59. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

Správa o riešení úloh zo súťaže konanej v školskom roku 2009/2010

51. MEDZINÁRODNÁ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA
4. STREDOEURÓPSKA MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

S pomocou spolupracovníkov spracovali
Mgr. Peter Novotný, PhD.,
RNDr. Karel Horák, CSc.,
Bc. Ondrej Budáč,
Mgr. Ivan Kováč,
RNDr. Ján Mazák
a členovia Úlohovej komisie MO.

Obsah

O priebehu 59. ročníka Matematickej olympiády

V školskom roku 2009/2010 sa uskutočnil 59. ročník Matematickej olympiády (MO). Medzi predmetovými olympiádami a ostatnými postupovými súťažami je MO na Slovensku najstaršia. Má tiež najviac rôznych kategórií, pokrývajúcich všetky ročníky od štvrtej triedy ZŠ po maturantov. Súťaž vyhlasuje Ministerstvo školstva, vedy výskumu a športu Slovenskej republiky (MŠ SR) v spolupráci s Jednotou slovenských matematikov a fyzikov (JSMF).

Súťaž riadi Slovenská komisia matematickej olympiády (SKMO), ktorá v 59. ročníku pracovala v nasledovnom zložení:

Mgr. Peter Novotný, PhD., FMFI UK Bratislava, predseda
mim. prof. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., F-PEDAS ŽU Žilina, podpredseda
Mgr. Milan Demko, PhD., FHPV PU Prešov, predseda KKMO PO
Mgr. Martin Kollár, PhD., Gymn. FMFI UK Bratislava, predseda KKMO BA
doc. RNDr. Stanislav Krajči, PhD., PF UPJŠ Košice, predseda KKMO KE
doc. RNDr. Mária Lucká, CSc., PF TU Trnava, predsedníčka KKMO TT
doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc., F-PEDAS ŽU Žilina, predseda KKMO ZA
RNDr. Eva Oravcová, Gymn. J. G. T. Banská Bystrica, predsedníčka KKMO BB
RNDr. Soňa Pavlíková, CSc., FM TU Trenčín, predsedníčka KKMO TN
prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc., FPV UKF Nitra, predseda KKMO NR
RNDr. Monika Dillingerová, PhD., FMFI UK Bratislava
prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc., FPV UKF Nitra
Mgr. Štefan Gyürki, PhD., FCHPT STU, Bratislava
RNDr. Róbert Hajduk, PhD., PF UPJŠ Košice
Ing. RNDr. František Kardoš, PhD., PF UPJŠ Košice
doc. RNDr. Mária Kmeťová, PhD., FPV UKF Nitra
RNDr. Ján Mazák, FMFI UK Bratislava
PaedDr. Anna Pobešková, ŠŠI Levice
Mgr. Martin Potočný, Trojsten, FMFI UK Bratislava
RNDr. Oliver Ralík, CSc., FPV UKF Nitra
doc. RNDr. Roman Soták, PhD., PF UPJŠ Košice
Ing. Tomáš Lučenič, IUVENTA Bratislava, tajomník

V obsadení SKMO sa uskutočnilo oproti predošlému ročníku niekoľko zmien. Na poste predsedu KKMO v Bratislave vystriedal Mgr. Martin Kollár, PhD. po 10-ročnom vedení RNDr. Zuzanu Frkovú z gymnázia Grösslingová v Bratislave. Predsedom KKMO Košice sa stal doc. RNDr. Stanislav Krajči, PhD. namiesto doc. RNDr. Tomáša Madarasa, PhD. z PF UPJŠ Košice, ktorý bol predsedom 9 rokov. Činnosť v SKMO ukončil tiež doc. RNDr. Vladislav Rosa, CSc., ktorý v 46. až 50. ročníku MO bol predsedom SKMO. Všetkým trom menovaným, ktorí už nie sú členmi SKMO, ďakujeme za množstvo práce, ktorú v SKMO vykonali.

Novými členmi SKMO sa (okrem už spomenutých predsedov KKMO Bratislava a Košice) stali Mgr. Štefan Gyürki, PhD., RNDr. Róbert Hajduk, PhD., doc. RNDr. Mária Kmeťová, PhD. a doc. RNDr. Roman Soták, PhD.

V súvislosti s mojím vymenovaním za predsedu SKMO ministrom školstva dňa 7. júla 2009 (teda na konci 58. ročníka MO) nastala ešte jedna zmena – podpredsedom SKMO sa stal predchádzajúci predseda mim. prof. RNDr. Vojtech Bálint, CSc. Po jeho osemročnom vedení SKMO som prebral súťaž vo veľmi dobrom stave, za čo mu patrí poďakovanie. Spomeňme napríklad, že za uplynulých osem rokov pribudli v MO viaceré pravidelné akcie (účasť SR na MEMO, spoločné prípravné sústredenie českého a slovenského IMO-družstva) a vďaka úspešným grantovým projektom bolo a je možné podporiť rôzne doplňujúce aktivity. Pokúsim sa nesklamať dôveru SKMO, ktorá ma na post predsedu odporučila a pokračovať v práci predošlého predsedu najlepšie ako dokážem.

V septembri 2009 nadobudla účinnosť nová smernica o organizovaní, riadení a finančnom zabezpečení súťaží žiakov škôl[1], ktorú vydalo MŠ SR a ktorou sa riadia o. i. aj všetky predmetové olympiády. V súlade s touto smernicou aktualizovala SKMO organizačný poriadok[2], ktorým sa MO riadi. V samotnom priebehu a organizovaní jednotlivých kôl MO však nenastala žiadna zmena, uskutočnili sa tiež všetky zvyčajné sústredenia a medzinárodné súťaže.

Celoštátne kolo MO (CK MO) usporiadala v dňoch 21. – 24. 3. 2010 KK MO Trenčín. Jej predsedníčkou je RNDr. Soňa Pavlíková, CSc., ktorá bola zároveň hlavným organizátorom CK MO. Chceme sa jej touto cestou poďakovať za bezchybné zabezpečenie celého podujatia. Súťaž prebiehala v hoteli Perla na Zelenej vode pri Novom Meste nad Váhom. Slávnostné vyhodnotenie sa konalo na Fakulte mechatroniky Trenčianskej univerzity. Poďakovanie patrí tiež sponzorom CK MO, ktorými boli spoločnosti TRELLIS, ALBI, časopis PC REVUE, žilinská pobočka spoločnosti INSET, nezisková organizácia Mechatronik a projekt Kiwiki.

Po CK MO sa uskutočnilo výberové sústredenie, na ktorom sa rozhodlo o zložení družstiev pre Medzinárodnú matematickú olympiádu (IMO) a Stredoeurópsku matematickú olympiádu (MEMO). Nasledované bolo prípravným sústredením pre obe družstvá. Z prípravných medzinárodných akcií sa popri tradičnom česko-poľsko-slovenskom stretnutí (konalo sa v Bílovci v ČR) uskutočnilo opäť – už po piaty raz – spoločné prípravné sústredenie IMO-družstiev ČR a SR. Finančne ho zabezpečuje Spoločnosť Otakara Borůvky a odborne Ústredný výbor Matematickej olympiády v ČR. Treba pripomenúť, že podobná akcia na Slovensku neprebieha, a aspoň na tomto mieste sa chceme poďakovať českým kolegom za pozvanie.

Na 51. IMO v Kazachstane sme získali jednu zlatú medailu, dve bronzové medaily, a tri čestné uznania. Výrazný úspech zaznamenal Martin Vodička z gymnázia Alejová v Košiciach, ktorého medaila bola vôbec jedinou slovenskou zlatou medzi všetkými predmetovými olympiádami v školskom roku 2009/2010. V súvislosti s cestou do Ka-

[1] Smernica č. 13/2009-R z 25. augusta 2009.

[2] Registrovaný je na MŠ SR pod číslom MŠSR-12565/2010-912, zverejnený je napr. na internetovej adrese *skmo.sk/orgpor*

zachstanu patrí naša vďaka pracovníčkam sekcie medzinárodnej spolupráce MŠ SR, ktoré zabezpečili bezproblémový priebeh cesty vybavením víz a leteniek.

Na 4. MEMO sme získali tri bronzové medaily a dve čestné uznania. Súťaži je v ročenke venovaná rozšírená kapitola, keďže tento rok sme ju usporiadali na Slovensku v obci Strečno pri Žiline. Zorganizovať MEMO sme mohli najmä vďaka dotácii 19 000,– € z MŠ SR. Pred jej pridelením nám pomohli konzultácie s RNDr. Igorom Gallusom zo sekcie regionálneho školstva MŠ SR. Zastrešenie súťaži poskytla žilinská pobočka JSMF.

Matematická olympiáda by neexistovala bez zaujímavých a originálnych úloh. O ich prípravu sa stará Úlohová komisia MO, ktorú máme spoločnú s Českou republikou. Každoročne sa konajú dve zasadnutia komisie, jedno v ČR, jedno na Slovensku. V 59. ročníku sa uskutočnili v novembri 2009 v Bílovci a v máji 2010 v Žiline. Úlohová komisia má dve sekcie: jednu pre kategórie A, B, C (sekcia ABC), druhú pre Z4, Z5, Z6, Z7, Z8, Z9 (sekcia Z). Za Slovensko pracovali v sekcii ABC mim. prof. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., RNDr. Tomáš Jurík, PhD., RNDr. Ján Mazák, doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc. a Mgr. Peter Novotný, PhD. a v sekcii Z PaedDr. Svetlana Bednářová, PhD., RNDr. Monika Dillingerová, PhD. a Mgr. Miroslava Smitková, PhD., ku ktorým sa od 59. ročníka pridala Mgr. Veronika Bachratá.

Vymýšľať nové úlohy do MO nie je jednoduché, úlohová komisia preto uvíta zaslanie zaujímavých návrhov na úlohy aj od autorov, ktorí nie sú jej členmi. Návrhy je možné posielať napríklad na adresu *skmo@skmo.sk*, najlepšie aj s menom autora, s riešením a s odhadom, do ktorej kategórie sa úloha hodí.

Spomeňme ešte niekoľko aktivít, ktoré sa uskutočnili aj s podporou SKMO. Vo februári 2010 sa v Rejdovej konali dve týždňové sústredenia pre riešiteľov Korešpondenčného matematického seminára (KMS), spolu pre 68 účastníkov. V rovnakom rozsahu sa sústredenia zopakovali v júni 2010 v Chmeľovej. Prevažná väčšina účastníkov sústredení patrí medzi riešiteľov MO, takisto vedúci KMS sú často bývalí účastníci kôl MO, a okrem organizovania KMS sa podieľajú na opravovaní CK MO a výberových sústredení.

V školskom roku 2009/2010 bol spustený štvorročný projekt *Vyhľadávanie talentov v matematike a podpora ich výchovy*, ktorý pod číslom LPP-0253-09 podporila Agentúra na podporu výskumu a vývoja. Jeho hlavným riešiteľom je mim. prof. RNDr. Vojtech Bálint, CSc. V rámci projektu sa uskutočnili tri víkendové školenia pre učiteľov, ktorí na svojich školách vedú matematické krúžky. Z projektu títo učitelia dostávajú za vedenie krúžkov honoráre. Okrem toho sa v novembri 2009 v Terchovej konalo trojdňové sústredenie pre 56 úspešných riešiteľov krajských kôl 58. ročníka MO.

V decembri 2009 bola založená a spustená oficiálna internetová stránka SKMO. Jej adresa je *skmo.sk* a zverejňujeme na nej všetky termíny a dokumenty týkajúce sa MO (archív zadaní a riešení úloh, poradia všetkých krajských a vyšších kôl, atď.). Za prvých 12 mesiacov prevádzky stránka zaznamenala viac ako 115 000 prístupov z vyše 14 500 rôznych lokalít a viac ako 50 000 stiahnutí PDF-dokumentov. Postupne budeme obsah stránky rozširovať.

Na internete možno nájsť viacero stránok súvisiacich s MO. Spomeňme aspoň niektoré z nich:

skmo.sk – oficiálna stránka SKMO,
matematika.okamzite.eu – archív zadaní, poradí a riešení MO,
fpedas.uniza.sk/~novotny/MO – aktuálne dokumenty, najmä pre kraj Žilina,
www.olympiady.sk – stránka IUVENTY,
www.imo2010org.kz – stránka 51. IMO v Kazachstane,
memo2010.skmo.sk – stránka 4. MEMO v Strečne na Slovensku,
imo-official.org – oficiálna stránka IMO,
kms.sk – stránka KMS.

Záver úvodu tejto ročenky by sme radi využili na poďakovanie všetkým učiteľom a nadšencom, ktorí pripravujú žiakov na MO a podieľajú sa na propagácii a organizácii MO na školách. Uznanie patrí tiež pracovníkom obvodných a krajských komisií MO, krajských školských úradov a centier voľného času, ktorí zabezpečujú jednotlivé kolá. Napokon, ďakujeme pracovníkom IUVENTY podieľajúcim sa na organizácii CK MO, distribúcii úloh, komunikácii s MŠ SR a administratíve súvisiacej s čerpaním rozpočtu MO.

Peter Novotný, predseda SKMO

Výsledky

Celoštátne kolo kategórie A

Víťazi

1.	Martin VODIČKA	1 G Alejová, Košice	7 7 6 7 7 7	41
2.	Ladislav BAČO	4 G Poštová, Košice	7 6 3 7 7 7	37
	Michal HAGARA	4 G Jura Hronca, Bratislava	7 5 7 5 6 7	37
4.	Martin BACHRATÝ	4 G Veľká okružná, Žilina	7 5 6 6 6 1	31
	Jakub KONEČNÝ	4 G Grösslingová, Bratislava	6 5 5 5 6 4	31
6.	Vincent LAMI	4 G J. Selyeho, Komárno	5 3 4 5 6 2	25
7.	Marián HORŇÁK	2 G Párovská, Nitra	5 1 7 0 4 7	24
	Natália KARÁSKOVÁ	3 G Jura Hronca, Bratislava	5 1 6 6 6 0	24

Ďalší úspešní riešitelia

9.	Pavol GURIČAN	3 G Jura Hronca, Bratislava	6 0 5 5 6 0	22
	Marek KUKAN	4 G Grösslingová, Bratislava	1 0 6 3 7 5	22
11.	Róbert TÓTH	4 G Alejová, Košice	2 0 2 6 7 4	21
12.	Matej BALOG	3 G Grösslingová, Bratislava	4 0 5 5 5 1	20
	Ján HOZZA	3 G Jura Hronca, Bratislava	1 0 6 4 7 2	20
	Jakub SANTER	3 G M. Hattalu, Trstená	2 0 7 3 7 1	20
15.	Adam MIDLIK	4 G J. A. Raymana, Prešov	0 0 7 4 7 1	19
16.	Pavol KOSSACZKÝ	4 G Grösslingová, Bratislava	1 5 2 4 6 0	18
	Filip SLÁDEK	4 G A. Bernoláka, Námestovo	1 0 7 4 6 0	18
18.	Dominik CSIBA	3 ŠPMNDaG, Bratislava	1 0 7 0 7 1	16
19.	Martin UKROP	4 G Ľ. Štúra, Zvolen	1 0 6 4 3 1	15

Ostatní riešitelia

20.	Ondrej KOVÁČ	3 G sv. Cyrila a Metoda, Nitra	5 0 5 0 3 1	14
	Viktor SZABADOS	3 G Grösslingová, Bratislava	5 1 1 0 6 1	14
22.	Kamila ŠTYRÁKOVÁ	4 G P. O. Hviezdoslava, Dolný Kubín	0 0 6 4 3 0	13
23.	Peter ŠICHMAN	2 G Grösslingová, Bratislava	1 0 5 3 3 0	12
24.	Ladislav HOVAN	3 G Exnárova, Košice	1 3 2 0 4 1	11
25.	Peter MILOŠOVIČ	3 G Poštová, Košice	2 0 1 3 4 0	10
26.	Soňa GALOVIČOVÁ	2 G Veľká okružná, Žilina	2 0 2 0 5 0	9
	Matej JEČMEN	3 G Varšavská, Žilina	1 0 3 0 4 1	9
	Jakub KOCÁK	3 G arm. gen. L. Svobodu, Humenné	1 0 1 3 3 1	9
29.	Anna DRESSLEROVÁ	3 G Jura Hronca, Bratislava	1 0 4 0 3 0	8
	Viktor GREGOR	4 G Považská Bystrica	1 0 1 3 2 1	8
	Silvia ŠTRBOVÁ	3 G Párovská, Nitra	0 0 4 0 3 1	8
32.	Zoltán FÁBIK	4 G J. Selyeho, Komárno	3 0 1 0 3 0	7

	Jana FODOROVÁ	3 G J. G. Tajovského, B. Bystrica	1 0 2 0 4 0	7
	Andrej KOZÁK	3 G Grösslingová, Bratislava	1 0 0 2 4 0	7
	Ivana TONHAUSEROVÁ	4 G Párovská, Nitra	0 1 2 0 3 1	7
36.	Dávid HVIZDOŠ	3 G Poštová, Košice	1 0 1 0 4 0	6
37.	Kristína ŠEŠEROVÁ	3 G Grösslingová, Bratislava	1 0 0 1 3 0	5

Úspešnosť jednotlivých úloh je zaznamenaná v tabuľke.

Počet bodov	Spolu	Číslo úlohy					
		1.	2.	3.	4.	5.	6.
7 bodov	25	4	1	6	2	8	4
6 bodov	22	2	1	7	3	9	0
5 bodov	22	5	4	5	5	2	1
4 body	19	1	0	3	6	7	2
3 body	21	1	2	2	6	10	0
2 body	14	4	0	6	1	1	2
1 bod	41	16	4	6	1	0	14
0 bodov	58	4	25	2	13	0	14
Priemer	2,82	2,59	1,16	3,92	2,76	4,86	1,59

Krajské kolá

Z príslušného kraja a v príslušnej kategórii A, B, C a Z9 sú uvedení všetci, resp. aspoň prvých 10 úspešných riešiteľov.

Kraj Bratislava

Kategória A

1.	Michal HAGARA	4 Gymnázium Jura Hronca
2.	Ján HOZZA	3 Gymnázium Jura Hronca
	Jakub KONEČNÝ	4 Gymnázium Grösslingová
4.	Natália KARÁSKOVÁ	3 Gymnázium Jura Hronca
	Marek KUKAN	4 Gymnázium Grösslingová
6.	Pavol GURIČAN	3 Gymnázium Jura Hronca
7.	Anna DRESSLEROVÁ	3 Gymnázium Jura Hronca
	Peter ŠICHMAN	2 Gymnázium Grösslingová
9.	Dominik CSIBA	3 ŠpMNDaG Skalická
	Pavol KOSSACZKÝ	4 Gymnázium Grösslingová
	Viktor SZABADOS	3 Gymnázium Grösslingová

Kategória B

1.	Michal TÓTH	Gymnázium Jura Hronca
2.	Matej UHER	Gymnázium Grösslingová
3.	Ján KUZMÍK	Gymnázium Grösslingová
	Peter ŠICHMAN	Gymnázium Grösslingová
5.	Martin DUGAS	Gymnázium Jura Hronca
	Matej MOLNÁR	Gymnázium Jura Hronca
	Juraj POLÁCH	Gymnázium Grösslingová
	Martin STATELOV	Gymnázium Grösslingová
9.	Tomáš LANGER	Gymnázium Jura Hronca
10.	Šimon KARKALÍK	Gymnázium Jura Hronca

Kategória C

1.	Michal BOCK	Gymnázium Grösslingová
	Ly BUI DIEU	Gymnázium Jura Hronca
	Askar GAFUROV	Gymnázium Grösslingová
	Michal HLEDÍK	Gymnázium Jura Hronca
	Marta KOSSACZKÁ	Gymnázium Grösslingová
	Jaroslav PETRUCHA	Gymnázium
7.	Marián KUPČULÁK	Gymnázium Grösslingová
8.	Daniela PELLEROVÁ	Gymnázium Grösslingová
9.	Dušan KAVICKÝ	Gymnázium Jura Hronca
	Barbora WINCZEROVÁ	ŠpMNDaG Skalická

Kategória Z9

1.	Lam BUI TRUC	Gymnázium Grösslingová
	Martin GULIS	ZŠ Mierová
	Lukáš IVAN	Gymnázium Jura Hronca
	Dominika IŽDINSKÁ	Spojená škola sv. Vincenta de Paul
	Šimon JURINA	ZŠ Beňovského
	Barbora KOVÁČOVÁ	ŠpMNDaG Skalická
	Hana KRAKOVSKÁ	Gymnázium Grösslingová
	Matej UHRÍK	Gymnázium Grösslingová
9.	Michal BELÁK	Gymnázium Grösslingová
	Mário LIPOVSKÝ	ZŠ Sokolíkova

Kraj Nitra

Kategória A

1.	Vincent LAMI	4 Gymnázium J. Selyeho, Komárno
2.	Marián HORŇÁK	2 Gymnázium Párovská, Nitra
3.	Zoltán FÁBIK	4 Gymnázium J. Selyeho, Komárno
	Ondrej KOVÁČ	3 Gymnázium sv. Cyrila a Metoda, Nitra
	Silvia ŠTRBOVÁ	3 Gymnázium Párovská, Nitra
	Ivana TONHAUSEROVÁ	4 Gymnázium Párovská, Nitra

Kategória B

1.	Marián HORŇÁK	Gymnázium Párovská, Nitra
2.	Martin MACÁK	Gymnázium Golianova, Nitra
3.	Anikó KUKLIS	Gymnázium J. Selyeho, Komárno
4.	Daniel JINDRA	Gymnázium Párovská, Nitra
5.	Katarína REMIAROVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
6.	Henrieta BACIGÁLOVÁ	Gymnázium J. Kráľa, Zlaté Moravce
	Ferenc FARKAŠ	Gymnázium J. Selyeho, Komárno
	Daniela NOVÁKOVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
9.	Juraj PAPP	Piaristické gymn. sv. J. Kalazanského, Nitra
10.	Jakub PAVČO	Gymnázium A. Vrábla, Levice

Kategória C

1.	Park CHOONG EUN	Gymnázium J. Selyeho, Komárno
	Miloš KÚTNY	Gymnázium Párovská, Nitra
	László MÁZIK	Gymnázium J. Selyeho, Komárno
	Anikó NAGY	Gymnázium J. Selyeho, Komárno
	Zoltán PÉNZES	Gymnázium J. Selyeho, Komárno
	Máté ŠKODA	Gymnázium J. Selyeho, Komárno
	Ladislav ÜRGE	Gymnázium J. Selyeho, Komárno
	Norbert ZSITVA	Gymnázium J. Selyeho, Komárno
9.	Balázs FÖLDES	Gymnázium J. Selyeho, Komárno
10.	Milada KOVÁČOVÁ	Gymnázium sv. Cyrila a Metoda, Nitra
	Marek ŠUPPA	Gymnázium sv. Cyrila a Metoda, Nitra

Kategória Z9

1.	Tamás BALOGH	Gymnázium P. Pázmaňa, Nové Zámky
	Gabriela BENCZOVÁ	ZŠ Jelenec

	Juraj KOVÁČ	ZŠ sv. Don Bosca, Zlaté Moravce
	Daniel KUŤKA	ZŠ Komjatice
	Katarína PAVČOVÁ	Gymnázium A. Vrábla, Levice
	Orsolya RIGÓ	ZŠ M. Korvína, Kolárovo
	Ľudmila ŠIMKOVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
	Tibor ZAUKO	ZŠ Rozmarínová, Komárno
9.	Miroslav POLÁK	ZŠ Komjatice
10.	Katarína BÁTOVSKÁ	ZŠ Pri Podlužianke, Levice
	Oľga KISEĽOVÁ	ZŠ Na Hôrke, Nitra

Kraj Trnava

Kategória A

V kategórii A neboli žiadni úspešní riešitelia.

Kategória B

1.	Anna FAZEKAS	Súkr. gymnázium D. Streda
	Marta SÁRKÖZYOVÁ	Gymnázium Veľký Meder
3.	Dávid ČERNÝ	Súkr. gymnázium D. Streda
4.	Pavol KOPRDA	Gymnázium A. Merici, Trnava

Kategória C

1.	János LELKES	Gymnázium I. Madácha, Šamorín
2.	László SEBÖ	Súkr. gymnázium D. Streda
3.	Júlia BÖGI	Súkr. gymnázium D. Streda
	Zsóka VARGA	Gymnázium I. Madácha, Šamorín
5.	Márton BARTAL	Súkr. gymnázium D. Streda
	Annamária BODÓOVÁ	Gymnázium I. Madácha, Šamorín
7.	Dominik PISAROVIČ	Gymnázium A. Merici, Trnava
8.	Mária SPÁLOVÁ	Gymnázium J. Hollého, Trnava
	Peter ŠIŠAN	Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany
10.	Mária ŠEVČOVIČOVÁ	Gymnázium A. Merici, Trnava

Kategória Z9

1.	Michaela BIELIKOVÁ	Gymnázium V. Mihálika, Sereď
	Peter NOVÁČIK	ZŠ Veľké Kostoľany
3.	Norbert VASSY	ZŠ Veľké Kostoľany

4.	Julianna CSEPIOVÁ	ZŠ B. Bartóka, Veľký Meder
5.	Barnabás DOBOSZY	ZŠ s VJM, Horné Saliby
	Dominika VAVÁKOVÁ	ZŠ Brezová, Piešťany
	Brigitta VINCZEOVÁ	ZŠ Z. Kodálya, Galanta
8.	Andrea ADÁMIKOVÁ	ZŠ Veľké Kostoľany
	Mikuláš ČERNÝ	ZŠ Kľačany
10.	Norbert BITTERA	ZŠ Holice
	Dominika GODOVÁ	ZŠ M. R. Štefánika, Hlohovec
	Tatiana LOPATKOVÁ	ZŠ Chtelnica
	Viktória TÁRNOKOVÁ	ZŠ G. Szabóa, D. Streda
	Monika VROBELOVÁ	ZŠ Školská, Holíč

Kraj Trenčín

Kategória A

1.	Jarier WANNOUS	3	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
2.	Viktor GREGOR	4	Gymnázium Považská Bystrica
	Lukáš KOHÚTKA	4	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
	Andrej KREJČÍR	4	Gymnázium V. B. Nedožerského, Prievidza
	Štefan TRUSINA	4	Gymnázium J. Braneckého, Trenčín

Kategória B

1.	Samuel BEZNÁK	Gymnázium Dubnica nad Váhom
2.	Peter KOSEC	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
3.	Tomáš FARKAŠ	Gymnázium V. B. Nedožerského, Prievidza
4.	Patrik ŠVANČARA	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
5.	Ján BUDINSKÝ	Gymnázium Dubnica nad Váhom
	Dávid VELIKÝ	Gymnázium Dubnica nad Váhom

Kategória C

1.	Michal ČERVEŇÁK	Gymnázium 1. mája, Púchov
2.	Tomáš PLETŇA	Gymn. J. Jesenského, Bánovce nad Bebravou
3.	Vladan GLONČÁK	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
	Marek KURIŠ	Gymnázium V. B. Nedožerského, Prievidza
5.	Maroš ÁBEL	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
	Matúš URÍČEK	Gymnázium 1. mája, Púchov
7.	Sabina FRAŇOVÁ	Gymnázium Dubnica nad Váhom
	Jozef KRCHO	Gymn. J. Jesenského, Bánovce nad Bebravou

Kategória Z9

1.	Andrej ZBÍN	Gymnázium 1. mája, Púchov
2.	Milan LAŠO	ZŠ Bolešov
	Katarína POTOČNÁ	ZŠ Mládežnícka, Púchov
4.	Dominika HUBOVÁ	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
	Silvia PECHOVÁ	ZŠ Mládežnícka, Púchov
6.	Miloš PORUBAN	ZŠ Dlhé Hony, Trenčín
7.	Jozef BALAJ	ZŠ Dlhé Hony, Trenčín
	Július FLIMMEL	Gymnázium 1. mája, Púchov
	Jozef RAJNÍK	ZŠ Hodžova, Trenčín
10.	Michaela SMATANOVÁ	ZŠ Klátova Nová Ves
	Martin SUPEK	ZŠ Gorazdova, Púchov
	Martin ZEMKO	ZŠ Stará Turá

Kraj Žilina

Kategória A

1.	Filip SLÁDEK	4	Gymnázium A. Bernoláka, Námestovo
2.	Martin BACHRATÝ	4	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
3.	Zuzana ROŠŤÁKOVÁ	4	Gymnázium M. M. Hodžu, Lipt. Mikuláš
4.	Soňa GALOVIČOVÁ	2	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
5.	Kamila ŠTYRÁKOVÁ	4	Gymnázium P. O. Hviezdoslava, D. Kubín
6.	Jakub SANTER	3	Gymnázium M. Hattalu, Trstená
7.	Katarína DUNÍKOVÁ	3	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
	Matej JEČMEN	3	Gymnázium Varšavská, Žilina
	Mojmír MAJDIŠ	4	Gymnázium P. O. Hviezdoslava, D. Kubín

Kategória B

1.	Soňa GALOVIČOVÁ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
2.	Katarína JASENČÁKOVÁ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
3.	Štefan KAVEC	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
4.	Andrej VLČEK	Ev. gymnázium J. Tranovského, Lipt. Mikuláš
5.	Barbora HALAJOVÁ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
	Jozef KOZÁRIK	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
7.	Katarína LEŠKOVÁ	Gymnázium Sučany

KATEGÓRIA C

2.	Michal TURCEL	Gymnázium Varšavská, Žilina
3.	Jakub BAHYL	Gymnázium Varšavská, Žilina
4.	Jakub HUDEK	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
	Maroš JÁNOVEC	Gymnázium J. M. Hurbana, Čadca
6.	Martin GAZDAG	Gymnázium J. Lettricha, Martin

KATEGÓRIA Z9

1.	Zuzana HROMCOVÁ	ZŠ Mieru, Bytča
	Andrea JEČMENOVÁ	ZŠ Karpatská, Žilina
3.	Jakub MELO	Gymnázium sv. Františka z Assisi, Žilina
4.	Marek MARTAUS	ZŠ J. Vojtaššáka, Zákamenné
	Jukáš TRAJ	ZŠ J. Vojtaššáka, Zákamenné
	Mária VIGLAŠOVÁ	ZŠ Chlebnice
7.	Patrik BACHAN	ZŠ Nižná
	Kristína BALLOVÁ	ZŠ Černovských martýrov, Ružomberok
	Bianka GRAŇOVÁ	Gymnázium Varšavská, Žilina
	Radoslav HURTIŠ	ZŠ Karpatská, Žilina
	František OKÁL	ZŠ A. Bernoláka, Martin
	Filip PAVKOVČEK	ZŠ Liptovský Hrádok

Kraj Banská Bystrica

KATEGÓRIA A

1.	Jana FODOROVÁ	3 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
2.	Radka CHOMUTOVÁ	3 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
3.	Tomáš ŠKODA	4 Gymnázium J. Chalupku, Brezno
4.	Martin UKROP	4 Gymnázium Ľ. Štúra, Zvolen
5.	Jozef GANDŽALA	4 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Jozef PANTLÍK	3 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica

KATEGÓRIA B

1.	Milan BAKSA	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
2.	Mário NEUSCHL	Gymnázium Žiar nad Hronom
3.	Peter LACIKA	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Dávid VARGA	Gymnázium Tornaľa
5.	Marián OREM	Gymnázium Ľ. Štúra, Zvolen

Kategória C

1.	Adrián KORMOŠ	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
2.	Kristína KOMANOVÁ	Gymnázium A. Sládkoviča, B. Bystrica
	Vladimír MACKO	Gymnázium Ľ. Štúra, Zvolen
	Jela NOCIAROVÁ	Gymnázium B. S.-Timravy, Lučenec
5.	Dávid LUPTÁK	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
6.	Ján SIVIČEK	Gymnázium B. S.-Timravy, Lučenec
7.	Jakub CIMERMAN	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Ján MURÍN	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
9.	Kristína GÖMÖRYOVÁ	Gymnázium Ľ. Štúra, Zvolen
	Veronika HRAŠKOVÁ	Gymnázium B. S.-Timravy, Lučenec

Kategória Z9

1.	Samuel SUČÍK	Súkromná ZŠ Čelovce
2.	Matúš HALAJ	ZŠ Sitnianska, B. Bystrica
3.	Jaroslav VALOVČAN	ZŠ Vígľaš
4.	Ján HORVÁTH	ZŠ Hliník nad Hronom
	Jozef KAMENSKÝ	ZŠ Školská, Hriňová
6.	Jana ORAVCOVÁ	ZŠ Divín
	Kristián ZELIENKA	ZŠ Pohorelá
8.	Martin BARJAK	ZŠ Hrnčiarska, Zvolen
	Martin CESNAK	ZŠ Radvanská, B. Bystrica
	Zuzana MAGYAROVÁ	Gymnázium B. S.-Timravy, Lučenec
	Emília PETRÍKOVÁ	ZŠ Radvanská, B. Bystrica
	Zuzana SCHWARTZOVÁ	ZŠ SSV, B. Bystrica
	Norbert SLIVKA	ZŠ M. Rázusa, Zvolen
	Peter SOKOL	ZŠ SSV, B. Bystrica
	Matej ŠUĽAN	ZŠ Divín

Kraj Košice

Kategória A

1.	Ladislav BAČO	4 Gymnázium Poštová, Košice
2.	Martin VODIČKA	1 Gymnázium Alejová, Košice
3.	Peter MILOŠOVIČ	3 Gymnázium Poštová, Košice
4.	Róbert TÓTH	4 Gymnázium Alejová, Košice
5.	Dávid HVIZDOŠ	3 Gymnázium Poštová, Košice

6.	Ladislav HOVAN	3 Gymnázium Exnárova, Košice
7.	Michal KRAMÁREK	4 Gymnázium P. Horova, Michalovce
	Katarína RÉVÉSZOVÁ	3 Gymnázium Poštová, Košice

Kategória B

1.	Klára FICKOVÁ	Gymnázium Poštová, Košice
	Martin VODIČKA	Gymnázium Alejová, Košice
3.	Lucia KEKEŇÁKOVÁ	Gymnázium S. Máraiho, Košice
4.	Jana KRAJŇÁKOVÁ	Gymnázium P. Horova, Michalovce
	Jozef LAMI	Gymnázium Poštová, Košice
	Adam RAK	Ev. gymnázium J. A. Komenského, Košice

Kategória C

1.	Jakub ŠAFIN	Gymnázium P. Horova, Michalovce
	Martin VODIČKA	Gymnázium Alejová, Košice
3.	Lucia MAGUROVÁ	Gymnázium Poštová, Košice
4.	František LAMI	Gymnázium Poštová, Košice
5.	Marek GALAJDA	Gymnázium sv. T. Akvinského, Košice
	Ildikó JESO	Gymnázium S. Máraiho, Košice
7.	Matúš HLAVÁČIK	Gymnázium Alejová, Košice
	Dávid KANCIAN	Gymnázium Alejová, Košice
9.	Filip UNOKA	Gymnázium Poštová, Košice
10.	Bianka BENKOVÁ	Gymnázium Exnárova, Košice

Kategória Z9

1.	Lucia FLÓRIÁNOVÁ	ZŠ Park Angelinum, Košice
	Peter HOJNOŠ	ZŠ Nad Medzou, Spišská Nová Ves
	Lenka MAREKOVÁ	ZŠ Krosnianska, Košice
4.	Jana BÁTORYOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
	Tibor ENGLER	ZŠ Park Angelinum, Košice
	Michaela KOLCUNOVÁ	ZŠ Fábryho, Košice
	Maroš PATAKY	ZŠ Obchodná, Sečovce
	Matúš PORÁZIK	Gymnázium Alejová, Košice
	Miroslav STANKOVIČ	ZŠ Krosnianska, Košice
	Filip STRIPAJ	ZŠ Krosnianska, Košice
	Patrik TURZÁK	ZŠ Krosnianska, Košice
	Viktória VALACHOVÁ	ZŠ sv. Cyrila a Metoda, Spišská Nová Ves

Kraj Prešov

Kategória A

1.	Jakub KOCÁK	3 Gymnázium arm. gen. L. Svobodu, Humenné
2.	Adam MIDLIK	4 Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
3.	Jakub DEMJAN	3 Gymnázium Snina

Kategória B

1.	Marcel SCHICHMAN	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
2.	Barbora KLEMBAROVÁ	Gymnázium Kukučínova, Poprad
3.	Monika DANILÁKOVÁ	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
4.	Barbora MAREČÁKOVÁ	Gymnázium Kukučínova, Poprad
5.	Pavol GAJDOŠ	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
6.	Peter DUPEJ	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
7.	Viktor LUKÁČEK	Gymnázium sv. Moniky, Prešov
8.	Katarína KMEŤOVÁ	Gymnázium Kukučínova, Poprad
	Daniel KRAFČÍK	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
	Monika REMETOVÁ	Gymnázium L. Stockela, Bardejov
	Peter SLANINKA	Gymnázium sv. Moniky, Prešov
	Matej ŠIMA	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
	Ján ŠIMKO	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov

Kategória C

1.	Tomáš KELLO	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
2.	Kamila MAREŠOVÁ	Gymnázium D. Tatarku, Poprad
	Jakub SENDERÁK	Gymnázium sv. Moniky, Prešov
4.	Elena MIZERÁKOVÁ	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
	Pavel RICHTARIK	Gymnázium sv. Moniky, Prešov
	Tomáš ŠLAMPIAK	Gymnázium T. Vansovej, Stará Ľubovňa
7.	Marián OPIELA	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
8.	Júlia SARAKOVÁ	Gymnázium Kukučínova, Poprad
	Tomáš VERNARSKÝ	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
10.	Frederik HUDÁK	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
	Tomáš TURLÍK	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov

Kategória Z9

1.	Jaroslav HOFIERKA	ZŠ Vinbarg, Bardejov
	Daniel NEUPAUER	ZŠ Dr. Fischera, Kežmarok

	Pavol PLASKOŇ	ZŠ B. Krpelca, Bardejov
	Juraj POLAČOK	ZŠ Dargovských hrdinov, Humenné
	Tomáš VAŠKO	ZŠ Hertník
	Petra ZUSKOVÁ	ZŠ Bajkalská, Prešov
7.	Dominik GRIGĽÁK	ZŠ Dr. Fischera, Kežmarok
	Štefan HNÁT	ZŠ Levočská, Stará Ľubovňa
	Jozef LUKÁČ	ZŠ Kurima
10.	Roman FIRMENT	ZŠ Za vodou, Stará Ľubovňa
	Emília REPKOVÁ	ZŠ Nová Ľubovňa
	Richard TIŇO	ZŠ Šmeralova, Prešov

Zadania súťažných úloh

Kategória C

C – I – 1

Erika a Klárka hrali hru „slovný logik“ s týmito pravidlami: Hráč A si myslí slovo zložené z piatich rôznych písmen. Hráč B vysloví ľubovoľné slovo zložené z piatich rôznych písmen a hráč A mu prezradí, koľko písmen uhádol na správnej pozícii a koľko na nesprávnej. Písmená považujeme za rôzne, aj keď sa líšia iba mäkčeňom alebo dĺžňom (napríklad písmena A, Á sú rôzne). Keby si hráč A myslel napríklad slovo LOĎKA a B by vyslovil slovo KOLÁČ, odpovie hráč A, že jedno písmeno uhádol hráč B na správnej pozícii a dve na nesprávnej. Skrátene oznámi „$1 + 2$“, lebo sa naozaj obe slová zhodujú iba v písmene O vrátane pozície (druhej zľava) a v písmenách K a L, ktorých pozície sú odlišné. Erika si myslela slovo z piatich rôznych písmen a Klárka vyslovila slová KABÁT, STRUK, SKOBA, CESTA a ZÁPAL. Erika na tieto slová v danom poradí odpovedala $0 + 3$, $0 + 2$, $1 + 2$, $2 + 0$ a $1 + 2$. Zistite, aké slovo si Erika mohla myslieť.

(*Peter Novotný*)

C – I – 2

Vrcholom C pravouholníka $ABCD$ veďte priamky p a q, ktoré majú s daným pravouholníkom spoločný iba bod C, pričom priamka p má od bodu A najväčšiu možnú vzdialenosť a priamka q vymedzuje s priamkami AB, AD trojuholník s čo najmenším obsahom.

(*Leo Boček*)

C – I – 3

Určte všetky reálne čísla x, ktoré vyhovujú rovnici $4x - 2\lfloor x \rfloor = 5$. (Symbol $\lfloor x \rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako číslo x, tzv. dolnú celú časť reálneho čísla x.)

(*Jaroslav Švrček*)

C – I – 4

Kružnica $k(S; r)$ sa dotýka priamky AB v bode A. Kružnica $l(T; s)$ sa dotýka priamky AB v bode B a pretína kružnicu k v krajných bodoch C, D jej priemeru. Vyjadrite dĺžku a úsečky AB pomocou polomerov r, s. Dokážte ďalej, že priesečník M priamok CD, AB je stredom úsečky AB.

(*Leo Boček*)

C – I – 5

Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b platí

$$\sqrt{ab} \leqq \frac{2(a^2+3ab+b^2)}{5(a+b)} \leqq \frac{a+b}{2},$$

a pre každú z oboch nerovností zistite, kedy prechádza na rovnosť. (*Ján Mazák*)

C – I – 6

Nájdite všetky prirodzené čísla, ktoré nie sú deliteľné desiatimi a ktoré vo svojom dekadickom zápise majú niekde vedľa seba dve nuly, po ktorých vyškrtnutí sa pôvodné číslo 89-krát zmenší. (*Jaromír Šimša*)

C – S – 1

Ak zväčšíme čitateľ aj menovateľ istého zlomku o 1, dostaneme zlomok o hodnotu 1/20 väčší. Ak urobíme s väčším zlomkom rovnakú operáciu, dostaneme zlomok o hodnotu 1/12 väčší, ako bola hodnota zlomku na začiatku. Určte všetky tri zlomky. (*Jaromír Šimša*)

C – S – 2

Kružnice $k(S; 6\,\mathrm{cm})$ a $l(O; 4\,\mathrm{cm})$ majú vnútorný dotyk v bode B. Určte dĺžky strán trojuholníka ABC, pričom bod A je priesečník priamky OB s kružnicou k a bod C je priesečník kružnice k s dotyčnicou z bodu A ku kružnici l. (*Pavel Leischner*)

C – S – 3

Nájdite všetky dvojice nezáporných celých čísel a, b, pre ktoré platí

$$a^2 + b + 2 = a + b^2.$$

(*Ján Mazák*)

C – II – 1

Dokážte, že pre ľubovoľné celé čísla n a k väčšie ako 1 je číslo $n^{k+2} - n^k$ deliteľné dvanástimi. (*Vojtech Bálint*)

C – II – 2

Dokážte, že pre ľubovoľné čísla a, b z intervalu $\langle 1, \infty)$ platí nerovnosť

$$(a^2+1)(b^2+1) - (a-1)^2(b-1)^2 \geqq 4$$

a zistite, kedy nastane rovnosť. (*Jaromír Šimša*)

C – II – 3

Daná je kružnica k so stredom S. Kružnica l má väčší polomer ako kružnica k, prechádza jej stredom a pretína ju v bodoch M a N. Priamka, ktorá prechádza bodom N a je rovnobežná s priamkou MS, vytína na kružniciach tetivy NP a NQ. Dokážte, že trojuholník MPQ je rovnoramenný. (*Tomáš Jurík*)

C – II – 4

Určte všetky dvojice reálnych čísel x, y, ktoré vyhovujú sústave rovníc

$$\lfloor x + y \rfloor = 2010,$$
$$\lfloor x \rfloor - y = p,$$

ak a) $p = 2$, b) $p = 3$.

Symbol $\lfloor x \rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako dané reálne číslo x (tzv. dolná celá časť reálneho čísla x). (*Jaroslav Švrček*)

Kategória B

B – I – 1

Na stole ležia tri kôpky zápaliek: v jednej 2009, v druhej 2010 a v poslednej 2011. Hráč, ktorý je na ťahu, zvolí dve kôpky a z každej z nich odoberie po jednej zápalke. V hre sa pravidelne striedajú dvaja hráči. Hra končí, akonáhle niektorá kôpka zmizne. Vyhráva ten hráč, ktorý urobil posledný ťah. Popíšte stratégiu jedného z hráčov, ktorá mu zaručí výhru. (*Ján Mazák*)

B – I – 2

Na tabuli je napísané štvorciferné číslo, ktoré má presne šesť kladných deliteľov, z ktorých práve dva sú jednociferné a práve dva dvojciferné. Väčší z dvojciferných deliteľov je druhou mocninou prirodzeného čísla. Určte všetky čísla, ktoré môžu byť na tabuli napísané. (*Peter Novotný*)

B – I – 3

V rovine je daná úsečka AB. Zostrojte rovnobežník $ABCD$, pre ktorého stredy strán AB, CD, DA označené postupne K, L, M platí: body A, B, L, D ležia na jednej kružnici a aj body K, L, D, M ležia na jednej kružnici. (*Jaroslav Švrček*)

B – I – 4

Nájdite 2009 po sebe idúcich štvorciferných čísel, ktorých súčet je súčinom troch po sebe idúcich prirodzených čísel. (*Radek Horenský*)

B – I – 5

Vnútri kratšieho oblúka AB kružnice opísanej rovnostrannému trojuholníku ABC je zvolený bod D. Tetiva CD pretína stranu AB v bode E. Dokážte, že trojuholník so stranami dĺžok $|AE|$, $|BE|$, $|CE|$ je podobný s trojuholníkom ABD.

(*Pavel Leischner*)

B – I – 6

Reálne čísla a, b majú túto vlastnosť: rovnica $x^2 - ax + b - 1 = 0$ má v množine reálnych čísel dva rôzne korene, ktorých rozdiel je kladným koreňom rovnice $x^2 - ax + b + 1 = 0$.

a) Dokážte nerovnosť $b > 3$.

b) Pomocou b vyjadrite korene oboch rovníc. (*Jaromír Šimša*)

B – S – 1

Určte všetky hodnoty reálnych parametrov p, q, pre ktoré má každá z rovníc

$$x(x - p) = 3 + q, \quad x(x + p) = 3 - q$$

v obore reálnych čísel dva rôzne korene, ktorých aritmetický priemer je jedným z koreňov zvyšnej rovnice. (*Jaromír Šimša*)

B – S – 2

Dané sú dĺžky odvesien $a = |BC|$, $b = |AC|$ pravouhlého trojuholníka ABC, pričom $a > b$. Označme D stred prepony AB a E ($E \neq C$) priesečník strany BC s kružnicou opísanou trojuholníku ADC. Vypočítajte obsah trojuholníka EAD. (*Pavel Novotný*)

B – S – 3

Určte všetky dvojice celých kladných čísel m, n, pre ktoré platí $37 + 27^m = n^3$.

(*Martin Panák*)

B – II – 1

Kružnica $l(T; s)$ prechádza stredom kružnice $k(S; 2\,\text{cm})$. Kružnica $m(U; t)$ sa zvonka dotýka kružníc k a l, pričom $US \perp ST$. Polomery s a t vyjadrené v centimetroch sú celé čísla. Určte ich. (*Pavel Leischner*)

B – II – 2

V matematickej súťaži bolo zadaných 7 úloh a za každú z nich mohol súťažiaci získať 0, 1 alebo 2 body. Súťaže sa zúčastnilo 60 žiakov. Za každú úlohu bolo udelených aspoň 95 bodov. Dokážte, že medzi súťažiacimi nájdeme dvoch takých, že každú z úloh vyriešil aspoň jeden z nich za 2 body. (*Ján Mazák*)

B – II – 3

V rovine je daný rovnobežník $ABCD$. Označme postupne K, L, M stredy strán AB, CD, AD. Predpokladajme, že body A, B, L, D ležia na jednej kružnici a súčasne aj body K, L, D, M ležia na jednej kružnici. Dokážte, že $|AC| = 2 \cdot |AD|$.
(*Jaroslav Švrček*)

B – II – 4

Číslo n je súčinom štyroch prvočísel. Ak každé z týchto prvočísel zväčšíme o 1 a vzniknuté štyri čísla vynásobíme, dostaneme číslo o 2886 väčšie ako pôvodné číslo n. Určte všetky také n. (*Jaromír Šimša*)

Kategória A

A – I – 1

V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - y} &= z - 1,\\ \sqrt{y^2 - z} &= x - 1,\\ \sqrt{z^2 - x} &= y - 1.\end{aligned}$$

(*Radek Horenský*)

A – I – 2

Do kosoštvorca $ABCD$ je vpísaná kružnica. Uvažujme jej ľubovoľnú dotyčnicu pretínajúcu obe strany BC, CD a označme postupne R, S jej priesečníky s priamkami AB, AD. Dokážte, že hodnota súčinu $|BR| \cdot |DS|$ od voľby dotyčnice nezávisí. (*Leo Boček*)

A – I – 3

Na tabuli sú napísané čísla 1, 2, ..., 33. V jednom kroku zvolíme na tabuli dve čísla, z ktorých jedno je deliteľom druhého, obe zotrieme a na tabuľu napíšeme ich (celočíselný) podiel. Takto pokračujeme, kým na tabuli nezostanú iba čísla, z ktorých žiadne nie je deliteľom iného. (V jednom kroku môžeme zotrieť aj dve rovnaké čísla a nahradiť ich číslom 1.) Najmenej koľko čísel môže na tabuli zostať? (*Peter Novotný*)

A – I – 4

V ľubovoľnom ostrouhlom rôznostrannom trojuholníku ABC označme O, V a S postupne stred kružnice opísanej, priesečník výšok a stred kružnice vpísanej. Dokážte, že os úsečky OV prechádza bodom S práve vtedy, keď jeden vnútorný uhol trojuholníka ABC má veľkosť $60°$. (*Tomáš Jurík*)

A – I – 5

V nádrži je r_0 rýb, spoločný úlovok n rybárov. Prichádzajú pre svoj podiel jednotlivo. Každý si myslí, že sa dostavil ako prvý, a aby si vzal presne n-tinu aktuálneho počtu rýb v nádrži, musí predtým jednu z rýb pustiť späť do mora. Určte najmenšie možné číslo r_0 v závislosti od daného $n \geqq 2$, keď aj posledný rybár si aspoň jednu rybu odnesie. (*Dag Hrubý*)

A – I – 6

Pre dané prvočíslo p určte počet (všetkých) usporiadaných trojíc (a, b, c) čísel z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 2p^2\}$, ktoré spĺňajú vzťah

$$\frac{[a, c] + [b, c]}{a + b} = \frac{p^2 + 1}{p^2 + 2} \cdot c,$$

pričom $[x, y]$ označuje najmenší spoločný násobok čísel x a y. (*Tomáš Jurík*)

A – S – 1

V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\sqrt{x - y^2} = z - 1,$$
$$\sqrt{y - z^2} = x - 1,$$
$$\sqrt{z - x^2} = y - 1.$$

(*Radek Horenský*)

A – S – 2

Nájdite všetky možné hodnoty podielu

$$\frac{r + \varrho}{a + b},$$

pričom r je polomer kružnice opísanej a ϱ polomer kružnice vpísanej pravouhlému trojuholníku s odvesnami dĺžok a a b. (*Tomáš Jurík*)

A – S – 3

Na tabuli sú napísané čísla 1, 2, ..., 33. V jednom kroku zvolíme niekoľko čísel napísaných na tabuli (aspoň dve), ktorých súčin je druhou mocninou prirodzeného čísla, zvolené čísla zotrieme a na tabuľu napíšeme druhú odmocninu z ich súčinu. Takto pokračujeme, až na tabuli ostanú iba také čísla, že súčin žiadnych z nich nie je druhou mocninou. Koľko najmenej čísel môže na tabuli ostať? (*Peter Novotný*)

A – II – 1

Dokážte, že rovnica $x^2 + p|x| = qx - 1$ s reálnymi parametrami p, q má v obore reálnych čísel štyri riešenia práve vtedy, keď platí $p + |q| + 2 < 0$. (*Jaromír Šimša*)

A – II – 2

Daný je rovnobežník $ABCD$ s tupým uhlom ABC. Na jeho uhlopriečke AC v polrovine BDC zvoľme bod P tak, aby platilo $|\measuredangle BPD| = |\measuredangle ABC|$. Dokážte, že priamka CD je dotyčnicou ku kružnici opísanej trojuholníku BCP práve vtedy, keď úsečky AB a BD sú zhodné. (*Jaroslav Švrček*)

A – II – 3

Určte všetky celé kladné čísla m, n také, že n delí $2m - 1$ a m delí $2n - 1$.
(*Tomáš Szaniszlo*)

A – II – 4

V ľubovoľnom trojuholníku ABC označme O stred kružnice vpísanej, P stred kružnice pripísanej ku strane BC a D priesečník osi uhla CAB so stranou BC. Dokážte, že platí

$$\frac{2}{|AD|} = \frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|}.$$

(Kružnica pripísaná ku strane BC je taká kružnica, ktorá sa dotýka jednak strany BC, jednak oboch polpriamok opačných k polpriamkam BA a CA.) (*Pavel Leischner*)

A – III – 1

Určte všetky dvojice celých kladných čísel a, b, pre ktoré platí

$$4^a + 4a^2 + 4 = b^2.$$

(*Martin Panák*)

A – III – 2

Kruhový terč s polomerom 12 cm zasiahlo 19 výstrelov. Dokážte, že vzdialenosť niektorých dvoch zásahov je menšia ako 7 cm. (*Vojtech Bálint, Jaromír Šimša*)

A – III – 3

Rumburak uniesol na svoj hrad 31 členov strany A, 28 členov strany B, 23 členov strany C, 19 členov strany D a každého zavrel do samostatnej cely. Po práci sa občas mohli prechádzať po dvore a rozprávať sa. Akonáhle sa spolu začali rozprávať traja členovia troch rôznych strán, Rumburak ich za trest preregistroval do štvrtej strany. (Nikdy sa spolu nerozprávali viac ako traja unesení.)

a) Mohlo sa stať, že po určitom čase boli všetci unesení členmi jednej strany? Ktorej?
b) Určte všetky štvorice celých kladných čísel, ktorých súčet je 101 a ktoré ako počty unesených členov štyroch strán umožňujú, aby sa Rumburakovým pričinením stali časom všetci členmi jednej strany.

(*Vojtech Bálint, Jaromír Šimša*)

A – III – 4

Je daná kružnica k s tetivou AC, ktorá nie je priemerom. Na jej dotyčnici vedenej bodom A zvolíme bod $X \neq A$ a označíme D priesečník kružnice k s vnútrom úsečky XC (ak existuje). Trojuholník ACD doplníme na lichobežník $ABCD$ vpísaný do kružnice k. Určte množinu priesečníkov priamok BC a AD prislúchajúcich všetkým takým lichobežníkom. (*Pavel Leischner*)

A – III – 5

Na tabuli sú napísané čísla $1, 2, \ldots, 33$. V jednom kroku zvolíme dve čísla napísané na tabuli, ktorých súčin je druhou mocninou prirodzeného čísla, obe zvolené čísla zotrieme a na tabuľu napíšeme druhú odmocninu z ich súčinu. Takto pokračujeme, až na tabuli ostanú iba také čísla, že súčin žiadnych dvoch z nich nie je druhou mocninou. (V jednom kroku môžeme zotrieť aj dve rovnaké čísla a nahradiť ich tým istým číslom.) Dokážte, že na tabuli ostane aspoň 16 čísel. (*Peter Novotný*)

A – III – 6

Nájdite minimum výrazu

$$\frac{a+b+c}{2} - \frac{[a,b]+[b,c]+[c,a]}{a+b+c},$$

pričom premenné a, b, c sú ľubovoľné celé čísla väčšie ako 1 a $[x,y]$ označuje najmenší spoločný násobok čísel x, y. (*Tomáš Jurík*)

Riešenia súťažných úloh

Kategória C

C – I – 1

Slová ZÁPAL a STRUK nemajú spoločné písmená. Preto sa, ako vyplýva z odpovedí 1 + 2 a 0 + 2, medzi ich písmenami, ktoré dokopy tvoria množinu $\mathsf{M} = \{Z, Á, P, A, L, S, T, R, U, K\}$, nachádza všetkých päť písmen hľadaného slova. V slove SKOBA majú byť práve tri z hľadaných písmen. Sú to teda písmená S, K, A. (Zvyšné písmená B a O totiž do množiny M nepatria.) V slove CESTA majú byť len dve z hľadaných písmen, a obe na správnej pozícii. Sú to už nájdené S a A, ktoré teda patria na tretie, resp. piate miesto hľadaného slova (a písmeno T môžeme z množiny M „vylúčiť“). Písmeno K nemôže byť ani na prvom, ani na druhom mieste: vyplýva to z odpovedí pre slová KABÁT (0 + 3) a SKOBA (1 + 2). Takže je na štvrtom mieste a ostáva určiť prvé dve písmená. V slove STRUK sú len dve z hľadaných písmen (musia to teda byť S a K), obe na nesprávnych pozíciách. Preto z množiny M „vylúčime“ aj písmená R, U (a T, ak sme to doteraz neurobili). Zvyšné dve hľadané písmená potom patria do množiny $\{Z, Á, P, L\}$. Z podmienok pre slovo KABÁT vyplýva, že jedno z nich je Á. V slove ZÁPAL je práve jedno písmeno na správnej pozícii. Keby to bolo Z, nemali by sme kam uložiť písmeno Á. Takže Á je na druhom mieste a navyše môžeme vylúčiť písmeno Z. Na prvom mieste hľadaného slova môže byť L alebo P. Ľahko sa presvedčíme, že nájdené slová LÁSKA aj PÁSKA vyhovujú všetkým podmienkam úlohy.

C – I – 2

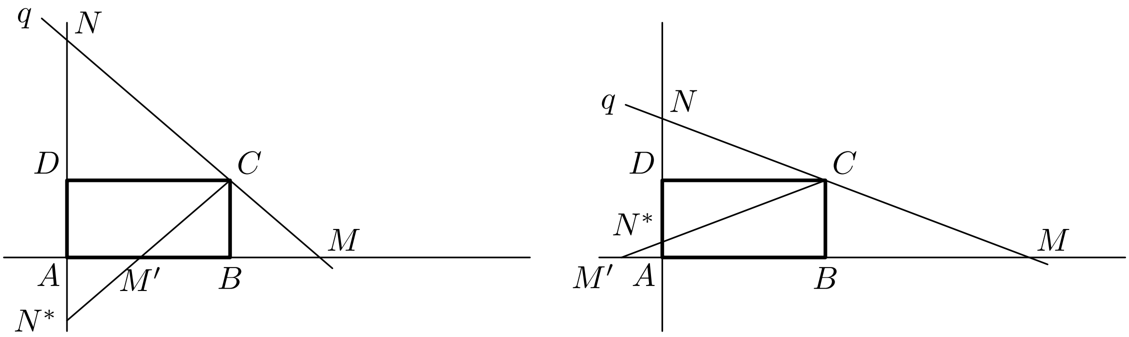
Päta P kolmice z bodu A na priamku p prechádzajúcu bodom C leží na Tálesovej kružnici nad priemerom AC. Vzdialenosť bodu A od priamky p, t. j. dĺžka úsečky AP, je teda nanajvýš rovná veľkosti priemeru AC. Pritom rovnosť nastane práve vtedy, keď je priamka p kolmá na uhlopriečku AC. Je zrejmé, že taká priamka p má s daným pravouholníkom spoločný iba bod C.

Zvoľme teraz ľubovoľnú priamku q tak, aby mala s pravouholníkom $ABCD$ spoločný iba bod C. Jej priesečníky s priamkami AB, AD označme M a N (v uvedenom poradí). Ďalej označme M' obraz bodu M v osovej súmernosti podľa priamky BC a N^* obraz bodu N v osovej súmernosti podľa priamky CD. Keďže $|\measuredangle NCD| + |\measuredangle MCB| = 180^\circ - |\measuredangle BCD| = 90^\circ$, vyplýva z práve uvedených súmerností rovnosť $|\measuredangle MCM'| = 2|\measuredangle MCB| = 2(90^\circ - |\measuredangle NCD|) = 180^\circ - 2|\measuredangle NCD| = 180^\circ - |\measuredangle NCN^*|$. Body C, M' a N^* teda ležia na jednej polpriamke s počiatkom C. Pre obsah trojuholníka AMN tak vždy platí (obr. 1)

$$S_{AMN} = S_{ABCD} + S_{BMC} + S_{DCN} = S_{ABCD} + S_{M'BC} + S_{DN^*C} \geqq 2S_{ABCD},$$

s rovnosťou práve vtedy, keď polpriamka $CM' = CN^*$ bude prechádzať vrcholom A

daného pravouholníka, t. j. práve vtedy, keď $M' = A = N^*$ (potom budú BC a CD strednými priečkami trojuholníka AMN).



Obr. 1

Záver. Priamku q, pre ktorú je obsah trojuholníka AMN minimálny, zostrojíme ako priamku CM, pričom M je obraz bodu A v osovej súmernosti podľa osi BC.

Priamka p s najväčšou možnou vzdialenosťou od bodu A pri daných podmienkach je kolmica na úsečku AC zostrojená v bode C.

Iné riešenie. Označme P pätu kolmice z bodu A na hľadanú priamku p a φ veľkosť odchýlky priamok p a AC. Pre vzdialenosť d priamky p od bodu A platí $d = |AP| = |AC| \sin\varphi \leqq |AC|$. Priamka p má teda najväčšiu možnú vzdialenosť od bodu A práve vtedy, keď je kolmá na AC.

