kolo MO (CK MO) sa konalo v dňoch 27. – 30. 3. 2011 v Drienici pri Sabinove. O jeho bezproblémový a veľmi príjemný priebeh sa postarala krajská komisia MO Prešov na čele s Mgr. Milanom Demkom, PhD., ktorý tak v plnom nasadení zavŕšil svoje pôsobenie v SKMO bezchybným zabezpečením celého podujatia. Súťaž prebiehala v hoteli Javorná. Slávnostné vyhodnotenie sa konalo v Prešove na mestskom úrade, zúčastnil sa ho a krátko účastníkov pozdravil aj primátor Pavel Hagyari. Poďakovanie patrí tiež sponzorom CK MO, najmä spoločnosti ALBI, ktorá pravidelne pre CK MO poskytuje ako ceny hodnotné spoločenské hry.

Po CK MO sa uskutočnilo výberové sústredenie, na ktorom sa rozhodlo o zložení družstiev pre Medzinárodnú matematickú olympiádu (IMO) a Stredoeurópsku matematickú olympiádu (MEMO). Nasledované bolo prípravným sústredením pre obe družstvá. Z prípravných medzinárodných akcií sa popri tradičnom česko-poľsko-slovenskom stretnutí (konalo sa v Krakove v Poľsku) uskutočnilo opäť – už po šiesty raz – spoločné prípravné sústredenie IMO-družstiev ČR a SR. Finančne ho zabezpečuje Spoločnosť Otakara Borůvky a odborne Ústredný výbor Matematickej olympiády v ČR. Treba pripomenúť, že podobná akcia na Slovensku neprebieha, a aspoň na tomto mieste sa chceme poďakovať českým kolegom za pozvanie.

Na 52. IMO v Holandsku sme získali dve strieborné, tri bronzové medaily, a jedno čestné uznanie. Na 5. MEMO v Chorvátsku sme získali dve bronzové medaily a dve čestné uznania. Každej súťaži je v ročenke venovaná osobitná kapitola. V súvislosti s cestami na IMO a MEMO patrí naša vďaka pracovníčkam sekcie medzinárodnej spolupráce MŠVVŠ SR, ktoré každý rok zabezpečujú bezproblémový priebeh vybavením všetkých cestovných náležitostí.

Matematická olympiáda by neexistovala bez zaujímavých a originálnych úloh. O ich prípravu sa stará Úlohová komisia MO, ktorú máme spoločnú s Českou republikou. Každoročne sa konajú dve zasadnutia komisie, jedno v ČR, jedno na Slovensku. V 60. ročníku sa uskutočnili v decembri 2010 v Bílovci a v máji 2011 v Žiline. Úlohová komisia má dve sekcie: jednu pre kategórie A, B, C (sekcia ABC), druhú pre Z5, Z6, Z7, Z8, Z9 (sekcia Z). Za Slovensko pracovali v sekcii ABC mim. prof. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., RNDr. Tomáš Jurík, PhD., RNDr. Ján Mazák, doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc. a Mgr. Peter Novotný, PhD. a v sekcii Z PaedDr. Svetlana Bednářová, PhD., RNDr. Monika Dillingerová, PhD., Mgr. Veronika Hucíková, Mgr. Miroslava Smitková, PhD., a Mgr. Erika Trojáková. V ročenke tentoraz okrem zadaní a riešení úloh kategórií A, B, C po prvýkrát uvádzame aj zadania všetkých úloh kategórií Z4 až Z9.

Vymýšľať nové úlohy do MO nie je jednoduché, úlohová komisia preto uvíta zaslanie zaujímavých návrhov na úlohy aj od autorov, ktorí nie sú jej členmi. Návrhy je možné posielať napríklad na adresu *skmo@skmo.sk*, najlepšie aj s menom autora, s riešením a s odhadom, do ktorej kategórie sa úloha hodí.

V decembri 2009 bola založená a spustená oficiálna internetová stránka SKMO. Jej adresa je *skmo.sk* a zverejňujeme na nej všetky termíny a dokumenty týkajúce sa MO (archív zadaní a riešení úloh, poradia všetkých krajských a vyšších kôl, atď.). Okrem nej možno na internete nájsť viacero stránok súvisiacich s MO. Spomeňme aspoň niektoré z nich:

skmo.sk – oficiálna stránka SKMO,
matematika.okamzite.eu – archív zadaní, poradí a riešení MO,
fpedas.uniza.sk/˜novotny/MO – aktuálne dokumenty, najmä pre kraj Žilina,
www.olympiady.sk – stránka IUVENTY,
www.imo2011.nl – stránka 52. IMO v Holandsku,
memo2011.math.hr – stránka 5. MEMO v Chorvátsku,
imo-official.org – oficiálna stránka IMO,
kms.sk – stránka KMS.

Záver úvodu tejto ročenky by sme radi využili na poďakovanie všetkým učiteľom a nadšencom, ktorí pripravujú žiakov na MO a podieľajú sa na propagácii a organizácii MO na školách. Uznanie patrí tiež pracovníkom obvodných a krajských komisií MO, krajských školských úradov a centier voľného času, ktorí zabezpečujú jednotlivé kolá. Napokon, ďakujeme pracovníkom IUVENTY podieľajúcim sa na organizácii CK MO, distribúcii úloh, komunikácii s MŠVVŠ SR a administratíve súvisiacej s čerpaním rozpočtu MO.

Peter Novotný, predseda SKMO

Výsledky

Celoštátne kolo kategórie A

Víťazi

1.	Martin VODIČKA	2 G Alejová, Košice	7 7 7 7 6 7	41
2.	Marián HORŇÁK	3 G Párovská, Nitra	7 7 7 7 3 7	38
3.	Natália KARÁSKOVÁ	4 G Jura Hronca, Bratislava	7 4 5 7 6 2	31
4.	Ondrej KOVÁČ	4 G sv. Cyrila a Metoda, Nitra	7 6 2 6 2 7	30
5.	Matúš STEHLÍK	4 G Alejová, Košice	7 7 2 7 2 1	26
6.	Pavol GURIČAN	4 G Jura Hronca, Bratislava	7 4 0 7 7 0	25
	Dávid HVIZDOŠ	4 G Poštová, Košice	1 7 3 7 6 1	25
	Boris VAVRÍK	4 G Jura Hronca, Bratislava	6 6 5 7 0 1	25
9.	Vladimír MACKO	2 G Ľ. Štúra, Zvolen	6 6 2 7 1 2	24
	Michal TÓTH	3 G Jura Hronca, Bratislava	5 6 3 5 3 2	24

Ďalší úspešní riešitelia

11.	Matej BALOG	4 G Grösslingová, Bratislava	0 7 7 7 1 1	23
	Soňa GALOVIČOVÁ	3 G Jura Hronca, Bratislava	7 6 0 7 1 2	23
13.	Ján HOZZA	4 G Jura Hronca, Bratislava	6 6 1 7 2 0	22
14.	Klára FICKOVÁ	3 G Poštová, Košice	6 2 2 7 1 2	20
	Viktor SZABADOS	4 G Grösslingová, Bratislava	5 3 1 5 6 0	20
	Matej VEČERÍK	4 ŠPMNDaG, Bratislava	6 1 0 6 6 1	20
17.	Marián HALČIN	4 G M. Hattalu, Trstená	5 5 5 4 0 0	19
	Matej MOLNÁR	3 G Jura Hronca, Bratislava	0 6 1 6 6 0	19
	Miroslav STANKOVIČ	1 G Poštová, Košice	6 5 0 6 0 2	19

Ostatní riešitelia

20.	Viktor LUKÁČEK	3 G sv. Moniky, Prešov	0 6 4 6 1 1	18
	Jakub SANTER	4 G M. Hattalu, Trstená	7 1 3 6 0 1	18
22.	Tomáš GONDA	2 G Grösslingová, Bratislava	5 4 0 7 0 1	17
23.	Dušan KAVICKÝ	2 G Jura Hronca, Bratislava	2 6 0 7 0 1	16
	László MÁZIK	2 G J. Selyeho, Komárno	6 5 0 5 0 0	16
25.	Michal BOCK	2 G Grösslingová, Bratislava	0 5 1 7 2 0	15
	Michal KEKELY	4 G Varšavská, Žilina	0 4 4 7 0 0	15
	Jakub KOCÁK	4 G arm. gen. L. Svobodu, Humenné	6 6 1 1 0 1	15
	Jakub PAVČO	3 G A. Vrábla, Levice	5 1 3 6 0 0	15
29.	Andrej KOZÁK	4 G Grösslingová, Bratislava	6 1 0 6 1 0	14
	Jakub ŠAFIN	2 G P. Horova, Michalovce	0 0 4 7 1 2	14
31.	Peter BARANČOK	4 G Grösslingová, Bratislava	6 2 0 5 0 0	13
	Michal HLEDÍK	2 G Jura Hronca, Bratislava	5 6 0 0 0 2	13

33.	Adriana BOSÁKOVÁ	4 G Grösslingová, Bratislava	1 6 0 5 0 0	12
	Anna DRESSLEROVÁ	4 G Jura Hronca, Bratislava	6 1 0 5 0 0	12
	Filip HANZELY	2 G A. Prídavka, Sabinov	1 4 0 7 0 0	12
	Andrej VLČEK	3 G Ev. J. Tranovského, L. Mikuláš	4 2 1 4 0 1	12
37.	Ján KUZMÍK	3 G Grösslingová, Bratislava	0 2 0 7 0 0	9
38.	Ján PULMANN	4 G Grösslingová, Bratislava	0 1 2 4 0 0	7
39.	Uršuľa ŽÁKOVSKÁ	3 G Grösslingová, Bratislava	0 0 0 6 0 0	6

Úspešnosť jednotlivých úloh je zaznamenaná v tabuľke.

Počet bodov	**Spolu**	**Číslo úlohy**					
		1.	2.	3.	4.	5.	6.
7 bodov	39	8	5	3	19	1	3
6 bodov	38	11	12	0	9	6	0
5 bodov	19	6	4	3	6	0	0
4 body	12	1	5	3	3	0	0
3 body	7	0	1	4	0	2	0
2 body	22	1	4	5	0	4	8
1 bod	34	3	6	6	1	7	11
0 bodov	63	9	2	15	1	19	17
Priemer	3,18	4,13	4,21	1,95	5,90	1,64	1,23

Krajské kolá

Z príslušného kraja a v príslušnej kategórii A, B, C a Z9 sú uvedení všetci, resp. aspoň prvých 10 úspešných riešiteľov.

Kraj Bratislava

Kategória A

1.	Matej BALOG	4 Gymnázium Grösslingová
	Pavol GURIČAN	4 Gymnázium Jura Hronca
	Mariana PHUONG	4 Gymnázium Jura Hronca
	Viktor SZABADOS	4 Gymnázium Grösslingová
	Michal TÓTH	3 Gymnázium Jura Hronca
6.	Ján HOZZA	4 Gymnázium Jura Hronca
	Matej VEČERÍK	4 ŠpMNDaG Skalická
8.	Michal HLEDÍK	2 Gymnázium Jura Hronca
	Andrej KOZÁK	4 Gymnázium Grösslingová

10.	Peter BARANČOK	4 Gymnázium Grösslingová
	Adriana BOSÁKOVÁ	4 Gymnázium Grösslingová
	Boris VAVRÍK	4 Gymnázium Jura Hronca

Kategória B

1.	Askar GAFUROV	Gymnázium Grösslingová
	Marta KOSSACZKÁ	Gymnázium Grösslingová
3.	Michal HLEDÍK	Gymnázium Jura Hronca
	Daniela PELLEROVÁ	Gymnázium Grösslingová
5.	Tomáš GONDA	Gymnázium Grösslingová
6.	Michal BOCK	Gymnázium Grösslingová
	Jaroslav PETRUCHA	Gymnázium Metodova
8.	Dušan KAVICKÝ	Gymnázium Jura Hronca
9.	Tatiana MATEJOVIČOVÁ	Gymnázium Grösslingová
	Peter MITURA	Gymnázium Grösslingová

Kategória C

1.	Dávid LIU ZHEN NING	Gymnázium Grösslingová
2.	Šimon JURINA	Gymnázium Grösslingová
	Barbora KOVÁČOVÁ	ŠpMNDaG Skalická
	Hana KRAKOVSKÁ	Gymnázium Grösslingová
5.	Bui TRUC LAM	Gymnázium Grösslingová
6.	Karolína MOJŽIŠOVÁ	Gymnázium Grösslingová
7.	Ema KRAKOVSKÁ	Gymnázium Grösslingová
	Ján ONDRÁŠ	Gymnázium Grösslingová
9.	Erik SZALAY	ŠpMNDaG Skalická
10.	Dominika IŽDINSKÁ	Gymnázium Jura Hronca

Kategória Z9

1.	Ema KRAKOVSKÁ	Gymnázium Grösslingová
	Bui TRUC LAM	Gymnázium Grösslingová
3.	Barbora LAKOTOVÁ	Gymnázium Grösslingová
	Matúš RAKO	ZŠ Mudroňova
	Lâm TUÂN DŨNG	ZŠ Mierová
6.	Michal BELÁK	Gymnázium Grösslingová
7.	Matúš MACKO	Spojená škola sv. Vincenta de Paul
8.	Martin JONÁŠ	Gymnázium Grösslingová
9.	Dominik HOLLÝ	ŠpMNDaG Skalická
	Samuel MLADÝ	ŠpMNDaG Skalická
	Tomáš VICIAN	Gymnázium Dunajská

Kraj Nitra

Kategória A

1.	Marián HORŇÁK	3 Gymnázium Párovská, Nitra
2.	László MÁZIK	2 Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	Jakub PAVČO	3 Gymnázium A. Vrábla, Levice
4.	Ondrej KOVÁČ	4 Gymnázium sv. Cyrila a Metoda, Nitra
5.	Štefan FARŠANG	4 Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	Katarína REMIAROVÁ	3 Gymnázium Párovská, Nitra
	Matyás VARGA	4 Gymnázium H. Selyeho, Komárno
8.	Daniela NOVÁKOVÁ	3 Gymnázium Párovská, Nitra
9.	Daniel JINDRA	3 Gymnázium Párovská, Nitra
	Ákos SZABÓ	4 Gymnázium Želiezovce
	Máté ŠKODA	2 Gymnázium H. Selyeho, Komárno

Kategória B

1.	Park CHOONG EUN	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
2.	Máté ŠKODA	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
3.	László MÁZIK	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
4.	Bálint KISS	Gymnázium Želiezovce
5.	Miloš KÚTNY	Gymnázium Párovská, Nitra
6.	Ladislav ÜRGE	Gymnázium H. Selyeho, Komárno

Kategória C

1.	Ľudmila ŠIMKOVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
2.	Ľudovít POPELKA	Gymnázium J. Fándlyho, Šaľa
3.	Daniel GULIŠ	Gymnázium P. Pázmáňa, Nové Zámky
	Ádám MARKÓ	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
5.	Miklósz VONTSZEMÜ	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
6.	Tamás BALOGH	Gymnázium P. Pázmáňa, Nové Zámky
7.	Juraj KOVÁČ	Gymnázium sv. Cyrila a Metoda, Nitra
	Daniel KUŤKA	Gymnázium Párovská, Nitra
9.	Nikoletta GODOVÁ	Gymnázium Želiezovce
	Laszló SZABÓ	SPŠ Komárno

Kategória Z9

1.	Csongor NAGY	ZŠ Sokolce
2.	Frederik MUDRÁK	Gymnázium Šurany
3.	János KURCZ	ZŠ Marcelová
	Zoltán LŐRINCZ	ZŠ Práce, Komárno
5.	Ján GAJDICA	ZŠ Tríbečská, Topoľčany
	Jakub HUČÍK	Gymnázium Šurany
	Tomáš ŠÁRAI	ZŠ G. Czuczora, Nové Zámky
	Alexandra URBÁNIKOVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
9.	Krisztina KONCZ	ZŠ Práce, Komárno
	Štefan STANKO	Gymnázium A. Vrábla, Levice

Kraj Trnava

Kategória A

1.	Ondrej GLASNÁK	4	Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany
2.	Tamás SZENTANDRÁSI	4	Gymnázium Z. Kodálya, Galanta
3.	László SEBŐ	2	Súkr. gymnázium D. Streda
4.	Pavol KOPRDA	3	Gymnázium A. Merici, Trnava
	Jozef MELICHER	4	Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany
6.	Veronika ŠOKOVÁ	4	Gymnázium I. Kupca, Hlohovec

Kategória B

1.	Márton BARTAL	Súkr. gymnázium D. Streda
2.	Peter ŠIŠAN	Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany
3.	János LELKES	Gymnázium I. Madácha, Šamorín
	Tibor NAGY	Gymnázium Á. Vámbéryho, D. Streda
5.	László SEBŐ	Súkr. gymnázium D. Streda

Kategória C

V kategórii C neboli žiadni úspešní riešitelia.

Kategória Z9

1.	Lenka LACKOVIČOVÁ	ZŠ Bučany
2.	Jozef BUCKO	ZŠ Horné Otrokovce

3.	Dávid BUGÁR	ZŠ Z. Kodálya, Galanta
4.	Ágnes BUGÁR	ZŠ B. Bartóka, Veľký Meder
	Tamás PAMMER	Gymnázium I. Madácha, Šamorín
6.	Lucia KUBINCOVÁ	ZŠ Brezová, Piešťany
	Péter MARKÓ	ZŠ s VJM, Horné Saliby
	Peter ŠEVČÍK	ZŠ Mojmírova, Piešťany
9.	Eliška ECKEROVÁ	ZŠ Červeník
10.	Matej KOŠIARČIK	ZŠ Koperníkova, Hlohovec

Kraj Trenčín

Kategória A

1.	Peter KOSEC	3 Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
2.	Patrik ŠVANČARA	3 Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
3.	Ján BUDINSKÝ	3 Gymnázium Dubnica nad Váhom
4.	Tomáš FARKAŠ	3 Gymnázium V. B. Nedožerského, Prievidza

Kategória B

1.	Róbert LEXMANN	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín

Kategória C

1.	Filip POKRÝVKA	Gymn. J. Jesenského, Bánovce nad Bebravou
2.	Jozef RAJNÍK	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
3.	Michal KORBELA	Gymn. J. Jesenského, Bánovce nad Bebravou
4.	Martin ZEMKO	SPŠ Myjava

Kategória Z9

1.	Adam MEČIAR	ZŠ Mariánska, Prievidza
2.	Filip AYAZI	ZŠ Kubranská, Trenčín
3.	Soňa MIČEGOVÁ	ZŠ Dlhé Hony, Trenčín
4.	Martin DZÚRIK	ZŠ Kubranská, Trenčín
5.	František DRÁČEK	ZŠ Dolná Mariková
6.	Denis DRGA	ZŠ Mládežnícka, Púchov
	Marek VALACH	ZŠ Dlhé Hony, Trenčín
8.	Nina HRONKOVIČOVÁ	Gymnázium Partizánske
	Michal MINÁRIK	ZŠ Rastislavova, Prievidza
	Patrik SÚKENÍK	ZŠ J. A. Komenského, Bánovce nad Bebravou
	Štefan ŠEBEŇ	Gymn. J. Jesenského, Bánovce nad Bebravou

Kraj Žilina

Kategória A

1.	Jakub SANTER	4 Gymnázium M. Hattalu, Trstená
2.	Michal KEKELY	4 Gymnázium Varšavská, Žilina
3.	Marián HALČIN	4 Gymnázium M. Hattalu, Trstená
	Andrej VLČEK	3 Ev. gymn. J. Tranovského, Lipt. Mikuláš
5.	Matej JEČMEN	4 Gymnázium Varšavská, Žilina
6.	Katarína LEŠKOVÁ	3 Gymnázium Sučany
	Andrej ŽILINČÍK	3 Gymnázium Veľká okružná, Žilina
8.	Katarína DUNÍKOVÁ	4 Gymnázium Veľká okružná, Žilina
	Katarína JASENČÁKOVÁ	3 Gymnázium Veľká okružná, Žilina
10.	Barbora HALAJOVÁ	3 Gymnázium Veľká okružná, Žilina

Kategória B

1.	Juraj DRUSKA	Gymnázium Ružomberok
2.	Jakub BAHYL	Gymnázium Varšavská, Žilina

Kategória C

1.	Zuzana HROMCOVÁ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
2.	Miroslav PSOTA	Gymnázium Hlinská, Žilina
3.	Samuel SLÁDEK	Gymnázium A. Bernoláka, Námestovo

Kategória Z9

1.	Samuel SLÁDEK	Gymnázium A. Bernoláka, Námestovo
2.	Filip BADÁŇ	Cirk. ZŠ Š. Šmálika, Tvrdošín
3.	Tatiana ZBONČÁKOVÁ	ZŠ M. R. Štefánika, Čadca
4.	Ján CHABADA	ZŠ A. Bernoláka, Martin
	Filip ŠVÁBIK	ZŠ Nábrežná, Kysucké Nové Mesto
6.	Martin DECKÝ	Cirk. ZŠ R. Zaymusa, Žilina
7.	Eva BRANIŠOVÁ	ZŠ Mieru, Bytča
	Michal FAJMON	ZŠ Liptovský Hrádok
	Michaela SANTROVÁ	Gymnázium M. Hattalu, Trstená
10.	Petra GAJDLANOVÁ	ZŠ Nábrežná, Kysucké Nové Mesto
	Mária VIGLAŠOVÁ	Gymnázium M. Hattalu, Trstená

Kraj Banská Bystrica

Kategória A

1.	Vladimír MACKO	2 Gymnázium Ľ. Štúra, Zvolen
2.	Jana FODOROVÁ	4 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
3.	Alena GOLJEROVÁ	4 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Juraj LEHOTSKÝ	4 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
5.	Michal ANDERLE	4 Gymnázium B. S.-Timravy, Lučenec
	Imrich GULAI	4 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Radka CHOMUTOVÁ	4 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
8.	Tamás FODOR	3 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
9.	Milan BAKSA	3 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Joel DRAGOŠEK	4 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Andrej RYBÁR	4 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica

Kategória B

1.	Vladimír MACKO	Gymnázium Ľ. Štúra, Zvolen
2.	Jakub CIMERMAN	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Kristína KOMANOVÁ	Gymnázium A. Sládkoviča, B. Bystrica
	Jela NOCIAROVÁ	Gymnázium B. S.-Timravy, Lučenec
5.	Adrián KORMOŠ	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica

Kategória C

1.	Matúš HALAJ	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
2.	Jaroslav VALOVČAN	Gymnázium Ľ. Štúra, Zvolen
3.	Patrícia BENKOVÁ	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
4.	Matúš KULICH	Gymnázium Detva
5.	Matej ŠUĽAN	Gymnázium B. S.-Timravy, Lučenec
6.	Adriana FERENCZOVÁ	Gymnázium B. S.-Timravy, Lučenec
7.	Zuzana MAGYAROVÁ	Gymnázium B. S.-Timravy, Lučenec
	Norbert SLIVKA	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
9.	Ľubomír GOCNÍK	Gymnázium M. Rúfusa, Žiar nad Hronom
	Patrik REMENÁR	Gymnázium M. Kováča, B. Bystrica
	Zuzana SCHWARZOVÁ	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica

Kategória Z9

1.	Samuel SUČÍK	Súkromná ZŠ Čelovce
2.	Mária KOVÁČOVÁ	ZŠ A. Kmeťa, Žarnovica
	Kristína OREMOVÁ	ZŠ Školská, Hriňová
	Ľuboš REPKA	ZŠ SSV, B. Bystrica
5.	Silvia NEPŠINSKÁ	Gymnázium J. Chalupku, Brezno
6.	Brigita HOLENDOVÁ	ZŠ Fraňa Kráľa, Žarnovica
	Lenka KUBÍKOVÁ	ZŠ K. Rapoša, Brezno
	Pavol ZAŤKO	ZŠ P. Jilemnického, Zvolen
9.	Peter KÚDEĽA	ZŠ Vajanského, Lučenec
	Martin ŠULAJ	ZŠ SSV, B. Bystrica

Kraj Košice

Kategória A

1.	Dávid HVIZDOŠ	4	Gymnázium Poštová, Košice
	Martin VODIČKA	2	Gymnázium Alejová, Košice
3.	Miroslav STANKOVIČ	1	Gymnázium Poštová, Košice
	Matúš STEHLÍK	4	Gymnázium Alejová, Košice
5.	Klára FICKOVÁ	3	Gymnázium Poštová, Košice
6.	Jakub ŠAFIN	2	Gymnázium P. Horova, Michalovce
7.	Tomáš BABEJ	4	Gymnázium Poštová, Košice
8.	Ladislav HOVAN	4	Gymnázium Exnárova, Košice
9.	Kristína FAGUĽOVÁ	3	Gymnázium Poštová, Košice
	Jakub GEDERA	3	Gymnázium P. Horova, Michalovce

Kategória B

1.	Jakub ŠAFIN	Gymnázium P. Horova, Michalovce
	Martin VODIČKA	Gymnázium Alejová, Košice
3.	Miroslav STANKOVIČ	Gymnázium Poštová, Košice
4.	František LAMI	Gymnázium Poštová, Košice
5.	Lucia MAGUROVÁ	Gymnázium Poštová, Košice
6.	Ildikó JESO	Gymnázium S. Máraiho, Košice
7.	Marek GALAJDA	Gymnázium sv. T. Akvinského, Košice
8.	Denisa SEMANIŠINOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice

Kategória C

1.	Miroslav STANKOVIČ	Gymnázium Poštová, Košice
2.	Ján JURSA	Gymnázium Poštová, Košice
3.	Katarína KRAJČIOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
4.	Patrik TURZÁK	Gymnázium Poštová, Košice

Kategória Z9

1.	Alena BEDNAŘÍKOVÁ	ZŠ Bruselská, Košice
	Peter VOOK	ZŠ Krosnianska, Košice
3.	Patrik BAK	ZŠ Komenského, Sobrance
	Katarína KRAJČIOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
5.	Martin VRABEC	Gymnázium M. R. Štefánika, Košice
6.	Juraj GEREG	ZŠ T. J. Moussona, Michalovce
	Samuel KOČIŠČÁK	ZŠ Polianska, Košice
	Róbert SCHÖNFELD	ZŠ Park Angelinum, Košice
	Lenka VOJKOVSKÁ	ZŠ Malá Ida
10.	Miroslav NOVÁK	ZŠ Krosnianska, Košice

Kraj Prešov

Kategória A

1.	Jakub KOCÁK	4 Gymnázium arm. gen. L. Svobodu, Humenné
2.	Viktor LUKÁČEK	3 Gymnázium sv. Moniky, Prešov
3.	Filip HANZELY	2 Gymnázium A. Prídavka, Sabinov
	Anton HOVANA	4 Gymnázium T. Vansovej, Stará Ľubovňa
5.	Marcel SCHICHMAN	3 Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
6.	Jakub DEMJAN	4 Gymnázium Snina
7.	Barbora KLEMBAROVÁ	3 Gymnázium Poprad
8.	Samuel HAVADEJ	4 Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
	Michal LAŠAN	4 Gymnázium Poprad
10.	Miriam BASOVÁ	3 Gymnázium L. Stockela, Bardejov
	Martin BENEJ	4 Gymnázium arm. gen. L. Svobodu, Humenné
	Michal FECKO	4 Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
	Pavol GAJDOŠ	3 Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
	Daniel KRAFČÍK	3 Gymnázium J. A. Raymana, Prešov

Kategória B

1.	Filip HANZELY	Gymnázium A. Prídavka, Sabinov
2.	Marián OPIELA	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
	Šimon STRUK	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
	Tomáš ŠLAMPIAK	Gymnázium T. Vansovej, Stará Ľubovňa
5.	Kamila MAREŠOVÁ	Gymnázium D. Tatarku, Poprad

Kategória C

1.	Eduard BATMENDIJN	ZŠ svätého Cyrila a Metoda, Stará Ľubovňa
2.	Jaroslav HOFIERKA	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
3.	Irena BAČINSKÁ	Gymnázium Lipany
	Jozef LUKÁČ	Gymnázium L. Stockela, Bardejov
5.	Peter GÁBOR	Gymnázium Konštantínova, Prešov
6.	Dominik GRIGĽÁK	Gymnázium P. O. Hviezdoslava, Kežmarok

Kategória Z9

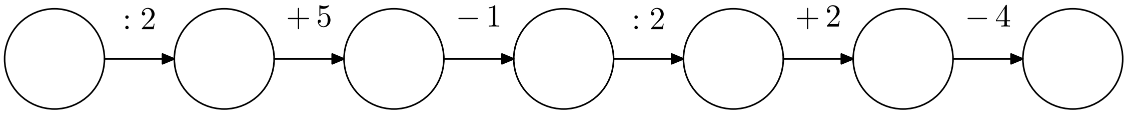
1.	Daniel STAŠKO	ZŠ Kúpeľná, Prešov
2.	Henrieta KOPNICKÁ	ZŠ Francisciho, Poprad
	Tomáš KOSTIČ	ZŠ Karpatská, Svidník
4.	Michaela BRUTENIČOVÁ	ZŠ Pugačevova, Humenné
5.	Michal DINDA	ZŠ Dr. Fischera, Kežmarok
	Dominik DROZD	ZŠ Bernolákova, Vranov nad Topľou
	Michal SISÁK	ZŠ B. Krpelca, Bardejov
8.	Peter JEVČÁK	ZŠ Kudlovská, Humenné
	Zuzana KOŠELOVÁ	ZŠ Šmeralova, Prešov
10.	Marek BIROŠ	ZŠ Ľubotice
	Zuzana GOLECOVÁ	ZŠ Komenského, Stará Ľubovňa

Zadania súťažných úloh

Kategória Z4

Z4 – I – 1

Doplňte do prázdnych políčok na obr. 1 čísla od 1 do 7 každé raz tak, aby matematické operácie boli vypočítané správne. (*Miroslava Smitková*)



Obr. 1

Z4 – I – 2

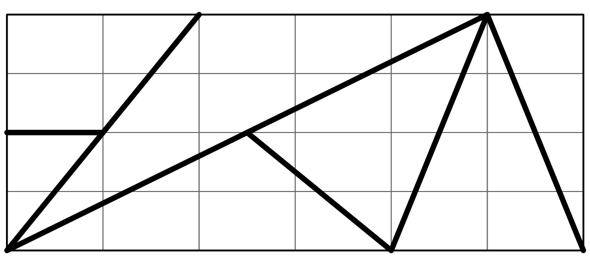
Miško a Jarka sú súrodenci. Jarka má narodeniny niekedy v januári. O Miškovi vieme, že v roku 2010 bola od Jarkiných narodenín po Miškove narodeniny presne jedna sobota trinásteho. Zistite, v ktorom mesiaci sa narodil Miško. Nájdite všetky možnosti. (*Monika Dillingerová*)

Z4 – I – 3

Koľko trojciferných čísiel má prvú cifru trikrát väčšiu ako druhú a tretiu cifru o 4 menšiu ako prvú? Vypíšte všetky také čísla. (*Miroslava Smitková, Monika Dillingerová*)

Z4 – I – 4

Jožkovi sa podarilo rozlámať čokoládu na kúsky ako na obr. 2.



Obr. 2

Dala by sa táto čokoláda bez ďalšieho lámania spravodlivo rozdeliť dvom kamarátom? Ako? Dala by sa táto čokoláda spravodlivo rozdeliť bez ďalšieho lámania trom kamarátom? Ako? Ak sa to dá, nájdite vždy aspoň jeden spôsob. (*Monika Dillingerová*)

Z4 – I – 5

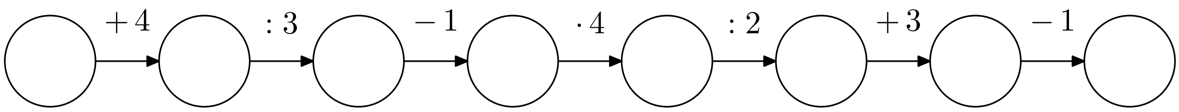
Na stôl do kuchyne položila mamička vylúskaný hrach v miske. Danka a Janka pochúťku objavili a začali hrášky z misky vyjedať. Dohodli sa, že Danka si bude z misky brať vždy 2 guľôčky hrachu. Janka si bude pravidelne brať 2, 4, 1 a 1 guľôčku hrachu a potom začne opäť od začiatku. Najskôr si vzala z misky Danka 2 hrášky, potom Janka 2, opäť Danka 2, Janka svoje 4, atď. Zrazu prišla do kuchyne ich mamička a prekvapene zhíkla: „Veď v miske už zostala iba polovica hrachu!“ Dievčatá začali byť zvedavé a spočítali, že tam ostalo 45 guľôčok hrachu. Ak sa mamička nemýlila a zvyšných 45 guľôčok bola naozaj polovica z toho, čo bolo v miske na začiatku, zjedli potom dievčatá rovnako alebo niektorá zjedla viac? Koľko hráškov zjedla Danka? A koľko ich zjedla Janka? (*Monika Dillingerová*)

Z4 – I – 6

V našej bytovke je 10 bytov. Niektoré majú 4, niektoré 3 a niektoré 2 okná. Na našej bytovke je celkom 27 okien. Bytov s dvomi oknami je v bytovke najviac. Koľko je ktorých bytov? (*Monika Dillingerová*)

Z4 – II – 1

Doplňte do prázdnych políčok na obr. 3 osem za sebou idúcich jednociferných čísel každé raz tak, aby matematické operácie boli vypočítané správne.



Obr. 3

(*Monika Dillingerová, Miroslava Smitková*)

Z4 – II – 2

Pred školou v Kocúrkove stáli bicykle a autá. Keby sa tu zastavilo ešte jedno auto, bolo by ich toľko ako bicyklov. Keby sa tu zastavilo ešte 5 bicyklov, mali by rovnako veľa kolies ako autá. Koľko stálo pred školou áut? Koľko tam stálo bicyklov? (*Monika Dillingerová*)

Z4 – II – 3

Janko dostal na Vianoce knihu, ktorú hneď v ten deň začal čítať. V posledný januárový deň nového roka Janko zistil, že prečítal 60 strán, čo je polovica knihy a povedal si, že ak chce knihu celú dočítať do svojich narodenín, musí každý deň prečítať 5 strán. Kedy (presne ktorý deň a mesiac) má Janko narodeniny? (*Miroslava Smitková*)

KATEGÓRIA Z5

Z5 – I – 1

Vlado má napísané dve čísla, 541 a 293. Zo šiestich použitých cifier má najskôr vyškrtnúť dve tak, aby súčet dvoch takto získaných čísel bol najväčší možný. Potom má z pôvodných šiestich cifier vyškrtnúť dve tak, aby rozdiel dvoch takto získaných čísel bol najmenší možný (odčíta menšie číslo od väčšieho). Ktoré cifry má v jednotlivých prípadoch vyškrtnúť? (*Michaela Petrová*)

Z5 – I – 2

V Trpasličom kráľovstve merajú vzdialenosti v rozprávkových míľach (rm), v rozprávkových siahach (rs) a v rozprávkových lakťoch (rl). Na vstupnej bráne do Trpasličieho kráľovstva je nasledujúca tabuľka na prevody medzi ich jednotkami a našimi:

- $1\,\mathrm{rm} = 385\,\mathrm{cm}$,
- $1\,\mathrm{rs} = 105\,\mathrm{cm}$,
- $1\,\mathrm{rl} = 250\,\mathrm{mm}$.

Kráľ Trpaslík I. nechal premerať vzdialenosť od zámockej brány k rozprávkovému jazierku. Traja pozvaní zememerači dospeli k týmto výsledkom: prvý nameral 4 rm 4 rs 18 rl, druhý 3 rm 2 rs 43 rl a tretí 6 rm 1 rs 1 rl. Jeden z nich sa však pomýlil. Aká je vzdialenosť v centimetroch od zámockej brány k rozprávkovému jazierku? O koľko centimetrov sa pomýlil nepresný zememerač? (*Michaela Petrová*)

Z5 – I – 3

Štyria kamaráti Adam, Mojmír a dvojčatá Peter a Pavol získali na hodinách matematiky celkom 52 smajlíkov, každý aspoň 1. Pritom dvojčatá dokopy majú 33, ale najúspešnejší bol Mojmír. Koľko ich získal Adam? (*Marta Volfová*)

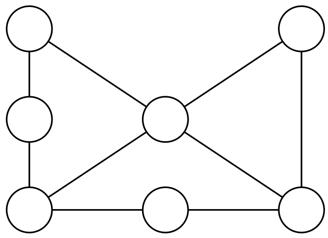
Z5 – I – 4

Pán Tik a pán Tak predávali budíky v predajniach „Pred Rohom“ a „Za Rohom“. Pán Tik tvrdil, že „Pred Rohom“ predali o 30 budíkov viac ako „Za Rohom“, zatiaľ čo pán

Tak tvrdil, že „Pred Rohom“ predali trikrát viac budíkov ako „Za Rohom“. Nakoniec sa ukázalo, že Tik aj Tak mali pravdu. Koľko budíkov predali v oboch predajniach celkom? (*Libuše Hozová*)

Z5 – I – 5

Do krúžkov na obr. 4 doplňte čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6 a 7 tak, aby súčet čísel na každej vyznačenej línii bol rovnaký. Žiadne číslo pritom nesmie byť použité viackrát.



Obr. 4

(*Miroslava Smitková*)

Z5 – I – 6

Pani Šikovná čakala večer hostí. Najskôr pre nich pripravila 25 chlebíčkov. Potom spočítala, že by si každý hosť mohol zobrať dva, ale po troch by už na všetkých nevyšlo. Povedala si, že keby vyrobila ešte 10 chlebíčkov, mohol by si každý hosť vziať tri, ale štyri nie každý. To sa jej zdalo stále málo. Nakoniec prichystala dokopy 52 chlebíčkov. Každý hosť by si teda mohol vziať štyri chlebíčky, ale po päť by už na všetkých nevyšlo. Koľko hostí pani Šikovná čakala? Ona sama drží diétu a večer nikdy neje.

(*Libor Šimůnek*)

Z5 – II – 1

Miro napísal do radu všetky násobky čísla sedem počnúc 7 a končiac 70. Medzi číslami nepísal čiarky ani medzery a čísla napísal od najmenšieho po najväčšie. V tomto rade čísel potom škrtol jedenásť cifier. Zistite, aké najväčšie a aké najmenšie číslo mohol dostať. (*Michaela Petrová*)

Z5 – II – 2

Rytier Miloslav sa chystal na turnaj do Veselína. Turnaj sa konal v stredu. Keďže cesta z Rytierova, kde býva, do Veselína trvá až dva dni, vyrazil už v pondelok. Cesta vedie cez ďalšie dve mestá, Kostín a Zubín. Prvý deň jazdy prešiel Miloslav 25 míľ a prenocoval v Zubíne. Druhý deň, v utorok, šťastne došiel do Veselína. Turnaj s prehľadom vyhral, takže keď sa vo štvrtok vracal späť, išiel rýchlejšie. Prešiel o 6 míľ viac ako v pondelok a prenocoval v Kostíne. V piatok prešiel zvyšných 11 míľ a bol doma. Zistite vzdialenosť medzi Zubínom a Veselínom. (*Michaela Petrová*)

Z5 – II – 3

Správca kúpeľov pán Slniečko kúpil pre kúpeľných hostí 58 slnečníkov. Niektoré boli červené a niektoré žlté. Červené boli balené v krabiciach po deviatich kusoch. Žlté boli balené v krabiciach po štyroch kusoch. Oba druhy slnečníkov nakupoval po celých baleniach. Koľko mohlo byť žltých slnečníkov? (*Libuše Hozová*)

Kategória Z6

Z6 – I – 1

Keď Bernard natieral dvere garáže, pretrel omylom aj stupnicu nástenného vonkajšieho teplomera. Trubička s ortuťou však zostala nepoškodená, a tak Bernard pôvodnú stupnicu prelepil pásikom vlastnej výroby. Na nej starostlivo narysoval dieliky, všetky boli rovnako veľké a označené číslami. Jeho dielik mal však inú veľkosť ako pôvodný dielik, ktorý predstavoval jeden stupeň Celzia, a aj nulu Bernard umiestnil inde, ako bolo $0°$C. Takto začal Bernard merať teplotu vo vlastných jednotkách: bernardoch. Keď by mal teplomer ukazovať teplotu $18°$C, ukazoval 23 bernardov. Keď by mal ukazovať $9°$C, ukazoval 8 bernardov. Aká je teplota v °C, ak vidí Bernard na svojom teplomere teplotu 13 bernardov? (*Libor Šimůnek*)

Z6 – I – 2

Firma vyrábajúca mikrovlnné rúry predávala na trhu vždy po krátkej prezentácii svoje modely. Vo štvrtok predala osem rovnakých mikrovlniek. Deň nato už ponúkala aj svoj nový model a ľudia si tak mohli kúpiť ten istý ako vo štvrtok alebo nový. V sobotu chceli všetci záujemcovia nový model a firma ich predala v ten deň šesť. V jednotlivých dňoch utŕžila 590 €, 720 € a 840 €, neprezradíme však, ktorá suma patrí ku ktorému dňu.

- Koľko stál starší model mikrovlnky?
- Koľko nových modelov predala firma v piatok?

Poznámka. Cena každej mikrovlnky bola v celých eurách. (*Libor Šimůnek*)

Z6 – I – 3

Vojto napísal číslo 2010 stokrát bez medzier za sebou. Koľko štvorciferných a koľko päťciferných súmerných čísel bolo skrytých v tomto zápise? (Súmerné číslo je také číslo, ktoré je rovnaké, či ho čítame spredu alebo zozadu, napr. 39193.) (*Libuše Hozová*)

Z6 – I – 4

Súčin vekov deda Vendelína a jeho vnúčat je 2010. Súčet vekov všetkých vnúčat je 12 a žiadne dve vnúčatá nemajú rovnako veľa rokov. Koľko vnúčat má dedo Vendelín? (*Libuše Hozová*)

Z6 – I – 5

Na tábore sa dvaja vedúci s dvoma táborníkmi a psom potrebovali dostať cez rieku a k dispozícii mali iba jednu loďku s nosnosťou 65 kg. Našťastie všetci (okrem psa) dokázali loďku cez rieku priviezť. Každý vedúci vážil približne 60 kg, každý táborník 30 kg a pes 12 kg. Ako si mali počínať? Koľkokrát najmenej musela loďka prekonať rieku? (*Marta Volfová*)

Z6 – I – 6

Karol obstaval krabicu s obdĺžnikovým dnom obrubou z kocôčok. Použil práve 22 kocôčok s hranou 1 dm, ktoré staval tesne vedľa seba v jednej vrstve. Medzi obrubou a stenami krabice nebola medzera a celá táto stavba mala obdĺžnikový pôdorys. Aké rozmery mohlo mať dno krabice? (*Marie Krejčová*)

Z6 – II – 1

Pani Hundravá mala 1. júla 2010 na svojom mobile kredit 3,14 €. Z kreditu sa postupne odpočítavajú čiastky za hovory a to tak, že za každú začatú minútu sa odčíta 9 centov. Textové správy pani Hundravá nepíše a nevyužíva ani žiadne ďalšie platené služby. Svoj kredit dobíja podľa potreby a to vždy sumou 8 €. Dňa 31. decembra 2010 bol jej kredit 7,06 €. Koľkokrát minimálne dobíjala pani Hundravá za uvedený polrok svoj kredit? (*Libor Šimůnek*)

Z6 – II – 2

V obdĺžniku $KLMN$ je vzdialenosť priesečníka jeho uhlopriečok od priamky KL o 2 cm menšia ako jeho vzdialenosť od priamky LM. Obvod obdĺžnika je 56 cm. Aký je obsah obdĺžnika $KLMN$? (*Libuše Hozová*)

Z6 – II – 3

V lete sa u babičky stretlo všetkých jej šesť vnúčat. O vnúčatách nám babička prezradila, že

- Martinka sa niekedy musí starať o bračeka Tomáška, ktorý je o 8 rokov mladší,
- Vierka, ktorá je o 7 rokov staršia ako Ivana, rada rozpráva strašidelné príbehy,

- s Martinkou sa často hašterí o rok mladší Jaromír,
- Tomáško je o 11 rokov mladší ako Katka,
- Ivana často hnevá svojho o 4 roky staršieho brata Jaromíra,
- chlapci majú dokopy 13 rokov.

Koľko rokov majú jednotlivé deti? (*Marta Volfová*)

Kategória Z7

Z7 – I – 1

Súčin cifier ľubovoľného viacciferného čísla je vždy menší ako toto číslo. Ak počítame súčin cifier daného čísla, potom súčin cifier tohto súčinu, potom znova súčin cifier nového súčinu atď., nutne po nejakom počte krokov dospejeme k jednocifernému číslu. Tento počet krokov nazývame *perzistencia* čísla. Napr. číslo 723 má perzistenciu 2, lebo $7 \cdot 2 \cdot 3 = 42$ (1. krok) a $4 \cdot 2 = 8$ (2. krok).

- Nájdite najväčšie nepárne číslo, ktoré má navzájom rôzne cifry a perzistenciu 1.
- Nájdite najväčšie párne číslo, ktoré má navzájom rôzne nenulové cifry a perzistenciu 1.
- Nájdite najmenšie prirodzené číslo, ktoré má perzistenciu 3.

(*Svetlana Bednářová*)

Z7 – I – 2

Ondro na výlete utratil $\frac{2}{3}$ peňazí a zo zvyšku dal ešte $\frac{2}{3}$ na školu pre deti z Tibetu. Za $\frac{2}{3}$ nového zvyšku kúpil malý darček pre mamičku. Z deravého vrecka stratil $\frac{4}{5}$ zvyšných peňazí, a keď zo zvyšných dal polovicu malej sestričke, ostalo mu práve jedno euro. S akou sumou išiel Ondro na výlet? (*Marta Volfová*)

Z7 – I – 3

Silvia prehlásila: „Sme tri sestry, ja som najmladšia, Lívia je staršia o tri roky a Edita o osem. Naša mamka rada počuje, že všetky (aj s ňou) máme v priemere 21 rokov. Pritom keď som sa narodila, mala mamka už 29.“ Pred koľkými rokmi sa Silvia narodila?

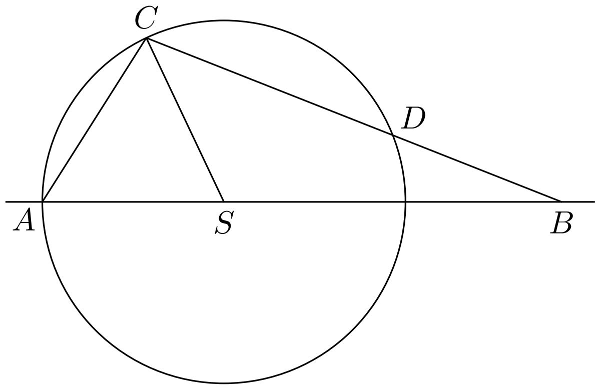
(*Marta Volfová*)

Z7 – I – 4

Juro mal napísané štvorciferné číslo. Toto číslo zaokrúhlil na desiatky, na stovky a na tisícky a všetky tri výsledky zapísal pod pôvodné číslo. Všetky štyri čísla správne sčítal a dostal 5 443. Ktoré číslo mal Juro napísané? (*Michaela Petrová*)

Z7 – I – 5

Laco narysoval kružnicu so stredom S a body A, B, C, D, ako ukazuje obr. 5. Zistil, že úsečky SC a BD sú rovnako dlhé. V akom pomere sú veľkosti uhlov ASC a SCD?



Obr. 5

(*Libuše Hozová*)

Z7 – I – 6

Nájdite všetky trojciferné prirodzené čísla, ktoré sú bezo zvyšku deliteľné číslom 6 a v ktorých môžeme vyškrtnúť ktorúkoľvek cifru a vždy dostaneme dvojciferné prirodzené číslo, ktoré je tiež bezo zvyšku deliteľné číslom 6. (*Libor Šimůnek*)

Z7 – II – 1

Mám kartičku, na ktorej je napísané štvorciferné prirodzené číslo. V tomto čísle môžeme vyškrtnúť akékoľvek dve cifry a vždy dostaneme dvojciferné prirodzené číslo, ktoré je bezo zvyšku deliteľné číslom 5. Koľko takých štvorciferných prirodzených čísel existuje? (Pozor, napr. 06 nie je dvojciferné číslo!) (*Libor Šimůnek*)

Z7 – II – 2

Karol a Vojto zistili, že kuchynské hodiny na chalupe každú hodinu nadbehnú o 1,5 minúty a hodiny v spálni každú hodinu pol minúty meškajú. Druhého apríla na pravé poludnie nastavili hodiny na rovnaký a správny čas. Určte, kedy opäť budú (bez ďalšieho opravovania) k uchynské hodiny ukazovať správny čas; h odiny v spálni ukazovať správny čas; o boje hodiny ukazovať rovnaký (aj keď nie nutne správny) čas. (Hodiny v kuchyni aj v spálni majú dvanásťhodinový ciferník.) (*Marta Volfová*)

Z7 – II – 3

V trojuholníku ABC označíme stredy strán CB a CA písmenami K a L. Vieme, že štvoruholník $ABKL$ má obvod 10 cm a trojuholník KLC má obvod 6 cm. Vypočítajte dĺžku úsečky KL. (*Ján Mazák*)

Kategória Z8

Z8 – I – 1

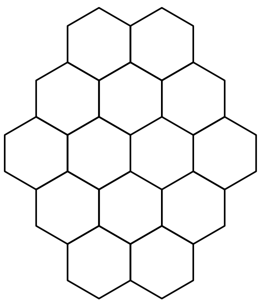
Martin má na papieri napísané päťciferné číslo s piatimi rôznymi ciframi a nasledujúcimi vlastnosťami:

- škrtnutím druhej cifry zľava (t. j. cifry na mieste tisícok) dostane číslo, ktoré je deliteľné dvoma,
- škrtnutím tretej cifry zľava dostane číslo, ktoré je deliteľné tromi,
- škrtnutím štvrtej cifry zľava dostane číslo, ktoré je deliteľné štyrmi,
- škrtnutím piatej cifry zľava dostane číslo, ktoré je deliteľné piatimi,
- ak neškrtne žiadnu cifru, má číslo deliteľné šiestimi.

