58. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

Správa o riešení úloh zo súťaže konanej v školskom roku 2008/2009

50. MEDZINÁRODNÁ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA
3. STREDOEURÓPSKA MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

S pomocou spolupracovníkov spracovali
Mgr. Peter Novotný, PhD.,
RNDr. Karel Horák, CSc.,
doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.,
Bc. Ondrej Budáč,
Mgr. Ivan Kováč,
RNDr. Ján Mazák,
Mgr. Martin Potočný
a členovia Úlohovej komisie MO.

Obsah

O priebehu 58. ročníka Matematickej olympiády

Matematická olympiáda (MO) je najstaršia a najmasovejšia postupová intelektuálna súťaž žiakov základných a stredných škôl v SR. Matematickú olympiádu vyhlasuje Ministerstvo školstva Slovenskej republiky (MŠ SR) v spolupráci s Jednotou slovenských matematikov a fyzikov (JSMF). V školskom roku 2008/09 sa uskutočnil 58. ročník MO.

Súťaž riadila Slovenská komisia Matematickej olympiády (SKMO) so sídlom v Žiline a pracovala v nasledovnom zložení:

Mim. prof. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., F-PEDAS ŽU Žilina, predseda
RNDr. Oliver Ralík, CSc., FPV UKF Nitra, podpredseda A
RNDr. Monika Dillingerová, PhD., FMFI UK Bratislava, podpredseda Z
Prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc., FPV UKF Nitra
Mgr. Ján Mazák, FMFI UK Bratislava
Ing. RNDr. František Kardoš, PhD., PF UPJŠ Košice
Mgr. Peter Novotný, PhD., FMFI UK Bratislava
RNDr. Anna Pobešková, Nitra
Mgr. Martin Potočný, Trojsten, FMFI UK Bratislava
Doc. RNDr. Vladislav Rosa, CSc., FMFI UK Bratislava
Mgr. Milan Demko, PhD., FHPV PU Prešov, predseda KKMO PO
RNDr. Zuzana Frková, Gymn. Grösslingová Bratislava, predsedníčka KKMO BA
Doc. RNDr. Mária Lucká, CSc., PF TU Trnava, predsedníčka KKMO TT
Doc. RNDr. Tomáš Madaras, PhD., PF UPJŠ Košice, predseda KKMO KE
Doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc., F-PEDAS ŽU Žilina, predseda KKMO ZA
RNDr. Eva Oravcová, Gymn. J. G. T. Banská Bystrica, predsedníčka KKMO BB
RNDr. Soňa Pavlíková, CSc., TU Trenčín, predsedníčka KKMO TN
Prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc., FPV UKF Nitra, predseda KKMO NR
Ing. Tomáš Lučenič, IUVENTA Bratislava

*

Pod skratkou MO funguje najstaršia intelektuálna súťaž v SR, ktorá sa v dôsledku snahy veľkého množstva našich význačných predchodcov o čo najlepšie výsledky rozrástla na striktnú viackolovú súťaž s množstvom kategórií Z4, Z5, Z6, Z7, Z8, Z9 pre základné školy a C, B, A pre stredné školy. Vznik tých kategórií bol postupný a účelom zavedenia kategórií pre stále mladších žiakov bolo podchytiť talenty v čo najmladšom veku a obmedziť tak ich únik do iných súťaží. Vrcholnou súťažou v tejto oblasti je Medzinárodná matematická olympiáda (IMO), z ktorej naši žiaci pravidelne vozia medaily. V septembri 2009 sa však uskutočnil už aj 3. ročník veľmi kvalitnej Stredoeurópskej matematickej olympiády (MEMO). Aj keď týmto súťažiam sú v tejto Ročenke venované samostatné kapitoly, spomeňme tu aspoň toľko, že na jubilejnej 50. IMO v Brémach získala šestica našich žiakov dve bronzové medaily a tri čestné uznania a šestica našich žiakov na 3. MEMO v Poľsku získala jednu zlatú a jednu striebornú medailu napriek mimoriadne silnej konkurencii. Treba totiž poznamenať, že z veľmi silných družstiev začali chodiť na MEMO okrem Poliakov aj Maďari a Nemci. Za všetky čísla v tejto chvíli už len toľko, že šestice našich žiakov na doterajších sedemnástich IMO od vzniku SR získali 73 medailí z maximálneho počtu 102 možných.

Organizačná štruktúra MO sa nezmenila a podarilo sa uskutočniť všetky plánované akcie.