Uvažujme ľubovoľnú priamku q, ktorá má s pravouholníkom $ABCD$ spoločný iba bod C, a budeme hľadať, za akých podmienok ohraničuje spolu s priamkami AB a AD trojuholník s najmenším obsahom. Použijeme označenie z obr. 1a označíme $a = |AB| = |DC|$, $x = |BM|$, $b = |AD| = |BC|$ a $y = |DN|$. Pomocou týchto veličín vyjadríme obsah trojuholníka AMN a odhadneme ho použitím AG-nerovnosti:

$$S_{AMN} = \frac{1}{2}(a+x)(b+y) = \frac{1}{2}(ab+xy+ay+bx) \geqq \frac{1}{2}\bigl(ab+xy+2\sqrt{ab\cdot xy}\bigr). \qquad (1)$$

Z podobnosti trojuholníkov BMC a DCN dostávame $|DN|/|BC| = |DC|/|BM|$, čo vzhľadom na zvolené označenie dáva $xy = ab$. Po dosadení do (1) a po jednoduchej úprave tak dostaneme $S_{AMN} \geqq 2ab = 2S_{ABCD}$. Pritom rovnosť nastane práve vtedy, keď platí $ay = bx$. Spolu s podmienkou $xy = ab$ predstavujú oba vzťahy sústavu rovníc s neznámymi x, y, ktorej vyriešením dostaneme $x = a$ a $y = b$. Dospeli sme teda k rovnakému výsledku ako v prvom riešení, kde sme tiež uviedli konštrukciu priamky q.

Iné riešenie. Postupujeme rovnako ako v predchádzajúcom riešení s tým rozdielom, že najskôr z podobnosti trojuholníkov BMC a DCN určíme $y = ab/x$ a potom odhadneme obsah trojuholníka AMN pomocou známeho tvrdenia $x/a + a/x \geqq 2$ takto:

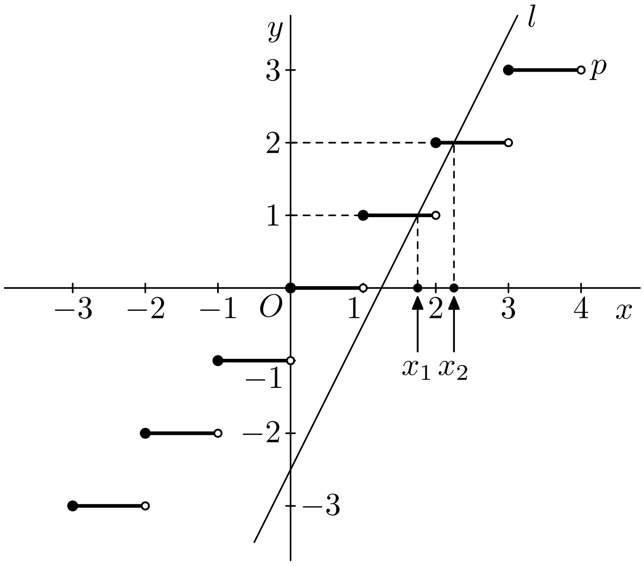
$$\begin{aligned} S_{AMN} &= \frac{1}{2}(a+x)(b+y) = \frac{1}{2}(a+x)\Bigl(b+\frac{ab}{x}\Bigr) = \\ &= \frac{1}{2}\Bigl(2ab+bx+\frac{a^2b}{x}\Bigr) = ab + \frac{1}{2}ab\Bigl(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\Bigr) \geqq 2ab. \end{aligned}$$

Rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x/a = a/x$, čo je ekvivalentné s podmienkou $x = a$.

C – I – 3

Položme $\lfloor x \rfloor = a$, potom $x = a + t$, pričom $t \in \langle 0, 1)$, a rovnicu $4(a + t) - 2a = 5$ ekvivalentne upravme na tvar $a = \frac{5}{2} - 2t$. Aby bolo číslo a celé, musí byť $2t = k \cdot \frac{1}{2}$, pričom k je nepárne číslo. Navyše $2t \in \langle 0, 2)$. Teda buď $2t = \frac{1}{2}$ a $a = 2$, alebo $2t = \frac{3}{2}$ a $a = 1$. Pôvodná rovnica má preto dve riešenia: $x_1 = 2{,}25$ a $x_2 = 1{,}75$.

Iné riešenie. Rovnicu upravíme na tvar $2x - \frac{5}{2} = \lfloor x \rfloor$. Jej riešením sú x-ové súradnice priesečníkov grafov funkcií $l\colon y = 2x - \frac{5}{2}$ a $p\colon y = \lfloor x \rfloor$. Grafy sa pretínajú v dvoch bodoch, ako vidíme na obr. 2. Pre prvý priesečník platí $\lfloor x \rfloor = 1$. Po dosadení do pôvodnej rovnice dostaneme $4x - 2 = 5$ a odtiaľ $x_1 = \frac{7}{4} = 1{,}75$. Pre druhý priesečník platí $\lfloor x \rfloor = 2$, takže $4x - 4 = 5$ a $x_2 = \frac{9}{4} = 2{,}25$.

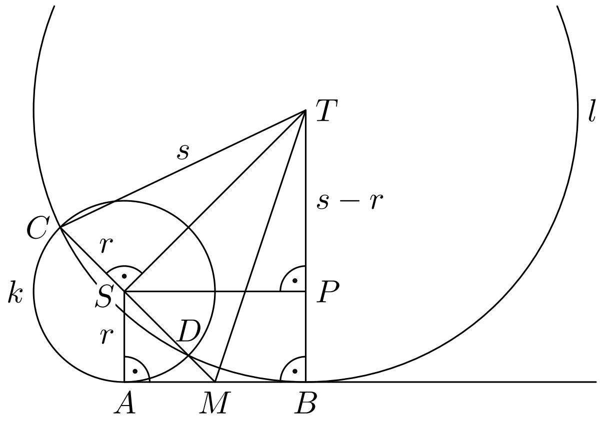


Obr. 2

Iné riešenie. Rovnicu upravíme na tvar $2x - \frac{5}{2} = \lfloor x \rfloor$. Taká rovnica bude splnená práve vtedy, keď číslo $2x - \frac{5}{2}$ bude celé a bude spĺňať nerovnosti $x - 1 < 2x - \frac{5}{2} \leqq x$, ktoré sú ekvivalentné s podmienkou $\frac{3}{2} < x \leqq \frac{5}{2}$. Pre takéto x zrejme hodnoty výrazu $2x - \frac{5}{2}$ vyplnia interval $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\rangle$. V ňom ležia práve dve celé čísla 1 a 2, teda hľadané x nájdeme z rovníc $2x - \frac{5}{2} = 1$ a $2x - \frac{5}{2} = 2$.

C – I – 4

Keďže kružnica l má ako tetivu priemer CD kružnice k a dané kružnice nie sú totožné, platí pre ich polomery nerovnosť $s > r$. Ak označíme P pätu kolmice z bodu S na úsečku BT (obr. 3), tak z Pytagorovej vety pre pravouhlé trojuholníky CST a SPT



Obr. 3

vyplýva

$$|ST|^2 = s^2 - r^2 \quad \text{a} \quad |ST|^2 = |SP|^2 + (s-r)^2. \tag{1}$$

Odtiaľ pre veľkosť úsečky SP vychádza

$$|SP|^2 = (s^2 - r^2) - (s-r)^2 = 2r(s-r).$$

A keďže $ABPS$ je pravouholník, dostávame

$$|AB| = |SP| = \sqrt{2r(s-r)}.$$

Z pravouhlých trojuholníkov AMS a MTS ďalej podľa prvej rovnosti v (1) vyplýva

$$|AM|^2 = |SM|^2 - r^2 = |MT|^2 - |ST|^2 - r^2 = |MT|^2 - s^2,$$

pritom z pravouhlého trojuholníka MBT máme

$$|BM|^2 = |MT|^2 - s^2.$$

Preto $|AM| = |BM|$, a bod M je teda stredom úsečky AB.

Poznámka. Záver, že M je stredom úsečky AB, vyplýva okamžite aj z mocnosti bodu M k obom kružniciam (bod M leží na tzv. chordále oboch kružníc).

C – I – 5

Pravá nerovnosť je ekvivalentná s nerovnosťou

$$4(a^2 + 3ab + b^2) \leqq 5(a+b)^2,$$

ktorú možno ekvivalentne upraviť na nerovnosť $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geqq 0$. Tá je splnená vždy a rovnosť v nej nastane práve vtedy, keď $a = b$.

Z ľavej nerovnosti odstránime zlomky a umocníme ju na druhú,

$$\begin{aligned} 25ab(a^2 + 2ab + b^2) &\leqq 4\bigl(a^4 + 9a^2b^2 + b^4 + 6a^3b + 6ab^3 + 2a^2b^2\bigr),\\ 25ab(a^2 + b^2) + 50a^2b^2 &\leqq 4a^4 + 4b^4 + 44a^2b^2 + 24ab(a^2 + b^2), \end{aligned}$$

takže po úprave dostaneme ekvivalentnú nerovnosť

$$4a^4 + 4b^4 - 6a^2b^2 \geqq ab(a^2 + b^2).$$

Po odčítaní výrazu $2a^2b^2$ od oboch strán nerovnosti sa nám podarí na oboch stranách použiť úpravu na štvorec. Dostaneme tak (opäť ekvivalentnú) nerovnosť

$$4(a^2 - b^2)^2 \geqq ab(a - b)^2.$$

Rozdiel štvorcov v zátvorke na ľavej strane ešte rozložíme na súčin a vzťah upravíme na tvar $4(a - b)^2(a + b)^2 \geqq ab(a - b)^2$.

Ak $a = b$, platí rovnosť. Ak $a \neq b$, môžeme poslednú nerovnosť vydeliť kladným výrazom $(a - b)^2$ a dostaneme tak nerovnosť $4(a + b)^2 \geqq ab$, čiže $4a^2 + 4b^2 + 7ab \geqq$ $\geqq 0$. Ľavá strana tejto nerovnosti je vždy kladná, preto vyšetrovaná nerovnosť platí pre všetky kladné čísla a, b, pričom rovnosť v nej nastane práve vtedy, keď $a = b$.

Iné riešenie. Aritmetický priemer c čísel a, b má tú vlastnosť, že sa od neho obe čísla líšia o rovnakú hodnotu d. Ak nahradíme premenné a, b v daných nerovnostiach premennými c, d, zápis nerovností aj dôkaz oboch vzťahov sa zjednoduší. Položme teda $c = \frac{1}{2}(a + b)$, potom $a = c + d$ a $b = c - d$ (pričom $d = \frac{1}{2}(a - b)$, ako sa ľahko môžeme presvedčiť). Takže $a^2 + b^2 = 2(c^2 + d^2)$, $ab = c^2 - d^2$, odkiaľ $a^2 + 3ab + b^2 = 5c^2 - d^2$. Označme ešte písmenami m a n ľavú a pravú stranu prvej z dokazovaných nerovností. Potom

$$m = \sqrt{ab} = \sqrt{c^2 - d^2},$$

$$n = \frac{2(a^2 + 3ab + b^2)}{5(a + b)} = \frac{2(5c^2 - d^2)}{5 \cdot 2c} = c - \frac{d^2}{5c} = \sqrt{\Bigl(c - \frac{d^2}{5c}\Bigr)^2} = \sqrt{c^2 - d^2\Bigl(\frac{2}{5} - \frac{d^2}{25c^2}\Bigr)}.$$

Keďže z vyjadrenia kladnej hodnoty m vidíme, že $d^2 < c^2$, pre výraz v poslednej zátvorke pod odmocninou platí

$$1 > \frac{2}{5} \geqq \frac{2}{5} - \frac{d^2}{25c^2} > \frac{2}{5} - \frac{1}{25} = \frac{9}{25} > 0,$$

čo znamená, že výraz pod odmocninou leží v uzavretom intervale medzi číslami $c^2 - d^2$ a c^2. Odtiaľ vyplýva $m \leqq n \leqq c$, pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď $d = 0$, t. j. keď $a = b$.

Poznámka. Z výsledkov súťažnej úlohy vyplýva, že rozdiel medzi aritmetickým a geometrickým priemerom dvoch kladných čísel možno zdola odhadnúť nezáporným lomeným výrazom takto:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\geqq\frac{a+b}{2}-\frac{2(a^2+3ab+b^2)}{5(a+b)}=\frac{(a-b)^2}{10(a+b)}.$$

Umocnením osamostatnenej odmocniny a ďalšími úpravami môžeme dokázať silnejší odhad rovnakého typu

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\geqq\frac{(a-b)^2}{4(a+b)}.$$

C – I – 6

Rozoberieme niekoľko prípadov.

a) Predpokladajme najskôr, že nuly sú na treťom a druhom mieste sprava. Hľadané číslo x má potom tvar $x = 1000a + b$, pričom a je prirodzené číslo (rovnako to bude aj v ďalších prípadoch, keď už to nebudeme pripomínať) a b nenulová cifra. Podmienku zo zadania $1000a + b = 89(10a + b)$ upravíme na tvar $5a = 4b$, z ktorého vyplýva, že b je násobok piatich. Vyhovuje tak iba $b = 5$ a $a = 4$, teda $x = 4005$.

b) Ak hľadané číslo x má nuly na štvrtom a treťom mieste sprava, je $x = 10\,000a+b$, pričom b je dvojciferné číslo. Podmienku zo zadania $10\,000a+b = 89(100a+b)$ upravíme na tvar $25a = 2b$, z ktorého vyplýva, že b je nepárny násobok čísla 25 (pripomíname, že x, a teda ani b, nie je deliteľné desiatimi). Odtiaľ $b = 25$, $a = 2$ alebo $b = 75$, $a = 6$, teda $x \in \{20\,025, 60\,075\}$.

c) Ak hľadané číslo x má nuly na piatom a štvrtom mieste sprava, je $x = 100\,000a + b$, pričom b je trojciferné číslo. Podmienku zo zadania $100\,000a + b = 89(1000a + b)$ upravíme na tvar $125a = b$, z ktorého vyplýva, že b je nepárny násobok čísla 125. Vyhovuje iba $b = 125$ a $a = 1$, $b = 375$ a $a = 3$, $b = 625$ a $a = 5$, $b = 875$ a $a = 7$, teda $x \in \{100\,125, 300\,375, 500\,625, 700\,875\}$.

d) Z predošlých prípadov vidíme, že pre hľadané číslo x tvaru $x = 10^{n+2}a+b$, pričom b je n-ciferné číslo, dostávame podmienku $10^{n+2}a + b = 89(10^n a + b)$, čiže $11 \cdot 10^n a = 88b$, odkiaľ pre $n \geqq 4$ dostávame podmienku $125 \cdot 10^{n-3}a = b$, podľa ktorej je b násobkom desiatich. Žiadne ďalšie x, ktoré by vyhovovalo zadaniu, teda neexistuje.

Záver. Hľadané čísla sú 4005, 20 025, 60 075, 100 125, 300 375, 500 625, a 700 875.

C – S – 1

Označme a/b pôvodný zlomok. Podľa zadania platia rovnosti

$$\frac{a+1}{b+1}-\frac{a}{b}=\frac{1}{20}\quad\text{a}\quad\frac{a+2}{b+2}-\frac{a}{b}=\frac{1}{12}\qquad(a,b\in\mathbb{N}),$$

ktoré sú ekvivalentné so vzťahmi

$$20b(a+1)-20a(b+1)=b(b+1)\quad\text{a}\quad 12b(a+2)-12a(b+2)=b(b+2).$$

Tie upravíme na tvar $19b - 20a = b^2$ a $22b - 24a = b^2$. Po odčítaní oboch vzťahov zistíme, že $4a = 3b$, čo po dosadení do druhej rovnosti dá $22b - 18b = b^2$, čiže $b^2 = 4b$. Vzhľadom na podmienku $b \neq 0$ odtiaľ vyplýva $b = 4$ a $a = 3$.

Hľadané zlomky sú teda $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ a $\frac{5}{6}$.

Iné riešenie. Označme a/b pôvodný zlomok. Zo vzťahov

$$\frac{1}{20} = \frac{1}{4 \cdot 5} \quad \text{a} \quad \frac{1}{12} = \frac{1}{4 \cdot 3} = \frac{2}{4 \cdot 6}$$

možno odhadnúť, že riešením by mohlo byť $b = 4$. Potom

$$\frac{4(a+1) - 5a}{4 \cdot 5} = \frac{1}{20} \quad \text{a} \quad \frac{4(a+2) - 6a}{4 \cdot 6} = \frac{1}{12},$$

čiže $a = 3$. Musíme sa však ešte presvedčiť, že úloha iné riešenie nemá. Podmienky úlohy vedú ku vzťahom

$$\frac{b-a}{b(b+1)} = \frac{1}{4 \cdot 5} \quad \text{a} \quad \frac{2(b-a)}{b(b+2)} = \frac{2}{4 \cdot 6}.$$

Z podielu ich ľavých a pravých strán potom vyplýva

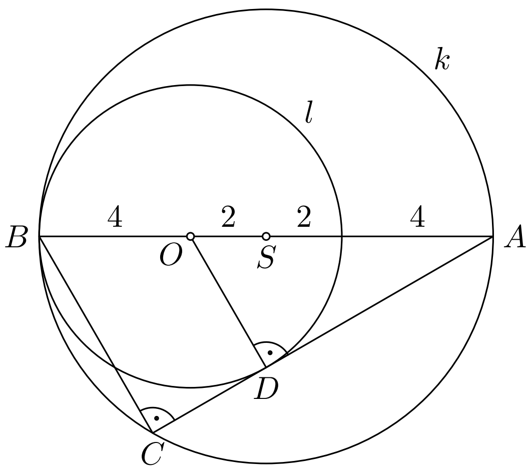
$$\frac{b+2}{b+1} = \frac{6}{5},$$

čomu vyhovuje jedine $b = 4$.

Poznámka. V úplnom riešení nesmie chýbať vylúčenie možnosti $b \neq 4$. Napríklad z podobných rovností $1/20 = 30/24 \cdot 25$ a $1/12 = 52/24 \cdot 26$ by sme mohli hádať, že $b = 24$, čo riešením nie je.

C – S – 2

Bod dotyku kružnice l s dotyčnicou z bodu A označme D (obr. 4). Z vlastností dotyčnice ku kružnici vyplýva, že uhol ADO je pravý. Zároveň je pravý aj uhol ACB (Tálesova



Obr. 4

veta). Trojuholníky ABC a AOD sú tak podobné podľa vety *uu*, lebo sa zhodujú v uhloch ACB, ADO a v spoločnom uhle pri vrchole A. Z uvedenej podobnosti vyplýva

$$\frac{|BC|}{|OD|} = \frac{|AB|}{|AO|}. \tag{1}$$

Zo zadaných číselných hodnôt vychádza $|OD| = |OB| = 4\,\text{cm}$, $|OS| = |SB| - |OB| = 2\,\text{cm}$, $|OA| = |OS| + |SA| = 8\,\text{cm}$ a $|AB| = 12\,\text{cm}$. Podľa (1) je teda $|BC| : 4\,\text{cm} = 12 : 8$ a odtiaľ $|BC| = 6\,\text{cm}$. Z Pytagorovej vety pre trojuholník ABC nakoniec zistíme, že $|AC| = \sqrt{12^2 - 6^2}\,\text{cm} = 6\sqrt{3}\,\text{cm}$.

C – S – 3

Rovnicu prepíšeme na tvar $2 = (b^2 - a^2) - (b - a)$, z ktorého po využití vzťahu pre rozdiel štvorcov a následnom vyňatí výrazu $b - a$ dostaneme $2 = (b - a)(a + b - 1)$. Keďže 2 je prvočíslo, máme pre uvedený súčin nasledujúce štyri možnosti:

a) $b - a = 1$ a $a + b - 1 = 2$, potom $a = 1$ a $b = 2$.

b) $b - a = 2$ a $a + b - 1 = 1$, potom $a = 0$ a $b = 2$.

c) $b - a = -1$ a $a + b - 1 = -2$. Druhú rovnicu možno prepísať na tvar $a + b = -1$, z ktorého vidíme, že rovnosť nenastane pre žiadnu dvojicu nezáporných celých čísel.

d) $b - a = -2$ a $a + b - 1 = -1$. Druhú rovnicu možno prepísať na tvar $a + b = 0$, z ktorého vidíme, že vyhovuje jediná dvojica nezáporných celých čísel $a = b = 0$, ktorá však nevyhovuje prvej rovnici.

Záver. Úloha má dve riešenia: Buď $a = 1$ a $b = 2$, alebo $a = 0$ a $b = 2$.

Poznámka. Namiesto rozboru štyroch možností môžeme začať úvahou, že nulové čísla a, b nie sú riešením úlohy, takže $a + b - 1 \geqq 0$, a teda aj $b - a \geqq 0$. Stačí teda uvažovať iba možnosti a) a b).

Iné riešenie. Rovnicu upravíme na tvar $2 = (b^2 - b) - (a^2 - a)$, resp. na tvar $2 = b(b - 1) - a(a - 1)$. Z nasledujúcej tabuľky a tvaru čísel $x^2 - x = x(x - 1)$ je zrejmé, že rozdiely medzi susednými hodnotami výrazov $x(x - 1)$ rastú s rastúcim x (ľahko sa o tom presvedčíme výpočtom: $(x + 1)x - x(x - 1) = 2x$).

x	0	1	2	3	4	5	...
$x(x-1)$	0	0	2	6	12	20	...

Môže teda platiť iba $b^2 - b = 2$ a $a^2 - a = 0$. Odtiaľ $a \in \{0, 1\}$ a $b = 2$. Riešením úlohy sú teda dve dvojice nezáporných celých čísel: $a = 0$, $b = 2$ a $a = 1$, $b = 2$.

C – II – 1

Vzhľadom na to, že $12 = 3 \cdot 4$, stačí ukázať, že číslo

$$a = n^{k+2} - n^k = n^k(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1)n^{k-1}$$

je deliteľné tromi a štyrmi. Prvé tri činitele posledného výrazu sú tri po sebe idúce prirodzené čísla, takže práve jedno z nich je deliteľné tromi, a preto aj číslo a je deliteľné tromi. A je deliteľné aj štyrmi, lebo pri párnom n je v poslednom výraze druhý a štvrtý činiteľ párny, zatiaľ čo pri nepárnom n je párny prvý a tretí činiteľ. Tým je dôkaz hotový.

Iné riešenie. Položme $a = n^{k+2} - n^k = n^k(n^2 - 1) = (n-1)n^k(n+1)$. Opäť ukážeme, že a je deliteľné štyrmi a tromi. Ak je n párne, je n^k deliteľné štyrmi pre každé celé $k \geqq 2$. Ak je n nepárne, sú činitele $n-1$ a $n+1$ párne čísla, takže a je deliteľné štyrmi pre každé celé $n \geqq 2$.

Deliteľnosť tromi je zrejmá pre $n = 3l$. Ak $n = 3l + 1$, pričom l je celé kladné číslo, je tromi deliteľný činiteľ $n - 1$ (a teda aj číslo a). Ak $n = 3l + 2$ (l je celé nezáporné), je tromi deliteľný činiteľ $n + 1$. Keďže iné možnosti pre zvyšok čísla n po delení tromi nie sú, je číslo a deliteľné tromi. Tým je požadovaný dôkaz ukončený.

C – II – 2

Danú nerovnosť ekvivalentne upravujme:

$$
\begin{aligned}
(a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1) - (a^2 - 2a + 1)(b^2 - 2b + 1) &\geqq 4,\\
(a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1) - (a^2b^2 - 2ab^2 + b^2) + &\\
+ (2a^2b - 4ab + 2b) - (a^2 - 2a + 1) &\geqq 4,\\
2ab(a + b) - 4ab + 2(a + b) &\geqq 4,\\
2(a + b)(ab + 1) &\geqq 4(ab + 1),\\
2(ab + 1)(a + b - 2) &\geqq 0.
\end{aligned}
$$

Vzhľadom na predpoklad $a \geqq 1$, $b \geqq 1$ je $a + b \geqq 2$, takže upravená nerovnosť zrejme platí. Rovnosť v nej (a teda aj v zadanej) nerovnosti pritom nastane práve vtedy, keď $a + b = 2$, čiže $a = b = 1$.

Iné riešenie. Pri označení $m = a^2 + 1$ a $n = b^2 + 1$ možno ľavú stranu dokazovanej nerovnosti prepísať na tvar $L = mn - (m - 2a)(n - 2b) = 2an + 2bm - 2ab - 2ab$, z ktorého vynímaním dostaneme $L = 2a(n - b) + 2b(m - a)$.

Čísla a, b sú z intervalu $\langle 1, \infty)$, preto $1 = m - a^2 \leqq m - a$. Odtiaľ $2b(m - a) \geqq 2$. Analogicky dostaneme $2a(n - b) \geqq 2$. Teda $L \geqq 4$ a rovnosť nastáva práve vtedy, keď $a = b = 1$.

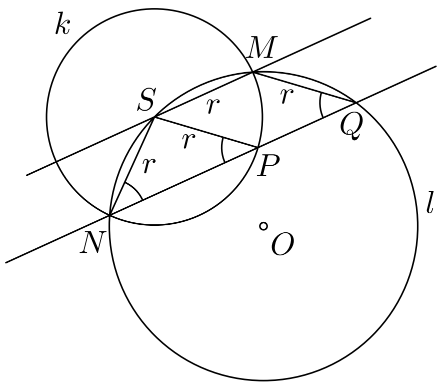
Iné riešenie. Po substitúcii $a = 1 + m$ a $b = 1 + n$, pričom $m, n \geqq 0$, získá ľavá strana nerovnosti tvar

$$L = (m^2 + 2m + 2)(n^2 + 2n + 2) - m^2n^2.$$

Po roznásobení, ktoré si stačí iba predstaviť, sa zruší člen m^2n^2, takže L bude súčtom nezáporných členov, medzi ktorými bude aj člen $2 \cdot 2 = 4$. Tým je nerovnosť $L \geqq 4$ dokázaná. A keďže medzi spomenutými členmi budú aj $4m$ a $4n$, z rovnosti $L = 4$ vyplýva $m = n = 0$, čo naopak rovnosť $L = 4$ tiež zrejme zaručuje. To znamená, že rovnosť nastáva práve vtedy, keď $a = b = 1$.

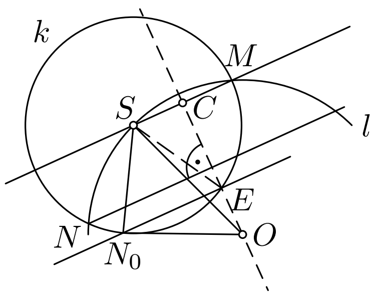
C – II – 3

Polomer kružnice k označme r. Označenie vrcholov P, Q v trojuholníku MPQ nie je dôležité, preto bez ujmy na všeobecnosti označme P ten z bodov priamky vedenej bodom N rovnobežne s priamkou MS, ktorý leží na kružnici k. Bod Q potom leží na kružnici l a štvoruholník $NQMS$ je lichobežník vpísaný do kružnice l (obr. 5). Je teda rovnoramenný s ramenami MQ a NS dĺžky r. Navyše aj úsečky SP a SM majú dĺžku r. Z rovnoramenného trojuholníka NPS a rovnoramenného lichobežníka $NQMS$ vyplýva rovnosť uhlov $|\measuredangle SPN| = |\measuredangle SNP| = |\measuredangle MQP|$. Priečka PQ teda pretína priamky SP a MQ pod rovnako veľkými uhlami, a preto (podľa vety o súhlasných uhloch) sú priamky SP a MQ rovnobežné. Štvoruholník $PQMS$ je teda rovnobežník, a keďže $|SM| = |SP| = r$, je to dokonca kosoštvorec. Odtiaľ je už zrejmé, že trojuholník MPQ je rovnoramenný s ramenami PQ a MQ dĺžky r.



Obr. 5

Poznámka. Existencia tetív NP a NQ v zadaní je zaručená vďaka predpokladu, že kružnica l má väčší polomer ako kružnica k. Ak označíme C stred úsečky SM a E ten priesečník kružnice k s osou úsečky SM, ktorý leží v polrovine SMO, bude stred O kružnice l ležať na polpriamke CE až za bodom E (obr. 6). Ďalší priesečník N oboch



Obr. 6

kružníc preto padne do pásu medzi rovnobežkami SM a N_0E v polrovine OCS, pričom N_0 je štvrtý vrchol kosoštvorca s vrcholmi S, M, E. Na to stačí ukázať, že kružnica l pretne polpriamku EN_0 až za bodom N_0, teda že jej polomer OS je väčší ako dĺžka úsečky ON_0. Toto porovnanie dvoch strán trojuholníka OSN_0 jednoducho vyplýva z porovnania jeho vnútorných uhlov: uhol pri vrchole N_0 je najväčší, lebo oba uhly pri protiľahlej strane OS sú menšie ako 60° (trojuholník ESN_0 je rovnostranný). Ľahko nahliadneme, že každá z rovnobežiek uvedeného pásu pretína každú z oboch kružníc v dvoch bodoch (vždy súmerne združených podľa príslušnej osi kolmej na SM).

Tým je dokázaná nielen existencia oboch tetív NP a NQ, ale aj to, že ich krajné body P a Q ležia na rovnakej strane od bodu N (ako na obr. 5), lebo oba body zrejme ležia v polrovine opačnej k spomenutej polrovine OCS.

C – II – 4

Keďže číslo p je celé, je aj $y = \lfloor x \rfloor - p$ celé číslo a $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + y$. Pôvodná sústava rovníc je teda ekvivalentná so sústavou

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor + y &= 2010, \\ \lfloor x \rfloor - y &= p, \end{aligned}$$

ktorú ľahko vyriešime napríklad sčítacou metódou. Dostaneme $\lfloor x \rfloor = \frac{1}{2}(2010 + p)$ (čo môže platiť len pre párne p) a $y = \lfloor x \rfloor - p$.

a) Pre $p = 2$ je riešením sústavy ľubovoľné $x \in \langle 1006, 1007)$ a $y = 1004$.

b) Pre $p = 3$ nemá sústava žiadne riešenie.

Iné riešenie. Položme $\lfloor x \rfloor = a$, potom $x = a + t$, pričom $t \in \langle 0, 1)$.

a) Pre $p = 2$ sústavu prepíšeme na tvar $y = a - 2$ a $\lfloor 2a - 2 + t \rfloor = 2010$. Z poslednej rovnice vyplýva $2a - 2 = 2010$, odtiaľ $a = 1006$. Keďže $t \in \langle 0, 1)$, vyhovuje pôvodnej sústave každé $x \in \langle 1006, 1007)$, pričom $y = 1004$.

b) Pre $p = 3$ dostávame $y = a - 3$ a $\lfloor 2a - 3 + t \rfloor = 2010$. Posledná rovnica je ekvivalentná so vzťahom $2a - 3 = 2010$, ktorému nevyhovuje žiadne celé číslo a. Pre $p = 3$ nemá daná sústava rovníc riešenie.

Kategória B

B – I – 1

Ak sú počty zápaliek na jednotlivých kôpkach a, b, c, povieme, že hra je v pozícii (a, b, c). Celkový počet zápaliek je na začiatku párny a po každom ťahu sa zmenší o 2, preto ostáva stále párny. Ak zanechá niektorý hráč po svojom ťahu pozíciu $(2, 2, c)$, pričom c je nejaké kladné párne číslo, prinúti súpera vytvoriť aspoň jednu jednozápalkovú kôpku a to mu umožní ďalším ťahom vyhrať. Pozícia $(2, 2, c)$ mohla vzniknúť z pozície $(3, 3, c)$ alebo z pozície $(3, 2, c+1)$, teda z pozícií, v ktorých sú dve čísla nepárne a jedno párne.

Dokážeme, že zanechávanie pozícií s tromi párnymi číslami zabezpečí výhru. Z takej pozície súper akýmkoľvek svojím ťahom vytvorí pozíciu s dvoma číslami nepárnymi a jedným párnym. Ak potom odoberieme zápalky z tých istých kôpok ako v predošlom ťahu súper (teda z tých, kde sú nepárne počty zápaliek), vytvoríme opäť pozíciu s tromi párnymi číslami. Stratégia zanechávania pozícií s tromi párnymi číslami je teda realizovateľná (za predpokladu, že celkový počet zápaliek je párny). Celkový počet zápaliek sa stále zmenšuje a počty zápaliek na jednotlivých kôpkach sa po každom ťahu zmenšia najviac o 1. Preto musí dôjsť k situácii, keď aspoň na jednej kôpke ostane presne jedna zápalka. To sa ale môže stať len po súperovom ťahu (číslo 1 je totiž nepárne). Odobratím tejto zápalky spolu s ktoroukoľvek ďalšou hru víťazne zakončíme.

Opísanú stratégiu môže použiť hráč, ktorý začína, ak odoberie vo svojom prvom ťahu po jednej zápalke z prvej a tretej kôpky. Ak ale urobí iný ťah, môže víťaznú stratégiu uplatniť jeho súper.

B – I – 2

Počet kladných deliteľov čísla, ktorého rozklad na súčin prvočísel má tvar $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$, je $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_r + 1)$. Číslo, ktoré má presne 6 kladných deliteľov, musí mať jeden z tvarov p^5 alebo $p^2 q$, pričom p a q sú prvočísla.

Uvažujme najskôr tvar p^5. Toto číslo má delitele 1, p, p^2, p^3, p^4, p^5; zrejme $1 < p < p^2 < p^3 < p^4 < p^5$. Dva najmenšie delitele sú jednociferné a ďalšie dva dvojciferné. Väčší z nich, teda p^3, ale nie je druhou mocninou prirodzeného čísla.

Hľadané číslo má teda tvar $p^2 q$ a jeho delitele sú 1, p, p^2, q, pq, $p^2 q$. Ak $p > q$, potom $1 < q < p < pq < p^2 < p^2 q$. Dva dvojciferné delitele by boli p a pq, ale pq nie je druhou mocninou prirodzeného čísla.

Musí teda byť $p < q$. Zo všetkých šiestich deliteľov sú druhými mocninami prirodzeného čísla len 1 a p^2. Preto je p^2 väčší z dvoch dvojciferných deliteľov a odtiaľ vyplýva $1 < p < q < p^2 < pq < p^2 q$. Delitele 1 a p sú jednociferné, q a p^2 sú dvojciferné, pq aspoň trojciferný a $p^2 q$ štvorciferný. Odtiaľ vyplýva $p \in \{5, 7\}$, $9 < q < p^2$, $pq > 99$, $999 < p^2 q < 10\,000$.

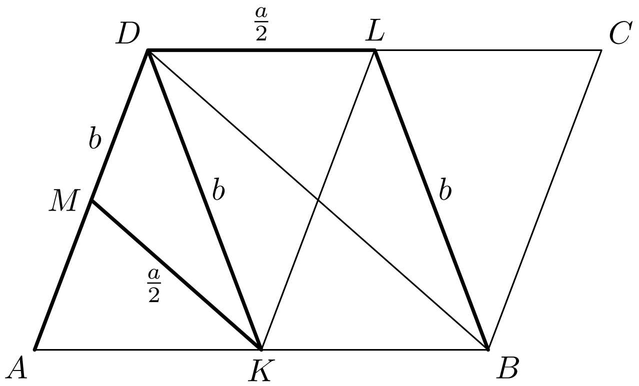
Pre $p = 5$ dostávame $9 < q < 25$, $5q > 99$ a $999 < 25q < 10\,000$, takže žiadne prvočíslo q nevyhovuje.

Pre $p = 7$ dostávame $9 < q < 49$, $7q > 99$ a $999 < 49q < 10\,000$; týmto podmienkam vyhovujú $q \in \{23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$.

Na tabuli je teda napísané jedno zo siedmich čísel $49 \cdot 23 = 1127$, $49 \cdot 29 = 1421$, $49 \cdot 31 = 1519$, $49 \cdot 37 = 1813$, $49 \cdot 41 = 2009$, $49 \cdot 43 = 2107$, $49 \cdot 47 = 2303$.

B – I – 3

Označme $a = |AB|$, $b = |AD|$ dĺžky strán hľadaného rovnobežníka (obr. 7). Lichobežníku $ABLD$ sa dá opísať kružnica, preto je rovnoramenný, a teda $|BL| = b$. Keďže sú úsečky KB a DL rovnobežné a zhodné, je $KBLD$ rovnobežník, a preto $|KD| = |BL| = b$. To znamená, že trojuholník AKD je rovnoramenný, takže bod D musí ležať na osi jeho základne AK.



Obr. 7

Úsečka KL je strednou priečkou rovnobežníka $ABCD$, preto $KL \parallel MD$; $KLDM$ je teda lichobežník, a pretože sa mu dá opísať kružnica, je rovnoramenný; odtiaľ $|KM| = |DL| = \frac{1}{2}a$. Keďže KM je stredná priečka trojuholníka BDA, má strana BD dĺžku $2 \cdot |KM| = a$. Bod D teda leží na kružnici so stredom B a polomerom a.

Konštrukcia. Zostrojíme stred K úsečky AB, os o úsečky AK a kružnicu k so stredom B a polomerom $|AB|$. Priesečník tejto kružnice s osou úsečky AK je bod D. Bod C je potom priesečník priamok vedených bodmi D a B rovnobežne s priamkami AB a AD.

Dôkaz správnosti konštrukcie. Štvoruholník $ABCD$ má protiľahlé strany rovnobežné, je to teda rovnobežník. Označíme L a M stredy úsečiek CD a AD. Z toho, že bod D leží na osi úsečky AK, vyplýva $|KD| = |AD|$. Keďže $KBLD$ je rovnobežník, platí $|BL| = |KD| = |AD|$. Lichobežník $ABDL$ je teda rovnoramenný, a preto body A, B, L, D ležia na jednej kružnici. Úsečka KM je stredná priečka trojuholníka BDA, preto $|KM| = \frac{1}{2}|BD| = \frac{1}{2}|AB| = |DL|$; $KLDM$ je teda rovnoramenný lichobežník, a preto jeho vrcholy ležia na jednej kružnici.

Diskusia. Priamka o má od bodu B menšiu vzdialenosť ako bod A, takže pretína kružnicu k v dvoch bodoch. Úloha má teda v každej polrovine s hraničnou priamkou AB jedno riešenie.

Iné riešenie. Tak ako v prvom riešení dokážeme, že $|KD| = |AD|$ a $|DB| = |AB|$. Trojuholníky AKD a DAB sú teda rovnoramenné, a keďže sa zhodujú v uhle pri vrchole A, sú podobné. Preto $|AK|/|AD| = |DA|/|AB|$, čiže $\frac{1}{2}a/b = b/a$ a odtiaľ $b = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Bod D je teda priesečníkom kružníc so stredmi A a K a polomerom $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$.

B – I – 4

Označme prostredné z hľadaných čísel a. Súčet čísel $a-1004$, $a-1003$, …, $a+1003$, $a+1004$ je $2009a = 41 \cdot 49 \cdot a$, pričom $2004 \leqq a \leqq 8995$. Má platiť

$$41 \cdot 49 \cdot a = n(n+1)(n+2)$$

pre vhodné prirodzené číslo n. Keďže $2009 \cdot 2004 \leqq n(n+1)(n+2) < (n+1)^3$, musí platiť $n+1 > \sqrt[3]{2009 \cdot 2004}$, a teda $n \geqq 159$. Podobne z nerovností $2009 \cdot 8995 \geqq n(n+1)(n+2) > n^3$ dostávame $n < \sqrt[3]{2009 \cdot 8995}$, čiže $n \leqq 262$.

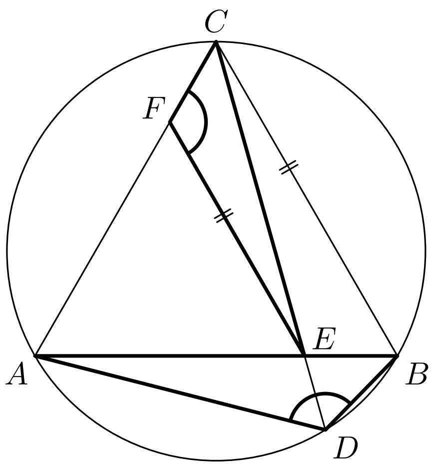
Súčin $n(n+1)(n+2)$ má byť deliteľný číslami 41 a 49. Žiadny z činiteľov n, $n+1$, $n+2$ nemôže byť deliteľný oboma číslami 41 aj 49, lebo $41 \cdot 49 > 262 + 2$. Siedmimi je deliteľný nanajvýš jeden z činiteľov n, $n+1$, $n+2$; preto musí niektorý z nich byť deliteľný číslom 49. Budeme teda medzi číslami 159, 160, …, 264 hľadať také dve, ktorých rozdiel je 1 alebo 2, pričom jedno z nich je deliteľné číslom 41 a druhé číslom 49. Násobky čísla 41 sú 164, 205 a 246, násobky čísla 49 sú 196 a 245. Vyhovujúce čísla sú teda 245 a 246 a máme dve možnosti:

a) $n = 245$, $n+1 = 246$, $n+2 = 247$, $a = 245 \cdot 246 \cdot 247/2009 = 7410$ a hľadané čísla sú 6406, 6407, …, 8414;

b) $n = 244$, $n+1 = 245$, $n+2 = 246$, $a = 244 \cdot 245 \cdot 246/2009 = 7320$ a hľadané čísla sú 6316, 6317, …, 8324.

B – I – 5

Veďme bodom E rovnobežku so stranou BC a označme F jej priesečník so stranou AC. Trojuholník AEF je rovnostranný, preto $|EF| = |AE|$ a tiež $|CF| = |BE|$. Trojuholník FEC má teda dĺžky strán $|AE|$, $|BE|$, $|CE|$. Dokážeme, že je podobný s trojuholníkom ABD (obr. 8).



Obr. 8

Uhly ACD a ABD sú obvodové nad tetivou AD, preto sú zhodné. Uhol FEC je zhodný s uhlom ECB (striedavé uhly) a ten je zhodný s obvodovým uhlom DAB. Podľa vety uu sú teda trojuholníky ECF a ABD naozaj podobné.

Iné riešenie. Obvodové uhly DAB a DCB sú zhodné, rovnako aj uhly ADC a ABC, a preto sú trojuholníky ADE a CBE podobné. Odtiaľ vyplýva $|AE|/|AD| = |CE|/|CB| = |CE|/|AB|$. Analogicky aj trojuholníky DEB a AEC sú podobné, odkiaľ $|BE|/|BD| = |CE|/|AC| = |CE|/|AB|$. Z rovností $|AE|/|AD| = |CE|/|AB| = |BE|/|BD|$ vyplýva podobnosť trojuholníka s dĺžkami strán $|AE|$, $|CE|$, $|BE|$ s trojuholníkom ABD.

B – I – 6

Označme x_1 menší a x_2 väčší koreň prvej rovnice. Potom platí $x_1 + x_2 = a$, $x_1x_2 = b - 1$. Druhá rovnica má koreň $x_2 - x_1$, a keďže súčet oboch koreňov je a, musí byť druhý koreň $a - (x_2 - x_1) = x_1 + x_2 - x_2 + x_1 = 2x_1$. Súčin koreňov druhej rovnice je $(x_2 - x_1) \cdot 2x_1 = b + 1$. Odtiaľ dostávame $b = -1 + 2x_1x_2 - 2x_1^2 = -1 + 2(b - 1) - 2x_1^2$, a teda

$$b = 3 + 2x_1^2 > 3, \tag{1}$$

lebo z rovnosti $x_1 = 0$ by vyplývalo $b + 1 = b - 1 = 0$.

Keďže $x_2 - x_1 > 0$ a $b + 1 > 0$, musí byť aj $x_1 > 0$; z (1) máme $x_1 = \sqrt{(b - 3)/2}$ a ďalej

$$x_2 = \frac{b-1}{x_1} = \frac{(b-1)\sqrt{2}}{\sqrt{b-3}}.$$

Korene druhej rovnice sú potom

$$x_2 - x_1 = \frac{b+1}{\sqrt{2(b-3)}} \qquad \text{a} \qquad 2x_1 = \sqrt{2(b-3)}.$$

Iné riešenie. Korene prvej rovnice sú

$$x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b + 4}}{2}, \qquad x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b + 4}}{2},$$

pričom pre diskriminant máme

$$D = a^2 - 4(b - 1) > 0. \tag{2}$$

Rozdiel koreňov $x_2 - x_1 = \sqrt{a^2 - 4b + 4}$ je koreňom druhej rovnice, a preto

$$\begin{aligned} a^2 - 4b + 4 - a\sqrt{a^2 - 4b + 4} + b + 1 &= 0, \\ a^2 - 3b + 5 &= a\sqrt{a^2 - 4b + 4}, \qquad (3) \\ a^4 + 2a^2(5 - 3b) + (3b - 5)^2 &= a^4 - 4a^2b + 4a^2, \\ (3b - 5)^2 &= a^2(2b - 6). \end{aligned}$$

Rovnosť $a = 0$ nastáva práve vtedy, keď $3b - 5 = 0$; potom by ale neplatilo (2). Preto $a^2 > 0$, $(3b-5)^2 > 0$, a teda aj $2b - 6 > 0$, čiže $b > 3$. Z (2) a (3) potom vyplýva $a > 0$, a teda $a = (3b-5)/\sqrt{2(b-3)}$; ďalej potom

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{3b-5}{\sqrt{2(b-3)}} - \sqrt{\frac{(3b-5)^2}{2(b-3)} - 4b + 4}\right) = \sqrt{\frac{b-3}{2}},$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3b-5}{\sqrt{2(b-3)}} + \sqrt{\frac{(3b-5)^2}{2(b-3)} - 4b + 4}\right) = \frac{(b-1)\sqrt{2}}{\sqrt{b-3}}.$$

Druhá rovnica má korene

$$x_3 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b - 4}}{2} = \frac{b+1}{\sqrt{2(b-3)}} = x_2 - x_1,$$

$$x_4 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b - 4}}{2} = \sqrt{2(b-3)}.$$

B – S – 1

Z Viètových vzťahov pre korene kvadratickej rovnice (ktoré vyplývajú z rozkladu daného kvadratického trojčlena na súčin koreňových činiteľov) ľahko zistíme, že súčet koreňov prvej rovnice je p, takže ich aritmetický priemer je $\frac{1}{2}p$. Toto číslo má byť koreňom druhej rovnice, preto

$$\frac{p}{2} \cdot \frac{3p}{2} = 3 - q. \tag{1}$$

Podobne súčet koreňov druhej rovnice je $-p$, ich aritmetický priemer je $-\frac{1}{2}p$, a preto

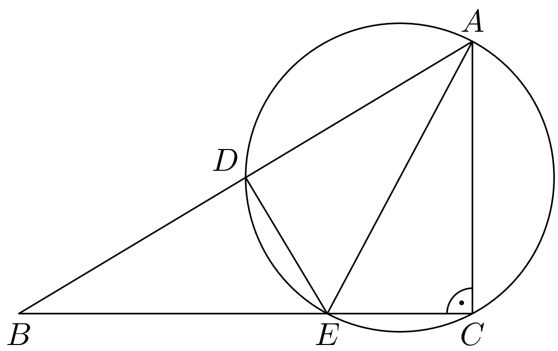
$$-\frac{p}{2} \cdot \left(-\frac{3p}{2}\right) = 3 + q. \tag{2}$$

Porovnaním oboch vzťahov (1) a (2) máme $3 - q = 3 + q$, čiže $q = 0$ a z (1) potom vyjde $p = 2$ alebo $p = -2$.

Z oboch nájdených riešení dostaneme tú istú dvojicu rovníc $x(x-2) = 3$, $x(x+2) = 3$. Korene prvej z nich sú čísla -1 a 3, ich aritmetický priemer je 1. Korene druhej rovnice sú čísla 1 a -3, ich aritmetický priemer je -1.

B – S – 2

Označme c dĺžku prepony AB, takže $|AD| = |BD| = \frac{1}{2}c$. Štvoruholník $ADEC$ je tetivový a uhol ECA je pravý, preto aj protiľahlý uhol ADE je pravý (obr. 9). Pravouhlé trojuholníky ABC a EBD majú uhol pri vrchole B spoločný, preto sú podobné. Odtiaľ



Obr. 9

$$\frac{|ED|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}, \quad \text{a preto} \quad |ED| = \frac{bc}{2a}.$$

Obsah pravouhlého trojuholníka EAD je teda (s využitím Pytagorovej vety)

$$S = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |ED| = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{bc}{2a} = \frac{bc^2}{8a} = \frac{b(a^2+b^2)}{8a}.$$

B – S – 3

Rovnicu upravíme na tvar $37 = n^3 - 27^m$ a rozdiel tretích mocnín rozložíme na súčin:

$$37 = (n - 3^m)(n^2 + n \cdot 3^m + 9^m).$$

Číslo 37 je prvočíslo a na pravej strane rovnosti je súčin dvoch celých čísel, pričom druhý činiteľ je väčší ako 1. Preto musí platiť

$$n - 3^m = 1 \tag{1}$$

a

$$n^2 + n \cdot 3^m + 9^m = 37. \tag{2}$$

Pre $m \geqq 2$ je $n^2 + n \cdot 3^m + 9^m > 9^2 > 37$, takže ostáva jediná možnosť $m = 1$; z (1) potom vyplýva $n = 1 + 3^m = 4$. Skúškou sa presvedčíme, že $37 + 27^1 = 4^3$, alebo overíme, že dvojica $m = 1$, $n = 4$ vyhovuje podmienke (2).

Iné riešenie. Ako v prvom riešení odvodíme sústavu rovníc (1), (2). Z (1) vyjadríme $3^m = n - 1$ a dosadíme do (2). Úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} n^2 + n(n-1) + (n-1)^2 &= 37, \\ n^2 - n - 12 &= 0, \\ (n-4)(n+3) &= 0. \end{aligned}$$

Táto rovnica má v obore celých kladných čísel jediné riešenie $n = 4$. Potom $3^m = n - 1 = 3$, takže $m = 1$.

B – II – 1

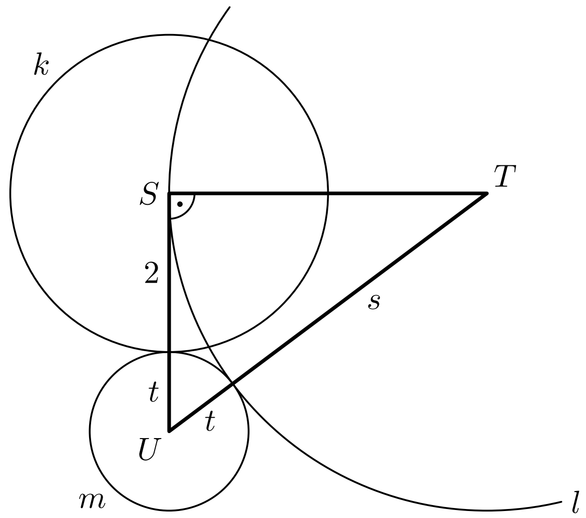
Trojuholník UST je pravouhlý. Jeho prepona UT má dĺžku $s + t$, dĺžky odvesien sú $|US| = t + 2$, $|ST| = s$ (obr. 10). Podľa Pytagorovej vety platí

$$(s + t)^2 = (t + 2)^2 + s^2.$$

Úpravami postupne dostávame

$$\begin{aligned} s^2 + 2st + t^2 &= t^2 + 4t + 4 + s^2, \\ st &= 2t + 2, \\ t(s - 2) &= 2. \end{aligned}$$

Čísla t a $s - 2$ sú celé, preto t musí byť deliteľom čísla 2. Keďže t je kladné, sú len dve možnosti; ak $t = 1$ cm, tak $s = 4$ cm, a ak $t = 2$ cm, tak $s = 3$ cm.



Obr. 10

B – II – 2

Najprv dokážeme, že každú úlohu vyriešilo za dva body aspoň 35 žiakov: Keby niektorú úlohu vyriešilo za 2 body a súťažiacich, pričom $a < 35$, bolo by za túto úlohu pridelených najviac $2a + 60 - a < 95$ bodov, čo je v rozpore so zadaním. Celkový počet dvojbodových riešení je preto aspoň $7 \cdot 35 = 245$. Keďže $245 > 4 \cdot 60$, musel niektorý žiak vyriešiť za dva body aspoň 5 úloh.

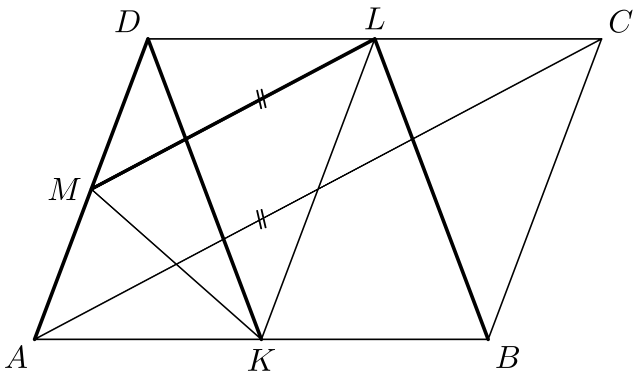
Ďalej budeme namiesto „vyriešiť úlohu za dva body“ písať stručnejšie len „vyriešiť úlohu“. Ak niektorý žiak vyriešil všetkých 7 úloh, môžeme k nemu pridať ľubovoľného druhého žiaka. Ak niektorý žiak vyriešil 6 úloh, pridáme k nemu ktoréhokoľvek zo žiakov, ktorí vyriešili zvyšnú úlohu (máme z čoho vyberať, pretože každú úlohu vyriešilo aspoň 35 žiakov). Nakoniec uvažujme situáciu, keď niektorý súťažiaci A vyriešil presne 5 úloh. Každú z dvoch zvyšných úloh vyriešilo aspoň 35 žiakov (iných ako A). A keďže všetkých žiakov iných ako A je 59, musí medzi nimi byť aspoň $2 \cdot 35 - 59 = 11$ takých, ktorí vyriešili obidve tieto úlohy. Ľubovoľného z nich môžeme pridať k žiakovi A.

Iné riešenie. „Vyriešiť úlohu“ bude znamenať to isté ako v prvom riešení.

Za všetkých 7 úloh dokopy bolo udelených aspoň $95 \cdot 7 = 665 > 60 \cdot 11$ bodov, takže niektorý žiak získal aspoň 12 bodov, a teda vyriešil aspoň päť úloh (žiak, ktorý vyriešil práve k úloh, získal totiž najviac $2k + (7 - k) = k + 7$ bodov). Vyberme teda žiaka A a 5 konkrétnych úloh z tých, ktoré vyriešil. Za zvyšné dve úlohy získalo zvyšných 59 žiakov aspoň $2 \cdot (95 - 2) = 186 > 3 \cdot 59$ bodov, takže jeden z nich, povedzme žiak B, získal 4 body, a teda vyriešil obe úlohy. Dvojica žiakov A, B má požadovanú vlastnosť.

B – II – 3

Lichobežníky $ABLD$ a $KLDM$ sú rovnoramenné, pretože sú tetivové. Odtiaľ vyplýva zhodnosť ramien $|AD| = |BL|$ a zhodnosť uhlopriečok $|KD| = |LM|$ (obr. 11). Úsečky KB a DL sú rovnobežné a zhodné, preto je $KBLD$ rovnobežník a platí $|KD| = |BL|$. Úsečka ML je strednou priečkou trojuholníka ACD, preto $|AC| = 2 \cdot |ML|$. Spojením uvedených rovností máme $|AC| = 2 \cdot |ML| = 2 \cdot |KD| = 2 \cdot |BL| = 2 \cdot |AD|$.



Obr. 11

Iné riešenie. Ako v tretej úlohe domáceho kola dokážeme, že $|BD| = |AB| = \sqrt{2} \cdot |AD|$. Ďalej využijeme známu rovnobežníkovú rovnosť $|AC|^2 + |BD|^2 = 2 \cdot |AB|^2 + 2 \cdot |AD|^2$. Dosadením dostaneme $|AC|^2 + 2 \cdot |AD|^2 = 4 \cdot |AD|^2 + 2 \cdot |AD|^2$ a odtiaľ $|AC|^2 = 4 \cdot |AD|^2$ čiže $|AC| = 2 \cdot |AD|$.

B – II – 4

Ak označíme a, b, c, d prvočísla, ktorých súčinom je číslo n, platí rovnosť

$$(a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1) = abcd + 2886.$$

Keby boli všetky prvočísla a, b, c, d nepárne, bolo by na ľavej strane tejto rovnosti párne číslo, ale na pravej strane nepárne číslo. Preto je niektoré z prvočísel a, b, c, d, napríklad a, rovné dvom. Dosadením dostaneme

$$3(b+1)(c+1)(d+1) = 2bcd + 2886.$$

Keďže čísla $3(b+1)(c+1)(d+1)$ a 2886 sú deliteľné tromi, musí byť deliteľné tromi aj $2bcd$. Preto je niektoré z čísel b, c, d, napríklad b, rovné trom. Dosadením dostaneme $12(c+1)(d+1) = 6cd + 2886$, po vydelení šiestimi $2(c+1)(d+1) = cd + 481$ a po ďalších úpravách $cd + 2c + 2d = 479$, $(c+2)(d+2) = 483 = 3 \cdot 7 \cdot 23$. Ak predpokladáme $c \leqq d$, máme vzhľadom na nerovnosť $c + 2 > 3$ dve možnosti:

1. $c + 2 = 7$, $d + 2 = 69$, odtiaľ $c = 5$, $d = 67$.
2. $c + 2 = 21$, $d + 2 = 23$, odtiaľ $c = 19$, $d = 21$, čo ale nevyhovuje, lebo 21 nie je prvočíslo.

Jediné vyhovujúce n je teda $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67 = 2010$.

Poznámka. Záverečné úvahy sa dajú vykonať pomocou vyjadrenia

$$d = \frac{479 - 2c}{c+2} = \frac{483}{c+2} - 2;$$

$c + 2$ tak musí byť niektorý z deliteľov čísla 483, ktorý je väčší ako 3, teda $c + 2 \in$ $\in \{7, 21, 23, 69, 161, 483\}$ a $c \in \{5, 19, 21, 67, 159, 481\}$. Keďže c aj d sú prvočísla, vyhovujú len možnosti $c = 5$, $d = 67$ alebo $c = 67$, $d = 5$.

Kategória A

A – I – 1

Ľavé strany daných rovníc majú (ako odmocniny) nezáporné hodnoty, preto z pravých strán vyplývajú postupne nerovnosti $z \geqq 1$, $x \geqq 1$ a $y \geqq 1$.

Odmocnín v rovniciach sa zbavíme ich umocnením:

$$x^2 - y = (z-1)^2, \quad y^2 - z = (x-1)^2, \quad z^2 - x = (y-1)^2,$$

umocnené rovnice sčítame a výsledok sčítania upravíme:

$$\begin{aligned}(x^2 - y) + (y^2 - z) + (z^2 - x) &= (z-1)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2,\\ (x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z) &= (z^2 + x^2 + y^2) - 2(z + x + y) + 3,\\ x + y + z &= 3.\end{aligned}$$

Keďže však z nerovností $x \geqq 1$, $y \geqq 1$ a $z \geqq 1$ vyplýva sčítaním $x + y + z \geqq 3$, môže byť rovnosť $x + y + z = 3$ splnená jedine tak, že $x = y = z = 1$. Skúškou dosadením sa presvedčíme, že trojica $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ je naozaj riešením (jediným, ako vyplýva z nášho postupu).

Dodajme, že ak si nerovnosti $x, y, z \geqq 1$ na začiatku nevšimneme, avšak vzťah $x + {} + y + z = 3$ po sčítaní umocnených rovníc odvodíme, môžeme potom určenú hodnotu súčtu $x+y+z$ použiť pri sčítaní pôvodných (neumocnených) rovníc, a tak získať rovnicu $\sqrt{x^2 - y} + \sqrt{y^2 - z} + \sqrt{z^2 - x} = 0$ s jasným dôsledkom: každá z odmocnín musí byť rovná nule.

Iné riešenie. Keďže pre trojice (x, y, z), (y, z, x) a (z, x, y) vyjde sústava zadaných rovníc narovnako, stačí hľadať len také riešenia (x, y, z), v ktorých je prvá zložka maximálna, t. j. platí $x \geqq y$ a $x \geqq z$.[3] Rovnako ako v pôvodnom riešení si uvedomíme, že $x, y, z \geqq 1$ (ďalej nám bude stačiť iba fakt[4], že $x, y, z \geqq 0$).

Z predpokladanej nerovnosti $x \geqq z$ vyplýva pre pravé strany prvej a druhej nerovnice porovnanie $x - 1 \geqq z - 1$, takže rovnakú nerovnosť musia spĺňať aj odmocniny na ľavých stranách, teda aj príslušné výrazy pod odmocninami: $y^2 - z \geqq x^2 - y$, čiže $x^2 - y^2 \leqq {} \leqq y - z$. Ľavá strana tej poslednej je nezáporná (vďaka predpokladu $x \geqq y$), takže je taká aj pravá strana: $y - z \geqq 0$, čiže $y \geqq z$. To ešte upravíme na nerovnosť $y - 1 \geqq z - 1$ medzi pravými stranami prvej a tretej rovnice, takže podľa ich ľavých strán dostaneme $z^2 - x \geqq x^2 - y$, čiže $z^2 - x^2 \geqq x - y$. Odtiaľ a z predpokladu $x \geqq y$ máme $z^2 - x^2 \geqq 0$, čiže $z \geqq x$. Spolu tak platí $x \geqq y \geqq z \geqq x$, teda musí byť $x = y = z$. Vtedy sa zadaná

---

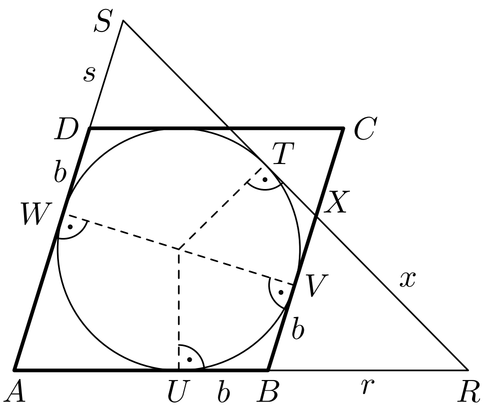
[3] Nerovnosť $y \geqq z$ dopredu zaručiť nemôžeme. Poradie neznámych x, y, z totiž nemôžeme meniť ľubovoľne, ale iba cyklicky.