Ktoré najväčšie číslo môže mať Martin napísané na papieri? (*Michaela Petrová*)

Z8 – I – 2

Karol sa snažil do prázdnych políčok na obr. 6 vpísať prirodzené čísla od 1 do 14 tak, aby žiadne číslo nebolo použité viackrát a súčet všetkých čísel na každej priamej línii bol rovnaký. Po chvíli si uvedomil, že to nie je možné. Ako by ste Karolovo pozorovanie zdôvodnili vy? (Pod priamou líniou rozumieme skupinu všetkých susediacich políčok, ktorých stredy ležia na jednej priamke.) (*Svetlana Bednářová*)



Obr. 6

Z8 – I – 3

Cena encyklopédie „Hádanky, rébusy a hlavolamy“ bola znížená o 62,5 %. Matej zistil, že obe ceny (pred znížením aj po ňom) sú dvojciferné čísla a dajú sa vyjadriť rovnakými ciframi, len v rôznom poradí. O koľko € bola encyklopédia zlacnená? (*Marta Volfová*)

Z8 – I – 4

Rozdeľte kocku s hranou 8 cm na menšie zhodné kocôčky tak, aby súčet ich povrchov bol päťkrát väčší ako povrch pôvodnej kocky. Aký bude objem malej kocôčky a koľko centimetrov bude merať jej hrana? (*Marta Volfová*)

Z8 – I – 5

Klára, Lenka a Matej si precvičovali písomné delenie so zvyškom. Ako delenca mal každý zadané iné prirodzené číslo, ako deliteľa však mali všetci rovnaké prirodzené číslo. Lenkin delenec bol o 30 väčší ako Klárin. Matejov delenec bol o 50 väčší ako Lenkin. Kláre vyšiel vo výsledku zvyšok 8, Lenke zvyšok 2 a Matejovi zvyšok 4. Všetci počítali bez chyby. Aký deliteľ mali žiaci zadaný? (*Libor Šimůnek*)

Z8 – I – 6

V rovnoramennom lichobežníku $ABCD$ sú uhlopriečky AC a DB na seba kolmé, ich dĺžka je 8 cm a dĺžka najdlhšej strany AB je tiež 8 cm. Vypočítajte obsah tohto lichobežníka. (*Marie Krejčová*)

Z8 – II – 1

Myslím si dvojciferné prirodzené číslo. Súčet cifier tohto čísla je deliteľný tromi. Keď odčítam od mysleného čísla číslo 27, dostanem iné dvojciferné prirodzené číslo, zapísané pomocou tých istých cifier, ale v opačnom poradí. Aké čísla si môžem myslieť? (*Libuše Hozová*)

Z8 – II – 2

Martina si vymyslela postup na výrobu číselnej postupnosti. Začala číslom 52. Z neho odvodila ďalší člen postupnosti takto: $2^2 + 2 \cdot 5 = 4 + 10 = 14$. Potom pokračovala rovnakým spôsobom ďalej a z čísla 14 dostala $4^2 + 2 \cdot 1 = 16 + 2 = 18$. Vždy teda vezme číslo, odtrhne z neho cifru na mieste jednotiek, túto odtrhnutú cifru umocní na druhú a k výslednej mocnine pripočíta dvojnásobok čísla, ktoré ostalo po odtrhnutí poslednej cifry. Aké je 2011. číslo takto vytvorenej postupnosti? (*Monika Dillingerová*)

Z8 – II – 3

V kružnici k so stredom S a polomerom 52 mm sú dané dve na seba kolmé tetivy AB a CD. Ich priesečník X je od stredu S vzdialený 25 mm. Aká dlhá je tetiva CD, ak dĺžka tetivy AB je 96 mm? (*Libuše Hozová*)

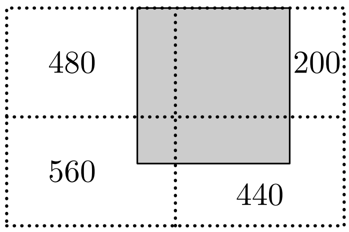
Kategória Z9

Z9 – I – 1

Pán Vlk čakal na zastávke pred školou na autobus. Z okna počul slová učiteľa: „Aký povrch môže mať pravidelný štvorboký hranol, ak viete, že dĺžky všetkých jeho hrán sú v centimetroch vyjadrené celými číslami a že jeho objem je…“ Toto dôležité číslo pán Vlk nepočul, pretože práve prešlo okolo auto. Za chvíľu počul žiaka oznamujúceho výsledok $918\,\mathrm{cm}^2$. Učiteľ na to povedal: „Áno, ale úloha má celkom štyri riešenia. Hľadajte ďalej.“ Viac sa pán Vlk už nedozvedel, lebo nastúpil do svojho autobusu. Keďže matematika bola vždy jeho hobby, vybral si v autobuse ceruzku a papier a po čase určil aj zvyšné tri riešenia učiteľovej úlohy. Spočítajte ich aj vy. (*Libor Šimůnek*)

Z9 – I – 2

Na obr. 7 sú bodkovanou čiarou znázornené hranice štyroch rovnako veľkých obdĺžnikových parciel. Sivou farbou je vyznačená zastavaná plocha. Tá má tvar obdĺžnika, ktorého jedna strana tvorí zároveň hranice parciel. Zapísané čísla vyjadrujú obsah nezastavanej plochy na jednotlivých parcelách, a to v m^2. Vypočítajte obsah celkovej zastavanej plochy. (*Libor Šimůnek*)



Obr. 7

Z9 – I – 3

Vĺčkovci lisovali jablkový mušt. Mali ho v dvoch rovnako objemných súdkoch, v oboch takmer rovnaké množstvo. Keby z prvého preliali do druhého 1 liter, mali by v oboch rovnako, ale to by ani jeden súdok nebol plný. Tak radšej preliali 9 litrov z druhého do prvého. Potom bol prvý súdok úplne plný a mušt v druhom zapĺňal práve tretinu objemu. Koľko litrov muštu vylisovali, aký bol objem súdkov a koľko muštu v nich bolo pôvodne? (*Marta Volfová*)

Z9 – I – 4

Pán Rýchly a pán Ťarbák v rovnakom čase vyštartovali na tú istú turistickú trasu, len pán Rýchly ju išiel zhora z horskej chaty a pán Ťarbák naopak od autobusu dolu v mestečku na chatu smerom nahor. Keď bolo 10 hodín, stretli sa na trase. Pán Rýchly sa ponáhľal a už o 12:00 bol v cieli. Naopak pán Ťarbák postupoval pomaly, a tak dorazil na chatu až o 18:00. O koľkej páni vyrazili na cestu, ak vieme, že každý z nich išiel celý čas svojou stálou rýchlosťou? (*Marta Volfová*)

Z9 – I – 5

Kružnici so stredom S a polomerom 12 cm sme opísali pravidelný šesťuholník $ABCDEF$ a vpísali pravidelný šesťuholník $TUVXYZ$ tak, aby bod T bol stredom strany BC. Vypočítajte obsah a obvod štvoruholníka $TCUS$. (*Marie Krejčová*)

Z9 – I – 6

Peter a Pavol oberali v sade jablká a hrušky. V pondelok zjedol Peter o 2 hrušky viac ako Pavol a o 2 jablká menej ako Pavol. V utorok Peter zjedol o 4 hrušky menej ako v pondelok. Pavol zjedol v utorok o 3 hrušky viac ako Peter a o 3 jablká menej ako Peter. Pavol zjedol za oba dni 12 jabĺk a v utorok zjedol rovnaký počet jabĺk ako hrušiek. V utorok večer obaja chlapci zistili, že počet jabĺk, ktoré spolu za oba dni zjedli, je rovnako veľký ako počet spoločne zjedených hrušiek. Koľko jabĺk zjedol Peter v pondelok a koľko hrušiek zjedol Pavol v utorok? (*Libuše Hozová*)

Z9 – II – 1

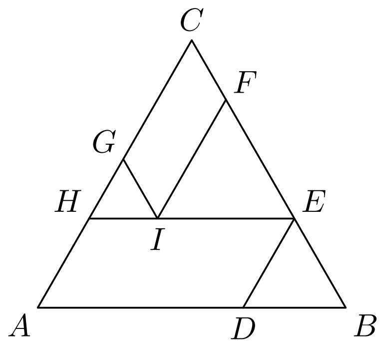
Koľko existuje dvojíc štvorciferných palindrómov, ktorých rozdiel je 3 674? Palindróm je číslo, ktoré ostane rovnaké, keď ho napíšeme odzadu. (*Libor Šimůnek*)

Z9 – II – 2

Na obr. 8 sú rovnostranné trojuholníky ABC, DBE, IEF a HIG. Obsahy trojuholníkov DBE, IEF a HIG sú v pomere 9 : 16 : 4. V akom pomere sú

a) dĺžky úsečiek HI a IE,

b) obsahy trojuholníkov ABC a HEC? (*Karel Pazourek*)



Obr. 8

Z9 – II – 3

Dané sú štvorce $ABCD$ a $KLMN$. Dĺžky strán oboch štvorcov sú v centimetroch vyjadrené celým číslom. Bod K je vnútorným bodom úsečky AB, bod L leží v bode B a bod M je vnútorným bodom úsečky BC. Obsah šesťuholníka $AKNMCD$ je $225\,\mathrm{cm}^2$. Aký môže byť obvod tohto šesťuholníka? Nájdite všetky možnosti. (*Libor Šimůnek*)

Z9 – II – 4

Martina si vymyslela postup na výrobu číselnej postupnosti. Začala číslom 128. Z neho odvodila ďalší člen postupnosti takto: $8^2 + 5 = 64 + 5 = 69$. Potom pokračovala rovnakým spôsobom a z čísla 69 dostala $9^2 + 5 = 81 + 5 = 86$. Vždy teda z predchádzajúceho člena postupnosti vezme cifru na mieste jednotiek, umocní ju na druhú a k tejto mocnine pripočíta konštantu 5.

a) Aké je 2011. číslo tejto postupnosti?
b) Martina opäť začala číslom 128, ale namiesto čísla 5 zvolila ako konštantu iné prirodzené číslo. Tentoraz jej na 2011. mieste vyšlo číslo 16. Akú konštantu zvolila v tomto prípade? (*Monika Dillingerová*)

Z9 – III – 1

Usporiadateľom výstavy „Na Mesiac a ešte ďalej" sa po prvom výstavnom dni zdalo, že málo ľudí si kúpilo na pamiatku leták o rakete Apollo 11. Preto znížili jeho cenu o 12 centov. Tým sa síce druhý deň zvýšil počet kupcov letáku o 10 %, ale celková denná tržba za letáky sa znížila o 5 %. Koľko centov stál leták Apollo 11 po zľave? (*Michaela Petrová*)

Z9 – III – 2

Lichobežník $ABCD$, v ktorom strana AB je rovnobežná so stranou CD, je rozdelený uhlopriečkami, ktoré sa pretínajú v bode M, na štyri časti. Určte jeho obsah, keď viete, že trojuholník AMD má obsah $8\,\mathrm{cm}^2$ a trojuholník DCM má obsah $4\,\mathrm{cm}^2$. (*Marta Volfová*)

Z9 – III – 3

Cyril a Mirka počítali zo zbierky tú istú úlohu. Zadané boli dĺžky hrán kvádra v milimetroch a úlohou bolo vypočítať jeho objem a povrch. Cyril najskôr previedol zadané dĺžky na centimetre. Počítalo sa mu tak ľahšie, pretože aj po prevode boli všetky dĺžky vyjadrené celými číslami. Obom vyšli správne výsledky, Mirke v mm^3 a mm^2, Cyrilovi v cm^3 a cm^2. Mirkin výsledok v mm^3 bol o 17 982 väčší ako Cyrilov výsledok v cm^3. Mirkin výsledok v mm^2 bol o 5 742 väčší ako Cyrilov výsledok v cm^2. Určte dĺžky hrán kvádra. (*Libor Šimůnek*)

Z9 – III – 4

Na tabuli sú napísané čísla 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ a $\frac{1}{6}$. Na tabuľu môžeme pripísať súčet alebo súčin ľubovoľných dvoch čísel z tabule. Je možné takýmto pripisovaním dosiahnuť, aby sa na tabuli objavilo číslo

a) $\dfrac{1}{60}$; b) $\dfrac{2011}{375}$; c) $\dfrac{1}{7}$?

(*Veronika Bachratá, Ján Mazák*)

Kategória C

C – I – 1

Lucia napísala na tabuľu dve nenulové čísla. Potom medzi ne postupne vkladala znamienka plus, mínus, krát a delené a všetky štyri príklady správne vypočítala. Medzi výsledkami boli iba dve rôzne hodnoty. Aké dve čísla mohla Lucia na tabuľu napísať?

(*Peter Novotný*)

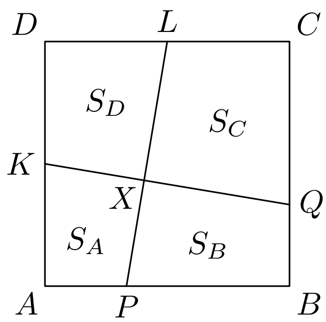
C – I – 2

Dokážte, že výrazy $23x + y$, $19x + 3y$ sú deliteľné číslom 50 pre rovnaké dvojice prirodzených čísel x, y. (*Jaroslav Zhouf*)

C – I – 3

Máme štvorec $ABCD$ so stranou dĺžky 1 cm. Body K a L sú stredy strán DA a DC. Bod P leží na strane AB tak, že $|BP| = 2|AP|$. Bod Q leží na strane BC tak, že $|CQ| = 2|BQ|$. Úsečky KQ a PL sa pretínajú v bode X. Obsahy štvoruholníkov $APXK$, $BQXP$, $QCLX$ a $LDKX$ označíme postupne S_A, S_B, S_C, S_D (obr. 9).

a) Dokážte, že $S_B = S_D$.
b) Vypočítajte rozdiel $S_C - S_A$.
c) Vysvetlite, prečo neplatí $S_A + S_C = S_B + S_D$. (*Peter Novotný*)



Obr. 9

C – I – 4

V skupine n žiakov sa spolu niektorí kamarátia. Vieme, že každý má medzi ostatnými aspoň štyroch kamarátov. Učiteľka chce žiakov rozdeliť na dve nanajvýš štvorčlenné skupiny tak, že každý bude mať vo svojej skupine aspoň jedného kamaráta.

a) Ukážte, že v prípade $n = 7$ sa dajú žiaci požadovaným spôsobom vždy rozdeliť.

b) Zistite, či možno žiakov takto vždy rozdeliť aj v prípade $n = 8$. (*Tomáš Jurík*)

C – I – 5

Dokážte, že najmenší spoločný násobok $[a, b]$ a najväčší spoločný deliteľ (a, b) ľubovoľných dvoch kladných celých čísel a, b spĺňajú nerovnosť

$$a \cdot (a, b) + b \cdot [a, b] \geqq 2ab.$$

Zistite, kedy v tejto nerovnosti nastane rovnosť. (*Jaromír Šimša*)

C – I – 6

Je daný lichobežník $ABCD$. Stred základne AB označme P. Uvažujme rovnobežku so základňou AB, ktorá pretína úsečky AD, PD, PC, BC postupne v bodoch K, L, M, N.

a) Dokážte, že $|KL| = |MN|$.

b) Určte polohu priamky KL tak, aby platilo aj $|KL| = |LM|$. (*Jaroslav Zhouf*)

C – S – 1

Po okruhu behajú dvaja atléti, každý inou konštantnou rýchlosťou. Keď bežia opačnými smermi, stretávajú sa každých 10 minút, keď bežia rovnakým smerom, stretávajú sa každých 40 minút. Za aký čas zabehne okruh rýchlejší atlét? (*Vojtech Bálint*)

C – S – 2

Daný je štvorec so stranou dĺžky 6 cm. Nájdite množinu stredov všetkých priečok štvorca, ktoré ho delia na dva štvoruholníky, z ktorých jeden má obsah $12\,\mathrm{cm}^2$. (Priečka štvorca je úsečka, ktorej krajné body ležia na stranách štvorca.) (*Pavel Leischner*)

C – S – 3

Nech x, y sú také kladné celé čísla, že obe čísla $3x + 5y$ a $5x + 2y$ sú deliteľné číslom 60. Zdôvodnite, prečo číslo 60 delí aj súčet $2x + 3y$. (*Jaromír Šimša*)

C – II – 1

Na tabuli sú napísané práve tri (nie nutne rôzne) reálne čísla. Vieme, že súčet ľubovoľných dvoch z nich je tam napísaný tiež. Určte všetky trojice takých čísel. (*Ján Mazák*)

C – II – 2

Nájdite všetky kladné celé čísla n, pre ktoré je číslo $n^2 + 6n$ druhou mocninou celého čísla. (*Vojtech Bálint*)

C – II – 3

V lichobežníku $ABCD$ má základňa AB dĺžku 18 cm a základňa CD dĺžku 6 cm. Pre bod E strany AB platí $2|AE| = |EB|$. Body K, L, M, ktoré sú postupne ťažiskami trojuholníkov ADE, CDE, BCE, tvoria vrcholy rovnostranného trojuholníka.

a) Dokážte, že priamky KM a CM zvierajú pravý uhol.

b) Vypočítajte dĺžky ramien lichobežníka $ABCD$. (*Pavel Calábek*)

C – II – 4

Nech x, y, z sú kladné reálne čísla. Ukážte, že aspoň jedno z čísel $x + y + z - xyz$ a $xy + yz + zx - 3$ je nezáporné. (*Stanislava Sojáková*)

Kategória B

B – I – 1

V obore reálnych čísel vyriešte sústavu

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + y^2} &= z + 1,\\ \sqrt{y^2 + z^2} &= x + 1,\\ \sqrt{z^2 + x^2} &= y + 1.\end{aligned}$$

(*Tomáš Jurík*)

B – I – 2

Uvažujme vnútorný bod P daného obdĺžnika $ABCD$ a označme postupne Q, R obrazy bodu P v súmernostiach podľa stredov A, C. Predpokladajme, že priamka QR pretne strany AB a BC vo vnútorných bodoch M a N. Zostrojte množinu všetkých bodov P, pre ktoré platí $|MN| = |AB|$. (*Jaroslav Švrček*)

B – I – 3

Nech a, b, c sú reálne čísla, ktorých súčet je 6. Dokážte, že aspoň jedno z čísel

$$ab + bc, \quad bc + ca, \quad ca + ab$$

nie je väčšie ako 8. (*Ján Mazák*)

B – I – 4

Nájdite všetky celé čísla n, pre ktoré je zlomok

$$\frac{n^3 + 2\,010}{n^2 + 2\,010}$$

rovný celému číslu. (*Pavel Novotný*)

B – I – 5

Zaoberajme sa otázkou, ktoré trojuholníky ABC s ostrými uhlami pri vrcholoch A a B majú nasledujúcu vlastnosť: Ak vedieme stredom výšky z vrcholu C tri priamky rovnobežné so stranami trojuholníka ABC, pretnú ich tieto priamky v šiestich bodoch ležiacich na jednej kružnici.

a) Ukážte, že vyhovuje každý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C.
b) Vysvetlite, prečo žiadny iný trojuholník ABC nevyhovuje. (*Jaromír Šimša*)

B – I – 6

Určte počet desaťciferných čísel, v ktorých možno škrtnúť dve susedné cifry a dostať tak číslo 99-krát menšie. (*Ján Mazák*)

B – S – 1

V obore reálnych čísel vyriešte rovnicu

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x} = p$$

s neznámou x a reálnym parametrom p. (*Vojtech Bálint*)

B – S – 2

Pozdĺž kružnice je rozmiestnených 16 reálnych čísel so súčtom 7.

a) Dokážte, že existuje úsek piatich susedných čísel so súčtom aspoň 2.
b) Určte najmenšie k také, že v opísanej situácii možno vždy nájsť úsek k susedných čísel so súčtom aspoň 3. (*Ján Mazák*)

B – S – 3

Zvonka daného trojuholníka ABC sú zostrojené štvorce $ACDE$, $BCGF$. Dokážte, že $|AG| = |BD|$. Ďalej ukážte, že stredy oboch štvorcov spolu so stredmi úsečiek AB a DG sú vrcholmi štvorca. (*Pavel Leischner*)

B – II – 1

Súčin kladných reálnych čísel a, b, c je 60 a ich súčet je 15. Dokážte nerovnosť

$$(a+b)(a+c) \geqq 60$$

a zistite, pre ktoré také čísla a, b, c nastane rovnosť. (*Jaromír Šimša*)

B – II – 2

Nájdite všetky dvojice kladných celých čísel a, b, pre ktoré číslo b je deliteľné číslom a a súčasne číslo $3a+4$ je deliteľné číslom $b+1$. (*Pavel Novotný*)

B – II – 3

Nech M, N sú postupne vnútorné body strán AB, BC rovnostranného trojuholníka ABC, pre ktoré platí $|AM| : |MB| = |BN| : |NC| = 2 : 1$. Označme P priesečník priamok AN a CM. Dokážte, že priamky BP a AN sú navzájom kolmé.
(*Jaroslav Švrček*)

B – II – 4

Zapíšeme všetky päťciferné čísla, v ktorých sa každá z cifier 4, 5, 6, 7, 8 vyskytuje práve raz. Potom jedno (ľubovoľné z nich) škrtneme a všetky zvyšné sčítame. Aké sú možné hodnoty ciferného súčtu takého výsledku? (*Šárka Gergelitsová*)

Kategória A

A – I – 1

Korene rovnice

$$ax^4 + bx^2 + a = 1$$

v obore reálnych čísel sú štyri po sebe idúce členy rastúcej aritmetickej postupnosti. Pritom jeden z týchto členov je zároveň riešením rovnice

$$bx^2 + ax + a = 1.$$

Určte všetky možné hodnoty reálnych parametrov a, b. (*Peter Novotný*)

A – I – 2

Nech k, n sú prirodzené čísla. Z platnosti tvrdenia „číslo $(n-1)(n+1)$ je deliteľné číslom k“ Adam usúdil, že buď číslo $n-1$, alebo číslo $n+1$ je deliteľné k. Určte všetky prirodzené čísla k, pre ktoré je Adamova úvaha správna pre každé prirodzené n.

(*Ján Mazák*)

A – I – 3

Dané sú kružnice k, l, ktoré sa pretínajú v bodoch A, B. Označme K, L postupne dotykové body ich spoločnej dotyčnice zvolené tak, že bod B je vnútorným bodom trojuholníka AKL. Na kružniciach k a l zvoľme postupne body N a M tak, aby bod A bol vnútorným bodom úsečky MN. Dokážte, že štvoruholník $KLMN$ je tetivový práve vtedy, keď priamka MN je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku AKL.

(*Jaroslav Švrček*)

A – I – 4

Majme $6n$ žetónov až na farbu zhodných, po troch z každej z $2n$ farieb. Pre každé prirodzené číslo $n > 1$ určte počet p_n všetkých takých rozdelení $6n$ žetónov na dve kôpky po $3n$ žetónoch, že žiadne tri žetóny rovnakej farby nie sú v rovnakej kôpke. Dokážte, že p_n je nepárne číslo práve vtedy, keď $n = 2^k$ pre vhodné prirodzené k.

(*Jaromír Šimša*)

A – I – 5

Na každej stene kocky je napísané práve jedno celé číslo. V jednom kroku zvolíme ľubovoľné dve susedné steny kocky a čísla na nich napísané zväčšíme o 1. Určte nutnú a postačujúcu podmienku pre očíslovanie stien kocky na začiatku, aby po konečnom počte vhodných krokov mohli byť na všetkých stenách kocky rovnaké čísla.

(*Peter Novotný*)

A – I – 6

Dokážte, že v každom trojuholníku ABC s ostrým uhlom pri vrchole C (pri zvyčajnom označení dĺžok strán a veľkostí vnútorných uhlov) platí nerovnosť

$$(a^2 + b^2)\cos(\alpha - \beta) \leqq 2ab.$$

Zistite, kedy nastane rovnosť. (*Jaromír Šimša*)

A – S – 1

Určte všetky reálne čísla c, ktoré možno s oboma koreňmi kvadratickej rovnice

$$x^2 + \frac{5}{2}x + c = 0$$

usporiadať do trojčlennej aritmetickej postupnosti. (*Pavel Calábek, Jaroslav Švrček*)

A – S – 2

Nech P, Q, R sú body prepony AB pravouhlého trojuholníka ABC, pre ktoré platí $|AP| = |PQ| = |QR| = |RB| = \frac{1}{4}|AB|$. Dokážte, že priesečník M kružníc opísaných trojuholníkom APC a BRC, ktorý je rôzny od bodu C, je totožný so stredom S úsečky CQ. (*Peter Novotný*)

A – S – 3

Dokážte, že pre ľubovoľné dve rôzne prvočísla p, q väčšie ako 2 platí nerovnosť

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{q}{p}\right| > \frac{4}{\sqrt{pq}}.$$

(*Jaromír Šimša*)

A – II – 1

Rozhodnite, či medzi všetkými osemcifernými násobkami čísla 4 je viac tých, ktoré vo svojom dekadickom zápise obsahujú cifru 1, alebo tých, ktoré cifru 1 neobsahujú. (*Ján Mazák*)

A – II – 2

Daný je trojuholník ABC s obsahom S. Vnútri trojuholníka, ktorého vrcholmi sú stredy strán trojuholníka ABC, je ľubovoľne zvolený bod O. Označme A', B', C' postupne obrazy bodov A, B, C v stredovej súmernosti podľa bodu O. Dokážte, že šesťuholník $AC'BA'CB'$ má obsah $2S$. (*Pavel Leischner*)

A – II – 3

Určte všetky dvojice (m, n) kladných celých čísel, pre ktoré je číslo $4(mn + 1)$ deliteľné číslom $(m + n)^2$. (*Tomáš Jurík*)

A – II – 4

Nech M je množina šiestich navzájom rôznych kladných celých čísel, ktorých súčet je 60. Všetky ich napíšeme na steny kocky, na každú práve jedno z nich. V jednom kroku zvolíme ľubovoľné tri steny kocky, ktoré majú spoločný vrchol, a každé z čísel na týchto troch stenách zväčšíme o 1. Určte počet všetkých takých množín M, ktorých čísla možno napísať na steny kocky uvedeným spôsobom tak, že po konečnom počte vhodných krokov budú na všetkých stenách rovnaké čísla. (*Peter Novotný*)

A – III – 1

Určte veľkosti vnútorných uhlov všetkých trojuholníkov ABC s vlastnosťou: Vnútri strán AB, AC existujú postupne body K, M, ktoré s priesečníkom L priamok MB a KC tvoria tetivové štvoruholníky $AKLM$ a $KBCM$ so zhodnými opísanými kružnicami. (*Jaroslav Švrček*)

A – III – 2

Určte všetky trojice prvočísel (p, q, r), pre ktoré platí

$$(p + 1)(q + 2)(r + 3) = 4pqr.$$

(*Jaromír Šimša*)

A – III – 3

Predpokladajme, že reálne čísla x, y, z vyhovujú sústave rovníc

$$x + y + z = 12, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 54.$$

Dokážte, že potom platí nasledujúce tvrdenie:

a) Každé z čísel xy, yz, zx je aspoň 9, avšak nanajvýš 25.

b) Niektoré z čísel x, y, z je nanajvýš 3 a iné z nich je aspoň 5. (*Jaromír Šimša*)

A – III – 4

Uvažujme kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$ s reálnymi koeficientmi $a \geqq 2$, $b \geqq 2$, $c \geqq 2$. Adam a Boris hrajú nasledujúcu hru: Ak je na ťahu Adam, vyberie jeden z koeficientov trojčlena a nahradí ho *súčtom* zvyšných dvoch. Ak je na ťahu Boris, vyberie jeden z koeficientov a nahradí ho *súčinom* zvyšných dvoch. Adam začína a hráči sa pravidelne striedajú. Hru vyhráva ten, po ktorého ťahu má vzniknutý trojčlen dva rôzne reálne korene. V závislosti od koeficientov a, b, c počiatočného trojčlena určte, ktorý z hráčov má víťaznú stratégiu. (*Michal Rolínek*)

A – III – 5

V ostrouhlom trojuholníku ABC, ktorý nie je rovnostranný, označme P pätu výšky z vrcholu C na stranu AB, V priesečník výšok, O stred kružnice opísanej, D priesečník polpriamky CO so stranou AB a E stred úsečky CD. Dokážte, že priamka EP prechádza stredom úsečky OV. (*Karel Horák*)

A – III – 6

Nech $\mathbb{R}^+$ je množina všetkých kladných reálnych čísel. Určte všetky funkcie $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ také, že pre ľubovoľné $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí

$$f(x) \cdot f(y) = f(y) \cdot f\bigl(x \cdot f(y)\bigr) + \frac{1}{xy}.$$

(*Pavel Calábek*)

Riešenia súťažných úloh

Kategória C

C – I – 1

Označme hľadané čísla a, b. Keďže $b \neq 0$, nutne $a + b \neq a - b$. Každé z čísel $a \cdot b$, $a : b$ je rovné buď $a + b$, alebo $a - b$. Stačí teda rozobrať štyri prípady a v každom z nich vyriešiť sústavu rovníc. Ukážeme si však rýchlejší postup.

Ak by platilo

$$a + b = a \cdot b \quad \text{a} \quad a - b = a : b \qquad \text{alebo} \qquad a + b = a : b \quad \text{a} \quad a - b = a \cdot b,$$

vynásobením rovností by sme v oboch prípadoch dostali $a^2 - b^2 = a^2$, čo je v spore s $b \neq 0$. Preto sú čísla $a \cdot b$ a $a : b$ buď obe rovné $a + b$ alebo obe rovné $a - b$. Tak či tak musí platiť $a \cdot b = a : b$, odkiaľ po úprave $a(b^2 - 1) = 0$. Keďže $a \neq 0$, nutne $b \in \{1, -1\}$. Ale ak $b = 1$, tak štyri výsledky sú postupne $a + 1$, $a - 1$, a, a, čo sú pre každé a až tri rôzne hodnoty. Pre $b = -1$ máme výsledky $a - 1$, $a + 1$, $-a$, $-a$. Dva rôzne výsledky to budú práve vtedy, keď $a - 1 = -a$ alebo $a + 1 = -a$. V prvom prípade dostávame $a = \frac{1}{2}$, v druhom $a = -\frac{1}{2}$.

Lucia mohla na začiatku na tabuľu napísať buď čísla $\frac{1}{2}$ a -1, alebo čísla $-\frac{1}{2}$ a -1.

C – I – 2

Predpokladajme, že pre dvojicu prirodzených čísel x, y platí $50 \mid 23x + y$. Potom pre nejaké prirodzené číslo k platí $23x + y = 50k$. Z tejto rovnosti dostaneme $y = 50k - 23x$, čiže $19x + 3y = 19x + 3(50k - 23x) = 150k - 50x = 50(3k - x)$, takže číslo $19x + 3y$ je násobkom čísla 50.

Podobne to funguje aj z druhej strany. Ak pre nejakú dvojicu prirodzených čísel x, y platí $50 \mid 19x + 3y$, tak $19x + 3y = 50l$ pre nejaké prirodzené číslo l. Z tejto rovnosti vyjadríme číslo y; dostaneme $y = (50l - 19x)/3$ (ďalší postup by bol podobný, aj keby sme vyjadrili x miesto y). Po dosadení dostaneme

$$23x + y = 23x + \frac{50l - 19x}{3} = \frac{69x + 50l - 19x}{3} = \frac{50 \cdot (x + l)}{3}.$$

O výslednom zlomku vieme, že je to prirodzené číslo. Čitateľ tohto zlomku je deliteľný číslom 50. V menovateli je len číslo 3, ktoré je nesúdeliteľné s 50, preto sa číslo 50 nemá s čím z menovateľa vykrátiť a teda číslo $23x + y$ je deliteľné 50.

Iné riešenie. Zrejme $3 \cdot (23x + y) - (19x + 3y) = 50x$, čiže ak 50 delí jedno z čísel $23x + y$ a $19x + 3y$, tak delí aj druhé z nich.

C – I – 3

a) Štvoruholníky $ABQK$ a $DAPL$ sú zhodné (jeden z nich je obrazom druhého v otočení o 90° so stredom v strede štvorca $ABCD$). Preto majú aj rovnaký obsah, čiže $S_A + S_B = S_A + S_D$. Z toho hneď dostaneme $S_B = S_D$.

b) Ľahko sa nám podarí vypočítať obsah pravouhlého lichobežníka $ABQK$, lebo poznáme dĺžky základní aj výšku. Dostaneme

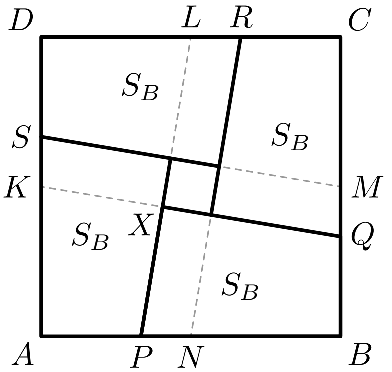
$$S_A + S_B = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12}\,\mathrm{cm}^2.$$

Podobne výpočtom obsahu lichobežníka $PBCL$ dostaneme

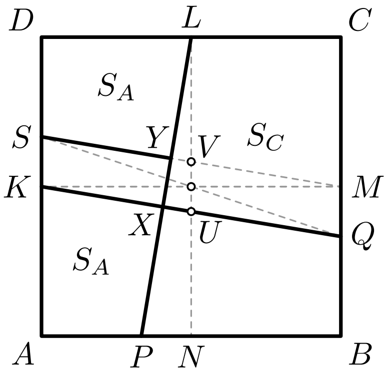
$$S_C + S_B = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12}\,\mathrm{cm}^2.$$

Odčítaním prvej získanej rovnosti od druhej dostávame $S_C - S_A = \frac{7}{12} - \frac{5}{12} = \frac{1}{6}\,\mathrm{cm}^2$.

c) Nerovnosť medzi obsahmi $S_A + S_C$ a $S_B + S_D$ (ktorých priame výpočty nie sú v silách žiakov 1. ročníka) môžeme zdôvodniť nasledovným spôsobom: Súčet týchto dvoch obsahov je $1\,\mathrm{cm}^2$, takže sa nerovnajú práve vtedy, keď je jeden z nich menší ako $\frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$. Bude to obsah $S_B + S_D$ (rovný $2S_B$, ako už vieme), keď ukážeme, že obsah S_B je menší ako $\frac{1}{4}\,\mathrm{cm}^2$. Urobíme to tak, že do celého štvorca $ABCD$ umiestnime bez prekrytia štyri kópie štvoruholníka $PBQX$. Ako ich umiestnime, vidíme na obr. 10, pričom M, N sú stredy strán BC, AB a R, S body, ktoré delia strany CD, DA v pomere 1 : 2.



Obr. 10



Obr. 11

Iné riešenie časti c). Tentoraz namiesto nerovnosti $S_B + S_D < \frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$ dokážeme ekvivalentnú nerovnosť $S_A + S_C > \frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$. Preto sa pokúsime „premiestniť" štvoruholník $APXK$ tak, aby ležal pri štvoruholníku $XQCL$ a aby sa ich obsahy dali geometricky sčítať. Uhly AKQ a DLP sú zhodné a $|AK| = |DL|$, preto môžeme štvoruholník $APXK$ premiestniť vo štvorci $ABCD$ do jeho „rohu" D tak, že k štvoruholníku $XQCL$ priľahne pozdĺž strany LX svojou stranou LY, pričom Y je priesečník úsečiek SM

a PL z pôvodného riešenia (obr. 11). Obsah $S_A + S_C$ je potom obsahom šesťuholníka $DSYXQC$. Prečo je väčší ako $\frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$, môžeme zdôvodniť napríklad takto:

Úsečka spájajúca bod L so stredom U úsečky KQ pretne úsečku SM v jej strede V. Štvoruholník $UQMV$ má obsah rovný polovici obsahu rovnobežníka $KQMS$, teda rovný obsahu trojuholníka KMS. Preto má šesťuholník $DSVUQC$ obsah rovný obsahu štvoruholníka $KMCD$, t. j. polovici obsahu štvorca $ABCD$. Obsah S_A+S_C je ešte väčší, a to o obsah štvoruholníka $XUVY$. Teda naozaj $S_A + S_C > \frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$.

C – I – 4

a) Jediný spôsob, ako rozdeliť 7 žiakov na dve nanajvýš štvorčlenné skupiny, je mať jednu trojčlennú a jednu štvorčlennú skupinu. Každý žiak zo štvorčlennej skupiny pritom bude mať vo svojej skupine kamaráta pri hocijakom rozdelení, pretože sa nemôže stať, že by všetci jeho kamaráti boli v trojčlennej skupine (sú aspoň štyria).

Takže stačí rozdeliť žiakov tak, že každý v trojčlennej skupine má v nej kamaráta. Preto do nej dáme hociktorého zo žiakov a k nemu niektorých jeho dvoch kamarátov.

b) Vezmime hocijaké rozdelenie 8 žiakov na dve štvorčlenné skupiny. Ak toto rozdelenie nevyhovuje učiteľkinmu zámeru, máme nejakého žiaka X, ktorý je *zle zaradený* – má všetkých svojich štyroch kamarátov A, B, C, D v druhej skupine. Ukážeme, že vieme vymeniť X a niektorého zo žiakov A, B, C, D tak, že počet zle zaradených žiakov sa zmenší.

Po každej zo štyroch výmen prichádzajúcich do úvahy X prestane byť zle zaradený a všetci traja žiaci, ktorí budú s X v skupine, budú dobre zaradení, lebo sú to kamaráti žiaka X. Žiaci K, L, M, ktorí boli pred výmenou v skupine s X, môžu byť po výmene zle zaradení len vtedy, ak boli zle zaradení aj predtým (lebo X nemal ani jedného z nich za kamaráta). Keďže žiak K má štyroch kamarátov a nekamaráti sa s X, musí mať aspoň jedného kamaráta Y aj v skupine obsahujúcej žiakov A, B, C, D, a keď žiaka Y vymeníme s X, bude mať vo svojej novej skupine za kamaráta K.

Ukázali sme teda, že výmenou žiakov X a Y počet zle zaradených žiakov klesol. Dostali sme nejaké nové rozdelenie; ak v ňom je aspoň jeden žiak zle zaradený, môžeme zopakovať predošlý postup a opäť znížiť počet zle zaradených žiakov. Po nanajvýš ôsmich krokoch dostaneme rozdelenie, v ktorom už nie sú žiadni zle zaradení žiaci.

Iné riešenie časti b). Uvažujme všetky možné rozdelenia žiakov na dve štvorčlenné skupiny. Rozdelenia, kde niekto nemá vo svojej skupine žiadneho kamaráta, budeme nazývať *zlé*, ostatné budú *dobré*.

Koľko je zlých rozdelení? Ak má žiak X aspoň päť kamarátov, aspoň jeden z nich musí byť v jeho skupine. Ak má žiak X iba štyroch kamarátov, a všetci sú v druhej skupine, máme len jedno jediné rozdelenie s touto vlastnosťou. Celkovo teda k danému žiakovi X existuje nanajvýš jedno rozdelenie, ktoré je zlé. Za X môžeme zobrať jedného z 8 rôznych žiakov, preto zlých rozdelení je nanajvýš 8 (niektoré sme možno zarátali viackrát). Pritom všetkých rozdelení je $\binom{7}{3} = 35$, čiže aspoň 27 z nich je dobrých.

C – I – 5

Nerovnosť by bolo ľahké dokázať, ak by niektorý z dvoch sčítancov na ľavej strane bol sám osebe aspoň taký, ako pravá strana. Číslo $[a,b]$ je zjavne násobkom čísla a. Ak $[a,b] \geqq 2a$, tak $b[a,b] \geqq 2ab$ a v zadanej nerovnosti platí dokonca ostrá nerovnosť, lebo číslo $a(a,b)$ je kladné. Ak $[a,b] < 2a$, tak neostáva iná možnosť, ako $[a,b] = a$. To však nastane iba v prípade, keď $b \mid a$. V tomto prípade $(a,b) = b$ a v zadanej nerovnosti nastane rovnosť.

Iné riešenie. Označme $d = (a,b)$, takže $a = ud$ a $b = vd$ pre nesúdeliteľné prirodzené čísla u, v. Z toho hneď vieme, že $[a,b] = uvd$. Keďže

$$a \cdot (a,b) + b \cdot [a,b] = ud^2 + uv^2d^2 = u(1+v^2)d^2,$$
$$2ab = 2uvd^2,$$

je vzhľadom na $ud^2 > 0$ nerovnosť zo zadania ekvivalentná s nerovnosťou $1 + v^2 \geqq 2v$, čiže $(v-1)^2 \geqq 0$, čo platí pre každé v. Rovnosť nastane práve vtedy, keď $v = 1$, čiže $b \mid a$.

Iné riešenie. Označme $d = (a,b)$. Je známe, že $[a,b] \cdot (a,b) = ab$. Po vyjadrení $[a,b]$ z tohto vzťahu, dosadení do zadanej nerovnosti a ekvivalentnej úprave dostaneme ekvivalentnú nerovnosť $d^2 + b^2 \geqq 2bd$, ktorá platí, lebo $(d-b)^2 \geqq 0$. Rovnosť nastáva pre $d = b$, čiže v prípade $b \mid a$.

C – I – 6

a) Priamky AB, CD a KL sú rovnobežné, preto v našej situácii vieme nájsť viacero dvojíc podobných trojuholníkov (sú podobné podľa vety uu). Tieto podobnosti vieme výhodne zapísať pomocou pomerov vzdialeností, čo využijeme v dôkaze toho, že úsečky KL a MN majú rovnakú dĺžku.

Označme x vzdialenosť priamok AB a KL a y vzdialenosť priamok KL a CD. Tieto vzdialenosti nám umožnia vyjadriť koeficient podobnosti trojuholníkov – tento koeficient je rovný nielen pomeru zodpovedajúcich si strán, ale aj zodpovedajúcich si výšok.

Trojuholníky APD a KLD sú podobné, preto

$$\frac{|KL|}{|AP|} = \frac{y}{x+y}.$$

Aj trojuholníky BPC a NMC sú podobné, preto

$$\frac{|MN|}{|PB|} = \frac{y}{x+y}.$$

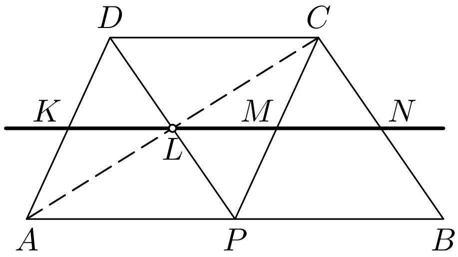
Celkovo dostávame

$$\frac{|KL|}{|AP|} = \frac{y}{x+y} = \frac{|MN|}{|PB|},$$

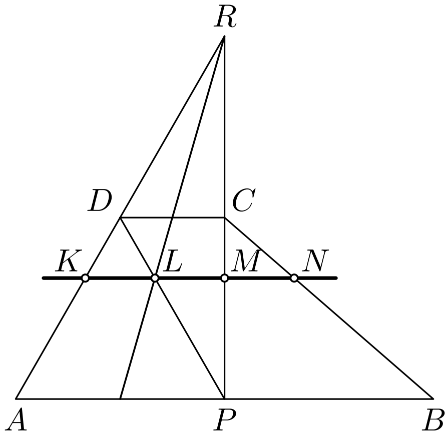
a keďže $|AP| = |PB|$, máme $|KL| = |MN|$.

b) Chceme zostrojiť bod L taký, že $|KL| = |LM|$. Rozoberieme dva prípady podľa toho, či je priamka PC rovnobežná s priamkou AD, alebo nie.

Ak je priamka PC rovnobežná s AD, tak štvoruholník $APCD$ je rovnobežník a jediný vyhovujúci bod L je stred úsečky PD, čiže priesečník uhlopriečok rovnobežníka $APCD$ (podmienka $|KL| = |LM|$ tu vyjadruje zhodnosť trojuholníkov KLD a MLP, ktorá nastane práve vtedy, keď $|LD| = |LP|$, obr. 12).



Obr. 12



Obr. 13

Ak sa priamky PC a AD pretínajú v nejakom bode R (obr. 13), tak bod L bude priesečníkom úsečky DP s priamkou, na ktorej leží ťažnica trojuholníka APR. Požadovaná vlastnosť $|KL| = |LM|$ vyplýva z toho, že rovnoľahlosť so stredom v bode R zobrazujúca úsečku AP na úsečku KM zobrazí stred úsečky AP na stred úsečky KM.

Z uvedených konštrukcií vyplýva, že vyhovujúci bod L je vždy jediný, čiže vieme skonštruovať práve jednu rovnobežku s priamkou AB s vyhovujúcimi vlastnosťami.

Poznámka. Ako sme uviedli, v prípade, že priamky PC a AD sú rovnobežné, bude vyhovujúcim bodom L priesečník uhlopriečok rovnobežníka $APCD$. Ak priamky PC a AD rovnobežné nie sú, štvoruholník $APCD$ už nebude rovnobežník, ale jeho priesečník uhlopriečok je výborným kandidátom na bod L. Výpočtom s využitím podobnosti sa dá ukázať, že je to naozaj tak a jediným vyhovujúcim bodom L je priesečník uhlopriečok lichobežníka $APCD$.

C – S – 1

Označme rýchlosti bežcov v_1 a v_2 tak, že $v_1 > v_2$ (rýchlosti udávame v okruhoch za minútu). Predstavme si, že atléti vyštartujú z rovnakého miesta, ale opačným smerom. V okamihu ich ďalšieho stretnutia po 10 minútach bude súčet dĺžok oboch prebehnutých úsekov zodpovedať presne dĺžke jedného okruhu, teda $10v_1 + 10v_2 = 1$.

Ak bežia atléti z rovnakého miesta rovnakým smerom, dôjde k ďalšiemu stretnutiu, akonáhle rýchlejší atlét zabehne o jeden okruh viac ako pomalší. Preto $40v_1 - 40v_2 = 1$.

Dostali sme sústavu dvoch lineárnych rovníc s neznámymi v_1, v_2:

$$10v_1 + 10v_2 = 1,$$
$$40v_1 - 40v_2 = 1,$$

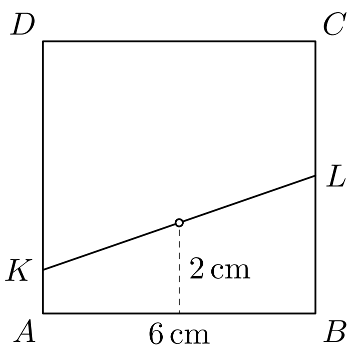
ktorú vyriešime napríklad tak, že k štvornásobku prvej rovnice pripočítame druhú, čím dostaneme $80v_1 = 5$, čiže $v_1 = \frac{1}{16}$. Zaujíma nás, ako dlho trvá rýchlejšiemu bežcovi prebehnúť jeden okruh, teda hodnota podielu $1/v_1$. Po dosadení vypočítanej hodnoty v_1 dostaneme *odpoveď*: 16 minút.

Poznámka. Úlohu možno riešiť aj úvahou: za 40 minút ubehnú atléti spolu 4 okruhy (to vyplýva z prvej podmienky), pritom rýchlejší o 1 okruh viac ako pomalší (to vyplýva z druhej podmienky). To teda znamená, že prvý za uvedenú dobu ubehne 2,5 okruhu a druhý 1,5 okruhu, takže rýchlejší ubehne jeden okruh za $40/2{,}5 = 16$ minút.

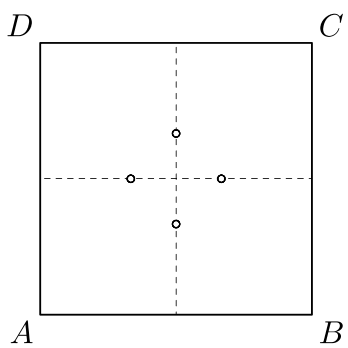
C – S – 2

Ak priečka delí štvorec na dva štvoruholníky, musia ich koncové body ležať na protiľahlých stranách štvorca. V takom prípade sú oba štvoruholníky lichobežníkmi alebo pravouholníkmi (pre potreby tohto riešenia budeme pravouholník považovať za špeciálny lichobežník). Označme daný štvorec $ABCD$, koncové body priečky označme K a L. Predpokladajme, že bod K leží na strane AD, potom bod L leží na strane BC. Jeden zo štvoruholníkov $KABL$ a $KDCL$ má podľa zadania obsah $12\,\mathrm{cm}^2$; nech je to napr. lichobežník $KABL$.

Obsah lichobežníka vypočítame ako súčin jeho výšky s dĺžkou strednej priečky. Výška je v našom prípade rovná dĺžke strany štvorca, čiže 6 cm. Jeho stredná priečka má teda dĺžku 2 cm. Z toho vyplýva, že stred úsečky KL musí ležať na osi strany AB vo vzdialenosti 2 cm od stredu strany AB (obr. 14). Platí to aj naopak: Ak stred úsečky KL leží v opísanej polohe, bude štvoruholník $KABL$ lichobežník s obsahom $12\,\mathrm{cm}^2$.



Obr. 14



Obr. 15

Ak budeme namiesto lichobežníka $KABL$ uvažovať lichobežník $KDCL$, vyjde stred priečky KL na osi úsečky CD vo vzdialenosti 2 cm od stredu strany CD.

Ak priečka KL spája body na stranách AB a CD, dostaneme ďalšie dva možné body ležiace na spojnici stredov úsečiek AD a BC. Hľadanú množinu teda tvoria štyri body, ktoré ležia na priečkach spájajúcich stredy protiľahlých strán štvorca vo vzdialenosti 1 cm od jeho stredu (obr. 15).

C – S – 3

Na základe predpokladu zo zadania vieme, že existujú kladné celé čísla m a n, pre ktoré platí

$$3x + 5y = 60m,$$
$$5x + 2y = 60n.$$

Na tieto vzťahy sa môžeme pozerať ako na sústavu lineárnych rovníc s neznámymi x a y a parametrami m a n. Vyriešiť ju vieme ľubovoľnou štandardnou metódou, napríklad od dvojnásobku prvej rovnice odčítame päťnásobok druhej a vyjadríme x, potom dopočítame y. Dostaneme

$$x = \frac{60(5n - 2m)}{19}, \qquad y = \frac{60(5m - 3n)}{19}.$$

Keďže čísla 19 a 60 sú nesúdeliteľné, sú obe čísla x a y deliteľné 60. Preto aj súčet $2x + 3y$ je deliteľný 60.

Iné riešenie. Vieme, že $60 = 3 \cdot 4 \cdot 5$. Pritom čísla 3, 4, 5 sú po dvoch nesúdeliteľné, preto na dôkaz deliteľnosti 60 stačí dokázať deliteľnosť jednotlivými číslami 3, 4, 5.

Keďže číslo $3x + 5y$ je deliteľné 5, je aj x deliteľné 5. Podobne z relácie $5 \mid 5x + 2y$ vyplýva $5 \mid y$. Preto 5 delí aj $2x + 3y$.

Keďže číslo $3x + 5y$ je deliteľné 3, je y deliteľné 3. Vzhľadom na $3 \mid 5x + 2y$ máme tiež $3 \mid 5x$, a teda $3 \mid x$. Preto 3 delí aj $2x + 3y$.

Keďže $4 \mid 3x + 5y$ a $4 \mid 5x + 2y$, máme aj $4 \mid (3x + 5y) + (5x + 2y) = 8x + 7y$, takže $4 \mid y$. Ďalej napríklad $4 \mid 3x + 5y$, takže $4 \mid 3x$, čiže $4 \mid x$. Preto 4 delí aj $2x + 3y$.

Iné riešenie. Vyjadríme výraz $2x + 3y$ pomocou $3x + 5y$ a $5x + 2y$. Budeme hľadať čísla p a q také, že $2x + 3y = p(3x + 5y) + q(5x + 2y)$ pre každú dvojicu celých čísel x, y. Jednoduchou úpravou dostaneme rovnicu

$$(2 - 3p - 5q)x + (3 - 5p - 2q)y = 0. \tag{1}$$

Ak budú hľadané čísla p a q spĺňať sústavu

$$3p + 5q = 2,$$
$$5p + 2q = 3,$$

bude zrejme rovnosť (1) splnená pre každú dvojicu x, y. Vyriešením sústavy dostaneme $p = 11/19$, $q = 1/19$. Dosadením do (1) dostávame vyjadrenie

$$19(2x + 3y) = 11(3x + 5y) + (5x + 2y),$$

z ktorého vyplýva, že spolu s číslami $3x + 5y$ a $5x + 2y$ je súčasne deliteľné 60 aj číslo $2x + 3y$, pretože čísla 19 a 60 sú nesúdeliteľné.

C – II – 1

Označme čísla napísané na tabuli a, b, c. Súčet $a + b$ sa tiež nachádza na tabuli, je teda rovný jednému z čísel a, b, c. Keby $a + b$ bolo rovné a alebo b, bola by na tabuli aspoň jedna nula. Rozoberieme preto tri prípady podľa počtu núl napísaných na tabuli.

Ak sú na tabuli aspoň dve nuly, ľahko sa presvedčíme, že súčet každých dvoch čísel z tabule je tam tiež. Dostávame, že trojica $t, 0, 0$ je pre ľubovoľné reálne číslo t riešením úlohy.

Ak je na tabuli práve jedna nula, je tam trojica $a, b, 0$, pričom a aj b sú nenulové čísla. Súčet $a + b$ teda nie je rovný ani a, ani b, musí preto byť rovný 0. Dostávame tak ďalšiu trojicu $t, -t, 0$, ktorá je riešením úlohy pre ľubovoľné reálne číslo t.

Ak na tabuli nie je ani jedna nula, súčet $a+b$ nie je rovný ani a, ani b, preto $a+b = c$. Z rovnakých dôvodov je $b + c = a$ a $c + a = b$. Dostali sme sústavu troch lineárnych rovníc s neznámymi a, b, c, ktorú môžeme vyriešiť. Avšak hneď z prvých dvoch rovníc po dosadení vyjde $b + (a + b) = a$, čiže $b = 0$. To je v spore s tým, že na tabuli žiadna nula nie je.

Záver. Úlohe vyhovujú trojice $t, 0, 0$ a $t, -t, 0$ pre ľubovoľné reálne číslo t a žiadne iné.

C – II – 2

Zrejme $n^2 + 6n > n^2$ a zároveň $n^2 + 6n < n^2 + 6n + 9 = (n + 3)^2$. V uvedenom intervale ležia iba dve druhé mocniny celých čísel: $(n + 1)^2$ a $(n + 2)^2$.

V prvom prípade máme $n^2 + 6n = n^2 + 2n + 1$, teda $4n = 1$, tomu však žiadne celé číslo n nevyhovuje.

V druhom prípade máme $n^2 + 6n = n^2 + 4n + 4$, teda $2n = 4$. Dostávame tak jediné riešenie $n = 2$.

Iné riešenie. Budeme skúmať rozklad $n^2 + 6n = n(n + 6)$. Spoločný deliteľ oboch čísel n a $n + 6$ musí deliť aj ich rozdiel, preto ich najväčším spoločným deliteľom môžu byť len čísla 1, 2, 3 alebo 6. Tieto štyri možnosti rozoberieme.

Keby boli čísla n a $n+6$ nesúdeliteľné, muselo by byť každé z nich druhou mocninou. Rozdiel dvoch druhých mocnín prirodzených čísel však nikdy nie je 6. Pre malé čísla sa o tom ľahko presvedčíme, a pre $k \geqq 4$ už je rozdiel susedných štvorcov k^2 a $(k - 1)^2$ aspoň 7. Vlastnosť, že 1, 3, 4, 5 a 7 je päť najmenších rozdielov dvoch druhých mocnín, využijeme aj ďalej.

Ak je najväčším spoločným deliteľom čísel n a $n+6$ číslo 2, je $n = 2m$ pre vhodné m, ktoré navyše nie je deliteľné tromi. Ak $n(n + 6) = 4m(m + 3)$ je štvorec, musí byť aj $m(m + 3)$ štvorec. Čísla m a $m + 3$ sú však nesúdeliteľné, preto musí byť každé z nich druhou mocninou prirodzeného čísla. To nastane len pre $m = 1$, čiže $n = 2$. Ľahko overíme, že $n(n + 6)$ je potom naozaj druhou mocninou celého čísla.

Ak je najväčším spoločným deliteľom čísel n a $n + 6$ číslo 3, je $n = 3m$ pre vhodné nepárne m. Ak $n(n+6) = 9m(m+2)$ je štvorec, musia byť nesúdeliteľné čísla m a $m+2$

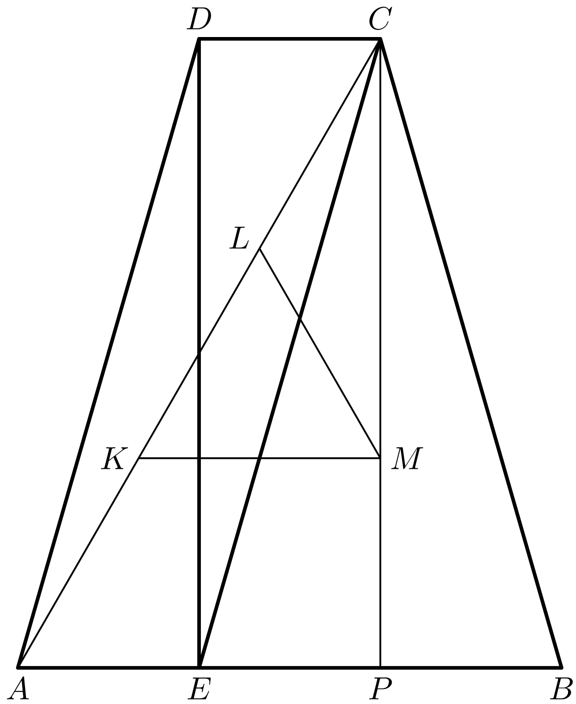
tiež štvorce. Také dva štvorce však neexistujú.

Ak je najväčším spoločným deliteľom čísel n a $n + 6$ číslo 6, je $n = 6m$ pre vhodné m. Ak $n(n + 6) = 36m(m + 1)$ je štvorec, musia byť štvorce aj obe nesúdeliteľné čísla m a $m + 1$, čo nastane len pre $m = 0$, my však hľadáme len kladné čísla n.

Úlohe vyhovuje jedine $n = 2$.

C – II – 3

Štvoruholník $AECD$ je rovnobežník, pretože jeho strany AE a CD sú rovnobežné a rovnako dlhé (obe merajú 6 cm). Na jeho uhlopriečke AC tak leží ťažnica trojuholníka ADE z vrcholu A aj ťažnica trojuholníka CDE z vrcholu C, a preto na tejto priamke ležia aj body K a L (obr. 16). Navyše vieme, že ťažisko trojuholníka delí jeho ťažnice v pomere 2 : 1, preto sú úsečky AK, KL a LC rovnako dlhé.



Obr. 16

Bod L je stredom úsečky KC, preto na osi súmernosti úsečky KM leží nielen výška rovnostranného trojuholníka KLM, ale aj stredná priečka trojuholníka KMC. Preto je priamka CM kolmá na KM.

Ostáva vypočítať dĺžky ramien lichobežníka $ABCD$. Označme P stred úsečky EB. Keďže CM je kolmá na KM, je ťažnica CP kolmá na EB, takže trojuholník EBC je rovnoramenný, a teda aj daný lichobežník $ABCD$ je rovnoramenný. Dĺžku ramena BC teraz vypočítame z pravouhlého trojuholníka PBC, v ktorom poznáme dĺžku odvesny PB. Pre druhú odvesnu CP zrejme platí

$$|CP| = \frac{3}{2}|CM| = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}|KM|,$$

čo jednoducho vyplýva z vlastností trojuholníka KMC. A keďže z podobnosti trojuholníkov KMC a APC máme $|KM| = \frac{2}{3}|AP|$, dostávame (počítané v centimetroch)

$$|CP| = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}|KM| = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3}|AP| = \sqrt{3} \cdot \frac{2}{3}|AB| = 12\sqrt{3}.$$

Potom

$$|BC| = \sqrt{|PB|^2 + |PC|^2} = \sqrt{36 + 12^2 \cdot 3} = 6\sqrt{1 + 12} = 6\sqrt{13}.$$

Ramená daného lichobežníka majú dĺžku $6\sqrt{13}$ cm.

Alternatívny dôkaz kolmosti priamok KM a CM. Keďže bod L je stredom úsečky KC a zároveň $|LK| = |LM|$, lebo trojuholník KLM je rovnostranný, leží bod M na Tálesovej kružnici nad priemerom KC, takže trojuholník KMC je pravouhlý.

C – II – 4

Ukážeme, že ak je číslo $xy + yz + zx - 3$ záporné, je číslo $x + y + z - xyz$ kladné.

Ak $xy+yz+zx < 3$, je aspoň jedno z čísel xy, yz, zx menšie ako 1, napr. xy. Potom $x + y + z - xyz = x + y + z(1 - xy)$ je zjavne súčet troch kladných čísel.

Iné riešenie. Ukážeme, že ak je číslo $x+y+z-xyz$ záporné, tak číslo $xy+yz+zx-3$ je kladné.

Predpokladajme, že $x+y+z < xyz$. Tým skôr $x < xyz$. Po skrátení kladného čísla x dostaneme $yz > 1$. Podobne odvodíme odhady $xy > 1$ a $zx > 1$. Teraz ich stačí sčítať a máme $xy + yz + zx > 3$.

Iné riešenie. Tvrdenie úlohy dokážeme sporom. Predpokladajme, že $x + y + z < xyz$ a zároveň $xy + yz + zx < 3$. Obe tieto nerovnosti sú symetrické, preto môžeme predpokladať, že čísla x, y, z sú označené tak, že z je najmenšie. Z druhej nerovnosti dostaneme, že $xy < 3$. Potom však $x + y + z < xyz < 3z$, teda $x + y < 2z$. To je však spor s tým, že číslo z je najmenšie.

Kategória B

B – I – 1

Umocnením a odčítaním prvých dvoch rovností dostaneme $x^2-z^2=(z+1)^2-(x+1)^2$, čo upravíme na $2(x^2-z^2)+2(x-z)=0$ čiže

$$(x-z)(x+z+1)=0. \tag{1}$$

Analogicky by sme dostali ďalšie dve rovnice, ktoré vzniknú z (1) cyklickou zámenou neznámych $x\to y\to z$. Vzhľadom na túto symetriu (daná sústava se nezmení dokonca pri ľubovoľnej permutácii neznámych) stačí rozobrať len nasledovné dve možnosti:

Ak $x=y=z$, prejde pôvodná sústava na jedinú rovnicu $\sqrt{2x^2}=x+1$, ktorá má dve riešenia $x_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$. Každá z trojíc $\big(1\pm\sqrt{2},1\pm\sqrt{2},1\pm\sqrt{2}\big)$ je zrejme riešením pôvodnej sústavy.

Ak sú niektoré dve z čísel x, y, z rôzne, napríklad $x\neq z$, vyplýva z (1) rovnosť $x+{}$ $+z=-1$. Dosadením $x+1=-z$ do druhej rovnice sústavy dostávame $y=0$ a potom z tretej rovnice máme $x^2+(x+1)^2=1$ čiže $x(x+1)=0$. Posledná rovnica má dve riešenia $x=0$ a $x=-1$, ktorým zodpovedajú $z=-1$ a $z=0$. Ľahko overíme, že obe nájdené trojice $(0,0,-1)$ a $(-1,0,0)$ sú riešeniami danej sústavy, rovnako aj trojica $(0,-1,0)$, ktorú dostaneme ich permutáciou.

Daná sústava má päť riešení:

$$(0,0,-1),\ (0,-1,0),\ (-1,0,0),\ \big(1+\sqrt{2},1+\sqrt{2},1+\sqrt{2}\big)\ \text{a}\ \big(1-\sqrt{2},1-\sqrt{2},1-\sqrt{2}\big).$$

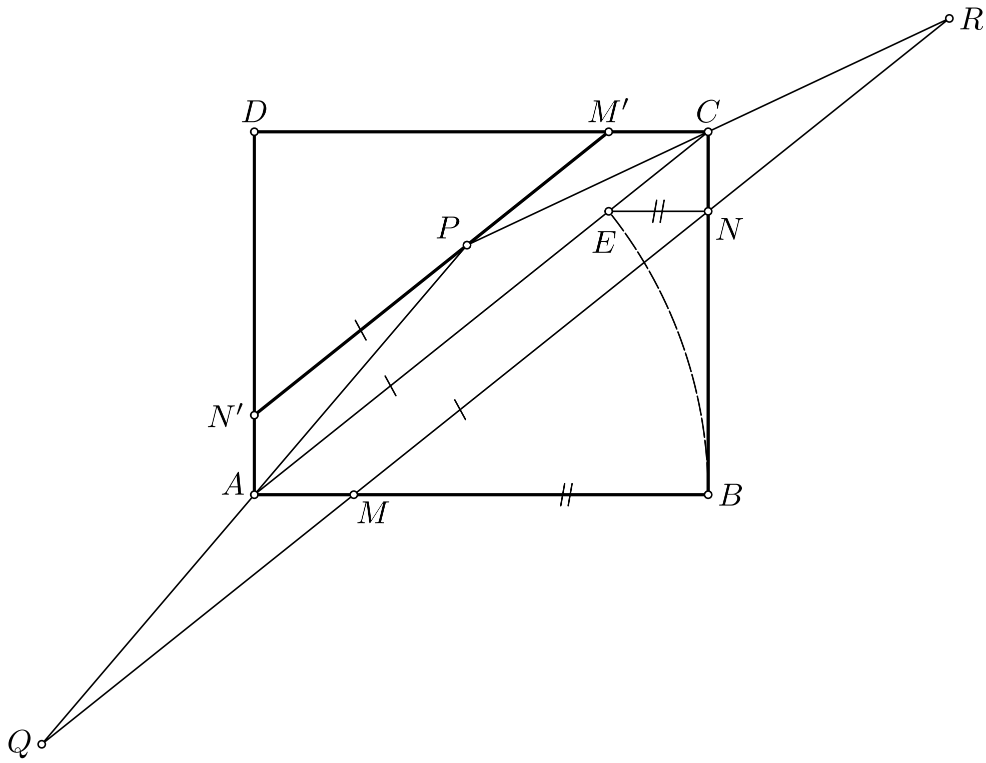
B – I – 2

Uhlopriečka AC daného obdĺžnika $ABCD$ je podľa zadania strednou priečkou v trojuholníku PQR, a teda $AC\parallel QR$, takže aj $AC\parallel MN$. Úsečka MN je tak jednoznačne určená tým, že je rovnobežná s AC, leží v opačnej polrovine určenej priamkou AC ako bod P a pre jej dĺžku platí $|MN|=|AB|$. Konštrukciu bodov M a N je možné urobiť niekoľkými spôsobmi. Dá sa napríklad využiť rovnobežník $AMNE$ (obr. 17), v ktorom platí $|AE|=|MN|=|AB|$.

Keďže úsečka MN súčasne určuje priamku, na ktorej leží strana QR trojuholníka PQR, je zrejmé, že vrchol P musí ležať na priamke p, ktorá je obrazom priamky MN v osovej súmernosti podľa priamky AC (obsahujúcej strednú priečku trojuholníka PQR). Priamka p má s vnútrom daného obdĺžnika spoločné vnútro úsečky $M'N'$ (ktorá je navyše obrazom nájdenej úsečky MN v stredovej súmernosti podľa stredu daného obdĺžnika).

Ľahko vidíme, že aj naopak ku každému vnútornému bodu P úsečky $M'N'$ ležia zodpovedajúce body Q, R na priamke MN a body M, N sú tak priesečníky priamky QR

so stranami AB, BC, takže vyhovujú podmienkam úlohy.



Obr. 17

Záver. Hľadanou množinou všetkých bodov P danej vlastnosti je vnútro vyššie opísanej úsečky $M'N'$.

B – I – 3

Stačí ukázať, že súčet troch skúmaných čísel neprevyšuje 24:

$$(ab + bc) + (bc + ca) + (ca + ab) = 2(ab + bc + ca) \leqq \frac{2}{3}(a + b + c)^2 = 24,$$

kde nerovnosť je dôsledkom nerovnosti

$$3(ab + bc + ca) \leqq (a + b + c)^2 = 36,$$

ktorá je ekvivalentná s nerovnosťou $0 \leqq (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$; tá je splnená pre ľubovoľné tri reálne čísla a, b, c.

Iné riešenie. Vzhľadom na symetriu predpokladajme, že platí $a = \min\{a, b, c\}$. Z rovnosti $a + b + c = 6$ potom vyplýva $a \leqq 2$ a $b + c \geqq 4$. Preto tretie skúmané číslo, rovné $a(b+c)$, má rovnaké znamienko ako číslo a, takže je určite menšie ako 8, ak platí $a \leqq 0$. Ak je naopak $0 < a \leqq 2$, všimnime si, že zo zrejmej nerovnosti $0 \leqq (u-v)^2$, platnej pre ľubovoľné reálne čísla u, v, vyplýva úpravou odhad $4uv \leqq (u+v)^2$; ak sem dosadíme $u = 2a$ a $v = b + c$, dostaneme

$$8a(b+c) \leqq (2a+b+c)^2 = (a+6)^2 \leqq 8^2 = 64;$$

odtiaľ po vydelení ôsmimi dostaneme nerovnosť $a(b+c) \leqq 8$.

B – I – 4

Zlomok

$$\frac{n^3 + 2\,010}{n^2 + 2\,010} = n - \frac{2\,010(n-1)}{n^2 + 2\,010}$$

je celé číslo práve vtedy, keď $n^2 + 2\,010$ je deliteľ čísla $2\,010(n-1) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67(n-1)$.

Ak nie je n násobok prvočísla 67, sú čísla $n^2 + 2\,010$ a 67 nesúdeliteľné, preto $n^2 + 2\,010$ musí byť deliteľom čísla $30(n-1)$. Keďže $|30(n-1)| < n^2 + 2\,010$, vyhovuje len $n = 1$.

Nech $n = 67m$, kde m je celé. Potom

$$\frac{2\,010(n-1)}{n^2 + 2\,010} = \frac{30(67m-1)}{67m^2 + 30}.$$

Ak nie je m násobkom piatich, musí byť číslo $67m^2 + 30$ deliteľom čísla $6(67m-1)$. Pre $|m| \leqq 4$ to tak ale nie je a pre $|m| \geqq 6$ je $|6(67m-1)| < 67m^2 + 30$. Teda $m = 5k$, kde k je celé. Potom

$$\frac{30(67m-1)}{67m^2 + 30} = \frac{6(335k-1)}{335k^2 + 6}.$$

Pre $|k| \geqq 7$ je absolútna hodnota tohto zlomku nenulová a menšia ako 1. Zo zvyšných čísel vyhovujú $k = 0$ a $k = -6$.

Číslo $(n^3 + 2\,010)/(n^2 + 2\,010)$ je teda celé práve vtedy, keď celé n má niektorú z hodnôt 0, 1 alebo $-2\,010$.

B – I – 5

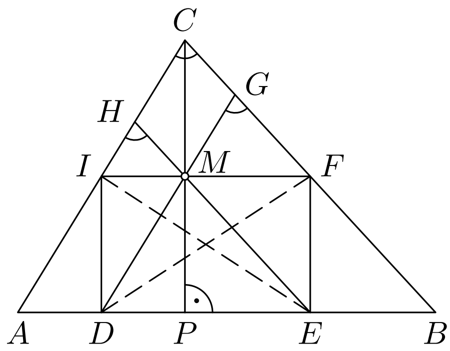
Hoci odporúčame riešiť obe časti úlohy oddelene (t. j. najprv analyzovať situáciu v pravouhlom trojuholníku), opíšeme priamo ich spoločné riešenie. Celú úlohu môžeme totiž formulovať ako dôkaz tvrdenia, že šesť zostrojených bodov leží na kružnici práve vtedy, keď je uhol ACB pravý.

Uvažujme teda ľubovoľný trojuholník ABC s ostrými uhlami α, β a označme M stred výšky CP a D, E, F, G, H, I uvažované priesečníky tak, aby s vrcholmi A, B, C a pätou výšky P ležali na hranici trojuholníka v poradí

$$A,\ D,\ P,\ E,\ B,\ F,\ G,\ C,\ H,\ I.$$

Z konštrukcie vyplýva, že body M, D, I sú stredy strán pravouhlého trojuholníka ACP a body M, E, F sú stredy strán pravouhlého trojuholníka BCP. Oba štvoruholníky

$PMID$ a $PMFE$ sú teda pravouholníky, takže i $DEFI$ je pravouholník (obr. 18). Jeho vrcholy D, E, F, I preto *vždy* ležia na jednej kružnici a úsečky DF a EI sú jej priemery. Našou úlohou je preto zistiť, kedy na tejto kružnici ležia i body G a H. To sa dá podľa Tálesovej vety vyjadriť podmienkou, že uhly DGF a EHI sú pravé. Keďže $DG \parallel AC$ a $EH \parallel BC$, sú oba uhly DGF a EHI zhodné s uhlom ACB a ekvivalencia s podmienkou pravého uhla ACB je tak dokázaná.



Obr. 18

B – I – 6

Nech n je číslo vyhovujúce podmienkam zadania. Škrtnutím dvoch posledných cifier zmenšíme n aspoň stokrát, preto sa môžeme obmedziť na škrtanie cifier, ktoré nie sú posledné. Po škrtnutí dvoch susedných cifier ostanú z čísla n dve časti, pritom prvá časť môže byť prázdna, ak sme škrtli jeho prvé dve cifry.

Nech a je číslo určené prvou časťou čísla n (nula v prípade, že prvá časť je prázdna), b je číslo určené vyškrtnutými dvoma ciframi a c je určené poslednou časťou čísla n (počet cifier tejto časti označme k). Podľa zadania platí

$$99(a \cdot 10^k + c) = a \cdot 10^{k+2} + b \cdot 10^k + c,$$

po úprave $98c = 10^k(a + b)$. Keďže $c < 10^k$, musí byť $98 > a + b$. Navyše číslo 49 delí $a + b$, lebo je samo nesúdeliteľné s 10^k. Kladný celočíselný podiel $(a + b)/49$ je menší ako 2, musí teda byť rovný 1, takže $a + b = 49$. Odtiaľ vyplýva rovnosť

$$c = \frac{10^k}{2} = 5 \cdot 10^{k-1},$$

kde číslo k je súčasne určené počtom cifier čísla a (ak označíme l počet číslic čísla a, je $k = 10 - l - 2$, pričom v prípade $a = 0$ položíme prirodzene $l = 0$).

Z uvedeného postupu vyplýva, že pre každé $a \in \{0, 1, 2, \dots, 49\}$ a $b = 49 - a$ existuje práve jedno číslo c, pre ktoré opísané číslo n vyhovuje podmienkam zadania, a že iné vyhovujúce n neexistujú. Ukážeme, že všetkých 50 takých n (končiacich siedmimi, šiestimi alebo piatimi nulami) je navzájom rôznych.

Zostrojené n končiace siedmimi nulami je jediné ($a = 0$). Šiestimi nulami končí 9 zostrojených čísel ($a \in \{1, 2, \dots , 9\}$) a sú navzájom rôzne, lebo začínajú rôznymi ciframi. Piatimi nulami končí 40 zostrojených čísel ($a \in \{10, 11, \dots , 49\}$) a sú navzájom rôzne, lebo začínajú rôznymi dvojčísliami.

Pre názornosť vypíšme ešte niekoľko čísel vyhovujúcich zadaniu tak, ako ich dostaneme pomocou našich úvah: pre $a = 0$ máme $b = 49$, $c = 50\,000\,000$ a $n = 4\,950\,000\,000$, pre $a = 1$ je $b = 48$, $c = 5\,000\,000$ a $n = 1\,485\,000\,000$, pre $a = 2$ je $n = 2\,475\,000\,000, \dots,$ pre $a = 9$ je $n = 9\,405\,000\,000$, pre $a = 10$ je $b = 39$, $c = 500\,000$ a $n = 1\,039\,500\,000, \dots,$ pre $a = 49$ je $b = 0$, $c = 500\,000$ a $n = 4\,900\,500\,000$.

Záver. Existuje 50 čísel, ktoré vyhovujú zadaniu.

B – S – 1

Aby bola ľavá strana rovnice definovaná, musia byť oba výrazy pod odmocninami nezáporné, čo je splnené práve pre všetky $x \geqq 0$. Pre nezáporné x potom $p = \sqrt{x+3} + \sqrt{x} \geqq \sqrt{3}$, rovnica môže teda mať riešenie iba pre $p \geqq \sqrt{3}$.

Upravujme danú rovnicu:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} + \sqrt{x+3} &= p,\\
2x + 3 + 2\sqrt{x(x+3)} &= p^2,\\
2\sqrt{x(x+3)} &= p^2 - 2x - 3,\\
4x(x+3) &= (p^2 - 2x - 3)^2,\\
4x^2 + 12x &= p^4 + 4x^2 + 9 - 4p^2x - 6p^2 + 12x,\\
x &= \frac{(p^2-3)^2}{4p^2}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Keďže sme danú rovnicu umocňovali na druhú, je nutné sa presvedčiť skúškou, že vypočítané x je pre hodnotu parametra $p \geqq \sqrt{3}$ riešením pôvodnej rovnice:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{(p^2-3)^2}{4p^2} + 3} + \sqrt{\frac{(p^2-3)^2}{4p^2}} &= \sqrt{\frac{p^4 - 6p^2 + 9 + 12p^2}{4p^2}} + \sqrt{\frac{(p^2-3)^2}{4p^2}} =\\
&= \sqrt{\frac{(p^2+3)^2}{4p^2}} + \sqrt{\frac{(p^2-3)^2}{4p^2}} = \frac{p^2+3}{2p} + \frac{p^2-3}{2p} = p.
\end{aligned}$$

Pri predposlednej úprave sme využili podmienku $p \geqq \sqrt{3}$ (a teda aj $p^2 - 3 \geqq 0$ a $p > 0$), takže $\sqrt{(p^2-3)^2} = p^2 - 3$ a $\sqrt{4p^2} = 2p$.

Poznámka. Namiesto skúšky stačí overiť, že pre nájdené x sú všetky umocňované výrazy nezáporné, teda vlastne stačí overiť, že

$$p^2 - 2x - 3 = \frac{(p^2-3)(p^2+3)}{2p^2} \geqq 0.$$

Pre $p \geqq \sqrt{3}$ to tak naozaj je.

Vynechať skúšku možno aj takouto úvahou: Funkcia $\sqrt{x+3}+\sqrt{x}$ je zrejme rastúca, v bode 0 (ktorý je krajným bodom jej definičného oboru) nadobúda hodnotu $\sqrt{3}$ a zhora je neohraničená. Preto každú hodnotu $p \geqq \sqrt{3}$ nadobúda pre práve jedno $x \geqq 0$. Z toho vyplýva, že pre $p \geqq \sqrt{3}$ má zadaná rovnica práve jedno riešenie, a teda (jediné) nájdené riešenie (1) musí vyhovovať.

B – S – 2

a) Medzi 16 číslami napísanými pozdĺž kružnice sa nachádza práve 16 úsekov piatich susedných čísel (ak vyberieme ľubovoľne jedno z napísaných čísel a od neho označíme čísla pozdĺž kružnice postupne ako prvé, druhé, ..., šestnáste, bude prvý úsek tvorený prvým až piatym číslom, druhý úsek druhým až šiestym číslom, ... a posledný šestnásty úsek bude tvorený šestnástym, prvým, druhým, tretím a štvrtým číslom).

Tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladajme, že uvažované tvrdenie neplatí, teda že čísla v každom z 16 úsekov majú súčet menší ako 2. Celkový súčet S_5 všetkých 16 súčtov čísel v jednotlivých päticiach je tak menší ako $16 \cdot 2 = 32$. Avšak každé číslo na kružnici je súčasťou práve piatich úsekov piatich susedných čísel, teda každé z 16 čísel je v uvedenom súčte započítané práve päťkrát. Preto je súčet S_5 zároveň rovný päťnásobku súčtu všetkých čísel na kružnici, čo je 35. To je v spore s odvodenou nerovnosťou $S_5 < 32$. Na kružnici teda musí existovať päť po sebe idúcich čísel, ktorých súčet je aspoň 2 (dokonca viac ako 2).

b) Najskôr ukážeme, že neplatí $k \leqq 6$. Na to stačí pozdĺž kružnice rozmiestniť 16 zhodných čísel so súčtom 7. Súčet čísel v ľubovoľnom úseku k čísel tak bude

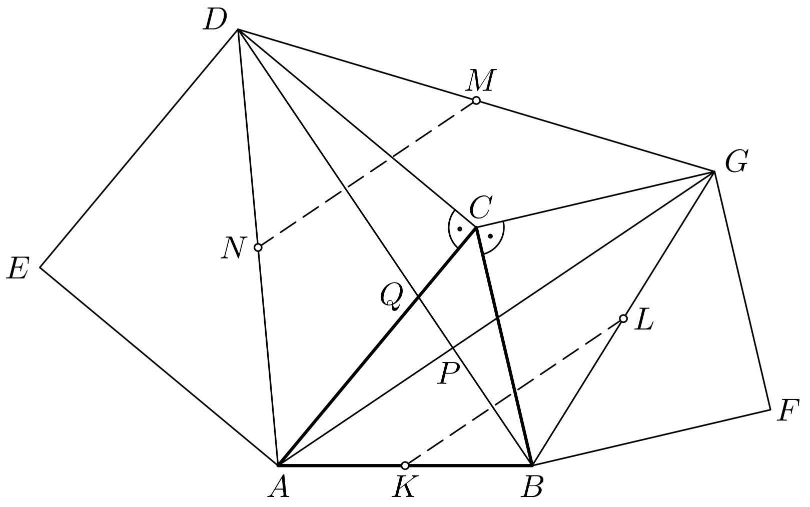
$$k \cdot \frac{7}{16} \leqq \frac{42}{16} < 3.$$

Nech teraz $k = 7$. Zopakovaním úvahy z časti a) dokážeme, že vhodný úsek už existuje: Predpokladajme naopak, že súčet ľubovoľných siedmich po sebe idúcich čísel (z daných šestnástich) je menší ako tri. Takých úsekov je pozdĺž kružnice šestnásť (ich počet od čísla k nezávisí!), takže súčet S_7 všetkých 16 súčtov čísel v jednotlivých sedmiciach je menší ako $16 \cdot 3 = 48$. Každé z daných 16 čísel je v súčte S_7 započítané sedemkrát, teda $S_7 = 7 \cdot 7 = 49$, čo odporuje predošlému odhadu $S_7 < 48$.

Hľadaným číslom k je číslo 7.

B – S – 3

Keďže oba uhly BCG a DAC sú pravé, uvažujme otočenie okolo vrcholu C daného trojuholníka, v ktorom sa bod B zobrazí na bod G. V ňom je zrejme obrazom bodu D bod A a obrazom úsečky BD úsečka GA (obr. 19). Odtiaľ vyplýva, že $|AG| = |BD|$, a tiež, že úsečky AG a BD sú navzájom kolmé.



Obr. 19

Označme postupne K, L, M, N stredy strán štvoruholníka $ABGD$. (Body N a L sú teda stredmi uvažovaných štvorcov.) Vzhľadom na to, že úsečka KL je strednou priečkou trojuholníka AGB a úsečka MN strednou priečkou trojuholníka AGD, máme $|KL| = \frac{1}{2}|AG| = |KL|$ a zároveň $MN \parallel AG \parallel KL$. Podobne $|KN| = \frac{1}{2}|BD| = |LM|$ a zároveň $KN \parallel BD \parallel LM$. To znamená, že $KLMN$ je rovnobežník. Keďže však vieme, že $|AG| = |BD|$ a navyše $AG \perp BD$, je $KLMN$ štvorec. Tým sú všetky tvrdenia úlohy dokázané.

Iné riešenie. Úlohu vyriešime bez úvahy o otočení. Pre dôkaz rovnosti $|AG| = |BD|$ ukážeme, že trojuholníky ACG a DCB sú zhodné podľa vety *sus*. Naozaj, $|AC| = |DC|$, $|CG| = |CB|$ a $|\measuredangle ACG| = |\measuredangle ACB| + |\measuredangle BCG| = |\measuredangle ACB| + 90° = |\measuredangle ACB| + |\measuredangle ACD| = = |\measuredangle DCB|$.

Úsečky AG a BD ako strany zhodných trojuholníkov teda majú rovnakú dĺžku. Aby sme overili, že sú navyše navzájom kolmé, označíme P ich priesečník a porovnáme vnútorné uhly v trojuholníkoch APQ a DCQ, pričom Q je priesečník úsečiek AC a BD. Pri vrcholoch A a D sú uhly zhodné vďaka overenej zhodnosti trojuholníkov ACG a DCB, uhly pri vrchole Q sa tiež zhodujú (sú vrcholové), takže sa zhodujú aj ich uhly pri vrcholoch P a C, sú teda oba pravé.

Z dokázanej zhodnosti aj kolmosti úsečiek AG a BD odvodíme, že $KLMN$ je štvorec, rovnako ako v prvom riešení.

B – II – 1

Pomocou rovností $abc = 60$, $a + b + c = 15$ daný výraz $(a + b)(a + c)$ upravíme a potom odhadneme na základe AG-nerovnosti pre dvojicu hodnôt a a $4/a$:

$$(a+b)(a+c) = a^2 + (b+c)a + bc = a^2 + (15-a)\cdot a + \frac{60}{a} =$$
$$= 15a + \frac{60}{a} = 15\Big(a + \frac{4}{a}\Big) \geqq 15 \cdot 2 \cdot \sqrt{a \cdot \frac{4}{a}} = 60.$$

Nerovnosť je dokázaná. Rovnosť nastane práve vtedy, keď $a = 4/a$, čiže $a = 2$. Zo vzťahov $b + c = 15 - a = 13$ a $bc = 60/a = 30$ máme $\{b, c\} = \{3, 10\}$. Rovnosť preto spĺňajú práve dve vyhovujúce trojice (a, b, c), a to $(2, 3, 10)$ a $(2, 10, 3)$.

Iné riešenie. Okrem rovností $abc = 60$, $a + b + c = 15$ využijeme AG-nerovnosť pre dvojicu hodnôt bc a $a(a + b + c)$:

$$(a+b)(a+c) = bc + a(a+b+c) \geqq 2 \cdot \sqrt{bc \cdot a(a+b+c)} = 2\sqrt{60 \cdot 15} = 60.$$

Rovnosť nastane práve vtedy, keď $bc = a(a + b + c)$, čiže $60/a = 15a$, odkiaľ $a = 2$, takže záver je rovnaký ako v prvom riešení.

B – II – 2

Keďže číslo a delí číslo b, môžeme písať $b = ka$, pričom k je kladné celé číslo. Stačí teda nájsť kladné celé čísla a, pre ktoré existuje kladné celé číslo k také, že číslo $3a + 4$ je (kladným) násobkom čísla $ka + 1$ $(= b + 1)$. Z tejto podmienky dostávame nerovnosť $ka + 1 \leqq 3a + 4$, z ktorej vyplýva $k - 3 \leqq (k - 3)a \leqq 3$, a teda $k \leqq 6$. Navyše pre $k \geqq 3$ je už $2(ka + 1) > 3a + 4$ pre ľubovoľné $a \geqq 1$, takže môže byť jedine $ka + 1 = 3a + 4$. Preberieme všetkých šesť možností pre číslo k:

$k = 1$: $a + 1 \mid 3a + 4$, a keďže $a + 1 \mid 3a + 3$, muselo by platiť $a + 1 \mid 1$, čo nie je možné, lebo $a + 1 > 1$.

$k = 2$: $2a + 1 \mid 3a + 4 = (2a + 1) + (a + 3)$, teda $2a + 1 \mid a + 3$. Keďže však pre ľubovoľné prirodzené a platí $2 \cdot (2a + 1) > a + 3$, musí byť $2a + 1 = a + 3$, čiže $a = 2$ a odtiaľ $b = ka = 4$.

$k = 3$: $3a + 1 = 3a + 4$, čo nie je možné.

$k = 4$: $4a + 1 = 3a + 4$, teda $a = 3$, $b = 12$.

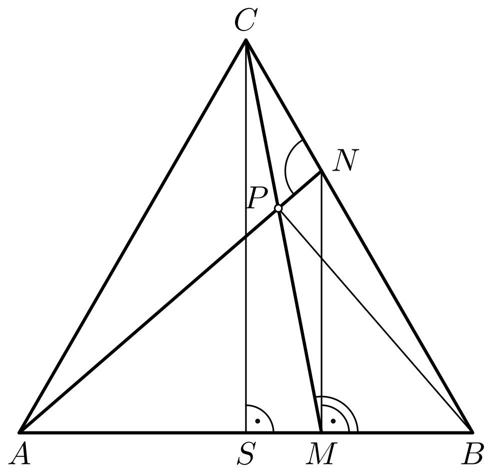
$k = 5$: $5a + 1 = 3a + 4$, čo nespĺňa žiadne celé a.

$k = 6$: $6a + 1 = 3a + 4$, teda $a = 1$, $b = 6$.

Riešením sú dvojice $(1, 6)$, $(2, 4)$ a $(3, 12)$.

B – II – 3

Zo zadania vyplýva, že $|BM| = |CN|$, $|AC| = |BC|$ a $|\measuredangle ACN| = |\measuredangle CBM| = 60°$, takže trojuholníky ACN a CBM sú zhodné podľa vety *sus*. Preto platí aj $|\measuredangle ANC| = |\measuredangle CMB|$, takže štvoruholník $BNPM$ je tetivový (uhol ANC je doplnok do priameho uhla k uhlu ANB, ktorý je protiľahlým uhlom k uhlu CMB v spomenutom štvoruholníku, obr. 20).



Obr. 20

Označme S stred strany AB daného rovnostranného trojuholníka ABC. Keďže $|SB| = \frac{1}{2}|AB|$, je $|SB| : |MB| = 3 : 2$, a keďže aj $|CB| : |NB| = 3 : 2$, sú trojuholníky SBC a MBN podobné podľa vety *sus*. Uhol CSB je pravý, preto musí byť pravý aj uhol NMB. Kružnica opísaná štvoruholníku $BNPM$ je tak Tálesovou kružnicou nad priemerom BN, a teda je pravý aj uhol BPN, čo sme chceli dokázať.

B – II – 4

Výsledný ciferný súčet je určený jednoznačne a je ním číslo 33.

Pre vyriešenie úlohy bude výhodné najskôr zistiť súčet S všetkých päťciferných čísel obsahujúcich každú z cifier 4, 5, 6, 7, 8. Týchto čísel je zrejme práve toľko, koľko je rôznych poradí uvedených piatich cifier, teda $5! = 120$. Navyše každá z daných cifier sa medzi týmito 120 číslami objavuje rovnomerne v každom ráde, teda 24-krát. Súčet S tak môžeme rozpísať po jednotlivých rádoch ako

$$\begin{aligned} S &= 10^4 \cdot (24 \cdot 4 + 24 \cdot 5 + 24 \cdot 6 + 24 \cdot 7 + 24 \cdot 8) + \\ &\quad + 10^3 \cdot (24 \cdot 4 + 24 \cdot 5 + 24 \cdot 6 + 24 \cdot 7 + 24 \cdot 8) + \dots = \\ &= 24 \cdot (4 + 5 + 6 + 7 + 8) \cdot (10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 24 \cdot 30 \cdot 11\,111. \end{aligned}$$

Obráťme teraz pozornosť na možné hodnoty ciferného súčtu čísla $S - a$, pričom a je päťciferné číslo spomínaného tvaru, teda $a = 33\,333 + b$, pričom b je päťciferné číslo obsahujúce každú z cifier 1, 2, 3, 4, 5. Teda

$$S - a = 11\,111 \cdot 24 \cdot 30 - a = 7\,999\,920 - 33\,333 - b = 7\,966\,587 - b.$$

Pri odčítaní čísla b však nenastáva v jednotlivých rádoch prechod cez desiatku, preto je ciferný súčet čísla $S - a$ rovný $(7+9+6+6+5+8+7) - (1+2+3+4+5) = 48 - 15 = 33$ pre ľubovoľné päťciferné číslo a obsahujúce každú z cifier 4, 5, 6, 7, 8.

Kategória A

A – I – 1

Vzhľadom na to, že rastúcu aritmetickú postupnosť tvoria štyri navzájom rôzne reálne čísla, musí mať prvá z daných rovníc štyri rôzne reálne korene. Preto $a \neq 0$.

Označme x_0 spoločný koreň oboch rovníc. Potom je x_0 tiež koreňom rovnice, ktorá vznikne odčítaním druhej z daných rovníc od prvej, teda rovnice $ax^4 - ax = 0$. Tú ďalej upravíme na tvar $ax(x^3 - 1) = 0$. Pre spoločný reálny koreň x_0 oboch daných rovníc odtiaľ vyplýva $x_0 = 0$ alebo $x_0 = 1$.

Dosadením $x_0 = 0$ do prvej z daných rovníc dostaneme $a = 1$, takže táto rovnica má tvar $x^4 + bx^2 = 0$. Táto rovnica ale pre žiadne reálne číslo b nemá štyri rôzne reálne korene (číslo 0 je jej aspoň dvojnásobným koreňom), preto $x_0 \neq 0$.

Jediným spoločným koreňom oboch rovníc je teda $x_0 = 1$. Dosadením tejto hodnoty do ktorejkoľvek z oboch daných rovníc dostaneme $b = 1 - 2a$. Prvú rovnicu potom môžeme zapísať v tvare $ax^4 + (1-2a)x^2 + a - 1 = 0$, z ktorého vidíme, že má i koreň -1, a po vyňatí súčinu koreňových činiteľov $(x-1)(x+1)$ dostaneme rovnicu

$$(x-1)(x+1)(ax^2 - a + 1) = 0. \tag{1}$$

Kvadratický dvojčlen $ax^2 - (a-1)$ má mať dva rôzne korene, ktorými musia byť dve navzájom opačné (nenulové) čísla ξ a $-\xi$. To je splnené práve vtedy, keď $(a-1)/a > 0$, čiže práve vtedy, keď $a > 1$ alebo $a < 0$. Ak zvolíme označenie tak, že $\xi > 0$, dostávame pre aritmetickú postupnosť všetkých štyroch koreňov dve možnosti podľa toho, či je $0 < \xi < 1$ alebo $\xi > 1$.

V prvom prípade tvoria štyri korene rovnice (1) aritmetickú postupnosť $-1, -\xi, \xi, 1$, ktorá má zrejme diferenciu $\frac{2}{3}$, preto $\xi = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Toto číslo ξ je koreňom rovnice (1) práve vtedy, keď $a = 1/(1-\xi^2) = \frac{9}{8}$. Potom $b = 1 - 2a = -\frac{5}{4}$.

V druhom prípade tvoria štyri korene rovnice (1) aritmetickú postupnosť $-\xi, -1, 1, \xi$ s diferenciou 2, preto $\xi = 1 + 2 = 3$. Číslo 3 je koreňom rovnice (1) práve vtedy, keď $a = 1/(1-3^2) = -\frac{1}{8}$. Potom $b = 1 - 2a = \frac{5}{4}$.

Záver. Úlohe vyhovujú práve dve dvojice reálnych čísel (a, b), a to

$$(a,b) \in \left\{ \left(-\frac{1}{8}, \frac{5}{4}\right), \left(\frac{9}{8}, -\frac{5}{4}\right) \right\}.$$

A – I – 2

Ukážeme, že pre nesúdeliteľné prirodzené čísla r a s, kde $r > 2$ a $s > 2$, existuje prirodzené číslo n s vlastnosťou

$$r \mid n - 1 \qquad \text{a} \qquad s \mid n + 1.$$

Pre také číslo n a číslo $k = rs$ nie je Adamova úvaha správna, pretože z predpokladu, že číslo k delí číslo $(n-1)(n+1)$, nevyplýva, že k delí $n-1$ ani že k delí $n+1$. Keby totiž $k = rs$ delilo napríklad $n-1$, delilo by číslo s obidve čísla $n+1$ i $n-1$, čo vzhľadom na rovnosť $(n+1)-(n-1) = 2$ nie je možné, lebo $s > 2$.

Existenciu čísla n z prvej vety riešenia dokážeme tak, že zoberieme s čísel

$$2,\ r+2,\ 2r+2,\ \dots,\ (s-1)r+2.$$

Tie dávajú pri delení číslom s navzájom rôzne zvyšky. Keby totiž niektoré dve z nich, povedzme $ir+2$ a $jr+2$ $(0 \leqq i < j \leqq s-1)$, dávali pri delení číslom s rovnaký zvyšok, potom by číslo s delilo aj ich rozdiel $(i-j)r$, a vzhľadom na nesúdeliteľnosť čísel r a s aj rozdiel $i-j$, čo nie je možné, pretože $|i-j| < s$. Uvedených s čísel teda dáva úplnú sústavu zvyškov modulo s, preto medzi nimi existuje číslo, ktoré pri delení číslom s dáva zvyšok 0; nech je to číslo $lr+2$. Potom ale pre číslo $n = lr+1$ platí, že r delí $n-1$ a s delí $n+1$.

Uvedomme si, že každé číslo k deliteľné dvoma nepárnymi prvočíslami sa dá zapísať ako súčin dvoch nesúdeliteľných čísel väčších ako 2. Adamova úvaha môže byť teda správna iba pre tie čísla k, ktoré sú deliteľné nanajvýš jedným nepárnym prvočíslom. To znamená, že číslo k má jeden z nasledovných troch tvarov:

$$k = 2^s, \qquad k = p^t, \qquad k = 2p^t,$$

kde p je nepárne prvočíslo, s celé nezáporné a t prirodzené číslo.

Nech $k = 2^s$, kde s je celé nezáporné číslo. Pre $s = 0$ nie je Adamova úvaha správna, pretože číslo $k = 2^0 = 1$ delí každé prirodzené číslo, teda delí obidve čísla $n-1$ i $n+1$. Ani pre $s = 1$ nie je Adamova úvaha správna, pretože pokiaľ $k = 2^1 = 2$ delí číslo $(n-1)(n+1)$, je jeden z činiteľov párny, ale potom je párny i druhý činiteľ. Pre číslo $s = 2$, teda pre $k = 2^2 = 4$, je Adamova úvaha správna. Ak totiž 4 delí číslo $(n-1)(n+1)$, je aspoň jeden z oboch činiteľov párny, takže ide o dve po sebe idúce *párne* čísla, z ktorých práve jedno je deliteľné štyrmi. Nakoniec, pre žiadne $s \geqq 3$ Adamova úvaha správna nie je, stačí vziať číslo $n = 2^{s-1} - 1$.

Nech $k = p^t$, kde p je nepárne prvočíslo a t prirodzené číslo. Potom je Adamova úvaha správna, lebo obe čísla $n-1$ a $n+1$ nemôžu byť súčasne deliteľné tým istým nepárnym prvočíslom p, a preto je práve jedno z nich deliteľné číslom $p^t = k$.

Nech $k = 2p^t$, kde p je nepárne prvočíslo a t prirodzené číslo. Potom je Adamova úvaha tiež správna: obe čísla $n-1$ a $n+1$ sú nutne párne a pritom nemôžu byť súčasne deliteľné tým istým nepárnym prvočíslom p, preto je práve jedno z nich deliteľné číslom $2p^t = k$.

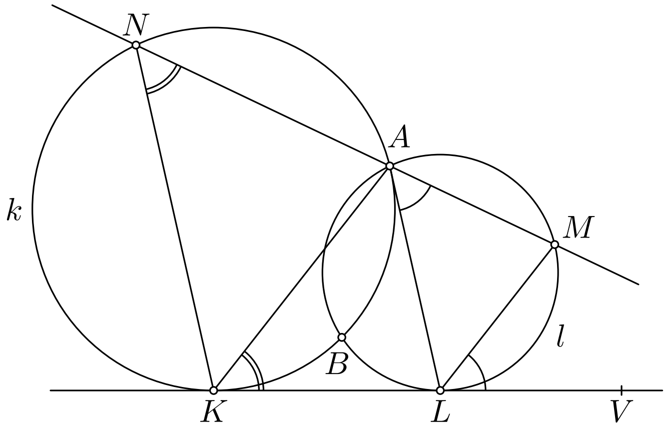
Záver. Adamova úvaha je správna pre každé prirodzené číslo n len pre prirodzené čísla k jedného z tvarov

$$k = 4, \qquad k = p^t, \qquad k = 2p^t,$$

kde p je nepárne prvočíslo a t prirodzené číslo.

A – I – 3

Z rovnosti obvodového a úsekového uhla prislúchajúceho k tetive AK kružnice k vyplýva (obr. 21) $|\measuredangle KNA| = |\measuredangle LKA|$ a podobne z rovnosti obvodového a úsekového uhla prislúchajúceho k tetive AL kružnice l vyplýva $|\measuredangle VLM| = |\measuredangle LAM|$, pričom sme označili V nejaký bod polpriamky opačnej k polpriamke LK.

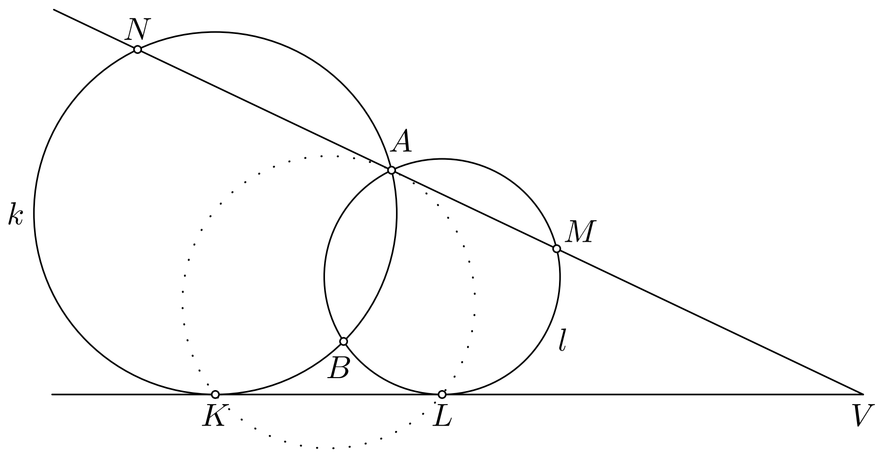


Obr. 21

Štvoruholník $KLMN$ je tetivový práve vtedy, keď platí $|\measuredangle KNA| = |\measuredangle VLM|$ čiže $|\measuredangle LKA| = |\measuredangle LAM|$. Posledná rovnosť ale platí práve vtedy, keď je LAM úsekovým uhlom prislúchajúcim k obvodovému uhlu LKA tetivy LA kružnice opísanej trojuholníku AKL, teda práve vtedy, keď je priamka MN dotyčnicou tejto kružnice.

Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

Iné riešenie. Vyriešme úlohu najskôr za predpokladu, že priamky KL a MN sú rovnobežné. V takom prípade sú zrejme oba trojuholníky ANK a MAL rovnoramenné, pretože osi strán AN, resp. MA prechádzajú príslušným vrcholom K, resp. L (čiže bodom dotyku dotyčnice rovnobežnej s tetivou AN, resp. MA kružnice k, resp. l). Teda



Obr. 22

$|LA| = |LM|$ a $|KN| = |KA|$. Pritom štvoruholník $KLMN$ je tetivový práve vtedy, keď je to rovnoramenný lichobežník, t. j. $|LM| = |KN|$. To podľa predchádzajúcej dvojice rovností nastane práve vtedy, keď je trojuholník KLA rovnoramenný, čiže práve vtedy, keď MN je dotyčnicou kružnice opísanej tomuto trojuholníku vedenou vrcholom A. (Vzhľadom na to, že potom sú trojuholníky ANK a MAL zhodné, uvedená situácia nastane práve vtedy, keď sú kružnice k a l zhodné.)

Predpokladajme ďalej, že priamky MN a KL sú rôznobežné, a označme V ich priesečník (obr. 22). Použitím mocnosti bodu V ku kružniciam k a l dostaneme

$$|VK|^2 = |VA| \cdot |VN| \qquad \text{a} \qquad |VL|^2 = |VM| \cdot |VA|.$$

Vynásobením oboch vzťahov dostaneme

$$|VK|^2 \cdot |VL|^2 = |VN| \cdot |VA|^2 \cdot |VM|. \tag{1}$$

Štvoruholník $KLMN$ je ale tetivový práve vtedy, keď platí

$$|VK| \cdot |VL| = |VN| \cdot |VM|$$

čiže – s prihliadnutím na (1) – práve vtedy, keď platí

$$|VK| \cdot |VL| = |VA|^2.$$

Posledná rovnosť ale platí práve vtedy, keď priamka MN (prechádzajúca bodom A) je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku AKL. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

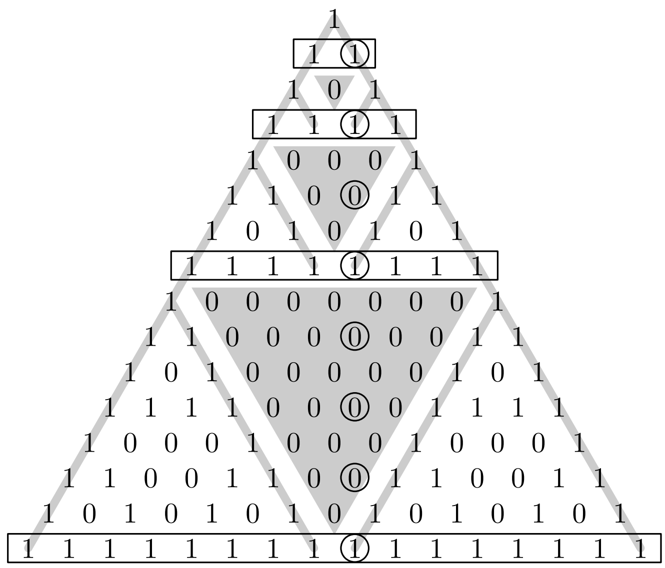
A – I – 4

Žiadne tri žetóny tej istej farby neležia na jednej kôpke, teda na každej kôpke leží aspoň jeden žetón zvolenej farby. Každé vyhovujúce rozdelenie žetónov na kôpky je potom charakterizované tým, na ktorej z nich leží práve jeden z troch žetónov jednotlivých farieb.

Predpokladajme, že v jednej z kôpok je práve l farieb zastúpených jedným žetónom a zvyšných $2n - l$ farieb dvoma. Jednoduchým výpočtom $l + 2(2n - l) = 3n$ zistíme, že to je možné len pri $l = n$. Preto je skúmaný počet p_n rovný počtu rozdelení $2n$ žetónov navzájom rôznych farieb na dve (neusporiadané) skupiny po n žetónoch, teda

$$p_n = \frac{1}{2}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{2(n!)^2} = \frac{2n \cdot (2n-1)!}{2n \cdot (n-1)!\, n!} = \binom{2n-1}{n}. \tag{1}$$

Našou úlohou je dokázať, že posledné kombinačné číslo je nepárne práve vtedy, keď je číslo n mocnina dvoch. Tento poznatok (a vlastne i metódu jeho dôkazu) je možné vypozorovať z dobre známej schémy všetkých kombinačných čísel v podobe Pascalovho trojuholníka (obr. 23).



Obr. 23

V našej schéme nie sú samotné kombinačné čísla, ale ich zvyšky 0 alebo 1 po delení dvoma. Pre ich určenie nie je nutné kombinačné čísla vôbec počítať, pretože z rekurentných vzorcov

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{a} \quad \binom{n}{i} = \binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i} \quad (1 \leqq i \leqq n-1) \tag{2}$$

môžeme postupne po jednotlivých riadkoch namiesto kombinačných čísel priamo písať ich zvyšky pri delení akýmkoľvek pevným číslom, v našom prípade číslom 2.

Všimnime si, čo naša schéma napovedá. Niektoré riadky (vyznačené obdĺžničkami) sú zostavené zo samých jednotiek. Vďaka rekurentným vzorcom (2) pod každým takým riadkom zrejme vznikne trojuholník zostavený zo samých núl (tri také trojuholníky sú vyznačené sivou farbou) olemovaný zľava aj sprava samými jednotkami; bezprostredne pod ním opäť leží riadok zo samých jednotiek. Pretože zvyšky všetkých skúmaných čísel $\binom{2n-1}{n}$ (v našej schéme vyznačených krúžkami) ležia v opísaných obdĺžničkoch alebo trojuholníkoch, bude také kombinačné číslo nepárne práve vtedy, keď bude mať pozíciu v niektorom obdĺžničku.

Naše pozorovanie teraz opíšeme presnejšie a priamo ho overíme matematickou indukciou.

Riadky zo samých jednotiek sú práve riadky s kombinačnými číslami $\binom{n-1}{i}$ $(0 \leqq i \leqq \leqq n-1)$, *kde* n *je tvaru* $n = 2^k$.

Tvrdenie triviálne platí pre $k = 1$. Predpokladajme teda, že platí pre nejaké $k \geqq 1$, a označme P_n prvých $n = 2^k$ riadkov schémy. Ďalších n riadkov si môžeme predstaviť ako tri rovnostranné trojuholníky čísel: prvý a tretí s n riadkami sú rovnakej veľkosti ako P_n, medzi nimi je potom $(n-1)$-riadkový trojuholník (vrcholom nadol), ktorý je vďaka jednotkám v základni trojuholníka P_n a rekurentným vzorcom (2) zostavený zo samých núl. Preto majú prvý a tretí trojuholník jednotky nielen v horných vrcholoch a na stranách ležiacich na hranici celej schémy, ale i na stranách, ktorými priliehajú k druhému trojuholníku, teda na začiatku i na konci každého zo svojich n riadkov. Vyplýva to opäť zo vzorcov (2), ktoré potom vedú k ďalšiemu, pre nás hlavnému záveru: Prvý a tretí trojuholník sú totožné s trojuholníkom P_n. Môžeme teda zhrnúť, že každý z $n-1$ pridaných riadkov obsahuje aspoň jednu nulu, ale n-tý riadok (zložený z dvoch n-tých riadkov trojuholníka P_n) obsahuje samé jednotky. Tvrdenie teda platí i pre $2n = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ riadkov Pascalovho trojuholníka modulo 2, t. j. i pre číslo $k+1$.

Vzhľadom na to, že skúmané číslo $p_n = \binom{2n-1}{n} = \binom{2n-1}{n-1}$ leží vždy v strede párneho riadku Pascalovho trojuholníka, je zrejmé, že leží buď v niektorom obdĺžničku, alebo v niektorom sivom trojuholníku, ktoré sa postupne striedajú. Číslo p_n je teda naozaj nepárne práve vtedy, keď n je mocnina dvoch.

Iné riešenie. Počet p_n opísaných rozdelení žetónov určíme rovnako ako v prvom riešení vzorcom

$$p_n = \frac{(2n)!}{2(n!)^2},$$

ktorý ďalej upravíme na tvar

$$\begin{aligned} p_n &= 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n-2)(2n)}{2(n!)^2} = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot \frac{2^n n!}{2(n!)^2} = \\ &= 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot \frac{2^{n-1}}{n!}. \end{aligned} \tag{3}$$

Pre najvyššiu mocninu 2^a, ktorá delí $n!$, platí

$$a = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n}{2^m} \right\rfloor,$$

kde $2^m \leqq n < 2^{m+1}$ a $\lfloor x \rfloor$ označuje *dolnú celú časť čísla* x, teda najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako x. Odtiaľ pre exponent a vyplýva odhad

$$a \leqq \frac{n}{2} + \frac{n}{2^2} + \ldots + \frac{n}{2^m} = n\Big(1 - \frac{1}{2^m}\Big) = n - \frac{n}{2^m} \leqq n - 1.$$

Z vyjadrenia (3) teda vidíme, že číslo p_n je nepárne práve vtedy, keď $a = n-1$ čiže n je tvaru 2^m.

A – I – 5

V každom kroku sa súčet všetkých čísel na stenách kocky zväčší o 2, jeho parita sa teda nezmení. Ak sú na všetkých stenách kocky rovnaké čísla, je ich súčet násobkom šiestich, a je teda deliteľný dvoma. Nutnou podmienkou pre to, aby sme tento stav dosiahli, teda je, aby i na začiatku bol súčet všetkých čísel na stenách kocky deliteľný dvoma.

Táto podmienka je súčasne aj postačujúca. Predpokladajme, že súčet všetkých šiestich celých čísel na stenách kocky je na začiatku deliteľný dvoma. Ukážeme, ako po určitom počte krokov dosiahneme, aby na všetkých stenách kocky boli rovnaké čísla.

Označme steny kocky $S_1, S_2, \dots, S_6$, pričom stena S_1 je oproti stene S_6, stena S_2 oproti S_5 a S_3 oproti S_4. (Podobne sú očíslované i steny bežnej hracej kocky: súčet bodov na protiľahlých stenách dáva 7.) Krok, v ktorom zväčšíme čísla na stenách S_i, S_j, označíme k_{ij}. A pretože nás zaujíma len relatívna hodnota očíslovania stien, t. j. či a o koľko sa líšia od najmenšej hodnoty zo všetkých šiestich čísel, budeme ďalej pracovať len s týmito relatívnymi hodnotami (čo budú nezáporné celé čísla s najmenšou hodnotou 0).

Postupnosťou krokov k_{12}, k_{23}, k_{35}, k_{54}, k_{41} zabezpečíme, že sa číslo na každej stene okrem steny S_6 zväčší o 2, čo vzhľadom na náš dohovor vlastne znamená, že sme (relatívnu) hodnotu čísla na stene S_6 o 2 zmenšili. Podobným spôsobom môžeme o 2 „zmenšiť“ číslo na ľubovoľnej stene kocky. Je teda zrejmé, že opísaným spôsobom dosiahneme, že (relatívne) hodnoty čísel na stenách budú len 0 alebo 1; nula medzi nimi musí byť aspoň jedna (podľa významu relatívnych hodnôt). Teraz už stačí vyšetriť nasledovné možnosti (pripomeňme, že súčet všetkých šiestich čísel je párny):

a) Na stenách kocky sú samé nuly; tvrdenie potom platí triviálne.

b) Na stenách kocky sú práve dve 1 (na zvyšných stenách 0). Bez ohľadu na to, či sú obe jednotky na susedných alebo protiľahlých stenách, vždy môžeme rozdeliť štyri steny s nulami na dve dvojice susedných stien a v dvoch krokoch zväčšiť ich čísla o 1.

c) Na stenách kocky sú práve štyri 1 (na zvyšných dvoch stenách sú 0). Tento prípad vyriešime tak, že najprv znížime (spôsobom opísaným vyššie) hodnotu každej steny s jednotkou o dve, čím (v relatívnych hodnotách) dostaneme presne situáciu opísanú v b).

Záver. Dosiahnuť, aby po konečnom počte krokov boli na všetkých stenách kocky napísané rovnaké čísla, je možné práve vtedy, keď je súčet čísel na všetkých šiestich stenách kocky deliteľný dvoma.

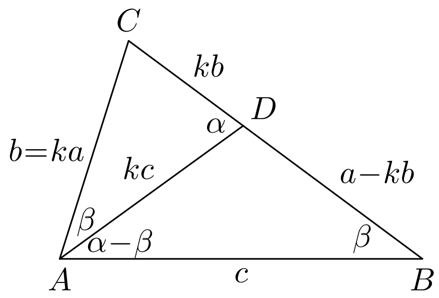
Poznámka. Časť c) predchádzajúceho riešenia je možné vyriešiť i takto: Ak sú obe 0 na susedných stenách, môžeme ich jediným krokom zväčšiť na 1. Ak sú obe 0 na protiľahlých stenách (bez ujmy na všeobecnosti nech sú to napríklad S_1 a S_6), pomocou krokov k_{12}, k_{36}, k_{15}, k_{46} dosiahneme, že na každej stene kocky bude napísané číslo 2.

A – I – 6

Ak $a = b$, je $\alpha = \beta$, takže $\cos(\alpha - \beta) = 1$ a dokazovaná nerovnosť platí ako rovnosť $a^2 + a^2 = 2a^2$ (dodajme, že bez ohľadu na to, či je uhol γ ostrý alebo nie). Keďže dokazovaná nerovnosť je symetrická v a, b (kosínus je párna funkcia), môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $a > b$ čiže $\alpha > \beta$.

Keďže $\alpha > \beta$, môžeme uhol BAC veľkosti α rozdeliť pomocou bodu $D \in BC$ na dva uhly CAD a DAB veľkostí β, a $\alpha - \beta$ (obr. 24). Trojuholník DAC je potom zmenšením trojuholníka ABC s koeficientom podobnosti $k = b : a$, takže $|AD| = bc/a$ a $|DC| =$

$= b^2/a$; odtiaľ $|BD| = |BC| - |DC| = (a^2 - b^2)/a$.