[4] Budeme ho potrebovať kvôli ekvivalenciám typu $a^2 \geqq b^2 \Leftrightarrow a \geqq b$.

sústava redukuje na jedinú rovnicu $\sqrt{x^2-1} = x - 1$. Je ľahké ukázať, že jej jediné riešenie v obore reálnych čísel je $x = 1$.

A – I – 2

Nech U, V, W, T sú body dotyku vpísanej kružnice postupne so stranami AB, BC, DA a s uvažovanou dotyčnicou RS, ktorej priesečník so stranou BC pomenujme X (obr. 12). Označme $a = |AB| = |AD|$, $b = |BU| = |BV| = |DW|$ pevné dĺžky a $r = |BR|$, $s = |DS|$ premenné dĺžky závislé od voľby dotyčnice RS. Naším cieľom je ukázať, že zadaný súčin $|BR| \cdot |DS|$ $(= r \cdot s)$ má stálu hodnotu $a \cdot b$.



Obr. 12

Trojuholníky ARS, BRX sú rovnoľahlé podľa stredu R, lebo ich strany AS a BX ležia na rovnobežných priamkach. Navyše kružnica vpísaná prvému trojuholníku ARS je pripísaná strane BX druhého trojuholníka BRX. Podľa známeho poznatku o tom, že body dotyku vpísanej a pripísanej kružnice sú súmerne združené podľa stredu strany, na ktorej oba body ležia, môžeme usúdiť, že pomeru $|SW| : |AR|$ v trojuholníku ARS zodpovedá pomer $|BV| : |BR|$ v trojuholníku BRX. To vedie na rovnosť, ktorú pri zavedenom označení zapíšeme ako

$$\frac{b+s}{a+r} = \frac{b}{r}, \quad \text{odkiaľ} \quad r \cdot s = a \cdot b.$$

Tým je dôkaz hotový a úloha vyriešená.

Iné riešenie. Použijeme rovnaké označenie ako v prvom riešení. Označíme ešte $|RX| = x$ a vyjadríme dĺžky strán oboch rovnoľahlých trojuholníkov ARS, BRX na základe triviálneho poznatku o rovnosti úsekov dotyčníc z daného bodu k danej kružnici. Pre trojuholník ARS je to ľahké: platí $|AR| = a + r$, $|AS| = a + s$ a

$$|RS| = |RT| + |TS| = |RU| + |WS| = (b + r) + (b + s) = 2b + r + s.$$

V trojuholníku BRX máme $|BR| = r$ a dĺžku tretej strany BX vyjadríme takto:

$$\begin{aligned} |BX| &= |BV| + |VX| = b + |TX| = b + (|RT| - |RX|) = \\ &= b + |RU| - x = b + (b + r) - x = 2b + r - x. \end{aligned}$$

Pre strany podobných trojuholníkov ARS a BRX teda platí pomer

$$(a+r):(2b+r+s):(a+s) = r:x:(2b+r-x).$$

Odtiaľ môžeme eliminovať x a potom objaviť závislosť $rs = ab$. Namiesto takého postupu si však všimnime, že obvod druhého trojuholníka nezávisí od x, preto porovnáme pomery obvodu k prvej strane (od x nezávislej) v každom z oboch trojuholníkov:

$$\frac{(a+r)+(2b+r+s)+(a+s)}{a+r} = \frac{r+x+(2b+r-x)}{r},$$
$$2+\frac{2(b+s)}{a+r} = 2+\frac{2b}{r},$$
$$rs = ab.$$

Potrebná rovnosť je dokázaná.

Iné riešenie. Nech O je stred kružnice vpísanej kosoštvorcu $ABCD$ (a teda aj trojuholníku ARS). Označme α, ϱ, σ veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ARS postupne pri vrcholoch A, R, S. Potom $|\measuredangle BRO| = \frac{1}{2}\varrho$, $|\measuredangle OBR| = 90° + \frac{1}{2}\alpha$, $|\measuredangle ROB| = 180° - |\measuredangle BRO| - |\measuredangle OBR| = \frac{1}{2}\sigma$. Podobne $|\measuredangle DSO| = \frac{1}{2}\sigma$, $|\measuredangle SDO| = 90° + \frac{1}{2}\alpha$, $|\measuredangle DOS| = \frac{1}{2}\varrho$. Preto sú trojuholníky BRO a DOS podobné a odtiaľ $|BR| : |DO| = |BO| : |DS|$, čiže $|BR| \cdot |DS| = |BO| \cdot |DO| = |BO|^2$, čo je hodnota nezávislá od voľby dotyčnice.

A – I – 3

Na tabuli zrejme budú stále len čísla z množiny $\mathsf{M} = \{1, 2, \dots, 33\}$. Prvočísla 17, 19, 23, 29 a 31 tam budú napísané stále, a to každé jedenkrát, pretože nemajú žiadneho deliteľa rôzneho od 1 a množina M ani neobsahuje žiadny ich násobok (takže nikdy nemôžu z tabule zmiznúť, ani sa objaviť v ďalšom exemplári).

Vysvetlíme teraz, prečo na tabuli budú okrem uvedených piatich prvočísel napísané vždy ešte niektoré dve ďalšie čísla. Súčin S všetkých čísel zapísaných na tabuli je na začiatku rovný

$$S = 33! = 2^{31} \cdot 3^{15} \cdot 5^7 \cdot 7^4 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31. \tag{1}$$

V každom kroku zvolíme nejakú dvojicu čísel (x, y) s vlastnosťou $x \mid y$, teda čísla tvaru $x = a$ a $y = ka$, a nahradíme ich jedným číslom $y/x = k$. Súčin všetkých čísel na tabuli sa pritom zmení z doterajšej hodnoty S na novú hodnotu S/a^2, lebo dva činitele x, y so súčinom $xy = ka^2$ budú nahradené jedným novým činiteľom k (a ostatné činitele sa nezmenia). Je jasné, že pri zmene $S \to S/a^2$ sa exponent ľubovoľného prvočísla p z rozkladu čísla S buď zachová (ak $p \nmid a$), alebo zmenší o párne číslo (rovné exponentu p v rozklade čísla a^2). V žiadnom prípade sa teda nezmení *parita* (párna-nepárna) exponentu žiadneho z prvočísel. Preto každé z prvočísel, ktoré malo na začiatku v rozklade (1) *nepárny* exponent, bude mať nepárny exponent v rozklade meniaceho sa S aj po ľubovoľnom počte krokov. Také sú (okrem 17, 19, 23, 29 a 31) aj prvočísla 2, 3, 5 a 11. Znamená to, že na tabuli budú stále zastúpené (nie nutne štyri rôzne) čísla, ktoré sú týmito jednotlivými štyrmi prvočíslami deliteľné. Samozrejme, nemôže to byť iba jediné číslo (lebo $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 > 33$), takže to musia byť aspoň dve čísla, napríklad 10 a 33 (alebo 11 a 30 alebo 15 a 22, iné možnosti pri celkovom počte siedmich čísel na tabuli neexistujú). Tak sme dokázali, že na tabuli bude naozaj vždy napísaných najmenej 7 čísel.

Ostáva popísať nejakú postupnosť krokov, po ktorej na tabuli naozaj 7 čísel zostane. Existuje veľa možností, môžeme napríklad dať „bokom“ prvočísla 17, 19, 23, 29, 31 a čísla 10 a 33, a so zvyšnými číslami urobiť nasledujúce kroky:

$$32, 16 \to 2, \quad 30, 15 \to 2, \quad 28, 14 \to 2, \quad 26, 13 \to 2, \quad 24, 12 \to 2, \quad 22, 11 \to 2,$$
$$27, 9 \to 3, \quad 21, 7 \to 3, \quad 18, 6 \to 3, \quad 25, 5 \to 5, \quad 20, 4 \to 5, \quad 8, 2 \to 4,$$
$$5, 5 \to 1, \quad 4, 2 \to 2, \quad 3, 3 \to 1, \quad 3, 3 \to 1, \quad 2, 2 \to 1, \quad 2, 2 \to 1, \quad 2, 2 \to 1.$$

Po týchto krokoch už je na tabuli (okrem siedmich čísel bokom) len 7 jednotiek, ktoré všetky odstránime šiestimi krokmi $1, 1 \to 1$ a posledným krokom napr. $10, 1 \to 10$.

A – I – 4

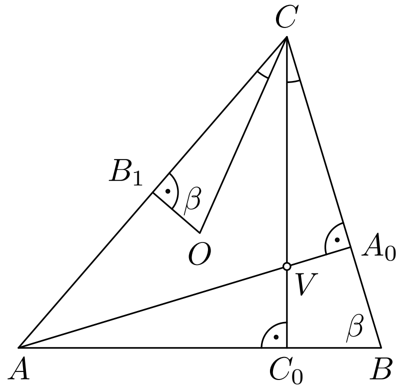
Najskôr ukážeme, že v každom ostrouhlom trojuholníku ABC platí

$$\gamma = 60^\circ \quad \Longleftrightarrow \quad |CO| = |CV|. \tag{1}$$

Na to potrebujeme trojuholníky CVA_0 a COB_1, pričom A_0 je päta výšky z vrcholu A a B_1 je stred strany AC (obr. 13). Z pravouhlého trojuholníka ACA_0 vyplýva

$$\gamma = 60^\circ \iff |CA_0| = \frac{|AC|}{2} \iff |CA_0| = |CB_1|.$$

Posledné je rovnosť dĺžok odvesien pravouhlých trojuholníkov CVA_0 a COB_1, ktorých



Obr. 13

vyznačené vnútorné uhly VCA_0 a OCB_1 majú zhodnú veľkosť $90^\circ - \beta$. (Pre uhol CVA_0

to vyplýva z pravouhlého trojuholníka BCC_0, pričom C_0 je päta výšky z vrcholu C na stranu AB, pre uhol OCB_1 to vyplýva z rovnoramenného trojuholníka ACO, ktorý má pri hlavnom vrchole O uhol 2β vďaka vete o obvodovom a stredovom uhle v opísanej kružnici.) Preto je zhodnosť odvesien CA_0, CB_1 ekvivalentná so zhodnosťou prepôn CO a CV, čo dokazuje (1).

Teraz zapojíme do úvah stred S kružnice vpísanej. Zo spomenutej zhodnosti uhlov VCA_0 a OCB_1 vyplýva, že v každom ostrouhlom trojuholníku ABC je polpriamka CS nielen osou uhla ACB, ale aj osou uhla OCV. Táto os je v prípade $\gamma = 60°$, kedy ako vieme $|CO| = |CV|$, osou základne OV rovnoramenného trojuholníka OVC (body O a V sú rôzne, lebo podľa zadania úlohy je trojuholník ABC rôznostranný), takže stred S naozaj leží na osi úsečky OV. Rovnako to platí aj v prípadoch $\alpha = 60°$, resp. $\beta = 60°$.

Pripusťme teraz, že stred S leží na osi úsečky OV, avšak žiadny z uhlov α, β, γ nie je 60°. Podľa (1) teda platí $|AO| \neq |AV|$, $|BO| \neq |BV|$ a $|CO| \neq |CV|$. Pozrime sa znovu na trojuholník OVC, v ktorom teda os CS vnútorného uhla OCV nesplýva s osou protiľahlej strany OV, takže ich jediný spoločný bod S leží na kružnici trojuholníku OVC opísanej (tento známy fakt možno jednoducho odvodiť použitím vlastností obvodových uhlov). Inak povedané, bod C leží na kružnici opísanej trojuholníku OVS. Z rovnakých dôvodov na tejto kružnici ležia aj body A a B, takže sa jedná o kružnicu opísanú trojuholníku ABC, ktorá však nikdy svojím stredom O neprechádza. Tak sme dostali spor, ktorý ukazuje, že pripustená situácia nemôže nastať. Tým je riešenie celej úlohy ukončené.

Poznámka 1. Z druhej časti riešenia vyplýva tento poznatok: ak má uhol γ (ostrouhlého) trojuholníka ABC veľkosť 60°, ležia vrcholy A a B na jednej kružnici s priesečníkom výšok, stredom opísanej kružnice aj stredom vpísanej kružnice.

Poznámka 2. Kľúčovú ekvivalenciu (1) z podaného riešenia možno dokázať aj trigonometricky. Platia totiž vzťahy

$$|CO| = \frac{c}{2\sin\gamma} \quad \text{a} \quad |CV| = \frac{c}{\operatorname{tg}\gamma}, \tag{2}$$

podľa ktorých sú úsečky CO a CV zhodné práve vtedy, keď je uhol γ riešením rovnice $2\sin\gamma = \operatorname{tg}\gamma$, ktorá je zrejme ekvivalentná s rovnicou $\cos\gamma = \frac{1}{2}$, ktorá má na intervale $(0°, 90°)$ jediné riešenie $\gamma = 60°$. Prvý zo vzťahov (2) vyplýva z tzv. rozšírenej sínusovej vety

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r,$$

pričom r je polomer kružnice opísanej trojuholníku ABC.

Poznámka 3. Ekvivalenciu (1) z uvedeného riešenia môžeme dokázať aj bez veľkého počítania: priesečník výšok daného trojuholníka totiž vždy leží na kružnici súmerne združenej s kružnicou trojuholníku opísanou podľa priamky AB (v našom prípade). Vzhľadom na to, že taká kružnica je zároveň obrazom kružnice opísanej v posunutí o vektor CV, závisí dĺžka $|CV|$ v danej opísanej kružnici len od veľkosti tetivy AB (či zodpovedajúceho obvodového uhla), a nie od polohy bodu C. Preto rovnosť $|CV| = r = |CO|$ nastane práve vtedy, keď spomenutá združená kružnica prechádza stredom O kružnice trojuholníku opísanej, t. j. práve vtedy, keď príslušná strana leží oproti (obvodovému) uhlu veľkosti $60°$.

A – I – 5

Pre každé $k = 1, 2, \ldots, n$ označme r_k počet rýb v nádrži potom, ako si k-ty rybár odnesie svoj podiel. Tieto počty sú podľa zadania určené počiatočnou hodnotou r_0 a rekurentnými vzťahmi

$$r_{k+1} = \frac{n-1}{n}(r_k - 1) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Zapíšme ich vo výhodnom tvare

$$r_{k+1} = q \cdot r_k + d, \quad \text{pričom} \quad q = \frac{n-1}{n} \quad \text{a} \quad d = \frac{1-n}{n}. \tag{1}$$

Rekurentná rovnica $r_{k+1} = q \cdot r_k + d$ ($q, d =$ konšt.) sa vyskytuje v mnohých aplikáciách. Odvodíme preto najskôr, aké priame vyjadrenie má každý člen r_k takej postupnosti $r_0, r_1, r_2, \ldots$ pri všeobecných q, d a danej počiatočnej hodnote r_0. Až potom sa vrátime k našej úlohe a do výsledku dosadíme hodnoty q, d z (1).

Najprv si všimnime, že v prípade $q = 1$ dostávame rovnicu $r_{k+1} = r_k + d$, podľa ktorej je skúmaná postupnosť aritmetická s diferenciou d, takže jej všeobecný člen má vyjadrenie $r_k = r_0 + kd$. V prípade $q \neq 1$ z rekurentnej rovnice postupne dostaneme

$$\begin{aligned}
r_1 &= qr_0 + d,\\
r_2 &= qr_1 + d = q(qr_0 + d) + d = q^2 r_0 + (q+1)d,\\
r_3 &= qr_2 + d = q(q^2 r_0 + (q+1)d) + d = q^3 r_0 + (q^2 + q + 1)d,\\
r_4 &= qr_3 + d = q(q^3 r_0 + (q^2 + q + 1)d) + d = q^4 r_0 + (q^3 + q^2 + q + 1)d,\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

Takto nachádzame vyjadrenie

$$r_k = q^k r_0 + (q^{k-1} + q^{k-2} + \cdots + q + 1)d.$$

Ak použijeme známy vzorec pre súčet k členov geometrickej postupnosti s kvocientom $q \neq 1$, dôjdeme k záveru, že pre každé $k \geqq 0$ je člen r_k daný priamym vzťahom

$$r_k = q^k r_0 + \frac{(q^k - 1)d}{q-1} = q^k\Big(r_0 + \frac{d}{q-1}\Big) - \frac{d}{q-1}.$$

V našom konkrétnom prípade platí

$$\frac{d}{q-1} = \frac{(1-n)/n}{(n-1)/n - 1} = n - 1,$$

odkiaľ nachádzame vyjadrenie jednotlivých hodnôt r_k v tvare

$$r_k = \frac{(n-1)^k(r_0+n-1)}{n^k} - n + 1 \quad (k = 0, 1, 2 \ldots, n).$$

Vzhľadom na nesúdeliteľnosť dvojice čísel $(n-1)^k$, n^k sú také hodnoty r_k celočíselné práve vtedy, keď je číslo $r_0 + n - 1$ deliteľné všetkými zastúpenými mocninami n^k, z ktorých najvyššia je mocnina n^n. Hľadaná nutná aj postačujúca podmienka má preto tvar: pre niektoré celé j platí $r_0 + n - 1 = j \cdot n^n$, čiže $r_0 = j \cdot n^n - n + 1$. Pomocou tohto parametra j potom majú všetky členy r_k vyjadrenie

$$r_k = j \cdot (n-1)^k \cdot n^{n-k} - n + 1 \quad (k = 0, 1, 2 \ldots, n). \tag{2}$$

Ostáva nájsť najmenšie celé $j \geqq 1$, pri ktorom sú všetky čísla r_k dané vzťahmi (2) kladné. Keďže tieto čísla zrejme tvoria klesajúcu postupnosť, najmenšie z nich je číslo $r_n = j \cdot (n-1)^n - n + 1$, čo je pri $n \geqq 3$ číslo kladné už pri $j = 1$ (teda $r_0 = n^n - n + 1$), zatiaľ čo pri $n = 2$ to platí až pri $j = 2$ (vtedy $r_0 = 2 \cdot 2^2 - 1 = 7$).

Odpoveď. Hľadaný najmenší počet rýb je $r_0 = 7$ pre $n = 2$ a $r_0 = n^n - n + 1$ pre každé $n \geqq 3$.

Iné riešenie. Postupnosť $r_0, r_1, \ldots, r_n$ môžeme počítať aj „odzadu“, t.j. pomocou posledného člena r_n vyjadrovať predošlé členy. S využitím rekurentného vzťahu

$$r_k = q r_{k+1} + 1, \quad \text{pričom} \quad q = \frac{n}{n-1},$$

(kvocient q má teraz prevrátenú hodnotu oproti hodnote v prvom riešení), postupne pre $k = n-1, n-2, \ldots, 1, 0$ dostávame

$$\begin{aligned}
r_{n-1} &= q r_n + 1,\\
r_{n-2} &= q r_{n-1} + 1 = q^2 r_n + q + 1,\\
r_{n-3} &= q r_{n-2} + 1 = q^3 r_n + q^2 + q + 1,\\
r_{n-4} &= q r_{n-3} + 1 = q^4 r_n + q^3 + q^2 + q + 1,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Podobne ako v prvom riešení (sčítanie členov geometrickej postupnosti a následné dosadenie kvocientu q teraz vynecháme) tak dôjdeme ku vzťahom

$$r_{n-k} = \frac{n^k(r_n+n-1)}{(n-1)^k} - n + 1 \quad (k = 0, 1, \ldots, n) \tag{3}$$

Keďže čísla n^k a $(n-1)^k$ sú nesúdeliteľné, hodnoty r_{n-k} sú všetky celočíselné práve vtedy, keď $(n-1)^n \mid r_n + n - 1$, čiže $r_n = j \cdot (n-1)^n - n + 1$, čomu zodpovedá (podľa (3) pre $k = n$) počiatočná hodnota $r_0 = j \cdot n^n - n + 1$. Tak sme odvodili rovnaký záver ako pri prvom postupe.

Poznámka. Nájdenie vzťahov pre členy r_k sa pri oboch postupoch veľmi zjednoduší, keď si všimneme, že zmenená postupnosť tvorená číslami $r'_k = r_k + n - 1$ je geometrická.

A – I – 6

V zadanej rovnici bude výhodné prejsť od najmenších spoločných násobkov k najväčším spoločným deliteľom, a to pomocou známeho vzťahu $(x,y)\cdot[x,y] = x\cdot y$. Označme preto $u = (a,c)$, $v = (b,c)$ a ľavú stranu rovnice prepíšme takto:

$$\frac{[a,c]+[b,c]}{a+b} = \frac{ac/u + bc/v}{a+b} = \left(\frac{a}{u} + \frac{b}{v}\right)\cdot\frac{c}{a+b}.$$

Zadaná rovnica sa preto (po vynásobení zlomkom $(a+b)/c$) dá zapísať v ekvivalentnom tvare

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} = \frac{p^2+1}{p^2+2}\cdot(a+b). \tag{1}$$

Porovnajme odhady veľkosti výrazov v (1). Keďže $p^2 > 0$, pre zlomok na pravej strane (1) zrejme platí

$$\frac{1}{2} < \frac{p^2+1}{p^2+2} < 1,$$

takže podľa (1) musí byť

$$\frac{a+b}{2} < \frac{a}{u} + \frac{b}{v} < a+b. \tag{2}$$

Vďaka ľavej nerovnosti nemôžu byť obe prirodzené čísla u, v väčšie ako 1, lebo z nerovností $u \geqq 2$ a $v \geqq 2$ by sme dostali

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} \leqq \frac{a+b}{2}.$$

Aspoň jedno z čísel u, v je teda rovné 1. Pravá nerovnosť v (2) však vylučuje prípad $u = v = 1$. Číslu 1 sa preto rovná práve jedno z čísel u, v. Vzhľadom na symetriu rozoberieme iba prípad $u = 1$ a $v \geqq 2$.

Keďže číslo v sme zaviedli vzťahom $v = (b,c)$, je zlomok b/v rovný niektorému prirodzenému číslu b_1. Dosadíme teraz hodnoty $u = 1$ a $b = b_1 v$ do (1) a vzniknutú rovnicu vyriešime vzhľadom na premennú a:

$$\begin{aligned} a + b_1 &= \frac{p^2+1}{p^2+2}\cdot(a + b_1 v),\\ (p^2+2)(a+b_1) &= (p^2+1)(a+b_1 v),\\ a &= b_1((p^2+1)v - p^2 - 2). \end{aligned} \tag{3}$$

Keby platilo $v \geqq 3$, dostali by sme z poslednej rovnosti odhad

$$a \geqq (p^2+1)v - p^2 - 2 \geqq 3(p^2+1) - p^2 - 2 = 2p^2 + 1,$$

a to je v spore s nerovnosťou $a \leqq 2p^2$ danou oborom, v ktorom podľa zadania úlohy majú hodnoty a, b, c ležať. Platí teda opačná nerovnosť $v < 3$, ktorá spolu s predpokladom $v \geqq 2$ vedie k záveru, že nutne $v = 2$. Rovnica (3) tak prechádza na rovnicu

$$a = b_1(2(p^2 + 1) - p^2 - 2) = p^2 b_1,$$

ktorú na zadanom obore hodnôt a, množine $\{1, 2, 3, \dots , 2p^2\}$, ľahko vyriešime.

Máme $a \leqq 2p^2$, odkiaľ $b_1 \leqq 2$. Pritom z podmienok $u = (a, c) = 1$ a $v = (b, c) = 2$ vyplýva, že c je párne číslo s číslom a nesúdeliteľné. Z rovnosti $a = p^2 b_1$ tak vyplýva, že $b_1 = 1$ a p je *nepárne* prvočíslo. Takže $a = p^2 b_1 = p^2$ a $b = b_1 v = 1 \cdot 2 = 2$. Pre číslo c to znamená nasledujúce spresnenie: *c je párne číslo, ktoré nie je násobkom daného prvočísla p.*

Ktoré $c \in \{1, 2, 3, \dots , 2p^2\}$ takú podmienku spĺňajú a koľko ich je? Ako už vieme, pre $p = 2$ žiadne také c neexistuje. Pre nepárne p zo všetkých p^2 možných párnych čísel $c = 2, 4, 6, \dots , 2p^2$ vylúčime všetky násobky čísla p, teda práve p čísel $2p, 4p, \dots , 2p^2$; vyhovujúcich hodnôt je preto práve $p^2 - p$. Taký je teda počet všetkých hľadaných trojíc $(a, b, c) = (p^2, 2, c)$ v rozoberanom prípade, keď $u = 1$ a $v \geqq 2$. V druhom možnom prípade, keď naopak $v = 1$ a $u \geqq 2$, existuje vzhľadom na symetriu rovnaký počet $p^2 - p$ vyhovujúcich trojíc, ktoré majú teraz všetky tvar $(2, p^2, c)$. Popis vyhovujúcich trojíc zahrnieme aj do odpovede, aj keď to zadanie úlohy nevyžaduje.

Odpoveď. V prípade $p = 2$ žiadne vyhovujúce trojice neexistujú, v prípade nepárneho prvočísla p ich je práve $2(p^2 - p)$ a všetky majú tvar

$$(a, b, c) = (p^2, 2, c) \quad \text{alebo} \quad (a, b, c) = (2, p^2, c),$$

pričom $c \in \{1, 2, \dots , 2p^2\}$ je ľubovoľné párne číslo, ktoré nie je násobkom p.

A – S – 1

Hodnoty odmocnín sú vždy nezáporné a odmocňované hodnoty tiež, preto neznáme x, y, z musia spĺňať podmienky $x, y, z \geqq 1$, $x \geqq y^2$, $y \geqq z^2$ a $z \geqq x^2$. Z posledných troch nerovností máme $\max\{x, y, z\} \geqq \max\{y^2, z^2, x^2\}$. Opačná (neostrá) nerovnosť platí vďaka tomu, že $t \leqq t^2$ pre každé $t \geqq 1$. Preto $\max\{x, y, z\} = \max\{y^2, z^2, x^2\} = 1$, teda $x = y = z = 1$ a obe strany všetkých troch rovníc sústavy sú rovné nule (to je skúška).

Obmena postupu. Namiesto úvahy o maximách môžeme po zistení z prvej vety riešenia pokračovať nasledovne: platí $x \geqq y^2 \geqq y \geqq z^2 \geqq z \geqq x^2$, nerovnosť medzi krajnými výrazmi $x \geqq x^2$ už znamená $x = 1$, takže aj hodnoty y, z z uvedeného reťazca šiestich členov sú rovné 1.

Záver. Sústava má jediné riešenie $x = y = z = 1$.

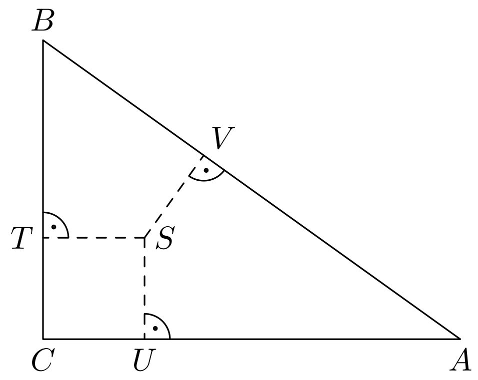
Iné riešenie. (Podľa *Filipa Sládka*.) Ak všetky rovnice umocníme a sčítame, dostaneme

$$(x - 1)(1 - 2x) + (y - 1)(1 - 2y) + (z - 1)(1 - 2z) = 0.$$

Zrejme každý sčítanec je nekladný, keďže $x, y, z \geqq 1$; teda všetky tri sčítance musia byť nulové. Odtiaľ priamo $x = y = z = 1$ a skúškou overíme, že je to naozaj riešenie.

A – S – 2

Pre dĺžky úsekov strán všeobecného trojuholníka ABC od vrcholov k bodom dotyku



Obr. 14

vpísanej kružnice (označeným podľa obr. 14) platia známe vzťahy

$$|AU| = |AV| = \frac{b+c-a}{2}, \ |BV| = |BT| = \frac{a+c-b}{2}, \ |CT| = |CU| = \frac{a+b-c}{2},$$

ktoré možno ľahko získať vyriešením sústavy rovníc

$$|AV| + |BV| = c, \quad |AU| + |CU| = b, \quad |BT| + |CT| = a.$$

Body C, T, U spolu so stredom S vpísanej kružnice sú vo všeobecnosti vrcholmi deltoidu, ktorý je v prípade pravého uhla ACB štvorcom so stranou $\varrho = |SU| = |SV|$. Z porovnania s vyššie uvedenými vzťahmi pre dĺžky úsekov CT, CU vyplýva

$$\varrho = \frac{a+b-c}{2};$$

podľa Tálesovej vety v pravouhlom trojuholníku navyše platí $r = \frac{1}{2}c$. Spolu dostávame

$$r + \varrho = \frac{c}{2} + \frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Skúmaný podiel $(r+\varrho)/(a+b)$ má preto v ľubovoľnom pravouhlom trojuholníku jedinú možnú hodnotu, rovnú číslu $\frac{1}{2}$.

Uvedené riešenie možno rôzne meniť, napríklad tak, že namiesto všeobecných vzťahov pre úseky strán vyjdeme z rovností $|CT| = |CU| = \varrho$, z ktorých vyplýva $|AV| = |AU| = b - \varrho$ a $|BV| = |BT| = a - \varrho$, teda

$$2r = c = |AB| = |AV| + |BV| = (b - \varrho) + (a - \varrho),$$

odkiaľ už záver dostaneme okamžite.

Iné riešenie. Pre obsah P všeobecného trojuholníka ABC platí vzorec

$$2P = \varrho(a+b+c);$$

na jeho odvodenie stačí sčítať obsahy trojuholníkov ABS, ACS a BCS majúcich na strany pôvodného trojuholníka zhodné výšky veľkosti ϱ. V prípade $\gamma = 90°$ je však $2P = ab$ a okrem toho, ako už sme spomenuli vyššie, $r = \frac{1}{2}c$. Spolu s Pytagorovou vetou $c^2 = a^2 + b^2$ tak dostávame

$$r + \varrho = \frac{c}{2} + \frac{ab}{a+b+c} = \frac{ac+bc+c^2+2ab}{2(a+b+c)} = \frac{ac+bc+a^2+b^2+2ab}{2(a+b+c)} =$$
$$= \frac{(a+b)c+(a+b)^2}{2(a+b+c)} = \frac{(a+b)(a+b+c)}{2(a+b+c)} = \frac{a+b}{2},$$

a prichádzame tak k rovnakému záveru ako v pôvodnom riešení.

A – S – 3

Súčin všetkých čísel napísaných na tabuli je rovný

$$S = 2^{31} \cdot 3^{15} \cdot 5^7 \cdot 7^4 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31.$$

Prítomnosť nepárnych exponentov znamená, že S nie je druhou mocninou. Preto nemôžeme zotrieť v prvom kroku všetky napísané čísla. Prvočísla 17, 19, 23, 29 a 31 dokonca nezotrieme nikdy. Zo všetkých ostatných čísel, ktoré sa na úpravách zúčastniť môžu, vznikne vždy neprázdny súbor čísel, takže na tabuli bude stále aspoň $5 + 1 = 6$ čísel. Ukážeme, že 6 je hľadaný najmenší počet uvedením jedného postupu (z mnohých možných).

Kvôli nepárnym exponentom pri prvočíslach 2, 3, 5 a 11 vyčleníme najskôr napríklad skupinu čísel $A = \{2, 9, 11, 22, 25\}$ a všetky ostatné čísla rôzne od 17, 19, 23, 29 a 31 zaradíme do skupiny

$$B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 26, 27, 28, 30, 32, 33\}.$$

V prvom kroku vyberieme všetky čísla z A a nahradíme ich číslom

$$n = \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 22 \cdot 25} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11^2} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11.$$

Keďže súčin všetkých čísel z B je $2^{31-2} \cdot 3^{15-2} \cdot 5^{7-2} \cdot 7^4 \cdot 11^{3-2} \cdot 13^2 = 2^{29} \cdot 3^{13} \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot$ $\cdot\, 11 \cdot 13^2$, vyberieme v druhom kroku číslo n spolu so všetkými číslami z B a nahradíme ich číslom

$$\sqrt{(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11) \cdot (2^{29} \cdot 3^{13} \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot 11 \cdot 13^2)} = 2^{15} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13.$$

Potom už ostane na tabuli iba šesť čísel, čo je, ako sme vysvetlili, najmenší možný počet.

A – II – 1

Zo zadania je zrejmé, že číslo 0 nie je riešením danej rovnice pre žiadne hodnoty parametrov p, q. Zbavme sa preto absolútnej hodnoty v rovnici konštatovaním, že všetky jej riešenia sú *kladné* korene rovnice

$$x^2 + px = qx - 1, \quad \text{čiže} \quad x^2 + (p - q)x + 1 = 0, \tag{1}$$

spolu so *zápornými* koreňmi rovnice

$$x^2 - px = qx - 1, \quad \text{čiže} \quad x^2 - (p + q)x + 1 = 0. \tag{2}$$

Keďže každá kvadratická rovnica má nanajvýš dva korene, skúmaná situácia celkového počtu štyroch riešení nastane práve vtedy, keď rovnica (1) bude mať dva *rôzne kladné* korene a súčasne rovnica (2) bude mať dva *rôzne záporné* korene. Rozborom týchto podmienok sa teraz budeme zaoberať.

Je jasné, že oba diskriminanty $(p - q)^2 - 4$ a $(p + q)^2 - 4$ rovníc (1) a (2) musia byť kladné, čo vedie k nutným podmienkam

$$(p - q)^2 > 4 \quad \text{a} \quad (p + q)^2 > 4. \tag{3}$$

Ak sú splnené, stačí skúmať otázku, kedy *menší* koreň rovnice (1) je *kladný* a súčasne *väčší* koreň rovnice (2) *záporný*. Podľa vzťahov pre korene kvadratickej rovnice to možno zapísať nerovnosťami

$$\frac{q - p - \sqrt{(p - q)^2 - 4}}{2} > 0 \quad \text{a} \quad \frac{p + q + \sqrt{(p + q)^2 - 4}}{2} < 0. \tag{4}$$

(Znamienka pre menší, resp. väčší koreň sme vybrali na základe toho, že menovatele oboch zlomkov sa rovnajú *kladnému* číslu 2.) Z prvej nerovnosti zapísanej v ekvivalentnom tvare

$$q - p > \sqrt{(p - q)^2 - 4} \tag{5}$$

vyplýva $q - p > 0$, takže prvú nerovnosť v (3) možno spresniť na $q - p > 2$. Potom už nerovnosť (5) zrejme platí, lebo

$$q - p = \sqrt{(p - q)^2} > \sqrt{(p - q)^2 - 4}.$$

Tak sme ukázali, že rovnica (1) má dva rôzne kladné korene práve vtedy, keď platí $q - p > 2$, čo je prvá z dvojice podmienok

$$p - q + 2 < 0, \quad p + q + 2 < 0. \tag{6}$$

Rovnakým postupom overíme, že druhá podmienka v (6) je nutnou a postačujúcou podmienkou pre existenciu dvoch rôznych záporných koreňov rovnice (2). Stačí upraviť druhú nerovnosť z (4) na tvar

$$\sqrt{(p+q)^2-4} < -(p+q) \qquad \text{(odkiaľ vyplýva } p+q<0)$$

a pre záporné číslo $p+q$ tak získať konečnú podmienku v tvare $p+q<-2$, čo je druhá z nerovností (6); tie preto presne vymedzujú skúmanú situáciu.

Na dokončenie celého riešenia ostáva zdôvodniť ekvivalenciu

$$(p-q+2<0 \ \wedge\ p+q+2<0) \ \Leftrightarrow\ p+|q|+2<0.$$

To je jednoduché, pretože zo zrejmej rovnosti $|q| = \max\{-q, q\}$ vyplýva

$$p+|q|+2 = \max\{p-q+2, p+q+2\}$$

a maximum z dvoch reálnych čísel je záporné práve vtedy, keď sú obe záporné.

Iné riešenie. Najskôr postupujme zhodne s prvým riešením až po odvodenie nerovností (3), ktoré, pripomeňme, zaručujú existenciu dvoch rôznych reálnych koreňov rovnice (1), resp. rovnice (2). Označíme ich postupne $x_{1,2}$ a $x_{3,4}$ a zapíšeme ich vzťah ku koeficientom rovníc, vyjadrený známymi Viètovými vzorcami

$$x_1+x_2=-(p-q), \quad x_1x_2=1, \quad x_3+x_4=p+q, \quad x_3x_4=1. \tag{7}$$

Z rovnosti $x_1x_2=1$ vyplýva, že korene $x_{1,2}$ majú rovnaké znamienko. Sú teda kladné práve vtedy, keď je kladný ich súčet, ktorý je však podľa prvej rovnosti v (7) rovný $-(p-q)$. Získanú nerovnosť $p-q<0$ možno spolu s podmienkou $(p-q)^2>4$ vyjadriť jedinou nerovnosťou $p-q<-2$ (čiže $p-q+2<0$), ktorá je teda kritériom toho, kedy rovnica (1) má dva rôzne kladné korene. Podobne pre existenciu dvoch záporných koreňov rovnice (2) dostaneme kritérium $p+q+2<0$. Záverečný prevod oboch nerovností na jednu ekvivalentnú nerovnosť s absolútnou hodnotou zdôvodníme rovnako ako v prvom riešení.

Iné riešenie. Rovnako ako pri predchádzajúcich postupoch prejdeme k rovniciam (1) a (2), ktoré sú obe rovnakého typu $x^2+rx+1=0$. Existenciu dvoch rôznych kladných či záporných koreňov takej rovnice teraz posúdime úvahou o príslušnej kvadratickej funkcii $f(x)=x^2+rx+1$ s parametrom r, ktorej grafom je parabola otočená nahor. Preto má funkcia f dva rôzne nulové body, povedzme u a v, práve vtedy, keď má aspoň jednu zápornú hodnotu. Taká hodnota sa navyše nadobúda práve v bodoch, ktoré ležia medzi u a v. Všimnime si ešte, že bez ohľadu na hodnotu parametra r pre prípadné nulové body u, v funkcie f platí $uv=f(0)=1$, takže to sú dve navzájom prevrátené čísla, ktoré sú zároveň kladná alebo zároveň záporné. Obe kladné (resp. záporné) sú teda práve vtedy, keď medzi nimi leží číslo 1 (resp. číslo -1). Pre prvý prípad tak dostávame jedinú podmienku $f(1)<0$ (čiže $2+r<0$), pre druhý prípad jedinú podmienku

$f(-1) < 0$ (čiže $2 - r < 0$). Zostáva dodať, že v rovnici (1) je $r = p - q$ a v rovnici (2) je $r = -(p + q)$, takže znovu dostávame dvojicu nerovností (6).

Iné riešenie. (*Stručne.*) Daná rovnica je ekvivalentná s rovnicou

$$x + p \cdot \frac{|x|}{x} - q = -\frac{1}{x}. \tag{8}$$

Grafom funkcie $f(x) = -1/x$ je hyperbola skladajúca sa z častí, ktoré označme h_1 (pre $x < 0$) a h_2 (pre $x > 0$). Grafom funkcie $g(x) = x + p \cdot |x|/x - q$ sú dve polpriamky

$$a\colon\ x < 0,\ y = x - p - q \qquad \text{a} \qquad b\colon\ x > 0,\ y = x + p - q.$$

Rovnica (8) má 4 riešenia práve vtedy, keď polpriamka a pretína krivku h_1 v dvoch bodoch a polpriamka b pretína v dvoch bodoch krivku h_2. Polpriamka a pretína h_1 v dvoch bodoch práve vtedy, keď leží „vyššie“ ako dotyčnica s ňou rovnobežná; táto dotyčnica prechádza bodom $(-1, 1)$ a odtiaľ máme podmienku $-1-p-q > 1$. Podobne polpriamka b pretína h_2 v dvoch bodoch práve vtedy, keď leží „nižšie“ ako dotyčnica prechádzajúca bodom $(1, -1)$, teda $1 + p - q < -1$. Dvojica nerovností $-1 - p - q > 1$ a $1 + p - q < -1$ je splnená práve vtedy, keď $q < -p - 2$ a súčasne $-q < -p - 2$. To platí práve vtedy, keď $|q| < -p - 2$, čiže $p + |q| + 2 < 0$.

A – II – 2

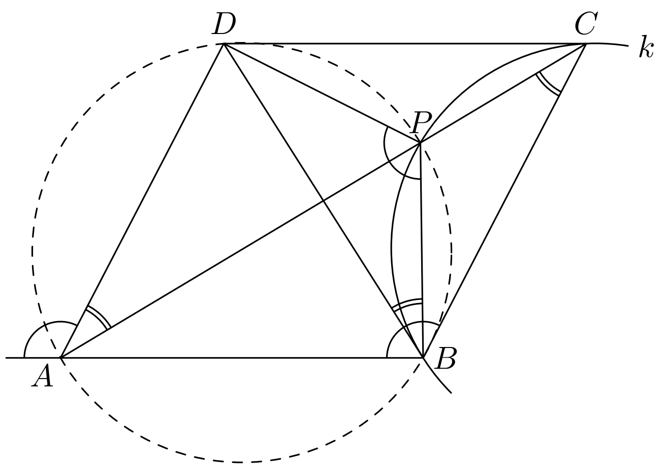
Kvôli lepšej prehľadnosti spomeňme na úvod zrejmé vlastnosti všeobecného rovnobežníka $ABCD$, ktoré v riešení využijeme: súčet uhlov BAD a ABC je priamy uhol a uhly DAC a ACB sú zhodné, rovnako ako strany AB a CD.

Podľa zadania priamka BD oddeľuje body A a P, pričom platí

$$|\measuredangle BAD| + |\measuredangle BPD| = |\measuredangle BAD| + |\measuredangle ABC| = 180^\circ,$$

štvoruholníku $ABPD$ sa teda dá opísať kružnica (obr. 15). V nej sú preto zhodné obvodové uhly DBP a DAP, z čoho vyplýva

$$|\measuredangle DBP| = |\measuredangle DAP| = |\measuredangle DAC| = |\measuredangle ACB| = |\measuredangle BCP|.$$



Obr. 15

Keďže priamka BP oddeľuje body C a D, môžeme použiť vetu o obvodovom a úsekovom uhle pre tetivu BP kružnice k opísanej trojuholníku BCP: Z odvodenej zhodnosti uhlov BCP a DBP vyplýva, že priamka BD je dotyčnicou ku kružnici k (s bodom dotyku B). Po tomto zistení už ľahko dokážeme obe požadované implikácie.

(i) Ak je priamka CD dotyčnicou ku kružnici k, zo symetrie oboch dotyčníc CD a BD vyplýva $|CD| = |BD|$, čiže $|AB| = |BD|$.

(ii) Ak naopak $|AB| = |BD|$, čiže $|CD| = |BD|$, leží bod D na osi tetivy BC kružnice k, takže jej dotyčnicou je nielen priamka BD, ale aj súmerne združená priamka CD.

A – II – 3

Hľadáme práve tie dvojice celých kladných čísel m a n, pre ktoré existujú celé kladné čísla k a l také, že

$$2m - 1 = kn \quad \text{a} \quad 2n - 1 = lm. \tag{1}$$

Pozerajme sa na čísla k, l ako na parametre a riešme sústavu lineárnych rovníc (1) pre neznáme m, n. Keď napríklad k dvojnásobku prvej rovnice pripočítame k-násobok druhej rovnice, eliminujeme tým neznámu n a po úprave dostaneme prvú z rovníc

$$(4 - kl)m = k + 2 \quad \text{a} \quad (4 - kl)n = l + 2; \tag{2}$$

druhú rovnicu získame analogicky. Keďže pravé strany rovníc (2) sú kladné, vyplýva z tvaru ľavých strán podmienka $4 - kl > 0$, čiže $kl < 4$. To je pre celé kladné čísla k, l natoľko obmedzujúce, že jednotlivé možné prípady $kl = 1$, $kl = 2$ a $kl = 3$ ľahko postupne rozoberieme.

V prípade $kl = 1$ musí byť $k = l = 1$ a z rovníc (2), ktoré prejdú na tvar $3m = 3$ a $3n = 3$, nachádzame prvú vyhovujúcu dvojicu $m = n = 1$.

Prípad $kl = 2$ vôbec rozoberať nemusíme, pretože podľa ľavých strán rovníc (1) vidíme, že čísla k, l, m, n z pravých strán musia byť (v každom, nielen v tomto prípade) nepárne.

V prípade $kl = 3$ je nutne $\{k, l\} = \{1, 3\}$, čo po dosadení do rovníc (2) dáva riešenie $m = 5$ a $n = 3$, alebo naopak $m = 3$ a $n = 5$.

Záver. Všetky hľadané dvojice (m, n) sú $(1, 1)$, $(3, 5)$ a $(5, 3)$.

Iné riešenie. Úvahy s nerovnosťami vedúce k úplnému vyriešeniu úlohy môžeme rôznymi spôsobmi meniť. Pozrime sa teda, akými cestami sa možno od počiatočných predpokladov $m \mid 2n - 1$ a $n \mid 2m - 1$ uberať.

Prvý postup. Keby neplatilo $m = 2n - 1$ ani $n = 2m - 1$, boli by čísla $2n - 1$ a $2m - 1$ aspoň dvojnásobkami postupne čísel m a n, teda by platili nerovnosti $2n - 1 \geqq 2m$ a $2m - 1 \geqq 2n$. Tie sa však navzájom vylučujú, lebo znamenajú $2n > 2m$, resp. $2m > 2n$. Preto musí platiť aspoň jedna z rovností $m = 2n - 1$ alebo $n = 2m - 1$. Ak $m = 2n - 1$, tak $2m - 1 = 4n - 3$ a zostávajúca podmienka $n \mid 2m - 1$ tak prechádza na tvar $n \mid 4n - 3$, čiže $n \mid 3$. To spĺňajú iba čísla $n = 1$ a $n = 3$, ktorým podľa vzťahu $m = 2n - 1$ zodpovedajú postupne hodnoty $m = 1$ a $m = 5$. Druhý prípad, keď

$n = 2m - 1$, sa od prvého líši len zámenou úloh m a n, takže pri ňom dostaneme ešte tretiu vyhovujúcu dvojicu $m = 3$ a $n = 5$.

Druhý postup. Vzhľadom na symetriu môžeme predpokladať, že platí $m \leqq n$, z čoho vyplýva $2m - 1 \leqq 2n - 1 < 2n$. Číslo $2m - 1$ je tak násobkom čísla n menším než $2n$, musí to teda byť samo číslo n. Tak sme odvodili rovnosť $2m - 1 = n$. Zvyšok úvah je už rovnaký ako pri prvom postupe.

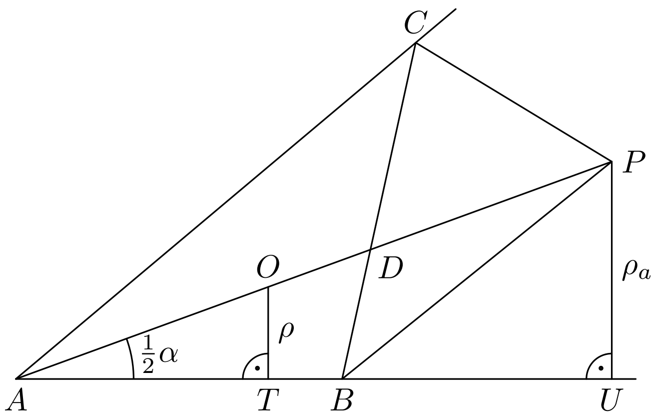
Tretí postup. Všimnime si, že číslo $2m + 2n - 1$ je deliteľné každým z oboch čísel m a n, ktorá sú navyše nesúdeliteľné, lebo napr. číslo m je deliteľom čísla $2n - 1$, ktoré je s číslom n zrejme nesúdeliteľné. Preto je číslo $2m + 2n - 1$ deliteľné aj súčinom mn, takže platí nerovnosť $mn \leqq 2m + 2n - 1$, čiže $(m - 2)(n - 2) \leqq 3$. Z toho vyplýva, že obe čísla m, n nemôžu byť väčšie ako 3; vzhľadom na symetriu rozoberieme iba prípad $m \leqq 3$. Pre $m = 1$ z podmienky $n \mid 2m - 1$ vyplýva $n = 1$, pre $m = 2$ je podmienka $m \mid 2n - 1$ nesplniteľná, pre $m = 3$ máme podmienky $3 \mid 2n - 1$ a $n \mid 5$, ktoré spĺňa jedine $n = 5$.

A – II – 4

Označme zvyčajným spôsobom dĺžky strán a veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC. Pre polomery ϱ, ϱ_a kružnice vpísanej, resp. pripísanej ku strane BC trojuholníka ABC s obsahom S platia známe vzťahy

$$\varrho = \frac{2S}{a+b+c} \qquad \text{a} \qquad \varrho_a = \frac{2S}{b+c-a}.$$

(Na ich odvodenie stačí uvažovať rovnosti $S = S_{BCO} + S_{ABO} + S_{ACO}$, resp. $S = S_{ACP} + S_{ABP} - S_{BCP}$ a uvedomiť si, že ϱ, resp. ϱ_a je spoločná výška príslušnej trojice trojuholníkov na strany pôvodného trojuholníka.)



Obr. 16

Keďže stredy O, P ležia na osi vnútorného uhla BAC, sú ϱ, ϱ_a odvesnami protiľahlými k uhlu $\frac{1}{2}\alpha$ pravouhlých trojuholníkov s preponami AO, resp. AP (obr. 16), takže platí $\varrho = |AO| \sin \frac{1}{2}\alpha$ a $\varrho_a = |AP| \sin \frac{1}{2}\alpha$. Spolu dostávame vyjadrenie pravej strany dokazovanej rovnosti v tvare

$$\frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|} = \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha}{\varrho} + \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha}{\varrho_a} = \\ = \frac{\bigl((a+b+c) + (b+c-a)\bigr) \sin \frac{1}{2}\alpha}{2S} = \frac{(b+c) \sin \frac{1}{2}\alpha}{S}.$$

Na druhej strane je obsah S súčtom obsahov trojuholníkov ABD a ACD, ktoré vyjadríme pomocou dĺžok ich strán z vrcholu A a sínusu nimi zovretého (zhodného) uhla $\frac{1}{2}\alpha$:

$$S = S_{ABD} + S_{ACD} = \frac{c|AD| \sin \frac{1}{2}\alpha}{2} + \frac{b|AD| \sin \frac{1}{2}\alpha}{2} = \frac{(b+c)|AD| \sin \frac{1}{2}\alpha}{2}.$$

Odtiaľ ľahko obdržíme vyjadrenie

$$\frac{2}{|AD|} = \frac{(b+c) \sin \frac{1}{2}\alpha}{S}.$$

Vidíme, že obe strany dokazovanej rovnosti majú rovnakú hodnotu. Tým je celý dôkaz hotový. Dodajme, že vďaka vzťahu $S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = bc \sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha$ možno získaný výsledok zapísať v tvare

$$\frac{2}{|AD|} = \frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|} = \frac{b+c}{bc \cos \frac{1}{2}\alpha}.$$

Iné riešenie. Využijeme rovnosti $|AT| = \frac{1}{2}(b+c-a)$ a $|AU| = \frac{1}{2}(a+b+c)$ pre body T, U dotyku polpriamky AB s vpísanou, resp. pripísanou kružnicou.[5] Vzhľadom na rovnosti $|AT| = |AO| \cos \frac{1}{2}\alpha$ a $|AU| = |AP| \cos \frac{1}{2}\alpha$ dostaneme nasledujúce vyjadrenie pravej strany dokazovanej rovnosti:

$$\frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|} = \frac{|AO| + |AP|}{|AP|} \cdot \frac{1}{|AO|} = \frac{|AT| + |AU|}{|AU|} \cdot \frac{1}{|AO|} = \\ = \frac{b+c}{\frac{1}{2}(a+b+c)} \cdot \frac{1}{|AO|} = \frac{2(b+c)}{a+b+c} \cdot \frac{1}{|AO|}.$$

Vidíme, že na dokončenie dôkazu požadovanej rovnosti stačí ukázať, že

$$\frac{|AD|}{|AO|} = \frac{a+b+c}{b+c}.$$

[5] Tieto rovnosti sú dobre známe a jednoducho vyplývajú z rovností dĺžok úsekov dotyčníc od vrcholov trojuholníka k bodom dotyku s príslušnou kružnicou.

Z vlastností osi uhla však vieme, že bod D delí stranu BC v pomere dĺžok strán AB a AC, teda $|BD|/|DC| = c/b$, takže $|CD| = ab/(b+c)$. Podobne bod O osi uhla ACD delí protiľahlú stranu AD trojuholníka ACD v pomere

$$\frac{|AO|}{|OD|} = \frac{|AC|}{|CD|} = \frac{b}{\frac{ab}{b+c}} = \frac{b+c}{a}.$$

Odtiaľ

$$\frac{|AD|}{|AO|} = \frac{|AO|+|OD|}{|AO|} = 1 + \frac{a}{b+c} = \frac{a+b+c}{b+c}.$$

Iné riešenie. Uvedieme postup založený na použití sínusovej vety v trojuholníkoch ABO, ABD a ABP.[6] Je zrejmé, že tieto trojuholníky majú pri vrchole B postupne uhly $\frac{1}{2}\beta$, β a $90^\circ + \frac{1}{2}\beta$, zatiaľ čo pri vrcholoch O, D, P majú postupne uhly $90^\circ + \frac{1}{2}\gamma$, $\gamma + \frac{1}{2}\alpha$ a $\frac{1}{2}\gamma$. Preto sínusová veta prináša rovnosti

$$\frac{|AB|}{|AO|} = \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\beta}, \quad \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{\sin(\gamma+\frac{1}{2}\alpha)}{\sin\beta}, \quad \frac{|AB|}{|AP|} = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\beta},$$

pričom sme dvakrát využili vzťah $\sin(90^\circ + \delta) = \cos\delta$. Po dosadení do dokazovanej rovnosti tak prichádzame k ekvivalentnej úlohe dokázať pre vnútorné uhly ľubovoľného trojuholníka ABC rovnosť

$$\frac{2\sin(\gamma+\frac{1}{2}\alpha)}{\sin\beta} = \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\beta} + \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\beta}.$$

Po použití vzťahu $\sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta$ a následnom vynásobení oboch strán nenulovým výrazom $\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta$ prechádzame na úlohu overiť jednoduchšiu rovnosť

$$\sin\Big(\gamma + \frac{1}{2}\alpha\Big) = \cos\frac{1}{2}\gamma\cdot\cos\frac{1}{2}\beta + \sin\frac{1}{2}\gamma\cdot\sin\frac{1}{2}\beta.$$

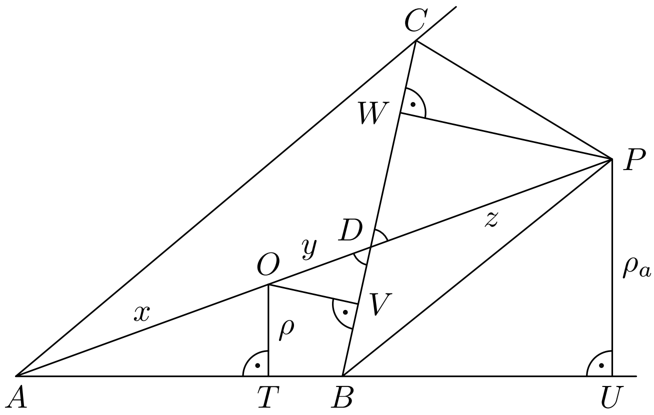
To je už celkom ľahké: výraz napravo je totiž rovný $\cos(\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma)$ a rovnosť typu $\sin\delta = \cos\varepsilon$ je zaručená, ak platí $\delta + \varepsilon = 90^\circ$. V našom prípade je však $\delta = \gamma + \frac{1}{2}\alpha$ a $\varepsilon = \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma$, teda

$$\delta + \varepsilon = \gamma + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) = 90^\circ$$

a celý dôkaz je tak hotový.

Iné riešenie. Položme $x = |AO|$, $y = |OD|$ a $z = |DP|$ a podľa obr. 17 označme T, U, V, W body dotyku vpísanej a pripísanej kružnice s priamkami AB, BC. Podľa vety *uu* je trojuholník AOT podobný s trojuholníkom APU a tiež trojuholník DOV

[6] S rovnakým úspechom možno využiť aj trojicu trojuholníkov ACO, ACD a ACP.



Obr. 17

s trojuholníkom DPW, pritom v oboch prípadoch je koeficient podobnosti rovný pomeru polomerov oboch kružníc. Odtiaľ vyplýva pre prepony spomenutých štyroch trojuholníkov pomer[7]

$$\frac{x}{x+y+z} = \frac{y}{z}. \tag{1}$$

Keďže $x+y+z > z$, a teda aj $x > y$, uvedeným dvom zlomkom sa rovná aj tretí zlomok zostavený z (kladných) rozdielov čitateľov a menovateľov. Platí teda

$$\frac{x}{x+y+z} = \frac{x-y}{(x+y+z)-z} = \frac{x-y}{x+y} = \frac{2x}{x+y} - 1.$$

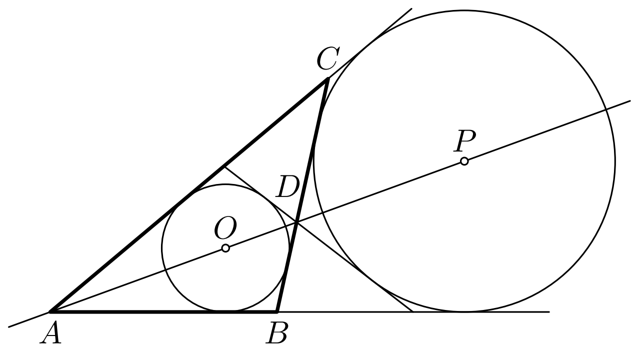
Odtiaľ po vydelení kladnou hodnotou x dostaneme

$$\frac{1}{x+y+z} = \frac{2}{x+y} - \frac{1}{x}$$

a po presune druhého zlomku z pravej strany na ľavú už dostaneme dokazovanú rovnosť, lebo

$$\frac{1}{x+y+z} = \frac{1}{|AP|}, \quad \frac{2}{x+y} = \frac{2}{|AD|} \quad \text{a} \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{|AO|}.$$

Iné riešenie. Obe kružnice sú rovnoľahlé podľa stredov A aj D. Obe rovnoľahlosti majú



Obr. 18

[7] Jeho platnosť je zaručená aj v prípade $D = V = W$, keď druhá dvojica podobných trojuholníkov je degenerovaná dvojica úsečiek – polomerov skúmaných kružníc.

až na znamienko rovnaké koeficienty a zobrazujú bod O na bod P (obr. 18). Odtiaľ

$$\frac{|DP|}{|DO|} = \frac{|AP|}{|AO|}, \quad \text{čiže} \quad \frac{|AP| - |AD|}{|AD| - |AO|} = \frac{|AP|}{|AO|}.$$

Úpravou poslednej rovnosti dostávame $2|AP| \cdot |AO| = |AD|(|AP| + |AO|)$ a po vydelení nenulovým súčinom $|AP| \cdot |AO| \cdot |AD|$ vyjde vzťah, ktorý sme chceli dokázať.

A – III – 1

Z rovnice vyplýva, že b^2 je párne číslo väčšie ako 4^a, teda b je párne číslo väčšie ako párne číslo 2^a. Musí preto platiť $b \geqq 2^a + 2$, odkiaľ

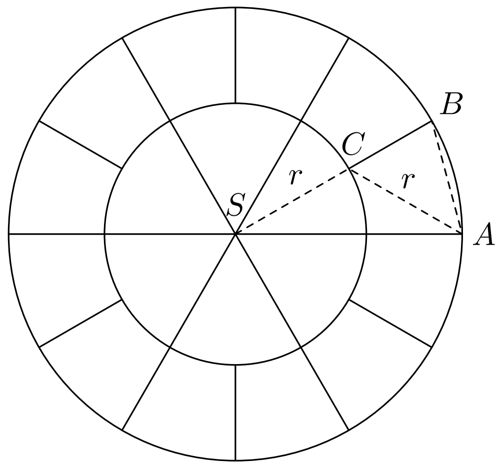
$$4^a + 4a^2 + 4 = b^2 \geqq (2^a + 2)^2 = 4^a + 4 \cdot 2^a + 4.$$

Porovnaním krajných výrazov dostaneme $a^2 \geqq 2^a$, čo znamená, že $a \leqq 4$. Dokážeme totiž indukciou, že opačná nerovnosť $a^2 < 2^a$ platí pre každé celé $a \geqq 5$. Pre $a = 5$ je to tak ($25 < 32$). Ak platí $a^2 < 2^a$ pre niektoré $a \geqq 5$, tak po vynásobení dvoma dostaneme $2a^2 < 2^{a+1}$. Takže žiadaná nerovnosť $(a+1)^2 < 2^{a+1}$ je dôsledkom nerovnosti $(a + 1)^2 < < 2a^2$, ktorá je zrejmá, lebo je ekvivalentná s nerovnosťou $1 < a(a - 2)$, ktorá platí triviálne, nech je $a \geqq 5$ akékoľvek. Tým je dôkaz indukciou ukončený.

Ukázali sme, že v každej hľadanej dvojici (a, b) musí platiť $a \leqq 4$. Postupným dosadením hodnôt $a = 1, 2, 3, 4$ do rovnice $4^a + 4a^2 + 4 = b^2$ zistíme, že úloha má práve dve riešenia, a to $(a, b) = (2, 6)$ a $(a, b) = (4, 18)$.

A – III – 2

Označme $r = 4\sqrt{3}\,\text{cm}$ a celý terč s polomerom $12\,\text{cm} = r\sqrt{3}$ rozdeľme na 18 častí. Prvých šesť častí budú zhodné výseky so stredovým uhlom 60° v kruhu s polomerom r uprostred terča. Zvyšné medzikružie rozdelíme na 12 zhodných „medzivýsekov“ so stredovým uhlom 30° (obr. 19).