Obr. 24

Vyjadrenia $|AD|$, $|BD|$ dosadíme do rovnosti z kosínusovej vety pre trojuholník ABD a upravíme:

$$\begin{aligned}
|BD|^2 &= |AB|^2 + |AD|^2 - 2|AB| \cdot |AD| \cos(\alpha - \beta),\\
\frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2} &= c^2 + \frac{b^2c^2}{a^2} - \frac{2bc^2\cos(\alpha - \beta)}{a},\\
(a^2 - b^2)^2 &= \delta \cdot c^2, \quad \text{kde} \quad \delta = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha - \beta) > 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

(Posledná nerovnosť vyplýva z toho, že pre $\alpha \neq \beta$ je $\cos(\alpha - \beta) < 1$.) Vzťah (1) spolu s rovnosťou $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ teraz využijeme na úpravu rozdielu Δ pravej a ľavej strany dokazovanej nerovnosti, ktorý navyše ešte vynásobíme výrazom $2ab$:

$$\begin{aligned}
2ab\Delta &= 2ab\bigl(2ab - (a^2 + b^2)\cos(\alpha - \beta)\bigr) = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2) \cdot 2ab\cos(\alpha - \beta) =\\
&= 4a^2b^2 - (a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - \delta) = \delta(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)^2 =\\
&= \delta(a^2 + b^2) - \delta \cdot c^2 = \delta(a^2 + b^2 - c^2) = \delta \cdot 2ab\cos\gamma.
\end{aligned}$$

Po vydelení výrazom $2ab$ dostávame vzťah $\Delta = \delta\cos\gamma$, takže vzhľadom na $\delta > 0$ má výraz Δ rovnaké znamienko ako $\cos\gamma$ (zopakujme, že za predpokladu $\alpha \neq \beta$). Odtiaľ vyplýva, že v prípade, keď $\gamma < 90°$ a $\alpha \neq \beta$, platí nerovnosť zo zadania úlohy ako *ostrá*. Tým je úloha vyriešená a odpoveď na jej záverečnú otázku znie: v dokázanej nerovnosti (v zadanej situácii, t. j. pri ostrom uhle γ) nastane rovnosť práve vtedy, keď $a = b$.

Poznámka 1. Odvodený vzťah $\Delta = \delta\cos\gamma$ sa bez pomocných označení prepíše ako identita

$$2ab - (a^2 + b^2)\cos(\alpha - \beta) = \bigl(a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha - \beta)\bigr)\cos\gamma, \tag{2}$$

ktorá platí pre *ľubovoľný* trojuholník ABC (k nášmu odvodeniu stačí pridať triviálne overenie rovnosti (2) v prípade $a = b$). Výsledok (2) umožňuje ľahko urobiť diskusiu o jednotlivých prípadoch relácie

$$(a^2 + b^2)\cos(\alpha - \beta) \lesseqgtr 2ab,$$

lebo prvý činiteľ na pravej strane (2) je vždy nezáporný:

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha - \beta) \geqq a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geqq 0.$$

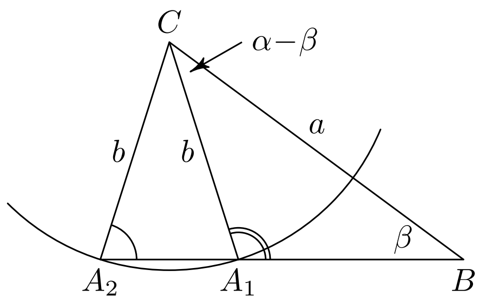
Relácia dopadá takto: rovnosť nastane práve vtedy, keď $a = b$ alebo $\gamma = 90°$; v prípade $a \neq b$ potom platí ostrá nerovnosť $<$ alebo $>$ podľa toho, či je $\gamma < 90°$ alebo $\gamma > 90°$.

Iné riešenie. Pôvodné riešenie je celé založené na vzťahu (1), preto jeho odlišné odvodenie teraz uvedieme ako „iné riešenie“. Tvar kladného výrazu δ v (1) je motiváciou k úvahe o pomocnom trojuholníku, ktorého dve strany majú dĺžky a, b a zvierajú uhol veľkosti $\alpha - \beta$ (opäť predpokladáme, že $a > b$). Nás zaujíma dĺžka jeho tretej strany, ktorú označíme d, takže pre výraz δ vo vzťahu (1), ktorý sa chystáme dokázať, budeme mať $\delta = d^2$. Ukážme, že taký trojuholník so stranami a, b, d je – okrem pôvodného trojuholníka so stranami a, b, c – druhým riešením úlohy *zostrojiť trojuholník ABC, ak sú dané strany a, b a uhol β*. Konštrukciu oboch riešení A_1BC a A_2BC vidíme na obr. 25. Súčet uhlov pri vrcholoch A_1 a A_2 (vyznačených oblúčikmi) je zrejme 180°. V jednom z trojuholníkov je to uhol α, v druhom teda uhol $180° - \alpha$, takže uhol pri vrchole C druhého trojuholníka je práve $\alpha - \beta$, ako sme si želali. (V prípade $\alpha = 90°$ síce platí $A_1 = A_2$, ale na celej našej úvahe netreba nič meniť: v takom prípade totiž $\alpha - \beta = \gamma$ a $c = d$.) Úsečky A_1B, A_2B teda majú (v niektorom poradí) dĺžky c a d. Z mocnosti bodu B k zostrojenej kružnici so stredom C a polomerom b vyplýva rovnosť

$$cd = a^2 - b^2, \tag{3}$$

z ktorej po umocnení na druhú dostávame $c^2d^2 = (a^2 - b^2)^2$. A to je kľúčový vzťah (1) z pôvodného riešenia, lebo, ako už sme naznačili, podľa kosínusovej vety platí

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha - \beta). \tag{4}$$



Obr. 25

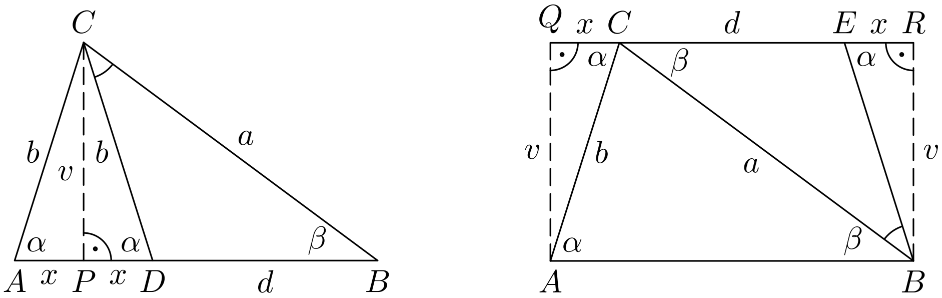
Poznámka 2. V pôvodnom riešení sme zo vzťahu (1) odvodili identitu zapísanú v Poznámke 1 ako (2). Práve uvedený alternatívny dôkaz (1) s využitím konštrukčnej úlohy (a, b, β) má zaujímavý dôsledok: vďaka „rovnoprávnosti“ oboch riešení z obr. 25 musí platiť aj identita

$$2ab - (a^2 + b^2)\cos\gamma = c^2\cos(\alpha - \beta), \tag{5}$$

získaná z (2) výmenou úloh trojuholníkov s trojicami strán (a, b, c) a (a, b, d).

Iné riešenie. Pomocný trojuholník so stranami a, b $(a > b)$ zvierajúcimi uhol $\alpha - \beta$ a treťou stranou d danou vzťahom (4) môžeme využiť na riešenie úlohy i bez objavu „mocnosťovej“ rovnosti (3) nasledovným postupom.

Uvedený trojuholník je možné k trojuholníku ABC vhodne prikresliť dvoma spôsobmi, ktoré vidíme na obr. 26. Vľavo je to trojuholník BCD (ten poznáme už z pred-



Obr. 26

chádzajúceho riešenia), vpravo to je trojuholník BCE; ľahko potom overíme, že oba vyznačené uhly BCD a CBE majú požadovanú veľkosť $\alpha-\beta$. (Oba obrázky zodpovedajú prípadu $\alpha < 90°$, v úplnom riešení by nemal chýbať obrázok pre prípad $\alpha \geqq 90°$, ktorý tu posudzovať nebudeme, pretože ďalší postup vyžaduje len malú obmenu.) Pomocou dĺžky d zo vzťahu (4) teraz upravíme dokazovanú (ostrú) nerovnosť:

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)\cos(\alpha - \beta) &< 2ab, \\ (a^2 + b^2)\cdot 2ab\cos(\alpha - \beta) &< 4a^2b^2, \\ (a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - d^2) &< 4a^2b^2, \\ (a^2 - b^2)^2 &< (a^2 + b^2)d^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Nakoniec využijeme Pytagorovu vetu pre dvojice pravouhlých trojuholníkov z obr. 26; v oboch variantoch (ako s trojuholníkom BCD, tak s trojuholníkom BCE) potom platí

$$a^2 = (d + x)^2 + v^2 \quad \text{a} \quad b^2 = x^2 + v^2,$$

takže $a^2 - b^2 = d^2 + 2dx = d(d + 2x)$. Po dosadení do ľavej strany nerovnosti (6) a skrátení výrazom d^2 dostaneme ekvivalentnú nerovnosť

$$(d + 2x)^2 < a^2 + b^2 \quad \text{čiže} \quad c^2 < a^2 + b^2,$$

ktorá (vďaka kosínusovej vete) presne vyjadruje podmienku $\gamma < 90°$ zo zadania úlohy. Tým je celé jej riešenie hotové, pretože v prípade $a = b$ zrejme v dokazovanej nerovnosti nastane rovnosť.

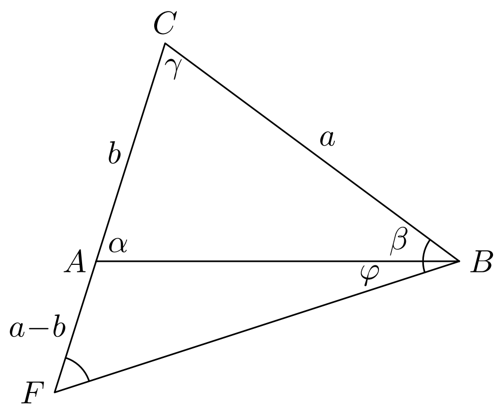
Iné riešenie. Ešte jedným spôsobom za predpokladov $\gamma < 90°$ a $a > b$ (čiže $\alpha > \beta$) dokážeme ostrú nerovnosť

$$(a^2 + b^2)\cos(\alpha - \beta) < 2ab.$$

Najprv ju ekvivalentne upravíme, keď položíme $\varphi = \frac{1}{2}(\alpha - \beta) > 0$ a využijeme vzorec $\cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi$:

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2)(1 - 2\sin^2\varphi) &< 2ab,\\ (a - b)^2 &< 2(a^2 + b^2)\sin^2\varphi,\\ 2\cdot\left(\frac{a-b}{2\sin\varphi}\right)^2 &< a^2 + b^2.\end{aligned}$$

To je (podľa sínusovej vety) nerovnosť $2r^2 < a^2 + b^2$ pre polomer r kružnice opísanej ľubovoľnému trojuholníku so stranou $a - b$ a protiľahlým vnútorným uhlom φ. Taký trojuholník dostaneme, keď ako na obr. 27 stranu CA trojuholníka ABC predĺžime



Obr. 27

za bod A do bodu F tak, aby platilo $|CF| = a$ $(a > b)$. Potom má trojuholník ABF stranu AF dĺžky $a - b$ s protiľahlým uhlom ABF, ktorého veľkosť určíme takto: rovnoramenný trojuholník BCF má pri základni BF zhodné uhly $90° - \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, takže

$$|\measuredangle ABF| = |\measuredangle CBF| - |\measuredangle CBA| = \frac{\alpha+\beta}{2} - \beta = \varphi.$$

Preto je polomer kružnice opísanej trojuholníku ABF naozaj rovný skúmanej hodnote r. Pre ňu tak dostaneme z predpokladu $\gamma < 90°$ odhad

$$r = \frac{|AB|}{2\sin|\measuredangle AFB|} = \frac{c}{2\sin(90° - \frac{1}{2}\gamma)} < \frac{c}{2\sin 45°} = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

čiže $2r^2 < c^2$; z toho istého predpokladu $\gamma < 90°$ vyplýva (podľa kosínusovej vety pre trojuholník ABC) ďalšia nerovnosť $c^2 < a^2 + b^2$. Dokopy dostávame $2r^2 < c^2 < < a^2 + b^2$ a požadovaná nerovnosť $2r^2 < a^2 + b^2$ je tak dokázaná.

Dodajme ešte, že v prípade $\gamma > 90^\circ$ z rovnakých dôvodov platí $2r^2 > c^2 > a^2 + b^2$, čo (za predpokladu $a \neq b$) dokazuje opačnú nerovnosť

$$(a^2 + b^2)\cos(\alpha - \beta) > 2ab.$$

Iné riešenie. Uvedieme ešte jedno trigonometrické riešenie. Pre ľubovoľný trojuholník ABC platí totiž tzv. *Mollweidov vzorec*

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac12(\alpha-\beta)}{\cos\frac12\gamma},$$

z ktorého vyplýva nasledovné vyjadrenie hodnoty $\cos(\alpha - \beta)$:

$$\cos(\alpha-\beta) = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} = 1 - \frac{2(a-b)^2\cos^2\frac12\gamma}{c^2}.$$

Dosadením do ľavej strany dokazovanej nerovnosti dostaneme

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)\cos(\alpha-\beta) &\leqq 2ab,\\ (a^2+b^2)\biggl(1 - \frac{2(a-b)^2\cos^2\frac12\gamma}{c^2}\biggr) &\leqq 2ab,\\ (a-b)^2 &\leqq \frac{2(a^2+b^2)(a-b)^2\cos^2\frac12\gamma}{c^2}.\end{aligned}$$

Vidíme, že v prípade $a = b$ nastane rovnosť. V prípade $a \neq b$ po vydelení kladným výrazom $(a-b)^2$ a ďalšej zrejmej ekvivalentnej úprave dostaneme

$$c^2 \leqq 2(a^2+b^2)\cos^2\frac{\gamma}{2}.$$

Ak sem dosadíme z rovností

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \quad \text{a} \quad 2\cos^2\frac{\gamma}{2} = 1 + \cos\gamma,$$

dostaneme po odčítaní súčtu $a^2 + b^2$ od oboch strán nerovnosť

$$-2ab\cos\gamma \leqq (a^2+b^2)\cos\gamma \quad \text{čiže} \quad 0 \leqq (a+b)^2\cos\gamma,$$

čo vďaka zadanému predpokladu $\gamma < 90^\circ$ naozaj platí ako ostrá nerovnosť. Tým je nerovnosť zo zadania úlohy dokázaná; rovnosť v nej nastane práve vtedy, keď $a = b$. (Aj pri tomto postupe je možné odvodiť všeobecnejšie závery uvedené v Poznámke 1 za prvým riešením.)

A – S – 1

Predpokladajme, že číslo c má požadovanú vlastnosť. Diferenciu príslušnej aritmetickej postupnosti označme d. Rozoberieme dva prípady podľa toho, či číslo c leží medzi koreňmi x_1 a x_2 danej kvadratickej rovnice, alebo nie.

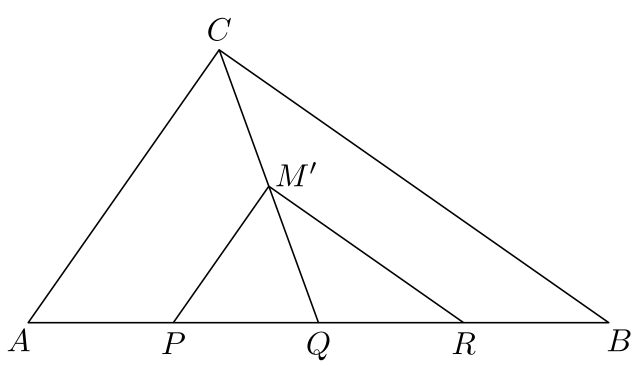
a) Ak je c prostredným členom predpokladanej aritmetickej postupnosti, platí $x_1 = c - d$ a $x_2 = c + d$. Pre súčet koreňov tak podľa Viètových vzťahov dostávame $-\frac{5}{2} = x_1 + x_2 = 2c$, odkiaľ $c = -\frac{5}{4}$. Navyše pre záporné c je diskriminant danej rovnice kladný, takže má dva reálne korene. (Pre $c = -\frac{5}{4}$ má daná rovnica korene $x_{1,2} = -\frac{5}{4} \pm \frac{3}{4}\sqrt{5}$.)

b) Ak je koeficient c krajným členom predpokladanej aritmetickej postupnosti, označme korene danej rovnice tak, aby platilo $x_1 = c + d$, $x_2 = c + 2d$. Pre ich súčet teraz vychádza $-\frac{5}{2} = x_1 + x_2 = 2c + 3d$. Ak z toho vyjadríme $d = -\frac{5}{6} - \frac{2}{3}c$ a dosadíme do vzťahov $x_1 = c + d$ a $x_2 = c + 2d$, dostaneme $x_1 = \frac{1}{6}(2c - 5)$, $x_2 = -\frac{1}{3}(c + 5)$. Po dosadení oboch výrazov do Viètovho vzťahu $x_1 x_2 = c$ obdržíme po úprave kvadratickú rovnicu $2c^2 + 23c - 25 = 0$, ktorá má korene 1 a $-\frac{25}{2}$. (Podmienku na diskriminant tentoraz overovať nemusíme, lebo uvedeným postupom máme zaručené, že reálne čísla $x_{1,2}$ zodpovedajúce obom nájdeným hodnotám c spĺňajú oba Viètove vzťahy, takže sú naozaj koreňmi príslušnej rovnice. Pre $c = 1$ má daná kvadratická rovnica korene $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = -2$; pre $c = -\frac{25}{2}$ má rovnica korene $x_1 = -5$, $x_2 = \frac{5}{2}$.)

Záver. Úlohe vyhovujú reálne čísla c z množiny $\{-\frac{25}{2}; -\frac{5}{4}; 1\}$.

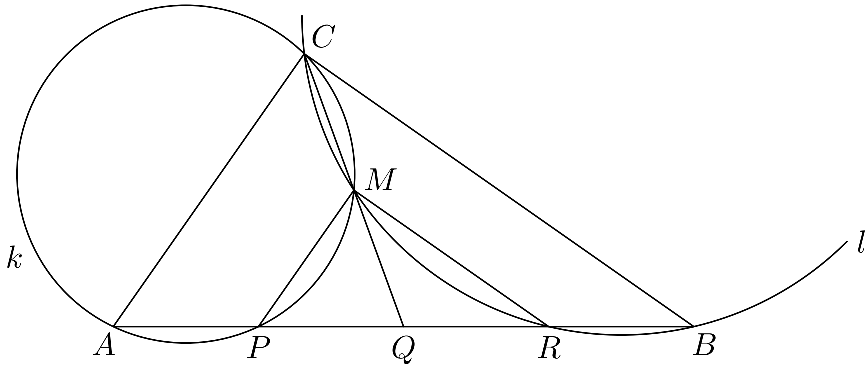
A – S – 2

Označme M' stred úsečky CQ (obr. 28). Keďže PM' a RM' sú stredné priečky trojuholníkov AQC a BQC, ktoré sú podľa Tálesovej vety rovnoramenné so základňami AC a BC, sú štvoruholníky $CAPM'$ a $CBRM'$ rovnoramenné lichobežníky a im opísané kružnice, ktoré sa pretínajú v bodoch C a M', sú zároveň aj opísanými kružnicami uvažovaných trojuholníkov APC a BRC. Takže $M = M'$ a tvrdenie úlohy je tým dokázané.



Obr. 28

Iné riešenie. Označme c dĺžku prepony AB daného pravouhlého trojuholníka ABC. Kružnice opísané trojuholníkom APC a BRC označme postupne k, l (obr. 29). Vzhľadom na to, že $|QP|\cdot|QA| = |QR|\cdot|QB| = \frac{1}{4}c\cdot\frac{1}{2}c$, má stred Q prepony AB rovnakú mocnosť $m = \frac{1}{4}c\cdot\frac{1}{2}c$ k obom kružniciam k aj l, a leží preto na ich chordále CM. Navyše podľa Tálesovej vety platí $|QC| = |QA| = \frac{1}{2}c$. Z rovnosti $|QM|\cdot|QC| = m$ tak vyplýva $|QM| = \frac{1}{4}c = \frac{1}{2}|QC|$, takže M je stredom úsečky CQ.



Obr. 29

A – S – 3

Keďže p, q sú rôzne *nepárne* prvočísla, platí $|p-q| \geqq 2$. Pre ľavú stranu danej nerovnosti teda máme

$$L = \left|\frac{p}{q} - \frac{q}{p}\right| = \left|\frac{p^2-q^2}{pq}\right| = \frac{|p-q|\cdot(p+q)}{pq} \geqq \frac{2\,(p+q)}{pq}.$$

Aby sme dokázali požadovanú nerovnosť

$$L > \frac{4}{\sqrt{pq}},$$

stačí dokázať nerovnosť $p + q > 2\sqrt{pq}$. To je však nerovnosť, ktorá je triviálnym dôsledkom nerovnosti $(\sqrt{p} - \sqrt{q})^2 > 0$, ktorá platí pre ľubovoľné dve rôzne kladné čísla p, q. Tým je daná nerovnosť dokázaná.

A – II – 1

Najskôr určíme počet u všetkých osemciferných čísel deliteľných štyrmi. Každé také číslo má vo svojom zápise na prvom mieste zľava nenulovú cifru. Máme tak 9 možností. Na nasledujúcich piatich miestach má ľubovoľnú cifru desiatkovej sústavy, t. j. pre každú pozíciu máme 10 možností, a končí dvojčíslím, ktoré je deliteľné štyrmi, t. j. 00, 04, 08, 12, 16, 20, 24, …, 96, celkom teda 25 možností. Preto

$$u = 9\cdot 10^5\cdot 25 = 22\,500\,000.$$

Podobnú úvahu možno urobiť aj pri hľadaní počtu v všetkých osemciferných čísel deliteľných štyrmi, ktoré vo svojom desiatkovom zápise *neobsahujú* cifru 1. Pre prvú pozíciu zľava máme teraz 8 možností a pre každú ďalšiu z piatich nasledujúcich pozícií máme 9 možností. Na posledných dvoch miestach sprava musí byť dvojčíslie deliteľné štyrmi, ktoré však neobsahuje cifru 1. Sú to všetky dvojčíslia z predchádzajúceho odseku okrem 12 a 16, teda 23 možností. Preto

$$v = 8 \cdot 9^5 \cdot 23 = 10\,865\,016.$$

Záver. Keďže $u > 2v$, je medzi osemcifernými násobkami čísla 4 viac tých, ktoré vo svojom (desiatkovom) zápise cifru 1 obsahujú, ako tých, ktoré ju neobsahujú.

Poznámka. Počet u všetkých osemciferných násobkov čísla 4 možno určiť aj jednoduchou úvahou: najmenší násobok je $A = 10\,000\,000$, najväčší je $B = 99\,999\,996$, takže hľadaný počet je $\frac{1}{4}(B - A) + 1 = \frac{1}{4}(B + 4 - A) = 22\,500\,000$.

Na dôkaz nerovnosti $u > 2v$ nie je nutné v vyčísliť, pretože podiel

$$\frac{u}{v} = \frac{9 \cdot 10^5 \cdot 25}{8 \cdot 9^5 \cdot 23} = \frac{9}{8} \cdot \left(\frac{10}{9}\right)^5 \cdot \frac{25}{23}$$

sa dá dobre odhadnúť pomocou binomickej vety

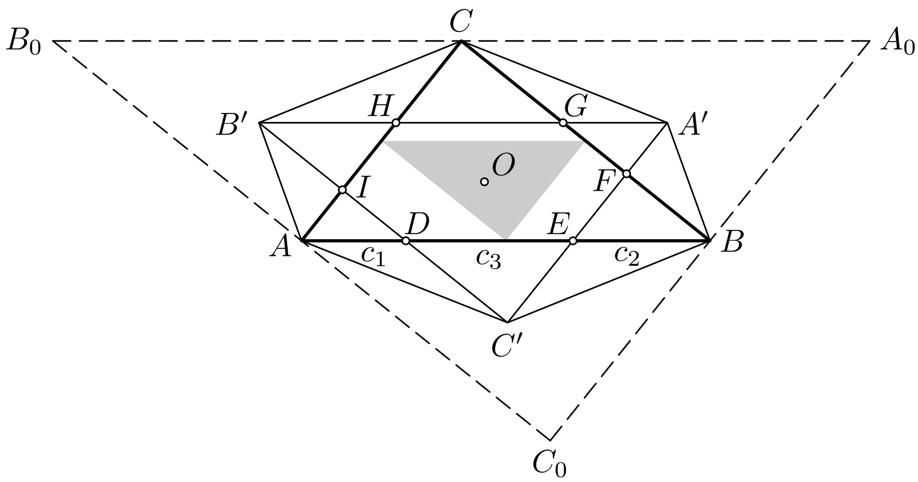
$$\left(\frac{10}{9}\right)^5 = \left(1 + \frac{1}{9}\right)^5 > 1 + 5 \cdot \frac{1}{9} + 10 \cdot \frac{1}{9^2} = \frac{136}{81} = \frac{8 \cdot 17}{9^2},$$

takže

$$\frac{u}{v} = \frac{9}{8} \cdot \left(\frac{10}{9}\right)^5 \cdot \frac{25}{23} > \frac{9}{8} \cdot \frac{8 \cdot 17}{9^2} \cdot \frac{25}{23} = \frac{17 \cdot 25}{9 \cdot 23} = \frac{425}{207} > 2.$$

A – II – 2

Označme $\mathcal{U}$ trojuholník s vrcholmi v stredoch strán BC, CA, AB daného trojuholníka ABC. Obsah trojuholníka XYZ budeme označovať S_{XYZ}.



Obr. 30

Keďže body A', B', C' sú zároveň obrazmi bodu O v rovnoľahlostiach so stredmi v zodpovedajúcich vrcholoch trojuholníka ABC a koeficientom 2, vyplýva z predpokladu úlohy, že body A', B', C' ležia postupne vnútri trojuholníkov A_0CB, CB_0A a BAC_0 (to sú obrazy trojuholníka $\mathcal{U}$ v uvedených rovnoľahlostiach, na obr. 30 je $\mathcal{U}$ vyznačený sivou farbou). Hranica trojuholníka $A'B'C'$ teda pretne strany AB, BC, CA postupne v ich vnútorných bodoch D, E, F, G, H, I.

Keďže trojuholník $A'B'C'$ je obrazom trojuholníka ABC v stredovej súmernosti podľa stredu O, sú navzájom si zodpovedajúce strany rovnobežné a v tej istej súmernosti si zodpovedajú dvojice bodov D a G, E a H aj F a I. Preto podľa vety *uu* je každý z trojuholníkov ADI, EBF, HGC podobný trojuholníku ABC. Označme k_1, k_2, k_3 koeficienty podobností, ktoré zobrazia trojuholník ABC postupne na trojuholníky ADI, EBF, HGC. Obrazy trojuholníkov ADI, EBF, HGC v stredovej súmernosti podľa stredu O sú postupne trojuholníky $A'GF$, $HB'I$, EDC'. Tie sú tiež podobné s trojuholníkom ABC, pričom zodpovedajúce koeficienty podobností, ktoré na ne zobrazia trojuholník ABC, sú opäť k_1, k_2, k_3. Ak označíme c dĺžku strany AB, platí pre dĺžky úsekov na strane AB

$$c_1 = |AD| = k_1 c, \quad c_2 = |EB| = k_2 c, \quad c_3 = |DE| = k_3 c,$$

takže

$$c = c_1 + c_2 + c_3 = k_1 c + k_2 c + k_3 c = (k_1 + k_2 + k_3)c, \quad \text{odkiaľ} \quad k_1 + k_2 + k_3 = 1.$$

Z podobnosti trojuholníkov ABC a EDC' ďalej vyplýva, že veľkosť výšky z vrcholu C' na stranu AB v trojuholníku ABC' je rovná $k_3 v_c$, pričom v_c je veľkosť výšky z vrcholu C v trojuholníku ABC. Preto

$$S_{ABC'} = \frac{1}{2} c \cdot k_3 v_c = k_3 \Big(\frac{1}{2} c v_c\Big) = k_3 S.$$

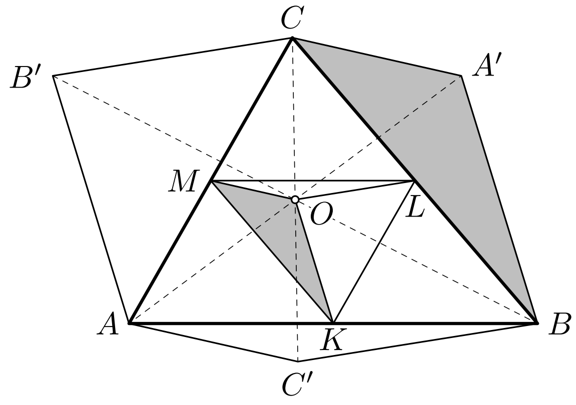
Analogicky $S_{BCA'} = k_1 S$ a $S_{CAB'} = k_2 S$. Pre obsah S' šesťuholníka $AC'BA'CB'$ tak platí

$$S' = S_{ABC} + S_{BCA'} + S_{CAB'} + S_{ABC'} = (1 + k_1 + k_2 + k_3)S = 2S.$$

Iné riešenie. Označme K, L, M stredy strán AB, BC, CA. Rovnoľahlosť so stredom A a koeficientom 2 zobrazí trojuholník MKO na trojuholník CBA' (obr. 31), preto $S_{CBA'} = 4 \cdot S_{MKO}$. Podobne $S_{ACB'} = 4 \cdot S_{KLO}$ a $S_{BAC'} = 4 \cdot S_{LMO}$. Odtiaľ

$$S_{CBA'} + S_{ACB'} + S_{BAC'} = 4 \cdot S_{KLM} = S,$$

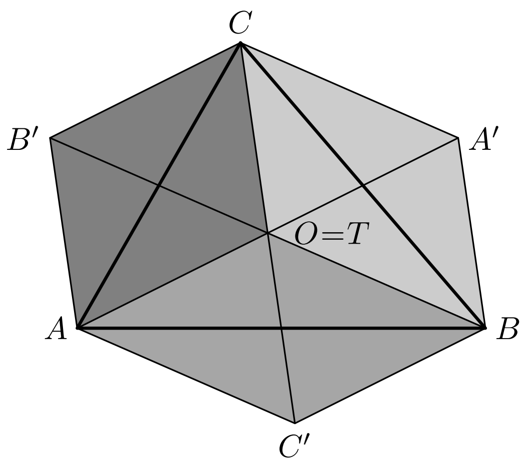
a teda šesťuholník $AC'BA'CB'$ má obsah $2S$.



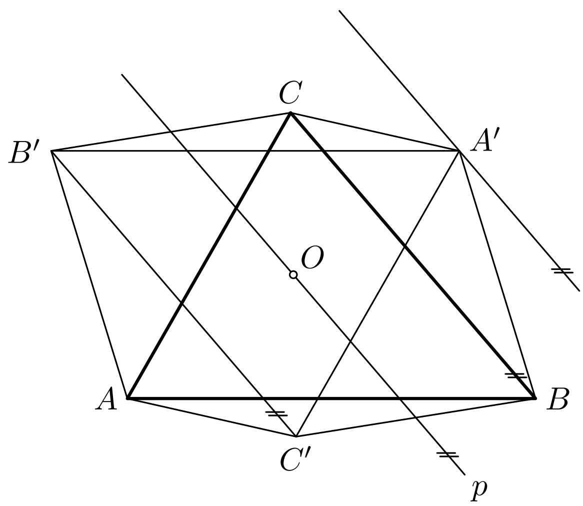
Obr. 31

Iné riešenie. Ak je bod O totožný s ťažiskom T trojuholníka ABC ($O = T$), je tvrdenie úlohy splnené, lebo $S_{A'BC} = S_{TBC}$, $S_{B'CA} = S_{TCA}$ a $S_{C'AB} = S_{TAB}$ (obr. 32).

Predpokladajme teraz, že bod O sa pohybuje vnútri trojuholníka $\mathcal{U}$ po priamke p rovnobežnej so stranou BC. Ukážeme, že sa pritom obsah šesťuholníka $AC'BA'CB'$ nemení. Body A', B' a C' ležia na rovnobežkách s priamkou p, preto sa nemení obsah trojuholníka $A'BC$ ani obsahy rovnobežníka $BCB'C'$ a trojuholníka $B'C'A$ (obr. 33). Obsah šesťuholníka $AC'BA'CB'$ teda od polohy bodu O na priamke p nezávisí. Podobne možno ukázať, že sa obsah šesťuholníka $AC'BA'CB'$ nemení, ani keď sa bod O pohybuje po rovnobežke so stranou AC.



Obr. 32



Obr. 33

Ľubovoľný vnútorný bod O trojuholníka $\mathcal{U}$ pritom získame ako obraz ťažiska T trojuholníka ABC v zobrazení zloženom z dvoch posunutí, a to z posunutia v smere rovnobežnom so stranou BC a z posunutia v smere rovnobežnom so stranou AC. Preto pre každý bod O vnútri trojuholníka $\mathcal{U}$ má šesťuholník $AC'BA'CB'$ rovnaký obsah ako šesťuholník zodpovedajúci bodu $O = T$, teda obsah $2S$, čo sme chceli dokázať.

Iné riešenie. Označme O' ľubovoľný vnútorný bod trojuholníka ABC. Keďže obsah skúmaného šesťuholníka je rovný súčtu obsahov troch štvoruholníkov $AC'BO'$, $BA'CO'$ a $CB'AO'$, bude tvrdenie úlohy zrejme platiť, ak dokážeme bod O' vybrať tak, aby všetky tri spomenuté štvoruholníky boli rovnobežníky. Keďže

$$O = \frac{A + A'}{2} = \frac{B + B'}{2} = \frac{C + C'}{2},$$

majú body A', B', C' vyjadrenia

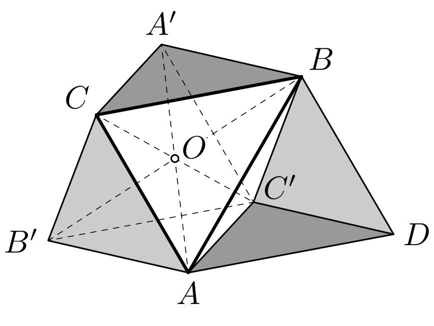
$$A' = 2O - A, \quad B' = 2O - B, \quad C' = 2O - C,$$

takže potrebné rovnosti

$$\frac{A + B}{2} = \frac{C' + O'}{2}, \quad \frac{B + C}{2} = \frac{A' + O'}{2}, \quad \frac{C + A}{2} = \frac{B' + O'}{2}$$

budú splnené práve vtedy, keď bod O' bude mať vyjadrenie $O' = A + B + C - 2O$, čiže $O' = 3T - 2O$, pričom $T = \frac{1}{3}(A + B + C)$ je ťažisko trojuholníka ABC. Odvodená rovnosť zapísaná v tvare $O' - T = 2(T - O)$ znamená, že želaný bod O' je určený ako obraz bodu O v rovnoľahlosti so stredom T a koeficientom -2. V nej je však obrazom trojuholníka $\mathcal{U}$ pôvodný trojuholník ABC, takže vnútorný bod O trojuholníka $\mathcal{U}$ sa naozaj zobrazí na vnútorný bod O' trojuholníka ABC, ako sme potrebovali dokázať.

Iné riešenie. (Podľa *Kataríny Jasenčákovej*.) Úsečka $B'C'$ je obrazom úsečky BC v stredovej súmernosti, takže $BCB'C'$ je rovnobežník, a teda v posunutí o vektor CB sa trojuholník $CB'A$ zobrazí na trojuholník $BC'D$, kde D je obraz bodu A v tomto posunutí. Podobne je rovnobežníkom aj $ACA'C'$ a keďže vektory BD a CA sú zhodné (prvý je obrazom druhého v posunutí o vektor CB), je trojuholník $AC'D$ obrazom trojuholníka $CA'B$ v posunutí o vektor CA (obr. 34).



Obr. 34

Body A', B', C' ležia vďaka polohe bodu O mimo trojuholníka ABC, preto je obsah šesťuholníka $AC'BA'CB'$ rovnaký ako obsah štvoruholníka $ADBC$, ktorý má v porovnaní s trojuholníkom ABC dvojnásobný obsah, pretože vzhľadom na konštrukciu bodu D sú trojuholníky ABC a BAD zhodné.

A – II – 3

Najskôr si uvedomme, že s každou dvojicou (m,n) prirodzených čísel, ktorá úlohe vyhovuje, jej vyhovuje aj dvojica (n,m). Preto môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $m \geqq n$.

Ak prirodzené číslo $A = (m+n)^2$ delí prirodzené číslo $B = 4(mn+1)$, nutne platí

$$(m+n)^2 \leqq 4(mn+1), \qquad \text{čiže} \qquad (m-n)^2 \leqq 4.$$

Preto $0 \leqq m-n \leqq 2$. Nastane teda práve jedna z troch nasledujúcich možností:

▷ $m = n$, potom $A = 4n^2$, $B = 4n^2 + 4$ a A delí B práve vtedy, keď $4n^2$ delí 4, teda $n = 1$. Dostávame jedno riešenie $(m,n) = (1,1)$.

▷ $m = n+1$, potom $A = 4n^2+4n+1$, $B = 4n^2+4n+4 = A+3$. Číslo A delí B práve vtedy, keď $4n^2 + 4n + 1$ delí 3. Avšak pre kladné celé čísla n platí $4n^2 + 4n + 1 \geqq$ $\geqq 4 + 4 + 1 = 9$, preto v tomto prípade nemá úloha riešenie.

▷ $m = n + 2$, potom $A = 4n^2 + 8n + 4$, $B = 4n^2 + 8n + 4$. Vidíme, že $A = B$, teda každá dvojica $(m,n) = (n+2,n)$ kladných celých čísel je riešením zadanej úlohy.

Záver. Úlohe vyhovuje dvojica $(1,1)$ a ďalej (vzhľadom na symetriu neznámych m, n) každá z dvojíc $(k+2,k)$ a $(k,k+2)$, pričom k je ľubovoľné prirodzené číslo.

A – II – 4

Označme steny kocky S_1, S_2, …, S_6 tak, že stena S_1 je oproti stene S_6, stena S_2 oproti S_5 a S_3 oproti S_4. Číslo na stene S_i označme c_i. Zrejme ľubovoľný vrchol kocky patrí vždy práve jednej stene z dvojice protiľahlých stien. To znamená, že sa v každom kroku zväčší o 1 aj hodnota súčtov $c_1 + c_6$, $c_2 + c_5$ a $c_3 + c_4$ čísel na protiľahlých stenách. Ak má teda na konci platiť $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6$, čiže aj

$$c_1 + c_6 = c_2 + c_5 = c_3 + c_4, \tag{1}$$

musia byť súčty čísel na protiľahlých stenách kocky rovnaké už na začiatku (a zostanú rovnaké aj po každom kroku).

Ukážeme, že podmienka (1) je zároveň postačujúca. Nech teda čísla na stenách kocky spĺňajú (1). Opíšeme postupnosť krokov, po ktorých budú na všetkých stenách kocky rovnaké čísla. Krok, v ktorom zväčšíme čísla na stenách S_i, S_j, S_m, označme k_{ijm}. Bez ujmy na všeobecnosti nech $c_1 = p$ je najväčšie zo šiestich čísel na kocke. Urobíme $(p-c_2)$-krát krok k_{246} a $(p-c_3)$-krát krok k_{356}. Dosiahneme tak, že na stenách S_1, S_2, S_3 budú rovnaké čísla p. Vďaka podmienke (1) je aj na stenách S_4, S_5, S_6 rovnaké číslo, ktoré označme q. Ak ešte neplatí $p = q$, stačí už len $(p-q)$-krát urobiť krok k_{456} (ak $p > q$), resp. $(q-p)$-krát krok k_{123} (ak $q > p$).

Našou úlohou je teda určiť počet takých množín $\mathsf{M} = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$ navzájom rôznych prirodzených čísel, pre ktoré platí

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 = 60 \quad \text{a} \quad c_1 + c_6 = c_2 + c_5 = c_3 + c_4.$$

Odtiaľ vyplýva $3(c_1 + c_6) = 60$, teda

$$c_1 + c_6 = c_2 + c_5 = c_3 + c_4 = 20. \tag{2}$$

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme zrejme predpokladať, že $c_1 < c_2 < c_3 < c_4 < c_5 < < c_6$, čiže (vzhľadom na rovnosti (2))

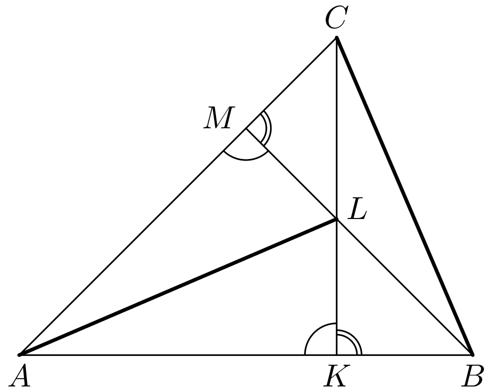
$$c_1 < c_2 < c_3 < 10 < c_4 < c_5 < c_6.$$

Pritom ku každej trojici (c_1, c_2, c_3) spĺňajúcej $c_1 < c_2 < c_3 < 10$ zvyšné čísla c_4, c_5, c_6 jednoznačne dopočítame z (2). Počet všetkých vyhovujúcich množín M je teda rovný počtu rôznych trojíc prirodzených čísel (c_1, c_2, c_3), ktoré spĺňajú $c_1 < c_2 < c_3 < 10$, čo je

$$\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84.$$

A – III – 1

Štvoruholník $KBCM$ je tetivový práve vtedy, keď $|\measuredangle CMB| = |\measuredangle CKB|$, čiže $|\measuredangle AKL| = = |\measuredangle AML|$ (obr. 35). Pritom štvoruholník $AKLM$ je tetivový práve vtedy, keď $|\measuredangle AKL| + |\measuredangle AML| = 180°$. V skúmanom prípade preto musia byť všetky štyri uvedené uhly pravé, K a M sú tak päty výšok v trojuholníku ABC, ktorý je teda ostrouhlý, a bod L je priesečníkom jeho výšok. Kružnica opísaná štvoruholníku $KBCM$ je Tálesovou kružnicou nad priemerom BC a kružnica opísaná štvoruholníku $AKLM$ je Tálesovou kružnicou nad priemerom AL.



Obr. 35

Kružnice opísané uvedeným štvoruholníkom sú zhodné práve vtedy, keď sú zhodné ich priemery BC a AL. Označme veľkosti vnútorných uhlov v trojuholníku ABC zvyčajným spôsobom α, β, γ. Pravouhlé trojuholníky CKB a AKL sú podobné, lebo pre ich uhly pri zodpovedajúcich vrcholoch C a A platí $|\measuredangle BAL| = |\measuredangle BCK| = 90° - \beta$. Zrejme preto $|BC| = |AL|$ platí práve vtedy, keď $|AK| = |CK|$, teda keď AKC je pravouhlý rovnoramenný trojuholník.

Vidíme, že trojuholník ABC vyhovuje podmienkam úlohy práve vtedy, keď je ostrouhlý s uhlom $\alpha = 45°$. Pre *ostré* uhly β a γ potom platí $\beta + \gamma = 135°$.

Záver. Riešením sú trojice uhlov $(\alpha, \beta, \gamma) = (45°, 45° + \varphi, 90° - \varphi)$, pričom $\varphi \in (0°, 45°)$.

Poznámka. Druhú časť riešenia možno založiť aj na úvahe, že v zadaní uvedené kružnice sú zhodné práve vtedy, keď obvodové uhly MAK a MCK nad ich spoločnou tetivou MK (s vrcholmi v opačných polrovinách určených priamkou MK) majú rovnakú veľkosť. Keďže tieto uhly sú vnútornými uhlami pravouhlého trojuholníka AKC, rovnakú veľkosť majú práve vtedy, keď $\alpha = 45°$.

A – III – 2

Ukážeme, že danej rovnici vyhovujú práve tri trojice prvočísel (p, q, r), a to $(2, 3, 5)$, $(5, 3, 3)$ a $(7, 5, 2)$.

Danú rovnicu najskôr upravíme na tvar

$$\left(1 + \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{2}{q}\right)\left(1 + \frac{3}{r}\right) = 4.$$

Keďže $3^3 < 4 \cdot 2^3$, musí byť aspoň jeden z troch činiteľov na ľavej strane upravenej rovnice väčší ako $\frac{3}{2}$. Pre prvočísla p, q, r tak nutne platí $p < 2$ alebo $q < 4$ alebo $r < 6$. Vzhľadom na to, že neexistuje žiadne prvočíslo menšie ako 2, zostáva prešetriť nasledujúcich päť možností: $q \in \{2, 3\}$ a $r \in \{2, 3, 5\}$. Ty teraz rozoberieme jednotlivo, pritom uvažovanú hodnotu q či r vždy dosadíme do danej rovnice, ktorú potom (v obore prvočísel) vyriešime pre zostávajúce dve neznáme.

- ▷ Pre $q = 2$ dostaneme $(p + 1)(r + 3) = 2pr$, odkiaľ vyplýva $r = 3 + 6/(p - 1)$, čo je celé číslo len pre prvočísla $p \in \{2, 3, 7\}$. Im však prislúchajú $r \in \{9, 6, 4\}$, ktoré nie sú prvočíslami.
- ▷ Pre $q = 3$ dostaneme $5(p + 1)(r + 3) = 12pr$, odkiaľ vyplýva, že $p = 5$ alebo $r = 5$. Pre $p = 5$ dostaneme riešenie $(5, 3, 3)$ a pre $r = 5$ riešenie $(2, 3, 5)$.
- ▷ Pre $r = 2$ dostaneme $5(p+1)(q+2) = 8pq$, odkiaľ vyplýva, že $p = 5$ alebo $q = 5$. Pre $p = 5$ nedostaneme žiadne riešenie v obore prvočísel, zatiaľ čo pre $q = 5$ dostávame tretie riešenie danej rovnice, ktorým je trojica $(7, 5, 2)$.
- ▷ Pre $r = 3$ dostaneme $(p+1)(q+2) = 2pq$, odkiaľ $q = 2+4/(p - 1)$, čo je celé číslo iba pre prvočísla $p \in \{2, 3, 5\}$. Medzi prislúchajúcimi hodnotami $q \in \{6, 4, 3\}$ je jediné prvočíslo, pre ktoré dostávame riešenie $(p, q, r) = (5, 3, 3)$, ktoré už poznáme.
- ▷ Pre $r = 5$ dostaneme $2(p + 1)(q + 2) = 5pq$, odkiaľ vyplýva, že $p = 2$ alebo $q = 2$. Pre $p = 2$ dostávame už známe riešenie $(2, 3, 5)$, zatiaľ čo pre $q = 2$ vychádza $p = 4$.

Iné riešenie. Pre každé prvočíslo q platí nerovnosť $q + 2 \leqq 2q$. Pre prvočísla p a r tak dostaneme nerovnicu $2(p + 1)(r + 3) \geqq 4pr$, ktorú upravíme na tvar $(p - 1)(r - 3) \leqq$ $\leqq 6$. Keďže $p - 1 \geqq 1$, musí byť $r - 3 \leqq 6$, čiže $r \leqq 9$. Odtiaľ vyplýva, že nutne $r \in \{2, 3, 5, 7\}$. Postupným rozborom každej z týchto štyroch možností dospejeme (analogicky ako v predchádzajúcom riešení) k trom trojiciam prvočísel (p, q, r): $(2, 3, 5)$, $(5, 3, 3)$ a $(7, 5, 2)$, ktoré sú jedinými riešeniami úlohy.

Poznámka. V obore kladných celých čísel má rovnica až 28 riešení, z toho 13 v obore celých čísel väčších ako 1.

A – III – 3

a) Podľa zadania platí $(x+y)^2=(12-z)^2$ a $x^2+y^2=54-z^2$, teda

$$2xy=(x+y)^2-(x^2+y^2)=(12-z)^2-(54-z^2)=2\big((z-6)^2+9\big) \tag{1}$$

a

$$0\leqq(x-y)^2=x^2+y^2-2xy=54-z^2-2\big((z-6)^2+9\big)=-3\big((z-4)^2-4\big). \tag{2}$$

Z (1) vyplýva $xy=(z-6)^2+9\geqq 9$, z (2) nerovnosť $(z-4)^2\leqq 4$, čiže $2\leqq z\leqq 6$. Preto $(z-6)^2\leqq(2-6)^2=16$, čo spolu s (1) dáva $xy=(z-6)^2+9\leqq 25$. Vzhľadom na symetriu platia odvodené nerovnosti $9\leqq xy\leqq 25$ aj pre súčiny yz, zx namiesto xy.

b) Z danej sústavy rovníc dostávame

$$xy+yz+zx=\frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}=\frac{12^2-54}{2}=45.$$

Ďalej platí

$$\begin{aligned}(x-3)(y-3)+(y-3)(z-3)+(z-3)(x-3)&=\\ =xy+yz+zx-6(x+y+z)+27&=45-6\cdot 12+27=0.\end{aligned}$$

Odtiaľ vyplýva, že čísla $x-3$, $y-3$, $z-3$ nemôžu byť súčasne všetky kladné, aspoň jedno z čísel x, y, z je teda nanajvýš 3. Podobne zo vzťahu

$$\begin{aligned}(x-5)(y-5)+(y-5)(z-5)+(z-5)(x-5)&=\\ =xy+yz+zx-10(x+y+z)+75&=45-10\cdot 12+75=0\end{aligned}$$

vidíme, že čísla $x-5$, $y-5$, $z-5$ nemôžu byť súčasne všetky záporné, preto minimálne jedno z čísel x, y, z je aspoň 5.

Iné riešenie. Náročnejší trik v časti b) predošlého riešenia môžeme nahradiť dôkazom implikácií

$$(x>3)\wedge(y>3)\Rightarrow z<3 \qquad\text{a}\qquad (x<5)\wedge(y<5)\Rightarrow z>5.$$

Uvažujme kvadratický trojčlen $F(t)=(t-x)(t-y)$. Ak sú oba jeho korene x a y väčšie ako 3, platí $F(3)>0$. Avšak podľa zadania a (1) platí

$$0<F(3)=3^2-3(x+y)+xy=9-3(12-z)+(z-6)^2+9=(z-3)(z-6).$$

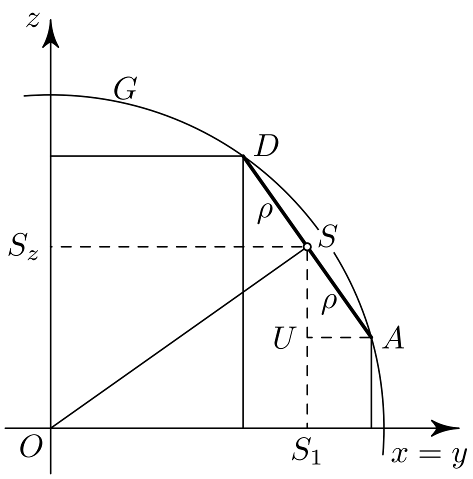
Z tejto nerovnosti a z odhadu $z \leqq 6$ dokázaného v časti a) predošlého riešenia tak dostávame požadovaný odhad $z < 3$. Podobne, ak sú obe čísla x a y menšie ako 5, tak $F(5) > 0$. Avšak podľa zadania a (1) platí

$$0 < F(5) = 5^2 - 5(x+y) + xy = 25 - 5(12-z) + (z-6)^2 + 9 = (z-2)(z-5).$$

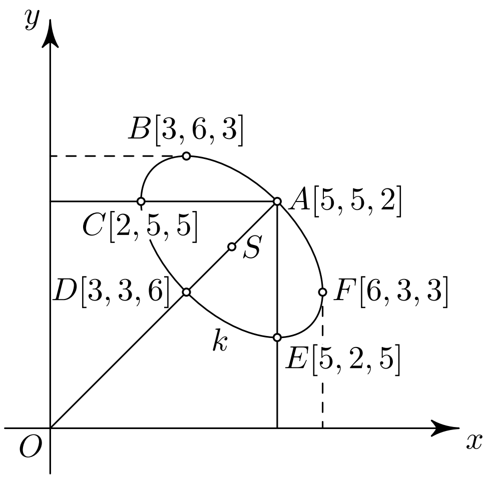
Z tejto nerovnosti a odhadu $z \geqq 2$ dokázaného v časti a) predošlého riešenia tak dostávame požadovaný odhad $z > 5$.

Iné riešenie. Vyriešime časť b) geometricky. V karteziánskej sústave súradníc s počiatkom O a osami x, y, z určuje prvá rovnica rovinu σ, ktorá prechádza bodom $S = [4,4,4]$ a je kolmá na úsečku OS, zatiaľ čo druhá rovnica je rovnicou guľovej plochy $G(O, r = \sqrt{54})$. Prienikom oboch útvarov je kružnica $k(S, \varrho)$. Určíme najskôr jej polomer a priesečníky kružnice s rovinou, podľa ktorej sú osi x a y súmerne združené.

Označme S_x, S_y a S_z kolmé priemety bodu S do súradnicových osí x, y a z. Na obr. 36 je rez rovinou OSS_z. Platí $|OS_1| = 4\sqrt{2}$, $|OS| = 4\sqrt{3}$ (stenová a telesová uhlopriečka kocky s hranou dĺžky 4) a $|OA| = \sqrt{54}$. Z pravouhlého trojuholníka OAS pomocou Pytagorovej vety určíme $\varrho = |SA| = \sqrt{6}$ a z podobnosti trojuholníkov $SAU \sim OSS_1$ dostaneme $|US| = 2$ a $|AU| = \sqrt{2}$. Odtiaľ $A = [5,5,2]$ a (vďaka symetrii podľa S) $D = [3,3,6]$.



Obr. 36



Obr. 37

Analogickým rozborom pre roviny OSS_y a OSS_x (alebo len cyklickou zámenou, ktorú možno vzhľadom k symetriu použiť) nájdeme ich priesečníky s kružnicou k:

$$B = [3,6,3], \quad E = [5,2,5] \quad \text{a} \quad C = [2,5,5], \quad F = [6,3,3].$$

Nájdené body A, B, C, D, E, F rozdeľujú kružnicu k na šesť oblúkov (obr. 37 znázorňuje pohľad na kružnicu k v smere osi z), pre ktorých body zrejme platí:

$$\begin{aligned}
[x,y,z] \in \widehat{AB} &\Rightarrow 2 \leqq z \leqq 3,\ 5 \leqq y \leqq 6,\ 3 \leqq x \leqq 5,\\
[x,y,z] \in \widehat{BC} &\Rightarrow 2 \leqq x \leqq 3,\ 5 \leqq y \leqq 6,\ 3 \leqq z \leqq 5,\\
[x,y,z] \in \widehat{CD} &\Rightarrow 2 \leqq x \leqq 3,\ 5 \leqq z \leqq 6,\ 3 \leqq y \leqq 5,\\
[x,y,z] \in \widehat{DE} &\Rightarrow 2 \leqq y \leqq 3,\ 5 \leqq z \leqq 6,\ 3 \leqq x \leqq 5,\\
[x,y,z] \in \widehat{EF} &\Rightarrow 2 \leqq y \leqq 3,\ 5 \leqq x \leqq 6,\ 3 \leqq z \leqq 5,\\
[x,y,z] \in \widehat{FA} &\Rightarrow 2 \leqq z \leqq 3,\ 5 \leqq x \leqq 6,\ 3 \leqq y \leqq 5.
\end{aligned}$$

Tým je však tvrdenie b) dokázané.

Iné riešenie. a) Dosadením z prvej rovnice do druhej dostaneme

$$x^2 + y^2 + xy - 12x - 12y + 45 = 0 \qquad \text{a odtiaľ} \qquad x = \frac{12 - y \pm \sqrt{-3y^2 + 24y - 36}}{2}.$$

Preto $-3y^2 + 24y - 36 \geqq 0$, takže $2 \leqq y \leqq 6$. Ďalej máme

$$2xy = 12y - y^2 \pm y\sqrt{-3y^2 + 24y - 36}.$$

Pripusťme, že $2xy < 18$. Potom $12y - y^2 - y\sqrt{-3y^2 + 24y - 36} < 18$ čiže

$$0 < 12y - y^2 - 18 < y\sqrt{-3y^2 + 24y - 36},$$

odkiaľ po umocnení a úprave dostaneme $(y-3)^4 < 0$, čo však nie je možné.

Podobne z nerovnosti $2xy > 50$ by vyplývalo

$$\begin{aligned}
12y - y^2 + y\sqrt{-3y^2 + 24y - 36} &> 50,\\
y\sqrt{-3y^2 + 24y - 36} &> y^2 - 12y + 50 > 0,
\end{aligned}$$

a po umocnení a úprave $(y^2 - 2y + 25)(y-5)^2 < 0$, čo tiež neplatí.