Obr. 19

Označme podľa obrázka S stred terča a A, B, C vrcholy jedného zo spomenutých medzivýsekov. Keďže kružnice ohraničujúce tieto časti majú polomery r a $r\sqrt{3}$ a keďže $\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, je zrejme trojuholník SAC rovnoramenný, takže $|AC| = r$; navyše AC je najdlhšou stranou v trojuholníku ABC, ktorý má vnútorné uhly 45°, 75° a 60°. Preto je maximálna vzdialenosť dvoch bodov jedného medzivýseku rovná r, rovnako ako maximálna vzdialenosť dvoch bodov každého zo 6 výsekov stredového kruhu s polomerom r. Podľa Dirichletovho princípu niektoré dva z 19 zásahov ležia v rovnakej z 18 vytvorených častí, takže ich vzdialenosť je najviac r. Dôkaz je ukončený, pretože $4\sqrt{3} < 7$ ($\Leftrightarrow 48 < 49$).

Poznámka. Uvažujme tvrdenie: *Ak je v kruhu s polomerom $r\sqrt{3}$ vybraných N bodov, tak je vzdialenosť niektorých dvoch z nich nanajvýš r.* Keby sme chceli také tvrdenie dokázať porovnaním súčtu obsahov N zhodných kruhov s priemerom r s obsahom kruhu s priemerom $r\bigl(1 + 2\sqrt{3}\bigr)$, podarí sa nám to práve vtedy, keď bude platiť

$$N \cdot \frac{\pi r^2}{4} > \frac{\pi r^2 \bigl(1 + 2\sqrt{3}\bigr)^2}{4}, \quad \text{čiže} \quad N > 13 + 4\sqrt{3} \doteq 19{,}9.$$

V situácii danej úlohy, keď je odhad r vzdialenosti dvoch bodov nahradený väčšou hodnotou $r_1 = r \cdot \dfrac{7}{4\sqrt{3}}$, má podobná podmienka tvar

$$N \cdot \frac{\pi r_1^2}{4} > \frac{\pi \bigl(r_1 + 2r\sqrt{3}\bigr)^2}{4}, \quad \text{po dosadení} \quad N > \left(1 + \frac{24}{7}\right)^2 \doteq 19{,}6.$$

Preto nemožno takto jednoduchým postupom dôjsť k riešeniu úlohy.

A – III – 3

a) Označme a, b, c, d (premenné) počty unesených členov strán A, B, C, D. Úvodná štvorica $(a, b, c, d) = (31, 28, 23, 19)$ je podľa parity čísel typu (n, p, n, n), kde p, n označuje párne, resp. nepárne číslo. Keďže pri každom preregistrovaní sa parita všetkých čísel a, b, c, d zmení (tri z nich sa totiž zmenšia o 1 a štvrté zväčší o 3), štvorica typu (n, p, n, n) sa zmení na štvoricu typu (p, n, p, p) a tá potom zase späť na štvoricu typu (n, p, n, n). Ak teda dostaneme nakoniec štvoricu s tromi nulami, musí byť táto štvorica typu (p, n, p, p), takže všetci unesení vtedy budú členmi strany B.

Nasledujúca tabuľka zmien hodnôt a, b, c, d ukazuje, že sa všetci unesení môžu naozaj stať členmi strany B:

a:	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	...	0
b:	28	27	26	25	24	23	26	29	32	35	...	101
c:	23	22	25	24	27	26	25	24	23	22	...	0
d:	19	22	21	24	23	26	25	24	23	22	...	0

b) Ukážeme, že hľadané štvorice (a, b, c, d) sú práve tie, v ktorých *niektoré tri čísla dávajú po delení štyrmi rovnaký zvyšok.*

Z rovnosti $a+b+c+d=101$ vyplýva, že tri z čísel a, b, c, d majú rovnakú paritu a štvrté paritu opačnú. Vzhľadom na symetriu hľadajme úvodné štvorice (a,b,c,d) za predpokladu

$$a \equiv b \equiv c \not\equiv d \pmod 2$$

a podľa riešenia časti a) skúmajme, kedy sa všetci unesení môžu stať členmi strany D. Z toho, ako sa menia počty a, b, c, d pri každom preregistrovaní (tri sa zmenšia o 1 a jedno zväčší o 3), vyplýva, že rozdiely $a-b$, $a-c$, $b-c$ nemenia svoje zvyšky po delení štyrmi. Ak má na konci platiť $a=b=c=0$, musia byť uvedené tri rozdiely už na začiatku deliteľné štyrmi, takže úvodné počty a, b, c musia spĺňať podmienku

$$a \equiv b \equiv c \pmod 4. \tag{1}$$

Ukážeme, že podmienka (1) je pre splnenie želaného cieľa $a=b=c=0$ aj postačujúca. Zrejme stačí ukázať, že úvodnú štvoricu (a,b,c,d) spĺňajúcu podmienku (1) možno po niekoľkých krokoch zmeniť na štvoricu typu (e,e,e,f), potom už totiž stačí opakovať úpravu $(e,e,e,f) \to (e-1,e-1,e-1,f+3)$.

Majme teda štvoricu celých kladných čísel (a,b,c,d) so súčtom 101, ktorá spĺňa podmienku (1), a predpokladajme, že ešte neplatí $a=b=c$. Ukážeme, ako v tomto prípade dovolenými krokmi zväčšiť hodnotu d (o 1 alebo 2). Keďže vždy $d \leqq 101$, dá sa také zväčšenie zopakovať len niekoľkokrát, potom už dosiahneme želaný cieľ.

Procedúru zväčšenia d určite stačí opísať v prípade, keď $a \geqq b \geqq c$ a $a>c$, teda $a-c \geqq 4$ vďaka podmienke (1).[8] Poraďme Rumburakovi dvojicu krokov

$$(a,b,c,d) \to (a-1,b-1,c+3,d-1) \to (a-2,b-2,c+2,d+2),$$

ktorá zvyšuje hodnotu d o 2. Túto dvojicu krokov nemožno urobiť iba v prípade $b=1$, kedy však z (1) a nerovnosti $b \geqq c$ vyplýva aj $c=1$. Na takú štvoricu $(a,1,1,d)$, pričom $a \geqq 5$ a $d \geqq 2$ (nemôže byť aj $d=1$, pretože d má odlišnú paritu), použije Rumburak trojicu krokov

$$(a,1,1,d) \to (a-1,4,0,d-1) \to (a-2,3,3,d-2) \to (a-3,2,2,d+1),$$

ktorá zvyšuje hodnotu d o 1.

Tvrdenie o tvare všetkých vyhovujúcich štvoríc z prvej vety riešenia časti b) je dokázané.

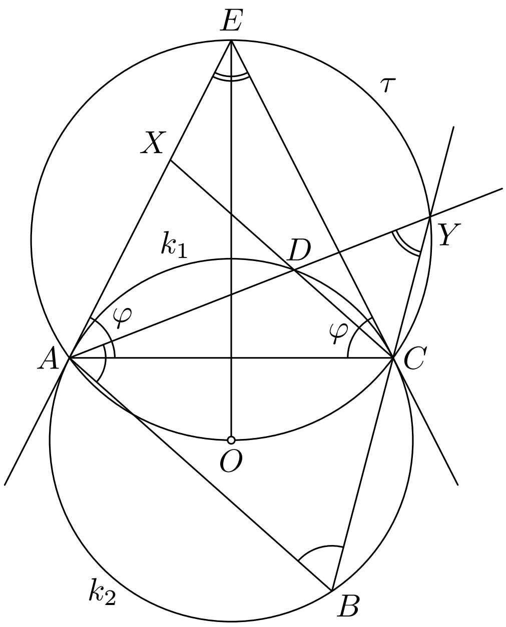
A – III – 4

Budeme uvažovať iba také lichobežníky $ABCD$, v ktorých platí $AB \parallel CD$, pri ostatných priesečník (rovnobežných) priamok BC a AD neexistuje.

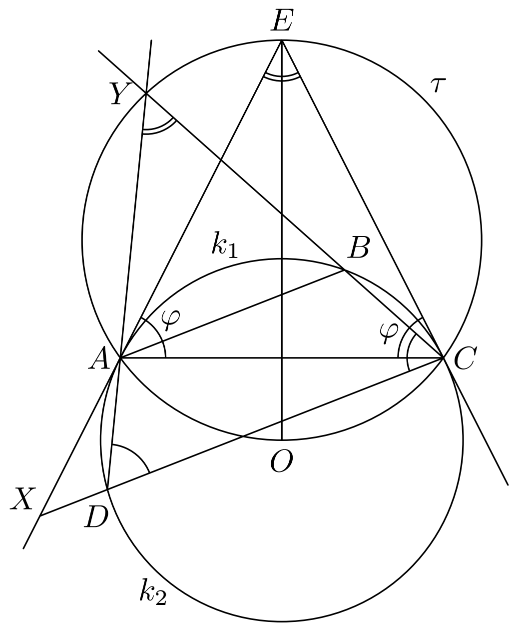
Označme O stred kružnice k a E priesečník jej dotyčníc vedených bodmi A, C (obr. 20). Ako vieme, body A, C ležia na Tálesovej kružnici τ nad priemerom OE

[8] Zdôraznime, že nevylučujeme rovnosť $c=0$. Ku štvorici s nulovým prvkom nás totiž dovedie v ďalšej vete opísaná dvojica krokov v prípade, že $b=2$.

a sú podľa tohto priemeru súmerne združené. Spoločnú veľkosť ostrých uhlov pri základni AC rovnoramenného trojuholníka ACE označme φ. Napokon, vnútra kratšieho a dlhšieho oblúka AC kružnice k označme k_1, resp. k_2.



Obr. 20



Obr. 21

a) Zvoľme na dotyčnici AE ľubovoľný bod X, $X \neq A$. Kružnica k zrejme pretne úsečku XC vo vnútornom bode D práve vtedy, keď bod X je buď vnútorným bodom úsečky AE, alebo vnútorným bodom polpriamky opačnej k polpriamke AE. Oba prípady (obr. 20 a obr. 21) teraz posúdime samostatne.

V prvom prípade platí $D \in k_1$ a $B \in k_2$, takže podľa vety o úsekovom uhle je uhol ABC rovný ostrému uhlu φ. Rovnakú veľkosť má aj uhol BAD, pretože každý tetivový lichobežník je rovnoramenný. Bod Y, priesečník rôznobežných polpriamok BC a AD, teda leží v polrovine ACE. Z rovnoramenných trojuholníkov ABY a ACE preto vyplýva, že uhly AYC a AEC sú zhodné (majú veľkosť $\pi - 2\varphi$). Podľa vety o obvodovom uhle leží bod Y na oblúku AEC kružnice τ, presnejšie vnútri kratšieho z jej oblúkov CE, lebo polpriamka AD leží v uhle CAE.

V druhom prípade je úvaha analogická a zapíšeme ju stručne: $D \in k_2$, $B \in k_1$, $|\measuredangle ADC| = \varphi = |\measuredangle BCD|$, priesečník Y rôznobežných polpriamok CB a DA leží v polrovine ACE, a keďže $|\measuredangle AYC| = |\measuredangle AEC|$, leží bod Y na kružnici τ, a to vnútri jej kratšieho oblúka AE.

b) Ukážeme teraz, že naopak každý vnútorný bod Y kratších oblúkov CE a AE kružnice τ je priesečníkom priamok BC a AD niektorého z uvažovaných lichobežníkov $ABCD$. Opäť rozoberieme dva prípady podľa toho, na ktorom z oboch oblúkov bod Y leží.

Ak je Y vnútorný bod oblúka CE, dajú sa zrejme zostrojiť body $D \in k_1$ a $B \in k_2$ tak, aby body A, D, Y resp. B, C, Y ležali v uvedenom poradí na jednej priamke. Z $D \in k_1$

vyplýva existencia priesečníka X polpriamky CD s vnútrom úsečky AE (bod D potom zodpovedá bodu X podľa konštrukcie zo zadania úlohy). Ostáva objasniť, prečo $AB \parallel CD$. Keďže body O a Y ležia na rôznych oblúkoch AC kružnice τ a pritom $|AO| = |CO|$, je polpriamka YO osou uhla AYC, takže priamky $A(D)Y$ a $B(C)Y$ sú súmerne združené podľa priamky YO, ktorá je (triviálne) osou súmernosti kružnice k, lebo prechádza jej stredom. Preto podľa tejto osi musia byť súmerne združené aj priesečníky oboch spomenutých priamok $A(D)Y$ a $B(C)Y$ s kružnicou k, teda (vďaka určenému poradiu bodov) jednak body A a B, jednak body D a C. Obe úsečky AB a CD sú preto kolmé na priamku OY, a sú teda rovnobežné.

Ak je Y vnútorným bodom oblúka AE, zostrojíme body $D \in k_2$ a $B \in k_1$ tak, aby na priamke ležali body v poradí D, A, Y, resp. C, B, Y. Polpriamka CD pretne priamku AE v potrebnom bode X (keďže $D \neq A$, bude určite $X \neq A$), ak platí $|\measuredangle AEC| + |\measuredangle ECD| < \pi$. To overíme tak, že použijeme vetu o obvodovom a úsekovom uhle v kružnici k, podľa ktorej $|\measuredangle ECD| = \pi - |\measuredangle CAD| = |\measuredangle CAY|$, a keďže $|\measuredangle AEC| = |\measuredangle AYC|$, je súčet $|\measuredangle AEC| + |\measuredangle ECD|$ rovný súčtu dvoch uhlov v trojuholníku ACY. Zo združenosti priamok $D(A)Y$ a $C(B)Y$ podľa osi OY uhla AYC potom opäť vyplýva požadovaná rovnobežnosť $AB \parallel CD$.

Záver. Hľadanou množinou je zjednotenie vnútier kratších oblúkov CE a AE Tálesovej kružnice τ.

A – III – 5

V jednom kroku nahradíme vždy dve čísla a, b jedným prirodzeným číslom $\sqrt{ab}$. Keďže pre ľubovoľné $a \leqq b$ platí $a \leqq \sqrt{ab} \leqq b$, je zrejmé, že na tabuli budú stále zapísané iba čísla z množiny $\mathsf{M} = \{1, 2, \ldots, 33\}$. Pritom ak je číslo a prvočíslom alebo súčinom niekoľkých rôznych prvočísel, musia tieto prvočísla byť obsiahnuté aj v rozklade čísla $\sqrt{ab}$, takže $\sqrt{ab} = ka$, čiže $b = k^2a$ pre niektoré prirodzené k. Ak $k = 1$, musí byť číslo a na tabuli zapísané viackrát. Ak $k \geqq 2$, a teda $b = k^2a \geqq 4a$, musí platiť $4a \leqq 33$, a preto z $b = k^2a \in \mathsf{M}$ vyplýva aj $4a \in \mathsf{M}$. Na tabuli teda ostanú až do konca jednak všetky prvočísla, ktoré majú v množine M práve jeden násobok, jednak všetky tie $a \in \mathsf{M}$, ktoré sú súčinom niekoľkých rôznych prvočísel a zároveň spĺňajú podmienku $4a > 33$, čiže $a \geqq 9$. Spolu sa jedná celkom o 15 nezotriteľných čísel

$$10,\ 11,\ 13,\ 14,\ 15,\ 17,\ 19,\ 21,\ 22,\ 23,\ 26,\ 29,\ 30,\ 31,\ 33.$$

Ukážeme, že okrem nich bude na tabuli vždy zastúpené aspoň jedno číslo z množiny $\mathsf{S} = \{6, 12, 18, 24\}$ (na začiatku tam sú všetky). Ak zvolíme v jednom kroku čísla a a b, pričom napr. $a \in \mathsf{S}$, a nahradíme ich číslom $n = \sqrt{ab}$, musí byť aj číslo n násobkom šiestich, ktorý navyše vďaka odhadom $a \leqq 24$ a $b \leqq 33$ spĺňa nerovnosť $n \leqq \sqrt{24 \cdot 33} = 6\sqrt{22} < 30$, takže bude platiť $n \in \mathsf{S}$. Na tabuli po ľubovoľnom počte krokov teda ostane 15 vyššie zapísaných čísel a aspoň jedno číslo z S, teda aspoň 16 čísel, ako sme mali dokázať.

Poznámka. Počet 16 čísel na tabuli možno dostať napríklad po 17 krokoch opísaných v nasledujúcich riadkoch tak, že zotierané čísla v každom kroku sú tučné, zatiaľ čo nové číslo je pripísané na konci ďalšieho riadku:

1,2,3,4,5,6,**7**,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,**28**,29,30,31,32,33;
1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,12,13,**14**,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,29,30,31,32,33,**14**;
1,2,3,4,**5**,6,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19,**20**,21,22,23,24,25,26,27,29,30,31,32,33,14;
1,2,3,**4**,6,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19,21,22,23,24,**25**,26,27,29,30,31,32,33,14,10;
1,2,3,6,8,9,**10**,11,12,13,15,16,17,18,19,21,22,23,24,26,27,29,30,31,32,33,14,**10**,10;
1,2,3,6,8,9,11,12,13,15,16,17,18,19,21,22,23,24,26,27,29,30,31,32,33,14,**10**,**10**;
1,2,3,6,8,9,11,**12**,13,15,16,17,18,19,21,22,23,24,26,**27**,29,30,31,32,33,14,10;
1,2,3,**6**,8,9,11,13,15,16,17,18,19,21,22,23,**24**,26,29,30,31,32,33,14,10,18;
1,2,3,8,9,11,13,15,16,17,**18**,19,21,22,23,26,29,30,31,32,33,14,10,**18**,12;
1,**2**,3,8,9,11,13,15,16,17,19,21,22,23,26,29,30,31,32,33,14,10,12,**18**;
1,3,**8**,9,11,13,15,16,17,19,21,22,23,26,29,30,31,**32**,33,14,10,12,6;
1,3,9,11,13,15,**16**,17,19,21,22,23,26,29,30,31,33,14,10,12,6,**16**;
1,3,9,11,13,15,17,19,21,22,23,26,29,30,31,33,14,10,12,6,**16**;
3,9,11,13,15,17,19,21,22,23,26,29,30,31,33,14,10,**12**,6,4;
9,11,13,15,17,19,21,22,23,26,29,30,31,33,14,10,6,**4**,6;
11,13,15,17,19,21,22,23,26,29,30,31,33,14,10,**6**,**6**,6;
11,13,15,17,19,21,22,23,26,29,30,31,33,14,10,**6**,**6**;
11,13,15,17,19,21,22,23,26,29,30,31,33,14,10,6.

A – III – 6

Vzhľadom na symetriu stačí uvažovať trojice (a,b,c), v ktorých $a \geqq b \geqq c$. Pre „najmenšie“ z nich $(2,2,2)$, $(3,2,2)$, $(3,3,2)$, $(3,3,3)$ a $(4,2,2)$ má daný výraz hodnoty 2, 3/2, 17/8, 7/2, resp. 11/4. Ak ukážeme, že pre všetky ostatné trojice (a,b,c), ktoré už spĺňajú podmienku $a+b+c \geqq 9$, platí nerovnosť

$$\frac{a+b+c}{2} - \frac{[a,b]+[b,c]+[c,a]}{a+b+c} \geqq \frac{3}{2},$$

bude to znamenať, že hľadaná najmenšia hodnota je rovná 3/2. Uvedenú nerovnosť ekvivalentne upravme:

$$(a+b+c)^2 - 2([a,b]+[b,c]+[c,a]) \geqq 3(a+b+c),$$
$$a^2+b^2+c^2+2(ab-[a,b])+2(bc-[b,c])+2(ca-[c,a]) \geqq 3(a+b+c).$$

Keďže zrejme platí $xy \geqq [x,y]$ pre ľubovoľné x, y, zanedbáme nezáporné dvojnásobky na ľavej strane poslednej nerovnosti a dokážeme (silnejšiu) nerovnosť

$$a^2+b^2+c^2 \geqq 3(a+b+c). \tag{1}$$

Z predpokladu $a + b + c \geqq 9$ a Cauchyho nerovnosti $3(a^2 + b^2 + c^2) \geqq (a + b + c)^2$ vyplýva

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqq \frac{(a + b + c)^2}{3} = 3(a + b + c) \cdot \frac{a + b + c}{9} \geqq 3(a + b + c),$$

a dôkaz je hotový.

Poznámky. Namiesto Cauchyho nerovnosti sme mohli prepísať (1) na tvar

$$\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{3}{2}\right)^2 \geqq \frac{27}{4}$$

a túto nerovnosť zdôvodniť umocnením zrejmých nerovností

$$a - \frac{3}{2} \geqq \frac{5}{2}, \quad b - \frac{3}{2} \geqq \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad c - \frac{3}{2} \geqq \frac{1}{2},$$

lebo uvažujeme už len trojice, v ktorých $a \geqq 4$, $b \geqq c \geqq 2$.

Postup z riešenia vedie dokonca k výsledku, že pre ľubovoľné celé čísla a, b, c väčšie ako 1 platí nerovnosť

$$\frac{a + b + c}{2} - \frac{[a, b] + [b, c] + [c, a]}{a + b + c} \geqq \frac{a + b + c}{6}.$$

Prípravné sústredenia pred IMO a MEMO

Pred medzinárodnou matematickou olympiádou (IMO) a stredoeurópskou matematickou olympiádou (MEMO) sa každoročne koná jedno výberové a jedno prípravné sústredenie pre najlepších riešiteľov celoštátneho kola kategórie A (CKMO). Od 55. ročníka MO sa navyše každoročne koná aj spoločné prípravné sústredenie českého a slovenského IMO družstva.

Po výberovom sústredení SKMO vyberie 6 najlepších študentov do reprezentačného družstva Slovenska pre IMO a určí jedného náhradníka. Spomedzi tých, ktorí sa nedostali na IMO a zároveň nie sú v maturitnom ročníku (t. j. majú možnosť súťažiť v MO aj nasledujúci školský rok), vyberie SKMO najlepších 6 študentov do družstva pre MEMO. Na výberovom sústredení pred IMO sa zúčastnilo 15 súťažiacich, najúspešnejších riešiteľov tretieho kola MO kategórie A (pri pozývaní na sústredenie sa kvôli MEMO zohľadňuje aj ročník).

Sústredenie sa konalo v dňoch 11. – 17. 4. 2010 v Bratislave. Pedagogický dozor vykonávala Bc. Lenka Trojaková, študentka FMFI UK. Úlohy zadávali lektori z FMFI UK Bratislava (prevažne študenti a doktorandi):

Bc. Ondrej Budáč, Tomáš Kocák, úlohy 1 – 4,
Mgr. Hana Budáčová, Bc. Michal Prusák, úlohy 5 – 8,
Mgr. Martin Potočný, Bc. Michal Takács, úlohy 9 – 11,
Bc. Jakub Beran, RNDr. Ján Mazák, úlohy 12 – 15,
Mgr. Peter Novotný, PhD., Mgr. Erika Trojáková, úlohy 16 – 18.

Každý deň študenti riešili sériu troch či štyroch úloh pri podobných podmienkach ako na IMO. V poobedňajších hodinách sa konal spoločný rozbor úloh s lektormi. Na konci sústredenia sa získané body za jednotlivé dni sčítali a s prihliadnutím na výsledky tretieho kola MO boli vybrané šesťčlenné družstvá pre účasť na IMO a MEMO.

Výsledky sústredenia:

Martin Vodička	62
Martin Bachratý	44,5
Michal Hagara	44
Jakub Konečný	35,5
Marián Horňák	33
Natália Karásková	32,5
Marek Kukan	32,5
Ján Hozza	30,5
Jakub Santer	24,5
Dominik Csiba	24
Vincent Lami	24
Ladislav Bačo	22
Pavol Guričan	21,5
Matej Balog	18
Róbert Tóth	17,5

Poradie po zohľadnení výsledkov CKMO:

1.	*Martin Vodička*	103	9.	*Ján Hozza*	50,5
2.	*Michal Hagara*	81	10.	*Vincent Lami*	49
3.	*Martin Bachratý*	75,5	11.	*Jakub Santer*	44,5
4.	*Jakub Konečný*	66,5	12.	*Pavol Guričan*	43,5
5.	*Ladislav Bačo*	59	13.	*Dominik Csiba*	40
6.	*Marián Horňák*	57	14.	*Róbert Tóth*	38,5
7.	*Natália Karásková*	56,5	15.	*Matej Balog*	38
8.	*Marek Kukan*	54,5			

Prípravné sústredenie sa konalo v dňoch 30. 5. – 4. 6. 2010 v Bratislave. Pedagogický dozor bola Bc. Lenka Trojaková. Sústredenie bolo zamerané obzvlášť na prípravu reprezentačných družstiev na IMO a MEMO. Lektormi boli:

Bc. Ondrej Budáč, FMFI UK (teória čísel),
Mgr. Peter Novotný, PhD., FMFI UK (invarianty, analytická geometria),
Peter Csiba, FMFI UK (algebra),
Mgr. Martin Potočný, Trojsten (kombinatorika),
Tomáš Kocák, FMFI UK (geometria),
Mgr. Juraj Földes, PhD., Vanderbilt University (algebra).

V poradí piate spoločné sústredenie českého a slovenského družstva sa uskutočnilo v dňoch 13. – 18. 6. v ČR v Uherskom Hradišti vo vzdelávacom stredisku Eduha. Sústredenie sa uskutočnilo pod záštitou Spoločnosti Otakara Borůvky a bolo finančne zabezpečené z neštátnych prostriedkov. Pedagogický dozor študentom robili Martin Potočný a Peter Novotný. Odborné prednášky viedli

doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., MÚ AV ČR, Brno (teória čísel),
RNDr. Pavel Calábek, CSc., PF UP, Olomouc (funkcionálne rovnice),
Mgr. Martin Panák, PhD., PF MU, Brno (kombinatorika),
RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., PF UP, Olomouc (syntetická planimetria).

Zadania súťažných úloh výberového sústredenia pred IMO

1. Množina M obsahuje všetky prirodzené čísla, ktoré sa dajú napísať v tvare $n^2 + n$ pre nejaké prirodzené číslo n. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $k > 1$ existujú $a_1, \dots , a_k, b \in M$ také, že $a_1 < \dots < a_k < b$ a $a_1 + \dots + a_k = b$.

2. V rovine je daný trojuholník ABC a jeho opísaná kružnica k. Kružnica l so stredom O sa dotýka kružnice k v bode P a úsečky BC v bode Q. Vieme, že bod P leží na oblúku kružnice k nad tetivou BC, ktorý neobsahuje bod A. Dokážte, že ak platí $|\angle CAO| = |\angle BAO|$, potom aj $|\angle PAO| = |\angle QAO|$.

3. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, ktoré pre všetky reálne x, y spĺňajú

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y.$$

4. Nech n je nepárne celé číslo väčšie ako 1 a nech c_1, c_2, ..., c_n sú kladné celé čísla. Pre každú permutáciu $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ čísel 1, 2, ..., n definujeme

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i.$$

Dokážte, že existujú dve rôzne permutácie a, b čísel 1, 2, ..., n také, že rozdiel $S(a) - S(b)$ je deliteľný číslom $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

5. Trojposchodové schodisko so šírkou dva je vyrobené z 12 jednotkových kociek. Určte, pre ktoré n sa dá kocka s rozmermi $n \times n \times n$ poskladať iba pomocou takýchto schodísk.

6. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n \geqq 1}$ kladných celých čísel platí, že $a_1 = 1$ a pre $n \geqq 2$ je

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} - n & \text{ak } a_{n-1} > n, \\ a_{n-1} + n & \text{ak } a_{n-1} \leqq n. \end{cases}$$

Nech S je množina takých indexov n, že $a_n = 2\,010$.
a) Dokážte, že S obsahuje nekonečne veľa prvkov.
b) Nájdite najmenšie číslo patriace do S.

7. Trojuholník ABC je vpísaný do kružnice k. Osi jeho vnútorných uhlov pretínajú kružnicu k druhýkrát v bodoch A', B' a C'. Dokážte, že obsah trojuholníka $A'B'C'$ je väčší alebo rovný obsahu trojuholníka ABC.

8. Dané sú štyri kladné celé čísla. Druhá mocnina súčtu ľubovoľných dvoch z nich je deliteľná súčinom zvyšných dvoch. Dokážte, že aspoň tri čísla spomedzi nich musia byť rovnaké.

9. Dané je prvočíslo $p > 5$. Nech a, b, c sú také celé čísla, že rozdiel žiadnych dvoch z nich nie je násobkom p. Ďalej i, j, k sú nezáporné celé čísla, pričom $p - 1 \mid i + j + k$. Navyše platí, že pre ľubovoľné celé číslo x je výraz

$$(x-a)(x-b)(x-c)[(x-a)^i(x-b)^j(x-c)^k - 1]$$

deliteľný prvočíslom p. Dokážte, že každé z čísel i, j a k je deliteľné číslom $p-1$.

10. Majme ľubovoľný trojuholník ABC. Kružnica doňho vpísaná sa dotýka strany AB v bode Z a strany AC v bode Y. Úsečky BY a CZ sa pretínajú v bode G. Označíme R a S také body v rovine, že štvoruholníky $BCYR$ a $BCSZ$ sú rovnobežníky. Dokážte, že veľkosti úsečiek GR a GS sú rovnaké.

11. Univerzitu navštevuje 2^{n+1} študentov, pričom $n \geqq 2$ a žiadni dvaja študenti nie sú rovnako starí. Na univerzite funguje 2^n korešpondenčných seminárov. Každý seminár má za vedúcich niekoľko študentov. Žiadne dva semináre nevznikli v tom istom čase, vznikali postupne. Každý študent môže robiť vedúceho vo viacerých seminároch, ale len ak sa tým neporušuje nasledujúce pravidlo:

Nemôže existovať medzi ním organizovanými seminármi dvojica AKS a BKS a dvojica od neho mladších študentov a a b takých, že a je mladší od b, a robí vedúceho v AKS, b robí vedúceho v BKS a zároveň BKS je novší ako AKS. Dokážte, že aspoň jeden korešpondenčný seminár nemá viac ako $4n$ vedúcich.

12. Nech a, b, c, d sú (v tomto poradí) dĺžky strán AB, BC, CD, DA dotyčnicového štvoruholníka $ABCD$. Dokážte, že platí

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{c^2}{c+d} \geqq \frac{a+c}{2}.$$

13. Nájdite všetky prvočísla p, pre ktoré je číslo p^3 deliteľom čísla

$$1^{3p} + 2^{3p} + 3^{3p} + \cdots + (p-1)^{3p}.$$

14. Konvexný štvoruholník $ABCD$ je vpísaný do kružnice. Priamky AB a CD sa pretínajú v bode P, priamky AD a BC sa pretínajú v bode Q. Dokážte, že

$$|PQ|^2 = |PA| \cdot |PB| + |QB| \cdot |QC|.$$

15. Na šachovnici $n \times n$ je obvod (a nič iné) obtiahnutý červenou. Dvaja hráči, Aladár a Boris, hrajú takúto hru: Hráč si v každom ťahu zvolí políčko šachovnice a obtiahne červenou jednu jeho stranu (ktorá ešte nebola červená). Tým vznikne medzi dvoma susednými políčkami nepriechodná hranica. Hra končí, keď je šachovnica červenými hranicami rozdelená na dve časti. Hráč, ktorý šachovnicu takto rozdelil, prehráva. Začína Aladár. Určte, ktorý hráč dokáže pre dané n vždy vyhrať a popíšte jeho víťaznú stratégiu.

16. Na stole leží v jednom dlhom rade vedľa seba 2009 kariet. Každá karta je z jednej strany zlatá, z druhej čierna. Na začiatku sú všetky karty otočené zlatou farbou nahor. Dvaja hráči (stojaci na tej istej strane stola) hrajú hru, pričom sa striedajú v ťahoch. V každom ťahu hráč zvolí blok tesne za sebou idúcich 50 kariet, z ktorých karta ležiaca najviac vľavo je otočená zlatou farbou nahor, a všetkých 50 kariet otočí (teda karty, ktoré boli zhora zlaté, budú čierne, a naopak). Hráč, ktorý už nemôže urobiť žiadny ťah, prehrá.

a) Musí hra po konečnom počte ťahov vždy skončiť?
b) Existuje víťazná stratégia pre začínajúceho hráča?

17. Daný je lichobežník $ABCD$ s rovnobežnými stranami AB, CD, pričom $|AB| > |CD|$. Body K, L ležia postupne vnútri úsečiek AB, CD tak, že $|AK|/|KB| = |DL|/|LC|$. Body P, Q ležia vnútri úsečky KL, pričom

$$|\measuredangle APB| = |\measuredangle BCD| \qquad \text{a} \qquad |\measuredangle CQD| = |\measuredangle ABC|.$$

Dokážte, že body P, Q, B, C ležia na jednej kružnici.

18. Nech a, b, c, d sú kladné reálne čísla také, že

$$abcd = 1 \qquad \text{a} \qquad a+b+c+d > \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}.$$

Dokážte, že

$$a+b+c+d < \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d}.$$

10. Česko-poľsko-slovenské stretnutie

V rámci záverečnej prípravy pred IMO sa uskutočnilo po desiaty krát prípravné stretnutie medzi družstvami Českej republiky, Poľska a Slovenska. Jednotlivé krajiny reprezentovali šestice študentov, ktorí si vybojovali vo svojich krajinách účasť na 51. IMO v Kazachstane, prípadne náhradníci.

Súťaž sa uskutočnila 20. – 23. júna v Bílovci v ČR. Prebiehala podobne ako celoštátne kolá našej MO, teda súťažiacim boli počas dvoch dní predložené dve trojice súťažných úloh, pričom za každú správnu úlohu mohli získať najviac 7 bodov, t. j. celkove 42 bodov. Na každú trojicu úloh mali súťažiaci vymedzené 4,5 hodiny čistého času. Rovnako je to aj na IMO.

Prehľad výsledkov:

Por.	Meno	Štát	1	2	3	4	5	6	$\sum$
1.	Damian Orlef	Poľsko	7	7	7	7	7	0	35
	Martin Vodička	Slovensko	7	7	7	7	7	0	35
3.	Piotr Suwara	Poľsko	7	6	7	7	0	2	29
4.	Szymon Kanonowicz	Poľsko	6	7	7	7	0	0	27
5.	*Jakub Konečný*	Slovensko	7	1	7	7	0	0	22
6.	*Martin Bachratý*	Slovensko	7	0	7	7	0	0	21
	Filip Borowiec	Poľsko	7	7	7	0	0	0	21
	Jáchym Sýkora	Česká rep.	7	7	0	0	0	7	21
	Michał Zając	Poľsko	7	7	0	7	0	0	21
10.	*Ladislav Bačo*	Slovensko	7	5	7	1	0	0	20
	Miroslav Olšák	Česká rep.	6	0	7	7	0	0	20
12.	*Michal Hagara*	Slovensko	7	0	7	0	0	0	14
13.	*Marián Horňák*	Slovensko	6	0	0	7	0	0	13
14.	Michał Miśkiewicz	Poľsko	7	0	0	0	0	5	12
15.	Radek Marciňa	Česká rep.	7	0	0	1	0	0	8
16.	Petr Ryšavý	Česká rep.	7	0	0	0	0	0	7
	Jakub Solovský	Česká rep.	7	0	0	0	0	0	7
18.	Petr Boroš	Česká rep.	0	0	0	0	0	0	0

Štát	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Česká rep.	34	7	7	8	0	7	63
Poľsko	41	34	28	28	7	7	145
Slovensko	41	13	35	29	7	0	125

Vedúcimi výprav, ktorí zároveň zabezpečili opravu úloh, boli RNDr. Pavel Calábek, PhD., Mgr. Martin Panák, PhD., doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc. a RNDr. Jaroslav Švrček, CSc. z Českej republiky, dr. Jerzy Bednarczuk, Andrzej Grzesik a Michał Pilipczuk z Poľska, a RNDr. Ján Mazák a Mgr. Peter Novotný, PhD. zo Slovenska.

Aj tento rok získalo v súčte najviac bodov Poľsko, i keď mu slovenské družstvo (na rozdiel od predošlých štyroch ročníkov súťaže) bolo celkom rovnocenným súperom. Nebyť slabšieho výsledku našich na druhej úlohe, mohli sme dokonca získať viac bodov ako Poľsko. Samozrejme, výrazný podiel na našom bodovom súčte nesie individuálny výkon Martina Vodičku a tiež výborný výsledok Slovenska na tretej úlohe. České družstvo doplatilo na neúčasť dvoch členov družstva IMO, ktorých zastúpili na súťaži v Bílovci náhradníci. Pripomíname, že česko-poľsko-slovenské stretnutie slúži hlavne ako príprava pred IMO, študenti tu nezískavajú medaily ani ceny.

V budúcom roku sa spoločné prípravné stretnutie uskutoční v Poľsku.

Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia

Úloha 1.
Určte všetky trojice (a, b, c) kladných reálnych čísel, ktoré sú riešením sústavy rovníc

$$\begin{aligned} a\sqrt{b} - c &= a, \\ b\sqrt{c} - a &= b, \\ c\sqrt{a} - b &= c. \end{aligned}$$

(*Michal Takács*)

Úloha 2.
Uvažujme ľubovoľných 60 bodov v kruhu s polomerom 1. Dokážte, že na obvode kruhu existuje taký bod, že súčet jeho vzdialeností od všetkých 60 bodov nie je väčší ako 80.

(*Jaromír Šimša*)

Úloha 3.
Nech p je prvočíslo. Dokážte, že možno zvoliť p^3 políčok na šachovnici s rozmermi $p^2 \times$ $\times\, p^2$ tak, že stredy žiadnych štyroch zvolených políčok nie sú vrcholmi obdĺžnika so stranami rovnobežnými s okrajmi šachovnice. (*Bartłomiej Bzdęga*)

Úloha 4.
Nájdite najväčšie celé číslo k, pre ktoré je pravdivé nasledujúce tvrdenie: Daných je ľubovoľných 2010 nedegenerovaných trojuholníkov. V každom trojuholníku sú jeho strany ofarbené tak, že jedna je modrá, jedna je červená a jedna biela. Pre každú farbu osobitne usporiadame dĺžky strán. Dostaneme

$$\begin{aligned} &b_1 \leqq b_2 \leqq \ldots \leqq b_{2010} && \text{pre dĺžky modrých strán,} \\ &r_1 \leqq r_2 \leqq \ldots \leqq r_{2010} && \text{pre dĺžky červených strán,} \\ &w_1 \leqq w_2 \leqq \ldots \leqq w_{2010} && \text{pre dĺžky bielych strán.} \end{aligned}$$

Potom existuje aspoň k indexov j takých, že môžeme utvoriť nedegenerovaný trojuholník so stranami dĺžok b_j, r_j, w_j. (*Michal Rolínek*)

Úloha 5.
Pre kladné reálne čísla x, y, z platí $x+y+z \geqq 6$. Nájdite najmenšiu možnú hodnotu výrazu

$$x^2+y^2+z^2+\frac{x}{y^2+z+1}+\frac{y}{z^2+x+1}+\frac{z}{x^2+y+1}.$$

(*Ján Mazák*)

Úloha 6.
Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník, pričom

$$|AB|+|CD|=\sqrt{2}\cdot|AC| \quad \text{a} \quad |BC|+|DA|=\sqrt{2}\cdot|BD|.$$

Dokážte, že $ABCD$ rovnobežník. (*Jaromír Šimša*)

Riešenia úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia

Úloha 1.
Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $a=\max\{a,b,c\}$. Z prvej rovnice sústavy dostaneme

$$c\bigl(\sqrt{b}-1\bigr) \leqq a\bigl(\sqrt{b}-1\bigr)=c, \qquad \text{čiže} \qquad b \leqq 4.$$

Podobne máme z druhej rovnice sústavy

$$b\bigl(\sqrt{c}-1\bigr)=a \geqq b, \qquad \text{teda} \qquad c \geqq 4.$$

Použitím týchto nerovností spolu s treťou rovnicou dostaneme

$$4 \leqq c \leqq c\bigl(\sqrt{c}-1\bigr) \leqq c\bigl(\sqrt{a}-1\bigr)=b \leqq 4,$$

odkiaľ vyplýva $a=b=c=4$.

Odpoveď. Jediným riešením sústavy je trojica $(a,b,c)=(4,4,4)$.

Úloha 2.
Do kružnice ohraničujúcej kruh vpíšme rovnostranný trojuholník PQR. Ak dokážeme, že ľubovoľný bod X nachádzajúci sa v kruhu spĺňa

$$|PX|+|QX|+|RX| \leqq 4, \tag{1}$$

tak sčítaním nerovností (1) pre $X=X_k$, $1 \leqq k \leqq 60$, dostaneme

$$\sum_{k=1}^{60}|PX_k|+\sum_{k=1}^{60}|QX_k|+\sum_{k=1}^{60}|RX_k| \leqq 4\cdot 60=240.$$

Z toho vyplýva, že aspoň jedna suma na ľavej strane je menšia alebo rovná $240:3=80$, teda aspoň jeden z bodov P, Q, R má požadovanú vlastnosť.

Vzhľadom na symetriu stačí (1) dokázať pre prípad, keď X leží vo výseku PSQ, kde S je stred kruhu. Ukážeme, že v takom prípade platí

$$|PX| + |QX| \leqq 2, \tag{2}$$

čo spolu s triviálnou nerovnosťou $|RX| \leqq 2$ dáva (1).

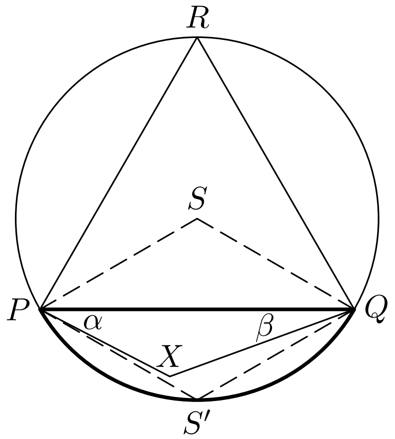
Označme S' stred kratšieho oblúka PQ (obr. 22). Štvoruholník $PS'QS$ je zrejme kosoštvorec, teda nerovnosť (2) stačí dokázať pre body X v odseku $PS'Q$ (ohraničenom úsečkou PQ a oblúkom $PS'Q$).

Ak $\alpha = |\measuredangle XPQ|$, $\beta = |\measuredangle XQP|$, tak $\alpha + \beta \leqq 60°$ a zo sínusovej vety v trojuholníku PQX máme

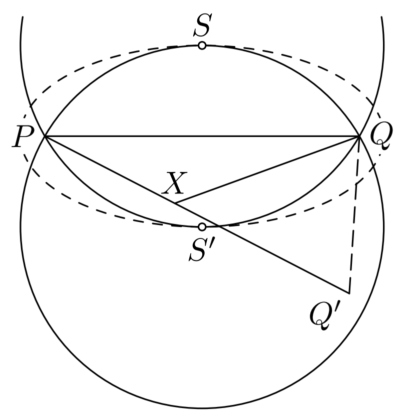
$$|PX| + |QX| = \frac{|PQ|(\sin\alpha + \sin\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\sqrt{3}\cdot 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} \leqq \frac{\sqrt{3}\cdot 1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2, \qquad \text{lebo} \quad \frac{\alpha+\beta}{2} \leqq 30°.$$

Tým sme dokázali (2).[9]



Obr. 22



Obr. 23

Poznámka. V druhej časti riešenia možno postupovať aj takto: Pre ľubovoľný bod X v uvedenom odseku uvažujme taký bod Q' na polpriamke PX mimo úsečky PX, že $|XQ'| = |XQ|$. Keďže uhol QXQ' má nanajvýš $60°$, máme $|\measuredangle XQQ'| = |\measuredangle XQ'Q| \geqq \geqq 60°$, takže Q' leží v kruhu, ktorý je obrazom zadaného kruhu v osovej súmernosti podľa PQ (obr. 23). Preto

$$|PX| + |XQ| = |PX| + |XQ'| = |PQ'| \leqq 2.$$

[9] Pre úplnosť treba dodať, že ak X leží na úsečke PQ, t. j. trojuholník PQX neexistuje a formálne nemôžeme použiť sínusovú vetu, tak $|PX| + |QX| = \sqrt{3} < 2$.

Ďalšou možnosťou je použiť fakt, že výsek PSQ leží v oblasti ohraničenej elipsou s ohniskami P a Q, ktorá je množinou všetkých bodov X spĺňajúcich $|PX| + |XQ| \leqq \leqq |PS'| + |QS'| = |PS| + |QS| = 2$.

Úloha 3.

Označme p^2 riadkov šachovnice dvojicami (a, b), pričom $a, b \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Každý riadok tak bude označený inou dvojicou[10]. Podobne označme takýmito dvojicami aj všetkých p^2 stĺpcov.

Políčko ležiace v riadku (a, b) a v stĺpci (c, d) budeme nazývať *pekné* práve vtedy, keď

$$ac \equiv b + d \pmod{p}. \tag{1}$$

Ku každej dvojici (a, b) existuje zrejme práve p dvojíc (c, d) spĺňajúcich (1).[11] Takže v každom riadku je p pekných políčok a na celej šachovnici je ich p^3.

Stačí dokázať, že žiadne štyri pekné políčka nemajú vlastnosť opísanú v zadaní. Predpokladajme sporom, že štyri políčka ležiace na prieniku riadkov $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$ so stĺpcami $(c_1, d_1) \neq (c_2, d_2)$ sú všetky pekné. Potom

$$a_i c_j \equiv b_i + d_j \pmod{p} \qquad \text{pre ľubovoľné } i, j \in \{1, 2\}. \tag{2}$$

Odčítaním dvoch kongruencií (2) s daným i (v jednej položíme $j = 2$, v druhej $j = 1$) získame

$$a_i(c_2 - c_1) \equiv d_2 - d_1 \pmod{p} \qquad \text{pre } i \in \{1, 2\}, \tag{3}$$

a po odčítaní dvoch kongruencií (3) dostaneme

$$(a_2 - a_1)(c_2 - c_1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Preto $a_1 = a_2$ alebo $c_1 = c_2$. Vzhľadom na symetriu môžeme predpokladať, že $c_1 = c_2$. Potom z (3) vyplýva $d_1 = d_2$, a teda $(c_1, d_1) = (c_2, d_2)$, čo je spor.

Úloha 4.

Dokážeme, že hľadaná najväčšia hodnota je $k = 1$.

Najskôr ukážeme, že b_{2010}, r_{2010}, w_{2010} sú vždy stranami trojuholníka. Bez ujmy na všeobecnosti nech $w_{2010} \geqq r_{2010} \geqq b_{2010}$. Stačí dokázať, že $b_{2010} + r_{2010} > w_{2010}$. Podľa zadania existuje trojuholník so stranami dĺžok w, b, r, ktoré majú postupne bielu, modrú a červenú farbu, pričom $w_{2010} = w$. Z trojuholníkovej nerovnosti máme $b + r > w$ a vzhľadom na zadané usporiadanie platí $b_{2010} \geqq b$ a $r_{2010} \geqq r$. Odtiaľ už priamo dostávame

$$b_{2010} + r_{2010} \geqq b + r > w = w_{2010}.$$

Ostáva zostrojiť postupnosť takých trojuholníkov, že w_j, b_j, r_j nie sú pre $j < 2010$ dĺžkami strán trojuholníka. Pre $j = 1, 2, \ldots, 2010$ nech trojuholník Δ_j má

[10] Napríklad môžeme označiť prvých p riadkov dvojicami tvaru $(0, 0)$, $(0, 1)$, …, $(0, p-1)$, ďalších p riadkov $(1, 0)$, $(1, 1)$, …, $(1, p-1)$, atď., až posledných p riadkov dvojicami $(p-1, 0)$, $(p-1, 1)$, …, $(p-1, p-1)$. V skutočnosti ale v našom riešení vôbec nezáleží na tom, v akom poradí riadky označíme.

[11] Ku každému c existuje práve jedno d spĺňajúce (1) a c môžeme zvoliť p spôsobmi.

- modrú stranu s dĺžkou $2j$,
- červenú stranu s dĺžkou j pre $j \leqq 2009$ a s dĺžkou 4020 pre $j = 2010$,
- bielu stranu s dĺžkou $j+1$ pre $j \leqq 2008$, s dĺžkou 4020 pre $j = 2009$ a s dĺžkou 1 pre $j = 2010$.

Keďže

$$\begin{aligned} (j+1)+j > 2j &> (j+1)-j = 1 && \text{pre } j \leqq 2008,\\ 2j+j > 4020 &> 2j-j = j && \text{pre } j = 2009,\\ 4020+1 > 2j &> 4020-1 = 4019 && \text{pre } j = 2010, \end{aligned}$$

strany každého trojuholníka Δ_j spĺňajú trojuholníkové nerovnosti. Navyše $w_j = j$, $r_j = j$ a $b_j = 2j$ pre $1 \leqq j \leqq 2009$. Odtiaľ

$$w_j + r_j = j + j = 2j = b_j,$$

čiže w_j, b_j a r_j nie sú stranami trojuholníka pre žiadne $1 \leqq j \leqq 2009$.

Úloha 5.

Z nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom trojice kladných čísel $x^2/14$, $x/(y^2+z+1)$ a $2(y^2+z+1)/49$ máme

$$\frac{1}{14}x^2 + \frac{x}{y^2+z+1} + \frac{2}{49}(y^2+z+1) \geqq 3\sqrt[3]{\frac{x^3}{7^3}} = \frac{3}{7}x.$$

Cyklickou zámenou $x \to y \to z \to x$ odvodíme dve podobné nerovnosti. Sčítaním všetkých troch nerovností získame po úprave

$$L = \frac{11}{98}(x^2+y^2+z^2) + \frac{x}{y^2+z+1} + \frac{y}{z^2+x+1} + \frac{z}{x^2+y+1} + \frac{6}{49} \geqq \frac{19}{49}(x+y+z).$$

Z Cauchyho nerovnosti (alebo z jednoduchej úpravy na súčet troch štvorcov) vyplýva

$$x^2+y^2+z^2 \geqq \frac{1}{3}(x+y+z)^2 \geqq 12.$$

Spolu dostávame

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 + \frac{x}{y^2+z+1} + \frac{y}{z^2+x+1} + \frac{z}{x^2+y+1} = \frac{87}{98}(x^2+y^2+z^2) + L - \frac{6}{49} \geqq\\ \geqq \frac{87}{98}(x^2+y^2+z^2) + \frac{19}{49}(x+y+z) - \frac{6}{49} \geqq \frac{87}{98}\cdot 12 + \frac{19}{49}\cdot 6 - \frac{6}{49} = \frac{90}{7}. \end{aligned}$$

Záver. Najmenšia možná hodnota daného výrazu je 90/7. Nadobúda sa pre $x = y = z = 2$.

Úloha 6.

Zadané tvrdenie triviálne vyplýva z nasledujúceho poznatku:

Lema. Pre ľubovoľný štvoruholník $ABCD$ platí

$$(|AB| + |CD|)^2 + (|BC| + |DA|)^2 \geqq 2|AC|^2 + 2|BD|^2,$$

pričom rovnosť platí práve vtedy, keď $ABCD$ je rovnobežník.

Dôkaz. Označme $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$, $\vec{d} = \overrightarrow{DA}$. Ak umocníme na druhú trojuholníkové nerovnosti

$$|\vec{a}| + |\vec{c}| \geqq |\vec{a} - \vec{c}|, \qquad |\vec{b}| + |\vec{d}| \geqq |\vec{b} - \vec{d}|, \tag{1}$$

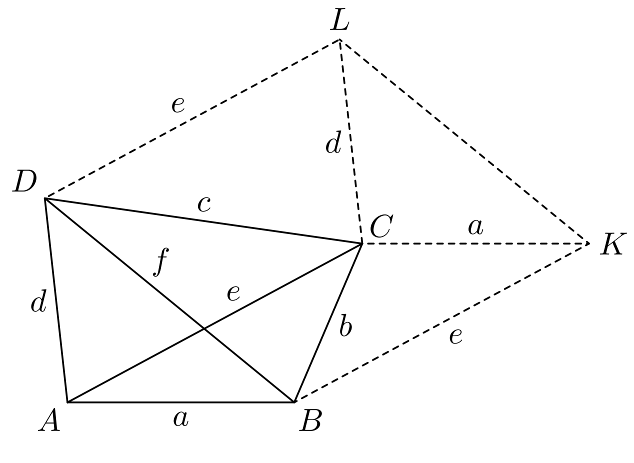
sčítame ich, a prepíšeme výrazy s použitím skalárneho súčinu, dostaneme

$$\begin{aligned}(|AB| + |CD|)^2 + (|BC| + |DA|)^2 &\geqq |\vec{a} - \vec{c}|^2 + |\vec{b} - \vec{d}|^2 = \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 - 2\,\vec{a}\cdot\vec{c} - 2\,\vec{b}\cdot\vec{d} = \\ &= |\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{c} + \vec{d}|^2 - 2(\vec{a} + \vec{d})\cdot(\vec{b} + \vec{c}) = \\ &= 2|AC|^2 - 2\,\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{BD} = 2|AC|^2 + 2|BD|^2.\end{aligned}$$

Tým je nerovnosť dokázaná. Ak v nej platí rovnosť, musia rovnosti nastať aj v (1), čo je možné jedine v prípade, že $\vec{a} \parallel \vec{c}$ a $\vec{b} \parallel \vec{d}$. Teda obe dvojice protiľahlých strán štvoruholníka $ABCD$ sú rovnobežné, čo je možné jedine pre rovnobežník.

Naopak, ak $ABCD$ je rovnobežník, tak $|AB| = |CD|$, $|BC| = |DA|$ a dokazovaná nerovnosť za zmení na známu *rovnobežníkovú rovnosť* (jej dôkaz možno urobiť jednoducho tak, že v našom riešení nahradíme nerovnosti v (2) rovnosťami).

Iné riešenie. Odlišným spôsobom dokážeme lemu z prvého riešenia. Strany štvoruholníka $ABCD$ označme zvyčajným spôsobom. Ďalej nech $|AC| = e$, $|BD| = f$. Trojuholníky ABC, ADC doplňme na rovnobežníky $ABKC$, $ADLC$ (obr. 24).



Obr. 24

Úsečka AC je zhodná a rovnobežná s úsečkami BK a DL, takže $BKLD$ je rovnobežník a podľa rovnobežníkovej rovnosti máme

$$2e^2 + 2f^2 = 2|BK|^2 + 2|BD|^2 = |BL|^2 + |DK|^2.$$

Odtiaľ už s využitím trojuholníkových nerovností $|BL| \leqq b+d$, $|DK| \leqq a+c$ dostávame

$$2e^2 + 2f^2 \leqq (b+d)^2 + (a+c)^2.$$

Rovnosť nastane práve vtedy, keď nastane v použitých trojuholníkových nerovnostiach, čiže vtedy, keď body B, C, L ležia na jednej priamke a zároveň body D, C, K ležia na jednej priamke, čo je zrejme splnené jedine vtedy, keď $ABCD$ je rovnobežník.

Poznámka. Podmienkam zadania vyhovujú (navzájom nepodobné) rovnobežníky $ABCD$ spĺňajúce

$$|AB| = 1, \quad |BC| = t \quad \text{a} \quad \cos|\measuredangle ABC| = \frac{t^2-1}{2t} \qquad (1 \leqq t \leqq 1+\sqrt{2}).$$

51. Medzinárodná matematická olympiáda

V dňoch 2. – 14. 7. 2010 sa v Kazachstane uskutočnila už 51. Medzinárodná matematická olympiáda (IMO). Zúčastnilo sa jej 523 žiakov stredných škôl z 97 krajín. Každá krajina mohla vyslať najviac 6 súťažiach. Slovensko reprezentovali

Ladislav Bačo, Gymnázium Poštová, Košice, 4. ročník,
Martin Bachratý, Gymnázium Veľká okružná, Žilina, 4. ročník,
Michal Hagara, Gymnázium Jura Hronca, Bratislava, 4. ročník,
Marián Horňák, Gymnázium Párovská, Nitra, 2. ročník,
Jakub Konečný, Gymnázium Grösslingová, Bratislava, 4. ročník,
Martin Vodička, Gymnázium Alejová, Košice, 1. ročník.

Obr. 25
(Zľava vzadu: P. Novotný, J. Mazák, J. Konečný, M. Hagara, M. Bachratý, M. Potočný; vpredu: M. Horňák, M. Vodička, L. Bačo.)

Vedúcim družstva SR bol Mgr. Peter Novotný, PhD. (odborný asistent na FMFI UK Bratislava), zástupcu vedúceho a pedagogický dozor vykonával Mgr. Ján Mazák (doktorand na FMFI UK Bratislava), v role pozorovateľa vystupoval Mgr. Martin Potočný (združenie TROJSTEN, Bratislava).

Výsledky družstva SR sú uvedené v tabuľke.

Meno	1	2	3	4	5	6	Súčet	Cena
Ladislav Bačo	7	2	0	7	0	0	16	bronz
Martin Bachratý	7	3	0	3	0	0	13	ČU
Michal Hagara	7	0	0	7	1	0	15	bronz
Marián Horňák	7	1	0	3	0	0	11	ČU
Jakub Konečný	7	0	0	3	0	0	10	ČU
Martin Vodička	7	1	0	7	6	6	27	zlato

Obr. 26
(Gratulácia Žansejita Tujmebajeva, ministra školstva Kazachstanu, Martinovi Vodičkovi k zisku zlatej medaily.)

Žiaci riešili počas dvoch dní (7. a 8. júla) dve trojice úloh, za každú úlohu bolo možné získať najviac 7 bodov. Absolútnym víťazom IMO s plným počtom 42 bodov sa stal Zipei Nie z Číny. Naši žiaci získali jednu zlatú medailu, dve bronzové medaily a tri čestné uznania, ktoré sa udeľujú tým súťažiacim, ktorí nezískajú medailu, vyriešia však aspoň jednu zo šiestich úloh na plný počet bodov. Za osobitnú zmienku stojí výkon Martina Vodičku, ktorý druhý súťažný deň stratil iba dva body (v poradí vytvorenom len z druhého dňa by bolo pred ním len 6 súťažiacich), čo mu v konečnom súčte stačilo na zlatú medailu. Pre Slovensko je to od roku 1993 v poradí štvrtá zlatá medaila (predtým ju získali: Ondrej Budáč v roku 2006, Andrej Zlatoš v 1994 a Viliam Búr v 1993). Predošlí traja držitelia ju však získali až vo svojom maturitnom ročníku, zatiaľ čo Martin Vodička je iba prvák (!!!), a má teda možnosť vybojovať si účasť na IMO ešte trikrát. V prípade, že sa mu podarí v ďalších rokoch získať znova zlaté medaile, zaradí sa medzi historicky najúspešnejších účastníkov IMO. Samozrejme, nemôžeme predbiehať – obhájiť zlatú medailu na IMO je veľmi náročné a zopakovať to štyrikrát vyžaduje okrem talentu aj veľa tréningu v riešení úloh a chladnú hlavu pri samotnej súťaži.

IMO je súťaž jednotlivcov, ale býva zvykom sčítať body celého družstva a vznikne tak neoficiálne poradie krajín, ktoré je uvedené v tabuľke (čísla v zátvorke sú uvedené za krajinami, ktoré mali na IMO menší počet účastníkov). Slovensko v tomto neoficiálnom poradí skončilo na 39. mieste, čo je oproti vlaňajšku zlepšenie o 14 miest. V rámci krajín EÚ sme sa zaradili na 11. miesto.

Úlohy na IMO sa vždy vyberajú tak, aby každý súťažný deň bola prvá úloha najľahšia a tretia najťažšia. Tento rok však bola pomerne ťažká aj úloha č. 5 – vyriešilo ju len 50 súťažiacich. (Pre porovnanie: úlohu č. 3 vyriešilo 22 súťažiacich, úlohu č. 6 vyriešilo 25 súťažiacich. „Strednú“ úlohu č. 2 vyriešilo okolo 170 súťažiacich a „ľahké“ úlohy č. 1 resp. 4 vyriešilo 390 resp. 370 súťažiacich.)

V súvislosti s tým možno konštatovať, že naši študenti si výborne poradili s úlohou č. 1, keď ju všetci šiesti vyriešili na plný počet bodov (a zabezpečili si tak na nej zisk minimálne čestných uznaní). Jednalo sa o jednoduchú funkcionálnu rovnicu, na ktorej sa však dali stratiť body za drobné nedôslednosti (naši sa im vyvarovali).

Celkom dobre sme dopadli aj na úlohe č. 6 – väčšina krajín mala za túto úlohu šesťkrát 0 bodov, a tak zisk 6 bodov Martina Vodičku na tejto úlohe možno považovať za úspech. V úlohe bolo treba dokázať istú vlastnosť špeciálnej postupnosti kladných reálnych čísel, a i keď bola úloha zaradená v oblasti „Algebra“, jej vyriešenie vyžadovalo kombinatorické uvažovanie.

Podobne sme dopadli v úlohe č. 5, keďže aj tu zisk v súčte 7 bodov znamenal v porovnaní s inými krajinami dobrý výsledok. Táto úloha celkom zamiešala poradím, keďže mnohé tradične silné krajiny v nej prekvapivo získali málo bodov, zatiaľ čo iné krajiny, ktorým sa na iných „klasických“ úlohách až tak nedarilo, na nej bodovali. Dôvod bol zrejme ten, že výsledok úlohy bol pomerne neočakávaný. Cieľom bolo zistiť, či sa dá zo šestice $(1,1,1,1,1,1)$ pomocou dvoch zadaných typov operácií získať šestica $(0,0,0,0,0,2010^{2010^{2010}})$. Mnohí súťažiaci sa snažili dokázať, že to možné nie je (pretože to tak pri prvom „ohmatávaní“ úlohy vyzeralo), a dostali sa do „pasce“ znamenajúcej 0 bodov. V skutočnosti to totiž možné bolo, pričom v prípade, že riešiteľ uveril, že to možné je, už nebolo až také ťažké to dokázať (teda zostrojiť postupnosť operácií, ktoré na danú šesticu vedú).

V úlohe č. 3 sme síce nezískali žiadne body, ale rovnako dopadla väčšina krajín. Len 8 krajín získalo na tejto úlohe viac ako 10 bodov a len 16 krajín viac ako 5 bodov. Bola to veľmi náročná úloha z teórie čísel a zhodou okolností každý, kto ju vyriešil na 7 bodov, získal zlatú medailu.

Por.	Štát	Z	S	B	∑	Por.	Štát	Z	S	B	∑
1.	Čína	6			197	50.	Mongolsko			2	79
2.	Rusko	4	2		169	51.	Slovinsko			2	78
3.	USA	3	3		168		Srí Lanka			1	78
4.	Južná Kórea	4	2		156	53.	Izrael (5)		1	1	76
5.	Kazachstan	3	2		148	54.	Malajzia		1	1	75
	Thajsko	1	5		148		Portugalsko			1	75
7.	Japonsko	2	3		141	56.	Tadžikistan		1		73
8.	Turecko	1	3	2	139	57.	Lotyšsko			2	72
9.	Nemecko	1	3	2	138	58.	Južná Afrika			2	69
10.	Srbsko	1	3	2	135		Macedónsko		1		69
11.	Taliansko	1	3	2	133	60.	Belgicko				64
	Vietnam	1	4	1	133	61.	Arménsko			1	63
13.	Kanada	2	1	2	129	62.	Cyprus			1	62
	Maďarsko	2	2	1	129	63.	Estónsko				61
15.	Austrália	1	3	1	128		Kirgizstan		1	1	61
16.	Irán		4	2	127	65.	Kolumbia (4)			3	60
	Rumunsko	2	1	2	127	66.	Kambodža				58
18.	Peru	1	3	1	124	67.	Maroko			1	55
19.	Taiwan	1	3	1	123		Saudská Arábia			2	55
20.	Hongkong	1	2	3	121	69.	Bangladéš (5)			1	54
21.	Bulharsko	1	2	3	118		Pobrežie Slonoviny (5)		1		54
22.	Singapur		4	1	117	71.	Island				53
	Ukrajina	1	2	3	117	72.	Fínsko			1	52
24.	Poľsko	2	1	1	116		Švédsko				52
25.	Veľká Británia	1	1	2	114	74.	Filipíny (3)		1		45
26.	Uzbekistan		4	1	112	75.	Nórsko				41
27.	Bielorusko		2	3	110	76.	Ekvádor			1	39
28.	Azerbajdžan		3	2	109	77.	Trinidad a Tobago (5)		1		37
29.	Nový Zéland		2	4	106	78.	Portoriko (2)	1			34
30.	Francúzsko		3	1	105	79.	Kostarika (3)			1	32
	Indonézia		1	4	105		Panama (2)			2	32
32.	Chorvátsko		2	3	103	81.	Luxembursko (3)				31
33.	Mexiko		1	4	102		Tunisko (2)		1		31
34.	Gruzínsko		2	2	101	83.	Sýria				29
35.	Brazília		2	1	99	84.	Nigéria (5)			1	27
36.	India		2	1	98	85.	Kuba (1)		1		26
37.	Grécko		2		95		Paraguaj (4)				26
38.	Holandsko			5	94	87.	Salvádor (3)				25
39.	Argentína		1	2	92	88.	Honduras (1)		1		21
	Litva		1	3	92	89.	Pakistan (5)				19
	Moldavsko		1	3	92	90.	Írsko				18
	Slovensko	1		2	92	91.	Venezuela (2)				16
	Švajčiarsko			3	92	92.	Guatemala (2)				12
44.	Turkmenistan		1	2	91	93.	Albánsko (4)				11
45.	Dánsko	1		2	90	94.	Bolívia (4)				8
46.	Španielsko		1	2	89	95.	Čierna Hora (4)				7
47.	Rakúsko	1		1	87	96.	Kuvajt (5)				2
48.	Česká republika			2	84	–	Severná Kórea	diskvalif.			
49.	Bosna a Hercegovina			2	80						

Dá sa preto povedať, že najviac možných bodov sme stratili na úlohách č. 2 a 4. Obe to boli úlohy z geometrie. Aj keď v úlohe č. 4 sme získali až 30 bodov, keďže sa jednalo o ľahkú úlohu, nebolo až také nedosiahnuteľné získať 42 bodov. Úlohu č. 2, čo bola stredne ťažká geometria, nevyriešil žiadny z našich študentov. Získali sme však na nej viaceré čiastkové body, čo naznačuje, že viacerí z našich sa pustili správnym smerom, ale nevedeli riešenie dokončiť. Pre budúce roky stojíme preto pred výzvou naučiť našich reprezentantov lepšie riešiť úlohy z geometrie.

Kompletné výsledky a štatistiky z tohtoročnej a aj z minulých IMO možno nájsť na internetovej stránke *imo-official.org*.

Organizátori z Kazachstanu pripravili súťaž naozaj veľkolepo. Na otváracom aj záverečnom ceremoniáli vystúpilo množstvo súborov a skupín a príhovory mali minister školstva aj predseda vlády. Vedúci krajín najskôr úlohy pripravovali v sanatóriu Alatau v bývalom hlavnom meste Kazachstanu Almaty, odkiaľ nás organizátori 6. júla letecky dopravili do súčasného hlavného mesta Astana. Tam v modernom hoteli Duman naša práca pokračovala, zatiaľ čo súťažiacich po otváracom ceremoniáli presunuli autobusmi do národného parku Borovoje 220 km severne od Astany, kde prebiehala samotná súťaž. Kým v Astane prebiehala od 9. do 11. júla koordinácia riešení, účastníci mali možnosť zúčastniť sa niekoľkých exkurzií a výletov v okolí Borovoje. Napokon 12. júla sa všetci účastníci aj vedúci zúčastnili na kultúrnom predstavení v hypodrome a 13. júla po záverečnom ceremoniáli s odovzdávaním ocenení (všetci držitelia zlatých medailí dostali notebooky) nás čakala ešte slávnostná večera.

Pri takom veľkom počte účastníkov sú organizačne veľmi náročné presuny. Každý plánovaný odchod autobusmi sa vždy oneskoril najmenej o 30 minút, čo je jedna z vecí, ktorá sa dá organizátorom vyčítať. Azda aj preto boli všetky plánované odchody posunuté vždy na zbytočne skorý čas. Spomeniem jeden príklad: V deň odchodu z Kazachstanu naše lietadlo odlietalo z letiska, ktoré bolo od hotela vzdialené asi 20 minút autobusom, o 7:10. Autobus najskôr vyzdvihol účastníkov z ich hotela a po 5-minútovej jazde prišiel k nášmu hotelu. Keďže na letisku je vhodné byť 2 hodiny pred odletom (aj keď reálne úplne stačí 1 hodina), stačilo by z nášho hotela odchádzať 4:45. Organizátori však naplánovali žiakom odchod 2:30 a vedúcim 3:30. Reálne to dopadlo tak, že namiesto 2:30 žiaci odišli zo svojho hotela 4:00, o 4:10 boli pri našom hoteli, odkiaľ sme sa ďalej pohli 4:30. Takže sme na letisku boli pred 5:00. Žiaci však sedeli zbytočne hodinu a pol v stojacom autobuse a vedúci 40 minút čakali pred hotelom.

Budúci ročník IMO sa uskutoční v Holandsku v Amsterdame (*www.imo2011.nl*). V roku 2012 bude IMO v Argentíne. Na rok 2013 sa zatiaľ neprihlásila žiadna krajina. Na Slovensku sa IMO konalo pred 39 rokmi: v roku 1971 v Žiline, vtedy sa ho zúčastnilo 115 účastníkov z 15 krajín. V bývalom Československu bolo IMO naposledy v roku 1984 v Prahe (192 účastníkov, 34 krajín). I keď v mnohých krajinách sa ešte IMO nekonalo, do budúcnosti možno očakávať, že budeme oslovení s otázkou, kedy by mohlo byť IMO znova na Slovensku.

Peter Novotný

IMO pohľadom súťažiacich

Skončilo to tam, kde to celé aj začalo. Na autobusovej stanici Mlynské nivy v Bratislave. Šesť odhodlaných študentov očakávajúcich veľké dobrodružstvo zmenili dva týždne najväčšej matematickej súťaže na vyčerpaných, ale o to viac skúsených mladíkov naplnených novými zážitkami, ktorí si priniesli z Kazachstanu na svojich krkoch tri vzácne, nie nutne rôzne, kovy.

Autobus nás zo stanice odviezol na letisko vo Viedni. Tam sme sa stretli s tímami z ďalších krajín (matematici sa dajú aj v dave rozoznať veľmi jednoducho), napríklad z Rakúska, z Dánska alebo aj z Kanady. S Kanaďanmi sme dokonca zorganizovali spoločnú fotku ich maskota Losa a nášho náhradného maskota Mamuta. Potom sme sa už nalodili do vozidla, ktoré nás odtiahlo až na východ od ďalekého východu. Počas letu sme mali možnosť obdivovať ako západ slnka, tak aj jeho východ.

Len čo sme pristáli v Astane, už sme museli vyplňovať úradný papier, na ktorý nám otlačili dve pečiatky. Následne nám deň čo deň pripomínali skontrolovať tento dokument, počet pečiatok a strašili nás tým, že ak niečo na ňom nebude sedieť, tak nás nepustia z krajiny. Všetci sme ako-tak tento úkon zvládli, a tak sme mohli oficiálne vstúpiť na kazašské územie. Ako vážených hostí nás ubytovali vo vcelku luxusnom 18-poschodovom (ak ste našli služobný výťah tak ich bolo až 19) hoteli. A hurá do postele. Zo spánku nás rušil len ohňostroj poriadaný na počesť prezidentových narodenín a výročia založenia Astany.

Nasledujúce ráno nás odviezli do Prezidentského paláca na slávnostné otvorenie celej súťaže. Privítali nás kazašskou ľudovou hudbou a počas celej ceremónie nám predvádzali hudobné aj tanečné umenie ich krajiny. Potom ešte (takmer) každá krajina prezentovala svoju zástavu prejdením po pódiu a následne mohol započať slávnostný obed. Do sýta najedených nás previezli ďaleko od hraníc hlavného mesta, do ich najväčšieho národného parku Baldauren. Tam nás ubytovali v komplexe pre detské tábory a my, unavení z celodennej cesty, sme ľahli do postelí a tvrdo zaspali.

Ráno sme boli o pol siedmej násilne zobudení hlučnou kazašskou popovou hudbou. Unavení a nadávajúci na budíček sme zjedli raňajky. Po potrápení tráviacej sústavy sme išli potrápiť aj tú nervovú. Do miestností, v ktorých sme počítali, nám toho dovolili zobrať menej ako do lietadla. Jedna z vecí, ktorú sme si nemohli zobrať, bolo kružidlo. Tie nám poskytli organizátori, niektoré však neboli úplne najpoužiteľnejšie. Namiesto hrotu a tuhy mali dva hroty. Našťastie k nim bola pribalená aj náhradná tuha, takže tí viac prakticky ako matematicky zruční pomohli spolusúťažiacim ponasadzovať tuhy. Potom už nič nebránilo začiatku súťaže. Od signálu, ktorý započal začiatok rátania, sme sa trápili s troma úlohami prvého súťažného dňa. Ďalšie tri úlohy nás čakali nasledujúci deň. Tým sme všetci splnili povinnosti súťažiacich a mohli sme si začať naplno užívať všetko, čo si pre nás Kazachstan pripravil.

V nasledujúcich dňoch to bolo ako déja vu týždeň. Každý, či už slnečný alebo zamračený deň, pre nás organizátori prichystali milé prekvapenie, a vždy ním bol koncert. Prevažne nám hrali na ľudových nástrojoch (obzvlášť sme si obľúbili dvojstrunovú gitaru, tzv. dombru) , ale zažili sme aj nefalšovaného kazašského rapera. No, aby sme im iba nekrivdili, tak nám ukázali aj okolitú prírodu, predsa len sme bývali v národnom parku. Vo voľnom čase nám bolo umožnené venovať sa rôznym športovým aktivitám. Ba dokonca jeden z nás bol súčasťou víťazného tímu basketbalového turnaja.

Po niekoľkých dňoch strávených v Baldaurene sme sa autobusmi prepravili späť do Astany. Tam sme ešte deň obdivovali jej krásy a následne nás čakalo slávnostné vyhodnotenie súťaže. Déja vu sa znovu vrátilo, ale ceremónia niektorým z nás dala viac než umelecký zážitok. Lesk bronzu rodáka z Čadce a skúseného Košičana sa nemohli pasovať s oslňujúcou žiarou zlata Maťa Vodičku – zlatého chlapca z Košíc. Jeho sen sa stal skutočnosťou, čo mu všetci prajeme, ale aj závidíme.

Nakoľko sa už stalo všetko, čo sa stať malo, zostávala už len jediná vec, ktorá sa stať ešte mohla. Nevravíme o ničom inom ako o ceste smerom na západ, odkiaľ vanula vôňa domoviny. Všetci sme trochu tŕpli, či naozaj máme dve pečiatky a pustia nás domov. Ukázalo sa, že naše obavy boli zbytočné, a tak sme sa mohli uvelebiť v pohodlných sedadlách business class. Cesta ňou bola najpohodlnejším zážitkom celej akcie. Potom už len autobus z Viedne a sme tam, kde sme boli.

Martin Bachratý, Michal Hagara

Zadania úloh IMO

Úloha 1.
Určte všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že rovnosť

$$f\big(\lfloor x\rfloor y\big) = f(x)\big\lfloor f(y)\big\rfloor$$

platí pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$. (Symbol $\lfloor z\rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako z.) (*Francúzsko*)

Úloha 2.
Označme I stred vpísanej kružnice a Γ opísanú kružnicu trojuholníka ABC. Priamka AI pretína kružnicu Γ v bode D ($D \neq A$). Nech E je bod na oblúku BDC a F bod na strane BC, pričom

$$|\measuredangle BAF| = |\measuredangle CAE| < \tfrac{1}{2}|\measuredangle BAC|.$$

Označme G stred úsečky IF. Dokážte, že priamky DG a EI sa pretínajú na kružnici Γ. (*Hongkong*)

Úloha 3.
Nech $\mathbb{N}$ je množina všetkých kladných celých čísel. Určte všetky funkcie $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že

$$\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big)$$

je štvorcom celého čísla pre všetky $m, n \in \mathbb{N}$. (*USA*)

Úloha 4.
Nech P je vnútorný bod trojuholníka ABC. Priamky AP, BP, CP pretínajú kružnicu Γ opísanú trojuholníku ABC postupne v bodoch K, L, M (rôznych od A, B, C).

Dotyčnica ku kružnici Γ v bode C pretína priamku AB v bode S. Predpokladajme, že $|SC| = |SP|$. Dokážte, že $|MK| = |ML|$. (*Poľsko*)

Úloha 5.
V každej zo šiestich truhlíc B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 je na začiatku jedna minca. Dovolené sú dva typy operácií:

Typ 1: Zvolíme neprázdnu truhlicu B_j pre nejaké $1 \leqq j \leqq 5$. Odoberieme jednu mincu z B_j a pridáme dve mince do B_{j+1}.

Typ 2: Zvolíme neprázdnu truhlicu B_k pre nejaké $1 \leqq k \leqq 4$. Odoberieme jednu mincu z B_k a vymeníme navzájom obsah truhlíc B_{k+1} a B_{k+2} (ktoré môžu byť aj prázdne).

Zistite, či existuje konečná postupnosť operácií taká, že po jej vykonaní budú truhlice B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 prázdne a truhlica B_6 bude obsahovať presne $2010^{2010^{2010}}$ mincí. (Platí $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.) (*Holandsko*)

Úloha 6.
Nech $a_1, a_2, a_3, \ldots$ je postupnosť kladných reálnych čísel. Predpokladajme, že existuje kladné celé číslo s také, že pre všetky $n > s$ platí

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k}\ ;\ 1 \leqq k \leqq n-1\}.$$

Dokážte, že existujú kladné celé čísla l a N také, že $l \leqq s$ a pre všetky $n \geqq N$ platí $a_n = a_l + a_{n-l}$. (*Irán*)

Riešenia úloh IMO

Úloha 1.
Dosadením $x = 0$ do zadanej rovnosti po úprave dostaneme

$$f(0) \cdot (1 - \lfloor f(y) \rfloor) = 0. \tag{1}$$

Rozoberieme dva prípady.

Ak $f(0) \neq 0$, tak podľa (1) máme $\lfloor f(y) \rfloor = 1$ pre všetky $y \in \mathbb{R}$. Zadanú rovnosť tak môžeme prepísať na tvar

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \qquad \text{pre všetky } x, y \in \mathbb{R}$$

a po dosadení $y = 0$ získame $f(x) = f(0)$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$. Funkcia f je teda konštantná a vzhľadom na $\lfloor f(y) \rfloor = 1$ musí byť táto konštanta z intervalu $\langle 1, 2)$. Ľahko overíme, že všetky funkcie $f(x) = c$ pre $1 \leqq c < 2$ vyhovujú.

Predpokladajme ďalej, že $f(0) = 0$. Dosadením $x = a$, $y = a$, pričom $0 < a < 1$, dostaneme

$$0 = f(0) = f(\lfloor a \rfloor a) = f(a) \lfloor f(a) \rfloor.$$

Ak $f(a) \neq 0$, tak $\lfloor f(a) \rfloor = 0$, a po dosadení $x = 1$, $y = a$ do zadanej rovnosti máme $f(a) = f(1)\lfloor f(a) \rfloor = 0$, čo je spor. Takže $f(a) = 0$ pre všetky $0 \leqq a < 1$.

Nech z je ľubovoľné reálne číslo. Zrejme existuje celé číslo m také, že $0 \leqq z/m < 1$.[12] Dosadením $x = m$, $y = z/m$ do pôvodnej rovnosti s využitím predošlého poznatku dostaneme

$$f(z) = f\left(m \cdot \frac{z}{m}\right) = f\left(\lfloor m \rfloor \cdot \frac{z}{m}\right) = f(m) \cdot \left\lfloor f\left(\frac{z}{m}\right)\right\rfloor = 0 \qquad \text{pre všetky } z \in \mathbb{R}.$$

Teda $f(x) = 0$ a ľahko sa presvedčíme, že táto funkcia vyhovuje.

Záver. Vyhovujú iba konštantné funkcie $f(x) = c$, pričom $c = 0$ alebo $c \in \langle 1, 2)$.

Úloha 2.
Priesečník priamky AF a kružnice Γ (rôzny od A) označme K, priesečník priamok AI a BC označme L. Podľa zadania $|\measuredangle BAK| = |\measuredangle CAE|$, teda tetivy BK, CE kružnice Γ majú rovnakú dĺžku a $BC \parallel KE$.

Nech T je priesečník priamok DG a AF. Podľa Menelaovej vety pre trojuholník AFI a priamku DG máme
$$\frac{|AT|}{|TF|} \cdot \frac{|FG|}{|GI|} \cdot \frac{|ID|}{|DA|} = 1,$$
z čoho vzhľadom na $|FG| = |GI|$ po úprave dostávame

$$\frac{|AT|}{|TF|} = \frac{|DA|}{|ID|}. \tag{1}$$

Keďže CI je osou uhla trojuholníka ALC, delí jeho stranu AL v pomere $|AI| : |IL| = |CA| : |LC|$. Trojuholníky ADC a CDL sú podobné, lebo pri vrchole D majú spoločný uhol a z obvodových uhlov $|\measuredangle DCL| = |\measuredangle DAB| = \frac{1}{2}\alpha = |\measuredangle DAC|$. Takže $|CA| : |LC| = |DA| : |DC|$. Je známe, že $|DC| = |ID|$.[13] S využitím (1) máme

$$\frac{|AI|}{|IL|} = \frac{|CA|}{|LC|} = \frac{|DA|}{|DC|} = \frac{|DA|}{|ID|} = \frac{|AT|}{|TF|},$$

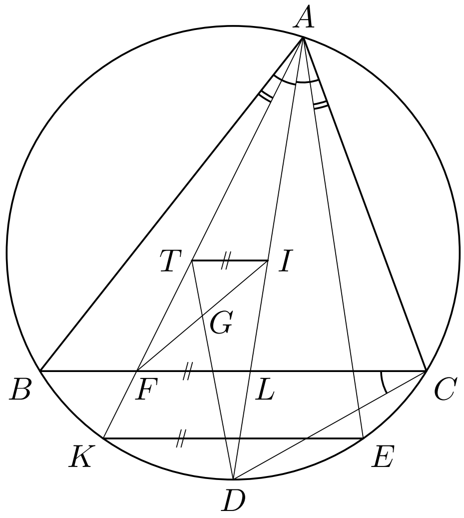
teda $TI \parallel FL$. Odtiaľ spolu s poznatkom z úvodu dostávame $TI \parallel KE$ (obr. 27).

Priesečník priamky EI s kružnicou Γ (rôzny od E) označme X a priesečník priamok DX a AF označme T'. Keďže AD je osou uhla BAC a uhly BAF, CAE majú podľa zadania rovnakú veľkosť, tak aj $|\measuredangle KAD| = |\measuredangle DAE|$. Z rovnosti obvodových uhlov nad tetivou DE máme $|\measuredangle DAE| = |\measuredangle DXE|$. Takže

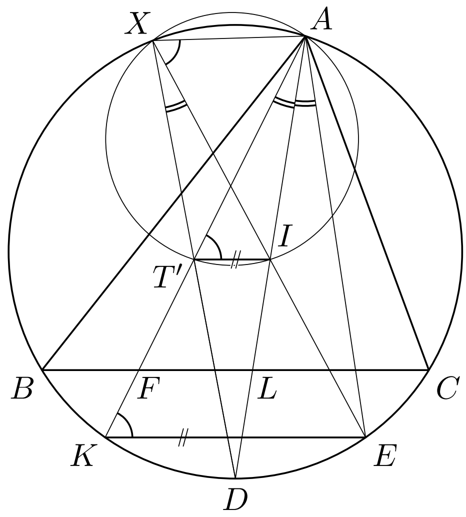
$$|\measuredangle T'AI| = |\measuredangle KAD| = |\measuredangle DAE| = |\measuredangle DXE| = |\measuredangle T'XI|$$

[12] Stačí m zvoliť s rovnakým znamienkom ako z a v absolútnej hodnote väčšie ako z.

[13] Ľahko možno odvodiť, že trojuholník CID má pri vrchole C aj pri vrchole I vnútorný uhol veľkosti $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma$, čiže je rovnoramenný.



Obr. 27



Obr. 28

a body T', I, A, X ležia na jednej kružnici. Z obvodových uhlov nad tetivami IA a EA potom

$$|\measuredangle AT'I| = |\measuredangle AXI| = |\measuredangle AXE| = |\measuredangle AKE|,$$

odkiaľ $T'I \parallel KE$ (obr. 28).

Rovnobežka s priamkou KE prechádzajúca bodom I však môže pretínať priamku AF iba v jednom bode. Preto $T = T'$, priamka DG je totožná s DT' a bod X leží na priamkach DG, EI aj na kružnici Γ, čím je úloha vyriešená.

Úloha 3.
Všetky funkcie tvaru $g(n) = n + c$, pričom c je nezáporné celé číslo, vyhovujú, keďže vtedy $(g(m) + n)(m + g(n)) = (m + n + c)^2$. Dokážeme, že žiadne iné nevyhovujú. Použijeme pri tom nasledujúce tvrdenie:

Lema. Ak p je prvočíslo, k, l sú prirodzené čísla a $p \mid g(k) - g(l)$, tak $p \mid k - l$.

Dôkaz. Najskôr predpokladajme, že $p^2 \mid g(k) - g(l)$. Potom $g(l) = g(k) + p^2 a$ pre nejaké celé číslo a. Zoberme dostatočne veľké prirodzené číslo d (také, že $pd > \max\{g(k), g(l)\}$), ktoré nie je násobkom p, a položme $n = pd - g(k)$. Čísla

$$n + g(k) = pd \qquad \text{a} \qquad n + g(l) = pd + (g(l) - g(k)) = p(d + pa)$$

sú obe násobkom p, ale nie sú deliteľné p^2. Podľa zadania sú $(g(k) + n)(g(n) + k)$ aj $(g(l) + n)(g(n) + l)$ štvorce, a keďže sú to násobky p, musia byť deliteľné číslom p^2. Z toho vyplýva, že oba činitele $g(n) + k$, $g(n) + l$ musia byť násobkami p, čiže

$$p \mid (g(n) + k) - (g(n) + l) = k - l.$$

Ostáva prípad, že $p \mid g(k) - g(l)$ a súčasne $p^2 \nmid g(k) - g(l)$. Zoberme rovnaké d a položme $n = p^3 d - g(k)$. Potom je $g(k) + n = p^3 d$ deliteľné číslom p^3 (nie však p^4)

a $g(l) + n = p^3 d + (g(l) - g(k))$ je deliteľné číslom p (nie však p^2). Analogicky preto dostávame, že čísla $g(n) + k$, $g(n) + l$ musia byť násobkami p a $p \mid k - l$.

Vráťme sa k zadanej úlohe. Predpokladajme, že $g(k) = g(l)$ pre nejaké $k, l \in \mathbb{N}$. Podľa lemy je potom $k - l$ deliteľné každým prvočíslom, čo je možné jedine v prípade $k = l$. Funkcia g je teda prostá.

Pozrime sa teraz na čísla $g(k)$ a $g(k+1)$. Keďže číslo $(k+1) - k = 1$ nie je deliteľné žiadnym prvočíslom, podľa lemy ich nemôže mať ani číslo $g(k+1) - g(k)$, čiže

$$|g(k+1) - g(k)| = 1.$$

Označme $g(2) - g(1) = q \in \{-1, 1\}$. Dokážeme matematickou indukciou, že $g(n) = g(1) + (n-1)q$. Pre $n = 1, 2$ to platí triviálne. S využitím indukčného predpokladu potom pre $n > 1$ máme

$$g(n+1) = g(n) \pm q = g(1) + (n-1)q \pm q = \begin{cases} g(1) + nq \\ \text{alebo} \\ g(1) + (n-2)q. \end{cases}$$

Keďže $g(n+1) \neq g(n-1) = g(1) + (n-2)q$, jedinou možnosťou je $g(n+1) = g(1) + nq$ a indukcia je hotová.

Máme teda $g(n) = g(1) + (n-1)q$. Určite však $q \neq 1$, lebo inak by sme pre $n \geqq g(1) + 1$ dostali $g(n) \leqq 0$, čo nie je možné. Takže $q = 1$ a $g(n) = g(1) + n - 1 = n + c$, pričom $c = g(1) - 1 \geqq 0$.

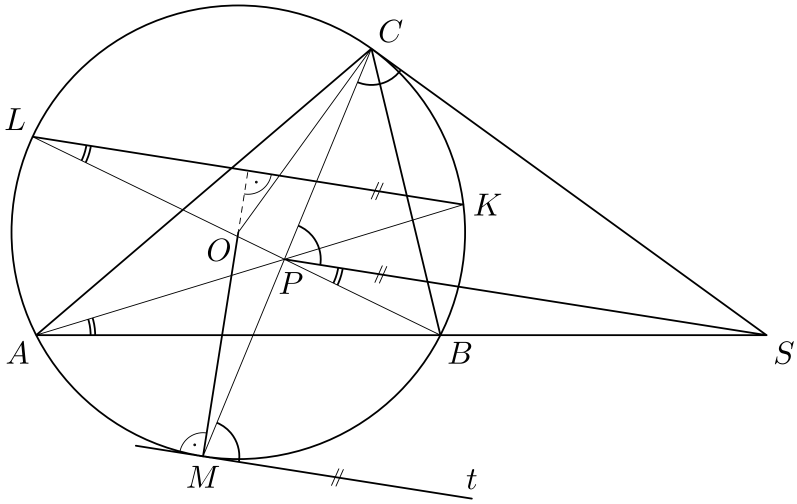
Úloha 4.
Bez ujmy na všeobecnosti nech bod S leží na polpriamke AB. Z mocnosti bodu S ku kružnici Γ vyplýva $|SB| \cdot |SA| = |SC|^2 = |SP|^2$, odkiaľ $|SB| : |SP| = |SP| : |SA|$. Trojuholníky SBP, SPA sú teda podobné (uhol pri vrchole S majú spoločný a dvojice strán zvierajúce tento uhol majú dĺžky v rovnakom pomere). Z tejto podobnosti a z vlastností obvodových uhlov nad tetivou BK máme spolu[14]

$$|\measuredangle SPB| = |\measuredangle SAP| = |\measuredangle BAK| = |\measuredangle BLK|,$$

čiže zo súhlasných uhlov $LK \parallel PS$.

---

[14] Rovnosť $|\measuredangle SPB| = |\measuredangle SAP|$ možno zdôvodniť aj takto: Keďže $|SB| \cdot |SA| = |SP|^2$, z mocnosti bodu S ku kružnici opísanej trojuholníku ABP vyplýva, že SP je dotyčnicou tejto kružnice. Uhly SPB a SAP sú úsekový a obvodový uhol prislúchajúce k tetive BP tejto kružnice, takže majú rovnakú veľkosť.



Obr. 29

Označme O stred kružnice Γ. Dotyčnice t a CS kružnice Γ vedené krajnými bodmi tetivy MC zrejme zvierajú s MC uhly rovnakých veľkostí[15] (obr. 29). Takú istú veľkosť má však aj uhol CPS, lebo trojuholník CPS je podľa zadania rovnoramenný. Zo súhlasných uhlov tak dostávame $PS \parallel t$. Spolu máme

$$LK \parallel PS \parallel t \perp OM.$$

Tetiva LK je teda kolmá na polomer OM kružnice Γ, z čoho už priamo vyplýva $|ML| = |MK|$.

Úloha 5.

Odpoveď na otázku zo zadania je „Áno“. Ukážeme, ako postupovať, aby sme dosiahli v truhliciach požadovaný počet mincí. Pre jednoduchosť budeme každú konkrétnu situáciu, koľko sa práve nachádza mincí v jednotlivých truhliciach, označovať šesticou čísel, pričom prvé číslo bude označovať počet mincí v prvej truhlici, druhé číslo počet mincí v druhej truhlici, atď.

Na začiatku teda máme šesticu $(1,1,1,1,1,1)$ (v každej truhlici je jedna minca). Postupnosťou dovolených operácií chceme dosiahnuť šesticu $(0,0,0,0,0,2010^{2010^{2010}})$. Vysvetlime najskôr lepšie, čo presne robia s mincami dovolené operácie. Pri prvom type vyberieme z truhlice jednu mincu, tú „rozdvojíme“ a dve vzniknuté mince dáme do truhlice napravo. Pri druhom type vyberieme z truhlice jednu mincu, tú „zahodíme“ a vymeníme obsah dvoch truhlíc nachádzajúcich sa hneď napravo od truhlice, z ktorej sme mincu zahodili.

Postupovať môžeme napríklad nasledovne. Najskôr použijeme prvý typ na 5. truhlicu (teda v 5. truhlici ubudne jedna minca a do 6. dve pribudnú):

$$(1,1,1,1,1,1) \quad \to \quad (1,1,1,1,0,3).$$

[15] Sú doplnkami do 90° k uhlom pri základni rovnoramenného trojuholníka MCO.

Teraz použijeme druhý typ na 4. truhlicu, teda odoberieme mincu zo 4. truhlice a vymeníme mince medzi 5. a 6. truhlicou:

$$(1,1,1,1,0,3) \quad \to \quad (1,1,1,0,3,0).$$

To isté teraz zopakujeme postupne pre 3., 2. a 1. truhlicu (uberieme mincu a vymeníme obsah truhlíc napravo). Dostaneme

$$(1,1,1,0,3,0) \ \to \ (1,1,0,3,0,0) \ \to \ (1,0,3,0,0,0) \ \to \ (0,3,0,0,0,0).$$

Zatiaľ to možno vyzerá beznádejne. Namiesto šiestich mincí, ktoré sme mali dohromady na začiatku, už máme len tri mince. Nevyzerá to tak, že by sa malo dať dosiahnuť „obrovské“ číslo $2010^{2010^{2010}}$. Teraz to však začne byť zaujímavé! Vykonáme nasledovné operácie (nechávame na čitateľa, aby skontroloval, že sú to povolené operácie):

$$(0,3,0,0,0,0) \to (0,2,2,0,0,0) \to (0,2,1,2,0,0) \to (0,2,0,4,0,0) \to$$
$$(0,1,4,0,0,0) \to (0,1,3,2,0,0) \to (0,1,3,1,2,0) \to (0,1,3,0,4,0) \to$$
$$(0,1,2,4,0,0) \to (0,1,2,3,2,0) \to (0,1,2,2,4,0) \to (0,1,2,1,6,0) \to$$
$$(0,1,2,0,8,0) \to (0,1,1,8,0,0) \to (0,1,1,7,2,0) \to (0,1,1,6,4,0) \to$$
$$(0,1,1,5,6,0) \to (0,1,1,4,8,0) \to (0,1,1,3,10,0) \to (0,1,1,2,12,0) \to$$
$$(0,1,1,1,14,0) \to (0,1,1,0,16,0) \to (0,1,0,16,0,0) \to (0,0,16,0,0,0).$$

Podarilo sa nám teda trojku zväčšiť na číslo 16. Všimnime si pritom postupnosť šestíc od 5. po 23. Zo šestice $(0,1,4,0,0,0)$ sme dostali šesticu $(0,1,0,16,0,0)$ a pritom sme vôbec nezasahovali do prvej, druhej ani šiestej truhlice (vôbec sa v nich nemenili počty mincí). Dostali sme tak vlastne z trojice $(4,0,0)$ trojicu $(0,16,0) = (0,2^4,0)$. Takéto niečo možno urobiť vo všeobecnosti: Ak a je kladné celé číslo, tak z trojice $(a,0,0)$ (teda z troch po sebe idúcich truhlíc bez zasahovania do ostatných truhlíc) vieme vyrobiť trojicu $(0,2^a,0)$, a to nasledovnými krokmi (postupnosť operácií, keď iba všetky mince z jednej truhlice pomocou prvého typu operácie „zdvojnásobíme“ do susednej truhlice napravo, zapíšeme v jednom kroku, ktorý znázorníme znakom „$\Rightarrow$“):

$$(a,0,0) \to (a-1,2,0) \Rightarrow (a-1,0,4) \to (a-2,4,0) \Rightarrow (a-2,0,8) \to (a-3,8,0) \Rightarrow$$
$$(a-3,0,16) \to (a-4,16,0) \Rightarrow (a-4,0,32) \to (a-5,32,0) \Rightarrow \quad \ldots \text{ atď} \ldots \quad \to$$
$$(a-(a-1),2^{a-1},0) \Rightarrow (a-(a-1),0,2^a) \to (a-a,2^a,0) = (0,2^a,0).$$

Vráťme sa k šestici $(0,0,16,0,0,0)$, ktorú sme naposledy dostali. Budeme pokračovať ďalej, pričom postupnosť krokov, keď z nejakej trojice $(a,0,0)$ vyrobíme trojicu $(0,2^a,0)$ (ukázali sme pred chvíľou, že také niečo je naozaj možné) budeme skrátene označovať „$\Rrightarrow$“:

$$(0,0,16,0,0,0) \to (0,0,15,2,0,0) \Rrightarrow (0,0,15,0,2^2,0) \to (0,0,14,2^2,0,0) \Rrightarrow$$
$$(0,0,14,0,2^{2^2},0) \to (0,0,13,2^{2^2},0,0) \Rrightarrow (0,0,13,0,2^{2^{2^2}},0) \to (0,0,12,2^{2^{2^2}},0,0) \Rrightarrow$$
$$\ldots \text{ atď} \ldots$$
$$\to (0,0,0,2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{2}}}}}}}}}}}}}}},0,0).$$

Vo štvrtej truhlici už máme obrovské číslo, ktoré pre zjednodušenie ďalšieho zápisu označme P_{16}. Toto číslo (teda číslo, ktoré dostaneme tak, že dvojku umocníme na druhú, výsledok dáme do exponentu dvojky, výsledok takého umocnenia dáme opäť do exponentu dvojky, atď.) je už väčšie ako číslo $2010^{2010^{2010}}$ zo zadania. Naozaj, keby sme si postupne písali výsledky takého umocňovania, dostali by sme

$$P_1 = 2, \qquad P_2 = 2^2 = 4, \qquad P_3 = 2^{2^2} = 2^4 = 16, \qquad P_4 = 2^{2^{2^2}} = 2^{16} = 65\,536,$$

a už nasledujúce číslo $P_5 = 2^{65\,536}$ má 19 729 cifier. Veľa cifier však má aj číslo $2010^{2010^{2010}}$, ktoré pre zjednodušenie označme A. Takže dokázať, že P_{16} je väčšie ako A, musíme inak. Formálny dôkaz môže vyzerať nasledovne:

$$\begin{aligned} A = 2010^{2010^{2010}} &< 2048^{2010^{2010}} = (2^{11})^{2010^{2010}} = 2^{11\cdot 2010^{2010}} < 2^{2010\cdot 2010^{2010}} = \\ &= 2^{2010^{2011}} < 2^{2048^{2011}} = 2^{(2^{11})^{2011}} = 2^{2^{11\cdot 2011}} = 2^{2^{22\,121}} < 2^{2^{32\,768}} = \\ &= 2^{2^{2^{15}}} < 2^{2^{2^{16}}} = 2^{2^{2^{2^{2^2}}}} = P_6 < P_{16}. \end{aligned}$$

Všetky nerovnosti, ktoré sme napísali, sú zrejmé (a s veľkou rezervou). Ostáva už len dokončiť postup zo šestice $(0,0,0,P_{16},0,0)$ na šesticu $(0,0,0,0,0,A)$. Na to stačí veľa krát použiť operáciu druhého typu na štvrtú truhlicu, pričom stále budeme „vymieňať“ obsahy prázdnej piatej a šiestej truhlice, takže sa okrem znižovania počtu mincí vo štvrtej truhlici nebude diať nič. Budeme to robiť až do momentu, keď dostaneme šesticu $(0,0,0,A/4,0,0)$ (zrejme číslo A je deliteľné štyrmi a $A/4 < A < P_{16}$, takže naozaj vieme dostať takúto šesticu). Napokon už len použijeme opakovane operáciu prvého typu najskôr na štvrtú truhlicu a potom na piatu truhlicu, až získame

$$(0,0,0,A/4,0,0) \quad\Rightarrow\quad (0,0,0,0,A/2,0) \quad\Rightarrow\quad (0,0,0,0,0,A).$$

Tým je úloha vyriešená.

Úloha 6.
(Podľa *Martina Vodičku.*) Najskôr dokážeme pomocné tvrdenie.

Lema. Každý člen postupnosti a_n je pre $n > s$ rovný súčtu $a_i + a_j$ pre nejaké i, j, pričom $i \leqq s$, $i + j = n$.

Dôkaz. Podľa zadania je a_n súčtom $a_{i_1} + a_{j_1}$ pre nejaké i_1, j_1, pričom $i_1 + j_1 = n$. Bez ujmy na všeobecnosti nech $i_1 \leqq j_1$. Ak $i_1 \leqq s$, môžeme priamo položiť $i = i_1$, $j = j_1$. Ak $i_1 > s$, tak podľa zadania $a_{i_1} = a_{i_2} + a_{j_2}$, pričom $i_2 + j_2 = i_1$, čiže $i_2 < i_1$. Navyše zrejme $a_{j_2+j_1} \geqq a_{j_2} + a_{j_1}$. Spolu máme

$$a_n = a_{i_1} + a_{j_1} = a_{i_2} + a_{j_2} + a_{j_1} \leqq a_{i_2} + a_{j_2+j_1},$$

ale keďže $n = i_2 + (j_2 + j_1)$, platí $a_n \geqq a_{i_2} + a_{j_2+j_1}$, teda nutne $a_n = a_{i_2} + a_{j_2+j_1}$. Ak $i_2 \leqq s$, položíme $i = i_2$, $j = j_2 + j_1$. V opačnom prípade môžeme celú úvahu zopakovať a nájsť $i_3 < i_2$ také, že $a_n = a_{i_3} + a_{j_3+j_2+j_1}$, atď. Keďže proces „zmenšovania“ nemôže prebiehať donekonečna, nájdeme takto index $i = i_r \leqq s$ taký, že $a_n = a_{i_r} + a_{j_r+\dots+j_1}$. Tým je lema dokázaná.

Je jasné, že

$$\text{ak} \quad j > s,\ i_1, \dots, i_r \leqq s,\ n = j + i_1 + \dots + i_r, \quad \text{tak} \quad a_n \geqq a_j + a_{i_1} + \dots + a_{i_r}, \tag{1}$$

lebo

$$\begin{aligned} a_j + a_{i_1} &\leqq a_{j+i_1}, \\ a_{j+i_1} + a_{i_2} &\leqq a_{j+i_1+i_2}, \\ &\vdots \\ a_{j+i_1+\dots+i_{r-1}} + a_{i_r} &\leqq a_{j+i_1+\dots+i_r} = a_n. \end{aligned}$$

Zapíšme číslo a_n (pre $n > s$) s opakovaným využitím úvodnej lemy v tvare

$$a_n = a_{i_1} + a_{j_1} = a_{i_1} + a_{i_2} + a_{j_2} = \ldots = a_{i_1} + \dots + a_{i_r} + a_{j_r}, \tag{2}$$

pričom $i_1, \dots, i_r \leqq s$, $j_r > s$ a a_{j_r} už sa dá rozložiť na súčet dvoch členov postupnosti s oboma indexmi menšími alebo rovnými s. (S rozkladaním na súčet teda skončíme o práve jeden krok skôr, ako dostaneme všetky indexy menšie alebo rovné s. Pripúšťame aj možnosť $r = 0$, vtedy $j_r = n$ a znamená to, že už pre prvý rozklad $a_n = a_{i_1} + a_{j_1}$ by sme mali $i_1, j_1 \leqq s$.)

Zoberme teraz taký index $i \in \{1, \dots, s\}$, pre ktorý je hodnota a_i/i maximálna (ak je takých viac, zoberieme ľubovoľný z nich) a označme ho l. Ak sa v súčte (2) medzi hodnotami $\{i_1, \dots, i_r\}$ nachádza nejaký index i aspoň l-krát, nahradíme l jeho výskytov i výskytmi indexu l. Dostaneme tak množinu indexov $\{i'_1, \dots, i'_{r'}\}$, pričom zrejme $i'_1 + \dots + i'_{r'} = i_1 + \dots + i_r$. Keďže $a_l/l \geqq a_i/i$, máme $i \cdot a_l \geqq l \cdot a_i$. Takže

$$a_n = a_{i_1} + \dots + a_{i_r} + a_{j_r} \leqq a_{i'_1} + \dots + a_{i'_{r'}} + a_{j_r}.$$

Podľa (1) však platí aj opačná nerovnosť, nutne teda musí nastať rovnosť, čiže

$$a_n = a_{i'_1} + \dots + a_{i'_{r'}} + a_{j_r},$$

pričom aspoň jeden spomedzi indexov $i'_1, \dots, i'_{r'}$ je rovný l.

Samozrejme, pre dostatočne veľké n sa v súčte (2) nejaký index musí nachádzať aspoň l-krát; stačí zobrať napríklad $n > s^2(l-1) + 2s = N$.[16] Takže pre $n > N$ vieme a_n zapísať v tvare (po preusporiadaní indexov)

$$a_n = a_l + a_{i'_2} + \dots + a_{i'_{r'}} + a_{j_r}. \tag{3}$$

Podľa (1) (ak n nahradíme hodnotou $n - l$) však máme

$$a_{n-l} \geqq a_{i'_2} + \dots + a_{i'_{r'}} + a_{j_r},$$

odkiaľ spolu s (3) vyplýva $a_n \leqq a_l + a_{n-l}$. Zo zadania platí triviálne $a_n \geqq a_l + a_{n-l}$, takže musí byť $a_n = a_l + a_{n-l}$.

[16] Rôznych indexov je len s, zároveň $j_r \leqq 2s$, a ak by aj bolo všetkých po $l-1$, mali by sme $n = i_1 + \dots + i_r + j_r \leqq (1 + 2 + \dots + s)(l-1) + 2s \leqq s^2(l-1) + 2s < n$, čo je spor.

4. Stredoeurópska matematická olympiáda

V dňoch 9. – 15. 9. 2010 sa v obci Strečno neďaleko Žiliny uskutočnila 4. Stredoeurópska matematická olympiáda (MEMO). Odborným garantom podujatia, ktoré sa uskutočnilo pod hlavičkou žilinskej pobočky Jednoty slovenským matematikov a fyzikov, bola Slovenská komisia Matematickej olympiády. Súťaž bola financovaná z dotácie Ministerstva školstva SR a z poplatkov zúčastnených krajín. Výraznou mierou sa na hladkom priebehu podieľali ako partneri Žilinská univerzita, združenie Trojsten a obec Strečno.

Súťaže sa zúčastnilo 59 žiakov stredných škôl z desiatich krajín. Každú krajinu reprezentovali okrem šestice (v prípade Švajčiarska pätice) súťažiach aj vedúci a zástupca vedúceho. Slovenské družstvo tvorili

Matej Balog, Gymnázium Grösslingová, Bratislava, 3. ročník,
Dominik Csiba, ŠPMNDaG, Bratislava, 3. ročník,
Pavol Guričan, Gymnázium Jura Hronca, Bratislava, 3. ročník,
Ján Hozza, Gymnázium Jura Hronca, Bratislava, 3. ročník,
Natália Karásková, Gymnázium Jura Hronca, Bratislava, 3. ročník,
Jakub Santer, Gymnázium M. Hattalu, Trstená, 3. ročník.

Vedúcou bola Mgr. Erika Trojáková, doktorandka FMFI UK Bratislava, zástupcom vedúcej bol doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc. z fakulty PEDAS Žilinskej univerzity. Uvádzame aj zoznam všetkých zahraničných účastníkov.

Česká republika
vedúci: Martin Panák
zástupca: Pavel Calábek
súťažiaci: Michael Bílý, Martin Bucháček, Filip Hlásek, Martin Töpfer, Jakub Solovský, Lukáš Zavřel

Chorvátsko
vedúci: Mea Bombardelli
zástupca: Tonći Kokan
súťažiaci: Domagoj Ćevid, Luka Filipović, Boris Juras, Ivica Kičić, Matija Milišić, Luka Skorić

Litva
vedúci: Romualdas Kašuba
zástupca: Aivaras Novikas
súťažiaci: Justinas Česonis, Ana Daglis, Ugnė Gudžinskaitė, Benas Kikutis, Edvard Poliakov, Paulius Virbalas

Maďarsko
vedúci: Viktor Harangi
zástupca: József Szoldatics
súťažiaci: Tamás Ágoston, Kende Kalina, Nóra Frankl, Dániel Lenger, András Sándor, Ákos Somogyi

Nemecko

vedúci: Jörg Jahnel
zástupca: Michael Dreher
súťažiaci: Lukas Gehring, Florian Gräßler, Erik Schultheis, Christoph Standke, Alexander Thomas, Xianghui Zhong

Poľsko

vedúci: Andrzej Fryszkowski
zástupca: Andrzej Grzesik
súťažiaci: Tomasz Cieśla, Piotr Derkowski, Łukasz Drwięga, Michał Matusiak, Wojciech Nadara, Roman Stasiński

Rakúsko

vedúci: Gerd Baron
zástupca: Birgit Vera Schmidt
súťažiaci: Andreas Florian Nessmann, Georg Anegg, Martin Nägele, Maximilian Domberger, Bernd Prach, Chuandong Tang

Slovinsko

vedúci: Klemen Šivic
zástupca: Nik Stopar
súťažiaci: Nik Jazbinšek, Matjaž Leonardis, Veno Mramor, Aleš Omerzel, Klemen Zajc, Neža Žager Korenjak

Švajčiarsko

vedúci: Philipp Wirth
zástupca: Adrien de Gottrau
súťažiaci: Ulrich Brodowsky, Kevin Burri, Elia Fonti, Cyril Frei, Hayley Ross

Samotná príprava 4. ročníka MEMO začala niekoľko mesiacov vopred bezprostredne po pridelení dotácie. Po potvrdení účasti všetkými krajinami a registrácii účastníkov zasielali v priebehu júla vedúci družstiev návrhy na súťažné úlohy. Všetky prijaté úlohy, ktorých bolo spolu 59, úlohová komisia pre MEMO 2010 v zložení RNDr. Tomáš Jurík, PhD., RNDr. Ján Mazák a Mgr. Peter Novotný, PhD. starostlivo preriešila. Ako býva zvykom aj na IMO, vybrala spomedzi nich 30 úloh, ktoré zoradila do skráteného zoznamu úloh (tzv. „Shortlistu") rozdelených do oblastí algebra, kombinatorika, geometria a teória čísel a zoradených v každej oblasti podľa odhadovanej náročnosti. Spolu s vypracovanými riešeniami úloh Shortlistu ich v auguste elektronicky rozoslala vedúcim všetkých zúčastnených krajín. Po medzinárodnej elektronickej diskusii spojenej s internetovým dotazníkom o jednotlivých úlohách vznikla pomerne dobrá predstava o tom, ktoré úlohy sú na samotnú súťaž najviac vhodné.

Všetky družstvá pricestovali do Žiliny v priebehu štvrtka 9. 9. Pomocou mikrobusu sme ich prepravili do Strečna do Strediska internátnej prípravy ŽSR (SIP Strečno), kde boli všetci počas celého podujatia ubytovaní. Vo večerných hodinách prebehlo neformálne privítanie a otvorenie 4. ročníka MEMO. Účastníkom boli tiež predstavení členovia pedagogického dozoru, ktorí sa na mieste starali o ich komfort a hladký priebeh programu, usmerňovali ich, a zároveň pomáhali pri organizácii. Boli nimi

Mgr. Veronika Bachratá, SvF STU Bratislava,
Martin Bachratý, FMFI UK Bratislava,
RNDr. Róbert Hajduk, PhD., PF UPJŠ Košice,
Bc. Jakub Krchňavý, FMFI UK Bratislava,
Bc. Lenka Trojaková, FMFI UK Bratislava.

V piatok 10. 9. sa konalo zasadnutie jury, ktoré viedol Ján Mazák. Na ňom vedúci pokračovali v diskusii o úlohách, ktorá začala elektronicky už pred MEMO, a na základe hlasovania napokon schválili štvoricu úloh pre súťaž jednotlivcov a osem úloh pre súťaž družstiev. Zadania aj riešenia všetkých 12 úloh možno nájsť v závere tejto kapitoly. Popoludní sa pripravovali preklady zadaní z angličtiny do deviatich jazykov. Súťažiaci mali v piatok voľný deň, pričom doobeda navštívili zrúcaninu hradu Strečno.

Súťaž jednotlivcov prebehla priamo v SIP Strečno v sobotu 11. 9. predpoludním. Študenti mali na vypracovanie štvorice úloh 5 hodín času, počas prvých 45 minút mohli klásť otázky, na ktoré odpovedala jury. Počas súťaže jury diskutovala o bodovacích schémach pre jednotlivé úlohy. Súťaž družstiev sa konala doobeda v nedeľu 12. 9. na pôde Žilinskej univerzity. Na vypracovanie riešení bolo opäť 5 hodín, ale šestica študentov z každej krajiny pracovala spoločne v jednej miestnosti a odovzdávala ku každej úlohe len jedno riešenie.

Po oboch súťažiach boli všetky odovzdané riešenia skopírované na Žilinskej univerzite. Každý vedúci družstva obdržal originály riešení svojich študentov. Kópie dostali koordinátori, ktorí pracovali v zložení

Bc. Jakub Beran, FMFI UK Bratislava,
Mgr. Hana Budáčová, FMFI UK Bratislava,
Peter Csiba, FMFI UK Bratislava,
Mgr. Štefan Gyürki, PhD., FCHPT STU Bratislava,
RNDr. Ing. František Kardoš, PhD., PF UPJŠ Košice,
Tomáš Kocák, FMFI UK Bratislava,
Mgr. Martin Kollár PhD., FMFI UK Bratislava,
doc. RNDr. Stanislav Krajči, PhD., PF UPJŠ Košice,
Bc. Ondrej Mikuláš, FMFI UK Bratislava,
Bc. Michal Takács, FMFI UK Bratislava.

Koordinátori boli rozdelení do štyroch pracovných skupín podľa oblastí (algebra, kombinatorika, geometria, teória čísel). Každá skupina mala na starosti tri úlohy – jednu zo súťaže jednotlivcov, dve zo súťaže družstiev. Po pozornom preštudovaní študentských riešení[17] nasledovala samotná koordinácia, ktorá prebiehala podľa modelu používaného nielen na MEMO, ale aj na IMO: Za dvojicou resp. trojicou koordinátorov prichádzali postupne vedúci jednotlivých krajín. Vo vyhradenom čase (30 minút pre súťaž jednotlivcov, 15 minút pre súťaž družstiev) prešli spoločne s nimi cez jednotlivé riešenia, najmä cez nejasné pasáže a dohodli sa po diskusii na bodovom ohodnotení, ktoré korešpondovalo so schválenou bodovacou schémou. Bodové hodnotenie musel vždy podpísať vedúci družstva aj koordinátori.

[17] Tie boli písané väčšinou v jazyku, ktorému koordinátori nerozumeli, ale matematický text sa dá študovať často aj bez znalosti reči, v ktorom je písaný.

Celú koordináciu sa podarilo zvládnuť v priebehu nedele 12. 9., aj keď treba poznamenať, že to bolo pre vedúcich aj pre koordinátorov veľmi náročné. Do budúcnosti treba zvážiť rozloženie koordinácie na dva dni.

V pondelok 13. 9. doobeda jury schválila výsledky a rozhodla o pridelení medailí a čestných uznaní. Celkom boli v súťaži jednotlivcov udelené 3 zlaté, 11 strieborných, 19 bronzových medailí a 12 čestných uznaní[18]. Slovenskí študenti získali tri bronzové medaily a dve čestné uznania. I keď sme nezopakovali zlatú medailu z minulého roku, získali sme o jednu medailu viac ako vlani. Treba povedať, že získať medailu na MEMO je vzhľadom na konkurenciu azda náročnejšie ako na IMO (medaily získava na IMO aj na MEMO približne polovica účastníkov), preto je trojica kovov celkom pekným výsledkom. Vyhodnotenie družstva SR v súťaži jednotlivcov je uvedené v prvej tabuľke.

Meno	I-1	I-2	I-3	I-4	Súčet	Cena
Matej Balog	1	8	0	7	16	bronz
Dominik Csiba	2	0	0	8	10	ČU
Pavol Guričan	0	0	8	0	8	ČU
Ján Hozza	1	2	0	8	11	bronz
Natália Karásková	0	0	8	8	16	bronz
Jakub Santer	2	0	0	7	9	

Prehľad výsledkov v súťaži jednotlivcov je v druhej tabuľke, udávajúcej počet cien a bodov získaných jednotlivými krajinami. Krajiny sú tu zoradené podľa súčtu bodov celého družstva, podobne ako pri neoficiálnom poradí krajín na IMO (číslo v zátvorke pri Švajčiarsku znamená menší počet účastníkov).

Por.	Štát	Z	S	B	ČU	$\sum$	Por.	Štát	Z	S	B	ČU	$\sum$
1.	Maďarsko	2	3	1		112		Slovinsko	1	1	1	1	70
2.	Nemecko		3	3		90	7.	Litva		1	1	2	63
3.	Poľsko		2	3		83	8.	Rakúsko		1	1	3	59
4.	Chorvátsko			4		77	9.	Česká rep.			2	3	58
5.	Slovensko			3	2	70	10.	Švajčiarsko (5)				1	19

V ďalšej tabuľke sú kompletné výsledky súťaže jednotlivcov a napokon nasledujú výsledky súťaže družstiev. Pripomíname, že za každú úlohu bolo možné získať maximálne 8 bodov.

Najviac sa darilo Maďarsku, ktoré získalo dve z troch zlatých individuálnych medailí a so slušným náskokom zvíťazilo v tímovej súťaži. Tradične dobre si počínali aj Nemecko a Poľsko. Naši v súťaži družstiev nevyužili výhodu domáceho prostredia a na plný počet bodov vyriešili iba jednu úlohu. Čiastočne sme doplatili na neskúsenosť družstva s tímovými súťažami – MO u nás prebieha výhradne ako súťaž jednotlivcov. V budúcnosti sa pokúsime tento nedostatok v príprave odstrániť.

[18] Čestné uznanie získali tí študenti, ktorí nezískali medailu, ale vyriešili aspoň jednu úlohu na plný počet bodov.

	Meno	Štát	I-1	I-2	I-3	I-4	$\sum$	Cena
1.	Kende Kalina	Maďarsko	1	8	8	8	25	zlato
2.	Nóra Frankl	Maďarsko	0	8	8	8	24	zlato
3.	Nik Jazbinšek	Slovinsko	5	1	8	8	22	zlato
4.	Alexander Thomas	Nemecko	1	2	8	8	19	striebro
5.	Florian Gräßler	Nemecko	1	1	8	8	18	striebro
	Dániel Lenger	Maďarsko	2	7	1	8	18	striebro
7.	Tamás Ágoston	Maďarsko	1	8	0	8	17	striebro
	Tomasz Cieśla	Poľsko	2	0	8	7	17	striebro
	Matjaž Leonardis	Slovinsko	1	5	3	8	17	striebro
	Michał Matusiak	Poľsko	1	0	8	8	17	striebro
	Martin Nägele	Rakúsko	1	0	8	8	17	striebro
	Edvard Poliakov	Litva	1	8	0	8	17	striebro
	András Sándor	Maďarsko	1	8	0	8	17	striebro
	Christoph Standke	Nemecko	2	3	8	4	17	striebro
15.	Matej Balog	Slovensko	1	8	0	7	16	bronz
	Piotr Derkowski	Poľsko	0	8	0	8	16	bronz
	Ugnė Gudžinskaitė	Litva	0	8	0	8	16	bronz
	Boris Juras	Chorvátsko	0	0	8	8	16	bronz
	Natália Karásková	Slovensko	0	0	8	8	16	bronz
	Jakub Solovský	Česká rep.	0	0	8	8	16	bronz
	Roman Stasiński	Poľsko	0	8	0	8	16	bronz
22.	Domagoj Ćevid	Chorvátsko	0	7	0	8	15	bronz
	Ivica Kičić	Chorvátsko	8	0	0	7	15	bronz
	Matija Milišić	Chorvátsko	4	5	0	6	15	bronz
25.	Lukas Gehring	Nemecko	3	4	0	6	13	bronz
	Wojciech Nadara	Poľsko	0	4	1	8	13	bronz
	Neža Žager Korenjak	Slovinsko	1	0	8	4	13	bronz
28.	Filip Hlásek	Česká rep.	4	0	0	8	12	bronz
	Xianghui Zhong	Nemecko	2	8	0	2	12	bronz
30.	Georg Anegg	Rakúsko	2	0	1	8	11	bronz
	Ján Hozza	Slovensko	1	2	0	8	11	bronz
	Erik Schultheis	Nemecko	2	1	0	8	11	bronz
	Ákos Somogyi	Maďarsko	1	0	2	8	11	bronz
34.	Dominik Csiba	Slovensko	2	0	0	8	10	ČU
	Paulius Virbalas	Litva	1	0	1	8	10	ČU
36.	Andreas Florian Nessmann	Rakúsko	0	1	0	8	9	ČU
	Bernd Prach	Rakúsko	1	0	0	8	9	ČU
	Jakub Santer	Slovensko	2	0	0	7	9	
39.	Ulrich Brodowsky	Švajčiarsko	0	0	0	8	8	ČU
	Martin Bucháček	Česká rep.	0	0	0	8	8	ČU
	Maximilian Domberger	Rakúsko	0	0	8	0	8	ČU
	Luka Filipović	Chorvátsko	1	0	0	7	8	
	Pavol Guričan	Slovensko	0	0	8	0	8	ČU
	Benas Kikutis	Litva	0	0	0	8	8	ČU
	Luka Skorić	Chorvátsko	2	0	0	6	8	
	Martin Töpfer	Česká rep.	0	0	0	8	8	ČU
	Klemen Zajc	Slovinsko	0	0	0	8	8	ČU
	Lukáš Zavřel	Česká rep.	0	0	0	8	8	ČU
49.	Cyril Frei	Švajčiarsko	0	1	0	6	7	
	Veno Mramor	Slovinsko	1	0	0	6	7	

	Meno	Štát	I-1	I-2	I-3	I-4	$\sum$	Cena
51.	Michael Bílý	Česká rep.	2	1	0	3	6	
	Justinas Česonis	Litva	1	0	1	4	6	
	Ana Daglis	Litva	0	0	0	6	6	
54.	Chuandong Tang	Rakúsko	0	0	0	5	5	
55.	Łukasz Drwięga	Poľsko	1	0	0	3	4	
56.	Aleš Omerzel	Slovinsko	0	0	3	0	3	
	Hayley Ross	Švajčiarsko	0	0	0	3	3	
58.	Kevin Burri	Švajčiarsko	0	0	0	1	1	
59.	Elia Fonti	Švajčiarsko	0	0	0	0	0	

	Štát	T-1	T-2	T-3	T-4	T-5	T-6	T-7	T-8	$\sum$
1.	Maďarsko	8	0	8	4	8	8	8	8	52
2.	Poľsko	1	2	8	8	8	0	8	8	43
3.	Nemecko	7	2	1	3	8	8	8	3	40
4.	Rakúsko	2	8	1	3	8	6	8	1	37
5.	Chorvátsko	6	0	8	3	8	0	8	2	35
6.	Litva	1	2	0	3	8	8	8	0	30
7.	Slovinsko	6	0	7	2	8	0	3	1	27
8.	Česká rep.	1	2	3	3	8	0	8	1	26
9.	Slovensko	2	0	3	4	8	0	5	0	22
10.	Švajčiarsko	0	0	1	2	0	1	0	0	4

Po schválení výsledkov (ktoré sme až do záverečného ceremoniálu držali v tajnosti) sme v pondelok poobede pre všetkých účastníkov aj vedúcich zorganizovali plavbu plťami po Váhu spestrenú tradičným výkladom pltníkov. Nasledujúci deň, v utorok 14. 9., sa konal celodenný výlet do Malej Fatry. Jeho súčasťou bol prechod tiesňavou Jánošíkove diery a jazda lanovkou z Vrátnej do Snilovského sedla.