Preto $9 \leqq xy \leqq 25$ a vzhľadom na symetriu aj $9 \leqq yz \leqq 25$ a $9 \leqq zx \leqq 25$.

b) Položme $x = 4 + a$, $y = 4 + b$, $z = 4 + c$. Potom $a + b + c = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 6$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $|a| \geqq |b| \geqq |c|$. Potom čísla a a b majú opačné znamienka a $a^2 \geqq 2$, preto $|a| \geqq \sqrt{2}$, a teda $x \leqq 4 - \sqrt{2} < 3$ alebo $x \geqq 4 + \sqrt{2} > 5$. Z nerovnosti $|b| < 1$ by vyplývalo $|c| < 1$, ale potom $|a| \leqq |b| + |c| < 2$ a $a^2 + b^2 + c^2 < 6$; preto $|b| \geqq 1$. Môžu teda nastať dva prípady:

▷ Ak $a > 0$, tak $b < 0$, teda $b \leqq -1$; preto $x > 5$ a $y \leqq 3$.

▷ Ak $a < 0$, tak $b > 0$, teda $b \geqq 1$; preto $x < 3$ a $y \geqq 5$.

A – III – 4

Ak Adam nahradí koeficient pri lineárnom člene, získa trojčlen $ax^2 + (a+c)x + c$, ktorý má dva rôzne reálne korene práve vtedy, keď je jeho diskriminant $(a+c)^2 - 4ac = (a-c)^2$

kladný. To nastane práve vtedy, keď $a \neq c$. V tomto prípade vyššie opísaným ťahom Adam zvíťazí. Ak Adam nahradí koeficient pri absolútnom člene, získa trojčlen $ax^2 + bx + (a+b)$, ktorý má dva rôzne reálne korene práve vtedy, keď je jeho diskriminant $b^2 - 4a(a+b) = \big(b(1+\sqrt{2}) + 2a\big)\big(b(\sqrt{2}-1) - 2a\big)$ kladný. Vzhľadom na podmienky úlohy to nastane práve vtedy, keď $b(\sqrt{2}-1) > 2a$. Keďže diskriminant kvadratického trojčlena je symetrická funkcia koeficientov pri kvadratickom a absolútnom člene, nastane rovnaká situácia aj v prípade, keď Adam nahradí koeficient pri kvadratickom člene.

Zhrňme úvahy z predošlého odseku. Ak $a \neq c$ alebo $b > \frac{2}{\sqrt{2}-1}a = 2(\sqrt{2}+1)a$, môže Adam svojím prvým ťahom vyhrať.

Predpokladajme, že $a = c$ a súčasne $b \leqq 2(\sqrt{2}+1)a$. Po Adamovi je na ťahu Boris, ktorý bude nahrádzať koeficienty jedného z trojčlenov

a) $ax^2 + bx + (a+b)$ alebo $(a+b)x^2 + bx + a$, b) $ax^2 + 2ax + a$.

a) Ak v tomto prípade nahradí Boris koeficient pri lineárnom člene, dostane jeden z trojčlenov $ax^2 + a(a+b)x + (a+b)$ alebo $(a+b)x^2 + a(a+b)x + a$, ktoré majú oba diskriminant $a^2(a+b)^2 - 4a(a+b) = a(a+b)\,(a(a+b) - 4)$, ktorý je vzhľadom na podmienky $a \geqq 2$, $b \geqq 2$ kladný. Preto Boris týmto ťahom zvíťazí.

b) Ak Boris nahradí koeficient pri lineárnom člene, dostane kvadratický trojčlen $ax^2 + a^2x + a$, ktorý má dva reálne korene práve vtedy, keď je jeho diskriminant $a^4 - 4a^2 = a^2(a+2)(a-2)$ kladný. Vzhľadom na podmienky úlohy to nastane práve vtedy, keď $a > 2$. Keby Boris v prípade $a = 2$ nahradil koeficient pri kvadratickom alebo absolútnom člene, zanechal by Adamovi jeden z trojčlenov $8x^2 + 4x + 2$ alebo $2x^2 + 4x + 8$. Z úvah v prvom odseku vyplýva, že v takom prípade by zvíťazil Adam. Preto v prípade $a = 2$ musí Boris, aby neprehral, nahradiť koeficient pri lineárnom člene, a zanechá tak Adamovi trojčlen $2x^2 + 4x + 2$.

Z odsekov a) a b) vyplýva: Ak Adam nemôže zvíťaziť prvým ťahom, môže svojím ťahom zvíťaziť Boris práve vtedy, keď $a \neq 2$. V prípade $a = 2$ svojím prvým ťahom Boris neprehrá, len ak po ňom zanechá trojčlen $2x^2 + 4x + 2$.

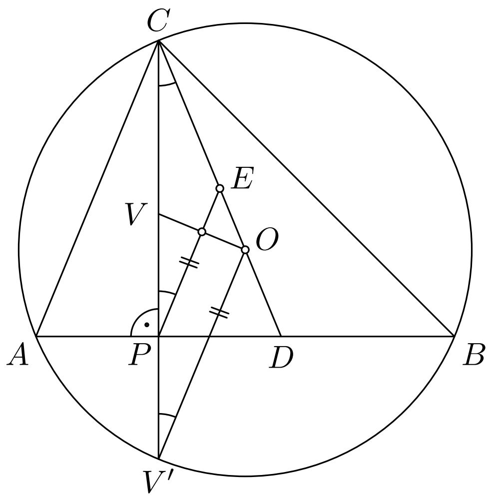
Zatiaľ teda nepoznáme víťaznú stratégiu niektorého z hráčov, ak po prvom Borisovom ťahu zostane trojčlen $2x^2 + 4x + 2$. Z predošlých úvah vyplýva, že Adam neprehrá, len ak nahradí koeficient pri lineárnom člene, takže zanechá súperovi rovnaký trojčlen. Na tento trojčlen musí Boris, aby neprehral, reagovať náhradou koeficientu pri lineárnom člene, teda aj on zanechá rovnaký trojčlen a hra v tomto prípade nemá pri správnej hre oboch hráčov víťaza.

Záver. Pre trojčlen $ax^2 + bx + c$ platí:

- ▷ Ak $a \neq c$ alebo $b > 2(\sqrt{2}+1)a$, má víťaznú stratégiu Adam a môže prvým ťahom vyhrať.
- ▷ Ak $a = c > 2$ a $b \leqq 2(\sqrt{2}+1)a$, má víťaznú stratégiu Boris a môže svojím prvým ťahom vyhrať.
- ▷ Ak $a = c = 2$ a $b \leqq 2(\sqrt{2}+1)a$, musia obaja hráči, aby neprehrali, v každom ťahu zanechať trojčlen $2x^2 + 4x + 2$. V tomto prípade žiadny z hráčov nemá víťaznú stratégiu.

A – III – 5

Ak je trojuholník ABC rovnoramenný so základňou AB, leží celá úsečka OV na



Obr. 38

priamke EP a tvrdenie platí triviálne. V ďalších úvahách teda môžeme predpokladať, že $|AC| \neq |BC|$, čiže priamky CV, CO nie sú totožné.

Je známe, že bod V' súmerne združený s priesečníkom výšok V podľa strany AB uvažovaného trojuholníka ABC leží na kružnici tomuto trojuholníku opísanej, preto je bod P stredom úsečky VV' (obr. 38). Trojuholník $CV'O$ je rovnoramenný s hlavným vrcholom O, a keďže stred E úsečky CD je súčasne stredom kružnice opísanej pravouhlému trojuholníku CPD s preponou CD, je aj trojuholník CPE rovnoramenný. Oba rovnoramenné trojuholníky $CV'O$ a CPE sú pritom rovnoľahlé (so stredom rovnoľahlosti v bode C) – zhodujú sa totiž v spoločnom uhle pri základni a body C, P, V' ležia na jednej priamke rovnako ako body C, E, O. Preto $PE \parallel V'O$.

Keďže P je stredom strany VV' trojuholníka $V'OV$, leží na priamke PE stredná priečka tohto trojuholníka, ktorá je rovnobežná s jeho stranou $V'O$. Priamka PE teda pretína úsečku OV v jej strede, čo sme chceli dokázať.

Iné riešenie. Označme S stred úsečky OV a A', B', C' postupne stredy strán BC, CA, AB. Bod O je zrejme ortocentrom ostrouhlého trojuholníka $A'B'C'$, ktorý je podobný s trojuholníkom ABC. Preto O leží vnútri trojuholníka $A'B'C'$ a bod E leží vnútri úsečky OC (na jej priesečníku s priečkou $A'B'$). Keďže S leží vnútri úsečky OV a P leží mimo úsečky CV (obr. 39), na dôkaz toho, že body P, S, E ležia na jednej priamke, stačí podľa Menelaovej vety aplikovanej na trojuholník VOC ukázať, že súčin

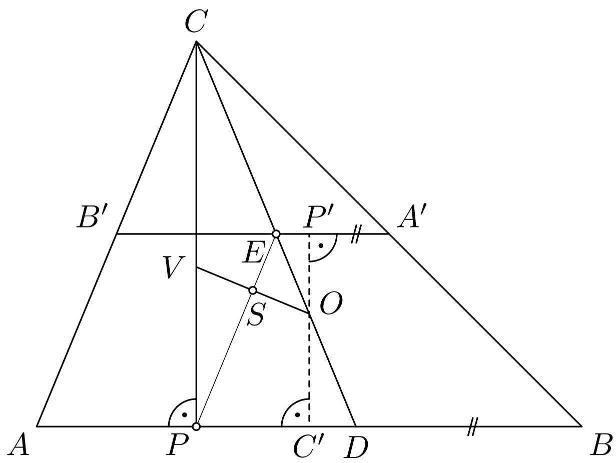
$$s = \frac{|VS|}{|SO|} \cdot \frac{|OE|}{|EC|} \cdot \frac{|CP|}{|VP|} \tag{1}$$

je rovný 1. Avšak $|VS| = |SO|$ a ak označíme P' pätu kolmice spustenej z bodu O na priečku $A'B'$, z podobnosti trojuholníkov ABC a $A'B'C'$ máme $|CP| : |VP| =$

$= |C'P'| : |OP'|$ (keďže O je ortocentrom trojuholníka $A'B'C'$). Navyše $|EC| = |DE|$, takže po dosadení do (1) dostávame

$$s = 1 \cdot \frac{|OE|}{|DE|} \cdot \frac{|C'P'|}{|OP'|} = 1.$$

Posledná rovnosť platí vďaka tomu, že bod O delí každú úsečku majúcu jeden krajný bod na strane AB a druhý na priečke $A'B'$ (rovnobežnej s AB) v rovnakom pomere, t. j. $|OE| : |DE| = |OP'| : |C'P'|$.



Obr. 39

Iné riešenie. Zvoľme v rovine karteziánsku súradnicovú sústavu s počiatkom v bode P, a s x-ovou osou totožnou s priamkou AB. Teda $P = [0, 0]$ a pre vhodné $a < 0$, $b > 0$ a $c > 0$ platí $A = [a, 0]$, $B = [b, 0]$, $C = [0, c]$. Postupne ľahko vypočítame súradnice bodov V, O, D, E a stredu S úsečky VO (zrejme všetky menovatele sú nenulové):

$$V = \left[0, -\frac{ab}{c}\right], \qquad O = \left[\frac{a+b}{2}, \frac{ab+c^2}{2c}\right], \qquad D = \left[\frac{c^2(a+b)}{c^2-ab}, 0\right],$$

$$E = \left[\frac{c^2(a+b)}{2(c^2-ab)}, \frac{c}{2}\right], \qquad S = \left[\frac{a+b}{4}, \frac{c^2-ab}{4c}\right].$$

Overenie, že S leží na priamke PE, sa tak redukuje na overenie triviálnej identity

$$\frac{c^2(a+b)}{2(c^2-ab)} : \frac{c}{2} = \frac{a+b}{4} : \frac{c^2-ab}{4c}.$$

A – III – 6

Ukážeme, že jediná funkcia f, ktorá spĺňa podmienky úlohy, je

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

Zo zadania vyplýva, že $f(y) \neq 0$ pre každé $y > 0$, teda

$$f\bigl(x\,f(y)\bigr) = f(x) - \frac{1}{xy\,f(y)}. \tag{1}$$

Označme $f(1) = a > 0$. Voľbou $x = 1$, resp. $y = 1$ v rovnici (1) postupne dostaneme

$$f\bigl(f(y)\bigr) = f(1) - \frac{1}{y\,f(y)} = a - \frac{1}{y\,f(y)} \qquad (y \in \mathbb{R}^+), \tag{2}$$

$$f(ax) = f(x) - \frac{1}{ax} \qquad (x \in \mathbb{R}^+). \tag{3}$$

Voľbou $x = 1$ v rovnici (3) obdržíme

$$f(a) = f(1) - \frac{1}{a} = a - \frac{1}{a}. \tag{4}$$

Voľbou $x = a$ v rovnici (1) a použitím (4) dostaneme

$$f\bigl(a\,f(y)\bigr) = f(a) - \frac{1}{ay\,f(y)} = a - \frac{1}{a} - \frac{1}{ay\,f(y)} \qquad (y \in \mathbb{R}^+),$$

zatiaľ čo pomocou vzťahov (3) a (2) môžeme ľavú stranu predošlej rovnice upraviť na tvar

$$f\bigl(a\,f(y)\bigr) = f\bigl(f(y)\bigr) - \frac{1}{a\,f(y)} = a - \frac{1}{y\,f(y)} - \frac{1}{a\,f(y)}.$$

Porovnaním pravých strán predošlých dvoch rovníc vypočítame

$$f(y) = 1 + \frac{a-1}{y} \qquad (y \in \mathbb{R}^+). \tag{4}$$

Ak teda existuje riešenie danej rovnice, musí mať tvar (4). Dosadením do rovnice v zadaní a následnou úpravou zistíme, že pre všetky kladné reálne x a y má platiť $(a-1)^2 = 1$. Vzhľadom na predpoklad $a > 0$ platí táto rovnosť práve vtedy, keď $a = 2$. Týmto krokom sme zároveň urobili skúšku správnosti nájdeného riešenia.

Prípravné sústredenia pred IMO a MEMO

Pred medzinárodnou matematickou olympiádou (IMO) a stredoeurópskou matematickou olympiádou (MEMO) sa každoročne koná jedno výberové a jedno prípravné sústredenie pre najlepších riešiteľov celoštátneho kola kategórie A (CKMO). Od 55. ročníka MO sa navyše každoročne koná aj spoločné prípravné sústredenie českého a slovenského IMO-družstva.

Po výberovom sústredení SKMO vyberie 6 najlepších študentov do reprezentačného družstva Slovenska pre IMO a určí jedného náhradníka. Spomedzi tých, ktorí sa nedostali na IMO a zároveň nie sú v maturitnom ročníku (t. j. majú možnosť súťažiť v MO aj nasledujúci školský rok), vyberie SKMO najlepších 6 študentov do družstva pre MEMO. Na výberovom sústredení pred IMO sa zúčastnilo 18 súťažiacich, najúspešnejších riešiteľov tretieho kola MO kategórie A. Sústredenie sa konalo v dňoch 13. – 20. 4. 2011 v Bratislave. Úlohy zadávali lektori prevažne z FMFI UK Bratislava:

RNDr. Ján Mazák, Róbert Tóth, úlohy 1 – 4,

Jakub Konečný, Mgr. Peter Novotný, PhD., Filip Sládek, úlohy 5 – 7,

RNDr. Tomáš Jurík, PhD., Mgr. Martin Kollár, PhD., úlohy 8 – 11,

Miroslav Baláž, Peter Csiba, Tomáš Kocák, úlohy 12 – 15,

Michal Hagara, Mgr. Richard Kollár, PhD., úlohy 16 – 18.

Každý deň študenti riešili sériu troch či štyroch úloh pri podobných podmienkach ako na IMO. V poobedňajších hodinách sa konal spoločný rozbor úloh s lektorom. Na konci sústredenia sa získané body za jednotlivé dni sčítali a s prihliadnutím na výsledky tretieho kola MO boli vybrané šesťčlenné družstvá pre účasť na IMO a MEMO.

Výsledky sústredenia:

Martin Vodička	67,5	*Ondrej Kováč*	24,5
Natália Karásková	37,5	*Dávid Hvizdoš*	22,5
Michal Tóth	32	*Vladimír Macko*	22,5
Marián Horňák	31,5	*Boris Vavrík*	22,5
Miroslav Stankovič	31,5	*Matej Balog*	20,5
Matúš Stehlík	30	*Soňa Galovičová*	20,5
Ján Hozza	29,5	*Matej Molnár*	15
Viktor Lukáček	29	*Klára Ficková*	14
Pavol Guričan	25,5	*Tomáš Gonda*	9

Poradie po zohľadnení výsledkov CKMO:

1.	*Martin Vodička*	108,5	10.	*Dávid Hvizdoš*	47,5
2.	*Marián Horňák*	69,5		*Boris Vavrík*	47,5
3.	*Natália Karásková*	68,5	12.	*Viktor Lukáček*	47
4.	*Michal Tóth*	56	13.	*Vladimír Macko*	46,5
	Matúš Stehlík	56	14.	*Soňa Galovičová*	43,5
6.	*Ondrej Kováč*	54,5		*Matej Balog*	43,5
7.	*Ján Hozza*	51,5	16.	*Klára Ficková*	34
8.	*Miroslav Stankovič*	50,5		*Matej Molnár*	34
	Pavol Guričan	50,5	18.	*Tomáš Gonda*	26

Prípravné sústredenie sa konalo v dňoch 29. 5. – 3. 6. 2011 v Bratislave. Sústredenie bolo zamerané obzvlášť na prípravu reprezentačných družstiev na IMO a MEMO. Lektormi boli študenti a učitelia z FMFI UK Bratislava:

Mgr. Peter Novotný, PhD. (nerovnosti, geometria),
Mgr. Richard Kollár, PhD. (algebra),
Filip Sládek (teória čísel),
Tomáš Kocák (geometria),
Peter Csiba (kombinatorika).

V poradí šieste spoločné sústredenie českého a slovenského IMO-družstva sa uskutočnilo v dňoch 12. – 17. 6. 2011 v ČR v Uherskom Hradišti v regionálnom vzdelávacom stredisku Eduha. Sústredenie sa uskutočnilo pod záštitou Společnosti Otakara Borůvky a bolo finančne zabezpečené z neštátnych prostriedkov. Pedagogický dozor slovenským (a na mieste aj českým) študentom robili Mgr. Peter Novotný, PhD. a Tomáš Kocák z FMFI UK Bratislava. Odborné prednášky viedli

doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., MÚ AV ČR, Brno (teória čísel),
RNDr. Pavel Calábek, PhD., PF UP, Olomouc (funkc. rovnice a iné algebraické úl.),
Mgr. Martin Panák, PhD., MÚ AV ČR, Brno (kombinatorika),
RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., PF UP, Olomouc (syntetická planimetria).

Zadania súťažných úloh výberového sústredenia pred IMO

1. Nájdite všetky konečné množiny S bodov v rovine s nasledujúcou vlastnosťou: pre každé tri body A, B, C z množiny S existuje bod D z množiny S taký, že body A, B, C, D sú vrcholmi rovnobežníka.

2. a) Dokážte, že množinu celých čísel vieme rozložiť na dve disjunktné podmnožiny A a B tak, že každý prvok z A sa dá vyjadriť ako súčet dvoch rôznych prvkov z B a každý prvok z B sa dá vyjadriť ako súčet dvoch rôznych prvkov z A.
b) Rozhodnite, či je možné rozložiť množinu celých čísel na 2011 po dvoch disjunktných podmnožín $A_1, A_2, \dots, A_{2011}$ s nasledujúcou vlastnosťou: ak $i, j \in \in \{1, 2, \dots, 2011\}$ a $i \neq j$, tak každý prvok množiny A_i vieme vyjadriť ako súčet dvoch rôznych prvkov z množiny A_j.

3. Daný je ostrouhlý rovnoramenný trojuholník ABC so základňou BC. Pre bod P ležiaci vnútri trojuholníka ABC označíme postupne M a N priesečníky kružnice so stredom A a polomerom $|AP|$ so stranami AB a AC. Nájdite bod P, pre ktorý je súčet $|MN| + |BP| + |CP|$ minimálny.

4. Daný je tetivový štvoruholník $ABCD$. Polpriamky CB a DA sa pretínajú v bode P, polpriamky AB a DC sa pretínajú v bode Q. Stredy uhlopriečok AC a BD označíme L a M (v tomto poradí). Nakoniec K nech je ortocentrum trojuholníka MPQ. Dokážte, že body P, Q, K, L ležia na kružnici.

5. Nájdite najmenšie prirodzené číslo n, pre ktoré existuje n-tica rôznych prirodzených čísel $\{s_1, s_2, \dots , s_n\}$ taká, že

$$\left(1-\frac{1}{s_1}\right)\left(1-\frac{1}{s_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{s_n}\right)=\frac{42}{2010}.$$

6. Označme $\mathbb{Q}^+$ množinu všetkých kladných racionálnych čísel. Určte všetky funkcie $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ také, že pre ľubovoľné $x, y \in \mathbb{Q}^+$ platí

$$f\left((f(x))^2 \cdot y\right) = x^3 \cdot f(xy).$$

7. Daný je konvexný päťuholník $ABCDE$, pričom $BC \parallel AE$, $|AB| = |BC|+|AE|$ a $|\measuredangle ABC| = |\measuredangle CDE|$. Nech M je stred úsečky CE a O je stred kružnice opísanej trojuholníku BCD. Dokážte, že ak $|\measuredangle DMO| = 90°$, tak $2|\measuredangle BDA| = |\measuredangle CDE|$.

8. Nájdite všetky konečné rastúce aritmetické postupnosti prvočísel, v ktorých je počet členov väčší ako diferencia.

9. Dané je prirodzené číslo $n \geqq 2$. Štvorec je rozdelený na $n \times n$ štvorčekov. Dva protiľahlé rohové štvorčeky sú zafarbené na čierno. Operáciou nazveme prefarbenie všetkých štvorčekov jedného riadku alebo jedného stĺpca na „opačnú“ farbu. Koľko najmenej bielych štvorčekov musíme najprv zafarbiť na čierno, aby bolo potom možné týmito operáciami začierniť celý štvorec $n \times n$?

10. Nech H a O sú postupne ortocentrum a stred opísanej kružnice k trojuholníka ABC. Priamky AH a AO pretínajú kružnicu k postupne v bodoch M a N (rôznych od A). Označme P, Q, R postupne priesečníky priamok BC a HN, BC a OM, HQ a OP. Dokážte, že $AORH$ je rovnobežník.

11. Dokážte, že pre kladné reálne čísla a, b, c spĺňajúce $1/a + 1/b + 1/c = 1$ platí nerovnosť

$$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ac}+\sqrt{c+ab} \geqq \sqrt{abc}+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

12. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník a nech D, E a F sú postupne päty výšok na strany BC, AC a AB. Nech P je priesečník kružnice opísanej trojuholníku

ABC a priamky EF. Priamky BP a DF sa pretínajú v bode Q. Dokážte, že $|AP| = |AQ|$.

13. V senáte je 51 senátorov. Senátorov potrebujeme rozdeliť do n výborov. Každý senátor neznáša práve troch iných senátorov. Ak senátor A neznáša senátora B, neznamená to nevyhnutne, že aj senátor B neznáša senátora A. Nájdite najmenšie n, pre ktoré je vždy možné rozdeliť senátorov do výborov tak, že všetci senátori v jednom výbore sa navzájom znášajú.

14. Nájdite všetky reálne funkcie f také, že pre všetky reálne čísla x, y platí rovnosť

$$f(x^2 + xy + f(y)) = f^2(x) + xf(y) + y.$$

15. Nech m a n sú prirodzené čísla a nech d je ich najväčší spoločný deliteľ. Ďalej nech $x = 2^m - 1$ a $y = 2^n + 1$.

a) Ak m/d je nepárne, dokážte, že najväčší spoločný deliteľ x a y je 1.

b) Ak m/d je párne, nájdite najväčší spoločný deliteľ x a y.

16. Daný je konvexný päťuholník $ABCDE$, v ktorom $|DC| = |DE|$ a $|\measuredangle DCB| = |\measuredangle DEA| = 90°$. Nech F je bod vo vnútri strany AB, pre ktorý platí $|AF| : |BF| = |AE| : |BC|$. Dokážte, že $|\measuredangle FCE| = |\measuredangle ADE|$ a $|\measuredangle FEC| = |\measuredangle BDC|$.

17. Určte najmenšie prirodzené číslo n také, že existujú celé čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$, pre ktoré platí

$$x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = 2002^{2011}.$$

18. V škatuli sú jednofarebné gule n rôznych veľkostí a n rôznych farieb. Viete, že ak v škatuli nie je guľa farby F a veľkosti V, potom celkový počet gúľ v škatuli, ktoré majú veľkosť V alebo farbu F, je aspoň n. Dokážte, že v škatuli je aspoň $n^2/2$ gúľ. Môže byť ich počet presne $n^2/2$?

11. Česko-poľsko-slovenské stretnutie

V rámci záverečnej prípravy pred IMO sa uskutočnilo po 11. krát prípravné stretnutie medzi družstvami Českej republiky, Poľska a Slovenska. Súťaže sa zúčastnili šestice tvorené študentmi, ktorí si vybojovali vo svojich krajinách účasť na 52. IMO v Holandsku, resp. náhradníkmi.

Podujatie sa uskutočnilo 19. – 22. 6. 2011 v Poľsku v kráľovskom meste Krakov. Organizácia a priebeh súťaže zostali nezmenené z predchádzajúcich ročníkov – je prispôsobená štýlu celoštátneho kola našej MO a podmienkam IMO. Súťažiacim boli počas dvoch dní predložené dve trojice súťažných úloh, pričom za každú správnu úlohu mohli získať najviac 7 bodov, t. j. celkove 42 bodov (rovnako ako na IMO). Na každú trojicu úloh mali súťažiaci vymedzené 4,5 hodiny čistého času.

Opravu riešení zabezpečila medzinárodná porota, ktorú tvorili RNDr. Pavel Calábek, PhD. , RNDr. Karel Horák, CSc., a doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc. z Českej republiky, dr. Jerzy Bednarczuk, Mgr. Michał Pilipczuk a Mgr. Andrzej Grzesik z Poľska, a Peter Csiba, doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc. a Mgr. Peter Novotný, PhD. zo Slovenska.

V budúcom roku sa spoločné prípravné stretnutie uskutoční na Slovensku.

Prehľad výsledkov:

Por.	Meno	Štát	1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$
1.	Tomasz Cieśla	Poľsko	6	7	4	7	7	0	31
	Martin Vodička	Slovensko	7	7	7	3	7	0	31
3.	Maciej Dulęba	Poľsko	7	7	7	0	7	0	28
	Anh Dung Le	Česká rep.	7	7	7	0	7	0	28
	Teodor Jerzak	Poľsko	7	7	0	7	0	7	28
6.	Filip Borowiec	Poľsko	7	7	6	6	1	0	27
7.	Damian Orlef	Poľsko	7	7	2	7	1	0	24
8.	Štěpán Šimsa	Česká rep.	7	7	0	2	0	0	16
9.	Tomáš Zeman	Česká rep.	7	7	0	0	1	0	15
10.	Michael Bílý	Česká rep.	7	7	0	0	0	0	14
	Marián Horňák	Slovensko	7	7	0	0	0	0	14
	Ján Hozza	Slovensko	7	7	0	0	0	0	14
	Matúš Stehlík	Slovensko	7	4	0	2	1	0	14
	Michal Tóth	Slovensko	7	7	0	0	0	0	14
15.	Lubomír Grund	Česká rep.	7	6	0	0	0	0	13
	Ondrej Kováč	Slovensko	7	6	0	0	0	0	13
17.	Wojciech Porowski	Poľsko	7	0	0	5	0	0	12
18.	Miroslav Koblížek	Česká rep.	0	0	0	2	1	0	3

Štát	1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$
Česká rep.	35	34	7	4	9	0	89
Poľsko	41	35	19	32	16	7	150
Slovensko	42	38	7	5	8	0	100

Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia

Úloha 1.
Nech a, b, c sú kladné reálne čísla také, že $a^2 < bc$. Dokážte, že $b^3 + ac^2 > ab(a + c)$. (*Pavel Novotný*)

Úloha 2.
Na tabuli je napísaných n nezáporných celých čísel, ktorých najväčší spoločný deliteľ je 1. V jednom kroku môžeme zotrieť dve také čísla x, y, že $x \geqq y$ a nahradiť ich dvojicou čísel $x - y$, $2y$. Určte, pre ktoré n-tice pôvodných čísel môžeme dosiahnuť stav, keď medzi číslami na tabuli bude $n - 1$ núl. (*Poľsko*)

Úloha 3.
Body A, B, C, D ležia v tomto poradí na kružnici, pričom $AB \nparallel CD$ a dĺžka oblúka AB, ktorý obsahuje body C, D, je dvakrát väčšia ako dĺžka oblúka CD, ktorý neobsahuje body A, B. Nech E je taký bod v polrovine ABC, že $|AC| = |AE|$ a $|BD| = |BE|$. Dokážte, že ak kolmica z bodu E na priamku AB prechádza stredom oblúka CD neobsahujúceho body A, B, tak $|\measuredangle ACB| = 108°$. (*Tomáš Jurík*)

Úloha 4.
Mnohočlen $P(x)$ s celočíselnými koeficientmi spĺňa nasledujúcu podmienku: Ak pre mnohočleny $F(x)$, $G(x)$, $Q(x)$ s celočíselnými koeficientmi platí

$$P(Q(x)) = F(x) \cdot G(x),$$

tak aspoň jeden z mnohočlenov $F(x)$, $G(x)$ je konštantný. Dokážte, že $P(x)$ je konštantný mnohočlen. (*Poľsko*)

Úloha 5.
V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ označme M, N postupne stredy strán AD, BC. Na stranách AB a CD sú postupne zvolené také body K a L, že $|\measuredangle MKA| = |\measuredangle NLC|$. Dokážte, že ak priamky BD, KM, LN prechádzajú jedným bodom, tak

$$|\measuredangle KMN| = |\measuredangle BDC| \qquad \text{a} \qquad |\measuredangle LNM| = |\measuredangle ABD|.$$

(*Poľsko*)

Úloha 6.
Nech a je ľubovoľné celé číslo. Dokážte, že existuje nekonečne veľa prvočísel p takých, že

$$p \mid n^2 + 3 \qquad \text{a} \qquad p \mid m^3 - a$$

pre nejaké celé čísla n, m. (*Poľsko*)

Riešenia úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia

Úloha 1.
Sčítaním troch AG-nerovností

$$\begin{aligned}4a^3b + b^3c + 2c^3a &\geqq 7a^2bc,\\ 4b^3c + c^3a + 2a^3b &\geqq 7b^2ca,\\ 4c^3a + a^3b + 2b^3c &\geqq 7c^2ab\end{aligned}$$

dostaneme

$$a^3b + b^3c + c^3a \geqq a^2bc + b^2ca + c^2ab. \tag{1}$$

Z predpokladu $a^2 < bc$ vynásobením ab vyplýva $b^2ca > a^3b$, čo spolu s (1) dáva

$$b^3c + c^3a > a^2bc + c^2ab \quad \text{čiže} \quad b^3 + ac^2 > ab(a + c).$$

Iné riešenie. Podľa AG-nerovnosti a danej nerovnosti platí

$$\begin{aligned}\tfrac{2}{5}b^3 + \tfrac{3}{5}ac^2 &\geqq \sqrt[5]{b^6a^3c^6} = bc\sqrt[5]{a^3bc} > abc,\\ \tfrac{3}{5}b^3 + \tfrac{2}{5}ac^2 &\geqq \sqrt[5]{b^9a^2c^4} = b\sqrt[5]{a^2b^4c^4} > a^2b.\end{aligned}$$

Ich sčítaním získame hľadaný odhad.

Úloha 2.
Odpoveď. Súčet daných čísel musí byť mocnina čísla 2.

Predpokladajme, že dané čísla nie sú všetky nulové. Označme S ich celkový súčet a D ich najväčší spoločný deliteľ. Na začiatku je $D = 1$, zatiaľ čo na konci by malo byť $D = S$, pritom súčet S všetkých čísel na tabuli sa nemení.

Po každom opísanom kroku sa aktuálna hodnota D buď nezmení, alebo narastie na dvojnásobok. To vyplýva z toho, že buď $\operatorname{nsd}(x - y, 2y) = \operatorname{nsd}(x - y, y) = \operatorname{nsd}(x, y)$, alebo $\operatorname{nsd}(x - y, 2y) = 2\operatorname{nsd}(x - y, y) = 2\operatorname{nsd}(x, y)$. Vzhľadom na to, že $\operatorname{nsd}(a, b, c) = \operatorname{nsd}\bigl(\operatorname{nsd}(a, b), c\bigr)$, ľahko uvedený postreh rozšírime na najväčšieho spoločného deliteľa všetkých čísel na tabuli. Ak teda zostane nakoniec na tabuli jediné nenulové číslo, musí tým číslom byť mocnina dvoch.

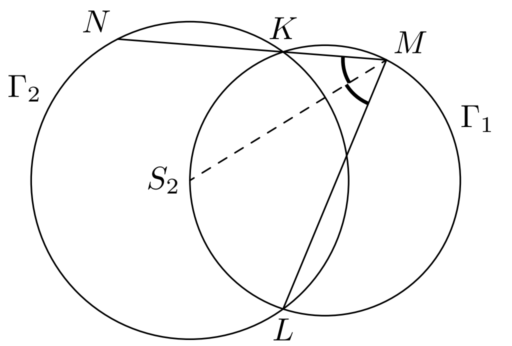
Ak je naopak S mocninou čísla 2, ukážeme, ako postupovať, aby sme dostali $n - 1$ núl. Zapíšme všetky čísla na tabuli v dvojkovej sústave. Ak sú na tabuli ešte aspoň dve nenulové čísla, vezmeme dve z nich, ktorých zápis končí najmenším počtom núl (také čísla sú aspoň dve, keďže celkový súčet je mocnina dvoch). Po opísanej operácii namiesto nich zrejme dostaneme dve čísla, ktoré majú na konci aspoň o jednu nulu viac. Je teda jasné, že po konečnom počte krokov musíme skončiť tým, že na tabuli bude jediné nenulové číslo.

Úloha 3.
Najskôr sformulujeme a dokážeme pomocné tvrdenie.

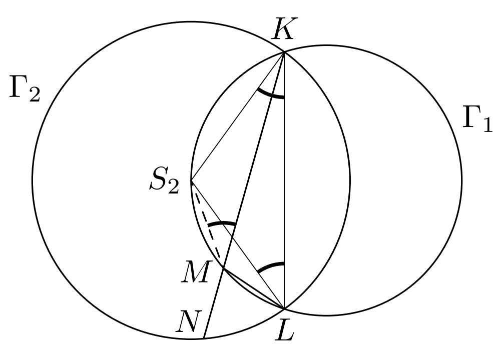
Lema. Dané sú kružnice Γ_1, Γ_2 pretínajúce sa v bodoch K, L, pričom stred S_2 kružnice Γ_2 leží na Γ_1. Ak $M \in \Gamma_1$ ($M \neq K, L$) a priamka KM pretína Γ_2 v bode N (rôznom od K), tak $|MN| = |ML|$.

Dôkaz. Ak $M = S_2$, tvrdenie lemy je triviálne. Zaoberajme sa len prípadom $M \neq S_2$. Najskôr dokážeme, že priamka MS_2 je osou uhla NML.

Ak M leží na oblúku KL neobsahujúcom S_2 (obr. 40a), tak uhly KMS_2, S_2ML sú obvodovými uhlami nad zhodnými tetivami S_2K, S_2L, teda majú rovnakú veľkosť. Ak M leží na oblúku KL obsahujúcom S_2, môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že leží na oblúku S_2L neobsahujúcom bod K (obr. 40b). Potom s využitím tetivovosti štvoruholníka KS_2ML máme $|\measuredangle S_2MN| = 180° - |\measuredangle S_2MK| = 180° - |\measuredangle S_2LK| = 180° - |\measuredangle S_2KL| = |\measuredangle S_2ML|$.



Obr. 40a



Obr. 40b

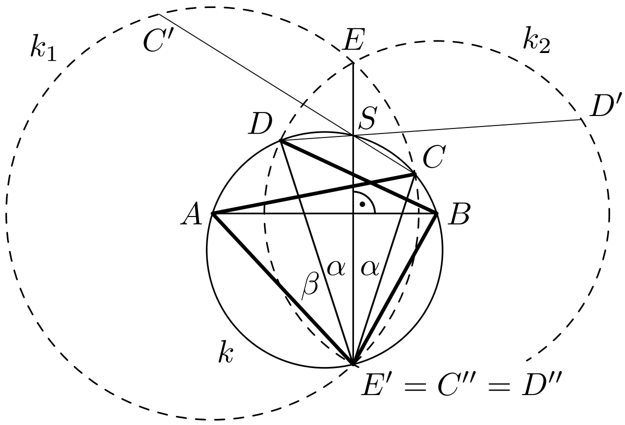
Uvažujme osovú súmernosť podľa osi MS_2. V nej sa kružnica Γ_2 zobrazí sama na seba (lebo jej stred leží na osi súmernosti). Priamka ML sa zobrazí na priamku MN (lebo MS_2 je osou uhla NML). Takže množina $ML \cap \Gamma_2$ sa zobrazí na množinu $MN \cap \Gamma_2 = \{K, N\}$. Keďže $L \in ML \cap \Gamma_2$, musí sa L zobraziť na K alebo N. Avšak okrem prípadu, keď MS_2 je priemerom Γ_1, priamky KL a MS_2 nie sú navzájom kolmé, teda L sa nemôže zobraziť na K a musí sa zobraziť na N, odkiaľ $|ML| = |MN|$. Prípad, keď MS_2 je priemerom Γ_1, nemusíme brať do úvahy, keďže vtedy MK je dotyčnicou kružnice Γ_2, čiže ju nepretína v ďalšom bode $N \neq K$. □

Označme S priesečník kolmice na AB vedenej cez E a oblúka CD. Nech k_1 je kružnica so stredom A prechádzajúca bodom C a k_2 je kružnica so stredom B prechádzajúca bodom D. Kružnicu opísanú tetivovému štvoruholníku $ABCD$ označme k. Priamka SC pretína kružnicu k_1 v C' a priamka SD kružnicu k_2 v D'. Nech $k \cap k_1 = \{C, C''\}$,

$k \cap k_2 = \{D, D''\}$. Priesečník kružníc k_1, k_2 rôzny od E označme E'. Sporom dokážeme, že $C'' = D'' = E'$.

Bod S leží na chordále kružníc k_1, k_2, preto z jeho mocnosti k týmto kružniciam máme $|SC| \cdot |SC'| = |SD| \cdot |SD'|$. Podľa zadania $|SC| = |SD|$, takže aj $|SC'| = |SD'|$. S využitím pomocnej lemy potom máme $|SC''| = |SC'| = |SD'| = |SD''|$.

Ak by C'', D'' boli rôzne body, trojuholník $SD''C''$ by bol rovnoramenný a jeho výška z vrcholu S by prechádzala stredom kružnice k. Štvoruholník $CDD''C''$ (resp. $CDC''D''$) by bol rovnoramenný lichobežník ($|SC| = |SD|$). Body A, B sa však dajú určiť ako priesečníky osí úsečiek CC'', DD'' s kružnicou k, takže aj $ABCD$ by bol vzhľadom na symetriu rovnoramenný lichobežník, čo je v spore s predpokladom $AB \nparallel CD$.



Obr. 41

Označme $|\measuredangle DE'S| = |\measuredangle SE'C| = \alpha$ a $|\measuredangle AE'D| = \beta$. Potom $|\measuredangle CE'B| = 2\alpha - \beta$, pretože oblúk AB je dvakrát dlhší ako oblúk CD (obr. 41). Z rovností $|BD| = |BE'|$, $|AC| = |AE'|$ vyjadríme veľkosti uhlov v trojuholníku ABE':

$$2\alpha + \beta = |\measuredangle AE'C| = |\measuredangle ACE'| = |\measuredangle ABE'|,$$
$$4\alpha - \beta = |\measuredangle BE'D| = |\measuredangle BDE'| = |\measuredangle BAE'|.$$

Odtiaľ

$$180^\circ = 2\alpha + \beta + 4\alpha - \beta + 4\alpha = 10\alpha, \quad \text{čiže } \alpha = 18^\circ$$

a $|\measuredangle ACB| = 180^\circ - |\measuredangle AE'B| = 180^\circ - 4\alpha = 108^\circ$.

Úloha 4.

Dokážeme tvrdenie úlohy sporom. Predpokladajme, že P nie je konštantný, a uvažujme najskôr prípad, keď je mnohočlen P lineárny, teda $P(x) = ax + b$ pre nejaké $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$. Vezmime $Q(x) = ax^2 + (b+1)x$, potom

$$P(Q(x)) = a(ax^2 + (b+1)x) + b = a^2x^2 + a(b+1)x + b = (ax+b)(ax+1)$$

je rozklad mnohočlena $P(Q(x))$ na súčin dvoch nekonštantných mnohočlenov $ax + b$ a $ax + 1$, čo odporuje predpokladu úlohy.

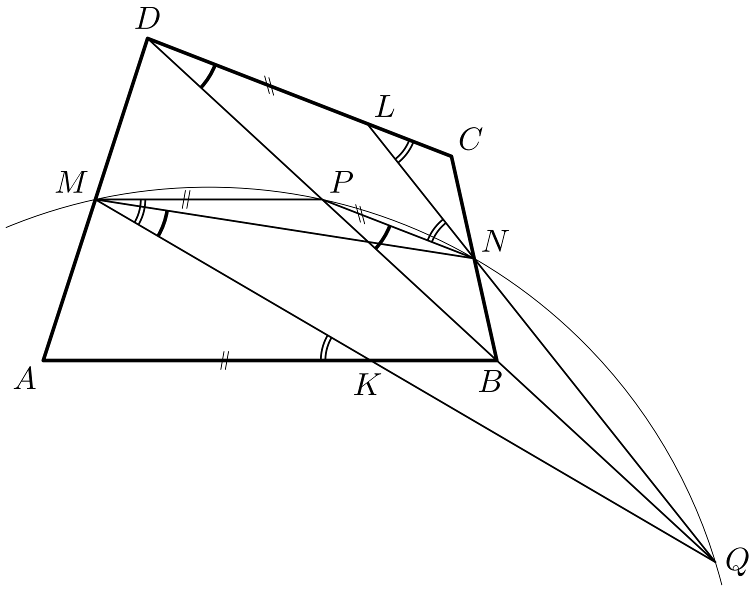
Ak je stupeň mnohočlena P aspoň 2, teda $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, pričom $n > 1$ a $a_n \neq 0$, vezmime mnohočlen $Q(x) = P(x) + x$. Pre mnohočlen $P(Q(x))$, ktorý má stupeň $n^2 > n$, platí

$$P(Q(x)) - P(x) = P(P(x) + x) - P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\bigl((P(x) + x)^i - x^i\bigr).$$

Z rovností $a^i - b^i = (a-b)(a^{i-1} + a^{i-2}b + \ldots + b^{i-1})$ však vyplýva, že každý z mnohočlenov $(P(x)+x)^i - x^i$ je deliteľný mnohočlenom $P(x)$. Preto aj mnohočlen $P(Q(x))$ je deliteľný mnohočlenom $P(x)$. To vedie opäť k sporu, pretože stupeň mnohočlena $P(Q(x))$ je väčší ako stupeň mnohočlena $P(x)$, a ten je teda netriviálnym deliteľom mnohočlena $P(Q(x))$. Tým je tvrdenie dokázané.

Úloha 5.

Označme P stred uhlopriečky BD a Q priesečník priamok BD, KM a LN. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že bod B leží medzi bodmi Q a D (obr. 42). Keďže PM a PN sú stredné priečky trojuholníkov ABD a DCB, je $PM \parallel AB$ a $PN \parallel CD$. Takže $|\measuredangle PNL| = |\measuredangle NLC| = |\measuredangle MKA| = |\measuredangle KMP|$, čo znamená, že body P, M, Q, N ležia na jednej kružnici. Z rovnosti obvodových uhlov nad tetivou NQ tak vyplýva



Obr. 42

$|\measuredangle KMN| = |\measuredangle QMN| = |\measuredangle QPN| = |\measuredangle BDC|$. Podobne vychádza $|\measuredangle LNM| = 180^\circ - |\measuredangle QNM| = 180^\circ - |\measuredangle QPM| = |\measuredangle MPD| = |\measuredangle ABD|$.

Úloha 6.

Tvrdenie najskôr dokážeme pre $a = 0$. Vtedy má druhá podmienka tvar $p \mid m^3$, takže je splnená pre každé prvočíslo p voľbou $m = p$. Stačí teda dokázať, že medzi deliteľmi čísel $n^2 + 3$ $(n \in \mathbb{Z})$ je nekonečne veľa prvočísel. Pripusťme, že všetkých takých prvočísel je naopak konečne veľa, a označme ich p_1, p_2, $\dots$, p_r. Číslo $(3p_1p_2\dots p_r)^2 + 3 = 3(3p_1^2p_2^2\dots p_r^2 + 1)$ však má netriviálneho deliteľa $3p_1^2p_2^2\dots p_r^2+1$, ktorý nie je deliteľný žiadnym z prvočísel p_1, p_2, $\dots$, p_r, a to je spor.

Teraz tvrdenie dokážeme pre $a \neq 0$. Z rovností

$$(9a^2k^3)^2 + 3 = 3(27a^4k^6 + 1)$$

a

$$(9a^3k^4)^3 - a = a(3^6a^8k^{12} - 1) = a(27a^4k^6 - 1)(27a^4k^6 + 1)$$

vyplýva, že pre každé celé k je číslo $27a^4k^6+1$ spoločným deliteľom čísel n^2+3 a m^3-a, pričom $n = 9a^2k^3$ a $m = 9a^3k^4$. Stačí teda dokázať, že pre ľubovoľné dané a medzi deliteľmi čísel $27a^4k^6 + 1$ $(k \in \mathbb{Z})$ existuje nekonečne veľa rôznych prvočísel.

Predpokladajme naopak, že takých prvočísel je len konečne veľa, a označme ich p_1, p_2, $\dots$, p_r. Pre $k = p_1p_2\dots p_r+1$ je však zrejmé, že číslo $27a^4k^6+1 > 1$ nie je deliteľné žiadnym z prvočísel p_1, p_2, $\dots$, p_r. Má teda ďalšieho prvočiniteľa $p \notin \{p_i\colon 1 \leqq i \leqq r\}$. Dospeli sme tak k sporu, ktorý dokazuje tvrdenie úlohy.

52. Medzinárodná matematická olympiáda

V dňoch 12. – 24. 7. 2011 sa v Holandsku uskutočnila 52. Medzinárodná matematická olympiáda (IMO). Zúčastnilo sa jej 564 žiakov stredných škôl zo 101 krajín. Každá krajina mohla vyslať najviac 6 súťažiach. Slovensko reprezentovali

Marián Horňák, Gymnázium Párovská, Nitra, 3. ročník,
Natália Karásková, Gymnázium Jura Hronca, Bratislava, 4. ročník,
Ondrej Kováč, Gymnázium sv. Cyrila a Metoda, Nitra, 4. ročník,
Matúš Stehlík, Gymnázium Alejová, Košice, 4. ročník,
Michal Tóth, Gymnázium Jura Hronca, Bratislava, 3. ročník,
Martin Vodička, Gymnázium Alejová, Košice, 2. ročník.

Obr. 43
(Slovenskí žiaci, ktorí získali medaily; zľava: M. Stehlík, M. Vodička, N. Karásková, O. Kováč, M. Tóth.)

Vedúcim družstva SR bol Mgr. Peter Novotný, PhD. (odborný asistent na FMFI UK Bratislava), zástupcu vedúceho a pedagogický dozor vykonával Bc. Tomáš Kocák (študent na FMFI UK Bratislava), v role observera vystupoval RNDr. Ing. František Kardoš, PhD. (odborný asistent na PF UPJŠ Košice).

Výsledky družstva SR sú uvedené v tabuľke.

Meno	1	2	3	4	5	6	Súčet	Cena
Marián Horňák	3	1	0	7	2	0	13	HM
Natália Karásková	7	0	0	7	2	1	17	bronz
Ondrej Kováč	7	4	0	6	7	0	24	striebro
Matúš Stehlík	7	0	0	7	5	0	19	bronz
Michal Tóth	7	1	0	7	1	0	16	bronz
Martin Vodička	7	1	0	7	7	0	22	striebro

Žiaci riešili počas dvoch dní (18. a 19. júla) dve trojice úloh, za každú úlohu bolo možné získať najviac 7 bodov. Absolútnym víťazom IMO s plným počtom 42 bodov sa stala Lisa Sauermann z Nemecka. Bola to pre ňu už štvrtá zlatá medaila z IMO (okrem toho má ešte jednu striebornú) a Lisa sa tak stala najúspešnejším účastníkom tejto súťaže v celej histórii. Na záverečnom ceremoniáli jej k úspechu gratuloval aj predošlý držiteľ prvenstva – jej krajan Christian Reiher (4 zlaté a 1 bronzová medaila v rokoch 1999 – 2003).

Naši žiaci získali dve strieborné medaily, tri bronzové medaily a jedno čestné uznanie, ktoré sa udeľuje tým súťažiacim, ktorí nezískajú medailu, vyriešia však aspoň jednu zo šiestich úloh na plný počet bodov. Osobitne treba vyzdvihnúť výkon Ondreja Kováča, ktorý dokázal bodovať aj na veľmi ťažkej druhej úlohe (ktorej náročnosť medzinárodná jury zle odhadla, keďže býva zvykom zoradiť úlohy každý súťažný deň od najľahšej po najťažšiu). Nesklamal ani Martin Vodička, ktorý k vlaňajšej zlatej medaile pridal striebornú a má možnosť v zbierke pokračovať aj nasledujúce dva roky.

Za veľký počet medailí (aspoň v porovnaní s poslednými rokmi) môžeme vďačiť najmä tomu, že naši boli pomerne úspešní na prvej a štvrtej úlohe (tzv. ľahké úlohy). Po mnohých rokoch nebola medzi týmito dvoma úlohami geometria, na ktorej sme často strácali body.

Slušné body naši získali aj na stredne náročnej úlohe č. 5 z teórie čísel – tá bola zaujímavá tým, že mala veľmi veľké množstvo rôznych riešení, z ktorých niektoré boli na pár riadkov a iné na niekoľko strán. Veľmi elegantné riešenie vymyslel náš študent Ondrej Kováč.

V úlohe č. 2 – kombinatorickej geometrii – sme získali len 7 bodov, ale iba 11 krajín v nej dokázalo získať viac ako 10 bodov. Na počesť usporiadajúcej krajiny bolo zadanie sformulované pomocou pojmu „veterný mlyn“. I keď samotné riešenie úlohy nie je zložité, úlohu vyriešilo prekvapujúco málo súťažiacich. Využitie invariantu, ktorý sa pri riešení používa, je totiž v dôkaze tvrdenia pomerne nečakané.

Ako býva zvykom, v ťažkých úlohách č. 3 a 6 sa rozdelilo veľmi málo bodov, a tak nás takmer nulový výsledok na nich nemusí až tak mrzieť. Treba povedať, že na tretej úlohe – funkcionálnej nerovnosti – by sme možno mohli získať nejaké body, keby naši neminuli čas na druhej úlohe. Šiesta (geometrická) úloha bola suverénne najnáročnejšia, na plný počet bodov ju vyriešilo iba 6 súťažiacich.

Por.	Štát	Z	S	B	∑	Por.	Štát	Z	S	B	∑
1.	Čína	6			189	52.	Kolumbia			1	73
2.	USA	6			184	53.	Macao			2	71
3.	Singapur	4	1	1	179	54.	Filipíny (5)			3	69
4.	Rusko	2	4		161		Mongolsko			2	69
5.	Thajsko	3	2	1	160		Švédsko		1		69
6.	Turecko	3	2	1	159	57.	Fínsko		1		68
7.	Severná Kórea	3	3		157		Gruzínsko			2	68
8.	Rumunsko	1	5		154		Lotyšsko		1	1	68
	Taiwan	2	4		154		Tadžikistan		1		68
10.	Irán	2	4		151	61.	Nórsko		1		67
11.	Nemecko	1	3	2	150	62.	Bosna a Hercegovina			1	64
12.	Japonsko	2	2	2	147		Maroko		1	1	64
13.	Južná Kórea	2	3		144		Slovinsko			1	64
14.	Hongkong	2	1	3	138		Turkmenistan			3	64
15.	Poľsko	2	2	1	136	66.	Uzbekistan (5)			1	62
	Ukrajina	1	2	3	136	67.	Arménsko (5)		1		61
17.	Kanada	1	2	3	132		Azerbajdžan		1	1	61
	Veľká Británia	2	1	2	132	69.	Kostarika (4)		1		57
19.	Taliansko	1	3	1	129	70.	Saudská Arábia			2	53
20.	Brazília		3	3	121	71.	Cyprus			1	51
	Bulharsko		2	3	121	72.	Bangladéš			1	50
22.	Mexiko		2	4	120	73.	Srí Lanka			1	49
23.	India	1	1	2	119	74.	Chile			1	48
	Izrael	1		4	119		Island				48
25.	Austrália		3	3	116		Luxembursko			1	48
	Maďarsko		2	3	116	77.	Tunisko			1	46
	Srbsko	1	2	1	116	78.	Nigéria			1	40
28.	Holandsko		2	3	115	79.	Macedónsko			1	38
29.	Indonézia		2	4	114		Paraguaj (5)				38
	Nový Zéland		2	2	114	81.	Pakistan (4)			1	35
31.	Bielorusko		2	3	113	82.	Pobrežie Slonoviny				34
	Peru	1		2	113	83.	Ekvádor			1	32
	Vietnam			6	113		Portoriko (4)				32
34.	Francúzsko		1	4	111	85.	Trinidad a Tobago				29
	Slovensko		2	3	111		Uruguaj (4)				29
36.	Chorvátsko		1	5	110	87.	Írsko				26
	Rakúsko		2	2	110	88.	Albánsko				24
38.	Kazachstan		1	3	105	89.	Kosovo				22
39.	Česká republika		1	3	101	90.	Honduras (3)				21
40.	Grécko	1		3	99		Venezuela (2)				21
41.	Južná Afrika		1	2	93	92.	Bolívia (4)				17
	Malajzia	1	1	1	93	93.	Kirgizstan (5)				14
43.	Belgicko			4	88		Sýria				14
	Švajčiarsko		2	1	88	95.	Čierna Hora (4)				13
45.	Litva			4	87	96.	Salvádor (2)				11
46.	Moldavsko		1		86	97.	Guatemala (4)				8
	Portugalsko	1		2	86	98.	Panama (1)				6
48.	Španielsko			3	83	99.	Lichtenštajnsko (1)				4
49.	Argentína	1			77	100.	Kuvajt (5)				1
50.	Dánsko		1	1	76		Spojené arabské emiráty (5)				1
	Estónsko			2	76						

V neoficiálnom poradí krajín, ktoré vznikne sčítaním bodov celého družstva, sme sa umiestnili so ziskom 111 bodov na 34. mieste spoločne s Francúzskom. Je to najlepší výsledok za posledných 5 rokov. Pritom od prvej dvadsiadky nás delilo iba 10 bodov (medzi 120 a 110 bodmi boli krajiny veľmi nahusto). V rámci krajín EÚ sme sa zaradili na 9. miesto. Poradie krajín uvádzame v tabuľke (čísla v zátvorke sú uvedené za krajinami, ktoré mali na IMO menší počet účastníkov).

Kompletné výsledky a štatistiky z tohtoročnej a aj z minulých IMO možno nájsť na internetovej stránke *imo-official.org*.

Jednou z úloh medzinárodnej jury, ktorú tvoria vedúci všetkých zúčastnených krajín, je vybrať súťažné úlohy. Kvôli tomu vedúci cestujú na IMO o niekoľko dní skôr. Zasadnutia potom prebiehajú na izolovanom mieste ďaleko od súťažiacich, aby bol znemožnený náhodný kontakt. Súťažné úlohy sa vyberajú zo zoznamu cca. 30 úloh, ktoré dopredu pripravia organizátori spomedzi úloh zaslaných vopred.

Tento rok však jury okrem výberu úloh rokovala aj o zmene pravidiel IMO. V ére mobilných telefónov a jednoduchého pripojenia na internet je totiž prakticky nemožné ustrážiť odoslanie akejkoľvek správy súťažiacim pred súťažou. IMO je tak založené najmä na vzájomnej dôvere medzi vedúcimi, že žiadnu informáciu o úlohách svojim študentom vopred neposkytnú. Práve táto dôvera – po niekoľkých incidentoch z minulých rokov, keď sa niektorej krajine na niektorej úlohe darilo až podozrivo dobre – bola naštrbená. Kvôli tomu časť vedúcich navrhla zmeniť systém výberu úloh: pripravila by ich špeciálna komisia a vedúci by len tesne pred súťažou zadania prekladali do svojich jazykov.

Po pomerne dlhej diskusii nasledovalo orientačné hlasovanie, v ktorom väčšina vedúcich navrhovanú zmenu odmietla pomerom hlasov približne 2 : 1. Jury sa dohodla, že bude hľadať ďalšie možnosti, ako vzniknutú situáciu riešiť.

Holandskí usporiadatelia zvládli celú súťaž na vysokej úrovni. Zasadnutia jury sa konali v hoteli v blízkosti Eindhovenu, ktorý vznikol prestavbou bývalého kráľovského sídla. Po súťažných dňoch potom všetci účastníci aj vedúci bývali v spoločnom hoteli v Amsterdame. Kým prebiehalo bodovanie úloh, súťažiaci mali možnosť vybrať si dve zo štyroch rôznych exkurzií zahŕňajúcich návštevu Haagu, výlet na bicykloch po nádhernom holandskom vidieku či plavbu plachetnicou. Posledný deň pred vyhodnotením sa konala pre všetkých prehliadka Amsterdamu (vrátane plavby po kanáloch) ukončená návštevou vedecko-technického múzea Nemo.

Okrem typického daždivého počasia bola jedinou nepríjemnosťou pre naše družstvo cesta do Holandska. Ich let z Viedne do Amsterdamu totiž zrušili a letecká spoločnosť im poskytla náhradný let s prestupom v Prahe. Po prílete do Prahy však zistili, že aj let Praha – Amsterdam je zrušený, a tak mohli letieť až na druhý deň ráno. Našťastie samotná súťaž začínala až nasledujúci deň a Holandsko je dostatočne blízka destinácia, takže problémy s aklimatizáciou neboli.

Budúci ročník IMO sa uskutoční v Argentíne. V roku 2013 sa IMO uskutoční v Kolumbii, nasledovať by mali Južná Afrika a Thajsko.

Zadania úloh IMO

Úloha 1.
Pre ľubovoľnú množinu $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ obsahujúcu štyri rôzne kladné celé čísla položme $s_A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Označme n_A počet takých dvojíc (i, j) spĺňajúcich $1 \leqq i < j \leqq 4$, pre ktoré je číslo $a_i + a_j$ deliteľom čísla s_A. Určte všetky množiny A obsahujúce štyri rôzne kladné celé čísla, pre ktoré je hodnota n_A najväčšia možná.
(*Mexiko*)

Úloha 2.
Daná je konečná množina $\mathcal{S}$ aspoň dvoch bodov v rovine, pričom žiadne tri body množiny $\mathcal{S}$ neležia na jednej priamke. Pojmom *veterný mlyn* rozumieme proces, ktorý začína ľubovoľnou priamkou l prechádzajúcou práve jedným bodom P množiny $\mathcal{S}$. Táto priamka sa otáča v smere hodinových ručičiek okolo *pivota* P, až kým po prvýkrát neprechádza ďalším bodom množiny $\mathcal{S}$. Tento bod, označme ho Q, sa stáva novým pivotom, t. j. priamka sa ďalej otáča v smere hodinových ručičiek okolo bodu Q, až kým neprechádza ďalším bodom množiny $\mathcal{S}$. Uvedený proces pokračuje donekonečna. Dokážte, že sa dá vybrať bod $P \in \mathcal{S}$ a priamka l prechádzajúca bodom P tak, že pre príslušný veterný mlyn je každý bod množiny $\mathcal{S}$ pivotom nekonečne veľa krát.
(*Veľká Británia*)

Úloha 3.
Nech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkcia z množiny reálnych čísel do množiny reálnych čísel spĺňajúca

$$f(x + y) \leqq yf(x) + f(f(x))$$

pre všetky reálne čísla x a y. Dokážte, že $f(x) = 0$ pre všetky $x \leqq 0$. (*Bielorusko*)

Úloha 4.
Nech $n > 0$ je celé číslo. K dispozícii máme rovnoramenné váhy a n závaží s hmotnosťami 2^0, 2^1, …, 2^{n-1}. Jednotlivé závažia máme v nejakom poradí ukladať na misky váh tak, aby obsah pravej misky nebol v žiadnom okamihu ťažší ako obsah ľavej misky. V každom kroku vyberieme jedno zo závaží, ktoré ešte nie je na váhach, a položíme ho buď na ľavú alebo na pravú misku váh. Tak postupujeme, kým neminieme všetky závažia. Určte, koľkými spôsobmi to celé môžeme urobiť. (*Irán*)

Úloha 5.
Nech f je funkcia z množiny celých čísel do množiny kladných celých čísel. Predpokladajme, že pre ľubovoľné dve celé čísla m a n je rozdiel $f(m) - f(n)$ deliteľný číslom $f(m - n)$. Dokážte, že pre každé dve celé čísla m a n také, že $f(m) \leqq f(n)$, je číslo $f(n)$ deliteľné číslom $f(m)$. (*Irán*)

Úloha 6.
Daný je ostrouhlý trojuholník ABC a kružnica Γ jemu opísaná. Nech l je dotyčnica kružnice Γ a nech l_a, l_b, l_c sú obrazy priamky l v osových súmernostiach podľa priamok BC, CA, AB. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku určenému priamkami l_a, l_b, l_c sa dotýka kružnice Γ. (*Japonsko*)

Riešenia úloh IMO

Úloha 1.
(Podľa *Natálie Karáskovej.*) Keďže dvojíc (i, j) spĺňajúcich $1 \leqq i < j \leqq 4$ je iba šesť, určite $n_A \leqq 6$.

Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Potom platí $0 < a_1 + a_2 < a_3 + a_4$, z čoho po pripočítaní výrazu $a_3 + a_4$ dostaneme

$$a_3 + a_4 < s_A < 2(a_3 + a_4), \qquad \text{čiže} \quad \tfrac{1}{2}s_A < a_3 + a_4 < s_A.$$

Z toho priamo vyplýva, že $a_3 + a_4 \nmid s_A$.

Podobne máme $0 < a_1 + a_3 < a_2 + a_4$ a po pripočítaní $a_2 + a_4$ dostaneme

$$a_2 + a_4 < s_A < 2(a_2 + a_4), \qquad \text{čiže} \quad \tfrac{1}{2}s_A < a_2 + a_4 < s_A,$$

z čoho vyplýva $a_2 + a_4 \nmid s_A$.

Ukázali sme, že minimálne dva zo súčtov $a_i + a_j$ nedelia s_A, teda $n_A \leqq 4$. Predpokladajme, že pre množinu A platí $n_A = 4$ a zaoberajme sa jej vlastnosťami. Keďže $a_2 + a_4$ ani $a_3 + a_4$ nedelia s_A, určite musia byť deliteľmi s_A všetky zvyšné štyri súčty $a_1 + a_2$, $a_1 + a_3$, $a_1 + a_4$, $a_2 + a_3$. Keďže zrejme ani jeden z nich nie je rovný s_A, musí byť každý z nich menší alebo rovný $\frac{1}{2}s_A$.

Keby v niektorej z nerovností $a_1 + a_4 \leqq \frac{1}{2}s_A$, $a_2 + a_3 \leqq \frac{1}{2}s_A$ platila ostrá nerovnosť (t. j. neplatila by rovnosť), ich sčítaním by sme dostali $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 < s_A$, čo je spor. Preto nutne $a_1 + a_4 = a_2 + a_3 = \frac{1}{2}s_A$.

Ďalej vieme, že $a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < a_2 + a_4 = \frac{1}{2}s_A$, čiže $a_1 + a_3 \leqq \frac{1}{3}s_A$. Predpokladajme, že $a_1 + a_3 < \frac{1}{3}s_A$. Keďže $a_1 + a_3 \mid s_A$, tak $a_1 + a_3 \leqq \frac{1}{4}s_A$, a tiež $a_1 + a_2 < a_1 + a_3 \leqq \frac{1}{4}s_A$. Sčítaním dostaneme

$$a_1 + a_3 + a_1 + a_2 \leqq \tfrac{1}{4}s_A + \tfrac{1}{4}s_A = \tfrac{1}{2}s_A = a_2 + a_3,$$

teda $2a_1 < 0$, čo je spor. Takže musí byť $a_1 + a_3 = \frac{1}{3}s_A$.

Z predošlého vieme, že $a_1 + a_2 < a_1 + a_3 = \frac{1}{3}s_A$ a zároveň $a_1 + a_2 \mid s_A$, t. j. $a_1 + a_2 = s_A/x$ pre nejaké celé číslo $x \geqq 4$. Keď prvé dve z troch rovností

$$a_1 + a_2 = \frac{1}{x}s_A, \quad a_1 + a_3 = \frac{1}{3}s_A, \quad a_2 + a_3 = \frac{1}{2}s_A \tag{1}$$

sčítame a tretiu od nich odčítame, dostaneme

$$2a_1 = \Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\Big)s_A = \Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{6}\Big)s_A, \qquad \text{t. j.} \quad a_1 = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{6}\Big)s_A. \tag{2}$$

Keďže $a_1 > 0$, musí byť $1/x - 1/6 > 0$, čiže $x < 6$. Vzhľadom na pôvodné ohraničenie $x \geqq 4$ ostávajú len možnosti $x = 4$ a $x = 5$. Pre každú z oboch hodnôt dosadením do (2) vyjadríme a_1 a následne z rovností (1) vyjadríme aj a_2, a_3, a_4:

Ak $x = 4$, tak

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\Big)s_A = \frac{1}{24}s_A, \\ a_2 &= \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{24}\Big)s_A = \frac{5}{24}s_A, \\ a_3 &= \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{24}\Big)s_A = \frac{7}{24}s_A, \\ a_4 &= \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{24}\Big)s_A = \frac{11}{24}s_A, \end{aligned}$$

teda $A = \{k, 5k, 7k, 11k\}$ pre nejaké prirodzené číslo k. Ľahko overíme, že pre každú takúto množinu naozaj $n_A = 4$.

Ak $x = 5$, tak

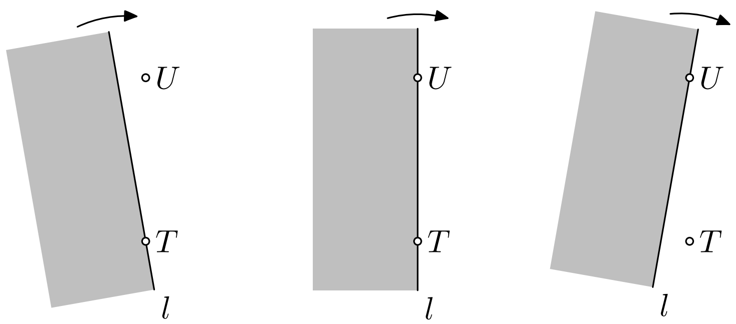
$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\Big)s_A = \frac{1}{60}s_A, \\ a_2 &= \Big(\frac{1}{5} - \frac{1}{60}\Big)s_A = \frac{11}{60}s_A, \\ a_3 &= \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{60}\Big)s_A = \frac{19}{60}s_A, \\ a_4 &= \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{60}\Big)s_A = \frac{29}{60}s_A, \end{aligned}$$

teda $A = \{k, 11k, 19k, 29k\}$ pre nejaké prirodzené číslo k. Aj pre takúto množinu platí $n_A = 4$.

Odpoveď. Najväčšia možná hodnota n_A je 4 a nadobúda sa pre množiny A tvaru $\{k, 5k, 7k, 11k\}$ a $\{k, 11k, 19k, 29k\}$, kde k je ľubovoľné prirodzené číslo.

Úloha 2.

Priamka l delí rovinu na dve časti. Jednu z nich ofarbime sivou a druhú bielou farbou. Všimnime si, že keď sa vo veternom mlyne mení pivot z bodu T na bod U, po zmene sa T nachádza na tej istej strane priamky l, na ktorej sa pred zmenou nachádzal bod U (obr. 44). Takže počet bodov z $\mathcal{S}$ nachádzajúcich sa v sivej časti ostáva stále konštantný (ak neuvažujeme okamihy, v ktorých sa mení pivot); to isté platí samozrejme aj pre bielu časť.



Obr. 44

Uvažujme najskôr prípad, keď $\mathcal{S}$ obsahuje nepárne veľa bodov, t. j. $|\mathcal{S}| = 2n + 1$ pre nejaké prirodzené n. Tvrdíme, že každým bodom $T \in \mathcal{S}$ možno viesť „rozpoľujúcu“ priamku, t. j. priamku, ktorá má na každej strane práve n bodov z $\mathcal{S}$. Existencia rozpoľujúcej priamky vyplýva z jednoduchej úvahy: Veďme cez T ľubovoľnú priamku neprechádzajúcu žiadnym ďalším bodom množiny $\mathcal{S}$. Nech na jednej jej strane je $n + r$ a na druhej $n - r$ bodov z $\mathcal{S}$. Ak $r = 0$, našli sme hľadanú priamku. Ak $r \neq 0$, tak pri postupnom otáčaní priamky stále okolo bodu T sa počet bodov na jej stranách zmení pri každom pretnutí bodu z $\mathcal{S}$ o 1. Pritom po otočení o 180° sa počty zrejme vymenia, takže na prvej strane bude $n - r$ bodov a na druhej $n + r$ bodov. Je jasné, že v istom momente počas otáčania musel byť počet bodov na oboch stranách presne n.

Zvoľme teda bod $P \in \mathcal{S}$ ľubovoľne a za priamku l zoberme k nemu prislúchajúcu rozpoľujúcu priamku. Veterný mlyn s takýmto začiatkom musí navštíviť počas otáčania o prvých 180° každý bod z $\mathcal{S}$ ako pivota. Pre každý bod $T \in \mathcal{S}$ totiž existuje rozpoľujúca priamka t. Rozpoľujúca priamka žiadneho iného bodu z $\mathcal{S}$ nemôže byť rovnobežná s t (pretože každé rovnobežné posunutie priamky t do iného bodu zmení počty bodov na jednotlivých stranách). Takže v momente, keď je priamka veterného mlyna rovnobežná s t, musí to byť práve t (z úvodnej úvahy vieme, že priamka veterného mlyna musí byť stále rozpoľujúca).

Zaoberajme sa ďalej prípadom, keď $\mathcal{S}$ má párne veľa bodov, čiže $|\mathcal{S}| = 2n$. Teraz budeme za „rozpoľujúcu“ považovať takú *orientovanú* priamku vedúcu niektorým bodom $T \in \mathcal{S}$, ktorá má na sivej strane $n - 1$ bodov a na bielej strane n bodov z $\mathcal{S}$. Takú priamku možno viesť každým bodom T, pretože (podobne ako v nepárnom prípade) pri otočení pevne zvolenej priamky o 180° okolo T sa zmení počet bodov z $n - 1 + r$ na $n - r$, pričom zmena je pri prechode každým bodom z $\mathcal{S}$ vždy o 1 (zrejme v závislosti od znamienka r platí buď $n - 1 + r \leqq n - 1 \leqq n - r$ alebo $n - 1 + r \geqq n - 1 \geqq n - r$, takže hodnota $n - 1$ sa v niektorom momente musí nadobudnúť).

Aj v tomto prípade zvolíme $P \in \mathcal{S}$ ľubovoľne a za priamku l zoberieme rozpoľujúcu priamku, pričom v sivej časti bude $n - 1$ bodov z $\mathcal{S}$. Tvrdíme, že veterný mlyn s takýmto začiatkom navštívi počas otáčania o prvých 360° každý bod z $\mathcal{S}$ ako pivota. Pre každý bod $T \in \mathcal{S}$ totiž existuje rozpoľujúca priamka t s $n - 1$ bodmi v sivej časti a rozpoľujúca priamka žiadneho iného bodu s ňou nie je rovnobežná a zároveň rovnako orientovaná. Takže v momente, keď je priamka veterného mlyna rovnobežná s t a má aj rovnakú orientáciu, musí to byť t.

Ukázali sme, že veterný mlyn sa dá zvoliť tak, aby prechádzal každým bodom ako pivotom (počas otočenia o prvých 180°, resp. 360°). Z uvedeného je tiež zrejmé, že pri otáčaní o ďalšie násobky 180°, resp. 360° bude mlyn prechádzať tými istými pivotmi, takže každý bod bude pivotom nekonečne veľa krát.

Úloha 3.

V zadanej funkcionálnej nerovnici sa ako argumenty funkcie objavujú výrazy $x + y$ a x. Aby sme sa zbavili súčtu v argumente, použijeme substitúciu $y = t - x$. Pre všetky reálne čísla x, t potom platí

$$f(t) \leqq tf(x) - xf(x) + f(f(x)). \tag{1}$$

V ďalšom kroku eliminujeme člen $f(f(x))$ tak, že do (1) dosadíme najskôr $t = f(a)$, $x = b$ a potom $t = f(b)$, $x = a$. Dostaneme

$$\begin{aligned} f(f(a)) - f(f(b)) &\leqq f(a)f(b) - bf(b), \\ f(f(b)) - f(f(a)) &\leqq f(a)f(b) - af(a). \end{aligned}$$

Sčítaním dostávame, že pre všetky a, b platí

$$2f(a)f(b) \geqq af(a) + bf(b).$$

Voľbou $b = 2f(a)$ dosiahneme, že ľavá strana poslednej nerovnosti bude rovnaká ako druhý sčítanec na pravej strane. Po ich odčítaní tak ostane nerovnosť $af(a) \leqq 0$, ktorá musí byť splnená pre všetky $a \in \mathbb{R}$. Preto

$$f(a) \geqq 0 \quad \text{pre všetky } a < 0. \tag{2}$$

Ak by pre nejaké x platilo $f(x) > 0$, bola by pre takúto hodnotu pravá strana nerovnosti (1) v premennej t rastúcou lineárnou funkciou, teda by nadobúdala na obore záporných čísel určite aj záporné hodnoty. Potom by však záporné hodnoty na obore záporných čísel musela nadobudnúť aj ľavá strana, čiže funkcia f, čo je v spore s (2). Preto

$$f(x) \leqq 0 \quad \text{pre všetky } x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Spojením (2) a (3) ihneď máme $f(x) = 0$ pre všetky $x < 0$. Ostáva určiť hodnotu $f(0)$. Ak v (1) položíme $t = x < 0$, dostaneme $0 \leqq 0 - 0 + f(0)$, čiže $f(0) \geqq 0$. Vzhľadom na (3) už potom nutne $f(0) = 0$.

Úloha 4.

(Podľa *Natálie Karáskovej.*) Závažia, ktoré máme k dispozícii, majú nasledujúcu vlastnosť: Najťažšie závažie je ťažšie ako všetky ostatné dokopy, ba dokonca všeobecnejšie – *každé závažie je ťažšie ako súčet hmotností všetkých od neho ľahších závaží.*

Z toho dôvodu sa nikdy nemôže stať, že by súčet nejakých ľahších závaží prevážil ťažšie závažie. Inými slovami, nutná a postačujúca podmienka, ktorú musíme pri ukladaní závaží splniť, je, že v každom okamihu najťažšie závažie spomedzi všetkých dovtedy uložených musí byť na ľavej strane.

V skutočnosti teda nezáleží na tom, koľko závažia vážia. Ak označíme $P(k)$ počet spôsobov, koľkými vieme uložiť závažia s hmotnosťami $2^0, 2^1, \ldots, 2^{k-1}$, tak aj hocakých iných k závaží spĺňajúcich vlastnosť uvedenú kurzívou v prvom odseku vieme uložiť $P(k)$ spôsobmi.

Počet $P(n)$ teda môžeme určiť „induktívne“. Pre $n = 1$ je zrejme jediná možnosť (závažie musíme uložiť naľavo), t. j. $P(1) = 1$.

Predpokladajme, že poznáme hodnotu $P(k)$. Skúmajme, koľkými spôsobmi vieme uložiť $k + 1$ závaží. Najprv sa rozhodneme, ktorých k závaží spomedzi všetkých $k + 1$ umiestnime najskôr. Bez ohľadu na to, ktoré vezmeme, vieme ich vždy uložiť $P(k)$ spôsobmi (keďže majú avizovanú vlastnosť). Každý z týchto spôsobov môžeme doplniť posledným závažím. Ak ako posledné ukladáme najťažšie závažie (s hmotnosťou 2^k), musíme ho dať nutne na ľavú misku. Ak ukladáme jedno z k ľahších závaží, najťažšie je už určite vľavo, a teda bez ohľadu na to, kam dáme posledné závažie, ostane ľavá strana ťažšia. V tomto prípade máme preto dve rôzne možnosti. Dostávame

$$P(k+1) = P(k) + k \cdot P(k) \cdot 2 = P(k) \cdot (2k+1).$$

Platí teda

$$\begin{aligned} P(2) &= P(1) \cdot 3 = 1 \cdot 3, \\ P(3) &= P(2) \cdot 5 = 1 \cdot 3 \cdot 5, \\ &\vdots \\ P(n) &= P(n-1) \cdot (2n-1) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1). \end{aligned}$$

Odpoveď. Hľadaný počet spôsobov je rovný súčinu prvých n nepárnych čísel (skrátene sa tento výraz niekedy označuje $(2n-1)!!$).

Úloha 5.
(Podľa *Ondreja Kováča.*) Podľa zadania pre ľubovoľné celé čísla a, b platí

$$f(a-b) \mid f(a) - f(b). \tag{1}$$

Voľbou $a = c$, $b = 0$ dostávame $f(c) \mid f(c) - f(0)$, odkiaľ $f(c) \mid f(0)$ pre každé celé c. Z voľby $a = 0$, $b = -c$ vyplýva $f(c) \mid f(0) - f(-c)$, a keďže $f(c) \mid f(0)$, nutne $f(c) \mid f(-c)$. To však platí pre ľubovoľné celé číslo c, takže zároveň aj $f(-c) \mid f(c)$, z čoho vzhľadom na kladnosť funkcie f vyplýva $f(c) = f(-c)$ pre všetky celé c.

Predpokladajme, že $f(m) \leqq f(n)$. Ak $f(m) = f(n)$, tak triviálne platí $f(m) \mid f(n)$ a nemáme čo dokazovať. Ďalej sa preto obmedzíme na prípad $f(m) < f(n)$.

Dosadením $a = n$, $b = m$ do (1) dostaneme $f(n-m) \mid f(n) - f(m)$, teda existuje kladné číslo k také, že

$$f(n) - f(m) = f(n-m) \cdot k = f(m-n) \cdot k \tag{2}$$

(rovnosť $f(n-m) = f(m-n)$ vyplýva z úvodného odseku; kladnosť k vyplýva z predpokladu $f(m) < f(n)$ a z kladnosti funkcie f).

Dosadením $a = m$, $b = m-n$ do (1) dostaneme $f(n) \mid f(m) - f(m-n)$, teda existuje celé číslo l také, že

$$f(n) \cdot l = f(m) - f(m-n).$$

Ostatnú rovnosť prenásobíme číslom k a využijeme (2):

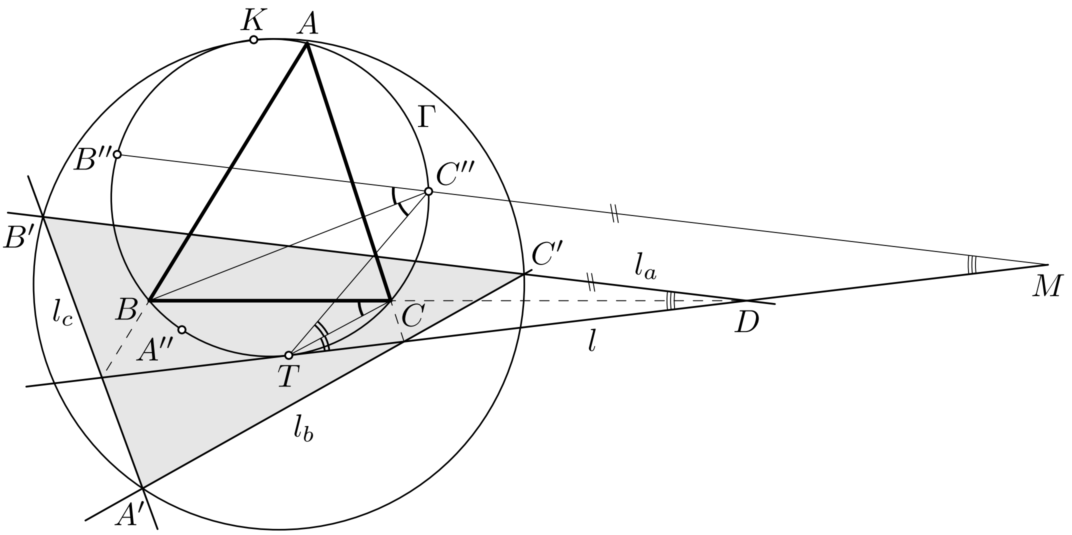
$$f(n) \cdot lk = \bigl(f(m) - f(m-n)\bigr)k = f(m) \cdot k - \bigl(f(n) - f(m)\bigr) = f(m)(k+1) - f(n).$$

Z toho po jednoduchej úprave máme

$$(kl+1) \cdot f(n) = (k+1) \cdot f(m).$$

Keďže výraz na pravej strane je kladný, musí byť kladný aj činiteľ $kl + 1$, čiže $l \geqq 0$. Z nerovnosti $f(n) > f(m)$ a z poslednej rovnosti potom vyplýva $kl + 1 < k + 1$, čiže $l < 1$. Jedinou prípustnou hodnotou je teda $l = 0$, odkiaľ $f(n) = (k + 1)f(m)$, z čoho už priamo vyplýva $f(m) \mid f(n)$.

Úloha 6.
Bod dotyku priamky l a kružnice Γ označme T a vrcholy trojuholníka určeného priamkami l_a, l_b, l_c označme A', B', C' tak ako na obr. 45. Nech A'' je taký bod na kružnici



Obr. 45

Γ, že A je stredom oblúka TA'' (t. j. $|TA| = |AA''|$). Podobne sú definované body B'', C''. V celom riešení budeme kvôli stručnosti predpokladať, že situácia vyzerá tak, ako na obr. 45. V riešení pre každú inú možnú polohu by sme postupovali podobne – s využívaním analogických úvah.[1]

Ak označíme M priesečník priamok l a $B''C''$ a D priesečník priamok l a l_a, s využitím úsekových uhlov a toho, že B, C sú stredy oblúkov TB'', TC'', máme

$$|\measuredangle TMC''| = 180^\circ - |\measuredangle TC''M| - |\measuredangle MTC''| = |\measuredangle TC''B''| - 2|\measuredangle MTC| =$$
$$= 2(|\measuredangle TC''B| - |\measuredangle MTC|) = 2(|\measuredangle TCB| - |\measuredangle MTC|) = 2|\measuredangle TDC| = |\measuredangle TDC'|.$$

Takže priamky l_a a $B''C''$ sú rovnobežné. Podobnými úvahami možno odvodiť $l_b \parallel A''C''$ a $l_c \parallel A''B''$. Z toho vyplýva, že trojuholníky $A'B'C'$, $A''B''C''$ sú buď rovnoľahlé[2], alebo je jeden posunutím druhého. V ďalšom dokážeme, že sú rovnoľahlé, a že stred ich rovnoľahlosti K leží na kružnici Γ. Z toho už bude vyplývať, že ich opísané kružnice sú tiež rovnoľahlé so stredom rovnoľahlosti K, a preto sa v ňom dotýkajú.

Dokážeme dve pomocné tvrdenia.

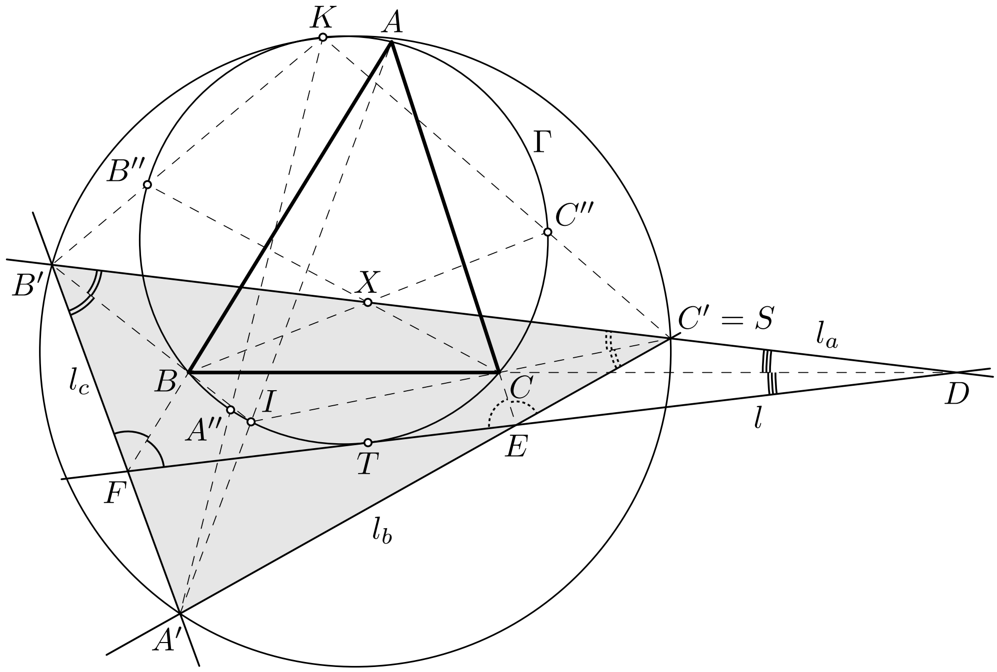
[1] Osobitne treba uvažovať najmä polohu, keď je l rovnobežná s niektorou stranou trojuholníka ABC.

[2] Hovoríme, že dva trojuholníky sú rovnoľahlé, ak existuje rovnoľahlosť, ktorá zobrazí jeden na druhý.

Tvrdenie 1. Priesečník X priamok $B''C$, BC'' leží na priamke l_a.

Dôkaz. Bod B je stredom oblúka TB'', teda $|\measuredangle BCT| = |\measuredangle BCB''|$ a priamka $B''C$ je obrazom priamky TC v osovej súmernosti podľa BC. Podobne je priamka BC'' obrazom priamky BT. Takže X je obrazom bodu T v tejto súmernosti, t. j. leží na l_a. □

Tvrdenie 2. Priesečník I priamok BB', CC' leží na kružnici Γ.



Obr. 46

Dôkaz. Označme $E = AC \cap l$, $F = AB \cap l$ (obr. 46) a veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC označme štandardne α, β, γ. Zo zadaných osových súmerností vyplýva, že bod B je priesečníkom osí uhlov pri vrcholoch D, F v trojuholníku FDB'. Preto je B stredom kružnice vpísanej tomuto trojuholníku a leží aj na osi uhla pri vrchole B'. Máme tak

$$|\measuredangle BB'C'| = \tfrac{1}{2}(180^\circ - |\measuredangle B'FD| - |\measuredangle FDB'|) = 90^\circ - |\measuredangle BFD| - |\measuredangle BDF| = 90^\circ - \beta.$$

Podobne je bod C stredom kružnice pripísanej k strane EC' trojuholníka EDC', odkiaľ

$$|\measuredangle CC'B'| = \tfrac{1}{2}(|\measuredangle EDC'| + |\measuredangle DEC'|) = |\measuredangle EDC| + |\measuredangle CED| - 90^\circ = 90^\circ - \gamma.$$

Dopočítaním tretieho uhla v trojuholníku $B'C'I$ dostávame

$$|\measuredangle B'IC'| = 180^\circ - (90^\circ - \beta + 90^\circ - \gamma) = \beta + \gamma = 180^\circ - \alpha,$$

teda bod I leží na kružnici Γ. □

Označme K druhý priesečník priamky $B'B''$ s kružnicou Γ. Dôkaz dokončíme použitím Pascalovej vety pre šesticu bodov K, B'', C, I, B, C'' na kružnici Γ. Podľa nej ležia body $B' = KB'' \cap IB$, $X = B''C \cap BC''$ a $S = CI \cap C''K$ na jednej priamke. Preto $S = C'$, čiže body K, C'', C' ležia na jednej priamke. Bod K je potom priesečníkom priamok $B'B''$, $C'C''$, z čoho vyplýva, že K je stredom rovnoľahlosti zobrazujúcej $A'B'C'$ na $A''B''C''$ a leží na kružnici Γ.

5. Stredoeurópska matematická olympiáda

Na piatom ročníku MEMO, ktorý sa konal 1. – 7. septembra 2011 v mestečku Varaždin v Chorvátsku, sa zúčastnilo 60 súťažiacich z 10 krajín. Slovenskú republiku reprezentovali

Klára Ficková, Gymnázium Poštová, Košice, 3. ročník,

Soňa Galovičová, Gymnázium Jura Hronca, Bratislava, 3. ročník,

Viktor Lukáček, Gymnázium sv. Moniky, Prešov, 3. ročník,

Vladimír Macko, Gymnázium Ľ. Štúra, Zvolen, 2. ročník,

Matej Molnár, Gymnázium Jura Hronca, Bratislava, 3. ročník,

Miroslav Stankovič, Gymnázium Poštová, Košice, 1. ročník.

Vedúcim družstva SR bol Mgr. Peter Novotný, PhD. (odborný asistent na FMFI UK Bratislava), zástupcu vedúceho a pedagogický dozor vykonával RNDr. Ján Mazák (doktorand na FMFI UK Bratislava).

Súťaž mala tradične dve nezávislé časti. V súťaži jednotlivcov sme získali dve bronzové medaily a dve čestné uznania (tie sa udeľujú súťažiacim, ktorí nezískajú medailu a aspoň jednu zo štyroch úloh vyriešia na plný počet, teda 8 bodov). V súťaži družstiev (t. j. v súťaži, v ktorej všetci naši šiesti študenti pracovali pri riešení úloh spoločne a odovzdávali spoločné riešenie) sme skončili na piatom mieste. Najviac sa darilo družstvu Poľska – vyhralo súťaž družstiev a v súťaži jednotlivcov získalo tri zlaté medaily. Naši podali v súťaži výkon, s ktorým môžeme byť spokojní – v celkovom súčte bodov v súťaži jednotlivcov nás okrem tradične silných krajín (Poľsko, Maďarsko, Nemecko) predbehli iba Chorvátsko a tesne ČR a v súťaži družstiev sme boli ešte o miesto vyššie.

Všetci účastníci aj vedúci boli počas celého pobytu ubytovaní v internáte hotelového typu (Studentski dom Varaždin). Súťaž prebiehala na Prvom gymnáziu vo Varaždine. Zasadnutia jury, na ktorých sa pripravovali úlohy, boli na Fakulte organizácie a informatiky patriacej pod Záhrebskú univerzitu. Popri súťaži pripravili organizátori pre študentov vo voľnom čase exkurzie po okolitých kultúrnych pamiatkach a rôzne športové aktivity. V pondelok sa konala pre všetkých prehliadka hlavného mesta Chorvátska Záhrebu, v utorok sme navštívili zámok Trakošćan a múzeum neandrtálskeho človeka v Krapine.

Výsledky súťaže boli vyhlásené v slávnostnej sále patriacej Varaždinskému kraju. Slávnostného vyhodnotenia sa zúčastnili zástupcovia chorvátskeho ministerstva školstva, Varaždinského samosprávneho kraja, Záhrebskej univerzity a Prvého gymnázia vo Varaždine.

6. ročník MEMO sa bude konať vo Švajčiarsku v meste Solothurn, nasledovať by malo v roku 2013 Maďarsko.

Výsledky družstva SR v súťaži jednotlivcov:

Meno	I1	I2	I3	I4	Súčet	Cena
Klára Ficková	3	0	8	0	11	HM
Soňa Galovičová	0	1	8	0	9	HM
Viktor Lukáček	8	7	0	0	15	bronz
Vladimír Macko	2	2	0	0	4	
Matej Molnár	0	6	0	0	6	
Miroslav Stankovič	8	8	0	0	16	bronz

Prehľad výsledkov všetkých krajín v súťaži jednotlivcov:

Por.	Štát	Z	S	B	ČU	$\sum$	Por.	Štát	Z	S	B	ČU	$\sum$
1.	Poľsko	3	2	1		150	6.	Slovensko			2	2	61
2.	Maďarsko	2	3	1		147	7.	Rakúsko			2		55
3.	Nemecko	1	3	1	1	125	8.	Litva			1		50
4.	Chorvátsko		2	2		95	9.	Slovinsko			1	1	41
5.	Česká rep.			2	2	64	10.	Švajčiarsko			1		31

Výsledky súťaže družstiev:

	Štát	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	$\sum$
1.	Poľsko	8	8	8	8	8	8	8	8	64
2.	Maďarsko	8	0	8	3	8	8	8	8	51
3.	Nemecko	8	0	8	0	8	8	8	8	48
4.	Chorvátsko	2	8	8	0	3	8	8	0	37
5.	Slovensko	1	0	8	0	8	6	8	0	31
6.	Litva	6	0	8	0	8	0	8	0	30
7.	Slovinsko	2	0	8	0	4	3	8	0	25
8.	Česká rep.	2	1	4	0	0	5	8	3	23
9.	Rakúsko	1	0	6	0	5	2	8	0	22
10.	Švajčiarsko	2	0	6	0	0	0	8	0	16

Zadania úloh MEMO

Súťaž jednotlivcov

Úloha I-1.
Na začiatku je na tabuli napísané číslo 44. Celé číslo a na tabuli môžeme nahradiť štyrmi navzájom rôznymi celými číslami a_1, a_2, a_3, a_4 takými, že ich aritmetický priemer $\frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ je rovný číslu a. V každom kroku naraz nahradíme všetky čísla na tabuli vyššie opísaným spôsobom. Po 30 krokoch bude na tabuli $n = 4^{30}$ celých čísel $b_1, b_2, \ldots , b_n$. Dokážte, že

$$\frac{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}{n} \geqq 2011.$$

(*Chorvátsko*)

Úloha I-2.
Dané je celé číslo $n \geqq 3$. Janko a Marienka hrajú nasledujúcu hru: Najskôr Janko označí strany pravidelného n-uholníka číslami $1, 2, \ldots , n$ v ľubovoľnom poradí, pričom každé číslo použije práve raz. Potom Marienka rozdelí uvedený n-uholník na trojuholníky pomocou $n - 3$ uhlopriečok, ktoré sa vnútri n-uholníka nepretínajú. Všetky tieto uhlopriečky označíme číslom 1. Dovnútra každého trojuholníka napíšeme súčin čísel na jeho stranách. Nech S je súčet týchto $n - 2$ súčinov. Určte, aká bude hodnota S, ak Marienka chce, aby bolo S čo najmenšie, Janko chce, aby bolo S čo najväčšie a obaja hrajú najlepšie ako sa dá. (*Chorvátsko*)

Úloha I-3.
V rovine sa kružnice k_1, k_2 so stredmi I_1, I_2 pretínajú v dvoch bodoch A a B. Predpokladajme, že uhol I_1AI_2 je tupý. Dotyčnica ku k_1 vedená bodom A pretína kružnicu k_2 znova v bode C a dotyčnica ku k_2 vedená bodom A pretína kružnicu k_1 znova v bode D. Nech k_3 je kružnica opísaná trojuholníku BCD. Označme E stred oblúka CD kružnice k_3 obsahujúceho bod B. Priamky AC a AD pretínajú kružnicu k_3 znova postupne v bodoch K a L. Dokážte, že priamky AE a KL sú na seba kolmé. (*Slovinsko*)

Úloha I-4.
Nech k a m sú kladné celé čísla, pričom $k > m$ a číslo $km(k^2 - m^2)$ je deliteľné číslom $k^3 - m^3$. Dokážte, že $(k - m)^3 > 3km$. (*Poľsko*)

Súťaž družstiev

Úloha T-1.
Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že rovnosť

$$y^2 f(x) + x^2 f(y) + xy = xyf(x + y) + x^2 + y^2$$

platí pre všetky dvojice $x, y \in \mathbb{R}$, pričom $\mathbb{R}$ je množina všetkých reálnych čísel.
(*Chorvátsko*)

Úloha T-2.
Nech a, b, c sú kladné reálne čísla spĺňajúce rovnosť

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=2.$$

Dokážte, že

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2} \geqq \frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}.$$

(*Chorvátsko*)

Úloha T-3.
Pre celé číslo $n \geqq 3$ označme $\mathcal{M}$ množinu $\{(x,y);\ x,y \in \mathbb{Z}, 1 \leqq x \leqq n, 1 \leqq y \leqq \leqq n\}$ pozostávajúcu z bodov roviny. (Symbol $\mathbb{Z}$ označuje množinu celých čísel.) Aký je najväčší možný počet prvkov podmnožiny $S \subseteq \mathcal{M}$, ktorá neobsahuje žiadne tri body ležiace vo vrcholoch pravouhlého trojuholníka? (*Maďarsko*)

Úloha T-4.
Nech $n \geqq 3$ je prirodzené číslo. Súťaže podobnej MEMO sa zúčastnilo $3n$ účastníkov, ktorí dokopy hovoria n rôznymi jazykmi. Každý účastník ovláda práve tri z týchto jazykov. Dokážte, že vieme vybrať aspoň $\lceil \frac{2}{9}n \rceil$ zo spomínaných n jazykov tak, aby žiadny účastník neovládal viac ako dva z nich. (Symbol $\lceil x \rceil$ označuje najmenšie celé číslo, ktoré nie je menšie ako x.) (*Chorvátsko*)

Úloha T-5.
Konvexný päťuholník $ABCDE$ má všetky strany rovnako dlhé. Uhlopriečky AD a EC sa pretínajú v bode S tak, že $|\measuredangle ASE| = 60°$. Dokážte, že päťuholník $ABCDE$ má niektoré dve strany rovnobežné. (*Michal Szabados*)

Úloha T-6.
Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Označme postupne B_0 a C_0 päty výšok z vrcholov B a C. Bod X leží vnútri trojuholníka ABC tak, že priamka BX sa dotýka kružnice opísanej trojuholníku AXC_0 a priamka CX sa dotýka kružnice opísanej trojuholníku AXB_0. Dokážte, že priamky AX a BC sú na seba kolmé. (*Česká rep.*)

Úloha T-7.
Nech A a B sú disjunktné neprázdne množiny také, že $A \cup B = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Dokážte, že existujú prvky $a \in A$ a $b \in B$ také, že číslo $a^3 + ab^2 + b^3$ je deliteľné 11. (*Poľsko*)

Úloha T-8.
Kladné celé číslo n nazveme *úžasným*, ak existujú kladné celé čísla a, b, c spĺňajúce rovnosť

$$n = \operatorname{nsd}(b,c) \cdot \operatorname{nsd}(a,bc) + \operatorname{nsd}(c,a) \cdot \operatorname{nsd}(b,ca) + \operatorname{nsd}(a,b) \cdot \operatorname{nsd}(c,ab).$$

Dokážte, že existuje 2011 po sebe idúcich kladných celých čísel, ktoré sú úžasné.

(*Litva*)

Riešenia úloh MEMO

Úloha I-1.
Nahradením jedného z čísel na tabuli štvoricou opísanou v zadaní sa zväčší aritmetický priemer druhých mocnín čísel na tabuli. Dokážeme, že toto zväčšenie je dostatočne veľké. Začneme pomocným tvrdením.

Lema. Ak a_1, a_2, a_3, a_4 sú štyri navzájom rôzne celé čísla také, že ich aritmetický priemer $a = \frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ je tiež celé číslo, tak platí

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}{4} - a^2 \geqq \frac{5}{2}.$$

Dôkaz. Ľavá strana dokazovanej nerovnosti sa dá prepísať takto:

$$\begin{aligned}\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}{4} - a^2 &= \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - 2a(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + 4a^2}{4} \\ &= \frac{(a_1 - a)^2 + (a_2 - a)^2 + (a_3 - a)^2 + (a_4 - a)^2}{4}.\end{aligned}$$

Čísla $a_1 - a$, $a_2 - a$, $a_3 - a$, $a_4 - a$ sú navzájom rôzne celé čísla so súčtom 0. Ak žiadne z nich nie je nulové, bude súčet ich štvorcov aspoň $1^2 + (-1)^2 + 2^2 + (-2)^2 = 10$. Ak jedno z nich je nula, musí aspoň jedno z nich mať absolútnu hodnotu aspoň 3; v tomto prípade súčet štvorcov bude aspoň $3^2 + 1^2 + (-1)^2 = 11$. V oboch prípadoch je platnosť tvrdenia lemy evidentná.

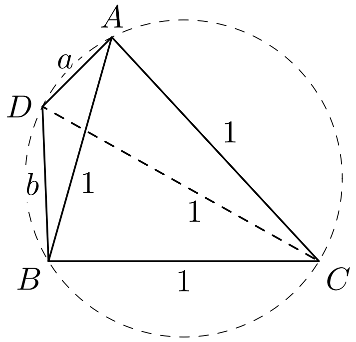
Vráťme sa k dokazovanému tvrdeniu. Označme S_k aritmetický priemer druhých mocnín čísel na tabuli po vykonaní k krokov. Keď použijeme dokázanú lemu pre štvorice čísel vzniknuté nahradením každého zo 4^k čísel, ktoré sú na tabuli po k krokoch, dostaneme, že $S_{k+1} - S_k \geqq 5/2$ pre každé $k \geqq 0$. Preto

$$S_{30} \geqq S_0 + 30 \cdot \frac{5}{2} = 44^2 + 75 = 2011.$$

Úloha I-2.
Ukážeme, že $S = (n^2 + 3n - 6)/2$ pre všetky $n \geqq 3$. Pre $n = 3$ je to zjavne pravda, ďalej budeme uvažovať $n > 3$.

Pozrime sa na situáciu najprv z pohľadu Marienky. V každej triangulácii, ktorú vytvorí, bude presne $n - 2$ trojuholníkov. Každý trojuholník z triangulácie má najviac dve strany na obvode pôvodného mnohouholníka a trojuholníky obsahujúce dve strany pôvodného mnohouholníka musia byť aspoň dva. Ukážeme, že pre Marienku je najlepšie zvoliť trianguláciu, v ktorej sú spomínané trojuholníky práve dva.

Nazvime trojuholník *zlý*, ak všetky jeho strany sú diagonálami pôvodného trojuholníka. Ukážeme, že Marienka chce zvoliť trianguláciu bez zlých trojuholníkov. Predpokladajme, že to tak nie je, t. j. existuje triangulácia optimálna pre Marienku, ktorá obsahuje zlý trojuholník (budeme takéto triangulácie volať *zlé*). Pre každú zlú trianguláciu T označme $d(T)$ dĺžku najkratšej možnej strany zlého trojuholníka v T. Zo všetkých zlých triangulácií s najmenším možným počtom zlých trojuholníkov vezmime trianguláciu T_0, pre ktorú je hodnota $d(T)$ minimálna.



Obr. 47

Nech ABC je zlý trojuholník v T_0 taký, že $|AB| = d(T_0)$. V T_0 máme tiež trojuholník ABD pre $D \neq C$. Strana AB je v trojuholníku ABC najkratšia, čiže uhol ACB je najmenší a teda ostrý. Body A, C, B, D ležia na kružnici v tomto poradí, preto uhol ADB je tupý a teda AD aj BD sú kratšie ako AB. Zmeňme trianguláciu T_0 na T_1 tak, že trojuholníky ABC a ABD nahradíme trojuholníkmi ACD a BCD (obr. 47). Ohodnotenia úsečiek AD a BD nech sú a a b. Zmenu hodnoty S vieme vyjadriť ako

$$S(T_1) - S(T_0) = a + b - ab - 1 = -(a-1)(b-1) \leqq 0.$$

Avšak triangulácia T_0 bola optimálna, preto aj T_1 musí byť optimálna. Pritom počet zlých trojuholníkov v T_0 bol najmenší možný, a teda aspoň jedna z úsečiek AD a BD je diagonálou. Keďže sú obe tieto úsečky kratšie ako AB, dostávame spor s voľbou T_0.

V triangulácii bez zlých trojuholníkov sú práve dva trojuholníky obsahujúce po dve susedné strany pôvodného mnohouholníka; všetky ostatné trojuholníky obsahujú presne jednu stranu pôvodného mnohouholníka. Vzhľadom na nerovnosť $ab > a+b$, platnú pre každú dvojicu prirodzených čísel a, b väčších ako 1, sa Marienka už ľahko rozhodne, ktoré dva trojuholníky budú obsahovať dve strany pôvodného mnohouholníka: jeden z nich bude obsahovať stranu ohodnotenú 1 a susednú stranu rôznu od 2, druhý zase naopak stranu ohodnotenú 2 a susednú stranu rôznu od 1. Týmto spôsobom Marienka vie zaručiť, že hodnota S nikdy nebude väčšia ako $3 + 4 + \ldots + (n-2) + 1 \cdot (n-1) + 2n = (n^2 + 3n - 6)/2$.

Na druhej strane Janko vie donútiť Marienku k voľbe aspoň takejto hodnoty S tým, že vo svojom ťahu označí strany mnohouholníka postupne číslami

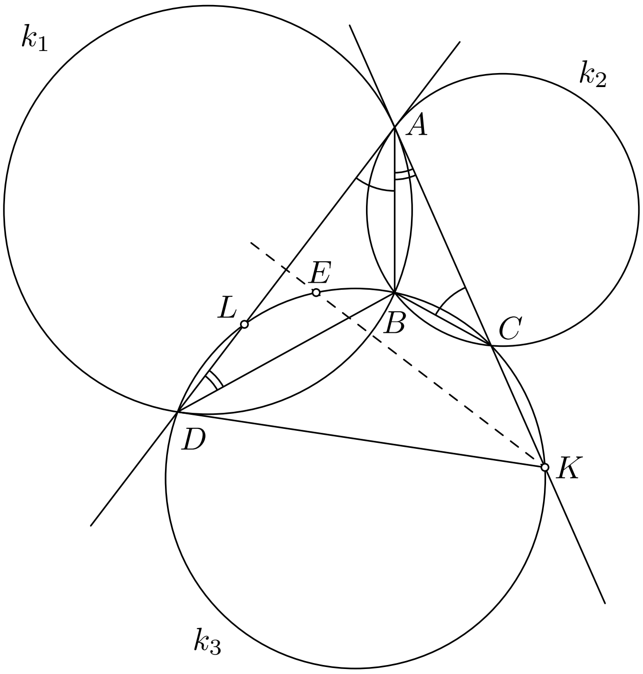
$$1,\ n-1,\ 4,\ n-3,\ 5,\ n-4,\ \ldots,\ n-2,\ 3,\ n,\ 2.$$

Úloha I-3.

Priamka AD je dotyčnicou ku k_2, preto úsekový uhol DAB má takú istú veľkosť ako uhol BCA. Podobne $|\measuredangle ADB| = |\measuredangle BAC|$. Preto

$$|\measuredangle DBC| = 360^\circ - |\measuredangle DBA| - |\measuredangle CBA| = 2|\measuredangle DAB| + 2|\measuredangle CAB| = 2|\measuredangle DAC|.$$

Body D, L, E, B, C, K ležia na kružnici k_3. Aby sme sa vyhli diskusii viacerých



Obr. 48

prípadov možného poradia týchto bodov na kružnici, budeme používať orientované uhly. Symbolom $\widehat{XY}$ označíme veľkosť uhla XZY takého, že bod Z leží na kružnici k_3 a body X, Z, Y sú pozdĺž kružnice k_3 usporiadané proti smeru hodinových ručičiek. Keďže bod E je stredom oblúka CD, platí

$$|\measuredangle AKE| = \frac{1}{2}\widehat{DC} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{CD}) = \frac{1}{2}(180^\circ - |\measuredangle DBC|) = 90^\circ - |\measuredangle DAC|.$$

Preto priamka KE je kolmá na AD (obr. 48). Podobne priamka LE je kolmá na AC, preto bod E je priesečníkom výšok trojuholníka KLA a teda priamka AE je kolmá na priamku KL, čo bolo treba dokázať.

Poznámka. Čiastočne iné riešenie tejto úlohy je možné založiť na pozorovaní, že bod E je stredom opísanej kružnice trojuholníka ACD. K riešeniu taktiež vedie použitie kružnicovej inverzie so stredom v bode A; ak obraz bodu X v takejto inverzii označíme X', bude štvoruholník $AD'B'C'$ rovnobežník a štvoruholník $AC'E'D'$ deltoid.

Úloha I-4.
Označme d najväčšieho spoločného deliteľa čísel k a m. Pre vhodné celé čísla a a b platí $k = da$, $m = db$, pričom a a b sú nesúdeliteľné a $a > b$. Číslo

$$\frac{km(k^2 - m^2)}{k^3 - m^3} = \frac{d^4ab(a^2 - b^2)}{d^3(a^3 - b^3)} = \frac{dab(a + b)}{a^2 + ab + b^2}$$

je podľa predpokladu zo zadania celé, preto $a^2 + ab + b^2 \mid dab(a + b)$. Z nesúdeliteľnosti čísel a, b vyplýva, že $a^2 + ab + b^2$ je nesúdeliteľné s a, b aj $a + b$; prvé dve nesúdeliteľnosti sú evidentné, na dôkaz tretej môžeme použiť Euklidov algoritmus:

$$\mathrm{nsd}(a + b, a^2 + ab + b^2) = \mathrm{nsd}(a + b, a(a + b) + b^2) = \mathrm{nsd}(a + b, b^2) = 1.$$

Z toho dostávame $a^2 + ab + b^2 \mid d$. Preto $d \geqq a^2 + ab + b^2 = (a - b)^2 + 3ab > 3ab$. Takže

$$(k - m)^3 = d^3(a - b)^3 \geqq d^3 > d^2 \cdot 3ab = 3km.$$

Úloha T-1.
Po dosadení $y = 0$ dostaneme $x^2 f(0) = x^2$ pre každé reálne číslo x, preto $f(0) = 1$.

Zaveďme novú funkciu $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takú, že $g(x) = f(x) - 1$. Zadaná rovnica po prepísaní s g namiesto f prejde na tvar

$$y^2 g(x) + x^2 g(y) = xy\, g(x + y), \tag{1}$$

pričom vieme, že $g(0) = 0$.

Každá funkcia v tvare $g(x) = cx$ pre ľubovoľnú reálnu konštantu c je riešením našej rovnice. Označme $h(x) = g(x) - g(1)x$. Ukážeme, že $h(x) = 0$ pre každé reálne číslo x.

Funkcia h spĺňa pre každú dvojicu reálnych čísel x, y rovnosť

$$y^2 h(x) + x^2 h(y) = xy\, h(x + y); \tag{2}$$

navyše vieme, že $h(0) = h(1) = 0$. Po dosadení $x = y = 1$ do (2) dostaneme $h(2) = 0$, z dosadenia $x = -1$, $y = 1$ máme $h(-1) = 0$.