Po výlete a krátkom odpočinku nasledoval záverečný ceremoniál so slávnostným vyhodnotením. Zúčastnili sa na ňom ako hostia členovia usporiadateľského výboru mim. prof. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., ktorý ešte ako predseda SKMO v školskom roku 2006/2007 zabezpečil prísľub MŠ SR o pridelení dotácie na 4. ročník MEMO a bol tiež sprostredkovateľom spolupráce ŽU pri organizovaní MEMO a prof. Ing. Ivo Čáp, CSc., predseda žilinskej pobočky JSMF, ktorý zabezpečoval všetko účtovníctvo súvisiace s čerpaním dotácie a s účastníckymi poplatkami. Ako čestní hostia sa na ceremoniáli zúčastnili tiež rektorka Žilinskej univerzity prof. Ing. Tatiana Čorejová, PhD. a zastupujúci riaditeľ odboru stredných škôl a jazykových škôl sekcie regionálneho školstva MŠ SR RNDr. Igor Gallus. Počas záverečnej slávnostnej večere dostala slovo vedúca chorvátskeho družstva, ktorá všetkých účastníkov pozvala na 5. ročník MEMO. Ten sa uskutoční v septembri 2011 vo Varaždine.

Dá sa povedať, že podujatie sa nám podarilo zorganizovať na veľmi dobrej úrovni, o čom svedčia pozitívne odozvy vedúcich družstiev posledný deň pri lúčení. Verím, že súťaž prispela k dobrému menu Slovenska a nášho školstva a vedy v stredoeurópskom regióne. Na záver chcem preto všetkým organizátorom poďakovať za vynaložené úsilie.

Peter Novotný

Zadania úloh MEMO

Súťaž jednotlivcov

Úloha I-1.
Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + (y+1)f(x) + (x+1)f(y).$$

(*Česká rep., Pavel Calábek*)

Úloha I-2.
Na tabuli sú napísané všetky kladné delitele celého kladného čísla N. Dvaja hráči A a B hrajú nasledovnú hru, pričom sa pravidelne striedajú v ťahoch: V prvom ťahu hráč A zmaže číslo N. Ak posledné zmazané číslo je d, potom hráč, ktorý je na ťahu, zmaže deliteľa čísla d alebo násobok čísla d. Hráč, ktorý nemôže urobiť ťah, prehráva. Určte všetky čísla N, pre ktoré hráč A môže vyhrať bez ohľadu na ťahy hráča B. (*Poľsko*)

Úloha I-3.
Je daný tetivový štvoruholník $ABCD$ a na jeho uhlopriečke AC bod E taký, že $|AD| = |AE|$ a $|CB| = |CE|$. Nech M je stred kružnice k opísanej trojuholníku BDE. Kružnica k pretína priamku AC v bodoch E a F. Dokážte, že priamky FM, AD a BC sa pretínajú v jednom bode. (*Švajčiarsko*)

Úloha I-4.
Nájdite všetky kladné celé čísla n, ktoré vyhovujú obom nasledujúcim podmienkam:

(i) číslo n má aspoň štyri kladné delitele;
(ii) ak a a b sú delitele čísla n, pre ktoré platí $1 < a < b < n$, potom číslo $b - a$ tiež delí n.

(*Slovinsko*)

Súťaž družstiev

Úloha T-1.
Sú dané tri rastúce postupnosti

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots, \qquad b_1,\ b_2,\ b_3,\ \dots, \qquad c_1,\ c_2,\ c_3,\ \dots$$

celých kladných čísel. Každé celé kladné číslo je členom práve jednej z týchto postupností. Pre každé celé kladné číslo n sú splnené podmienky:

(i) $c_{a_n} = b_n + 1$;
(ii) $a_{n+1} > b_n$;
(iii) číslo $c_{n+1}c_n - (n+1)c_{n+1} - nc_n$ je párne.

Nájdite a_{2010}, b_{2010} a c_{2010}. (*Litva*)

Úloha T-2.
Pre každé celé číslo $n \geqq 2$ určte najväčšie možné reálne číslo C_n také, že pre všetky kladné reálne čísla $a_1, \ldots, a_n$ platí

$$\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n} \geqq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 + C_n \cdot (a_1 - a_n)^2.$$

(*Švajčiarsko*)

Úloha T-3.
V každom vrchole pravidelného n-uholníka je veža. V tom istom okamihu každá veža vystrelí na jednu z dvoch susedných veží a zasiahne ju. *Výsledkom streľby* nazveme množinu všetkých zasiahnutých veží, pričom nerozlišujeme, či bola veža zasiahnutá raz alebo dvakrát. Označme $P(n)$ počet všetkých možných výsledkov streľby (pre dané n). Dokážte, že pre každé celé $k \geqq 3$ sú čísla $P(k)$ a $P(k+1)$ nesúdeliteľné.
(*Česká rep., Martin Panák*)

Úloha T-4.
Nech n je celé kladné číslo. Štvorec $ABCD$ je rozdelený na n^2 jednotkových štvorcov. Každý z týchto štvorcov je ďalej rozdelený na dva trojuholníky uhlopriečkou rovnobežnou s úsečkou BD. Niektoré z vrcholov malých štvorcov sú zafarbené na červeno tak, že každý z $2n^2$ vytvorených trojuholníkov má aspoň jeden červený vrchol. Nájdite najmenší možný počet červených vrcholov. (*Slovinsko*)

Úloha T-5.
Kružnica vpísaná trojuholníku ABC sa dotýka strán BC, CA a AB postupne v bodoch D, E a F. Nech K je bod súmerný s bodom D podľa stredu vpísanej kružnice. Priamky DE a FK sa pretínajú v bode S. Dokážte, že priamka AS je rovnobežná s BC.
(*Poľsko*)

Úloha T-6.
Nech A, B, C, D, E sú také body, že $ABCD$ je tetivový štvoruholník a $ABDE$ je rovnobežník. Uhlopriečky AC a BD sa pretínajú v bode S a polpriamky AB a DC v bode F. Dokážte, že $|\measuredangle AFS| = |\measuredangle ECD|$. (*Chorvátsko*)

Úloha T-7.
Pre celé nezáporné číslo n definujme a_n ako číslo, ktorého dekadický zápis má tvar

$$1\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}1.$$

Dokážte, že $a_n/3$ sa dá vždy vyjadriť ako súčet tretích mocnín dvoch celých kladných čísel, ale nikdy sa nedá vyjadriť ako súčet druhých mocnín dvoch celých čísel.
(*Švajčiarsko*)

Úloha T-8.
Je dané celé kladné číslo n, ktoré nie je mocninou čísla 2. Ukážte, že existuje celé kladné číslo m s nasledujúcimi dvoma vlastnosťami:

(i) m je súčinom dvoch po sebe idúcich celých kladných čísel;

(ii) dekadický zápis čísla m pozostáva z dvoch identických blokov n číslic.

(*Poľsko*)

Riešenia úloh MEMO

Úloha I-1.
Dosadením $y = 0$ získame

$$0 = f(0)(f(x) - x - 2).$$

Ľahko možno overiť, že funkcia $f(x) = x + 2$ *nie je* riešením, preto $f(0) = 0$. Zvoľme teraz v zadanej rovnici $x = 1$, $y = -1$. Dostaneme

$$0 = f(-1)(f(1) - 3),$$

teda $f(-1) = 0$ alebo $f(1) = 3$.

Ak $f(-1) = 0$, po dosadení $x = 2$, $y = -1$ máme $f(-2) = f(1)$. Následne zvolením $x = -2$, $y = 1$ dostaneme $f(-2)f(1) = 3f(-2) - f(1)$, odkiaľ vzhľadom na $f(-2) = f(1)$ vyplýva $f(1) \in \{0, 2\}$.

Takže $f(1) = a \in \{0, 2, 3\}$. Ak položíme v zadanej rovnici $y = 1$, dostaneme

$$f(x + 1) = (3 - a)f(x) + a(x + 1) \tag{1}$$

pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

Zvolením $y = 1 + 1/x$, pričom $x \neq 0$ je ľubovoľné, máme

$$f\left(x + \tfrac{1}{x} + 1\right) + f(x)f\left(\tfrac{1}{x} + 1\right) = f(x + 1) + \left(\tfrac{1}{x} + 2\right) f(x) + f\left(\tfrac{1}{x} + 1\right)(x + 1).$$

S využitím (1) preto

$$(3 - a)\left(f\left(x + \tfrac{1}{x}\right) + f(x)f\left(\tfrac{1}{x}\right) - (x + 1)f\left(\tfrac{1}{x}\right)\right) = f(x)\left(5 - 2a - (a - 1)\tfrac{1}{x}\right) + 2a + ax.$$

Odtiaľ s využitím vyjadrenia, ktoré dostaneme zo zadanej rovnice po dosadení $y = 1/x$, po úprave dostaneme

$$\begin{aligned} (3 - a)\left(a + f(x)\left(1 + \tfrac{1}{x}\right)\right) &= f(x)\left(5 - 2a - (a - 1) \cdot \tfrac{1}{x}\right) + 2a + ax, \\ f(x)\left(-2 + a + \tfrac{2}{x}\right) &= a^2 + ax - a. \end{aligned}$$

Postupným dosadzovaním $a \in \{0, 2, 3\}$ už ľahko odvodíme jednotlivé riešenia $f(x) = 0$, $f(x) = x^2 + x$, $f(x) = 3x$.[19] Jednoducho tiež možno overiť, že tieto tri funkcie vyhovujú zadanej rovnici.

[19] Prípady, keď $-2 + a + \frac{2}{x} = 0$, možno overiť osobitne napríklad s využitím (1).

Úloha I-2.
Nech $N = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ je prvočíselný rozklad čísla N. V každom ťahu hráč zmaže nejakého deliteľa čísla N, ktorého možno reprezentovať ako k-ticu $(b_1, \dots, b_k)$, pričom $b_i \leqq a_i$ (taká k-tica zodpovedá číslu $p_1^{b_1} \dots p_k^{b_k}$). Podľa pravidiel hry po k-tici $(b_1, \dots, b_k)$ môže nasledovať $(c_1, \dots, c_k)$ práve vtedy, keď buď $c_i \leqq b_i$ pre všetky i, alebo $a_i \geqq c_i \geqq b_i$ pre všetky i (samozrejme, iba v prípade, že je taká k-tica ešte na tabuli).

Ak aspoň jedno z čísel a_i je nepárne – bez ujmy na všeobecnosti nech je to a_1 – tak víťaznú stratégiu má hráč B. Stačí, ak na každý ťah $(b_1, \dots, b_k)$ hráča A odpovie ťahom

$$(a_1 - b_1, b_2, \dots, b_k).$$

ľahko možno overiť, že je to víťazná stratégia: Všetky k-tice zodpovedajúce číslam, ktoré sú na začiatku na tabuli, možno totiž roztriediť do dvojíc, a keď A zmaže k-ticu z nejakej dvojice, B zmaže druhú k-ticu z tej istej dvojice ($a_1 - b_1 \neq b_1$, pretože a_1 je nepárne).

Ak sú všetky a_i párne, tak víťaznú stratégiu má hráč A. Nech B zotrie k-ticu $(b_1, \dots, b_k)$, pričom aspoň jedno spomedzi b_i je menšie ako a_i ($(b_1, \dots, b_k) \neq$ $\neq (a_1, \dots, a_k)$, lebo to bol prvý ťah hráča A). Označme j najmenší index taký, že $b_j < a_j$. Potom odpoveďou hráča A môže byť k-tica

$$(b_1, \dots, b_{j-1}, a_j - b_j - 1, b_{j+1}, \dots, b_k).$$

Aj v tomto prípade sú všetky pôvodné k-tice (okrem prvého ťahu $(a_1, a_2, \dots, a_k)$) roztriedené do dvojíc a keď B zmaže nejakú k-ticu, A zmaže druhú z tej istej dvojice ($a_j - b_j - 1 \neq b_j$, pretože a_j je párne).

Samozrejme, podmienka, že všetky a_i sú párne, je splnená práve pre tie N, ktoré sú druhou mocninou celých čísel. Hráč A teda môže vyhrať bez ohľadu na ťahy hráča B práve vtedy, keď N je štvorec.

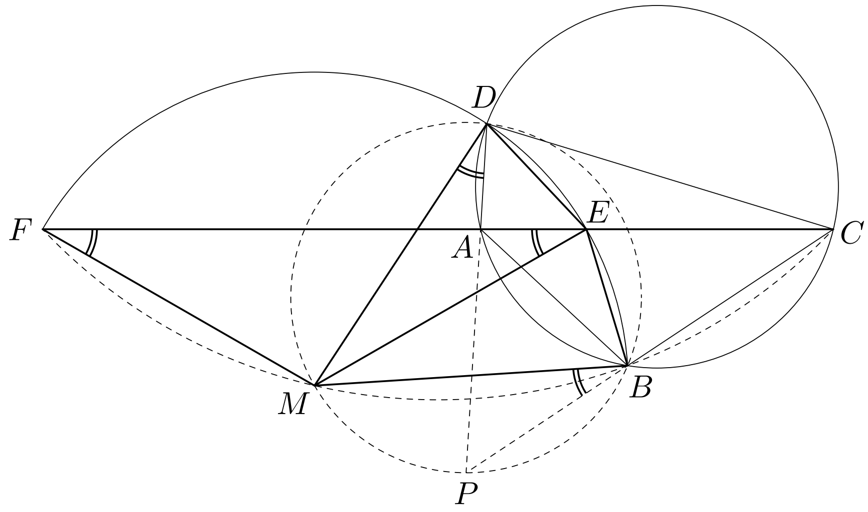
Úloha I-3.
Predpokladajme, že A leží na úsečke CF (prípad, keď C leží na úsečke AF, je analogický). Označme P priesečník priamok BC a AD (obr. 30). Keďže $|MB| = |ME|$, $|BC| = |CE|$ a $|ME| = |MF|$, sú trojuholníky MBC a MEC zhodné a trojuholník EFM rovnoramenný, takže pre veľkosti uhlov máme

$$|\measuredangle MBC| = |\measuredangle MEC| = 180° - |\measuredangle MEF| = 180° - |\measuredangle MFC|.$$

Z toho vyplýva, že body M, B, C, F ležia na jednej kružnici. Keďže $|ME| = |MD|$ a $|AE| = |AD|$, sú trojuholníky MEA, MDA zhodné a $|\measuredangle AEM| = |\measuredangle ADM|$, čiže $|\measuredangle MDP = |\measuredangle MBP|$ a štvoruholník $MPBD$ je tetivový. Spolu s tetivovosťou štvoruholníkov $ABCD$, $FMBC$ tak dostávame

$$|\measuredangle PMB| = |\measuredangle PDB| = |\measuredangle ADB| = |\measuredangle ACB| = |\measuredangle FCB| = 180° - |\measuredangle FMB|.$$

Takže body F, M, P ležia na jednej priamke a priamky AD, BC sa FM pretínajú v jednom bode (v bode P).



Obr. 30

Iné riešenie. Rovnako ako v prvom riešení dokážeme, že štvoruholník $FMBC$ je tetivový. Keďže body M, A ležia na osi úsečky DE, platí $|\measuredangle MDA| = |\measuredangle MEA|$. Z rovnosti $|ME| = |MF|$ zase $|\measuredangle MFA| = |\measuredangle MEA|$. Takže štvoruholník $MADF$ je tetivový.

Priamky FM, AD, BC sú teda chordálami kružníc opísaných tetivovým štvoruholníkom $FMBC$, $BCDA$, $ADFM$, z čoho podľa známeho tvrdenia vyplýva, že sa pretínajú v jednom bode (ktorý má ku všetkým trom kružniciam rovnakú mocnosť).

Úloha I-4.

Prvočísla, druhé mocniny prvočísel a číslo 1 nespĺňajú prvú podmienku, z ďalších úvah ich preto vynecháme.

Najskôr predpokladajme, že n je párne, t. j. $n = 2x$ pre nejaké $x \in \mathbb{N}$. Potom podľa druhej podmienky $x - 2$ delí n. Každý deliteľ n menší ako $x = n/2$ je menší alebo rovný $n/3$. Preto $x - 2 \leqq n/3$, odkiaľ $x \leqq 6$. Postupným overením všetkých prípustných hodnôt x ľahko zistíme, že vyhovujú $n = 6$, $n = 8$ a $n = 12$.

Ďalej môžeme predpokladať, že n je nepárne. Nech $n = px$, pričom p je najmenší netriviálny deliteľ čísla n. Číslo p je očividne nepárne prvočíslo. Zrejme $p + 1 \nmid n$, lebo $p + 1$ je párne, takže $x \neq p + 1$. Keďže $1 < p < x < n$, máme $x - p \mid px$.

Ak $p \nmid x$, tak $x - p$ a x sú nesúdeliteľné, teda nutne $x - p \mid p$, odkiaľ $x - p \leqq p$. Avšak $x \neq p + 1$, čiže $x - p \geqq p$ (lebo p je najmenší netriviálny deliteľ). Preto musí platiť $x = 2p$, čo je v spore s tým, že n je nepárne.

Ak $p \mid x$, tak $x = py$ pre nejaké celé číslo $y > 1$. Z minimálnosti p vyplýva $y \geqq p$. Podľa druhej podmienky $py - p \mid n = p^2 y$; z čoho $y - 1 \mid py$. Keďže $y - 1$ a y sú nesúdeliteľné, nutne $y - 1 \mid p$, odkiaľ $y \leqq p + 1$. Ak $y = p + 1$, tak y je párnym deliteľom čísla n, čo je v spore s predpokladom, že n je nepárne. Ak $y = p$, máme spor s podmienkou $y - 1 \mid p$ (keďže $p \geqq 3$). Iné možnosti vzhľadom na nerovnosť $y \geqq p$ nie sú.

Odpoveď. Obom podmienkam vyhovujú iba čísla 6, 8 a 12.

Úloha T-1.
Keďže postupnosť $\{c_n\}$ je rastúca, platí zrejme $c_n \geqq n$. Preto aj $c_{a_n} \geqq a_n$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Avšak postupnosti neobsahujú rovnaké členy, nutne teda

$$c_{a_n} > a_n \quad \text{pre všetky } n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Postupnosti budeme „napĺňať“ induktívne. Najskôr dokážeme, že $a_1 = 1$. Keby to tak nebolo, t. j. keby platilo $a_1 > 1$, muselo by byť buď $c_1 = 1$ alebo $b_1 = 1$. Druhá možnosť nepripadá do úvahy, pretože podľa (i) a (1) máme $b_1 = c_{a_1} - 1 > a_1 - 1$, teda $b_1 > a_1$ (keďže $b_1 \neq a_1$). Ak by bolo $c_1 = 1$, tak $b_1 \neq 2$ (lebo $b_1 > a_1$), $c_2 \neq 2$ (kvôli (iii) pre $n = 1$), teda by muselo byť $a_1 = 2$. Avšak potom $a_2 \neq 3$ (lebo $a_2 > b_1$), $b_1 \neq 3$ (lebo v takom prípade by bolo $c_2 = c_{a_1} = b_1 + 1 = 4$ a neplatilo by (iii) pre $n = 1$) a aj $c_2 \neq 3$ (lebo $c_2 = c_{a_1} = b_1 + 1 \neq 3$).

Teraz nájdeme v postupnostiach miesto pre číslo 2. Ak $a_2 = 2$, tak podľa (ii) platí $2 = a_2 > b_1$, čo už nie je možné. Ak $c_1 = 2$, tak podľa (i) máme $2 = c_1 = c_{a_1} = b_1 + 1$, teda $b_1 = 1$, čo už tiež nie je možné. Ostáva iba možnosť $b_2 = 2$. Potom podľa (i) dostaneme $c_1 = c_{a_1} = b_1 + 1 = 3$.

n	1	2	3	4	5	...
a_n	1					
b_n	2					
c_n	3					

Kvôli (iii) je $c_2 \neq 4$. Taktiež $b_2 \neq 4$, lebo inak podľa (1) a (i) $a_2 < c_{a_2} = b_2 + 1 = 5$ a pre a_2 by už neostala žiadna hodnota. Takže $a_2 = 4$. Následne podľa (ii) máme $a_3 \neq$ $\neq 5$, a aj $b_2 \neq 5$, lebo inak by podľa (i) bolo $c_4 = c_{a_2} = b_2 + 1 = 6$ a pre c_2, c_3 by už nezvýšili žiadne hodnoty. Preto $c_2 = 5$. Rovnakou úvahou dostaneme $a_3 \neq 6$, $b_2 \neq 6$, teda $c_3 = 6$. Ďalej $a_3 \neq 7$ (podľa (ii)), $c_4 \neq 7$ (lebo inak podľa (i) $7 = c_4 = c_{a_2} = b_2 + 1$, z čoho $b_2 = 6$), čiže $b_2 = 7$. Odtiaľ $c_4 = c_{a_2} = b_2 + 1 = 8$.

n	1	2	3	4	5	...
a_n	1	4				
b_n	2	7				
c_n	3	5	6	8		

Teraz môžeme znova zopakovať úvahy z predošlého odseku: Kvôli (iii) máme $c_5 \neq 9$. Z (1) a (i) vyplýva $b_3 \neq 9$ (inak $a_3 < c_{a_3} = b_3 + 1 = 10$ a neostane voľná hodnota pre a_3). Preto $a_3 = 9$. Podľa (ii) je $a_4 \neq 10$. Z (i) dostaneme $c_9 = c_{a_3} = b_3 + 1$, preto $b_3 \neq 10$ (inak neostanú voľné hodnoty pre $c_5, \dots, c_8$). Takže $c_5 = 10$. Podobne

$$\begin{aligned} a_4 \neq 11,\ b_3 \neq 11 \quad &\Longrightarrow \quad c_6 = 11, \\ a_4 \neq 12,\ b_3 \neq 12 \quad &\Longrightarrow \quad c_7 = 12, \\ a_4 \neq 13,\ b_3 \neq 13 \quad &\Longrightarrow \quad c_8 = 13. \end{aligned}$$

Napokon, $a_4 \neq 14$ (z (ii)), $c_9 \neq 14$ (inak podľa (i) by bolo $14 = c_9 = c_{a_3} = b_3 + 1$, teda $b_3 = 13$, čo neplatí), čiže $b_3 = 14$ a $c_9 = c_{a_3} = b_3 + 1 = 15$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
a_n	1	4	9							
b_n	2	7	14							
c_n	3	5	6	8	10	11	12	13	15	

Sformulujeme tvrdenie, ktoré možno jednoducho dokázať matematickou indukciou. Formálny dôkaz, ktorý je triviálnym zovšeobecnením predošlých dvoch odsekov, vynecháme. Pre $k \in \mathbb{N}$ a $i = 1, 2, \dots, 2k-2$ platí

$$\begin{aligned}
&a_k = k^2,\\
&b_k = k^2 + 2k - 1,\\
&c_{(k-1)^2+i} = k^2 + i,\\
&c_{k^2} = k^2 + 2k.
\end{aligned}$$

Na základe toho už ľahko dopočítame žiadané hodnoty:

$$a_{2010} = 2010^2, \quad b_{2010} = 2010^2 + 2 \cdot 2010 - 1, \quad c_{2010} = c_{44^2+74} = 45^2 + 74 = 2099.$$

Úloha T-2.
Pre $1 \leqq i < j \leqq n$ označme $x_{ij} = a_i - a_j$. Výrazy

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}} \qquad \text{a} \qquad \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

budeme skrátene označovať KP (kvadratický priemer) a AP (aritmetický priemer). Rozdiel ich štvorcov (vyskytujúci sa v zadaní) možno po vynásobení n^2 upraviť na

$$n^2(\mathrm{KP}^2 - \mathrm{AP}^2) = n(a_1^2 + \dots + a_n^2) - (a_1 + \dots + a_n)^2 = (n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \sum_{i<j} 2a_i a_j =$$
$$= \sum_{i<j} x_{ij}^2 = x_{1n}^2 + \sum_{i=2}^{n-1}(x_{1i}^2 + x_{in}^2) + \sum_{1<i<j<n} x_{ij}^2.$$

Posledná suma je evidentne nezáporná. Pre sumu v prostriedku platí podľa triviálnej nerovnosti $a^2 + b^2 \geqq \frac{1}{2}(a+b)^2$ odhad

$$\sum_{i=2}^{n-1}(x_{1i}^2 + x_{in}^2) \geqq \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n-1}(x_{1i} + x_{in})^2 = \frac{n-2}{2} \cdot x_{1n}^2.$$

Takže spolu máme

$$n^2(\mathrm{KP}^2 - \mathrm{AP}^2) \geqq x_{1n}^2 + \frac{n-2}{2} \cdot x_{1n}^2 = \frac{n}{2} \cdot (a_1 - a_n)^2,$$

pričom rovnosť zrejme nastáva práve vtedy, keď $a_2 = \ldots = a_{n-1} = \frac{1}{2}(a_1 + a_n)$. Teda najväčšia možná hodnota je

$$C_n = \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2n}.$$

Úloha T-3.

Každú zasiahnutú vežu označme čiernou farbou, ostatné (nezasiahnuté) veže bielou. Číslo $P(n)$ je v skutočnosti počtom takých ofarbení n veží čiernou a bielou farbou, že žiadne dve biele veže nemajú medzi sebou práve jednu vežu. Dôkaz ekvivalencie so zadaním, teda bijektívnosti medzi opísanými ofarbeniami a výsledkami streľby, je triviálny: Ak medzi dvoma bielymi vežami je práve jedna veža, tak táto veža nemá do koho strelit, čo nie je možné. Na druhej strane, ak také dve biele veže neexistujú, tak každá veža môže vystreliť do aspoň jednej čiernej, a aby sme sa uistili, že každá čierna veža bude zasiahnutá, stačí predpísať, že do každej čiernej veže bude strieľať tá veža, ktorá sa nachádza po smere hodinových ručičiek.

Ak n je nepárne, tak $P(n)$ je rovné počtu $K(n)$ ofarbení n veží na kružnici čiernou a bielou farbou tak, že žiadne dve susedné veže nie sú obe biele (jednoducho definujeme „susedné“ veže ako tie, ktoré majú medzi sebou práve jednu vežu). Pre párne n sa pri rovnakom definovaní „susednosti“ celá kružnica rozpadne na dve menšie s $\frac{1}{2}n$ vežami, teda $P(n) = K(\frac{1}{2}n)^2$.

Pre hodnoty $K(n)$ odvodíme rekurentný vzťah:

Počet vyhovujúcich ofarbení s n-tou vežou čiernou je totiž rovný počtu vyhovujúcich ofarbení $n-1$ veží (jednoducho vložíme čiernu vežu medzi prvú a $(n-1)$-tú vežu) zväčšenému o počet ofarbení $n-1$ veží nemajúcich žiadne dve susedné veže biele okrem prvej a $(n-1)$-tej (čiernu vežu môžeme vložiť medzi tieto dve biele veže a získame vyhovujúce ofarbenie).V druhom prípade dostaneme taký istý počet možností, aký je počet vyhovujúcich ofarbení $n-2$ veží s prvou vežou bielou (stačí spojiť dve susedné biele veže do jednej).

Počet vyhovujúcich ofarbení s n-tou vežou bielou je rovný počtu takých ofarbení $n-1$ veží, že žiadne dve susedné nie sú biele a prvá a $(n-1)$-tá sú čierne (bielu vežu môžeme vložiť len medzi dve čierne). Tento počet je rovný počtu vyhovujúcich ofarbení $n-2$ veží, pričom prvá je čierna (opäť môžeme dve susedné čierne spojiť do jednej).

Spolu teda

$$K(n) = K(n-1) + K_b(n-2) + K_c(n-2) = K(n-1) + K(n-2),$$

pričom K_b a K_c je počet vyhovujúcich ofarbení s prvou vežou bielou, resp. čiernou.

Priamo vieme spočítať hodnoty $K(2) = 3$, $K(3) = 4$, $K(4) = 7$, teda

$$K(2) = F(4) - F(0), \qquad K(3) = F(5) - F(1), \qquad K(4) = F(6) - F(2)$$

a indukciou ľahko dokážeme, že $K(n) = F(n+2) - F(n-2)$, pričom $F(k)$ je k-ty člen Fibonacciho postupnosti ($F(0) = 0$, $F(1) = F(2) = 1, \ldots$). Navyše $(K(2), K(3)) = 1$ a pre $n \geqq 3$ máme

$$(K(n), K(n-1)) = (K(n) - K(n-1), K(n-1)) = (K(n-2), K(n-1)) = \ldots = 1.$$

Podobne ukážeme, že pre každé párne $n = 2a$ je číslo $P(n) = K(a)^2$ nesúdeliteľné s oboma číslami $P(n+1) = K(2a+1)$ a $P(n-1) = K(2a-1)$:

$$\begin{aligned}
(K(a), K(2a+1)) &= (K(a), F(2)K(2a) + F(1)K(2a-1)) = \\
&= (K(a), F(3)K(2a-1) + F(2)K(2a-2)) = \ldots \\
&\ldots = (K(a), F(a+1)K(a+1) + F(a)K(a)) = (K(a), F(a+1)) = \\
&= (F(a+2) - F(a-2), F(a+1)) = \\
&= (F(a+2) - F(a+1) - F(a-2), F(a+1)) = \\
&= (F(a) - F(a-2), F(a+1)) = (F(a-1), F(a+1)) = \\
&= (F(a-1), F(a)) = 1, \\
(K(a), K(2a-1)) &= (K(a), F(2)K(2a-2) + F(1)K(2a-3)) = \\
&= (K(a), F(3)K(2a-3) + F(2)K(2a-4)) = \ldots \\
&\ldots = (K(a), F(a)K(a) + F(a-1)K(a-1)) = (K(a), F(a-1)) = \\
&= (F(a+2) - F(a-2), F(a-1)) = (F(a+2) - F(a), F(a-1)) = \\
&= (F(a+2) - F(a+1), F(a-1)) = (F(a), F(a-1)) = 1,
\end{aligned}$$

čím je úloha vyriešená.

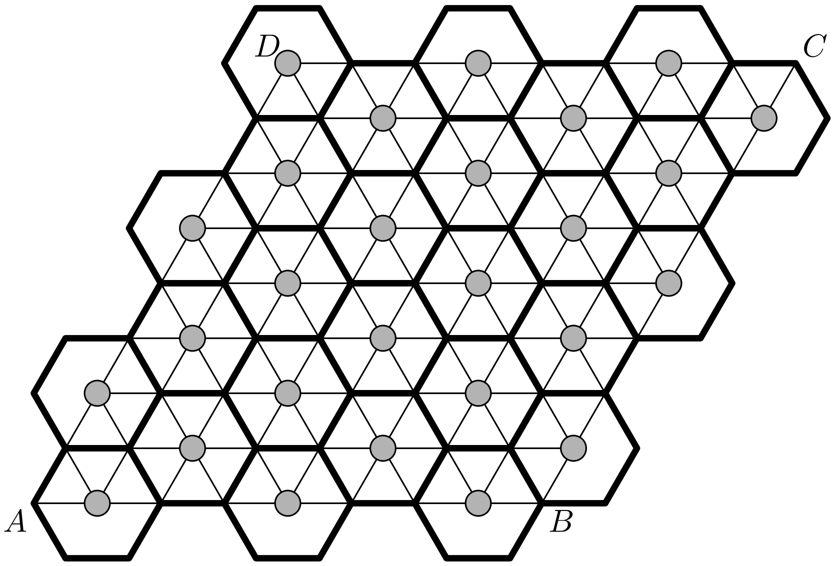
Úloha T-4.
Najmenší možný počet červených vrcholov je

$$\left\lfloor \frac{(n+1)^2}{3} \right\rfloor.$$

Najskôr ukážeme vyhovujúce ofarbenie s takýmto počtom. V druhej časti dokážeme, že menší počet červených vrcholov nestačí.

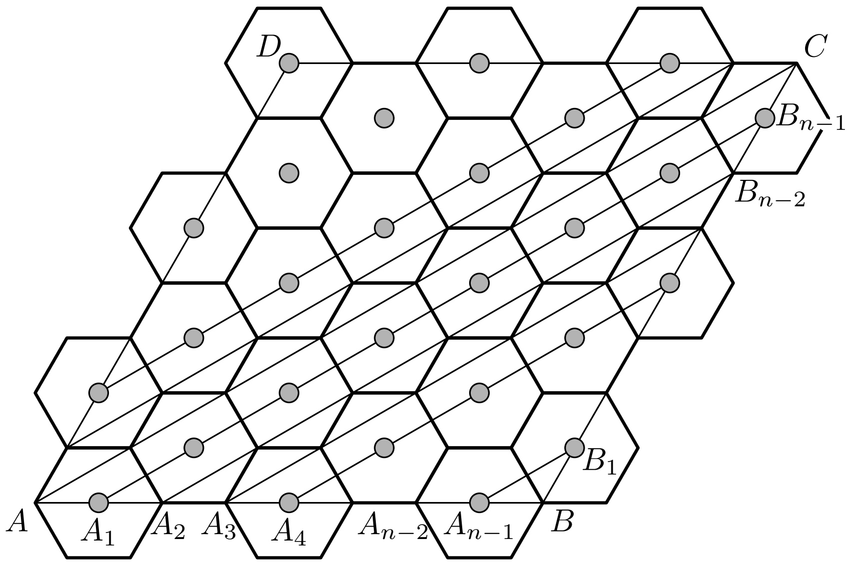
Namiesto štvorca budeme uvažovať kosoštvorec $ABCD$, v ktorom namiesto pravouhlých rovnoramenných trojuholníkov budú rovnostranné trojuholníky. Kosoštvorec pokryjeme pravidelnými jednotkovými šesťuholníkmi tak, aby vrchol A ležal vo vrchole šesťuholníka. Stred každého šesťuholníka zafarbíme červenou (na obr. 31 sivou). Zrejme každý rovnostranný trojuholník leží v niektorom šesťuholníku a teda má červený vrchol.

Označme a_n počet červených vrcholov pri tomto ofarbení. Stranu AB rozdeľme bodmi A_1, A_2, …, A_{n-1} na n jednotkových úsekov. Podobne označme body B_1, …, B_{n-1} na BC, C_1, …, C_{n-1} na CD a D_1, …, D_{n-1} na DA.



Obr. 31

Každý spomedzi n vrcholov na priamke A_1B_{n-1} je červený (obr. 32). Rovnobežky A_2B_{n-2}, A_3B_{n-3} nemajú žiadne červené vrcholy. Rovnobežka A_4B_{n-4} obsahuje o 3 červené vrcholy menej ako A_1B_{n-1}, t. j. $n-3$. Podobne ležia červené vrcholy na priamkach A_7B_{n-7}, $A_{10}B_{n-10}$, atď. Ich počet zakaždým klesne o 3. Z druhej strany uhlopriečky AC máme $n-1$ červených vrcholov na C_2D_{n-2}, $n-4$ na C_5D_{n-5} atď.

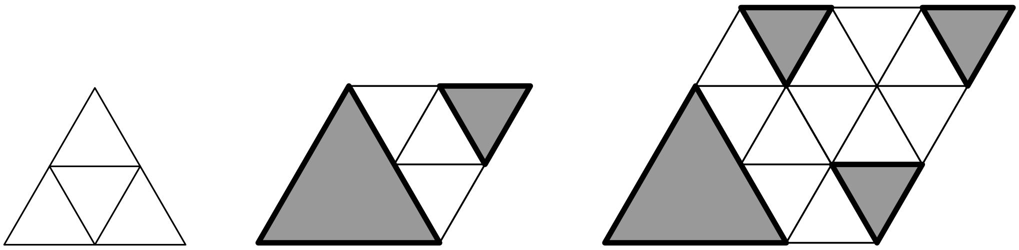


Obr. 32

Takže celkový počet červených vrcholov je

$$a_n = \big(n + (n-3) + (n-6) + \ldots\big) + \big((n-1) + (n-4) + (n-7) + \ldots\big).$$

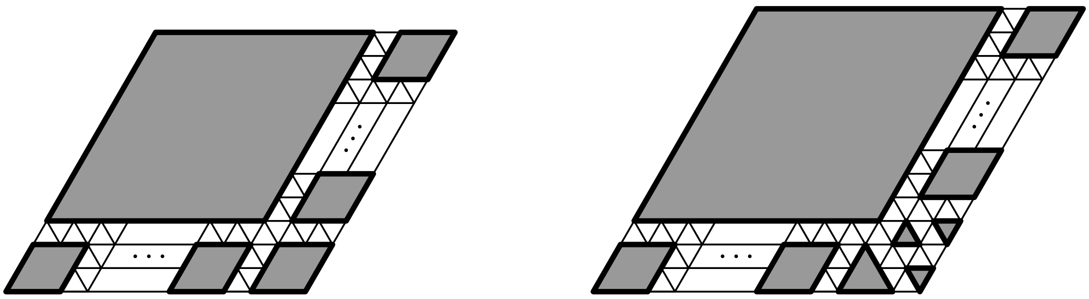
Ak $n = 3k+1$, tak $a_n = \frac{1}{3}n(n+2)$, pre $n = 3k+2$ dostaneme $a_n = \frac{1}{3}(n+1)^2$ a v prípade $n = 3k+3$ dostaneme $a_n = \frac{1}{3}n(n+2)$. Všeobecne možno tento počet vyjadriť vzťahom $a_n = \lfloor \frac{1}{3}(n+1)^2 \rfloor$.



Obr. 33 Obr. 34a Obr. 34b

Označme b_n najmenší možný počet červených vrcholov. Zrejme $b_1 = 1$. V každom rovnostrannom trojuholníku zloženom zo štyroch jednotkových trojuholníkov (obr. 33) musia byť zrejme zafarbené červenou aspoň dva vrcholy. Každý z malých vyznačených trojuholníkov na obr. 34a a 34b musí obsahovať aspoň jeden červený vrchol a väčšie vyznačené trojuholníky aspoň dva. Preto $b_2 \geqq 2 + 1 = 3$ a $b_3 \geqq 1 + 1 + 1 + 2 = 5$.

Pre $n = 1, 2, 3$ sme ukázali $b_n \geqq a_n$, teda nutne $b_n = a_n$. Pre ostatné hodnoty n použijeme matematickú indukciu, ktorej prvý krok sme už urobili. V druhom kroku dokážeme, že ak $b_{n-3} = a_{n-3}$, tak $b_n = a_n$.



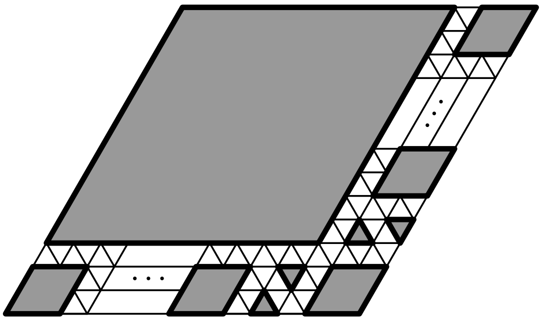
Obr. 35a Obr. 35b

Nech $n = 3k+2$. Ako ukazuje obr. 35a, potrebujeme aspoň $b_{n-3}+(2k+1)b_2$ červených vrcholov, t. j.

$$b_n \geqq b_{n-3} + (2k+1) \cdot 3 = \left\lfloor \frac{(n-2)^2}{3} \right\rfloor + 2n - 1 = \left\lfloor \frac{(n+1)^2}{3} \right\rfloor = a_n.$$

Ak $n = 3k + 3$, dostávame odhad (obr. 35b)

$$b_n \geqq b_{n-3} + 2kb_2 + 2 + 1 + 1 + 1 = \left\lfloor \frac{(n-2)^2}{3} \right\rfloor + 2(n-3) + 5 = \left\lfloor \frac{(n+1)^2}{3} \right\rfloor = a_n.$$



Obr. 35c

Napokon, ak $n = 3k + 1$, tak z obr. 35c máme

$$b_n \geqq b_{n-3} + (2(k-1)+1)b_2 + 1 + 1 + 1 + 1 = \left\lfloor \frac{(n-2)^2}{3} \right\rfloor + 2n - 1 = \left\lfloor \frac{(n+1)^2}{3} \right\rfloor = a_n.$$

Vo všetkých prípadoch $b_n \geqq a_n$, teda $b_n = a_n$.

Úloha T-5.

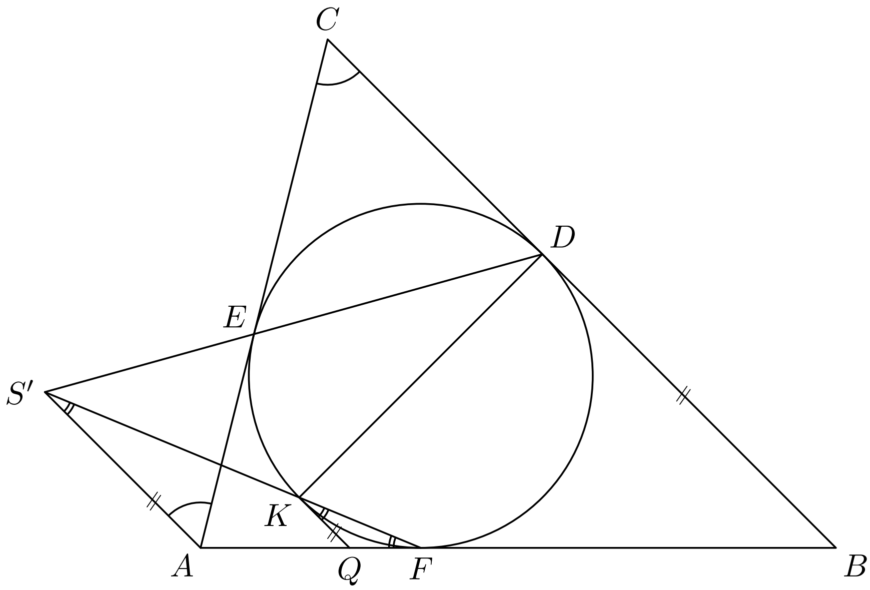
Nech S' je priesečník priamky FK a rovnobežky so stranou BC vedenej bodom A. Našou úlohou je dokázať, že body S', D, E ležia na jednej priamke. Priesečník strany AB s dotyčnicou ku vpísanej kružnici vedenou bodom K označme Q (obr. 36). Zrejme $KQ \parallel$ $\parallel BC$. Preto

$$|\measuredangle AS'F| = |\measuredangle QKF| = |\measuredangle QFK|,$$

z čoho $|AS'| = |AF| = |AE|$. Platí tiež $|DC| = |EC|$ a $BC \parallel AS'$. Takže

$$|\measuredangle CDE| = |\measuredangle CED| = |\measuredangle AES'| = |\measuredangle AS'E| = |\measuredangle AES|$$

a S', D, E naozaj ležia na jednej priamke.



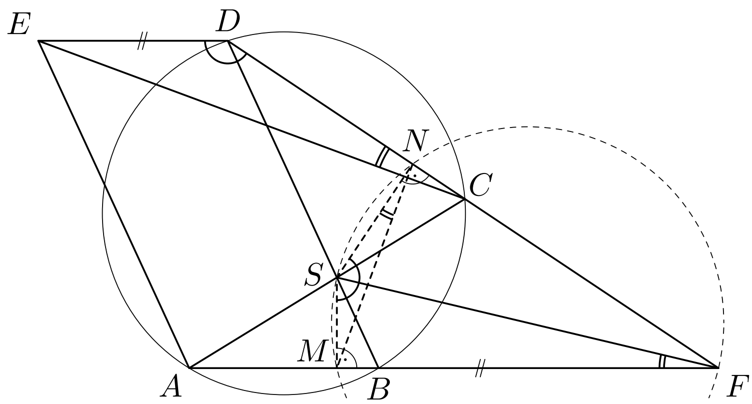
Obr. 36

Iné riešenie. Označme $\alpha = |\measuredangle BAC|$, $\beta = |\measuredangle ABC|$ a I stred vpísanej kružnice. Potom

$$|\measuredangle IDF| = |\measuredangle IFD| = \tfrac{1}{2}\beta = |\measuredangle AFS|,$$

lebo $|\measuredangle KFD| = |\measuredangle AFI| = 90°$. Keďže $|\measuredangle FDS| = \frac{1}{2}|\measuredangle FIE| = 90° - \frac{1}{2}\alpha$ ($AFIE$ je tetivový) a $|\measuredangle AIF| = 90° - \alpha/2$, sú trojuholníky AFI, SFD podobné. Z pomeru podobnosti máme $|AF| : |SF| = |IF| : |DF|$ a z $|\measuredangle AFS| = |\measuredangle IFD|$ vyplýva podobnosť trojuholníkov AFS, IFD, odkiaľ $|AF| = |AS| = |AE|$. Z podobnosti trojuholníkov ASE, CDE dostávame $|\measuredangle SAE| = 180° - \alpha - \beta$, a teda $|\measuredangle BAS| + |\measuredangle ABC| = 180°$.

Úloha T-6.
Označme M a N päty kolmíc spustených z bodu S na priamky AB a CD. Štvoruholník $SMFN$ je tetivový, lebo jeho dva protiľahlé uhly sú pravé (obr. 37). Z obvodových



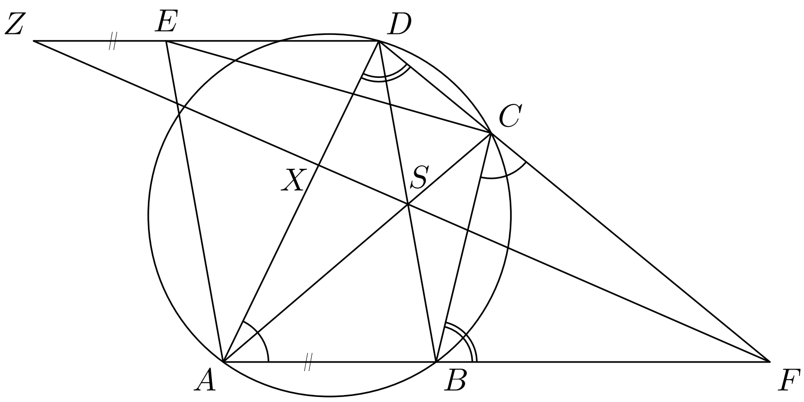
Obr. 37

uhlov teda $|\measuredangle AFS| = |\measuredangle MNS|$. Potrebujeme dokázať, že $|\measuredangle MNS| = |\measuredangle ECD|$. Na to stačí ukázať podobnosť trojuholníkov MSN, EDC. Keďže štvoruholník $ABCD$ je tetivový, trojuholníky ABS, DCS sú podobné. Úsečky SM, SN sú výškami v týchto trojuholníkoch, preto $|SM| : |SN| = |AB| : |CD| = |ED| : |CD|$. Pre veľkosti uhlov navyše máme

$$\measuredangle MSN = 180° - \measuredangle AFD = \measuredangle EDF = \measuredangle EDC,$$

takže trojuholníky MSN, EDC sú naozaj podobné.

Iné riešenie. Priamka FS pretína priamky AD, DE postupne v bodoch, ktoré označíme X, Z (obr. 38). Ďalej nech $|\measuredangle BAD| = \alpha$, $|\measuredangle ADF| = \delta$, $|AB| = a$, $|CD| = c$. Stačí dokázať, že trojuholníky CDE, ZDF sú podobné, pretože potom $|\measuredangle ECD| = |\measuredangle DZF| = |\measuredangle AFS|$. Tieto trojuholníky majú jeden uhol spoločný, takže ostáva ukázať, že $|ZD| : |FD| = c : a$.



Obr. 38

Podľa sínusovej vety v trojuholníku BFC platí $|CF| : |BF| = \sin\delta : \sin\alpha$, lebo

$$|\measuredangle FBC| = 180^\circ - |\measuredangle ABC| = |\measuredangle CDA| = \delta,$$
$$|\measuredangle FCB| = 180^\circ - |\measuredangle BCD| = |\measuredangle BAD| = \alpha.$$

Z Cèvovej vety pre trojuholník AFD a bod S vyplýva

$$1 = \frac{|DX|}{|AX|} \cdot \frac{|AB|}{|BF|} \cdot \frac{|CF|}{|DC|} = \frac{|DX|}{|AX|} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{\sin\delta}{\sin\alpha}. \tag{1}$$

Z podobnosti trojuholníkov AFX, DZX máme $|ZD| = |AF| \cdot |DX|/|AX|$, a zo sínusovej vety v trojuholníku AFD dostávame $|AF| = |FD| \cdot \sin\delta/\sin\alpha$. Takže pre skúmaný pomer $ZD : FD$ s využitím (1) platí

$$\frac{|ZD|}{|FD|} = \frac{|AF|}{|FD|} \cdot \frac{|DX|}{|AX|} = \frac{\sin\delta}{\sin\alpha} \cdot \frac{|DX|}{|AX|} = \frac{c}{a}.$$

Úloha T-7.

Najskôr dokážeme, že $a_n/3$ nie je pre žiadne n súčtom dvoch štvorcov. Druhé mocniny dávajú po delení štyrmi iba zvyšky 0 a 1, takže čísla, ktoré sú súčtom dvoch štvorcov, môžu po delení štyrmi dávať iba zvyšok 0, 1 alebo 2. Ale $a_n/3$ dáva zvyšok 3, lebo a_n dáva zvyšok 1.[20]

Po chvíli skúšania nájdeme vzťah

$$\frac{a_n}{3} = \left(\frac{10^{n+1}+2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2\cdot 10^{n+1}+1}{3}\right)^3,$$

ktorý po triviálnej úprave vyplýva z vyjadrenia $a_n = 10^{3n+3} + 2 \cdot 10^{2n+2} + 2 \cdot 10^{n+1} + 1$. Obe čísla v zátvorkách sú prirodzené, lebo $10^{n+1} \equiv 1 \pmod 3$. Takže $a_n/3$ sa dá vždy vyjadriť ako súčet dvoch tretích mocnín.

[20] Inou možnosťou, ako určiť zvyšok $a_n/3$ po delení štyrmi, je uvedomiť si, že toto číslo pre $n \geqq 1$ vždy končí dvojčíslím 67.

Úloha T-8.
Podľa Mihailescuho vety[21] jediným riešením rovnice $x^a - y^b = 1$ v obore celých čísel väčších ako 1 je $3^2 - 2^3 = 1$. Takže $10^n + 1$ nemôže byť druhou ani vyššou mocninou prvočísla. Podľa zadania má n aspoň jedného nepárneho deliteľa $k \geqq 3$. Ak $n = kl$, tak

$$10^n + 1 = (10^l)^k + 1 = (10^l + 1)\left((10^l)^{k-1} - (10^l)^{k-2} + \cdots - 10^l + 1\right),$$

teda $10^n + 1$ má netriviálneho deliteľa $10^l + 1$ a nemôže to byť prvočíslo. Z uvedeného vyplýva, že existujú nesúdeliteľné čísla a, b väčšie ako 1 také, že $10^n + 1 = ab$.

Našou úlohou je dokázať existenciu takého prirodzeného čísla t, s, že

$$m = (10^n + 1)t = abt = s(s-1),$$

pričom dekadický zápis t obsahuje presne n cifier.

Najskôr ukážeme, že existuje prirodzené číslo s deliteľné číslom a, pre ktoré $s \equiv 1 \pmod{b}$. Čísla a, $2a$, …, $(b-1)a$, ba sú všetky násobkami a a vzhľadom na nesúdeliteľnosť čísel a, b dávajú po delení b rôzne zvyšky. Preto práve jedno z nich dáva zvyšok 1 a môžeme ho zobrať za s. Podobne nájdeme s', ktoré je násobkom b a spĺňa $s' \equiv 1 \pmod{a}$.

Čísla s, s' sú kladné a menšie ako 10^n. Obe čísla $s(s-1)$ a $s'(s'-1)$ sú deliteľné číslom ab a menšie ako 10^{2n}. Navyše $s + s' \equiv 1 \pmod{ab}$. Číslo $s + s'$ je väčšie ako 1 a menšie ako $2 \cdot 10^n$. Nutne teda $s + s' = ab + 1 = 10^n + 2$, čiže aspoň jedno z čísel s, s' je väčšie ako $5 \cdot 10^{n-1}$, bez ujmy na všeobecnosti nech je to s. Potom $s(s-1) > 25 \cdot 10^{2n-2}$, takže $s(s-1)$ má presne $2n$ cifier a spĺňa všetky potrebné podmienky.

[21] Známa je ako Catalanova hypotéza, dokázaná bola v roku 2002.

Korešpondenčný seminár SKMO

Korešpondenčný seminár Slovenskej komisie Matematickej olympiády (KS SKMO) vznikol pred vyše 30 rokmi ako jeden z prvých matematických korešpondenčných seminárov (vtedy ešte ako československý seminár) preto, aby bolo umožnené venovať individuálnu starostlivosť aj tým študentom, ktorí nenavštevovali triedy so zameraním na matematiku. Úlohy tohto seminára svojou náročnosťou prevyšujú akúkoľvek inú matematickú súťaž na Slovensku pre stredoškolákov, seminár je preto dôležitou súčasťou prípravy aj na medzinárodnú matematickú olympiádu.

Počas svojej existencie prešiel seminár viacerými zmenami. Po jednoročnej prestávke v 52. ročníku MO jeho organizovanie prebrali vedúci korešpondenčného seminára KMS. Odvtedy je KS SKMO jeho kategóriou GAMA a KMS je oficiálnym seminárom SKMO.

KS SKMO má každý rok šesť sérií – tri zimné prebiehajúce od septembra do decembra a tri letné prebiehajúce od februára do mája. V každej sérii je zadaných 5 úloh.

Celkové poradie KS SKMO 2009/2010

1. *Filip Sládek*, 4. ročník, Gymnázium A. Bernoláka, Námestovo, 176 bodov
2. *Martin Bachratý*, 4. ročník, Gymnázium Veľká okružná, Žilina, 146 bodov
3. *Michal Hagara*, 4. ročník, Gymnázium Jura Hronca, Bratislava, 126 bodov
   Marek Kukan, 4. ročník, Gymnázium Grösslingová, Bratislava, 126 bodov
5. *Marián Horňák*, 2. ročník, Gymnázium Párovská, Nitra, 86 bodov

Uvádzame zadania všetkých úloh tohto ročníka súťaže a pri väčšine úloh aj riešenie, často študentské. Príklady boli vyberané prevažne z národných olympiád či iných súťaží.

Zadania súťažných úloh KS SK MO

Prvá séria

1.1 Doma u Chucka na stole je n rôznych na sebe položených kníh. Knihy začal nasledovne otáčať. V prvom ťahu otočil najvrchnejšiu knihu a položil ju naspäť. V druhom ťahu otočil dve vrchné knihy ako jeden blok a položil ich naspäť. Takto pokračoval aj ďalej a v n-tom ťahu otočil všetkých n kníh ako jeden blok a položil ich naspäť. V $(n+1)$-tom ťahu otočil opäť vrchnú knihu a položil ju naspäť. V $(n+2)$-tom ťahu otočil vrchné dve knihy ako jeden blok a položil ich naspäť. Takýmto spôsobom otáčal aj ďalej. Chuck odmieta skončiť skôr než sú knihy uložené presne tak, ako na začiatku, teda nielen v správnom poradí, ale aj správne orientované. Orientáciu knihy rozlišujeme podľa toho, či je kniha otočená prednou obálkou nahor alebo nadol. Všimnite si, že pri otočení nejakého bloku kníh sa orientácia každej knihy tohoto bloku zmení. Dokážte, že Chuck po konečnom počte ťahov skončí. (*Irán, 2007*)

1.2 V knižke našiel Chuck založenú starú mapu Austrálie. Je na nej k miest. Označme r vzdialenosť dvoch miest, ktoré sú od seba vzdušnou čiarou najďalej. Dokážte, že pre ľubovoľný počet miest k existuje nanajvýš k (neusporiadaných) dvojíc miest, ktoré sú od seba vzdušnou čiarou vzdialené r.

1.3 Dokážte, že ak p je prvočíslo, tak číslo $p^p - 1$ má aspoň jedného prvočíselného deliteľa q, ktorý dáva zvyšok 1 po delení p.

1.4 Dané sú kružnice k a l s vonkajším dotykom v bode M. Nech A je ľubovoľný bod kružnice k, ktorý neleží na priamke spájajúcej stredy oboch kružníc. Nech B a C sú rôzne body ležiace na kružnici l také, že priamky AB a AC sú jej dotyčnice. Priamky BM a CM znovu pretínajú k postupne v bodoch E a F. Bod D je priesečníkom priamky EF s dotyčnicou ku kružnici k v bode A. Aký útvar opíše bod D, keď meníme polohu bodu A? (*Vietnam, 2003*)

1.5 Na škole v Sydney majú každí dvaja študenti, ktorí sa navzájom nepoznajú, aspoň jedného spoločného známeho (poznanie sa je symetrické). Ani jeden študent pritom nepozná všetkých ostatných. Očíslujme študentov od 1 po n a nech a_i označuje počet známych i-teho študenta. Vieme, že platí

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = n^2 - n.$$

Nech $k \geqq 3$ je najmenší počet študentov, ktorých možno usadiť okolo okrúhleho stola tak, aby každý poznal oboch svojich susedov. Nájdite všetky možné hodnoty k. (*IMC, 2009*)

Druhá séria

2.1 Do štvorstena $ABCD$ je vpísaná guľa. Štyri rôzne roviny dotýkajúce sa gule a rovnobežné so stenami štvorstena (rôzne od samotných stien) odtínajú štyri menšie štvorsteny. Dokážte, že súčet dĺžok všetkých ich 24 hrán je rovný dvojnásobku súčtu dĺžok hrán celého štvorstena $ABCD$.
(*Pavel Leischner, CKMO, 1998*)

2.2 Nech ABC je trojuholník a Q vnútorný bod taký, že $|\measuredangle BQC| = 90°$ a $|\measuredangle BAQ| = |\measuredangle BCQ|$. Nech U, V sú v tomto poradí stredy strán AC, BC. Predpokladajme, že $|BQ| = 2|QU|$. Dokážte, že body A, Q, V ležia na priamke.
(*India, 2009*)

2.3 Všetky koeficienty polynómu $P(x)$ sú rovné 1 alebo -1. Ďalej vieme, že 1 je jeho 2^k-násobným koreňom pre nejaké $k \in \mathbb{N}$. Dokážte, že stupeň $P(x)$ je aspoň $2^{k+1} - 1$. (*Čína, 2009*)

2.4 Nech a, b, c sú kladné reálne čísla spĺňajúce $a + b + c = 3$. Dokážte, že

$$(3 - 2a)(3 - 2b)(3 - 2c) \leqq a^2b^2c^2.$$

(*Rumunsko, 2005*)

2.5 Dokážte, že v každej aritmetickej postupnosti štyridsiatich rôznych prirodzených čísel existuje člen, ktorý nevieme napísať v tvare $2^m + 3^n$, kde m, n sú nezáporné celé čísla. (*Čína, 2009*)

Tretia séria

3.1 Nech $\mathbb{R}$ je množina reálnych čísel. Určte všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x a y platí

$$f(x^2 + f(y)) = (x - y)^2 f(x + y).$$

3.2 Nech a, b, c, d sú kladné reálne čísla spĺňajúce vzťah

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4.$$

Dokážte, že

$$a + b + c + d \geqq ab + bc + cd + da.$$

(*Mathlinks, 2006*)

3.3 Nájdite všetky spojité funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$, pre ktoré je $x - y$ racionálne, je aj $f(x) - f(y)$ racionálne. (*IMC, 2008*)

3.4 Hrany konvexného mnohostena sú orientované jednosmernými šípkami tak, že z každého vrcholu vychádza a do každého vrcholu vstupuje aspoň jedna šípka. Dokážte, že aspoň jedna stena mnohostena je taká, že šípky ležiace na jej obvode tvoria orientovaný cyklus. (*Rumunsko, 2005*)

3.5 Daný je ostrouhlý trojuholník ABC ($|AB| \neq |AC|$) s ortocentrom H. Body D a E ležia po rade na úsečkách AB a AC tak, že platí $|AD| = |AE|$ a body D, E, H ležia na priamke. Stred strany BC označme M. Dokážte, že priamka MH je rovnobežná so spojnicou stredov kružníc opísaných trojuholníkom ABC a ADE. (*Švajčiarsko, 2006*)

Štvrtá séria

4.1 O istej geometrickej postupnosti vieme, že jej prvý, desiaty a tridsiaty člen je prirodzeným číslom. Dokážte, že aj jej dvadsiaty člen musí byť prirodzeným číslom. (*Rusko, 2001*)

4.2 Medzi vedúcimi KMS je istá skupina ľudí obľubujúcich konzumáciu horaliek po šírke. Je známe, že týchto zaujímavých ľudí je aspoň päť. Niektorí ľudia v tejto skupine sa poznajú, iní zas nie. Vzťah poznania sa je vzájomný, teda ak Bus pozná Fofa, tak aj Fofo pozná Busa. Povedzme si niečo viac o tejto skupine. Vieme, že ak sa v nej dvaja ľudia poznajú, tak nemajú žiadnych spoločných známych. Ľubovoľní dvaja ľudia, ktorí sa nepoznajú, majú presne dvoch spoločných známych. Zistite, koľko najmenej ľudí môže byť v tejto skupine. (*Mathlinks, 2006*)

4.3 Prirodzené číslo nazvime *huňaté*, ak žiadne prvočíslo v jeho rozklade nemá exponent rovný jedna. Dokážte, že existuje nekonečne veľa dvojíc po sebe idúcich prirodzených čísel, ktoré sú obe huňaté. (Napríklad $(8, 9)$ je taká dvojica.)

4.4 V rovine je nakreslený konvexný mnohouholník P aj so všetkými jeho uhlopriečkami, ktoré ho delia na menšie konvexné mnohouholníky. Vieme, že dĺžky všetkých strán aj uhlopriečok mnohouholníka P sú racionálne čísla. Ukážte, že aj všetky strany menších konvexných mnohouholníkov majú racionálne dĺžky. (*USA, 2003*)

4.5 Nech $S = \{1, 2, \ldots, 100\}$. Nájdite počet bijektívnych funkcií $f : S \to S$ takých, že pre všetky $n \in S$ platí

$$f(n) = f(g(n))f(h(n)),$$

kde $g(n)$, $h(n)$ sú (jednoznačne určené) prirodzené čísla spĺňajúce $g(n) \leqq h(n)$, $g(n)h(n) = n$ a $h(n) - g(n)$ je najmenšie možné. (*Hongkong, 2004*)

PIATA SÉRIA

5.1 Majme trojuholník ABC a nech r je os vonkajšieho uhla ABC, ďalej P a Q sú päty kolmíc z bodov A a C na priamku r. Označme M priesečník priamok CP a BA, označme N priesečník priamok AQ a BC. Ukážte že priamky MN, r a AC prechádzajú jedným bodom alebo sú navzájom rovnobežné. (*Iberoamerická MO, 2008*)

5.2 V trojuholníku ABC má vnútorný uhol pri vrchole B veľkosť $120°$. Os uhla ABC pretína stranu AC v bode M a os vonkajšieho uhla BCA pretína priamku AB v bode P. Úsečka MP pretína stranu BC v bode K. Dokážte, že uhly AKM a KPC majú rovnakú veľkosť. (*Ukrajina, 2009*)

5.3 Čísla $1, 2, 3, \ldots, 100$ sú usporiadané po obvode kruhu tak, že každé číslo je buď väčšie od svojich oboch susedov alebo je od oboch menšie. Ak vymazanie dvojice susedných čísel nenaruší túto charakteristiku, takúto dvojicu nazveme *superdvojica*. Určte najmenší možný počet superdvojíc. (*Mathlinks, 2004*)

5.4 Pre každé prirodzené číslo $n > 1$ nájdite najväčšie možné reálne číslo p také, že nerovnosť

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \geqq p(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1)$$

platí pre všetky n-tice nezáporných reálnych čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

5.5 Vrcholom pravidelného šesťuholníka sú priradené nezáporné celé čísla, ktorých súčet je 2009. Dráčik si môže vybrať jeden vrchol a jeho číslo nahradiť absolútnou hodnotou rozdielu čísel priradených susedným vrcholom. Dokážte, že konečnou postupnosťou takýchto krokov môže Dráčik dosiahnuť, že vo všetkých vrcholoch bude číslo 0. (*USA, 2003*)

ŠIESTA SÉRIA

6.1 Na reálnej číselnej osi máme daných n uzavretých intervalov, pričom $n \geqq 2$. Pre prirodzené číslo k platí $2 \leqq k \leqq n$. Medzi každými k intervalmi (z daných n intervalov) vieme nájsť dva s neprázdnym prienikom. Dokážte, že vieme zvoliť

$k-1$ reálnych čísel tak, aby každý z daných n intervalov obsahoval aspoň jedno zo zvolených čísel. (*Irán, 2007*)

6.2 Prirodzené číslo b je väčšie ako jedna. Pre kladné reálne číslo a platí $1/a + 1/b > 1$. Dokážte, že nekonečná postupnosť čísel $\lfloor a \rfloor, \lfloor 2a \rfloor, \lfloor 3a \rfloor, \ldots$ obsahuje nekonečne veľa celočíselných mocnín čísla b.

6.3 Na obrázku je nakreslených $2n+1$ priamok tak, že žiadne dve z nich nie sú rovnobežné, žiadne dve nie sú na seba kolmé a žiadne tri neprechádzajú jedným bodom. Najviac koľko ostrouhlých trojuholníkov (v závislosti od n) môže byť na obrázku? (*Maďarsko-Izrael, 1999*)

6.4 Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je definovaná rekurentne vzťahmi

$$\begin{aligned} a_1 &= 20, \\ a_2 &= 30, \\ a_{n+2} &= 3a_{n+1} - a_n \quad \text{pre } n \geqq 1. \end{aligned}$$

Nájdite všetky n, pre ktoré je $1 + 5a_n a_{n+1}$ štvorcom prirodzeného čísla. (*Balkánska MO, 2002*)

6.5 Daný je kosoštvorec $ABCD$ s vpísanou kružnicou k. Vnútri uhla BAD mimo kosoštvorca $ABCD$ leží bod P. Rovnobežka s priamkou CD prechádzajúca bodom P pretína priamku BC v bode K, rovnobežka s priamkou BC prechádzajúca bodom P pretína priamku CD v bode L. Uvažujme z bodov K a L dotyčnice ku kružnici k rôzne od priamok BC a CD. Tieto dotyčnice sa pretínajú v bode M. Dokážte, že body A, M a P ležia na priamke. (*Ján Mazák*)

Riešenia súťažných úloh KS SK MO

Prvá séria

1.1

V riešení tohto príkladu je skrytý jeden veľmi dôležitý princíp. Nemá nejaké bežné pomenovanie, ale je užitočný a jednoduchý. V mnohých úlohách je však trochu skrytý, rovnako ako v tejto.

Najprv sa dohodnime na pár pojmoch. Prvých n Chuckových ťahov nazvime *kolo*. Chuck potom opakuje dookola stále tie isté kolá. Dokážeme ešte silnejšie tvrdenie ako v zadaní. Ukážeme, že Chuck vždy skončí po konečnom počte (celých) kôl. Možno to vyzerá neprirodzene, takto sťažovať úlohu, no časom uvidíme, že bol k tomu dobrý dôvod.

Uloženie kníh po niekoľkých Chuckových kolách nazvime *stav*. Stav je určený poradím a orientáciou kníh. Chuck postupným otáčaním kníh dostane postupnosť stavov. (Po každom kole pribudne jeden člen postupnosti.) Táto postupnosť má dve veľmi dôležité vlastnosti:

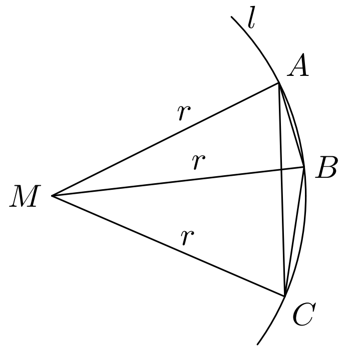
1) Každý nasledujúci stav je jednoznačne určený predchádzajúcim stavom.
2) Pre každý stav vieme jednoznačne určiť stav, z ktorého vznikol, čiže predchádzajúci stav. Dostaneme ho tým, že spravíme jedno „opačné“ kolo. Namiesto otočenia jednej, dvoch, troch, ..., n kníh, otočíme najprv n, potom $n-1$, $n-2$, ..., dve a napokon jednu knihu. Takto sa dostaneme do predchádzajúceho stavu, z ktorého náš stav vznikol. Uvedomme si, že takýto predchádzajúci stav, je jediný.

Všetkých možných stavov je len konečne veľa. (Presne $2^n n!$, ale pre riešenie túto hodnotu nepotrebujeme.) To znamená, že Chuckovi po každom kole nemôže vzniknúť vždy nový stav, ale po nejakom konečnom počte kôl dostane *po prvýkrát* nejaký stav, ktorý už dostal niekedy predtým. Označme tento stav S. Teraz ukážeme, že stav S je rovnaký ako začiatočný stav. (Chuck môže skončiť.) Dokážeme to sporom. Predpokladajme, že stav S nie je začiatočný stav. Potom z vlastnosti 2) vieme, že oba razy, keď sme dostali stav S, existuje stav S' taký, že Chuck sa do S dostal zo stavu S'. To znamená, že stav S' sa zopakoval skôr ako stav S, čo je spor s výberom S. (Lebo stav S je ten, ktorý sa po prvý raz zopakuje.) Dokázali sme teda, že Chuck sa po konečnom počte ťahov dostane do začiatočného stavu.

1.2

(Podľa *Andrey Chlebíkovej* a *Filipa Sládka*.) Budeme dokazovať sporom. Predpokladajme, že tvrdenie neplatí. Teda vieme nájsť také k, pre ktoré existuje viac ako k (neusporiadaných) dvojíc miest vzdialených od seba r. Navyše vezmime *najmenšie* k, pre ktoré existuje aspoň $k+1$ spomínaných dvojíc.

Najprv ukážeme, že tam existuje mesto M, ktoré je vzdialené aspoň od troch iných miest presne r. Totiž ak by platil opak, bolo by každé mesto vzdialené r najviac od dvoch iných miest. Miest je spolu k, preto by existovalo maximálne $2k$ usporiadaných dvojíc miest vzdialených od seba r. To nám dáva najviac k neusporiadaných dvojíc, a to je spor s tým, že ich má byť aspoň $k+1$. Máme teda zaručenú existenciu takého význačného mesta M. (Použili sme vlastne Dirichletov princíp.)

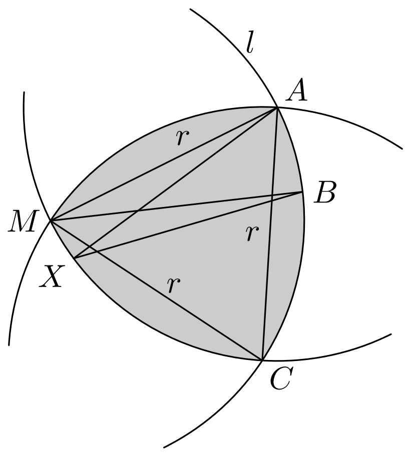


Obr. 39

Vezmime uvedené mesto M. K nemu, ako sme ukázali, určite existujú (aspoň) tri mestá A, B a C, ktoré sú od neho vzdialené presne r. Situácia vyzerá ako na obr. 39, tieto tri mestá ležia na kružnici l so stredom M a polomerom r. Navyše nech je mesto B „medzi mestami" A a C. Formálne povedané, B leží na kratšom oblúku AC kružnice l. Maximálna vzdialenosť miest A a C (ako aj ľubovoľných dvoch miest na mape) je r, bod B bude vďaka svojej polohe k týmto dvom bodom ešte bližšie. Úsečky AB a BC sú totiž kratšie tetivy kružnice l ako tetiva AC. (Ktorej maximálna dĺžka je r.)

Všimnime si mesto B. Zatiaľ o ňom vieme, že je od M vzdialené presne r a od miest A či C určite menej. Otázka znie, či vôbec môže existovať nejaké iné mesto okrem M, od ktorého by bolo B vzdialené presne r. Ak by totiž neexistovalo, mohli by sme ho z mapy vyhodiť. Dostali by sme $k-1$ miest a k dvojíc miest vzdialených od seba r. (Ubrali by sme iba jednu dvojicu (M, B).) To by odporovalo minimálnosti k a bol by to hľadaný spor. Ako ale toto pozorovanie dokázať? Označme X hľadané mesto rôzne od M a vzdialené od B presne r. Ukážeme, že takéto mesto sa na mapu nedá umiestniť.

Nakreslime kružnice s polomerom r aj okolo miest A a C. Mesto X by muselo ležať vo vnútri alebo na obvode všetkých troch kružníc, inak by bolo od jedného z ich stredov



Obr. 40

vzdialené viac, ako je dovolené. Muselo by teda ležať vo vnútri sivého útvaru určeného bodmi M, A a C (obr. 40). Ak teraz nakreslíme kružnicu s polomerom r aj okolo B, hľadané mesto X musí ležať v prieniku sivého útvaru a tejto kružnice. Situáciu trochu zjednodušíme, toto mesto X stačí hľadať v prieniku *obvodu* sivého útvaru a spomínanej kružnice. My ale dokážeme, že ich jediný prienik je mesto M. (Ktoré má byť rôzne od X.)

Spôsobov dôkazu je mnoho (napríklad analytická geometria), ukážeme azda najjednoduchší z nich. Uvažujme extrémny prípad, keď sú mestá A a C vzdialené presne r. Ak by boli k sebe bližšie, sivý útvar by bol podmnožinou pôvodného väčšieho sivého útvaru. To znamená, že ak to nepôjde v tomto extrémnom prípade, už tobôž to nepôjde, ak bude vzdialenosť A a C menšia. Mestá M, A a C teda tvoria rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky r.

Zrejme ak nájdeme vyhovujúce mesto X vo vnútri sivého útvaru, podarí sa nám to aj na jeho obvode. Stačí sa trochu posunúť po kružnici so stredom v B (ako na obr. 40). Vďaka tomu dostávame, že by muselo existovať také mesto X, ktoré by bolo vzdialené presne r nielen od mesta B, ale tiež od mesta A alebo C. (Musí ležať na jednom z im prislúchajúcich oblúkov sivého útvaru.) Bez ujmy na všeobecnosti nech je to mesto A, platí teda $|AX| = |AM| = r$ a tiež $|BX| = |BM| = r$. Keďže však body X a M ležia v tej istej polrovine určenej AB, musí platiť, že mesto X je totožné s M. Lenže my sme chceli nájsť vyhovujúce mesto X rôzne od M, čo sa kvôli tomu nedá.

Teraz sa už len vráťme k pôvodnému tvrdeniu. Jediné mesto vzdialené od B presne r je M. Preto ho spomedzi k miest môžeme odobrať, čím prídeme len o jednu dvojicu. Prejdeme k rovnakému zadaniu pre $k-1$ miest a k dvojíc, no a to je finálny spor s tým, že sme vybrali najmenšie možné k.

Poznámka. Nestačí založiť riešenie úlohy na (chybnom) úsudku, že *musí* existovať rovnostranný trojuholník miest so stranou dĺžky r. To, bohužiaľ, nie je pravda. Stačí si predstaviť pravidelný päťuholník, pričom jednotlivé dvojice miest budú jeho uhlopriečky. (To je zrejme maximálna vzdialenosť medzi mestami.) Problém je, že sa z týchto piatich bodov nedajú vybrať žiadne tri, ktoré by tvorili rovnostranný trojuholník.

1.3

(Podľa *Filipa Sládka.*) Najprv zoberme ľubovoľné prvočíslo q, ktoré delí $p^p - 1$. Zrejme p a q sú nesúdeliteľné a z Malej Fermatovej vety vieme, že $p^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$. Takže pre q platia kongruencie

$$\begin{aligned} p^p &\equiv 1 \pmod{q}, \\ p^{q-1} &\equiv 1 \pmod{q}. \end{aligned} \tag{1}$$

Zvyšky mocnín prirodzených čísel po delení prvočíslom sa správajú veľmi pekne. Jednu ich vlastnosť si zhrnieme v nasledujúcom pomocnom tvrdení.

Lema. Zoberme najmenšie $d \in \mathbb{N}$ také, že $p^d \equiv 1 \pmod{q}$. Ďalej zoberme ľubovoľné $c \in \mathbb{N}_0$ také, že $p^c \equiv 1 \pmod{q}$. Potom nutne d delí c. (Z toho potom ľahko vyplýva, že zvyšky čísel 1, p, p^2, p^3, … po delení q sa opakujú s periódou d.)

Dôkaz. Najprv si uvedomme, že keď $p^d \equiv 1 \pmod{q}$, tak aj $p^{kd} \equiv 1 \pmod{q}$. Tvrdenie dokážeme sporom. Nech existuje také $c \in \mathbb{N}_0$, pre ktoré $p^c \equiv 1 \pmod{q}$, ale predsa d nedelí c. Potom musí existovať také $t \in \mathbb{N}_0$, že $dt < c < d(t+1)$. To znamená, že

$$1 \equiv p^c \equiv p^{c-td} p^{td} \equiv p^{c-td} \pmod{q}.$$

Potom ale $d > c - td > 0$, čo je spor s výberom najmenšieho takého d.

Pre pevne zvolené p a každé prvočíslo q existuje najmenší exponent $d_q > 0$ s vlastnosťou $p^{d_q} \equiv 1 \pmod{q}$. Nech q delí $p^p - 1$. Z rovníc (1) a z lemy dostávame vzťahy

$$\begin{aligned} &d_q \mid p, \\ &d_q \mid q - 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Z (2) vyplýva, že d_q delí najmenší spoločný deliteľ p a $q - 1$, čo znamená, že $d_q = 1$ alebo $d_q = p$. Keďže zjavne $p \neq q$, vieme sa obmedziť na niekoľko prípadov.

a) Nech platí $q > p$. Ak $d_q = 1$, tak $p^1 \equiv 1 \pmod{q}$. Kvôli nerovnosti $q > p$ musí platiť $p = 1$, čo je spor. Ak $d_q = p$, tak z (2) vyplýva $p \mid q - 1$, čiže $q \equiv 1 \pmod{p}$, čo sme chceli ukázať.

b) Nech platí $q < p$. Ak $d_q = p$, tak $p \mid q - 1$, čo nemôže byť pravda, pretože $q < p$. Ak $d_q = 1$, tak $p^1 \equiv 1 \pmod{q}$, čiže $q \mid p - 1$.

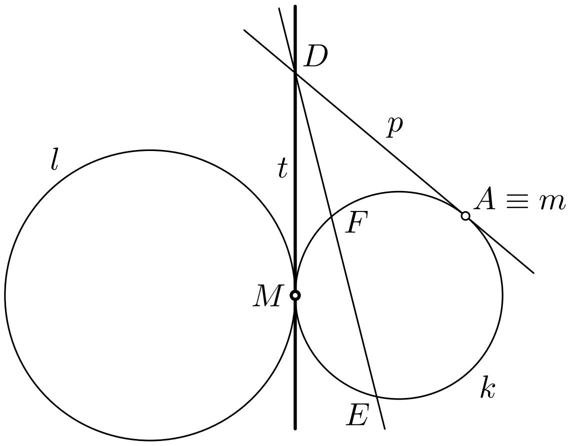
Rozobraním prípadov, sme zistili, že akonáhle $q > p$, tak q dáva zvyšok 1 po delení p. Musíme ešte ukázať, že taký veľký prvočíselný deliteľ čísla $p^p - 1$ naozaj existuje. Dokazujme sporom. Nech každý deliteľ čísla $p^p - 1$ je menší ako p. Potom z časti b) vieme, že každý deliteľ $p^p - 1$ musí deliť aj $p - 1$. Platí

$$\begin{aligned} p^p - 1 &= (p-1)(p^{p-1} + p^{p-2} + \cdots + p^1 + 1) = \\ &= (p-1)(p^{p-1} + 1 - 1 + p^{p-2} + 1 - 1 + \cdots + p^1 + 1 - 1 + 1) = \\ &= (p-1)(p^{p-1} - 1 + p^{p-2} - 1 + \cdots + p^1 - 1 + p) = \\ &= (p-1)((p-1)M + 1), \end{aligned}$$

kde M je nejaké prirodzené číslo. Činiteľ $(p-1)M + 1$ je s $p - 1$ nesúdeliteľný a preto musí existovať prvočíselný deliteľ $p^p - 1$, ktorý je nesúdeliteľný s $p - 1$. To je spor. Takže nutne existuje deliteľ $q > p$ a pre ten sme už ukázali (pri rozoberaní prípadov v časti a)), že $q \equiv 1 \pmod{p}$.

1.4

Keď nakreslíme viacero obrázkov, nadobudneme pevné presvedčenie, že hľadané body D ležia na spoločnej dotyčnici kružníc k a l vedenej bodom M. (Označme ju t.) Zamyslime sa preto, ako by sa to dalo dokázať. Označme p dotyčnicu ku k vedenú bodom A (obr. 41). Chceme vlastne dokázať, že priamky t, EF a p sa pretínajú v jednom bode. (Potom totiž nutne priesečník EF a p leží na t.) Dobre vieme, že t je chordálou kružníc k a l. Ak nájdeme tretiu kružnicu m takú, že EF je chordálou kružníc l a m a p je chordálou kružníc k a m, budeme hotoví. Vieme totiž, že tri chordály troch kružníc (ku každej dvojici kružníc jedna chordála) sa pretínajú v jednom bode. (Dôkaz tohto tvrdenia je veľmi jednoduchý. Stačí si uvedomiť, že chordála dvoch kružníc je množina bodov majúcich k nim rovnakú mocnosť.)



Obr. 41

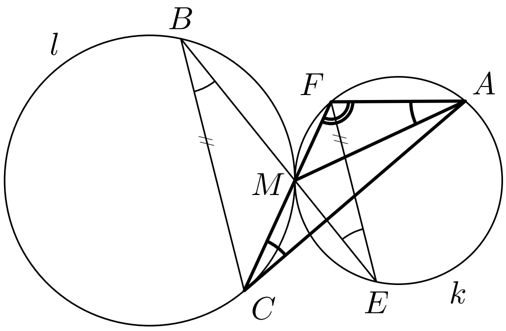
Ukážeme, že vhodnou „kružnicou“ m je bod A. (Chápaný ako kružnica zdegenerovaná do jedného bodu.) I keď to nie je klasická kružnica, všetky veci s mocnosťou fungujú. Mocnosť bodu X ku tejto „kružnici“ bude jednoducho číslo $|XA|^2$. Sami sa presvedčte, že „chordálou“ takejto zdegenerovanej kružnice a inej klasickej kružnice je tiež priamka.

Zrejme p *je* chordálou kružnice k a „kružnice“ A. (Stačí si spomenúť, že mocnosť sa počíta ako druhá mocnina vzdialenosti od dotykového bodu.)

Zostáva teda overiť, že EF je chordálou kružnice l a „kružnice“ A. Na to treba ukázať, že E aj F má ku kružnici l rovnakú mocnosť ako ku „kružnici“ A. Takže stačí odvodiť rovnosti

$$|EM| \cdot |EB| = |EA|^2 \qquad \text{a} \qquad |FM| \cdot |FC| = |AF|^2. \tag{1}$$

Začnime konečne úlohu riešiť. Uhly FAM a FEM sú obvodové k tetive FM kružnice k, sú preto rovnako veľké. Kružnice l a k sú rovnoľahlé so stredom rovnoľahlosti M. V tejto rovnoľahlosti sa trojuholník CBM zobrazí na trojuholník FEM, uhly FEM a CBM sú teda rovnako veľké. Uhol CBM je obvodový a uhol FCA je úsekový k tetive MC



Obr. 42

kružnice l, a tak aj tieto dva uhly sú rovnako veľké. Spojením predchádzajúcich troch úvah dostávame, že uhly FAM a FCA sú rovnako veľké. Trojuholníky FAM a FCA majú okrem týchto dvoch rovnako veľkých uhlov ešte spoločný uhol pri vrchole D, sú teda podobné (obr. 42). Preto platí

$$\frac{|AF|}{|FC|} = \frac{|FM|}{|AF|},$$

odkiaľ prenásobením dostaneme druhú rovnosť z (1). Zrejme prvú rovnosť z (1) dostaneme zopakovaním podobného postupu pre trojuholníky EAM a EBA.

Tým sme dokázali, že D leží na priamke t pre ľubovoľnú dovolenú polohu bodu A. Určite $D \neq M$, lebo cez M prechádza p len pre $A = M$ a taká poloha bodu A je v zadaní zakázaná. Každým iným bodom D' priamky t vieme viesť dotyčnicu p ku kružnici k (rôznu od t), ktorá sa jej dotkne v bode A neležiacom na spojnici stredov kružníc. K tomuto bodu prislúcha nejaký bod D na priamke p a už sme dokázali, že musí ležať na t. Nutne teda $D' = D$ a preto D' do hľadanej množiny bodov patrí.

Záver. Hľadanou množinou bodov je spoločná vnútorná dotyčnica kružníc k a l bez bodu M.

1.5

Táto úloha sa dá preformulovať do reči teórie grafov nasledovne. Majme neorientovaný graf G s n vrcholmi očíslovanými $1, 2, \ldots, n$, v ktorom pre každé dva vrcholy, ktoré nie sú spojené hranou, existuje iný vrchol, s ktorými sú oba spojené[22]. Graf, ktorý spĺňa túto podmienku, nazvime *dobrý*. Ak označíme a_i počet hrán vychádzajúcich z vrcholu i (stupeň vrcholu i), tak má platiť

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = n^2 - n. \tag{1}$$

Navyše $a_i < n - 1$ pre každé i. Označme $k \geqq 3$ dĺžku najmenšieho cyklu v grafe G.[23] Máme zistiť aké hodnoty môže nadobúdať k. Poďme sa pustiť do riešenia.

Najprv skúsme rozlúsknuť, čo hovoria zadané podmienky pre náš graf. Ak by sme dlhšie kreslili nejaké dobré grafy, zistili by ste, že rovnosť (1) občas platí, občas nie, no nikdy by ľavá strana nebola menšia ako $n^2 - n$. Pokúsime sa to dokázať.

Ľavá strana (1) sčítava hodnotu a_i^2 cez všetky vrcholy. Hodnotu a_i^2 vieme reprezentovať ako počet všetkých usporiadaných dvojíc vrcholov, ktoré susedia s vrcholom i. Z istých dôvodov radšej povedzme, že a_i^2 je počet usporiadaných trojíc vrcholov (u, i, v), kde u a v susedia s i. (Môže platiť $u = v$.) Takúto trojicu nazvime *sled dĺžky* 3 so stredom v bode i. Ľavá strana (1) je preto rovná počtu všetkých sledov dĺžky 3 v grafe G.

[22] Takto sa zo študentov stali vrcholy a reláciu *byť známy* sme previedli na *byť spojený hranou.*

[23] Cyklus v grafe G je konečná postupnosť rôznych vrcholov $v_1, v_2, \ldots, v_m$ taká, že $v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{m-1}v_m$ a aj v_mv_1 sú hrany v G. Dĺžka tohto cyklu je m. Je to ekvivalentné so sadaním študentov okolo okrúhleho stola.

Chceme ukázať, že tento počet nie je menší ako $n^2 - n$, čo je zhodou okolností počet usporiadaných dvojíc rôznych vrcholov v grafe G. Ako to spravíme?

Skúsime každej usporiadanej dvojici vrcholov grafu G priradiť nejaký sled dĺžky 3 tak, aby toto priradenie bolo prosté. Majme dvojicu vrcholov (i, j), $i \neq j$. Ak v grafe G existuje hrana ij, tak dvojici (i, j) priradíme sled (i, j, i). Ak v grafe G takáto hrana nie je, musí existovať vrchol (ak je ich viac, vyberme si ľubovoľný) k taký, že ik a kj sú hrany v G. Potom dvojici (i, j) priraďme sled (i, k, j). Ľahko možno dokázať, že toto priradenie je prosté. Takto sme zdôvodnili, že pre každý dobrý graf G platí

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geqq n^2 - n. \tag{2}$$

Nás zaujíma prípad, keď v nerovnosti (2) nastáva rovnosť. To je práve vtedy, keď priradenie konštruované v predošlom odseku je bijekcia. To nastane vtedy, keď sú splnené nasledovné dve podmienky:

a) Ak vrcholy $i, j, i \neq j$ sú spojené hranou, tak neexistuje vrchol k taký, že ik aj kj sú hrany v G.
b) Ak vrcholy $i, j, i \neq j$ nie sú spojené hranou, tak existuje práve jeden vrchol k taký, že ik aj kj sú hrany v G.

Za týchto predpokladov nemôže existovať v grafe G cyklus dĺžky 3 (spor s a)), ani cyklus dĺžky 4. (Spor s a) alebo s b).) Dobrý graf spĺňajúci (1) môže byť buď *les*[24], alebo má cykly dĺžky aspoň 5. Nie je ťažké dokázať, že dobrý les je *hviezda*.[25] To je ale neprípustné, pretože jeden vrchol by susedil so všetkými ostatnými, čo máme zakázané. Preto zostáva možnosť, že v G budú cykly, no najmenší z nich bude mať dĺžku aspoň 5.

Predpokladajme teraz, že dĺžka najmenšieho cyklu by bola aspoň 6. Označme jeho vrcholy zaradom v_1, v_2, …, v_m, $m \geqq 6$. Potom v_1v_4 nie je hrana v G a preto existuje w také, že v_1w a wv_4 sú hrany v G. Potom však v_1, v_2, v_3, v_4, w tvoria cyklus dĺžky 5, čo je spor s predpokladom.

Zistili sme, že k nemôže byť iné číslo ako 5. Prípad $k = 5$ naozaj môže nastať, napríklad pre graf, ktorý je cyklus na piatich vrcholoch.

DRUHÁ SÉRIA

2.1

Ako prvé si všimneme, že odťaté malé štvorsteny sú podobné štvorstenu $ABCD$. Určite nás budú zaujímať ich koeficienty podobnosti. Označme polomer vpísanej gule r a výšku z vrcholu A na stenu BCD nazvime v_A. (Analogicky v_B, v_C, v_D.) Pozrime sa na malý štvorsten, ktorý odtína rovina rovnobežná s rovinou BCD. Vzdialenosť bodu A od

[24] Les je graf, v ktorom sa nevyskytujú žiadne cykly.

[25] Hviezda je graf, v ktorom sú všetky vrcholy spojené hranou s jedným centrálnym vrcholom.

roviny, ktorou ho odtneme, je zrejme $v_A - 2r$. Z toho vieme, že koeficient podobnosti štvorstenu $ABCD$ a malého štvorstenu, ktorý obsahuje vrchol A, je

$$\frac{v_A - 2r}{v_A} = 1 - \frac{2r}{v_A}.$$

Úplne rovnakým spôsobom vyjadríme aj koeficienty podobnosti pre ostatné malé štvorsteny. Odteraz budeme pod slovom *obvod* štvorstenu myslieť súčet dĺžok jeho hrán. Ak označíme o_{ABCD} obvod štvorstena $ABCD$, potom obvod odťatých štvorstenov získame prenásobením o_{ABCD} príslušným koeficientom podobnosti. Tvrdenie, ktoré chceme dokázať, vieme zapísať aj takto:

$$2 \cdot o_{ABCD} = o_{ABCD} \cdot \left(\left(1 - \frac{2r}{v_A}\right) + \left(1 - \frac{2r}{v_B}\right) + \left(1 - \frac{2r}{v_C}\right) + \left(1 - \frac{2r}{v_D}\right) \right).$$

Po predelení obvodom $ABCD$ a malej úprave dostaneme

$$1 = \frac{r}{v_A} + \frac{r}{v_B} + \frac{r}{v_C} + \frac{r}{v_D}. \tag{1}$$

Stačí dokázať (1) a sme hotoví.

Vo výrazoch, kde vystupujú výšky a polomer vpísanej kružnice, je často nejako „zašifrovaný“ objem, preto je v takých prípadoch užitočné vyjadriť pomery dĺžok pomocou pomerov objemov. (To často vieme.) Ak označíme stred gule vpísanej štvorstenu $ABCD$ písmenom S, potom vieme štvorsten $ABCD$ rozdeliť na štyri disjunktné štvorsteny $ABCS$, $ABDS$, $ACDS$ a $BCDS$. Označme S_X obsah steny štvorstena $ABCD$, ktorá neobsahuje bod X. Obsah štvorstenu $ABCS$ potom vyjadríme (podľa známeho vzorca) ako $S_A \cdot r/3$. Podobne aj pre zvyšné tri štvorsteny. Ak objem štvorstena $ABCD$ označíme V_{ABCD}, potom zrejme

$$V_{ABCD} = \frac{S_A \cdot r}{3} + \frac{S_B \cdot r}{3} + \frac{S_C \cdot r}{3} + \frac{S_D \cdot r}{3} = \frac{(S_A + S_B + S_C + S_D) \cdot r}{3}.$$

Hodnotu V_{ABCD} vieme vyjadriť v tvare

$$V_{ABCD} = \frac{S_A \cdot v_A}{3} = \frac{S_B \cdot v_B}{3} = \frac{S_C \cdot v_C}{3} = \frac{S_D \cdot v_D}{3}.$$

Z posledných dvoch rovníc dostávame vzťah

$$r = \frac{S_X \cdot v_X}{S_A + S_B + S_C + S_D}, \tag{2}$$

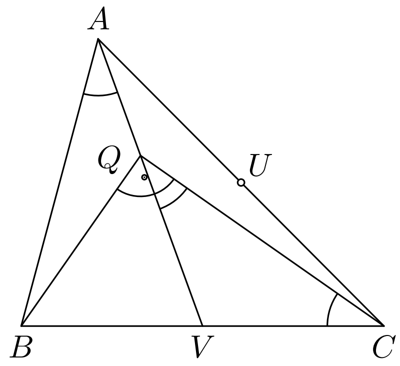
ktorý platí pre všetky $X \in \{A, B, C, D\}$. Dosadením vyjadrenia polomeru (2) (pre rôzne X) do rovnice (1) dostaneme

$$1 = \frac{S_A}{S_A + S_B + S_C + S_D} + \frac{S_B}{S_A + S_B + S_C + S_D} + \\ + \frac{S_C}{S_A + S_B + S_C + S_D} + \frac{S_D}{S_A + S_B + S_C + S_D},$$

čo je ekvivalentné rovnosti $1 = 1$. Pomocou objemov sme dokázali (1) a tým sme vyriešili pôvodnú úlohu.

2.2

Ak sa pokúsime situáciu narysovať, môžeme naraziť na problém. Bod Q spĺňajúci podmienky zo zadania totiž vo všeobecnosti nemusí vôbec existovať – dá sa nájsť len v niektorých špeciálnych trojuholníkoch. (Príkladom je trojuholník so stranami $|AB| = 6$, $|BC| = 8$ a $|AC| = \sqrt{46}$. Bod Q je umiestnený v tomto trojuholníku tak, že $|AQ| = 1$ a $|CQ| = 6$.) Z toho však ešte nijako nevyplýva, že by zadanie úlohy bolo sporné, alebo že by tvrdenie, ktoré chceme dokázať, neplatilo. V zadaní sa totiž píše, že máme už vopred daný trojuholník aj s bodom Q tak, že sú splnené všetky predpoklady – nesnažíme sa bod Q zostrojiť ani nepotrebujeme zisťovať, pre ktoré trojuholníky taký bod existuje.

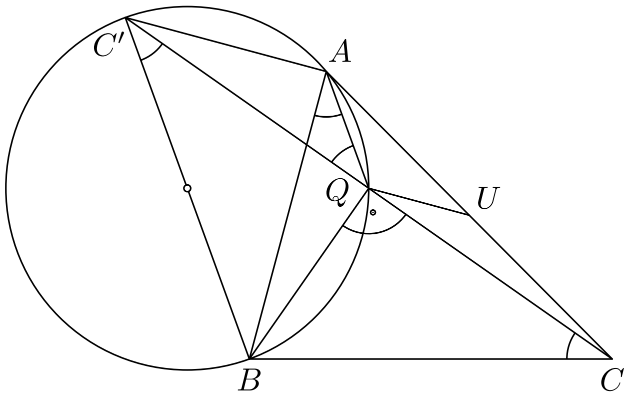


Obr. 43

Na začiatok je dobré úlohu čo najviac zjednodušiť. Všimnime si napríklad, že bod V dosť málo súvisí so zvyškom obrázku a vieme sa ho ľahko zbaviť. Je pre nás vlastne zaujímavý len z jediného dôvodu – potrebujeme dokázať, že leží na priamke AQ. To je ekvivalentné tvrdeniu, že uhol AQV je priamy. Označme α veľkosti uhlov $|\angle BAQ|$ a $|\angle BCQ|$, ktoré sú podľa zadania rovnaké. Z pravouhlého trojuholníka CQB vieme, že aj $|\angle CQV| = \alpha$ (trojuholník CQV je podľa Tálesovej vety rovnoramenný, obr. 43), teda dokazované tvrdenie je ekvivalentné rovnosti $|\angle AQC| = 180° - \alpha$. Ďalej už v dôkaze bod V nebudeme vôbec potrebovať.

Pokračovať môžeme dvoma spôsobmi. V prvom z nich sa zameriame na zadané vlastnosti uhlov. Mohli by sme sa pokúsiť postupne vyjadrovať veľkosti všetkých uhlov na obrázku, ďaleko sa však nedostaneme. Poloha uhlov BAQ a BCQ by nám mala pripomenúť vetu o obvodovom uhle. Úlohu tetivy tu hrá úsečka BQ, jediný problém je v tom, že body A a C sa nachádzajú v opačných polrovinách vzhľadom na priamku BQ. Preto skúsime bod C zobraziť v osovej súmernosti podľa BQ na bod C'. V tom, že to je dobré rozhodnutie, by nás mal podporiť fakt, že podľa zadania je pätou kolmice z bodu C na priamku BQ akoby náhodou práve bod Q. Novovzniknutý bod C' tým pádom nie je len nejakým náhodným obrazom nejakého iného náhodného bodu podľa náhodne zvolenej priamky, ale bude mať aj ďalšie dobré vlastnosti – leží spolu s bodmi

Q a C na tej istej priamke a je rovnako vzdialený od bodu Q ako bod C (obr. 44). Teraz už môžeme použiť vetu o obvodovom uhle. Podľa nej ležia body B, Q, A a C' na jednej kružnici, pretože tetive BQ náleží v bode A aj v bode C' ten istý obvodový uhol α. Teraz sa nám budú hodiť dobré vlastnosti bodu C'. Všimnime si, že úsečka QU je strednou priečkou v trojuholníku $AC'C$. Preto $|AC'| = 2|QU| = |BQ|$, teda tetivový štvoruholník $AC'BQ$ je navyše aj rovnoramenným lichobežníkom. Vďaka jeho osovej súmernosti vieme, že $|\measuredangle AQC'| = |\measuredangle QAB| = \alpha$, odkiaľ už vieme vypočítať $|\measuredangle AQC| = 180^\circ - |\measuredangle AQC'| = 180^\circ - \alpha$, čo sme chceli dokázať.



Obr. 44

Druhým z možných postupov je zamyslieť sa nad tým, prečo máme zadanú takú zvláštnu podmienku $|BQ| = 2|QU|$. Ak nás nenapadne hľadať stredné priečky trojuholníka, môžeme skúsiť úsečku QU predĺžiť na dvojnásobne dlhú úsečku QU'. Dostaneme tým rovnobežník $AQCU'$ o ktorom sa dá dokázať, že je tvorený dvoma zhodnými trojuholníkmi AQU' a $CU'Q$, ktoré sú navyše ešte zhodné s trojuholníkom AQB. Dopočítať veľkosť uhla AQC je už potom jednoduché.

2.3

(Podľa *Martina Bachratého.*) Polynóm $P(x)$ má mať 2^k-násobný koreň 1, teda existuje taký polynóm $Q(x)$, že

$$P(x) = (x-1)^{2^k} Q(x). \tag{1}$$

Sami sa presvedčte, že koeficienty polynómu $Q(x)$ sú taktiež celé čísla. Dá sa to ukázať napríklad konečnou indukciou počnúc koeficientom polynómu $Q(x)$ pri konštantnom člene. Rozpíšme, ako vyzerá faktor $(x-1)^{2^k}$ pre $k = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}
(x-1)^2 &= x^2 - 2x + 1,\\
(x-1)^4 &= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1,\\
(x-1)^8 &= x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 70x^4 - 56x^3 + 28x^2 - 8x + 1.
\end{aligned}$$

Na prvý pohľad možno nič podozrivé. Spomeňme si, že exponenty sú mocniny dvojky a zamyslime sa nad paritou koeficientov. Zdá sa, že koeficienty, až na prvý a posledný, sú všetky párne.[26] Pritom polynóm $P(x)$ má všetky koeficienty nepárne. To by nám mohlo pomôcť, no najprv zdôvodníme našu domnienku.

Lema. Pre prirodzené čísla k, m, ktoré spĺňajú $m < 2^k$, je kombinačné číslo $\binom{2^k}{m}$ párne.

Dôkaz. Budeme postupovať indukciou vzhľadom na k. Pre $k = 1$ je to jednoduché. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre nejaké $k > 0$. Dokážeme, že potom platí aj pre $k+1$. Číslo $\binom{2^{k+1}}{m}$ vieme reprezentovať ako výber m guľôčok z 2^{k+1} rôznych guľôčok. Ako využiť indukčný predpoklad? Rozdeľme si guľôčky na dve hromádky s 2^k guľôčkami. Vybrať m guľôčok spomedzi 2^{k+1} znamená vybrať l z prvej hromádky a $m-l$ z druhej. To vedie na identitu

$$\binom{2^{k+1}}{m} = \sum_{l=0}^{m} \binom{2^k}{l}\binom{2^k}{m-l},$$

kde pod výrazom $\binom{r}{s}$ myslíme 0 pre $s < 0$ alebo $s > r$. Využitím indukčného predpokladu už vidíme, že $\binom{2^{k+1}}{m}$ je párny.

Iný dôkaz. Môžeme $\binom{2^k}{m}$ prepísať pomocou faktoriálov a vyjadriť, aké najvyššie mocniny dvojky ich delia. Toto vyjadrenie síce nebudeme vedieť úplne vyčísliť (bude obsahovať celé časti), ale dá sa pomocou neho ukázať, že v prvočíselnom rozklade $\binom{2^k}{m}$ sa bude prvočíslo 2 vyskytovať aspoň raz.

K pôvodnej úlohe môžeme pristupovať sporom. Predpokladajme, že platí (1) a stupeň polynómu $Q(x)$ nie je viac ako $2^k - 2$. Vzhľadom na mnoho párnych koeficientov v polynóme $(x-1)^{2^k}$ skúsme dokázať, že $(x-1)^{2^k}Q(x)$ má tiež nejaký koeficient párny. Potom by sme dostali spor s predpokladom, pretože koeficienty $P(x)$ majú byť všetky nepárne. Ako na to?

Stačí sa pozrieť na koeficient polynómu $(x-1)^{2^k}Q(x)$ pri člene x^{2^k-1}. Ak označíme $Q(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_0$, potom je hľadaný koeficient rovný

$$\sum_{j=0}^{m} (-1)^{2^k-1-j}\binom{2^k}{2^k-1-j}a_j = \sum_{j=0}^{m}(-1)^{j+1}\binom{2^k}{j+1}a_j,$$

čo je (podľa lemy) párne číslo. Dosiahli sme spor, čím sme dokázali pôvodné tvrdenie.

Iné riešenie. (Podľa *Filipa Sládka.*) Nech polynóm $P(x)$ je stupňa n a platí (1). Zo zadania vieme, že $P(x)$ má koeficienty len 1 a -1, preto

$$|P(x)| \leqq |x^n| + |x^{n-1}| + \dots + |1| = |x|^n + |x|^{n-1} + \dots + 1 = \frac{|x|^{n+1}-1}{|x|-1}, \quad \text{pre } x \neq 1.$$

Podľa (1) teda platí

$$|x-1|^{2^k}|Q(x)| \leqq \frac{|x|^{n+1}-1}{|x|-1}. \tag{2}$$

[26] Odporúčame nakresliť prvých 10 riadkov Pascalovho trojuholníka a vyfarbiť párne čísla.

Nerovnosť (2) využijeme na odhad n. Dosaďme do (2) komplexné celé číslo $-1+i$. Keďže $|-1+i| = \sqrt{2}$ a $|-2+i| = \sqrt{5}$, dostaneme

$$(\sqrt{5})^{2^k}|Q(-1+i)| \leqq \frac{(\sqrt{2})^{n+1}-1}{\sqrt{2}-1},$$

alebo po úprave

$$5^{2^{k-1}}|Q(-1+i)| \leqq \frac{4^{\frac{n+1}{4}}-1}{\sqrt{2}-1}. \tag{3}$$

Nerovnosť (3) by nám bola nanič, ak by nastalo $|Q(-1+i)| = 0$. Dokážeme, že $P(x)$ (a teda ani $Q(x)$) nemôže mať komplexný koreň $-1+i$. Nie je ťažké zdôvodniť, že

$$\operatorname{Im}((-1+i)^z) = \begin{cases} 0 & \text{ak } 4 \mid z, \\ 2^{\frac{z}{2}} & \text{ak } 2 \mid z,\ 4 \nmid z, \\ 2^{\frac{z-1}{2}} & \text{ak } 2 \nmid z, \end{cases} \tag{4}$$

kde $\operatorname{Im}(c)$ je imaginárna časť[27] komplexného čísla c. Vieme, že

$$\operatorname{Im}(P(-1+i)) = \sum_{j=0}^{n} \pm \operatorname{Im}((-1+i)^j).$$

Vďaka (4) vieme, že spomedzi celých čísel $\operatorname{Im}((-1+i)^j)$, kde $j = 0, 1, \ldots, n$, dostaneme nepárne číslo len pre $j = 0$. Preto je imaginárna zložka komplexného celého čísla $\operatorname{Im}(P(-1+i))$ nepárna (a nenulová), čiže $-1+i$ nie je koreň polynómu $P(x)$. Takže $Q(-1+i)$ je nenulové komplexné celé číslo a preto $|Q(-1+i)| \geqq 1$. Z (3) dostávame

$$5^{2^{k-1}} \leqq \frac{4^{\frac{n+1}{4}}-1}{\sqrt{2}-1}. \tag{5}$$

Za pomoci nerovnosti (5) už ľahko nájdeme vhodný odhad na n v závislosti od k. Pre $k \geqq 3$ dokážeme, že pre platnosť (5) potrebujeme $n \geqq 2^{k+1}-1$. Ak by totiž $n < 2^{k+1}-1$, potom

$$\frac{4^{\frac{n+1}{4}}-1}{\sqrt{2}-1} < (4^{\frac{2^{k+1}}{4}}-1)(\sqrt{2}+1) < 4^{2^{k-1}}(\sqrt{2}+1) =$$
$$= 5^{2^{k-1}}\left(\frac{4}{5}\right)^{2^{k-1}-4}\left[\left(\frac{4}{5}\right)^4(\sqrt{2}+1)\right] < 5^{2^{k-1}}.$$

Tým sme dokázali úlohu pre $k \geqq 3$. Prípady $k = 1$ a $k = 2$ sa dajú riešiť osobitne, môžete si to vyskúšať sami.

[27] Pre $x, y \in \mathbb{R}$ platí $\operatorname{Im}(x+iy) = y$.

2.4

(Podľa *Filipa Sládka.*) Najskôr sa pozrime na vlastnosti danej nerovnosti, ktoré si môžeme všimnúť na prvý pohľad. Pravá strana je kladná. Ak je ľavá strana záporná, nemáme čo robiť. Preto sa zamerajme len na prípad, keď je ľavá strana nerovnosti kladná. Ak má byť súčin troch výrazov kladný, musia byť všetky tri kladné, alebo práve dva záporné.

Ak sú dva z výrazov záporné, tak v oboch výrazoch musí neznáma so záporným znamienkom nadobúdať hodnotu väčšiu ako $\frac{3}{2}$. Keďže v zadaní je dané, že všetky tri čísla sú kladné a platí $a+b+c=3$, táto situácia nastať nemôže. Preto všetky tri výrazy na ľavej strane nerovnosti budú kladné. Celú nerovnosť vieme upraviť na tvar

$$(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) \leqq a^2b^2c^2$$

použitím vzťahu $a+b+c=3$. Z kladnosti všetkých troch výrazov na ľavej strane vieme, že platí

$$a+b-c \geqq 0, \quad a-b+c \geqq 0, \quad -a+b+c \geqq 0.$$

Premenné a, b a c spĺňajú trojuholníkové nerovnosti a teda existuje trojuholník ABC, ktorý má strany s veľkosťou a, b, c. Ľavá strana nerovnosti pripomína Herónov vzorec

$$S_{ABC} = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{16}},$$

kde S_{ABC} označuje obsah trojuholníka ABC. Po malej úprave Herónovho vzorca dostaneme

$$(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) = \frac{16}{3}S^2_{\triangle ABC},$$

čo môžeme dosadiť do pôvodnej nerovnosti a získame

$$\frac{16}{3}S^2_{\triangle ABC} \leqq a^2b^2c^2. \tag{1}$$

Teraz už len stačí prepísať pravú stranu nerovnosti (1) do reči obsahov. Vieme, že pre obsah trojuholníka platí aj ďalšia rovnosť

$$S_{ABC} = \frac{abc}{4R},$$

kde R je polomer kružnice opísanej trojuholníku ABC. Po dosadení do nerovnosti (1) dostávame

$$\frac{16}{3}S^2_{ABC} \leqq 16R^2S^2_{ABC},$$

$$\sqrt{\frac{1}{3}} \leqq R. \tag{2}$$

Ak by sme vedeli, že nerovnosť (2) platí, tak by platila aj pôvodná nerovnosť. Skúsme preto dokázať, že (2) platí. Dokážeme to sporom.

Predpokladajme, že $R < 1/\sqrt{3}$ Môžeme sa pozrieť, čo sa stane, ak si na kružnici s polomerom R zvolíme body A a B pevné. Bod C sa môže pohybovať po kružnici akokoľvek. Ľahko odvodíme, že pre súčet veľkostí strán trojuholníka platí (pri štandardnom označení)

$$|AB| + 2R(\sin(\alpha) + \sin(180^\circ - \gamma - \alpha)),$$

pričom $|AB|$ je konštanta a taktiež aj γ je konštanta, pretože je to obvodový uhol k tetive AB. Preto danú funkciu premennej α môžeme zderivovať a tak nájsť jej extrém. Takto zistíme, že maximum sa nadobúda práve vtedy, keď $\alpha = \beta$. Analogicky vieme dostať $\alpha = \gamma$ a $\beta = \gamma$. Teda maximum sa nadobúda keď je trojuholník ABC rovnostranný.

V takomto trojuholníku platí, že $R = (a+b+c)/(3\sqrt{3})$ a teda $3 > a+b+c$, čo je spor so zadaním. Preto musí platiť $1/\sqrt{3} \leqq R$ a teda je splnená aj pôvodná nerovnosť.

2.5

Keď máme dokázať neexistenciu 40-člennej postupnosti s dosť netriviálnou vlastnosťou, vypisovanie malých prípadov nám najskôr nepomôže. Musíme k úlohe pristúpiť „globálnejšie“. Určite je vhodné zamyslieť sa nad zvyškami po delení malými prvočíslami. Možno aj taká cesta vedie k úplnému riešeniu. Keď „zlyhá“ modulárna aritmetika, skúsime niečo iné. Čísla tvaru $2^n + 3^m$ sa medzi prirodzenými číslami nachádzajú relatívne riedko. Túto vlastnosť využíva aj riešenie ktoré uvedieme.

Ľubovoľnú aritmetickú postupnosť štyridsiatich rôznych prirodzených čísel vieme zapísať v tvare a, $a+d$, $a+2d$, $\dots$, $a+39d$, kde $a > 0$, $d > 0$ sú prirodzené čísla. (Ak by bola tá postupnosť klesajúca, obrátime poradie a nič tým nepokazíme.) Množinu $\{0, 1, 2, \dots, 39\}$ označme M. Tvrdenie zo zadania dokážeme sporom. Predpokladáme, že pre každé $k \in M$ existujú nezáporné celé čísla u_k, v_k také, že

$$a + kd = 2^{u_k} + 3^{v_k}.$$

Označme

$$r = \lfloor \log_2(a+39d) \rfloor, \qquad s = \lfloor \log_3(a+39d) \rfloor.$$

Zrejme musí platiť $u_k \leqq r$, $v_k \leqq s$ pre všetky $k \in M$. Sporom ukážeme, že ak $k \in M$ a $k \geqq 26$, tak navyše platí $(r - u_k)(s - v_k) \leqq 1$.[28] Predpokladajme, že existuje $k \in M$, $k \geqq 26$, pre ktoré platí nerovnosť $(r - u_k)(s - v_k) > 1$. Potom určite nastane aspoň jedna z nasledujúcich možností:

a) $r - u_k \geqq 2$ a zároveň $s - v_k \geqq 1$. Potom

$$a + kd = 2^{u_k} + 3^{v_k} \leqq 2^{r-2} + 3^{s-1} \leqq \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)(a + 39d) < a + 26d \leqq a + kd.$$

[28] Inak povedané, ak je k dosť veľké, tak sa nemôže exponent u_k resp. v_k veľmi líšiť od exponentu r resp. s.

b) $r - u \geqq 1$ a a zároveň $s - v_k \geqq 2$. Potom

$$a + kd = 2^{u_k} + 3^{v_k} \leqq 2^{r-1} + 3^{s-2} \leqq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{9}\right)(a + 39d) < a + 26d \leqq a + kd.$$

V oboch prípadoch sme sa dostali do sporu, čím sme pomocné tvrdenie dokázali. Teraz je už zrejmé, že pre všetky $k \in M$, $k \geqq 26$ nastáva jedna z možností

$$1)\ u_k = r, \qquad 2)\ v_k = s, \qquad 3)\ u_k = r - 1 \text{ a zároveň } v_k = s - 1,$$

pričom tretia možnosť môže nastať nanajvýš pre jedno z uvažovaných k. Množina $\{26, 27, \dots, 39\}$ má 14 prvkov, teda buď prvá alebo druhá možnosť nastane aspoň pre 7 z nich. To nás opäť vedie k rozobraniu dvoch prípadov. Ako uvidíme, oba zavŕšime sporom.

a) V aritmetickej postupnosti $a+26d, a+27d, \dots, a+40d$ sa nachádza aspoň 7 členov, ktoré vieme napísať v tvare $2^r + 3^m$ pre nejaké celé číslo $m \geqq 0$. Ak od každého člena postupnosti odčítame 2^r, tak dostaneme aritmetickú postupnosť dĺžky 14 s diferenciou d, ktorá obsahuje aspoň 7 mocnín trojky, nech sú to $3^{m_1} < 3^{m_2} < \dots < 3^{m_7}$. Potom však

$$13d \geqq 3^{m_7} - 3^{m_1} > 3^{m_7} - 3^{m_2} = (3^{m_7 - m_2} - 1)3^{m_2} > (3^5 - 1)(3^{m_2} - 3^{m_1}) > 13d,$$

čo je spor.

b) V aritmetickej postupnosti $a + 26d, a + 27d, \dots, a + 40d$ sa nachádza aspoň 7 členov, ktoré vieme napísať v tvare $2^n + 3^s$ pre nejaké celé číslo $n \geqq 0$. Ak od každého člena postupnosti odčítame 3^s, tak dostaneme aritmetickú postupnosť dĺžky 14 s diferenciou d, ktorá obsahuje aspoň 7 mocnín dvojky, nech sú to $2^{n_1} < 2^{n_2} < \dots < 2^{n_7}$. Potom však

$$13d \geqq 2^{n_7} - 2^{n_1} > 2^{n_7} - 2^{n_2} = (2^{n_7 - n_2} - 1)2^{n_2} > (2^5 - 1)(2^{n_2} - 2^{n_1}) > 13d,$$

čo je opäť spor.

V každej vetve sme sa dostali do sporu, čím sme pôvodné tvrdenie dokázali.

Tretia séria

3.1

Dosadením $y = 0$ získame

$$f\left(x^2 + f(0)\right) = x^2 f(x),$$

z čoho vidno, že funkcia f musí byť párna. Totiž prípad $x = 0$ nás pri skúmaní parity trápiť nemusí a pre $x \neq 0$ platí

$$f(x) = \frac{f\left(x^2 + f(0)\right)}{x^2} = \frac{f\left((-x)^2 + f(0)\right)}{(-x)^2} = f(-x).$$

Teraz urobíme ďalšie dve dosadenia $x = a$, $y = b$ a $x = -a$, $y = b$ pre nejaké reálne čísla a, b. Dostaneme

$$f\left(a^2 + f(b)\right) = (a-b)^2 f(a+b),$$
$$f\left((-a)^2 + f(b)\right) = f\left(a^2 + f(b)\right) = (-a-b)^2 f(-a+b) = (a+b)^2 f(-a+b).$$

Vidíme, že ľavé strany týchto dvoch rovností sa rovnajú, musia sa teda rovnať aj pravé. Preto

$$(a-b)^2 f(a+b) = (a+b)^2 f(-a+b) = (a+b)^2 f(a-b),$$

pričom druhá rovnosť platí vďaka párnosti f. Môžeme si všimnúť, že v tejto rovnosti vystupujú rovnaké členy, zavedieme preto substitúciu $a - b = c$, $a + b = d$. (Zrejme ku každej dvojici c, d existuje vhodná dvojica a, b, pre ktorú platí $a - b = c$, $a + b = d$.) Dostávame tak nový (omnoho jednoduchšie vyzerajúci) vzťah $c^2 f(d) = d^2 f(c)$, ktorý musí platiť pre ľubovoľné reálne čísla c a d. Aby sme situáciu ešte viac zjednodušili, položíme $d = 1$, odkiaľ

$$f(c) = c^2 f(1). \tag{1}$$

Dostali sme už celkom dobrý tvar hľadanej funkcie, zostáva už len zistiť konštantu $f(1)$. Tá sa už zistí pomerne ľahko, stačí tento nájdený tvar dosadiť do zadania a chvíľu upravovať trochu nepekné výrazy. Omnoho krajšie je dosadzovať do „upraveného“ zadania, a to tak, že v ňom položíme $x = y$, čím získame vzťah $f\left(x^2 + f(x)\right) = 0$. Použitím (1) dostávame

$$f\left(x^2 + f(x)\right) = \left(x^2 + f(x)\right)^2 f(1) = \left(x^2 + x^2 f(1)\right)^2 f(1) = x^4\left(1 + f(1)\right) f(1) = 0.$$

Táto rovnosť má platiť pre všetky reálne čísla x, preto je z nej ľahké zistiť, že buď $f(1) = 0$ alebo $f(1) = -1$. Dostávame dve *možné* riešenia $f(x) = 0$ a $f(x) = -x^2$. Zatiaľ ale nie je zaručené, že sú to naozaj riešenia, my zatiaľ vieme iba to, že sú to *možné* riešenia. Preto je potrebné urobiť skúšku správnosti. Po nej zistíme, že obe nájdené funkcie vyhovujú rovnosti zo zadania.

3.2

(Podľa *L. Bača, M. Hagaru, J.Konečného* a *M. Kukana.*) Riešenie sa skladá z dvoch krokov. Najprv ukážeme, že

$$a + b + c + d \leqq 4 \tag{1}$$

a potom dôkaz dokončíme úpravou na štvorec. (Alebo aj inak.) Ukážeme tri dôkazy nerovnosti (1), a to použitím priemerových nerovností AG[29], AK[30] a Cauchyho nerovnosti[31].

a) Z AG nerovnosti pre kladné členy a^2 a 1 vieme, že $a^2+1 \geqq 2a$, čo sa dá zistiť samozrejme aj jednoduchou úpravou na štvorec. Podobné nerovnosti platia aj pre b, c, aj d, po sčítaní týchto štyroch nerovností dostávame

$$a^2+b^2+c^2+d^2+4 \geqq 2(a+b+c+d).$$

Dosadením väzby dostaneme nerovnosť (1).

b) Z AK nerovnosti pre kladné členy a, b, c, d máme

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2}} \geqq \frac{a+b+c+d}{2}.$$

Dosadením väzby a úpravou opäť dostávame (1).

c) Uvažujme štvoricu a, b, c, d a štvoricu štyroch jednotiek. Podľa Cauchyho nerovnosti platí

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(1^2+1^2+1^2+1^2) \geqq (a+b+c+d)^2.$$

Odmocnením opäť dostávame nerovnosť (1).

Úlohu doriešime sporom. Predpokladajme, že nerovnosť v zadaní neplatí, teda

$$a+b+c+d < ab+bc+cd+da. \tag{2}$$

Keď vynásobíme ľavé a pravé strany nerovností (1) a (2), dostaneme

$$(a+b+c+d)^2 < 4(ab+bc+cd+da).$$

---

29 AG nerovnosť alebo aj nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom hovorí, že pre nezáporné reálne čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ platí

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

Rovnosť nastáva práve vtedy, keď $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

30 AK nerovnosť alebo aj nerovnosť medzi aritmetickým a kvadratickým priemerom hovorí, že pre nezáporné reálne čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ platí

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \leqq \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}{n}}.$$

Rovnosť nastáva práve vtedy, keď $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

31 Cauchyho nerovnosť tvrdí, že pre reálne čísla $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ platí

$$(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2) \geqq (a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n)^2.$$

Rovnosť nastáva v prípade, že vektory $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ a $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ sú rovnobežné. (Jeden je násobkom druhého.)

Všimnime si, že pravá strana tejto nerovnosti sa dá napísať ako $4(a+c)(b+d)$ a ľavá sa dá upraviť na $((a+c)+(b+d))^2$, čiže posledná nerovnosť je ekvivalentná s nerovnosťou

$$((a+c)+(b+d))^2 < 4(a+c)(b+d).$$

To nabáda k substitúcii $a+c=x$ a $b+d=y$, kde x a y sú kladné. Dostávame nerovnosť $(x+y)^2 < 4xy$, ktorá je ekvivalentná s $(x-y)^2 < 0$, čo je zrejme spor. Dokázali sme, že nerovnosť v zadaní platí.

Poznámka. Namiesto sporu sme v poslednom kroku mohli priamo využiť AH nerovnosť[32]

$$\frac{(a+c)(b+d)}{2} \geqq \frac{2}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}},$$

pričom vieme, že $a+b+c+d \leqq 4$, takže máme

$$2 \geqq \frac{2}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}},$$

čo môžeme upraviť na nerovnosť v zadaní. Rovnosť zrejme platí pre $a=b=c=d=1$.

3.3

Pripomeňme si niekoľko známych vlastností spojitých funkcií. Predpokladajme, že $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sú spojité funkcie a c je ľubovoľné reálne číslo. Potom platí:

a) Funkcie $f+g$, cf sú taktiež spojité funkcie.
b) Funkcia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná predpisom $h(x) = g(x+c)$ je tiež spojitá.
c) Ak $a < b$ sú reálne čísla a $f(a) < f(b)$ (resp. $f(b) > f(a)$), potom funkcia f nadobúda na intervale $\langle a, b\rangle$ všetky hodnoty z intervalu $\langle f(a), f(b)\rangle$ (resp. $\langle f(b), f(a)\rangle$).