Predpokladajme, že existuje reálne číslo a také, že $h(a) \neq 0$ (zjavne $a \neq 0$). Dosadením $x = 1$, $y = a + 1$ do (2) dostaneme $h(a + 1) = (a + 1)h(a + 2)$. Dosadením $x = 2$, $y = a$ do (2) dostaneme $2h(a) = ah(a + 2)$. Z týchto dvoch rôznych vyjadrení hodnoty $h(a + 2)$ dostávame

$$\frac{h(a + 1)}{a + 1} = \frac{2h(a)}{a}. \tag{3}$$

Pritom z dosadenia $x = 1$, $y = a$ do (2) vyplýva, že $h(a) = ah(a + 1)$, čo spolu so vzťahom (3) dáva $a = -\frac{1}{2}$. Avšak dosadenie $x = y = -\frac{1}{2}$ do (2) nám po využití $h(-1) = 0$ prezradí, že $h(-\frac{1}{2}) = 0$, a to je spor s voľbou čísla a.

Jedinými riešeniami sú teda funkcie $f(x) = cx + 1$ pre ľubovoľné reálne číslo c; ich správnosť ľahko overíme skúškou.

Iné riešenie. Tak ako v prvom riešení zavedieme funkciu g a dokážeme, že $g(0) = 0$ a $g(-x) = -g(x)$. Po dosadení $y = 1$ a $y = -1$ do rovnice (1) dostaneme

$$g(x) + x^2 g(1) = x\, g(x + 1), \tag{4}$$

$$g(x) + x^2 g(-1) = -x\, g(x - 1). \tag{5}$$

Keď vzťah (5) prepíšeme s $x+1$ miesto x, dostaneme spolu so vzťahom (4) sústavu dvoch rovníc s neznámymi $g(x+1)$, $g(x)$. Zo sústavy vyjadríme $g(x)$:

$$g(x)(x^2+x+1) = g(1)x(x^2+x+1).$$

Keďže číslo x^2+x+1 je vždy kladné, jedinou možnosťou je $g(x) = g(1)x$ a teda $f(x) = cx+1$. Skúškou overíme, že takáto funkcia f vyhovuje pre každé reálne číslo c.

Úloha T-2.

Zaveďme substitúciu $a = 2x$, $b = 2y$, $c = 2z$. Chceme dokázať nerovnosť

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \geqq \frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}},$$

pričom platí rovnosť

$$\frac{1}{1+2x}+\frac{1}{1+2y}+\frac{1}{1+2z} = 1,$$

ktorá vyplýva zo zadanej podmienky po trojnásobnom využití vzťahu

$$\frac{2t}{1+2t} = 1-\frac{1}{1+2t}.$$

Dokazovaná nerovnosť je symetrická, preto môžeme predpokladať, že $x \geqq y \geqq z$. Ľahko nahliadneme, že

$$\frac{x-1}{2x+1} \geqq \frac{y-1}{2y+1} \geqq \frac{z-1}{2z+1}. \tag{1}$$

Taktiež platí

$$\frac{2x+1}{\sqrt{x}} \geqq \frac{2y+1}{\sqrt{y}} \geqq \frac{2z+1}{\sqrt{z}}. \tag{2}$$

Ľahko to dokážeme z ekvivalentného tvaru týchto nerovností: $(x-y)(4xy-1) \geqq 0$ a $(y-z)(4yz-1) \geqq 0$. Keby bolo $4xy < 1$, bude

$$\frac{1}{1+2x}+\frac{1}{1+2y} > 1,$$

a to by bol spor s väzbou.

Vďaka vzťahom (1) a (2) môžeme použiť Čebyševovu nerovnosť[3]:

$$\sum_{\text{cykl.}} \frac{x-1}{\sqrt{x}} = \sum_{\text{cykl.}} \left(\frac{x-1}{2x+1}\cdot\frac{2x+1}{\sqrt{x}}\right) \geqq \frac{1}{3}\sum_{\text{cykl.}} \frac{x-1}{2x+1}\sum_{\text{cykl.}} \frac{2x+1}{\sqrt{x}} = 0.$$

[3] Pod skráteným zápisom $\sum_{\text{cykl.}} V(x)$ rozumieme „cyklický“ súčet $V(x)+V(y)+V(z)$.

Iné riešenie. (Náznak.) Po substitúcii $x = 1/(a+1)$, $y = 1/(b+1)$, $z = 1/(c+1)$ platí $x + y + z = 1$ a pôvodné premenné vieme vyjadriť ako $a = (y + z)/x$, $b = (x + z)/y$, $c = (x + y)/z$. Chceme dokázať nerovnosť

$$\sqrt{\frac{x+y}{2z}} + \sqrt{\frac{y+z}{2x}} + \sqrt{\frac{z+x}{2y}} \geqq \sqrt{\frac{2x}{y+z}} + \sqrt{\frac{2y}{z+x}} + \sqrt{\frac{2z}{y+x}}.$$

Táto nerovnosť platí pre všetky trojice kladných reálnych čísel x, y, z: Spravíme substitúciu $p = x + y$, $q = y + z$, $r = z + x$. Čísla p, q, r sú potom dĺžkami strán trojuholníka a môžeme písať $p = 2R \sin\alpha$, $q = 2R \sin\beta$, $r = 2R \sin\gamma$, pričom R je polomer opísanej kružnice a $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Použitím základných vzorcov pre prácu s goniometrickými funkciami vieme ukázať, že

$$\sqrt{\frac{x+y}{2z}} = \sqrt{\frac{p}{q+r-p}} = \sqrt{\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}}.$$

Podobne sa dajú upraviť všetky členy na ľavej aj pravej strane dokazovanej nerovnosti; po ďalších ekvivalentných úpravách redukujeme úlohu na dôkaz nerovnosti

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \geqq \left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2}\right).$$

Keďže funkcia sínus je na intervale $(0, \pi)$ konkávna, podľa Jensenovej nerovnosti platí

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \leqq 3\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6} = \frac{3}{2}.$$

Na dokončenie dôkazu si stačí uvedomiť, že podľa nerovnosti medzi aritmetickým a kvadratickým priemerom platí

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} \geqq \frac{1}{3}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right)^2.$$

Úloha T-3.

Množina

$$S = (\{1\} \times \{2, \dots, n\}) \cup (\{2, \dots, n\} \times \{1\})$$

má $2n - 2$ prvkov a neobsahuje žiadne tri body tvoriace vrcholy pravouhlého trojuholníka. Ukážeme, že každá vyhovujúca množina S má najviac $2n - 2$ prvkov.

Vezmime vyhovujúcu množinu S. Označme S_x množinu tých bodov (x, y) z S, ktoré majú unikátnu x-ovú súradnicu, čiže v S nie je žiaden bod (x, y') pre $y' \neq y$. Podobne označme S_y množinu bodov z S s unikátnou y-ovou súradnicou.

Najprv sporom dokážeme, že $S = S_x \cup S_y$. Keby nejaký bod P patril do S, ale nepatril by ani do S_x, ani do S_y, tak k nemu vieme nájsť bod P_x s rovnakou x-ovou súradnicou aj bod P_y s rovnakou y-ovou súradnicou. Potom však body P, P_x, P_y tvoria pravouhlý trojuholník s pravým uhlom pri vrchole P.

Ak $|S_x| = n$, tak $S = S_x$, potom však množina S má n prvkov, a to je pre každé $n \geqq 3$ menej ako $2n - 2$. Podobne vybavíme množiny, pre ktoré $|S_y| = n$. V každom inom prípade však $|S_x| \leqq n - 1$ a $|S_y| \leqq n - 1$, teda množina S má nanajvýš $2n - 2$ prvkov.

Úloha T-4.
Jazyky budeme voliť náhodne a ukážeme, že pravdepodobnosť priaznivej voľby je kladná. Z toho potom hneď vyplýva, že existuje požadovaná voľba jazykov.

Nech $p \in [0, 1]$. Každý jazyk bude zvolený s pravdepodobnosťou p; voľby pre jednotlivé jazyky sú nezávislé. (Formálne, elementárnou udalosťou je n-tica $\omega = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, kde $a_i = 1$, ak i-ty jazyk bol zvolený, inak $a_i = 0$; pravdepodobnosť elementárnej udalosti ω je rovná $p^k(1 - p)^{n-k}$, kde k je počet jednotiek v ω.)

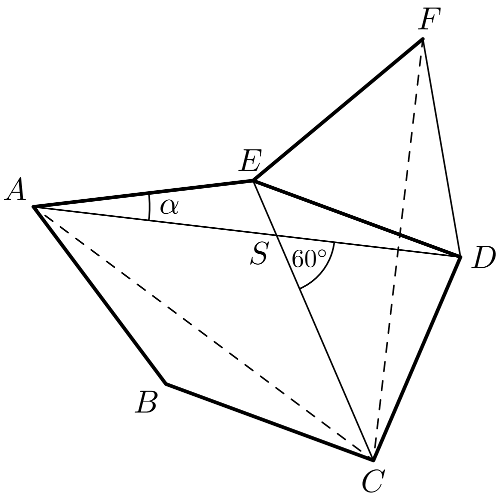
Budeme skúmať dve náhodné premenné A a B, kde A označuje počet zvolených jazykov a B počet účastníkov, ktorých všetky tri jazyky boli zvolené. Vypočítame stredné hodnoty týchto dvoch premenných.

$$E(A) = \sum_{\text{jazyk } l} 1 \cdot P(\text{zvolili sme jazyk } l) = np$$
$$E(B) = \sum_{\text{študent } s} P(\text{všetky jazyky študenta } s \text{ sú zvolené}) = 3n \cdot p^3.$$

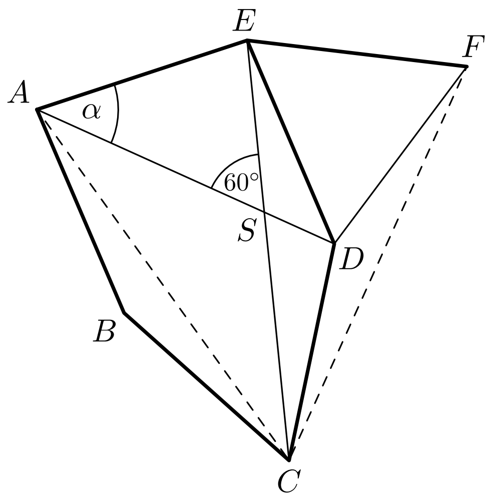
Ďalej využijeme nerovnosť
$$P(X \geqq E(X)) > 0,$$
ktorá evidentne platí pre každú náhodnú premennú X. V našom prípade pre $X = A - B$ dostávame
$$P(A - B \geqq np - 3np^3) > 0.$$

Z toho vyplýva, že existuje voľba jazykov (t. j. elementárna udalosť ω) taká, že $A(\omega) - B(\omega) \geqq np - 3np^3$. Pre túto voľbu jazykov vieme odstrániť spomedzi zvolených jazykov jeden jazyk za každého účastníka, pre ktorého boli zvolené všetky tri jazyky, ktorými hovorí, a stále ostane aspoň $A - B$ jazykov. Pre $p = \frac{1}{3}$ však $A - B \geqq \frac{2}{9}n$, a teda sme dokázali, čo sme potrebovali.

Úloha T-5.
Označme α veľkosť uhla EAD. Takú istú veľkosť má aj uhol EDA, a zo zadanej veľkosti $|\measuredangle ASE| = 60°$ ľahko dopočítame $|\measuredangle AEC| = 120° - \alpha$ a $|\measuredangle DEC| = 60° - \alpha$. Označme F obraz bodu A v osovej súmernosti podľa priamky CE. Uhol FED má veľkosť $(120° - \alpha) - (60° - \alpha) = 60°$, a keďže $|EF| = |EA| = |ED|$, je trojuholník DEF rovnostranný. Trojuholníky ABC a FDC sú teda zhodné podľa vety *sss*.



Obr. 49a



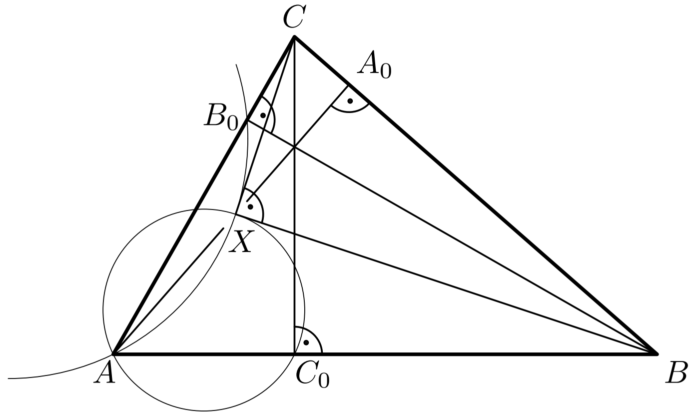
Obr. 49b

Ak sa bod D nachádza mimo trojuholníka ACF (obr. 49a), tak body B a D sú súmerné podľa priamky CE, čiže $|EB| = |ED|$ a štvoruholník $BCDE$ je kosoštvorec. Potom $BC \parallel DE$.

Ak bod D leží v trojuholníku ACF (obr. 49b), sú body C a F súmerné podľa osi AD, pretože uhly ADC aj ADF majú veľkosť $60° + \alpha$ (využili sme, že $|\measuredangle ECD| = |\measuredangle CED| = 60° - \alpha$). Potom však $|AF| = |AC|$ a trojuholníky ABC a AEF sú zhodné. Bod E musí ležať mimo trojuholníka ACF, inak by päťuholník $ABCDE$ nebol konvexný, čo je v rozpore so zadaním. Zo zhodnosti trojuholníkov ABC a AEF potom vyplýva, že body B a E sú súmerné podľa priamky AD. Preto $|DB| = |DE|$, čiže štvoruholník $ABDE$ je kosoštvorec a platí $AB \parallel DE$.

Úloha T-6.

Dotyk priamky s kružnicou vieme popísať pomocou mocnosti bodu ku kružnici. V našom prípade z mocnosti bodu B ku kružnici opísanej trojuholníku AXC_0 dostaneme $|BX|^2 = |BA| \cdot |BC_0|$. Podobne $|CX|^2 = |CA| \cdot |CB_0|$. Označme A_0 pätu výšky



Obr. 50

z vrcholu A. Štvoruholník ACA_0C_0 je tetivový, preto pre mocnosť bodu B k jemu opísanej kružnici platí $|BA| \cdot |BC_0| = |BA_0| \cdot |BC|$; podobne dostaneme $|CA| \cdot |CB_0| = |CA_0| \cdot |CB|$. Celkovo dostávame

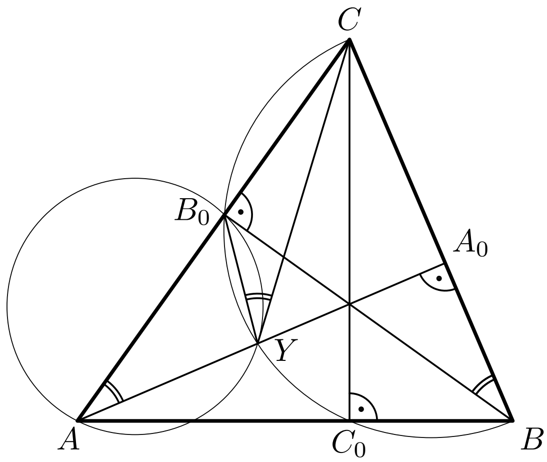
$$|BX|^2 + |CX|^2 = |BA| \cdot |BC_0| + |CA| \cdot |CB_0| = |BA_0| \cdot |BC| + |CA_0| \cdot |BC| = |BC|^2,$$

čiže uhol BXC je pravý (obr. 50). Okrem toho platí $|BX|^2 = |BA_0| \cdot |BC|$ a preto z Euklidovej vety o odvesne v pravouhlom trojuholníku BXC vyplýva, že bod A_0 je pätou výšky z vrcholu X na preponu BC. Inak povedané, priamky AA_0 a XA_0 sú totožné, preto je priamka AX kolmá na priamku BC.

Iné riešenie. Z mocnosti bodu ku kružnici dostávame

$$|BX|^2 = |BA| \cdot |BC_0|, \qquad |CX|^2 = |CA| \cdot |CB_0|.$$

Pre daný trojuholník ABC tieto rovnosti jednoznačne určujú vzdialenosti bodu X od bodov B a C. Do úvahy teda prichádzajú len dva možné body X, avšak jeden z nich vždy leží mimo trojuholníka ABC. Preto je bod X pre daný trojuholník ABC jediný. Ukážeme, že tento bod X je totožný s bodom Y, ktorý je priesečníkom Tálesovej kružnice nad priemerom BC a výšky trojuholníka ABC z vrcholu A. To zjavne bude stačiť na dôkaz zadaného tvrdenia.



Obr. 51

Štvoruholník BCB_0Y je tetivový, preto $|\measuredangle CBB_0| = |\measuredangle CYB_0|$. Potom $|\measuredangle CAY| = 90° - |\measuredangle ACB| = |\measuredangle CBB_0| = |\measuredangle CYB_0|$, a podľa vety o úsekovom uhle sa priamka CY dotýka kružnice opísanej trojuholníku AYB_0 (obr. 51). Analogicky vieme ukázať, že sa priamka BY dotýka kružnice opísanej trojuholníku AYC_0, a teda $X = Y$.

Úloha T-7.
Stačí ukázať, že existujú $a \in A$ a $b \in B$ také, že $a \equiv 2b \pmod{11}$, pretože pre takéto a, b platí

$$a^3 + ab^2 + b^3 \equiv 8b^3 + 2b^3 + b^3 \equiv 0 \pmod{11}.$$

Predpokladajme, že k nejakému $b \in B$ množina A neobsahuje žiadne vyhovujúce a. Potom však číslo so zvyškom $2b$ po delení 11 musí byť v množine B (využívame, že ak b nie je deliteľné 11, ani jeho dvojnásobok nebude). Ak ani k $2b$ nevieme nájsť vyhovujúce $a \in A$, tak aj číslo so zvyškom $4b$ je v B. A tak ďalej, postupne dôjdeme k záveru, že čísla so zvyškami b, $2b$, $4b$, …, 2^9b sú všetky v B. Tieto čísla však dávajú navzájom rôzne zvyšky po delení 11 a preto množina B obsahuje 10 čísel. Potom však množina A je prázdna, a to je spor s predpokladom zo zadania.

Úloha T-8.
Zvoľme najprv čísla x_1, x_2, …, x_{2011} tak, aby čísla

$$y_1 = x_1^2(x_1+2), \quad y_2 = x_2^2(x_2+2), \quad \dots, \quad y_{2011} = x_{2011}^2(x_{2011}+2)$$

boli navzájom nesúdeliteľné. Môžeme zvoliť napríklad $x_1 = 1$ a $x_i = y_1y_2\dots y_{i-1} - 1$ postupne pre každé $i \in \{2, 3, \dots, 2011\}$. Takto zvolené číslo x_i zabezpečí, že y_i je nesúdeliteľné s y_1, y_2, …, y_{i-1}.

Podstata našej voľby čísel x_i spočíva v tom, že každé číslo deliteľné číslom v tvare $x^2(x+2)$ je úžasné. Naozaj, ak $n = x^2(x+2)m$, tak $n = \mathrm{nsd}(b,c)\cdot\mathrm{nsd}(a,bc)+\mathrm{nsd}(c,a)\cdot$ $\cdot\,\mathrm{nsd}(b,ca)+\mathrm{nsd}(a,b)\cdot\mathrm{nsd}(c,ab)$ pre $a = mx^2$, $b = mx$, $c = x$.

Keďže čísla y_1, y_2, …, y_{2011} sú navzájom nesúdeliteľné, podľa čínskej zvyškovej vety existuje kladné celé číslo k také, že

$$k \equiv -i \pmod{y_i} \qquad \text{pre každé} \quad i \in \{1, 2, \dots, 2011\}.$$

Preto číslo $k+i$ je deliteľné číslom y_i pre každé $i \in \{1, 2, \dots, 2011\}$. Takže čísla $k+1$, $k+2$, …, $k+2011$ sú všetky úžasné a tvoria hľadaných 2011 po sebe idúcich úžasných čísel.

Korešpondenčný seminár SKMO

Korešpondenčný seminár Slovenskej komisie Matematickej olympiády (KS SKMO) vznikol ako jeden z prvých matematických korešpondenčných seminárov (vtedy ešte ako československý seminár) preto, aby bolo umožnené venovať individuálnu starostlivosť aj tým študentom, ktorí nenavštevovali triedy so zameraním na matematiku. Úlohy tohto seminára svojou náročnosťou prevyšujú akúkoľvek inú matematickú súťaž na Slovensku pre stredoškolákov, seminár je preto dôležitou súčasťou prípravy aj na medzinárodnú matematickú olympiádu.

Počas svojej existencie prešiel seminár viacerými zmenami. Od 53. ročníka MO jeho organizovanie prebrali vedúci korešpondenčného seminára KMS a odvtedy bol KS SKMO jeho kategóriou GAMA a KMS sa stal oficiálnym seminárom SKMO. V posledných rokoch však kategória GAMA mala len málo pravidelných riešiteľov, z ktorých istú časť tvorili aj študenti z ČR. Tento fakt bol jedným z motívov na zmenu organizácie seminára KS SKMO: od 61. ročníka MO je organizovaný v spolupráci vedúcich KMS s vedúcimi českého korešpondenčného seminára sídliaceho v Prahe na MFF UK a pod menom *i*KS je prezentovaný ako medzinárodný seminár. Zmenila sa tiež štruktúra jeho úloh.

V tomto roku teda mal KS SKMO posledný raz štruktúru, ktorá bola zavedená v školskom roku 2003/2004: za rok šesť sérií (tri zimné prebiehajúce od septembra do decembra a tri letné prebiehajúce od februára do mája), v každej sérii 5 úloh.

Celkové poradie KS SK MO 2010/2011

1. *Martin Vodička*, 2. ročník, Gymnázium Alejová, Košice, 164 bodov
2. *Anh Dung Le*, 1. ročník, Gymnázium Tachov, ČR, 106 bodov
3. *Matej Balog*, 4. ročník, Gymnázium Grösslingová, Bratislava, 76 bodov
4. *Josef Svoboda*, 2. ročník, Gymnázium Frýdlant, ČR, 69 bodov
5. *Dominik Csiba*, 4. ročník, ŠpMNDaG Skalická, Bratislava, 62 bodov

Uvádzame všetky príklady tohto ročníka súťaže spolu s riešeniami. Príklady boli vyberané z národných olympiád či iných súťaží.

Zadania súťažných úloh KS SKMO

Prvá séria

1.1 Nájdite všetky konečné postupnosti nezáporných celých čísel s nasledujúcou vlastnosťou. Označme členy postupnosti $x_0, x_1, \dots, x_n$, pričom $n \geqq 0$. Pre všetky j ($0 \leqq j \leqq n$) platí, že x_j vyjadruje počet výskytov čísla j v tejto postupnosti. (*návrhy na IMO, 2001*)

1.2 V 40 hrncoch bolo (nerovnomerne) porozlievané cesto na palacinky. Hanka sa rozhodla, že hladinu cesta v hrncoch bude vyrovnávať nasledovným spôsobom. Zobrala vždy n hrncov a poprelievala medzi nimi cesto tak, aby vo všetkých n hrncoch bolo rovnako veľa cesta. Toto opakovala dovtedy, kým nebola vo všetkých 40 hrncoch rovnaká hladina cesta. Aké najmenšia môže byť hodnota n, aby sa Hanke podarilo vyrovnať hladiny bez ohľadu na počiatočné rozloženie cesta v hrncoch?

1.3 V trojuholníku ABC sa vpísaná kružnica dotýka strán AB, BC, CA postupne v bodoch K, L, M. Dokážte, že priesečník výšok trojuholníka KLM, stred vpísanej kružnice trojuholníka ABC a stred opísanej kružnice trojuholníka ABC ležia na jednej priamke. (*Irán, 1995*)

1.4 Prvočíslo p dáva zvyšok jedna po delení štyrmi. Zjednodušte výraz

$$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left\{ \frac{k^2}{p} \right\}.$$

Symbolom $\{x\}$ označujeme desatinnú časť čísla x, t. j. $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, kde $\lfloor x \rfloor$ je dolná celá časť čísla x. (*Hongkong, 2002*)

1.5 Kladné reálne čísla a, b, c, x, y, z spĺňajú vzťahy $cy + bz = a$, $az + cx = b$, $bx + ay = c$. Určte minimálnu hodnotu výrazu

$$\frac{x^2}{x+1} + \frac{y^2}{y+1} + \frac{z^2}{z+1}.$$

(*Čína, 2005*)

Druhá séria

2.1 Daný je trojuholník ABC a jeho vnútorný bod P taký, že $|\measuredangle BPC| = 90°$ a $|\measuredangle BAP| = |\measuredangle BCP|$. Označme M a N postupne stredy strán AC a BC. Predpokladajme, že $|BP| = 2|PM|$. Dokážte, že body A, P a N ležia na jednej priamke. (*India, 2009*)

2.2 V trojuholníku BUS sú body K a L postupne stredmi strán US a BS. Bod P leží vnútri trojuholníka BUS tak, že uhly UBP, PSB a KBS majú rovnakú veľkosť. Dokážte, že uhly PLB a BKU majú rovnakú veľkosť.
(*Ukrajina, 2009*)

2.3 Definujme vzdialenosť dvoch kruhov v rovine ako reálne číslo, ktoré vznikne odčítaním polomerov oboch kruhov od vzdialenosti ich stredov. V rovine je daných n bodov, pričom $n \geqq 1$. Dokážte, že vždy vieme nájsť konečne veľa kruhov, ktoré pokryjú všetkých n bodov, navyše je súčet ich priemerov menší ako n a vzdialenosť ľubovoľných dvoch z nich je väčšia ako 1. (*Čína*)

2.4 Postupnosť reálnych čísel $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ spĺňa $1 < a_1 < 2$ a pre každé prirodzené k platí $a_{k+1} = a_k + k/a_k$. Dokážte, že existuje najviac jedna taká dvojica (i, j), že $i < j$ a zároveň $a_i + a_j$ je celé číslo. (*Rusko*)

2.5 Množina X má 56 prvkov. Nájdite najmenšie prirodzené n také, že platí nasledovné tvrdenie: Ak vyberieme ľubovoľných 15 podmnožín X takých, že počet prvkov zjednotenia ľubovoľných sedem z nich je aspoň n, tak z týchto 15 podmnožín vždy vieme vybrať tri s neprázdnym prienikom. (*Čína, 2006*)

Tretia séria

3.1 Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spĺňajúce

$$f(x^2 + yf(z)) = xf(x) + zf(y)$$

pre ľubovoľné reálne čísla x, y, z.

3.2 Nech $n \geqq 2$ a k sú prirodzené čísla. V rovine umiestnime n kružníc tak, že každé dve kružnice sa pretínajú práve v dvoch rôznych bodoch a žiadne tri kružnice sa nepretínajú v jednom bode. Každý priesečník musí byť ofarbený práve jednou z n rôznych farieb. Každá z n farieb musí byť použitá aspoň raz a na každej kružnici môžu ležať len priesečníky práve k rôznych farieb. Nájdite všetky dvojice (n, k), pre ktoré existuje takéto rozmiestnenie a ofarbenie kružníc.
(*návrhy na IMO, 2004*)

3.3 Všetky hrany v kvádri K majú v metroch prvočíselnú dĺžku. Jeho povrch vyjadrený v metroch štvorcových je mocnina prvočísla. Dokážte, že práve jedna z troch dĺžok hrán kvádra K je tvaru $2^m - 1$ metrov, kde m je prirodzené číslo. (*KöMaL*)

3.4 Súčet obsahov konečného počtu štvorcov je $4\,\mathrm{m}^2$. Ukážte, že tieto štvorce vieme umiestniť v rovine tak, aby dohromady pokryli štvorec so stranou $1\,\mathrm{m}$. Štvorce sa môžu aj prekrývať. (*Brazília, 2002*)

3.5 Nech O je bod vnútri trojuholníka ABC taký, že uhly AOB, BOC a COA majú rovnakú veľkosť. Dokážte, že

$$\frac{|AO|^2}{|BC|} + \frac{|BO|^2}{|CA|} + \frac{|CO|^2}{|AB|} \geqq \frac{|AO| + |BO| + |CO|}{\sqrt{3}}.$$

(*Ukrajina, 2009*)

Štvrtá séria

4.1 Rozhodnite, či pre pre každé prvočíslo p a prirodzené číslo k existuje také prirodzené číslo t, že číslo p^t má niekde v desiatkovom zápise aspoň k núl za sebou. (*www.artofproblemsolving.com*)

4.2 Daná je postupnosť nezáporných celých čísel a_1, a_2, $\ldots$, a_{2011}. Pre každé prirodzené i, j také, že $i + j \leqq 2011$, platí

$$a_i + a_j \leqq a_{i+j} \leqq a_i + a_j + 1.$$

Dokážte, že existuje nekonečne veľa reálnych čísel x, pre ktoré platí $a_n = \lfloor nx \rfloor$ pre všetky $n = 1, 2, \ldots, 2011$. (*www.artofproblemsolving.com*)

4.3 Označme K, L, M, N štyri body v trojrozmernom priestore. Dokážte, že

$$|KL|^2 + |MN|^2 \leqq |KM|^2 + |LN|^2 + |KN|^2 + |LM|^2.$$

(*USA, 1975*)

4.4 Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré sa trojuholník dá rozrezať na n menších trojuholníkov tak, že žiadne tri z vrcholov (vrátane pôvodných troch) neležia na jednej priamke a zároveň každý vrchol patrí rovnakému počtu z $n+1$

oblastí, ktoré vznikli (n menších trojuholníkov a vonkajšia oblasť).

(*Brazília, 2004*)

4.5 Kružnice k_1 a k_2 so stredmi S_1 a S_2 sa navzájom dotýkajú zvonka v bode D. Kružnice k_1, k_2 sa navyše zvnútra dotýkajú kružnice k postupne v bodoch E_1, E_2. Priamka t je spoločná dotyčnica kružníc k_1, k_2 v bode D. Nech AB je priemer k kolmý na t taký, že body A, S_1, E_1 ležia v tej istej polrovine vyťatej priamkou t. Dokážte, že priamky AS_1, BS_2, E_1E_2 a t sa pretínajú v jednom bode. (*návrhy na IMO, 2006*)

PIATA SÉRIA

5.1 Daná je kružnica k a bod A ležiaci mimo nej. Pre rovnostranný trojuholník PQR vpísaný do kružnice k označíme U, V, W postupne priesečníky priamok AP, AQ, AR s kružnicou k rôzne od P, Q, R. Dokážte, že hodnota výrazu

$$\frac{|AP|}{|AU|} + \frac{|AQ|}{|AV|} + \frac{|AR|}{|AW|}$$

nezávisí od polohy trojuholníka PQR.

(*D. Monk: New Problems in Euclidean Geometry*)

5.2 Daný je trojuholník ABC. Označme k vpísanú kružnicu trojuholníka ABC a I jej stred. Nech p je priamka dotýkajúca sa kružnice k v bode L tak, že p nie je rovnobežná so žiadnou stranou trojuholníka ABC. Nech A' je bod na p, pre ktorý je uhol AIA' pravý. Podobne určíme body B' a C'. Dokážte, že priamky AA', BB' a CC' sa pretínajú v jednom bode.

5.3 Nech a, b, c sú kladné reálne čísla spĺňajúce $a + b + c = abc$. Dokážte, že

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leqq \frac{3}{2}$$

a zistite, kedy nastáva rovnosť. (*Južná Kórea, 1998*)

5.4 Nech $n > 2$ je prirodzené číslo a A_n je množina tých neprázdnych podmnožín množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, ktoré majú aritmetický priemer svojich prvkov celé číslo. Dokážte, že $|A_n| - n$ je párne číslo. (*Putnam*)

5.5 Funkcia f je definovaná na prirodzených číslach predpisom

$$f(n) = \frac{1}{n}\left(\left\lfloor\frac{n}{1}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + \ldots + \left\lfloor\frac{n}{n}\right\rfloor\right).$$

a) Dokážte, že $f(n+1) > f(n)$ platí pre nekonečne veľa hodnôt n.
b) Dokážte, že $f(n+1) < f(n)$ platí pre nekonečne veľa hodnôt n.

(*návrhy na IMO, 2006*)

Šiesta séria

6.1 Na každej strane rovnostranného trojuholníka T označíme 5 bodov tak, že týchto 5 bodov rozdelí stranu na 6 rovnakých častí. Takto určených 15 bodov pospájame úsečkami rovnobežnými so stranami trojuholníka T. Týmito úsečkami sme trojuholník T rozdelili na 36 malých rovnostranných trojuholníkov. Na každý z 28 vrcholov malých trojuholníkov položíme práve jednu žabu. V každej sekunde každá žaba skočí na susedný vrchol. Navyše vieme, že ak zoberieme tri pozície ľubovoľnej žaby za sebou (v časoch t, $t+1$ a $t+2$), tak tieto pozície neležia na jednej priamke (takže žaba sa nemôže vracať, ani pokračovať vo svojom smere). Dokážte, že v nejakom čase budú nejaké dve žaby v rovnakom vrchole.

6.2 Nech a, b, c sú kladné reálne čísla. Dokážte, že

$$\frac{a}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{b}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{c}{2c^2+a^2+b^2} \leqq \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

(*Ukrajina, 2009*)

6.3 Neprázdna množina M má n prvkov. Označme $\mathcal{P}(M)$ množinu všetkých podmnožín množiny M. Ďalej nech $f\colon \mathcal{P}(M) \to \mathbb{R}$ je funkcia, ktorá má nasledujúce vlastnosti:
(i) $f(M-A) = f(A)$,
(ii) $f(A \cup B) \leqq \max\{f(A), f(B)\}$ pre všetky $A, B \in \mathcal{P}(M)$.
Dokážte, že funkcia f môže nadobúdať maximálne n rôznych hodnôt.

(*MSC, 2001*)

6.4 Nech $EFGH$, $ABCD$, $E_1F_1G_1H_1$ sú tri konvexné štvoruholníky zároveň spĺňajúce obe nasledujúce podmienky:
(i) Body E, F, G, H ležia postupne na stranách AB, BC, CD, DA tak, že platí

$$\frac{|AE|}{|EB|}\cdot\frac{|BF|}{|FC|}\cdot\frac{|CG|}{|GD|}\cdot\frac{|DH|}{|HA|}=1.$$

(ii) Body A, B, C, D ležia postupne na stranách H_1E_1, E_1F_1, F_1G_1, G_1H_1. Navyše $EF \parallel E_1F_1$, $FG \parallel F_1G_1$, $GH \parallel G_1H_1$, $HE \parallel H_1E_1$.

Označme $f = |E_1A|/|AH_1|$. Vyjadrite pomer $|F_1C|/|CG_1|$ ako funkciu premennej f.

(*Macao, 2004*)

6.5 Pre dané kladné reálne čísla r a s nájdite všetky funkcie $f\colon \langle 0, \infty) \to \langle 0, \infty)$, pre ktoré platí

$$s(r+s)x = rf(x) + f(f(x))$$

pre všetky $x \in \langle 0, \infty)$. (*návrhy na IMO, 1992*)

Riešenia súťažných úloh KS SK MO

Prvá séria

1.1

Postupnosť zo zadania má $n+1$ členov. Skúsme dosadiť za x_0 číslo nula. V postupnosti je teraz aspoň jedna nula. Platí teda $x_0 \geqq 1$. Dostávame spor s tým, že $x_0 = 0$, preto $x_0 \geqq 1$. Člen postupnosti x_i vraví, koľkokrát sa v postupnosti vyskytne i. Členov postupnosti je $n+1$, preto $x_0 + x_1 + \cdots + x_n = n+1$. Uvedený vzťah môžeme upraviť na tvar

$$\sum_{i=0}^{n}(x_i - 1) = 0. \tag{1}$$

Rozdeľme čísla v postupnosti na tri množiny: V množine A bude číslo x_0. V množine B budú všetky čísla x_i, ktoré sú rovné nule. Vyššie sme ukázali, že $x_0 \notin B$. V množine C budú všetky čísla z postupnosti, ktoré nie sú v množine A ani v množine B.

Pre veľkosť množiny B platí $|B| = x_0$. Rovnicu (1) teraz môžeme rozpísať nasledovne:

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{i=0}^{n}(x_i - 1) &= (x_0 - 1) + \sum_{x_i \in B}(x_i - 1) + \sum_{x_j \in C}(x_j - 1) = \\ &= (x_0 - 1) + (-1) \cdot x_0 + \sum_{x_j \in C}(x_j - 1). \end{aligned}$$

V druhom riadku sme využili vlastnosť množiny B, že súčet jej prvkov je nula. Pre prvky množiny C teda dostaneme

$$\sum_{\forall j,\, x_j \in C}(x_j - 1) = 1.$$

Všetky prvky v množine C sú kladné celé čísla. Preto pre každý jej prvok x_j platí nerovnosť $x_j - 1 \geqq 0$. V množine C sa teda nachádza práve jedna dvojka a okrem nej niekoľko jednotiek. (Rozmyslite si, prečo.) Inak povedané, pre všetky $i \geqq 1$ je $x_i \in \{0, 1, 2\}$. Poďme teraz preskúmať, akému číslu sa môže rovnať prvý člen postupnosti x_0.

Ak $x_0 = 1$, potom $x_1 \neq 0$. Člen x_1 sa nemôže rovnať číslu 1, lebo potom by sme mali v postupnosti už dve jednotky (x_0 a x_1). V množine C sú len jednotky a jedna dvojka, preto na výber x_1 máme jedinú možnosť $x_1 = 2$. Potom nutne $x_3 = 0$. Dostávame prvé riešenie: postupnosť 1, 2, 1, 0.

Ak $x_0 = 2$, potom $x_2 = 2$, lebo práve jedna dvojka je v množine C a jedna je x_0. Ak $x_1 = 0$, tak dostávame ďalšie riešenie: štvorprvkovú postupnosť 2, 0, 2, 0. Ak $x_1 = 1$, tak dostávame riešenie 2, 1, 2, 0, 0.

Ak $x_0 = k$, $k \geqq 3$, potom pre $i \geqq 2$ platí $x_i < 2$, lebo inak by v C boli aspoň dve čísla väčšie ako 2. Jediný člen, ktorý môže byť 2, je x_1. Potom $x_2 = 1$. Prvé tri členy postupnosti po poradí sú k, 2 a 1. Člen x_k sa musí rovnať 1, lebo $x_0 = k$. Zvyšné členy postupnosti sú nulové. Výsledná postupnosť je potom k, 2, 1, 0, 0, ..., 0, 1, 0, 0, 0 (s $k-3$ nulami medzi dvoma jednotkami).

Spolu sme teda našli nasledovné riešenia:

$$(1,2,1,0),\quad (2,0,2,0),\quad (2,1,2,0,0),\quad (k,\ 2,\ 1,\ \underbrace{0,\ \ldots,\ 0}_{k-3 \text{ núl}},\ 1,\ 0,\ 0,\ 0),\ \text{pričom } k \geqq 3.$$

1.2

Skúsime nájsť akékoľvek n, ktoré vyhovuje a následne hľadať menšie. Úplne triviálne je $n = 40$, keď Hanka vyrovná všetky hladiny naraz. Podarí sa to aj pre $n = 20$: Hanka vie vytvoriť dve skupinky po 20 s rovnakým objemom, potom zobrať 10 z jednej a 10 z druhej skupiny a vyrovnať tieto. Napokon zoberie zvyšné z jednej aj z druhej skupiny a aj tie vyrovná. Takto dostane všade rovnako veľa cesta. Obdobným spôsobom vie pre $n = 10$ dostať 20 hrncov s rovnakým objemom a následne vyrovnávať dve (už vyrovnané) dvadsatice vyberaním piatich hrncov z každej.

Dokážeme, že pre $n < 10$ objemy v hrncoch vždy vyrovnať nemožno. Predstavme si, že v jednom hrnci je cesto inej farby, jeho množstvo označme a litrov. Budeme sledovať, koľko ho bude v jednotlivých hrncoch po niekoľkých preliatiach. Pod prelievaním rozumieme, že do každého zo zúčastnených hrncov nalejeme n-tinu z každého zo zúčastnených hrncov. Označme množstvo cesta inej farby v zúčastnených hrncoch h_1a, h_2a, ..., h_na. Po preliatí bude v každom z nich n-tina z každého:

$$\frac{h_1a}{n} + \frac{h_2a}{n} + \ldots + \frac{h_na}{n} = \frac{h_1 + h_2 + \ldots + h_n}{n}a.$$

Všimnime si, že na začiatku sme mali v jednom hrnci $1 \cdot a$ a v ostatných $0 \cdot a$ litrov inej farby. Koeficienty pred a boli racionálne. Pri každom preliatí ich len sčítame a vydelíme n, čiže racionálnymi aj zostanú. Dosaďme teda všade $h_i = p_i/q_i$:

$$\frac{h_1 + h_2 + \cdots + h_n}{n}a = \frac{\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} + \cdots + \frac{p_n}{q_n}}{n}a = \frac{\frac{V}{q_1q_2\cdots q_n}}{n}a = \frac{V}{q_1q_2\ldots q_n \cdot n}a.$$

Na začiatku máme koeficienty $\frac{1}{1}a$ a $\frac{0}{1}a$. V menovateli je teda 1, čo je očividne mocnina n (na nultú). Do menovateľa sa pri prelievaní dostane súčin menovateľov zúčastnených hrncov vynásobený n. Ak boli predtým všetky menovatele mocninou n, budú aj potom. A keďže na začiatku boli, tak budú aj po každom ďalšom preliatí. Teda na konci bude v každom hrnci $\frac{b}{n^k} \cdot a$ litrov inej farby pre nejaké celé nezáporné čísla b, k.

Na dokázanie, že minimum je $n = 10$, je dobré zobrať nejaké špeciálne rozloženie na začiatku. Skúmali sme, čo sa stane s cestom z jedného hrnca. Jeden by sa teda mohol od ostatných líšiť – napríklad byť iracionálny. Jednoduchšie však je dať do jedného hrnca 1 liter a ostatné nechať prázdne. Do každého sa teda musí dostať $\frac{1}{40}$ z toho jedného. Teda

$$\frac{b}{n^k} \cdot 1 = \frac{1}{40} \cdot 1, \qquad \text{čiže} \quad 40b = n^k.$$

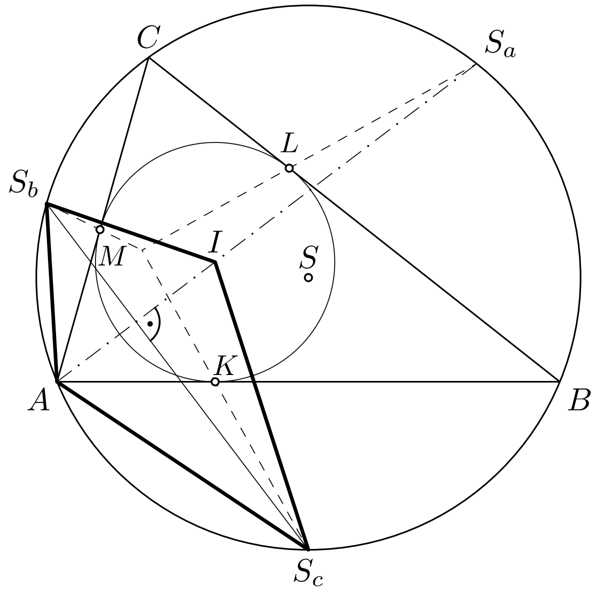
Z toho máme $40 \mid n^k$, čo znamená, že v rozklade n na prvočísla musia byť prvočísla z rozkladu čísla 40, t. j. 2 a 5. Najmenším takým číslom je $n = 10$.

1.3

(Podľa *Josefa Svobodu.*) Označme H priesečník výšok trojuholníka KLM, I stred kružnice vpísanej do ABC a S stred kružnice opísanej trojuholníku ABC. Stredy oblúkov AB, BC, CA kružnice opísanej, na ktorých neležia postupne body C, A, B, označme S_c, S_a, S_b. V nasledujúcom texte ukážeme pravdivosť nasledujúceho tvrdenia: Rovnoľahlosť, ktorá zobrazuje vpísanú kružnicu na opísanú kružnicu, zobrazuje (i) I na S a (ii) H na I. (Existujú dve také rovnoľahlosti.)

Ak toto tvrdenie platí, tak I, S a H ležia na jednej priamke, čo chceme dokázať.

Časť (i) je zrejmá, lebo stred kružnice sa zobrazí na stred druhej kružnice. Zaoberajme sa preto už len časťou (ii). Najprv si uvedomme, kam sa zobrazí trojuholník KLM. Dotyčnica opísanej kružnice rovnobežná s AB sa dotýka tejto kružnice v bode S_c. Preto sa bod K (ako bod dotyku dotyčnice AB s kružnicou vpísanou) zobrazí na S_c. Rovnako sa zobrazia body L na S_a a M na S_b. Takže obrazom trojuholníka KLM je trojuholník $S_cS_aS_b$.



Obr. 52

Keďže rovnoľahlosť zachováva ortocentrum trojuholníkov, stačí ukázať, že ortocentrum trojuholníka $S_aS_bS_c$ je I. Ako vieme, stredy oblúkov opísanej kružnice ležia na osiach uhlov trojuholníka ABC. Takže S_a, I, A ležia na jednej priamke (podobne pre B a C). Stačí teda dokázať, že $AI \perp S_bS_c$ (podobne pre BI, CI). Na to použijeme ďalšiu známu vlastnosť stredov oblúkov kružnice opísanej (obr. 52):

$$|S_aB| = |S_aC| = |S_aI|, \quad |S_bA| = |S_bC| = |S_bI|, \quad |S_cA| = |S_cB| = |S_cI|.$$

Z toho vyplýva, že AS_bIS_c je deltoid (dve a dve strany sú rovnaké). Deltoidy majú uhlopriečky na seba kolmé, a preto $AI \perp S_bS_c$ a podobne platí $BI \perp S_aS_c$ a $CI \perp$ $\perp S_aS_b$.

1.4

(Podľa *Anh Dung Le.*) Najprv si všimnime, že $(-k)^2 \equiv (p-k)^2 \equiv k^2 \pmod p$. Taktiež ak $x^2 \equiv y^2 \pmod p$, pričom $1 \leqq x, y \leqq \frac{p-1}{2}$, tak $(x-y)(x+y) \equiv 0 \pmod p$. Ale $1 < x+y < p$, a preto $x = y$. Z týchto úvah vyplýva, že medzi číslami

$$\left\{1^2,\ 2^2,\ \dots,\ \left(\frac{p-1}{2}\right)^2\right\} \tag{1}$$

sa nachádzajú všetky kvadratické zvyšky modulo p. Navyše vieme, že všetkých spomínaných $\frac{1}{2}(p-1)$ čísel dáva rôzne zvyšky po delení p.

Podľa Eulerovho kritéria pre $p \equiv 1 \pmod 4$ máme[4]

$$\left(\tfrac{-1}{p}\right) \equiv (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} = 1 \pmod p,$$

a hneď dostávame, že -1 je kvadratický zvyšok. Keďže $\left(\frac{-b}{p}\right) \equiv \left(\frac{-1}{p}\right)\cdot\left(\frac{b}{p}\right)$, je b kvadratický zvyšok práve vtedy, keď $-b \equiv p-b \pmod p$. Preto množina (1) sa skladá z párov $\{a_1, p-a_1, a_2, p-a_2, \dots, a_{\frac{1}{4}(p-1)}, p-a_{\frac{1}{4}(p-1)}\}$ modulo p.

Napokon keďže $1 < a_l$ a $p - a_l < p$, tak

$$\left\{\frac{a_l}{p}\right\} + \left\{\frac{p-a_l}{p}\right\} = \frac{a_l + p - a_l}{p} = 1$$

a hľadaný súčet je $\frac{1}{4}(p-1)$.

1.5

(Podľa *Anh Dung Le* a *Josefa Svobodu.*) Zadaná väzba má tvar sústavy troch lineárnych rovníc s tromi kladnými reálnymi neznámymi x, y, z a tromi kladnými reálnymi parametrami a, b, c. Z tejto sústavy možno triviálne vyjadriť

$$x = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \quad y = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \quad z = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Podľa zadania $x, y, z > 0$, a teda aj $b^2+c^2-a^2 > 0$.

---

[4] V riešení používame tzv. Legendreov symbol, teda výraz $\left(\frac{a}{p}\right)$, pričom a je celé číslo a p je nepárne prvočíslo. Nadobúda hodnoty 0, 1, -1 podľa toho, či a je násobkom p, alebo a je nenulový kvadratický zvyšok, alebo a nie je kvadratický zvyšok.

Keď odvodené vzťahy dosadíme do zadaného výrazu, tak triviálnymi úpravami výrazov, kde používame iba štandardnú úpravu zlomkov, postupne dostávame[5]

$$\sum_{\text{cykl.}} \frac{\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2}{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+1} = \sum_{\text{cykl.}} \frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{2bc(b^2+c^2-a^2)+4b^2c^2}.$$

Takýto výraz sa ťažko odhaduje nejakou konštantou (čo nakoniec vlastne chceme), preto ho skúsme odhadnúť niečím iným. Z Cauchyho-Schwarzovej nerovnosti máme

$$\left(\frac{e}{k}+\frac{f}{l}+\frac{g}{m}\right)(k+l+m) \geqq (\sqrt{e}+\sqrt{f}+\sqrt{g})^2 \tag{1}$$

pre $e, f, g, k, l, m > 0$. Keďže v našej situácii máme kladné čitatele aj menovatele, môžeme (1) použiť a dostaneme

$$\sum_{\text{cykl.}} \frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{2bc(b^2+c^2-a^2)+4b^2c^2} \geqq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\sum_{\text{cykl.}} 2bc(b^2+c^2-a^2)+4b^2c^2}. \tag{2}$$

Tým sa nám podarilo z troch zlomkov spraviť jeden. Chceme zistiť jeho minimum. často sa stáva, že sa nadobúda pri rovnosti všetkých premenných. Keď do pôvodného výrazu dosadíme $a = b = c = 1$, čomu prislúchajú $x = y = z = \frac{1}{2}$, dostaneme výsledok $\frac{1}{2}$, teda túto hodnotu výraz naozaj nadobúda. Skúsme teraz dokázať, že zlomok na pravej strane v (2) je vždy väčší rovný $\frac{1}{2}$ a budeme hotoví. Po prenásobení menovateľom redukujeme úlohu na nerovnosť

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geqq \frac{1}{2}\sum_{\text{cykl.}} 2bc(b^2+c^2-a^2)+4b^2c^2,$$

ktorá je ekvivalentná s

$$a^4+b^4+c^4-a^3b-ab^3-b^3c-bc^3-c^3a-ca^3+a^2bc+ab^2c+abc^2 \geqq 0.$$

Posledná nerovnosť je špeciálny prípad známej Schurovej nerovnosti pre $k = 2$.

Druhá séria

2.1

Bod P spĺňajúci podmienky zo zadania vo všeobecnosti nemusí vôbec existovať – dá sa nájsť len v niektorých špeciálnych trojuholníkoch. (Príkladom je trojuholník so stranami

[5] Pod skráteným zápisom $\sum_{\text{cykl.}} V(a,b,c)$ rozumieme „cyklický“ súčet $V(a,b,c)+V(b,c,a)+V(c,a,b)$.

$|AB| = 6$, $|BC| = 8$ a $|AC| = \sqrt{46}$. Bod P je umiestnený v tomto trojuholníku tak, že $|AP| = 1$ a $|CP| = 6$.)

Všimnime si, že bod N dosť málo súvisí so zvyškom obrázka a vieme sa ho ľahko zbaviť. Je pre nás vlastne zaujímavý len z jediného dôvodu – potrebujeme dokázať, že leží na priamke AP. To je ekvivalentné tvrdeniu, že uhol APN je priamy. Označme α veľkosti uhlov BAP a BCP, ktoré sú podľa zadania rovnaké. Z pravouhlého trojuholníka CPB vieme, že aj $|\measuredangle CPN| = \alpha$, teda dokazované tvrdenie je ekvivalentné s tým, že $|\measuredangle APC| = 180° - \alpha$. Ďalej už v dôkaze bod N nebudeme vôbec potrebovať.

Pokračovať môžeme dvoma spôsobmi. V prvom z nich sa zameriame na zadané vlastnosti uhlov. Mohli by sme sa pokúsiť postupne vyjadrovať veľkosti všetkých uhlov na obrázku, ďaleko sa však nedostaneme. Poloha uhlov BAP a BCP by nám však mala pripomenúť vetu o obvodovom uhle. Úlohu tetivy tu hrá úsečka BP. Jediný problém je v tom, že body A a C sa nachádzajú v opačných polrovinách vzhľadom na priamku BP. Preto skúsime bod C zobraziť v osovej súmernosti podľa BP na bod C'. V tom, že to je dobré rozhodnutie, by nás mal podporiť fakt, že podľa zadania je pätou kolmice z bodu C na priamku BP práve bod P. Novovzniknutý bod C' tým pádom bude mať aj ďalšie dobré vlastnosti – leží spolu s bodmi P a C na jednej priamke a je rovnako vzdialený od bodu P ako bod C. Teraz už môžeme použiť vetu o obvodovom uhle. Podľa nej ležia body B, P, A a C' na jednej kružnici, pretože tetive BP zodpovedá v bode A aj v bode C' ten istý obvodový uhol α. Teraz sa nám zídu dobré vlastnosti bodu C'. Všimnime si, že úsečka PM je strednou priečkou v trojuholníku $AC'C$. Preto $|AC'| = 2|PM| = |BP|$, teda tetivový štvoruholník $AC'BP$ je navyše aj rovnoramenným lichobežníkom. Vďaka jeho osovej súmernosti vieme, že $|\measuredangle APC'| = |\measuredangle PAB| = \alpha$, z čoho už vieme vypočítať $|\measuredangle APC| = 180° - |\measuredangle APC'| = 180° - \alpha$, čo sme chceli dokázať.

2.2

Veľkosť zadaných troch zhodných uhlov označme φ. Uhly KBU a SBP sú oba doplnkom uhla φ do uhla SBU, preto našou úlohou je dokázať, že trojuholníky BUK a BPL sú podobné. O trojuholníku BPL toho veľa nevieme, ale núka sa iné pozorovanie. Úsečka LP je ťažnicou trojuholníka BPS, ktorého uhly poznáme. Úsečka UK bude potom zodpovedajúcou ťažnicou v zodpovedajúcom trojuholníku BUB', pričom B' bude obrazom bodu B cez stred súmernosti K. Nie je ťažké si uvedomiť, že zodpovedajúci trojuholník BUB' je podobný s trojuholníkom BPS, z čoho už vyplýva tvrdenie úlohy.

2.3

Nazvime ľubovoľnú množinu n bodov a k kruhov ako (n, k)-*pokrytie*, ak majú túto vlastnosť: k kruhov pokryje n bodov a súčet priemerov tých k kruhov je menej ako $n-k+1$. Špeciálne nech *kompletné* (n, k)-*pokrytie* je také pokrytie, že každé dva kruhy majú vzájomnú vzdialenosť viac ako 1.

Priamou konštrukciou ukážeme, že pre ľubovoľných n bodov existuje kompletné (n, k)-pokrytie.

Krok 1. Každý z n bodov pokryjeme kruhom s priemerom menším ako $1/n$. Týchto n kruhov vytvára (n, n)-pokrytie, keďže súčet priemerov je menší ako 1.

Procedúra 1. Ak existujú v pokrytí C_1 dva kruhy k_1, k_2, ktorých vzdialenosť x spĺňa $0 < x < 1$, tak označme S_1, S_2 stredy a d_1, d_2 priemery kruhov k_1, k_2. Uvažujme priamku S_1S_2 a jej priesečníky P_1, P_2 s kružnicou k_1 a priesečníky Q_1, Q_2 s kružnicou k_2 také, že $|P_2S_2| \geqq |P_1S_2|$ a $|Q_2S_1| \geqq |Q_1S_1|$. Nech R je stred úsečky P_2S_2. Potom kružnica k_3 s polomerom $|RP_2| = |RQ_2|$ sa dotýka zvonka kruhov k_1 a k_2. Teda kruh k_3 obsahuje všetky body, ktoré obsahujú k_1 a k_2. Priemer kruhu k_3 je $d_3 = d_1 + d_2 + x \leqq d_1 + d_2 + 1$. Množina kruhov, keď namiesto k_1 a k_2 berieme k_3, potom tvorí s pôvodnými n bodmi nové pokrytie C_2. Tento krok síce zvýši súčet priemerov nanajvýš o 1, ale zníži počet kruhov o 1. Keďže C_1 bolo pokrytie, tak aj C_2 je pokrytie.