Predpokladajme, že funkcia f spĺňa podmienku zo zadania. Potom zadaniu vyhovuje aj funkcia $f+c$ pre ľubovoľné reálne číslo c. Preto stačí nájsť všetky spojité funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktoré spĺňajú predpoklady zo zadania a navyše pre ne platí $f(0) = 0$. (Kompletnú množinu vyhovujúcich funkcií potom získame tak, že k nájdeným ešte pričítame ľubovoľné reálne konštanty.)

Predpokladajme, že funkcia f vyhovuje zadaniu a $f(0) = 0$. Nech $q \neq 0$ je racionálne číslo a funkciu $g_q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definujme vzťahom $g_q(x) = f(x+q) - f(x)$. Keďže $(x+q) - x = q$ je racionálne číslo, podľa predpokladu je aj $f(x+q) - f(x) = g_q(x)$ racionálne. Preto funkcia g_q nadobúda len racionálne hodnoty. Ďalej podľa vlastností a) a b) je funkcia g_q spojitá. To už začína vyzerať podozrivo. Máme spojitú funkciu, ktorá nadobúda len racionálne hodnoty. (Nenadobúda žiadne iracionálne.) Za pomoci

---

[32] AH nerovnosť alebo aj nerovnosť medzi aritmetickým a harmonickým priemerom hovorí, že pre kladné reálne čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ platí

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}.$$

Rovnosť nastáva práve vtedy, keď $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

vlastnosti c) ľahko ukážeme, že g_q musí byť konštantná. Ak totiž $g_q(a) \neq g_q(b)$ pre reálne čísla $a \neq b$, potom vlastnosť c) hovorí, že g_q nadobúda všetky hodnoty nejakého intervalu. No my vieme, že v ľubovoľnom intervale sa nachádza aspoň jedno iracionálne číslo, čo je spor.

Označme $f(1) = d$. Zrejme d je racionálne ($1 - 0 \in \mathbb{Q}$, preto aj $f(1) - f(0) = f(1) \in \in \mathbb{Q}$). Teraz dokážeme, že $f(r) = rd$ pre každé racionálne číslo r. Budeme postupovať v niekoľkých krokoch.

1) Pre každé prirodzené číslo n platí $f(1/n) = d/n$. Dôkaz môže prebiehať napríklad takto:

$$\begin{aligned} f(1) - f(0) &= \left[f\left(\frac{n}{n}\right) - f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right] + \left[f\left(\frac{n-1}{n}\right) - f\left(\frac{n-2}{n}\right)\right] + \cdots \\ &\qquad \cdots + \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{0}{n}\right)\right], \\ d &= g_{\frac{1}{n}}\left(\frac{n-1}{n}\right) + g_{\frac{1}{n}}\left(\frac{n-2}{n}\right) + \cdots + g_{\frac{1}{n}}\left(\frac{0}{n}\right), \\ d &= n g_{\frac{1}{n}}(0) = n\left[f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)\right], \\ d &= nf\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

V tretej rovnosti sme využili, že funkcia $g_{1/n}$ je konštantná. Ďalšie časti už nebudeme robiť tak podrobne.

2) Pre každé kladné racionálne číslo m/n platí $f(m/n) = dm/n$.
3) Pre každé racionálne číslo q platí $f(q) = dq$.

Zistili sme, že funkcia f sa správa lineárne na racionálnych číslach, teda $f(q) = dq$ pre $q \in \mathbb{Q}$. Teraz si stačí uvedomiť, že ak by $f(x) \neq dx$ pre nejaké iracionálne číslo x, funkcia f by v bode x nebola spojitá. Je to dôsledok toho, že racionálne čísla sú *husté* v množine reálnych čísel a teda v ľubovoľnej blízkosti čísla x nájdeme racionálne číslo q, pre ktoré však platí $f(q) = dq$. Tým sme dokázali, že funkcia f má tvar $f(x) = dx$.

Na začiatku sme pridali predpoklad $f(0) = 0$. Preto hľadané funkcie môžu byť len tvaru $f(x) = dx + c$ pre nejaké $d \in \mathbb{Q}$, $c \in \mathbb{R}$. Ľahko overíme, že takéto funkcie vyhovujú zadaniu. Tým je úloha vyriešená.

3.4

Predstavme si planétu M v tvare ľubovoľného mnohostena. Celá planéta je porastená nepriechodnou džungľou mrakodrapov, akurát pozdĺž hrán mnohostena vedú ulice – jednosmerky. Pre cestnú sieť planéty M platí, že z každej križovatky (vrcholu mnohostena) vychádza aspoň jedna jednosmerka a aspoň jedna jednosmerka do nej vchádza. Dokázať chceme fakt, že existuje na planéte blok mrakodrapov (stena mnohostena), ktorý sa dá celý súvisle obísť dokola.

Na jednej z križovatiek pristál Malý Princ a vybral sa na prechádzku. Okamžite sa riešiteľovi tejto úlohy, ponúka nasledovná úvaha. Zo zadania vyplýva, že ak Malý

Princ príde na ktorúkoľvek križovatku, vie z nej pokračovať inou jednosmerkou ďalej. Križovatiek je konečný počet a tak skôr či neskôr príde do takej, v ktorej už raz bol. Zoznam ulíc, ktoré Malý Princ prešiel medzi prvou a druhou návštevou tejto križovatky nazvime Veľký Orientovaný Cyklus. (Skrátene VOC.) Tento VOC je vlastne hranicou, ktorá rozdeľuje planétu M na dva VÚC. (Rozumej vyššie územné celky.) Pozrime sa teraz bližšie na ten VÚC, ktorý mal Malý Princ, chodiac po VOC, celý čas po pravej ruke. Ak obsahuje len jeden blok mrakodrapov, tvrdenie v zadaní je splnené. Ak obsahuje blokov viac, vie Malý Princ svoj VOC vylepšiť nasledovne.

Za predpokladu, že existuje z aktuálneho VOC jednosmerka doprava, pôjde Malý Princ po nej a bude pokračovať ďalej ľubovoľne, no v prikázanom smere jazdy, až kým nepríde naspäť von na VOC, alebo na križovatku vo vnútrozemí, na ktorej už raz bol. V oboch prípadoch vznikne Vylepšený Orientovaný Cyklus (skrátene VOC), ktorý nepresiahne za hranicu, čiže za pôvodný VOC. Napravo od nového VOC bude teda menšia oblasť, ako bola napravo od pôvodného VOC, čiže oblasť s menším počtom blokov.

Ak predchádzajúci predpoklad nie je splnený (teda *všetky ulice medzi hranicou VOC a vnútrozemím napravo smerujú von*), tak sa Malý Princ z VOC do vnútrozemia ani nedostane. Vtedy vytiahne z krabičky Ovečku a pošle ju do vnútrozemia s príkazom aby sa pohybovala vždy proti prikázanému smeru až kým nenájde cyklus. Vylepšený Orientovaný Cyklus nájdený Ovečkou bude celý vo vnútrozemí (premyslite si prečo) a teda bude ohraničovať opäť menšie územie ako pôvodný VOC. Problém dopravenia sa do vnútrozemia na nový Ovečkin VOC je pre Malého Princa vzhľadom na jeho dlhú prax pilota skutočne už len technický detail.

Na základe tohto algoritmu sa dá ukázať, že ak sú napravo od pôvodného VOC nejaké ulice, tak existuje Vylepšený Orientovaný Cyklus ohraničujúci menší počet blokov ako aktuálny VOC. Postupne dostaneme aj taký VOC, ktorý nemá žiadnu ulicu napravo, takže VOC ohraničujúci práve jeden blok mrakodrapov.

3.5

Uvedieme dve riešenia, ktoré budú pozostávať z postupnosti krokov, pričom dôkazy čiastkových tvrdení necháme na čitateľa. V prvom riešení chýba záver (nechali sme na vás poslednú časť, ktorá sa dá zvládnuť napr. trigonometriou). Druhé riešenie je v podstate kompletné. (Treba sa potrápiť len s detailmi.)

1) Bez ujmy na všeobecnosti nech $|AB| > |AC|$. Označme O resp. O' stred opísanej kružnice trojuholníku ABC resp. ADE. Ďalej nech A' je priesečník osi uhla BAC s opísanou kružnicou trojuholníku ABC rôzny od A. Označme A'' resp. A''' priesečník AH resp. AO s opísanou kružnicou trojuholníku ABC rôzny od A.

2) Dokážeme, že A' je stred oblúka BC (na kružnici opísanej trojuholníku ABC), ktorý neobsahuje bod A. To je ekvivalentné tomu, že body M, O a A' ležia na jednej priamke, alebo, že uhol CMA' je pravý.

3) Dokážeme, že úsečka BC rozpoľuje úsečku HA''.

4) Dokážeme, že body A'' a A''' sú osovo súmerné podľa priamky OA'. (Napríklad porovnaním uhlov $A''OA'$ a $A'''OA'$.)

5) Za pomoci 4) a 5) usúdime, že body A'', M a H ležia na jednej priamke. Túto informáciu vieme využiť k rôznym ekvivalentným formuláciám riešenia. V nasledujúcom kroku uvedieme jedno z nich.

6) Označme N priesečník AA' a MH. Rovnobežnosť OO' a MH je potom ekvivalentná s rovnobežnosťou OO' a $A''N$. Tieto dve priamky sú však rovnobežné práve vtedy keď $|AO|/|AA''| = |AO'|/|AN|$ (rovnoľahlosť). Zrejme však $|AO|/|AA''| = \frac{1}{2}$, preto stačí dokázať, že $|AO'|/|AN| = \frac{1}{2}$ alebo $2|AO'| = |AN|$.

Iné riešenie. Opäť predpokladáme $|AB| > |AC|$ a označíme body O, O', A'' ako v prvom riešení. Pokúsime sa nájsť vhodnú priamku, na ktorú budú kolmé obe priamky OO' aj MH.

1) Najprv uvažujme len priamku OO'. Označme R priesečník kružníc opísaných trojuholníkom ABD a ADE rôzny od A. (Ten priesečník existuje vďaka $|AB| \neq |AC|$.) Priamka OO' je kolmá na chordálu kružníc opísaných trojuholníkom ABC a ADE, teda OO' je kolmá na AR.

2) Nakreslíme nový obrázok, ale tentoraz úplne vynecháme body D, E, O' a kružnicu opísanú trojuholníku ADE. Označme postupne päty kolmíc z bodov B, C na strany AC, AB písmenami B'', C''. Ukážeme, že kružnica opísaná trojuholníku $AB''C''$ má s kružnicou opísanou trojuholníku ABC priesečník P rôzny od A, ktorý bude v polrovine opačnej k ACB.

3) V danej situácii je viacero tetivových štvoruholníkov. Môžeme začať jednoduchými (až triviálnymi) ako $ABCP$, $BCB''C''$, či $AC''HB''$. Pomocou nich vieme ukázať, že aj $MCPC''$ je tetivový. Potom môžeme napísať $|\measuredangle MPA| = |\measuredangle MPC''| + |\measuredangle C''PA|$ a pomocou toho ukázať, že uhol MPA je pravý. Z toho vyvodíme, že bod H leží na úsečke MP.

4) Priamka OO' je kolmá na tetivu AR a MH je kolmá na tetivu AP. Jediná šanca, aby platilo tvrdenie zo zadania je, ak AP a AR sú rovnobežné. To nastane práve keď body P a R sú totožné. Stačí už len ukázať, že $P = R$.

5) Dokážeme, že body A, D, E, R ležia na kružnici (čo zaručí $P = R$).

6) Postupne dokážeme podobnosti trojuholníkov $HC''B$ a $HB''C$, HDC'' a HEB''. Pomocou pomerov a uhlov zistíme, že aj trojuholníky RBC'' a RCB'' sú podobné. Skombinovaním týchto výsledkov zase dostaneme, že trojuholníky RDC'' a REB'' sú podobné, z čoho už máme zaručené $|\measuredangle RDC''| = |\measuredangle REB''|$, teda aj $|\measuredangle RDA| = |\measuredangle REA|$, z čoho vieme, že $ADER$ je tetivový štvoruholník.

7) Krokom 6) sme dokázali, že $P = R$, čo podľa kroku 5) stačí k tomu, aby MH a OO' boli rovnobežné. Tým sme tvrdenie dokázali.

ŠTVRTÁ SÉRIA

4.1

Postupnosť reálnych čísel je *geometrická*, ak podiel každých dvoch po sebe nasledujúcich členov je rovnaký. Tento podiel (označme ho q) sa nazýva kvocient. Postupnosť a_1, a_2, a_3, a_4, ... je geometrická s kvocientom q, ak

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots$$

Pri takejto definícii predpokladáme, že každý člen geometrickej postupnosti musí byť nenulový a teda aj $q \neq 0$.

Správny nápad je vyjadriť každý člen geometrickej postupnosti pomocou prvého člena a kvocientu, napríklad

$$a_{10} = qa_9 = q^2 a_8 = \ldots = q^9 a_1.$$

Ak a_{10} aj a_1 sú prirodzené, tak $q^9 = a_{10}/a_1$ je kladné racionálne (zlomok). Podobne aj $a_{30} = q^{29} \cdot a_1$ a aj q^{29} je kladné racionálne číslo. Poďme sa bližšie pozrieť na kladné racionálne čísla. Súčet, súčin aj podiel kladných racionálnych čísel je kladné racionálne číslo. Na čo je nám táto vlastnosť? Ak q^{29} a q^9 sú kladné racionálne tak je kladné racionálne aj $q^{29}/q^9 = q^{20}$. Rovnako je aj $q^{20}/(q^9q^9) = q^2$ kladné racionálne a potom aj $q^9/(q^2q^2q^2q^2) = q$ je kladné racionálne číslo. Takže q sa dá zapísať ako m/n, kde m a n sú kladné celé nesúdeliteľné čísla.

Vieme, že

$$a_{30} = a_1 q^{29} = \frac{a_1 m^{29}}{n^{29}}.$$

Keďže m a n sú nesúdeliteľné, musí n^{29} deliť a_1. Z toho vidíme, že

$$a_1 = k \cdot n^{29} = (k \cdot n^{10})n^{19}$$

pre nejaké prirodzené k. A konečne

$$a_{20} = \frac{a_1 m^{19}}{n^{19}} = \frac{kn^{29}m^{19}}{n^{19}} = kn^{10}m^{19}$$

a to je súčin prirodzených čísel, preto aj a_{20} je prirodzené číslo.

4.2

Zabudnime na všetkých iných ľudí a uvažujme len o skupine ľudí obľubujúcich konzumáciu horaliek po šírke (označme množinu týchto ľudí H) a vzťahoch medzi nimi. Všimnime si Busa, ktorý, ako vieme zo zadania, obľubuje jedenie horaliek po šírke. O Busovi vieme povedať, že určite pozná aspoň dvoch iných vedúcich s touto vlastnosťou. Prečo? Okrem Busa sú v skupine aspoň štyria ďalší vedúci. Ak by všetkých poznal, tak pozná aspoň štyroch ľudí. Ak by niekoho spomedzi ostatných nepoznal, musí s ním mať práve dvoch spoločných známych a teda opäť Bus pozná aspoň dvoch členov skupiny.

Označme P skupinu ľudí, ktorých Bus pozná a N, ktorých Bus nepozná. V skupine P sa žiadni dvaja vedúci nemôžu poznať, pretože majú spoločného známeho Busa. Takže ľubovoľní dvaja vedúci z P majú práve dvoch spoločných známych. Jedným takýmto spoločným známym je Bus, druhý teda musí byť z N.

Ak vyberieme dve rôzne dvojice z P, tak spoločný známy prvej dvojice v N nemôže byť ten istý človek ako spoločný známy druhej dvojice v N, pretože by s ním mal Bus aspoň troch spoločných známych. Preto ku každej dvojici v P musí v N existovať človek, ktorý pozná v P iba danú dvojicu a nikoho iného. Keď označíme k počet ľudí v P, potom počet dvojíc ľudí z P je $\binom{k}{2}$ a teda v N musí byť aspoň $\binom{k}{2}$ ľudí.

Predstavme si situáciu, že by v N bolo viac ako $\binom{k}{2}$ ľudí. Keďže nik z N nepozná Busa, tak musí mať každý z N s Busom spoločných práve dvoch známych. Títo dvaja budú určite z P a teda každý človek z N pozná práve dvoch ľudí z P. Ak je ľudí v N viac ako $\binom{k}{2}$, tak z Dirichletovho princípu nutne niektorí dvaja z N poznajú rovnakú dvojicu z P. To už je spor, lebo táto dvojica z P by mala troch spoločných známych. Preto v N musí byť presne $\binom{k}{2}$ ľudí.

Už sme niekoľkokrát využili fakt, že ľudia v H sa delia na ľudí, ktorí Busa poznajú, ľudí, ktorí Busa nepoznajú a samotného Busa. Ukázali sme, že ich je spolu $1+k+\binom{k}{2}$. Všimnime si, že ak by sme na začiatku zvolili iného vedúceho ako Busa (napríklad v zadaní spomínaného Fofa) a označili počet jeho známych l, tak by sme dostali, že H má $1+l+\binom{l}{2}$ členov. Potom ale musí platiť $l=k$, teda každý vedúci pozná rovnako veľa ľudí.

A sme znovu pri Busovi. Takže, Bus pozná k vedúcich z P a nepozná $\binom{k}{2}$ vedúcich z N. Zároveň každý vedúci z P pozná Busa a ďalších $k-1$ vedúcich z N, čo je spolu očakávaných k. Ostávajú nám vedúci v N. Každý z nich pozná zatiaľ práve dvoch vedúcich v P. Busa nepoznajú a teda musí každý z nich poznať práve $k-2$ iných vedúcich z N. Zároveň dvaja vedúci z N, ktorí majú spoločného známeho v P, sa poznať nemôžu. Teda vedúci z N môže poznať iba takého vedúceho z N, ktorý nepozná ani jedného z jeho známych v P. Takých vedúcich v N je toľko, koľko je dvojíc medzi $k-2$ vedúcimi z P a to je $\binom{k-2}{2}$. Preto, aby každý vedúci z N mohol poznať k vedúcich, musí platiť $\binom{k-2}{2}+2 \geqq k$, z čoho vyplýva $k \geqq 5$ (alebo $k \leqq 2$, ale vtedy je počet vedúcich menej ako päť).

Pre $k=5$ sú pre každého z N práve tri možnosti, koho z N môže poznať a zároveň každý z N musí poznať práve troch z N. Preto je jednoznačne určené, kto musí koho poznať. Teraz stačí overiť, či si niektoré známosti neodporujú so zadaním. Ak nie, tak sme vyhrali, pretože sme ukázali, že vedúcich môže byť najmenej $1+5+\binom{5}{2}=16$ a zároveň, že ich 16 byť môže.

O známostiach medzi Busom a P, vnútri P a medzi Busom a N sme už ukázali, že sú v súlade so zadaním. Označme $P_1, \ldots, P_5$ ľudí v P. Ľudí v N označme $N_{1,2}, N_{1,3}, \ldots, N_{4,5}$ podľa toho, ktorú dvojicu z P daný človek pozná. Človek $N_{i,j}$ pozná človeka $N_{k,l}$ práve vtedy, keď $\{i,j\} \cap \{k,l\} = \emptyset$. Poďme teraz riešiť vzťahy v skupine N a medzi skupinami N a P.

Dvaja ľudia z N sa poznajú iba vtedy, ak nemajú spoločného známeho v P. Problém nastane, ak by mali nejakého spoločného známeho v N (vtedy by podmienka zadania nebola splnená). Zoberme dvoch z N, ktorí sa poznajú, napríklad $N_{1,2}$ a $N_{3,4}$. Aby existoval ešte nejaký človek $N_{i,j}$, ktorý ich pozná oboch, museli by byť čísla i a j navzájom rôzne a tiež rôzne od čísel 1, 2, 3 a 4. To však nejde, keďže máme len čísla do 5. Vezmime teraz takú dvojicu z N, ktorá sa navzájom nepozná, napríklad $N_{1,2}$ a $N_{1,3}$. V P majú spoločného známeho iba P_1 zároveň v N môžu poznať iba človeka, ktorý nemá s ani jedným z nich ani jeden index rovnaký a to je jedine $N_{4,5}$. Túto úvahu vieme zopakovať pre ľubovoľnú dvojicu z N, ktorá sa nepozná. Preto dvaja vedúci z N, ktorí sa nepoznajú, majú dvoch spoločných známych, čiže všetko je ako má byť.

Ak jeden z P pozná jedného z N, tak už nemajú žiadnych spoločných známych, pretože v P sa navzájom ľudia nepoznajú a človek z N pozná iba takých ľudí z N, ktorých jeho známy z P nepozná.

Ostala posledná možnosť na overenie, teda čo ak sa človek z N a človek z P nepoznajú? Vezmime takú dvojicu. Bez ujmy na všeobecnosti nech je to P_1 a $N_{2,3}$. V P spoločných známych nemajú, lebo P_1 nepozná nikoho z P. V N pozná P_1 ľudí $N_{1,2}$,$N_{1,3}$, $N_{1,4}$, $N_{1,5}$ a $N_{2,3}$ pozná $N_{1,4}$, $N_{1,5}$,$N_{4,5}$, teda spoločných známych majú $N_{1,4}$, $N_{1,5}$, čo sú presne dvaja.

Ukázali sme, že takáto skupina šestnástich vedúcich vyhovuje podmienkam zo zadania, čiže šestnásť je aj minimálny počet vedúcich, ktorí môžu byť v H.

4.3

Len v skratke načrtneme dve riešenia.

Ak $(a, a+1)$ je dvojica po sebe idúcich huňatých čísel, tak $(4a^2+4a, 4a^2+4a+ +1)$ je tiež dvojica po sebe idúcich huňatých čísel, ktorá je určite väčšia než tá prvá. Počnúc dvojicou $(8, 9)$ vieme takýmto spôsobom vygenerovať ľubovoľne veľa dvojíc po sebe idúcich huňatých čísel.

Iné riešenie. Uvažujme diofantovskú rovnicu $x^2 - 8y^2 = 1$. Z teórie o Pellových rovniciach vieme, že má nekonečne veľa riešení v prirodzených číslach. Pre každé takéto riešenie (x, y) tvorí dvojica $(8y^2, x^2)$ pár po sebe idúcich huňatých čísel.

4.4

Riešenie úlohy nebolo v korešpondenčnom seminári zverejnené.

4.5

Na vyriešenie tohto príkladu stačí pár myšlienok, ale je ťažké spísať korektný postupu. Pre krátkosť a zrozumiteľnosť dôkazy niektorých rutinných krokov vynecháme.

Vyriešime všeobecnejšiu úlohu. Zvoľme ľubovoľné prirodzené číslo N a zmeňme množinu S v zadaní na $S = \{1, 2, 3, \dots, N\}$. Najprv si uvedomme, že funkcia $f\colon S \to S$ spĺňa podmienku zo zadania práve vtedy, keď je bijektívna a *úplne multiplikatívna.*[33] Úplnú multiplikatívnosť funkcie f môžeme zo zadania dokázať napr. (konečnou) indukciou. Ak $n \in S$ a $n = p_1^{a_1} \dots p_s^{a_s}$ je kanonický rozklad čísla n na prvočísla, tak vďaka úplnej multiplikatívnosti funkcie f máme

$$f(p_1^{a_1} \dots p_s^{a_s}) = f(p_1)^{a_1} \dots f(p_s)^{a_s}. \tag{1}$$

Z výpočtu $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)f(1) = f(1)^2$ vyplýva $f(1) = 1$. Označme P množinu prvočísel, ktoré nie sú väčšie než N. Ukážeme, že f musí zobraziť množinu P na seba.

[33] Funkciu $f : S \to S$ budeme nazývať úplne multiplikatívnou, ak $f(mn) = f(m)f(n)$ pre každé $m, n \in S$ také, že $mn \in S$.

Ak by neplatilo $f(P) = P$, tak by existovalo $p \in P$ také, že pre žiadne z prvočísel $q \in P$ neplatí $f(q) = p$. Potom za pomoci (1) možno ľahko ukázať, že nemôže existovať také $s \in S$, že $f(s) = p$. Za predpokladu $f(P) \neq P$ sme dokázali, že f nemá v obore hodnôt $p \in S$ a teda nie je bijekcia. Preto musí platiť $f(P) = P$.

Ukážeme ešte niečo viac. Pre $k \in S$ označme

$$M_k = \left\{p \in P;\ \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor = k\right\}. \tag{2}$$

Zrejme

$$P = \bigcup_{k \in S} M_k$$

je disjunktný rozklad množiny P, pričom niektoré množiny M_k môžu byť aj prázdne. Ďalšiu myšlienku zhrnieme do lemy.

Lema. Ak $k, l \in S$, $k < l$, $p \in M_k$, $q \in M_l$, tak nemôže platiť $f(q) = p$.

Dôkaz. Ak za daných predpokladov platí $f(q) = p$, potom vieme, že množina

$$\{q, 2q, 3q, \dots, lq\} \subset S$$

sa použitím f zobrazí na

$$\{f(1)p, f(2)p, f(3)p, \dots, f(l)p\} \subset S. \tag{3}$$

V množine (3) musí vďaka bijektívnosti f existovať prvok, ktorý je aspoň lp. Keďže však $l > k$ a $p \in M_k$, z (2) dostávame $lp > N$, čo je spor.

Zo vzťahu $f(P) = P$ a lemy dostaneme, že pre každé $k \in S$ platí množinová inklúzia

$$f(M_k) \subset \bigcup_{i=k}^{N} M_i,$$

z čoho jednoduchou úvahou[34] zistíme, že musí platiť $f(M_k) = M_k$ pre každé $k \in S$. Dokázali sme, že f musí permutovať prvočísla v rámci množín M_k.

Ukážeme, že ak máme danú *permutáciu*[35] $\sigma\colon P \to P$ takú, že $\sigma(M_k) = M_k$ pre každé $k \in S$, potom existuje jediná úplne multiplikatívna bijekcia $f_\sigma\colon S \to S$ taká, že $f_\sigma(p) = \sigma(p)$ pre všetky $p \in P$. Ak sa nám to podarí, potom zrejme počet hľadaných bijekcií je rovný počtu permutácií s danou vlastnosťou, čo je presne

$$\prod_{k=1}^{N} |M_k|!. \tag{4}$$

[34] Napríklad konečnou indukciou pre k rovné postupne N, $N-1$, $N-2$, …, 1.

[35] Pre naše účely môžeme permutáciu chápať ako bijektívnu funkciu z nejakej (konečnej) množiny do tej istej množiny. Aj f by sme mohli volať permutácia, ale aby sa to neplietlo, volajme f naďalej funkcia.

Nech $\sigma\colon P \to P$ je ľubovoľná pevne zvolená permutácia, pre ktorú platí $\sigma(M_k) = M_k$ pre každé $k \in S$. Jeden zo základných poznatkov o permutáciách (ak ste sa s ním ešte nestretli, skúste ho dokázať) je, že každú permutáciu vieme vyjadriť ako zloženie veľmi jednoduchých permutácií, tzv. transpozícií. Transpozícia je permutácia, ktorá „vymieňa“ dva prvky a všetky ostatné fixuje. Presnejšie, ak $k \in S$, $p, q \in M_k$, $p \neq q$, tak transpozíciou nazveme permutáciu $\sigma_{pq}\colon P \to P$ definovanú

$$\sigma_{pq}(s) = \begin{cases} s, & s \notin \{p, q\}, \\ p, & s = q, \\ q, & s = p. \end{cases}$$

Teraz si už len uvedomíme, že na poskladanie σ pomocou transpozícií vystačíme s transpozíciami, ktoré „vymieňajú“ dva prvky, ktoré patria rovnakej množine M_k. Takže pre naše σ musí existovať konečná postupnosť (p_1, q_1), (p_2, q_2), …, (p_j, q_j) taká, že pre každé $i \in \mathbb{N}$, $1 \leqq i \leqq j$ existuje $l \in S$ také, že $p_i, q_i \in M_l$, $p_i \neq q_i$ a navyše pre každé $p \in P$ platí

$$\sigma(p) = \sigma_{p_j q_j}(\sigma_{p_{j-1} q_{j-1}}(\dots(\sigma_{p_1 q_1}(p))\dots)).$$

Ku zvolenej permutácii σ skonštruujeme hľadanú funkciu $f_\sigma\colon S \to S$. Ak by σ bola transpozícia, asi by to nebolo až také zložité. Funkcia f by „vymieňala“ dve prvočísla v prvočíselnom rozklade a snáď by to bola aj úplne multiplikatívna bijekcia. Pre ľubovoľné σ by sme mohli dostať f_σ poskladaním takýchto funkcií (podobne ako to funguje s permutáciami). Spravíme to formálne. Nech $k \in S$, $p, q \in M_k$, $p \neq q$. Funkciu $f_{pq}\colon S \to \mathbb{N}$ definujeme pre $n \in S$ predpisom

$$f_{pq}(n) = f_{pq}(p^b q^c r_1^{a_1} r_2^{r_2} \dots r_s^{a_s}) = p^c q^b r_1^{a_1} r_2^{r_2} \dots r_s^{a_s},$$

kde $n = p^b q^c r_1^{a_1} r_2^{r_2} \dots r_s^{a_s}$ je kanonický rozklad čísla n na prvočísla. Funkcia f_{pq} „vymení“ prvočísla p, q v prvočíselnom rozklade. Sami ľahko ukážete, že funkcia f_{pq} je úplne multiplikatívna a injektívna. Ukážeme, že obor hodnôt je podmnožina S, z čoho bude vyplývať aj bijektívnosť f. Nech $m \in S$, $b \in \mathbb{N}$. Potom vďaka $p, q \in M_k$ a (2) dostaneme

$$p^0 q^b m \in S \;\Leftrightarrow\; p^1 q^{b-1} m \in S \;\Leftrightarrow\; p^2 q^{b-2} m \in S \;\Leftrightarrow\; \cdots \;\Leftrightarrow\; p^b q^0 m \in S.$$

Z toho vieme, že funkcia f_{pq} zobrazuje z množiny S do množiny S a teda $f_{pq}\colon S \to S$ je bijekcia.

Teraz stačí definovať f_σ ako zloženie týchto funkcií, presnejšie

$$f_\sigma(s) = f_{p_j q_j}(f_{p_{j-1} q_{j-1}}(\dots(f_{p_1 q_1}(s))\dots)),$$

pre každé $s \in S$. Keďže skladaním úplne multiplikatívnych a bijektívnych funkcií získame úplne multiplikatívnu bijekciu, stačí si už len rozmyslieť, že $f_\sigma(p) = \sigma(p)$ pre každé $p \in P$.

Dokázali sme, že výsledok je daný vzťahom (4), takže odpoveď pre $N = 100$ už ľahko dorátame. Je to $2! \cdot 2! \cdot 4! \cdot 10! = 348\,364\,800$.

Piata séria

5.1

Úloha sa dá pomerne jednoducho vyriešiť pomocou analytickej geometrie. Niet sa čomu čudovať, v zadaní vystupuje veľa navzájom kolmých úsečiek, ktoré priam ponúkajú, aby sme rovnobežne s nimi zaviedli súradnicovú sústavu. Riešenie, ktoré uvedieme, sa bude analytickému trochu podobať, budú sa v ňom totiž počítať dĺžky niektorých úsečiek podobne, ako by sme v analytickom riešení počítali súradnice bodov.

Potrebujeme rozobrať dva prípady. Prvý je ten, keď je priamka r rovnobežná s úsečkou AC. Os vnútorného uhla je vždy kolmá na os vonkajšieho uhla, preto je aj os vnútorného uhla ABC (označme ju o) kolmá na priamku r. Tým pádom je tiež kolmá na stranu AC, čo znamená, že ABC je rovnoramenný trojuholník. Teraz by už malo byť ľahko vidno, že celý obrázok je osovo súmerný podľa osi o, a teda aj body M, N sú osovo súmerné. Priamka MN je kolmá na os o a tým pádom rovnobežná s r aj AC.

Ostáva možnosť, keď sa priamky r a AC pretínajú. Tento prípad už nebude taký jednoduchý. Prvá vec, čo sa dá skúsiť, je dopočítať uhly. Problém ale je, že o bodoch M a N len pomocou uhlov nevieme takmer nič povedať. Ak si však obrázok načrtneme dosť presne, mali by sme si všimnúť, že priesečník úsečiek AQ a CP leží na osi o. Pokúsme sa to dokázať.

Označme T priesečník AQ a CP. Priamky AP, CQ, o sú všetky navzájom rovnobežné. Ak chceme dokázať, že bod T leží na priamke o, stačí dokázať, že jeho vzdialenosť od priamok AP a CQ je rovnaká, ako je vzdialenosť o od týchto priamok. Priamka o je totiž práve množina všetkých bodov, ktoré sú od AP vzdialené $|PB|$ a od CQ vzdialené $|BQ|$. Vypočítajme teda vzdialenosť bodu T od priamky AC a od priamky BQ. Tieto vzdialenosti sú presne rovné výškam v trojuholníkoch APT a TQC. Tieto dva trojuholníky sú navyše vďaka rovnakým uhlom podobné. Označme pre jednoduchosť $|AP| = a$ a $|CQ| = b$. Pomer podobnosti trojuholníkov je $a : b$, teda ich výšky budú mať dĺžky ka a kb, kde k je nejaké kladné reálne číslo. Vzdialenosť priamok AP a CQ potom musí byť $k(a + b)$. Ale aj trojuholníky APB a CQB sú podobné, a to opäť v pomere $a : b$. Preto aj pomer dĺžok $|PB|$ a $|BQ|$ musí byť $a : b$ a ich súčet sa rovná vzdialenosti priamok AP a CQ, ktorá je $k(a + b)$. Z toho dostávame, že $|PB| = ka$ a $|BQ| = kb$, čiže bod T naozaj patrí priamke o.

Keď sa nám už takto pekne podarilo nájsť polohu bodu T, prečo nedopočítať aj polohy bodov M a N? Mali by sme si totiž ľahko všimnúť, že tak ako je bod T priesečníkom uhlopriečok v pravouhlom lichobežníku $APQC$, tak sú aj body M a N priesečníkmi uhlopriečok v pravouhlých lichobežníkoch $APBT$ a $TBQC$. Ak by sme poznali $|BT|$, vedeli by sme úplne rovnakým postupom nájsť vzdialenosť bodov M a N od priamok AP, BT a CQ. Túto dĺžku vieme jednoducho vypočítať napríklad z podobnosti trojuholníkov PBT a PQC. Sú podobné v pomere $ka : k(a + b)$, teda platí

$$|BT| = \frac{ka}{k(a+b)} \cdot |QC| = \frac{ab}{a+b}.$$

Označme päty kolmíc z bodov M, N na priamku r postupne X, Y. V predchádzajúcich dvoch odsekoch sme presne vypočítali, aká je v pravouhlom lichobežníku $APQC$ s dĺžkami základní a, b poloha priesečníka uhlopriečok. Je to vo vzdialenosti $ab/(a+b)$ od strany PQ a v pomere $a : b$ medzi základňami AP a CQ. Lichobežník $APBT$ je tiež pravouhlý, len so základňami dĺžok a a $ab/a+b$. Pre priesečník uhlopriečok M teda bude platiť

$$|MX| = \frac{a \cdot \frac{ab}{a+b}}{a + \frac{ab}{a+b}} = \frac{a^2b}{a(a+b)+ab} = \frac{ab}{a+2b},$$
$$|XB| = k \cdot |MX| = \frac{kab}{a+2b}.$$

Podobne pre bod N dostaneme

$$|NY| = \frac{ab}{2a+b},$$
$$|YB| = \frac{kab}{2a+b}.$$

Čaká nás už len posledná náročná časť – dokázať, že všetky tri priamky sa pretnú v tom istom bode. Predpokladajme bez ujmy na všeobecnosti, že $a > b$. Potom priesečník V priamky AC s priamkou r bude bližšie k C ako k A. Z podobnosti trojuholníkov APV a CQV sa budeme snažiť vypočítať vzdialenosť $|BV|$:

$$\frac{|PV|}{|AP|} = \frac{|QV|}{|CQ|},$$
$$\frac{|BV| + ka}{a} = \frac{|BV| - kb}{b}.$$

Z tejto rovnosti už ľahko vyjadríme

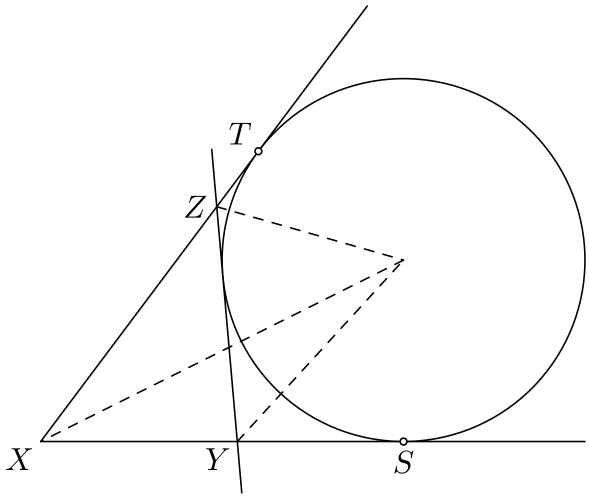
$$|BV| = \frac{2kab}{a-b}.$$

Podobným spôsobom by sme vedeli nájsť polohu priesečníka W priamok MN a r. Výpočet by obsahoval trochu viac písmeniek, ale ináč by vyzeral úplne rovnako a dostali by sme rovnaký výsledok. To znamená, že body V a W musia byť ten istý bod a teda všetky tri priamky sa pretínajú v jednom bode.

Úloha sa dala riešiť aj čisto pomocou podobností, ak by sme označili priesečníky priamky MN s úsečkami AP a CQ a dokazovali, že tieto priesečníky delia úsečky AP a CQ v rovnakých pomeroch. Tiež sme mohli obísť niektoré z našich výpočtov ak by sme použili Cèvovu vetu v trojuholníku ABV a dokázali tak, že body M, N a V ležia na jednej priamke. No a nakoniec úplne najjednoduchší dôkaz sa dá napísať za pomoci perspektívneho zobrazenia, ktorým sa dal nerovnobežný prípad zredukovať na prípad rovnobežný, ktorý je už úplne jednoduchý.

5.2

V zadaní sa vysktytuje os vnútorného uhla ABC a os vonkajšieho uhla BCA trojuholníka ABC. Uvidíme, že práve vonkajšie a vnútorné uhly trojuholníkov zohrávajú v tejto úlohe kľúčovú rolu. Využijeme aj poznatky o pripísaných kružniciach k trojuholníku, ktorým je venovaný nasledovný odsek.



Obr. 45

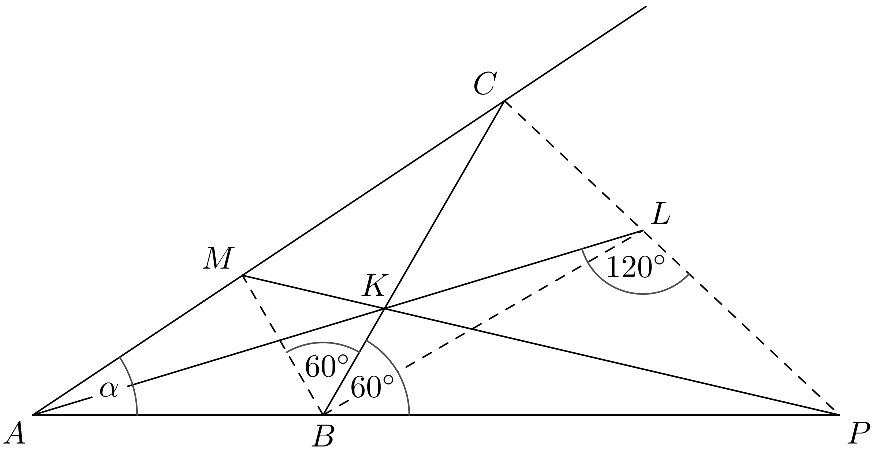
Predstavme si ľubovoľný trojuholník XYZ. Zostrojme kružnicu k, ktorá sa dotýka polpriamok XY, XZ a zvonka sa dotýka strany YZ trojuholníka XYZ. Označme dotykové body kružnice s polpriamkami XY a XZ postupne S a T (obr. 45). Všimnime si uhol ZXY. Kružnica k je vpísaná do tohto uhla, takže jej vzdialenosť od ramien uhla je rovnaká, preto jej stred leží na osi uhla ZXY. Táto kružnica je ale vpísaná aj do uhlov ZYS a TZY, takže jej stred leží aj na osiach týchto uhlov. Zistili sme, že stred tejto kružnice leží na osi vnútorného uhla pri vrchole X a na osiach vonkajších uhlov pri vrcholoch Y a Z v trojuholníku XYZ. Kružnica k sa nazýva pripísaná kružnica k strane YZ. V riešení príkladu budeme využívať, že spomínané tri osi uhlov sa pretínajú v jednom bode (už vieme, že v strede pripísanej kružnice).

Na začiatok si všimneme veľkosti uhlov, ktoré vieme hneď určiť. BM je os uhla ABC, takže $|\angle MBC| = 60°$. Ďalej uhol CBP je susedný k uhlu CBA, takže $|\angle CBP| = 60°$.

Zamerajme sa na trojuholník MBC. Uhol pri vrchole B má veľkosť $60°$, čiže vonkajší uhol pri tomto vrchole má veľkosť $120°$. Keďže $|\angle CBP| = 60°$, tak BP je osou tohto vonkajšieho uhla. Vieme tiež, že CP je osou vonkajšieho uhla pri vrchole C. To znamená, že bod P leží na osiach dvoch vonkajších uhlov v trojuholníku MBC. Bod P je teda stred pripísanej kružnice k trojuholníku MBC. Z toho vyplýva, že MP je osou uhla CMB.

Prejdime s pozornosťou k trojuholníku ABM. Pred chvíľou sme vlastne zistili, že MK je os vonkajšieho uhla pri vrchole M. Je zrejmé, že BK je os vonkajšieho uhla pri vrchole B. Teda K je stred pripísanej kružnice k trojuholníku ABM a AK musí byť os vnútorného uhla MAB.

Označme L priesečník polpriamky AK a úsečky PC. Pre zmenu si všímajme trojuholník ABC. Bod L leží na osi vnútorného uhla pri vrchole A a na osi vonkajšieho uhla pri vrchole C. Zo znalosti vlastností pripísanej kružnice môžeme usúdiť, že aj os vonkajšieho uhla pri vrchole B musí prechádzať bodom L. Čiže $|\measuredangle CBL| = |\measuredangle LBP| = 30°$.



Obr. 46

Ďalej budeme počítať nejaké uhly a dôjdeme k tomu, že štvoruholník $BPLK$ je tetivový. Označme $|\measuredangle CAB| = \alpha$. Súčet uhlov v trojuholníku ABC je 180°, takže $|\measuredangle BCA| = 60° - \alpha$. Vonkajší uhol v trojuholníku ABC pri vrchole C má veľkosť $120° + \alpha$ a keďže CP je jeho osou, tak $|\measuredangle PCB| = 60° + \frac{1}{2}\alpha$. Z trojuholníka AKC ľahko dorátame $|\measuredangle AKC| = 120° + \frac{1}{2}\alpha$. Susedný uhol CKL má veľkosť $60° - \frac{1}{2}\alpha$. V trojuholníku KLC ľahko dorátame $|\measuredangle KLC| = 60°$. Susedný uhol PLK k tomuto uhlu má potom veľkosť 120°. Vidíme, že súčet protiľahlých uhlov v štvoruholníku $BPLK$ je 180° (obr. 46), čiže skutočne ide o tetivový štvoruholník.

Z obvodových uhlov v tomto štvoruholníku vieme, že $|\measuredangle KPL| = |\measuredangle KBL| = 30°$ a $|\measuredangle LKP| = |\measuredangle LBP| = 30°$. Uhol AKM je vrcholový k uhlu LKP, takže $|\measuredangle AKM| = |\measuredangle LKP| = 30°$. Obidva uhly spomínané v zadaní majú veľkosť 30°, teda sú zhodné.

5.3

(Podľa *Martina Bachratého* a *Filipa Sládka*.) Uvedieme len zoznam hlavných krokov riešenia bez technických detailov. Namiesto čísla 100 v zadaní uvažujme ľubovoľné párne $n = 2k > 0$.

Ak dvojica susedných čísel nie je superdvojica, nazveme ju *zlá*. Ak máme šesticu po sebe idúcich čísel na obvode $a_i < A_i > a_{i+1} < A_{i+1} > a_{i+2} < A_{i+2}$, tak dvojica a_{i+1}, A_{i+1} je zlá práve vtedy, keď $a_i < A_i < a_{i+2} < A_{i+2}$.

Keby nejaké číslo bolo v dvoch zlých dvojiciach, tak bez ujmy na všeobecnosti nech je to A_{i+1}. Potom musí zároveň platiť $a_i < A_i < a_{i+2} < A_{i+2}$ a $A_i > a_{i+1} > A_{i+2}$, čo je spor. Takže žiadne číslo nie je naraz v dvoch zlých dvojiciach. Dostávame, že zlých dvojíc je maximálne k, takže superdvojíc je minimálne k. (Superdvojíc a zlých dvojíc dokopy je n.)

Ďalej ukážeme, že zlých dvojíc je menej ako k. Keby ich bolo k (väčší počet sme už vylúčili), tak každé číslo je v práve jednej zlej dvojici. Bez ujmy na všeobecnosti nech je zlá dvojica $a_{i+1} < A_{i+1}$.[36] Potom je aj $a_{i+2} < A_{i+2}$ zlá dvojica a tak ďalej. Z toho získame nerovnosť typu $a_{i+1} < a_{i+2}$, ktorá musí platiť pre každé i. Keďže čísla sú usporiadané cyklicky, dostávame $a_{i+1} < a_{i+1}$ čo je spor.

Takže minimálny počet superdvojíc je $k + 1$ (pretože maximálny počet zlých dvojíc je $k - 1$). Ešte skonštruujeme prípad, ktorý vyhovuje. Keď zoberieme postupnosť 1, 2, 3, ..., n a prehodíme postupne čísla $(2, 3)$, $(4, 5)$, ..., tak dostaneme postupnosť

$$1,\ 3,\ 2,\ 5,\ 4,\ 7,\ 6,\ \dots,\ n-1,\ n-2,\ n.$$

Vidíme, že zlé dvojice sú $(2, 5)$, $(4, 7)$, ..., $(n - 4, n - 1)$ a ešte $(n, 1)$. To je práve $k - 1$ zlých dvojíc. Ukázali sme, že zlých dvojíc je maximálne $k - 1$ a existuje také rozloženie, takže superdvojíc je minimálne $k + 1$, v našom príklade 51.

5.4

(Podľa *Martina Bachratého*.) Zrejme stačí, ak ku každému $n > 1$ nájdeme také p, že nerovnosť zo zadania bude platiť a zároveň bude existovať vhodná n-tica, $x_1, \dots , x_n$, kedy nastane rovnosť. Pre $n = 2, 3, 4$ sa dá ľahko ukázať, že platí $p = n$. Pre $n > 4$ je to zaujímavejšie. Ak dosadíme $x_1 = x_2 = 1$ a $x_3 = x_4 = \ldots = x_n = 0$, dostaneme, že musí platiť $4 \geqq p$, teda p je najviac 4.

Matematickou indukciou dokážeme, že pre $n \geqq 4$ platí $p = 4$. Prvý indukčný krok ($n = 4$) už máme. Nech teda pre každú $(n - 1)$-ticu ($n \geqq 5$) nezáporných reálnych čísel $x_1, \dots , x_{n-1}$ platí

$$(x_1 + \cdots + x_{n-1})^2 \geqq 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1} + x_{n-1}x_1). \tag{1}$$

Nech $x_1, \dots , x_n$ je ľubovoľná n-tica nezáporných reálnych čísel. Cyklickou zámenou premenných $x_1, \dots , x_n$ nezmeníme hodnoty na ľavej a pravej strany dokazovanej nerovnosti, preto môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že x_n je najmenšie spomedzi $x_1, \dots , x_n$, presnejšie $x_n \leqq x_j$ pre každé j, $1 \leqq j \leqq n$. Postupne odvodíme nerovnosti

$$\begin{aligned} 2x_1x_{n-1} &\geqq 2x_1x_n, \\ 2x_1x_{n-1} &\geqq 2x_{n-1}x_n, \\ 2x_n(x_1 + x_{n-1}) + 4x_1x_{n-1} &\geqq 4x_1x_n + 4x_{n-1}x_n, \\ x_n^2 + 2x_n(x_1 + \cdots + x_{n-1}) &\geqq 4x_1x_n + 4x_{n-1}x_n - 4x_1x_{n-1}. \end{aligned}$$

[36] Keby bola zlá dvojica „opačne“ (t. j. väčší člen by bol skôr), tak si môžeme pomôcť napr. substitúciou $b_i = n + 1 - a_i$.

Sčítaním poslednej nerovnosti spolu s indukčným predpokladom (1) dostaneme

$$x_n^2 + 2x_n(x_1 + \cdots + x_{n-1}) + (x_1 + \cdots + x_{n-1})^2 \geqq 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1),$$

čo je po úprave ľavej strany na štvorec dôkaz, že pre dané n platí $p \geqq 4$. To s úvahami zo začiatku riešenia implikuje $p = 4$. Tým je indukcia kompletná a príklad vyriešený.

5.5

Uvedieme len stručný návod. Môžeme postupovať v dvoch krokoch (oba sú netriviálne):

- Ukážeme, že ak súčet čísel vo vrcholoch je nepárny, tak Dráčik vie konečným počtom krokov dosiahnuť, že práve jedno z čísel bude nepárne.
- Ak práve jedno z čísel vo vrcholoch je nepárne, označme najväčšie z Dráčikových čísel M. Dokážeme, že Dráčik vie pomocou konečného počtu vhodných krokov dôjsť na pozíciu, kde každé číslo bude menšie než M.

Šiesta séria

6.1

Uvedieme riešenie pomocou matematickej indukcie. Predpokladajme, že $k \geqq 2$ je pevne dané a matematickú indukciu použijeme na n ($n \geqq k$).

V prvom indukčnom kroku chceme (netradične) ukázať platnosť tvrdenia pre $n = k$. Vtedy z predpokladu vieme, že aspoň dva z n intervalov musia mať neprázdny prienik. Vyberme jedno číslo z tohto prieniku a ostatných $n - 2$ čísiel vyberme po jednom zo zvyšných $n - 2$ intervalov. Vybrali sme $1 + n - 2 = k - 1$ reálnych čísel, ktoré zrejme spĺňajú podmienku zo zadania.

Teraz predpokladáme $n > k$ a máme n intervalov, ktoré spĺňajú dané podmienky. Spomedzi týchto n intervalov vyberme ten, ktorý má najmenšie minimum (budeme ho označovať okrúhlymi zátvorkami ()) a spomedzi zvyšných $n - 1$ opäť vyberme taký, ktorý má najmenšie minimum (budeme ho označovať hranatými zátvorkami [ ]). Tieto dva intervaly môžu ležať spoločne v nasledujúcich pozíciách:

a) ([ ]) Interval [ ] je celý vnútri intervalu ().
b) ([ )] Intervaly [ ] a () majú spoločný prienik, ale nenastáva možnosť 1.
c) ( ) [ ] Intervaly [ ] a () nemajú spoločný prienik.

V prípade a) najprv zabudneme na interval (). Pre zvyšných $n - 1$ intervalov vieme podľa indukčného predpokladu zvoliť $k - 1$ čísel tak, aby každý z daných n intervalov obsahoval aspoň jedno zo zvolených čísel. Keď si teraz vezmeme všetkých n intervalov, vidíme, že interval () musí obsahovať to isté číslo ako interval [ ], čím je prípad a) vyriešený.

V prípade b) si najprv nevšímame interval [ ] a opäť budeme vedieť použiť indukčný predpoklad (platnosť tvrdenia pre $n - 1$). Keď si vezmeme všetkých n intervalov a náhodou sa stane, že najmenšie vybrané číslo, ktoré je určite v intervale (), nepatrí do intervalu [ ], tak ho beztrestne nahradíme číslom z prieniku intervalov () a [ ].

Ak nastane tretia možnosť, tak interval () preskočíme a celú úvahu zopakujeme. Zo zvyšných $n-1$ intervalov vyberieme dva, ktoré majú najmenšie možné minimá a pre ne môžu opäť nastať prípady a), b), c). Prípady a) a b) už však máme vyriešené, preto nastane problém ak opäť nastane prípad c). Keďže určite existujú dva intervaly so spoločným prienikom, tak vyraďovanie takýchto intervalov, ktoré nemajú so žiadnym iným intervalom neprázdny prienik, určite skončí a skôr či neskôr nastane možnosť a) alebo b). Vždy teda vieme zvoliť $k-1$ čísel tak, aby každý z n intervalov obsahoval aspoň jedno zo zvolených čísel.

6.2

V prvom rade si všimnime, že v zadaní máme dolné ohraničenie pre číslo a, presnejšie $a>0$. Z rovnice v zadaní ekvivalentnými úpravami prídeme aj k hornému ohraničeniu a, a to

$$a < \frac{b}{b-1} = 1 + \frac{1}{b-1}. \tag{1}$$

Podmienky zo zadania môžeme teda preformulovať takto: Dané je prirodzené číslo b a kladné reálne číslo a, pre ktoré platí nerovnosť (1).

Najprv sa venujme prípadu $0 < a \leqq 1$. Zdôvodníme, že v postupnosti $\lfloor a \rfloor$, $\lfloor 2a \rfloor$, $\lfloor 3a \rfloor$, ... je každé prirodzené číslo. Nech by sa nejaké prirodzené číslo n v tejto postupnosti nenachádzalo. To znamená, že uvedená (neklesajúca) postupnosť ho „preskočí“, teda pre nejaké prirodzené čísla k a $k+1$ platia nerovnosti

$$ka < n \qquad \text{a} \qquad (k+1)a \geqq n+1.$$

Avšak toto pre $a \leqq 1$ nemôže nastať. Preto postupnosť obsahuje všetky prirodzené čísla a teda aj nekonečne veľa mocnín čísla b.

Teraz uvažujme, že platí

$$1 < a < 1 + \frac{1}{b-1}.$$

Úlohu dokážeme sporom. Predpokladajme, že sa v postupnosti $\lfloor a \rfloor$, $\lfloor 2a \rfloor$, $\lfloor 3a \rfloor$, ... nachádza len konečne veľa mocnín čísla b. Označme n také prirodzené číslo, že b^n a ani žiadna vyššia mocnina b sa v postupnosti už nenachádza. Potom pre nejaké po sebe idúce prirodzené čísla k a $k+1$ platia nerovnosti

$$ka < b^n \qquad \text{a} \qquad (k+1)a \geqq b^n+1.$$

Odporúčame kresliť si obrázok (číselnú os a znázorňovať si na nej spomínané čísla). Bude tak jednoduchšie sledovať zmysel niektorých na prvý pohľad magických výpočtov. Vráťme sa k riešeniu.

Z uvedených nerovností vyplýva, že keď k číslu ka menšiemu ako b^n pripočítame a, tak toto číslo bude aspoň b^n+1. To znamená, čísla ka a b^n nemôžu byť od seba vzdialené o viac ako $a-1$, teda

$$b^n - ka \leqq a - 1. \tag{2}$$

Vidíme, že číslo ka je pomerne blízko k číslu b^n. Vďaka tejto vlastnosti a podmienkam v zadaní ukážeme, že keď zoberieme číslo bka, tak toto číslo bude dosť blízko k číslu b^{n+1}. Presnejšie povedané, zdôvodníme, že bka je najväčší násobok čísla a, ktorý je menší ako b^{n+1}. Na to stačí ukázať, že $0 < b^{n+1} - bka \leqq a$. Prvá nerovnosť je zrejmá a druhá platí, lebo

$$b^{n+1} - bka = b(b^n - ka) \leqq b(a-1) \leqq a,$$

pričom posledná nerovnosť vyplýva z podmienky v zadaní (platí dokonca ostrá nerovnosť).

Keďže člen b^{n+1} sa v postupnosti nenachádza, musí platiť

$$(bk+1)a \geqq b^{n+1} + 1.$$

To ale znamená, že číslo bka musí byť dosť blízko k číslu b^{n+1}, čiže podobne ako predtým musí platiť

$$b^{n+1} - bka \leqq a - 1. \tag{3}$$

Všimnime si nerovnosti (2) a (3). Dostali sme sa zo situácie pre b^n do podobnej situácie pre b^{n+1}. Takto môžeme pokračovať aj ďalej a dostaneme

$$b^{n+2} - b^2ka \leqq a - 1.$$

Označme $b^n - ka = r$. Vieme, že $r > 0$. Opakovaním vyššie uvedeného postupu vo všeobecnosti dostaneme pre ľubovoľné prirodzené číslo i vzťah

$$b^{n+i} - b^i ka = b^i r \leqq a - 1. \tag{4}$$

Keďže rb^i rastie exponenciálne a $b > 1$, tak pre dosť veľké i dosiahne rb^i hodnotu väčšiu ako $a-1$. To ale nemôže nastať kvôli nerovnosti (4). Došli sme k hľadanému sporu, čím sme vyriešili pôvodnú úlohu.

Poznámka. Všimnite si, že náš postup sa dal interpretovať aj trochu inak. Ak predpokladáme, že nejaká mocnina b^n sa v postupnosti nenachádza, tak opakovaním nášho postupu dostatočný počet krát nájdeme mocninu od nej vyššiu, ktorá sa v postupnosti už nachádza. Z toho vyplýva, že sa v postupnosti nachádza nekonečne veľa mocnín čísla b.

6.3, 6.4, 6.5

Riešenie úloh nebolo v korešpondenčnom seminári zverejnené.

Iné korešpondenčné semináre

Okrem Matematickej olympiády sú pre študentov základných aj stredných škôl počas školského roka organizované aj iné matematické súťaže. Patria medzi ne predovšetkým korešpondenčné semináre. Tieto súťaže sa v detailoch istotne líšia, avšak základné črty majú spoločné. Počas školského roka prebiehajú dve časti (letná a zimná), ktoré pozostávajú zväčša z troch sérií úloh rozosielaných riešiteľom do škôl alebo domov. Riešenia súťažiaci vypracovávajú rovnakou formou ako v MO a v určenom termíne ich odosielajú na adresu príslušného seminára, odkiaľ sa po niekoľkých dňoch až týždňoch vrátia opravené spolu so vzorovými riešeniami a výsledkovou listinou. Mladší a menej skúsení riešitelia zväčša nemusia riešiť tie najzložitejšie príklady, aby aj oni mali šancu ovplyvniť poradie na prvých miestach. Na konci oboch častí súťaže sú približne tridsiati najúspešnejší riešitelia pozývaní na týždňové sústredenie, účasť na ktorom býva často najsilnejšou motiváciou na riešenie úloh. Nie je ale možné nespomenúť, že takýto pravidelný tréning sa odráža aj na výsledkoch dosahovaných v MO, a že drvivá väčšina reprezentantov Slovenska na IMO sa aktívne zapájala do viacerých z týchto seminárov.

Nižšie uvedené korešpondenčné semináre (KS) sú určené študentom stredných škôl, svojím záberom pokrývajú územie celého Slovenska a často majú aj riešiteľov z Českej republiky. Je však možné, že vo svojom okolí nájdete aj menšie súťaže podobného druhu.

Korešpondenčný matematický seminár – KMS

KMS vznikol v roku 2002 spojením Bratislavského a Stredoslovenského korešpondenčného matematického seminára (BKMS a SKMS), ktoré do 51. ročníka MO prebiehali samostatne. Organizovaný je študentmi FMFI UK v Bratislave.

KMS má tri kategórie. Začínajúcim a mladším riešiteľom je určená kategória ALFA, pre skúsenejších je kategória BETA. Rozdelenie do kategórií umožňuje bojovať o miesta na sústredení aj neskúseným študentom, ktorí by v príliš silnej konkurencii strácali motiváciu. Kategória GAMA je seminár SKMO a je mu venovaná predchádzajúca kapitola.

KMS
OATČ KAGDM FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

e-mail: kms@kms.sk
web: http://kms.sk

Súťaž talentovaných riešiteľov obľubujúcich matematiku – STROM

Korešpondenčný seminár STROM je pokračovateľom najstaršieho korešpondenčného seminára v bývalom Československu. Je organizovaný z PF UPJŠ v Košiciach skupinou nadšencov, väčšinou bývalých riešiteľov seminára a študentov UPJŠ. V posledných rokoch sa na organizovaní seminára okrem košickej skupiny podieľajú aj študenti FMFI UK pochádzajúci z východného Slovenska. Riešiteľskú základňu má prevažne na východnom Slovensku.

STROM
PF UPJŠ
Jesenná 5
041 54 Košice

e-mail: strom@strom.sk
web: http://www.strom.sk

Ak ste sa rozhodli do niektorého zo seminárov zapojiť, najrozumnejšie je zadania a pravidlá nájsť na internete začiatkom septembra alebo začiatkom januára, prípadne v tomto období požiadať e-mailom o zaslanie úloh prvej série.

Päťdesiatydeviaty ročník Matematickej olympiády na stredných školách

Mgr. Peter Novotný, PhD. – RNDr. Karel Horák, CSc.
Bc. Ondrej Budáč – Mgr. Ivan Kováč – RNDr. Ján Mazák
Úlohová komisia MO

Jazyková úprava:	neprešlo jazykovou úpravou
Grafická úprava:	Mgr. Peter Novotný, PhD., RNDr. Karel Horák, CSc., sadzba programom $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TeX
Autori fotografií:	Ladislav Bačo, Mgr. Peter Novotný, PhD.
Náklad:	500 ks
Rozsah:	167 strán
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava
Rok vydania:	2010

ISBN: 978–80–8072–114–5

Vydané s finančnou podporou Ministerstva školstva SR.
Nepredajné.