Procedúra 2. Opakujeme procedúru 1, kým je splnená podmienka.

Zhrnutie. Do Procedúry 1 vstúpime s pokrytím z Kroku 1. Je jasné, že Procedúra 1 sa nemôže opakovať donekonečna, lebo klesá počet kruhov (klesajúca postupnosť na prirodzených číslach je konečná). Podľa matematickej indukcie je výstup Procedúry 1 vždy pokrytie. Po vykonaní Procedúry 2 v pokrytí nie sú kruhy so vzdialenosťou $x \leqq 1$, čo znamená že výsledné pokrytie je kompletné. Keďže vo výslednom pokrytí je aspoň jedna kružnica, tak súčet priemerov kruhov pokrytia je menší ako n.

2.4

(Podľa *Anh Dung Le.*) Dokážeme niekoľko tvrdení, z ktorých dostaneme, čo potrebujeme. Prvé tvrdenie: $a_k > k$ pre každé prirodzené číslo k. Dokážeme ho matematickou indukciou so základom $a_1 > 1$, pretože

$$a_{k+1} = a_k + \frac{k}{a_k} = k \cdot \frac{a_k}{k} + \frac{k}{a_k} \geqq (k+1) \cdot \sqrt[k+1]{\frac{{a_k}^{k-1}}{k^{k-1}}} > k+1,$$

pričom $a_k > k$ podľa indukčného predpokladu.

Ďalej máme $a_{k+1} - a_k = k/a_k < 1$. Spolu s tým, že $1 < a_1 < 2$ a $a_k > k$ hneď ľahko indukciou dostaneme, že $k < a_k < k+1$ pre $k = 1, 2, 3, \ldots$ a tiež, že postupnosť $\{a_k - k\}_{k=1}^{\infty}$ je zhodná s postupnosťou$\{a_k - \lfloor a_k \rfloor\}_{k=1}^{\infty}$ a je klesajúca. (Rozmyslite si, prečo.)

Keďže máme

$$a_2 = a_1 + \frac{1}{a_1} = \frac{(a_1 - 2)(2a_1 - 1)}{2a_1} + \frac{5}{2} < \frac{5}{2},$$

z predchádzajúceho tvrdenia vyplýva $a_k - \lfloor a_k \rfloor < \frac{1}{2}$ pre všetky $k > 1$. Teda ak $a_i + a_j$ je celé, potom $i = 1$ a z monotónnosti spomínaných postupností vyplýva, že taká dvojica existuje nanajvýš jedna.

2.5

Ukážeme, že hľadanou hodnotou je $n = 41$.

Zoberme množiny $A_1, A_2, \ldots, A_{15} \subseteq \{1, 2, \ldots, 56\}$ také, že

$$|A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_7}| \geqq 41. \tag{1}$$

Dokážeme sporom, že žiadne tri nemajú spoločný prienik. Predpokladajme, že každý prvok X je maximálne v dvoch množinách A_i. Takéto množiny budeme volať *sporné*. Keď je nejaký prvok $x \in X$ v práve jednej množine A_i, tak jeho pridaním do inej podmnožiny A_j podmienka (1) zostáva v platnosti. Takisto množiny $A_1, A_2, \dots, A_j \cup x, \dots, A_{15}$ sú naďalej sporné. Podobne to vieme urobiť s prvkom $y \in X$ ktorý nepatrí do žiadnej A_i. Týmto postupom sme „nakonfigurovali“ spornú množinu tak, že každý prvok z X je v práve dvoch A_i.

Skonštruujeme nasledujúci multigraf G (t. j. graf, ktorý môže mať násobné hrany). Vrcholy $\{1, 2, \dots, 15\}$ reprezentujú množiny A_i. Pre každú dvojicu $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ pridáme do G hranu medzi i a j. Takže počet hrán G je práve 56. Vieme z (1), že pre každých 7 vrcholov, je počet hrán s aspoň jedným koncom v týchto 7 vrcholoch aspoň 41. Z toho vyplýva, že pre každých 8 vrcholov je počet hrán takých, že oba konce sú v týchto 8 vrcholoch, maximálne $56 - 41 = 15$. Zoberme ľubovoľný vrchol $v \in G$. Označme $\deg(v)$ stupeň tohto vrcholu. Odhadneme počet hrán vo zvyšných vrcholoch:

$$56 - \deg(v) \leqq 15 \cdot \frac{\binom{14}{8}}{\binom{12}{6}} = 15 \cdot \frac{\binom{14}{2}}{\binom{8}{2}} = 48{,}75.$$

Z toho vyplýva, že $\deg(v) \geqq 8$. Ako sme prišli na náš odhad? Zobrali sme každý 8-vrcholový podgraf G, tých je $\binom{14}{8}$. V podgrafe s ôsmimi vrcholmi môže byť z nášho predošlého odhadu maximálne 15 hrán. Každú hranu sme ale zarátali toľkokrát, koľko je 8-vrcholových podgrafov G obsahujúcich oba koncové vrcholy hrany, tých je $\binom{12}{6}$.

Keď je ale stupeň každého vrcholu aspoň 8, tak počet hrán v G je aspoň $15 \cdot 8/2 = 60 > 56$. A máme spor s počtom hrán G. Takže $n = 41$ vyhovuje zadaniu.

Sporná množina pre $n = 40$ je určená kompletným bipartitným grafom B s partíciami so 7 a 8 vrcholmi. V krátkosti si povedzme, prečo B vyhovuje. B má $7 \cdot 8 = 56$ hrán (a teda každej hrane môžeme priradiť prvok z X). To, že žiadne tri podmnožiny nemajú spoločný prienik, je ekvivalentné s tým, že v B neexistuje trojuholník. To, že B spĺňa (1) vyplýva z toho, že počet hrán s aspoň jedným koncom v ľubovoľných 7 vrcholoch je aspoň 40 (lebo sme nezarátali maximálne $a \cdot (8 - a)$ hrán pre $a \in \{0, 1, \dots, 7\}$).

TRETIA SÉRIA

3.1

Pre jednoduchší zápis sa dohodnime, že (x, y, z) budeme brať ako usporiadanú trojicu premenných a teda ak chceme dosadiť za $x = a$, $y = b$, $z = c$, tak napíšeme iba $(x, y, z) = (a, b, c)$.

Ak dosadíme $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, dostaneme $f(0) = 0$. Ľahko možno overiť, že funkcia $f(x) = 0$, teda funkcia konštantne rovná nule, vyhovuje zadaniu. Preto ju môžeme prehlásiť za jedno z riešení a budeme ďalej hľadať iba riešenia, v ktorých existuje také x, že $f(x) \neq 0$.

Nech pre nejaké $k \neq 0$ platí $f(k) \neq 0$. Potom dosadíme do pôvodnej rovnice $(x, y, z) = (0, k, z)$, odkiaľ

$$f(k \cdot f(z)) = z \cdot f(k). \tag{1}$$

Zo vzťahu (1) sa dá už celkom jednoducho ukázať, že funkcia f musí byť prostá: Predpokladajme, že pre nejaké a, b platí $f(a) = f(b)$. Potom určite aj $k \cdot f(a) = k \cdot f(b)$, a teda $f(k \cdot f(a)) = f(k \cdot f(b))$. Dosadením (1) za ľavú aj pravú stranu dostávame $a \cdot f(k) = b \cdot f(k)$. Keďže $f(k) \neq 0$, tak to platí jedine ak $a = b$.

Dosaďme ďalej do pôvodnej rovnice $(x, y, z) = (-x, -x, x)$. Dostávame

$$f(x^2 - xf(x)) = -xf(-x) + xf(-x) = 0 \cdot f(-x) = 0.$$

Keďže vieme, že $f(0) = 0$ a že hľadaná funkcia je prostá, musí platiť $x^2 - xf(x) = 0$, Z čoho pre $x \neq 0$ jednoduchou úpravou dostaneme $f(x) = x$. Pretože aj $f(0) = 0$, dostali sme, že ak funkcia f nie je konštantná nula, tak $f(x) = x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

Posledná vec, na ktorú nesmieme zabudnúť, je overenie, že $f(x) = x$ naozaj vyhovuje zadaniu. Po dosadení zistíme, že vyhovuje. Riešením zadanej funkcionálnej rovnice sú funkcie $f(x) = x$ a $f(x) = 0$.

3.2

(Podľa *Martina Vodičku.*) Umiestnenie n kružníc tak, aby sa každé dve pretínali v práve dvoch bodoch, existuje pre každé prirodzené n. Vyhovuje napríklad také umiestnenie, keď stredy ležia na jednej priamke, kružnice majú rovnaký polomer a všetky majú navzájom rôzne vzdialenosti menšie ako priemer (týchto konštrukcií je nespočítateľne veľa).

Sporom možno ľahko dokázať, že hľadané dvojice spĺňajú $k \neq 1$ a $k \leqq n$. Dokážeme, že ak $n \geqq 4$, tak $k \neq 2$. Každá kružnica má priesečníky práve dvoch (rôznych) farieb. Nech jedna z kružníc má farby f_1 a f_2. Potom každá z kružníc má aspoň jednu farbu z f_1 a f_2. Ak napíšeme za sebou farby, ktoré používajú jednotlivé kružnice, tak sa tam bude vyskytovať f_1 a f_2 dokopy aspoň $(n + 1)$-krát. Potrebujeme použiť ešte aspoň $n - 2$ farieb. Každá z nich bude v postupnosti aspoň dvakrát (raz za jednu kružnicu a raz za druhú) a celá postupnosť má $2n$ členov. Vznikne nerovnosť $2n \geqq (n + 1) + 2(n - 2) = 3n - 3$, čo je spor s $n \geqq 4$.

Pre $(n, k) = (2, 2)$, $(3, 2)$ a $(3, 3)$ možno poľahky skonštruovať vyhovujúce riešenie.

Odteraz sa budeme zaoberať len prípadom $n \geqq 4$. Máme nutné (triviálne) ohraničenie $n \geqq k \geqq 3$. Ukážeme, že každá dvojica spĺňajúca túto podmienku vyhovuje.

Pre $(n, 3)$ vieme skonštruovať riešenie spĺňajúce podmienku:

(1) Každá kružnica k_i má priesečníky farieb f_i a f_1.

Najprv ofarbíme všetky priesečníky f_1. Potom, ak je priesečník na k_i a k_{i+1}, tak ho ofarbíme f_{i+1}. Nakoniec priesečníky k_1 a k_n ofarbíme napríklad farbou f_3. I keď pre dvojicu $(3, 3)$ sme (1) nemuseli splniť, ľahko sa dá v tomto špeciálnom prípade skonštruovať také rozmiestnenie, ktoré bude podmienke vyhovovať.

Ďalej ukážeme, že z niektorých rozmiestnení vieme skonštruovať iné vyhovujúce rozmiestnenia.

(2) Ak (n, k) vyhovuje a spĺňa (1), tak existuje rozmiestnenie $(n + 1, k + 1)$, ktoré tiež spĺňa (1).

Pridáme novú kružnicu k_{n+1}. Práve jeden z priesečníkov k_i $(i < n + 1)$ a k_{n+1} ofarbíme f_{n+1}. Druhý z priesečníkov ofarbíme f_i ak $i \geqq k$, inak f_1. To, že k_{n+1} má

$k+1$ farieb, vyplýva z ofarbenia f_{n+1} a použitia farieb f_1 až f_k. Nové ofarbenie naozaj vyhovuje. Ostatným kružniciam sme pridali práve jednu novú farbu f_{n+1}. Prvá časť (1) platí, lebo sme použili f_{n+1} pre k_{n+1}. Druhá časť takisto, lebo k_{n+1} má priesečník farby f_1 napríklad s kružnicou k_1.

Keďže pre všetky (n,k), $n \geqq 4$ a $k \geqq 3$ existujú a, b také že $(n,k) = (b+a, 3+a)$, tak a-násobným aplikovaním (2) na $(b,3)$ máme konštrukciu pre (n,k).

Odpoveď. Rozmiestnenie existuje pre $(2,2)$, $(3,2)$ a (n,k) pričom $n \geqq k \geqq 3$ a $n \geqq 3$.

3.3

Podľa zadania

$$S = 2(p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1) = p^n,$$

pričom p_1, p_2, p_3, p sú prvočísla. Z toho nutne $p = 2$, a teda zátvorka musí mať párny súčet. Pri skúmaní parity zátvorky dospejeme rozoberaním možností k tomu, že práve dve z čísel p_1, p_2 a p_3 sú párne prvočísla. Po spätnom dosadení máme $2^n = 2(4 + 4p_3)$, z čoho $2^{n-3} - 1 = p_3$. Keďže p_3 je zo zadania celé číslo, máme, čo sme chceli.

3.4

Každý štvorec so stranou a zmenšíme na 2^x tak, aby $2^x \leqq a \leqq 2^{x+1}$ a $x \in \mathbb{Z}$. Obsah každého štvorca sme zmenšili nanajvýš štyrikrát, a teda celkový obsah nových štvorcov je aspoň $1\,\mathrm{m}^2$.

Ak jeden zo štvorcov má stranu väčšiu rovnú 1, sme hotoví. V opačnom prípade ich budeme umiestňovať od najväčšieho. Keď umiestňujeme nový štvorec so stranou 2^{-x}, tak rozdelíme štvorec 1×1, kam umiestňujeme na mriežku $2^x \times 2^x$ a umiestnime nový štvorec na hocijaké voľné miesto v mriežke (tak, aby pokryl práve celý štvorček mriežky). Keď už nie je voľné miesto, tak sme hotoví. Keď už nemáme kam dať nový štvorec, tak sme hotoví preto, lebo sme doteraz umiestňovali aspoň tak veľké štvorce ako nový štvorec, a teda nemôže zostať nepokrytá časť mriežky menšia ako nový štvorec. To, že takáto situácia nastane, vyplýva z toho, že celkový obsah je aspoň jedna.

Ešte sa ale treba pohrať s nekonečnom, lebo náš algoritmus pokrývania by mal byť konečný. Máme $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = x$. Triviálne $x \geqq 1$. Nemôže nastať $x = 1$, lebo to by sme museli každý štvorec zmenšiť práve štyrikrát, čo nevyhovuje našej konštrukcii. Takže $x > 1$. Chceme ukázať, že neexistuje n také, že $\sum_{i=1}^{n} a_i \geqq 1$. To by ale znamenalo, že pre každé n je $\sum_{i=1}^{n} a_i < 1$, čo je spor s $x > 1$.

3.5

(Podľa *Anh Dung Le.*) Uhly AOB, BOC a COA sú rovnako veľké a keďže dokopy majú $360°$, tak každý z nich má $120°$. Z kosínusovej vety máme

$$|BC| = \sqrt{|BO|^2 + |CO|^2 - 2|BO| \cdot |CO| \cos 120°} = \sqrt{|BO|^2 + |CO|^2 + |BO| \cdot |CO|}$$

a analogicky

$$|AC| = \sqrt{|AO|^2 + |CO|^2 + |AO| \cdot |CO|}, \qquad |AB| = \sqrt{|AO|^2 + |BO|^2 + |AO| \cdot |BO|}.$$

Ak dosadíme uvedené vzťahy do zadania s použitím substitúcie $|AB| = a$, $|AC| = b$, $|BC| = b$, dostaneme ekvivalentnú nerovnosť

$$\sum_{\text{cykl.}} \frac{a^2}{\sqrt{b^2+c^2+bc}} \geqq \frac{a+b+c}{\sqrt{3}}.$$

Označme ľavú stranu P. Z Hölderovej nerovnosti máme

$$\left(\sum_{\text{cykl.}} a^2(b^2+c^2+bc)\right) P^2 \geqq (a^2+b^2+c^2)^3.$$

Preto našim cieľom bude dokázať

$$3(a^2+b^2+c^2)^3 \geqq \left(\sum_{\text{cykl.}} a^2(b^2+c^2+bc)\right)(a+b+c)^2,$$

čo zrejme vyplýva z nasledujúcich nerovností:

- Cauchyho-Schwarzova nerovnosť $3(a^2+b^2+c^2) = (1+1+1)(a^2+b^2+c^2) \geqq (a+ + b+c)^2$;
- Muirheadova nerovnosť

$$\sum_{\text{cykl.}} a^4 \geqq \sum_{\text{cykl.}} a^2bc, \quad \text{z ktorej vyplýva} \quad (a^2+b^2+c^2)^2 \geqq \sum_{\text{cykl.}} a^2(b^2+c^2+bc).$$

Rovnosť nastáva, keď $a = b = c$, t. j. $|AO| = |BO| = |CO|$, čiže $|AB| = |BC| = |CA|$. Skúškou zistíme, že je to naozaj prípad rovnosti.

Štvrtá séria

4.1

Skôr, ako pristúpime k samotnému dôkazu, dokážeme nasledujúce pomocné tvrdenie.

Lema. Ak a, b sú nesúdeliteľné čísla, tak existuje prirodzené číslo $t > 1$ také, že $b \mid a^t - 1$.

Dôkaz. Keďže možných zvyškov čísla a^n po delení číslom b je konečne veľa a máme nekonečne veľa čísiel tvaru a^n, tak existujú[6] prirodzené čísla $x < y$ také, že $b \mid a^y - a^x$. Úpravou dostávame $b \mid a^x(a^{y-x} - 1)$. Keďže $\mathrm{nsd}(a,b) = 1$, tak $b \mid a^{y-x} - 1$. Ak položíme $t = y - x$, tak sme dokázali naše pomocné tvrdenie. Poznamenajme, že vyplýva triviálne aj z Eulerovej vety. $\square$

Položme $b = 10^{k+1}$. Potom z lemy máme $10^{k+1} \mid p^t - 1$ (keďže $\mathrm{nsd}(p, 10) = 1$). Ako ale vyzerá číslo p^t? O jeho prvých cifrách veľa nevieme, ale to nás nezaujíma. Vieme,

[6] Použili sme Dirichletov princíp. Všetky čísla nemôžu dávať rôzny zvyšok po delení b. Čiže dve z nich musia dávať rovnaký zvyšok, a preto ich rozdiel je deliteľný b.

že končí k nulami a jednou jednotkou, čo je presne to, čo sme chceli. Všimnite si, že t z lemy a t zo zadania sú rovnaké. Toto bolo riešenie pre prípad, keď p je nesúdeliteľné s 10.

Pozrime sa teraz na prípad $p = 2$. Myšlienka bude podobná, len na konci čísla nebudeme mať 1, ale niečo iné. Podľa lemy existuje n také, že $5^x \mid 2^n - 1$. Prenásobením 2^x dostávame $10^x \mid 2^{n+x} - 2^x$. Zamyslime sa, ako vyzerá posledných x cifier čísla 2^{n+x}. Je to niekoľko, povedzme m núl a potom cifry čísla 2^x. Použime substitúciu $x = 2k$. Potom $2^x = 2^{2k} = 4^k < 10^k$. Teda 2^x má nanajvýš k cifier. Z toho vyplýva, že $m \geqq k$.

Podobným spôsobom možno vyšetriť prípad $p = 5$ (substitúciou $x = 4k$).

4.2

Vzťah $a_n = \lfloor nx \rfloor$ možno prepísať podmienkou

$$a_n \leqq nx < a_n + 1, \qquad \text{čiže} \quad \frac{a_n}{n} \leqq x < \frac{a_n + 1}{n}.$$

Teda x patrí do intervalu

$$I_n = \left\langle \frac{a_n}{n}, \frac{a_n + 1}{n} \right) .$$

Pre každé $n = 1, 2, \ldots, 2011$ vieme určiť interval takých x, ktoré spĺňajú $a_n = \lfloor nx \rfloor$ a zhodou okolností je ním I_n. Prienikom všetkých takýchto intervalov budú tie x, o ktorých máme podľa zadania povedať, že ich je nekonečne veľa. Prienik intervalov môže byť buď prázdny, jeden bod alebo interval. Prázdna množina a jeden bod sú očividne konečné, no interval obsahuje nekonečne veľa reálnych čísel. Potrebujeme teda ukázať, že prienik všetkých intervalov I_n je zasa interval.

V tomto momente bude fajn uvedomiť si, kedy je prienikom intervalov interval. Keď na číselnú os znázorníme začiatky a konce intervalov, tak prienik začína tam, kde začína posledný z intervalov a končí tam, kde končí prvý z nich. Odtiaľto už nie je ďaleko k nasledujúcemu tvrdeniu: Prienik konečného počtu intervalov je intervalom práve vtedy, keď všetky začiatočné body ležia naľavo od všetkých koncových bodov.

Ako dokázať, že prienikom našich 2011 intervalov je interval? Nakoľko máme zo zadania informáciu o $(i + j)$-tom intervale z i-teho a j-teho, tak sa ponúka skúsiť indukciu. Jej prvý krok je triviálny. Predpokladajme ďalej, že prienikom všetkých intervalov I_l, pre $l < n$, je interval. To znamená, že aj každá dvojica I_i, I_j pre $i, j < n$ má prienik interval. Zvoľme i, j tak, že $i + j = n$. Ukážme, že začiatočný bod I_n je pred koncovým bodom I_i, a naopak. Zapíšme to do nerovností

$$\frac{a_i}{i} < \frac{a_n + 1}{n}, \qquad \frac{a_n}{n} < \frac{a_i + 1}{i}.$$

Zo zadania máme odhady pre $a_n = a_{i+j}$. Do prvej nerovnosti dajme dolný a do druhej horný odhad, tým zmenšíme väčšiu (resp. zväčšíme menšiu) stranu nerovnosti. Ak to bude platiť s týmito odhadmi, tak to bude určite platiť aj bez nich:

$$\frac{a_i}{i} < \frac{a_i + a_j + 1}{i + j}, \qquad \frac{a_i + a_j + 1}{i + j} < \frac{a_i + 1}{i}.$$

Z oboch nerovností po pár úpravách dostaneme (len vymenené i, j)

$$\frac{a_i}{i} < \frac{a_j + 1}{j}.$$

Intervaly I_i a I_j majú z predpokladu prienik interval, takže ich začiatočné body ležia pred koncovými a presne toto hovorí tá nerovnosť. Očividne teda platí. Robili sme len ekvivalentné úpravy, čiže sa vieme spätne dostať k tomu, čo sme chceli ukázať. Nakoľko vieme pre každé $i < n$ zvoliť j tak, aby platilo $i + j = n$, tak môžeme tento dôkaz aplikovať na všetky $i < n$. Potom pre všetky $i < n$ platí, že I_n začína skôr ako I_i končí a I_i začína skôr ako I_n končí. Začiatočný bod I_n je teda pred všetkými koncovými bodmi, a naopak. Pre ostatné intervaly I_i, $i < n$ už boli z predpokladu začiatočné body pred koncovými, tak teraz to platí už pre všetky I_i, $i \leqq n$. Z toho vyplýva, že prienikom všetkých intervalov I_i, $i \leqq n$ je interval. Indukcia je ukončená.

4.3

Položme počiatok súradnicovej sústavy do bodu K. Označme vektor prislúchajúci bodu X tiež X a ďalej označme X^2 skalárny súčin vektorov $X \cdot X$. Chceme dokázať, že

$$L^2 + (N - M)^2 \leqq M^2 + (N - L)^2 + N^2 + (M - L)^2.$$

Po roznásobení a preusporiadaní dostaneme

$$0 \leqq (L - M - N)^2.$$

Rovnosť nastane práve vtedy, keď $L - M = N = N - K$, teda keď je $MLNK$ rovnobežník.

4.4

V riešení budeme využívať pojmy z teórie grafov. Keďže žiadne tri vrcholy neležia na priamke, každá oblasť má práve tri vrcholy (aj hrany). To, že každý vrchol susedí s rovnakým počtom oblastí, znamená, že každý vrchol má rovnaký stupeň d. V ďalšom texte bude f počet oblastí (okrem vonkajšej), v počet vrcholov (vrátane pôvodných) a e počet hrán (vrátane pôvodných). Takže $f = n$, $e = (3n + 3)/2 = 3(n + 1)/2$, $v = 3(n + 1)/d$. Tieto hodnoty musia byť celé čísla, a teda n je určite nepárne.

Vyskúšajme malé prípady. Bez toho, aby sme čokoľvek robili, rozostavenie vyhovuje pre $f = 1$. Keď pridáme jeden vrchol do stredu a spojíme ho s pôvodnými, tiež to sedí ($f = 3$). Takisto, ak pridáme nový trojuholník a pospájame tak, aby boli len trojuholníkové oblasti, tak to sedí ($f = 7$). Z Eulerovej vety pre planárne grafy máme $v + f - e = 1$. Z toho vyplýva, že $d = 6(n + 1)/(n + 5)$. Vieme, že n je nepárne. Nech $n = 2k + 1$. Potom $d = 6(k + 1)/(k + 3)$. Ak je k párne, tak $\mathrm{nsd}(k + 1, k + 3) = 1$, a teda $k + 3 \mid 6$. Z toho vyplýva $n \in \{1, 7\}$. Keď $k = 2q + 1$, tak $d = 6(q + 1)/(q + 2)$ a vieme, že $\mathrm{nsd}(q + 1, q + 2) = 1$. Podobne ako pred chvíľou $q + 2 \mid 6$, a teda $n \in \{3, 7, 19\}$.

Skonštruovať situácie pre tieto n nie je ťažké. Pre $n \in \{1, 3, 7\}$ sme to už spomenuli. Pre $n = 19$ vpíšeme šesťuholník do pôvodného trojuholníka, doňho ešte trojuholník a vhodne pospájame.

4.5

Rovnoľahlosť so stredom E_1, ktorá zobrazuje k_1 na k, zobrazuje tiež D na B. Preto body B, D, E_1 sú kolineárne, analogicky aj body A, D, E_2. Označme C priesečník priamok AE_1 a BE_2. Vidíme, že AE_2 a BE_1 sú výšky v trojuholníku ABC, teda D je jeho ortocentrum, odkiaľ máme, že C leží na priamke t. Zostrojme bod M ako priesečník priamok AC a S_1S_2. Zrejme S_1 je stred MD, a tiež $S_1S_2 \parallel AB$. Keď teraz označíme P priesečník CD a E_1E_2, tak treba ukázať, že A, S_1, P sú kolineárne (analogicky sa potom ukáže to isté o bodoch B, S_2, P). To je však podľa Menelaovej vety vzhľadom k trojuholníku MDC ekvivalentné s tým, že

$$\frac{|CA|}{|AM|} \cdot \frac{|MS_1|}{|S_1D|} \cdot \frac{|DP|}{|PC|} = 1.$$

Kvôli rovnobežnosti platí $|CA|/|AM| = |CK|/|KD|$, pričom K je päta výšky v trojuholníku ABC z bodu C. Okrem toho je zrejmé, že $|MS_1|/|S_1D| = 1$. Teda náš cieľ je ukázať, že $|CK|/|KD| = |CP|/|PD|$, čo už je jednoduché cvičenie.

PIATA SÉRIA

5.1

Stred kružnice k budeme označovať S a jej polomer r. Mocnosť bodu A ku kružnici k je také číslo m, ktoré sa dá napísať ako súčin vzdialeností bodu A od priesečníkov kružnice k s jej ľubovoľnou sečnicou prechádzajúcou bodom A. Toto číslo nijako nezávisí od smeru sečnice. To znamená

$$m = |AP| \cdot |AU| = |AQ| \cdot |AV| = |AR| \cdot |AW|.$$

Vo výraze zo zadania sa dĺžky nenachádzajú v súčine, ale v podiele. Keď však rozšírime všetky zlomky čitateľom, v menovateli dostaneme správny súčin:

$$\frac{|AP|}{|AU|} + \frac{|AQ|}{|AV|} + \frac{|AR|}{|AW|} = \frac{|AP| \cdot |AP|}{|AP| \cdot |AU|} + \frac{|AQ| \cdot |AQ|}{|AQ| \cdot |AV|} + \frac{|AR| \cdot |AR|}{|AR| \cdot |AW|} =$$
$$= \frac{|AP|^2 + |AQ|^2 + |AR|^2}{m}.$$

Menovateľ posledného zlomku nezávisí od polohy trojuholníka PQR. Stačí teda ukázať, že ani čitateľ nie je závislý od jeho polohy.

Druhá mocnina dĺžky úsečky sa dá vypočítať z kosínusovej vety. Úsečky vystupujúce vo výraze sa nachádzajú v trojuholníkoch[7] ASP, ASQ a ASR. Na kosínusovú vetu potrebujeme dve strany a kosínus uhla medzi nimi. Jedna strana je vo všetkých trojuholníkoch AS, druhá je polomerom kružnice k. Označme $|\angle ASP| = \alpha$. Uhol ASQ je od neho o $120°$ (uhol PSQ) väčší a uhol ASR ešte o ďalších $120°$ (uhol QSR) väčší.

[7] Niektorý z nich môže byť degenerovaný, to však nevadí, lebo kosínusová veta platí aj tak.

To, čo sme si práve povedali, nie je úplne pravda. V podstate počítame uhly od polpriamky SA proti smeru hodinových ručičiek. Nejaký z tých uhlov by mohol vyjsť viac ako $180°$. Vtedy je ten skutočný uhol doplnkom do $360°$. Mohlo by sa však stať aj to, že by uhol vyšiel viac ako $360°$. Zachránime to odpočítaním $360°$. Nám však stačí kosínus uhla a ten sa týmito operáciami nemení. Teda platí

$$\begin{aligned}|AP|^2 &= |AS|^2 + r^2 - 2|AS|r\cos\alpha,\\ |AQ|^2 &= |AS|^2 + r^2 - 2|AS|r\cos(\alpha+120°),\\ |AR|^2 &= |AS|^2 + r^2 - 2|AS|r\cos(\alpha+240°).\end{aligned}$$

Dosaďme tieto vzťahy do výrazu, ktorý nás zaujíma, a kosínusy upravme pomocou súčtových vzorcov. Postupne dostávame

$$\begin{aligned}&|AP|^2 + |AQ|^2 + |AR|^2 =\\ &= 3\left(|AS|^2 + r^2\right) - 2|AS|r\left(\cos\alpha + \cos(\alpha+120°) + \cos(\alpha+240°)\right) =\\ &= 3\left(|AS|^2 + r^2\right) - 2|AS|r(\cos\alpha + \cos\alpha\cos 120° - \sin\alpha\sin 120° +\\ &\qquad\qquad + \cos\alpha\cos 240° - \sin\alpha\sin 240°) =\\ &= 3\left(|AS|^2 + r^2\right) - 2|AS|r\left(\cos\alpha - \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right) =\\ &= 3\left(|AS|^2 + r^2\right).\end{aligned}$$

Tým je úloha vyriešená, pretože tento výraz očividne nezávisí od polohy trojuholníka PQR, čiže nebude závisieť ani po vydelení m.

5.2

Zavedieme pojmy pól a polára. Majme kružnicu k s polomerom r a jej stred S. Ďalej majme bod P a priamku p kolmú na priamku SP. Označme $r_1 = |SP|$ a vzdialenosť priamky p od bodu S označme r_2. Potom P je pólom poláry p, ak $r_1/r = r/r_2$. Špeciálne, ak polára pretína kružnicu v bodoch A_1 a A_2, tak pólom je priesečník dotyčníc ku kružnici k v bodoch A_1 a A_2.

Nasledujúce tvrdenia ponechávame bez dôkazu, ako cvičenia pre čitateľa:

- Póly A, B a C ležia na priamke práve vtedy, keď sa k nim prislúchajúce poláry pretínajú v jednom bode.
- Priesečník polár prislúchajúci k bodom A a B je pólom poláry AB.

Označme postupne Z, X a Y dotykové body vpísanej kružnice na stranách AB, BC a CA. Ďalej, nech q je priamka rovnobežná s priamkou AI prechádzajúca bodom L. Nakoniec označme X' priesečník q a priamky YZ. Bod A' je pólom poláry q. Je to tak preto, lebo priamka IA' je kolmá na poláru q a priamka LA' je dotyčnicou kružnice v bode L. To je už spomínaný špeciálny prípad poláry prechádzajúcej kružnicou. Kvôli druhému tvrdeniu je X' pólom poláry AA'. Ešte si uvedomíme, že X' je pätou kolmice na priamku YZ. Podobne ako sme skonštruovali bod X', skonštruujeme body Y' a Z'.

Body X', Y' a Z' ležia na Simsonovej priamke. Keďže tieto póly ležia na priamke, k nim prislúchajúce poláry sa pretínajú v jednom bode. Takže priamky AA', BB' a CC' sa pretínajú v jednom bode.

5.3

Pokiaľ máme nerovnosť pre kladné reálne čísla, oplatí sa nahrádzať premenné nejakou funkciou, čo ich prebieha všetky, to znamená, že všetky kladné reálne čísla patria do oboru hodnôt tejto funkcie. Najvhodnejším kandidátom je funkcia tangens. Pre tangens poznáme viaceré vzorce, ktoré pri goniometrických substitúciách treba často používať. Aby sme mali jednoznačné vyjadrenie, teda bijekciu na $\mathbb{R}^+$, zoberme tangens definovaný na intervale $(0, \frac{1}{2}\pi)$. Položme $a = \operatorname{tg} A$, $b = \operatorname{tg} B$, $c = \operatorname{tg} C$, kde $A, B, C \in (0, \frac{1}{2}\pi)$. Dostávame $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$, odkiaľ po úprave obdržíme

$$\operatorname{tg} C = \frac{-(\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B)}{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B} = \operatorname{tg}(\pi - A - B),$$

z čoho vyplýva $A + B + C = \pi$. Keď prepíšeme zadanú nerovnosť v premenných A, B, C, vidíme, že máme dokázať

$$\cos A + \cos B + \cos C \leqq \frac{3}{2}.$$

Toto je už štandardný príklad na Jensenovu nerovnosť. Využijeme konkávnosť funkcie kosínus na intervale $(0, \frac{1}{2}\pi)$, na ktorom sú premenné A, B, C definované. Rovnosť nastáva práve pre $A = B = C = \frac{1}{3}\pi$, teda keď $a = b = c = \sqrt{3}$.

5.4

Najjednoduchšou n-prvkovou podmnožinou A_n je množina obsahujúca množiny $\{1\}$, $\{2\}$, ..., $\{n\}$, ktorú označíme T. Ďalej označme $s(B)$ aritmetický priemer prvkov množiny B. Rozdelíme množinu $E = A_n - T$ na množiny E_1 a E_2 tak, že v množine E_1 budú tie množiny, pre ktoré $s(E_1) \in E_1$ a v množine E_2 budú ostatné. Evidentne $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ a $E_1 \cup E_2 = E$. (Teda $\{E_1, E_2\}$ je rozklad množiny E.) Bijekciu u medzi E_1 a E_2 skonštruujeme teraz už jednoducho: $u(X) = X - \{s(X)\}$, a teda $|E_1| = |E_2|$. Keďže sa E dá rozložiť na dve rovnako mohutné množiny, číslo $|E| = |A_n| - n$ je párne.

5.5

Označme

$$g(n) = \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor = nf(n).$$

Zrejme ak k delí n, tak výraz $\lfloor n/k \rfloor - \lfloor (n-1)/k \rfloor$ je rovný 1, inak je rovný 0. Dostávame teda $g(n) = g(n-1) + d(n)$, pričom $d(n)$ označuje počet prirodzených deliteľov čísla n. Keď definujeme $g(0) = 0$, máme

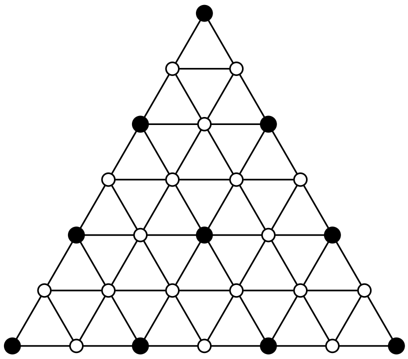
$$g(n) = d(1) + d(2) + \cdots + d(n).$$

Všimnime si, že $f(n)$ je aritmetický priemer čísel $d(1)$, $d(2)$, $\dots$, $d(n)$. Ak dokážeme, že $d(n+1) < f(n)$ platí pre nekonečne veľa hodnôt n a tiež $d(n+1) > f(n)$ platí pre nekonečne veľa hodnôt n, úloha bude vyriešená. Avšak naozaj, $d(n+1) < f(n)$ platí pre všetky n také, že $n+1$ je prvočíslo. Nájdenie nekonečne veľa hodnôt n, pre ktoré $d(n+1) > f(n)$, ponechávame na čitateľa.

Šiesta séria

6.1

Podľa zadania treba ukázať, že žaby nemôžu skákať tak, aby nikdy neboli nejaké dve na rovnakom vrchole. Ako prvé si uvedomíme, že ak je v nejakom čase niektoré políčko prázdne, tak sme hotoví (lebo vtedy podľa Dirichletovho princípu existuje políčko, na ktorom sú aspoň dve žaby).

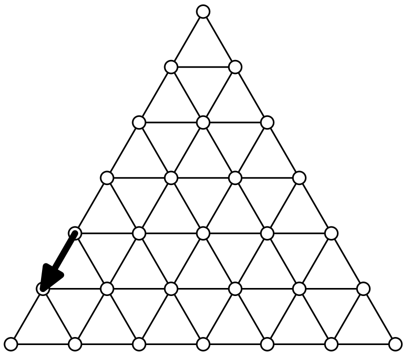


Obr. 53

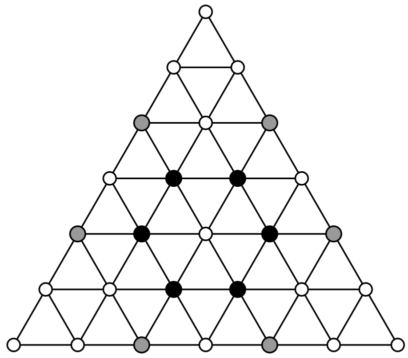
Uvažujme žaby na čiernych políčkach (obr. 53) v čase t. Zo zadania vieme, že v nasledujúcich dvoch sekundách (v časoch $t+1$ a $t+2$) tieto žaby nebudú na žiadnom z čiernych políčok. Ale nejaké žaby na čiernych políčkach v týchto dvoch sekundách museli byť. Je zrejmé, že žiadna žaba nemohla byť dvakrát na nejakom čiernom políčku v časoch $t+1$ a $t+2$.

Ak to zhrnieme, tak vieme, že v čase t bolo na čiernych políčkach 10 žiab, ktoré tam neboli v časoch $t+1$ a $t+2$. A aj v časoch $t+1$ a $t+2$ boli na čiernych políčkach odlišné žaby. Z toho vyplýva, že v každom z časov t, $t+1$ a $t+2$ bola na každom z čiernych políčok iná žaba. Takže dokopy musí existovať aspoň $10 + 10 + 10 = 30$ rôznych žiab. To je ale spor s počtom žiab v zadaní. Takže náš predpoklad, že žaby tak môžu skákať, je nesprávny.

Iné riešenie. (Podľa *Michala Tótha.*) Dokážeme sporom, že žaby nemôžu skákať medzi dvoma políčkami tak, ako je zvýraznené na obr. 54. Nech nejaká žaba takto skočila v čase t. Potom je už v ľavom dolnom rohu jednoznačne určené, ktorá žaba do rohu skočila a kam žaba z rohu vyskočila. Po chvíli uvažovania zistíme, že v čase $t+1$ neexistuje spôsob, ako mohla žaba skočiť do toho rohu.



Obr. 54



Obr. 55

Ako inak by ešte mohla daná žaba skákať? Kde mohla doskákať v čase $t+2$? Po chvíli uvažovania zistíme, že mohla doskákať len na dve políčka. Podobnou úvahou pre všetkých 6 žiab na sivých políčkach (obr. 55) zistíme, že tieto žaby museli skončiť práve na čiernych políčkach. Ale potom žaba v úplnom strede v čase $t+1$ nemá kam skočiť, lebo všetky okolité políčka sú už obsadené. Týmto spôsobom sa dostávame k sporu.

6.2

Nerovnosť vynásobme kladným výrazom $a+b+c$. Dostaneme ekvivalentný tvar

$$\frac{a^2+ab+ac}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2+bc+ba}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{c^2+ca+cb}{2c^2+a^2+b^2} \leqq \frac{9}{4}.$$

Z AG-nerovnosti vyplýva $ab \leqq (a^2+b^2)/2$. Podobne vieme odhadnúť aj ac a bc. (Vieme, že $a,b,c>0$.) Použijeme tieto odhady na ľavú stranu nerovnosti a vynásobíme celú nerovnosť dvoma, aby sme ju odstránili z menovateľa. Dostaneme

$$\frac{4a^2+b^2+c^2}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{4b^2+c^2+a^2}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{4c^2+a^2+b^2}{2c^2+a^2+b^2} \leqq \frac{9}{2}.$$

To sa dá zapísať aj ako

$$\frac{4a^2+2b^2+2c^2-b^2-c^2}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{4b^2+2c^2+2a^2-c^2-a^2}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{4c^2+2a^2+2b^2-a^2-b^2}{2c^2+a^2+b^2} \leqq \frac{9}{2}.$$

Teraz rozložíme každý zlomok ľavej strany na dve časti:

$$\left(2-\frac{b^2+c^2}{2a^2+b^2+c^2}\right)+\left(2-\frac{c^2+a^2}{2b^2+c^2+a^2}\right)+\left(2-\frac{a^2+b^2}{2c^2+a^2+b^2}\right) \leqq \frac{9}{2}.$$

Z toho máme

$$\frac{b^2+c^2}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{c^2+a^2}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{a^2+b^2}{2c^2+a^2+b^2} \geqq \frac{3}{2},$$

v čom už môžeme vidieť Nesbittovu nerovnosť. Táto nerovnosť platí pre všetky kladné reálne čísla, jej základný tvar je nasledovný:

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geqq\frac{3}{2}.$$

Od nerovnosti, na ktorú sme redukovali zadanú úlohu, sa líši len substitúciou

$$x=b^2+c^2,\quad y=c^2+a^2,\quad z=a^2+b^2.$$

Takéto x, y, z sú očividne kladné, čiže pre ne bude nerovnosť platiť.

Iné riešenie. Nakoľko je nerovnosť homogénna, môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $a^2+b^2+c^2=1$. Na ľavej strane potom dostaneme podobné výrazy, ktoré sú vlastne funkčnými hodnotami funkcie

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$$

v bodoch a, b, c. Funkcia f je na intervale $(0,1\rangle$, na ktorom sa pohybujeme, konkávna. Odhadnime ľavú stranu pomocou Jensenovej nerovnosti, zostane dokázať nerovnosť

$$3\frac{\frac{a+b+c}{3}}{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2+1}\leqq\frac{9}{4(a+b+c)}.$$

Na to už stačí len výrazy upraviť, prenásobiť menovateľmi, využiť podmienku $a^2+b^2+{}$ $+c^2=1$ a použiť jednoduchú AG-nerovnosť.

6.3

Označme

$$m=\max\{f(A)\colon A\in\mathcal{P}(M)\}.$$

Nech C je taká množina, pre ktorú platí $C\in\mathcal{P}(M)$ a $f(C)=m$. Ak $C=\emptyset$, tak podľa (i) aj $f(M)=f(M-M)=f(\emptyset)=f(C)=m$ vyhovuje podmienkam pre C. Teda môžeme predpokladať, že C je neprázdna množina. Prvky C označíme x_1, x_2, …, x_p. Potom aplikovaním (ii) dostávame vzťah

$$\begin{aligned}m=f(C)&\leqq\max\{f(\{x_1\}),f(C-\{x_1\})\}\leqq\\&\leqq\max\{f(\{x_1\}),\max\{f(\{x_2\}),f(C-\{x_1,x_2\})\}\}\leqq\dots\leqq m.\end{aligned}$$

Preto existuje x_i také, že $f(\{x_i\})=m$. Preznačme ho na x_n (teda $f(\{x_n\})=m$).

Pre $n=1$ a $n=2$ vieme platnosť zadania triviálne overiť. Teraz by sme radi využili indukciu, ale narážame na problém, že nemáme dobrý dolný odhad funkcie f. Tento problém časom vyriešime, ale najprv sa pozrieme na vlastnosti funkcie f na množine, kde budeme využívať indukčný predpoklad.

Označme $M' = M - \{x_n\}$. Všimneme si, že pre každé $A \in \mathcal{P}(M')$ platí

$$\begin{aligned} m = f(\{x_n\}) = f(M - \{x_n\}) = f(M') = f(A \cup (M' - A)) \leqq \\ \leqq \max\{f(A), f(M' - A)\} = \max\{f(A), f(M - (M' - A))\} = \\ = \max\{f(A), f(A \cup \{x_n\})\} \leqq m. \end{aligned}$$

Z toho dostávame

$$\max\{f(A), f(A \cup \{x_n\})\} = m. \tag{1}$$

Keby sme vedeli vyjadriť minimum z čísel $f(A)$, $f(A \cup \{x_n\})$, tak by sme vedeli hodnoty funkcie f v týchto bodoch. Zavedieme preto funkciu $g\colon \mathcal{P}(M') \to \mathbb{R}$, pričom $g(A) = \min\{f(A), f(A \cup \{x_n\})\}$ pre každé $A \in M'$.

Začnime ju skúmať. Keďže pre každé $A \in \mathcal{P}(M')$ platí

$$f(A \cup \{x_n\}) = f(M' - A),$$

dostávame

$$g(A) = \min\{f(A), f(M' - A)\} \tag{2}$$

pre každé $A \in \mathcal{P}(M')$.

Keď spojíme (1) a (2), získame nový vzťah

$$g(A) + m = \min\{f(A), f(A \cup \{x_n\})\} + \max\{f(A), f(A \cup \{x_n\})\} = f(A) + f(A \cup \{x_n\}).$$

S jeho využitím dostávame

$$\begin{aligned} g(M' - A) + m &= f(M' - A) + f((M' - A) \cup \{x_n\}) = \\ &= f(M - (M' - A)) + f(M - ((M' - A) \cup \{x_n\})) = \\ &= f(A \cup \{x_n\}) + f(A) = g(A) + m, \end{aligned}$$

z čoho $g(A) = g(M' - A)$.

Už predošlý krok sme robili s tým, že chceme ukázať podobné vlastnosti funkcií g a f. Keďže nestojí veľkú námahu overiť (ii) pre g, tak to urobíme. (Ak to vyjde, máme funkciu pre indukčný predpoklad).

Nech teda $A, B \in \mathcal{P}(M')$. Chceme ukázať, že $g(A \cup B) \leqq \max\{g(A), g(B)\}$. Ak by $g(A) = m$ alebo $g(B) = m$, tak by ten vzťah triviálne platil. Preto v ďalšom predpokladáme, že $g(A), g(B) \leqq m$. Z definície funkcie g je jedno z čísel $f(A)$ a $f(A \cup \{x_n\})$ menšie ako m a to isté platí pre B. Nech X je tá množina z množín A a $A \cup \{x_n\}$, pre ktorú $f(X) = g(A) \leqq m$, podobne Y pre B. Poznamenajme, že $(X \cup Y) \in \{A \cup B, A \cup B \cup \{x_n\}\}$. Z toho už vyplýva

$$\begin{aligned} g(A \cup B) = \min\{f(A \cup B), f(A \cup B \cup \{x_n\})\} \leqq f(X \cup Y) \leqq \\ \leqq \max\{f(X), f(Y)\} = \max\{g(A), g(B)\}. \end{aligned}$$

Na funkciu g sa vzťahuje indukčný predpoklad a teda nadobúda maximálne $n - 1$ rôznych hodnôt. Navyše podľa toho, ako sme skonštruovali g, vieme, že čísla $f(A)$

a $f(A\cup\{x_n\})$ majú hodnoty práve $g(A)$ a m. Z toho triviálne všetky funkčné hodnoty f sú buď $g(A)$, alebo m. Preto f nadobúda maximálne n rôznych hodnôt.

6.4

Rozoberme najprv jednoduchší prípad, teda keď $EF \parallel AC$. Potom $|BE|/|EA| = |BF|/|FC|$ a použitím (i) dostávame $|DH|/|HA| = |DG|/|GC|$. Odtiaľ $HG \parallel AC$, čo dokopy dáva $E_1F_1 \parallel AC \parallel H_1G_1$. To znamená, že $|F_1C|/|CG_1| = |E_1A|/|AH_1| = f$.

Zostalo vyriešiť možnosť, že EF nie je rovnobežná s AC. Priamky EF a AC nech sa pretnú v bode T. Podľa Menelaovej vety platí

$$\frac{|CF|}{|FB|}\cdot\frac{|BF|}{|EA|}\cdot\frac{|AT|}{|TC|}=1,$$

čo použitím (i) prevedieme na

$$\frac{|CG|}{|GD|}\cdot\frac{|DH|}{|HA|}\cdot\frac{|AT|}{|TC|}=1.$$

Z opačnej implikácie Menelaovej vety zase vyplýva, že body T, H, G sú kolineárne. Predpokladajme, že priamky TF a TG pretnú priamku E_1H_1 v bodoch M a N. Všimnime si, že z $EB_1 \parallel EF$ obdržíme $|E_1A| = |AM|\cdot|BA|/|EA|$. Podobným spôsobom dostaneme $|H_1A| = |AN|\cdot|AD|/|AH|$. Potom

$$\frac{|E_1A|}{|H_1A|}=\frac{|AM|}{|AN|}\cdot\frac{|AB|}{|AE|}\cdot\frac{|AH|}{|AD|}.$$

Na druhej strane

$$\frac{|AM|}{|AN|}=\frac{|EQ|}{|QH|}=\frac{S_{AEC}}{S_{AHC}}=\frac{S_{ABC}}{S_{ADC}}\cdot\frac{|AE|}{|AB|}\cdot\frac{|AD|}{|AH|}.$$

Nakoniec z predchádzajúcich dvoch rovností

$$\frac{|E_1A|}{|H_1A|}=\frac{|EQ|}{|QH|}\cdot\frac{|AB|}{|AE|}\cdot\frac{|AH|}{|AD|}=\frac{S_{ABC}}{S_{ADC}}.$$

Takisto aj $|F_1C|/|CG_1| = S_{ABC}/S_{ADC}$, čo dokopy dáva $|F_1C|/|CG_1| = |E_1A|/|AH_1| = f$.

6.5

Vytvorme postupnosť predpisom $x_{n+1} = f(x_n)$, pričom za x_0 zoberme ľubovoľné pevne dané nezáporné reálne číslo. Pre každé také x_0 je nekonečná postupnosť, ktorú sme zaviedli, dobre definovaná, lebo definičný obor a obor hodnôt sú rovnaké množiny. Pre n-tý člen dostávame vyjadrenie $x_n = -rx_{n-1} + s(r+s)x_{n-2}$. Z teórie o lineárnych rekurentných reláciách vieme, že potom platí $x_n = as^n + b(-r-s)^n$ pre nejaké $a, b \in \mathbb{R}$ (pretože s a $-r-s$ sú koreňmi kvadratickej rovnice $x^2 = -rx + s(r+s)$). Keďže $x_n \geqq 0$ pre všetky n, musí byť $b = 0$. Dosadíme všetko do vzťahu a postupne máme $x_0 = a$, $f(x_0) = x_1 = as = sx_0$. Avšak x_0 bolo ľubovoľné nezáporné, preto jediným možným riešením zostáva $f(x) = sx$. Ľahko overíme, že tento výsledok skutočne vyhovuje pôvodnej rovnici.

Iné korešpondenčné semináre

Okrem Matematickej olympiády sú pre študentov základných aj stredných škôl počas školského roka organizované aj iné matematické súťaže. Patria medzi ne predovšetkým korešpondenčné semináre. Tieto súťaže sa v detailoch istotne líšia, avšak základné črty majú spoločné. Počas školského roka prebiehajú dve časti (letná a zimná), ktoré pozostávajú zväčša z troch sérií úloh rozosielaných riešiteľom do škôl alebo domov. Riešenia súťažiaci vypracovávajú rovnakou formou ako v MO a v určenom termíne ich odosielajú na adresu príslušného seminára, odkiaľ sa po niekoľkých dňoch až týždňoch vrátia opravené spolu so vzorovými riešeniami a výsledkovou listinou. Mladší a menej skúsení riešitelia zväčša nemusia riešiť tie najzložitejšie príklady, aby aj oni mali šancu ovplyvniť poradie na prvých miestach. Na konci oboch častí súťaže sú približne tridsiati najúspešnejší riešitelia pozývaní na týždňové sústredenie, účasť na ktorom býva často najsilnejšou motiváciou na riešenie úloh. Nie je ale možné nespomenúť, že takýto pravidelný tréning sa odráža aj na výsledkoch dosahovaných v MO, a že drvivá väčšina reprezentantov Slovenska na IMO sa aktívne zapájala do viacerých z týchto seminárov.

Nižšie uvedené korešpondenčné semináre (KS) sú určené študentom stredných škôl, svojím záberom pokrývajú územie celého Slovenska a často majú aj riešiteľov z Českej republiky. Je však možné, že vo svojom okolí nájdete aj menšie súťaže podobného druhu.

Korešpondenčný matematický seminár – KMS

KMS vznikol v roku 2002 spojením Bratislavského a Stredoslovenského korešpondenčného matematického seminára (BKMS a SKMS), ktoré do 51. ročníka MO prebiehali samostatne. Organizovaný je študentmi FMFI UK v Bratislave.

KMS má dve kategórie. Začínajúcim a mladším riešiteľom je určená kategória ALFA, pre skúsenejších je kategória BETA. Rozdelenie do kategórií umožňuje bojovať o miesta na sústredení aj neskúseným študentom, ktorí by v príliš silnej konkurencii strácali motiváciu.

KMS
OATČ KAGDM FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

e-mail: kms@kms.sk
web: http://kms.sk

Súťaž talentovaných riešiteľov obľubujúcich matematiku – STROM

Korešpondenčný seminár STROM je pokračovateľom najstaršieho korešpondenčného seminára v bývalom Československu. Je organizovaný z PF UPJŠ v Košiciach skupinou nadšencov, väčšinou bývalých riešiteľov seminára a študentov UPJŠ. V posledných rokoch sa na organizovaní seminára okrem košickej skupiny podieľajú aj študenti FMFI UK pochádzajúci z východného Slovenska. Riešiteľskú základňu má prevažne na východnom Slovensku.

STROM
PF UPJŠ
Jesenná 5
041 54 Košice

e-mail: strom@strom.sk
web: http://www.strom.sk

Ak ste sa rozhodli do niektorého zo seminárov zapojiť, najrozumnejšie je zadania a pravidlá nájsť na internete začiatkom septembra alebo začiatkom januára, prípadne v tomto období požiadať e-mailom o zaslanie úloh prvej série.

Šesťdesiaty ročník
Matematickej olympiády

Názov:	Šesťdesiaty ročník Matematickej olympiády
Autori:	Mgr. Peter Novotný, PhD., RNDr. Karel Horák, CSc., Bc. Peter Csiba, Mgr. Ivan Kováč, Marek Kukan, RNDr. Ján Mazák, PhD., Filip Sládek, Úlohová komisia MO, Vedúci KMS
Jazyková úprava:	neprešlo jazykovou úpravou
Grafická úprava:	Mgr. Peter Novotný, PhD., RNDr. Karel Horák, CSc., sadzba programom $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX
Fotografie:	Mgr. Peter Novotný, PhD.
Vydavateľ:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava
Grafika:	Mgr. Peter Novotný, PhD.
Tlač:	DOLIS, s. r. o.
Rok vydania:	2012
Náklad:	500 ks
Rozsah:	159 strán

ISBN **978–80–8072–124–4**

Vydané s finančnou podporou Ministerstva školstva SR.
Nepredajné.