Ďakujeme firme REKON, ktorá financovala tričká pre reprezentačné družstvo SR na 50. IMO v Brémach. Poďakovanie SKMO patrí ďalej všetkým, ktorí podporili celoštátne kolo MO, pretože cenový fond z MŠ SR sa riadi staršími predpismi a nie je dôstojný súťaže tejto kvality. Boli to: firma ALBI, Ivan Harman – primátor mesta Žilina, JSMF.

Ohľadne finančného zabezpečenia MO treba uviesť, že dotácia MŠ SR na súťaže nebola valorizovaná už 6 rokov, aj keď prísľub bol ročne 11%, takže dnes by sme už mali mať výrazne viac. K finančnému zabezpečeniu MO ďalej patrí, že autorovi týchto riadkov sa podarilo získať grant APVV, ktorý aj tento rok v nemalej miere pokryl náklady KMS. Toto bol bohužiaľ posledný rok trvania tejto trojročnej grantovej podpory. Už vlani som na týchto miestach spomínal iný grantový projekt APVV, namierený na výraznú metodickú pomoc učiteľom stredných škôl pri organizovaní krúžkov MO, ktorý bol však vyhodnotený nekorektne, so zjavným úmyslom škodiť matematike. Tento projekt som prakticky bez zmeny (len Sk som zamenil na ekvivalent v €) podal znovu; opäť sa však našiel jeden hodnotiteľ (takmer s istotou ten istý – vzhľadom na štýl formulovania viet a práve pre tento svoj štýl nám nie je neznámy), ktorý sa pokúsil tento projekt potopiť. Vedenie APVV však tentoraz jeho zarážajúco zlomyseľné hodnotenie prehodnotilo a grantovú podporu udelilo. Znamená to, že najbližšie štyri roky bude finančne podporená práca niekoľkých lektorov a asi 40 učiteľov pri vedení krúžkov MO. Práca v MO nie je zárobková činnosť, ale finančná podpora určite zlepší chuť do tej práce.

Už štvrtýkrát *Společnost Otakara Borůvky* finančne zabezpečila tréningové sústredenie IMO družstva Českej republiky v Uherském Hradišti a na toto sústredenie pozvala aj IMO družstvo SR, ktorému financovala účasť. Táto akcia nie je reciproká, v SR zatiaľ neexistuje filantropia tohto typu. Neostáva nám teda nič iné, ako znovu úprimne našim českým kolegom poďakovať za veľkorysosť a dúfať, že nás na toto ich odborne veľmi kvalitné sústredenie pozvú aj o rok.

Podľa očakávania sa ukazuje, že nová súťaž MEMO zvýšila motiváciu najmä mladších žiakov; v septembri 2010 sa uskutočnil v Poľsku (Poznaň) jej 3. ročník a o rok neskôr bude 4. ročník usporiadaný na Slovensku (Strečno). Keďže IMO družstvo a MEMO družstvo musia byť disjunktné, táto akcia (spolu s IMO) znamená účasť 12 študentov v kvalitnej medzinárodnej súťaži, čím sa značne zvyšuje šanca študenta na takú súťaž sa prebojovať.

*

Vrelá vďaka za usporiadanie Celoštátneho kola MO (CK MO) patrí KK MO Žilina, ktorej predsedom je doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc. a ktorý v spolupráci s IUVENTOU nezariadil jedine počasie. Po CK MO sa uskutočnilo veľmi náročné výberové sústredenie, po ktorom vznikli reprezentačné družstvá Slovenska na IMO aj MEMO. Tieto potom absolvovali v rámci prípravy na 50. IMO a 3. MEMO aj tréningové sústredenia a už tradičné súťažné trojstretnutie ČR-Poľsko-SR. Viac o týchto akciách a tiež o korešpondenčných seminároch nájde záujemca v samostatných kapitolách tejto Ročenky. Už teraz však uveďme aspoň niektoré z mnohých zaujímavých internetových stránok:

skmo.sk – oficiálna stránka SKMO,
matematika.okamzite.eu – archív zadaní, poradí a riešení MO,
fpedas.uniza.sk/~novotny/MO – aktuálne dokumenty, najmä pre Žilinský kraj,
www.olympiady.sk – stránka IUVENTY,
www.imo2009.de/imo – stránka 50. IMO v Brémach,
imo-official.org – oficiálna stránka IMO.

*

V júli 2009 minister školstva vymenoval Mgr. Petra Novotného, PhD. za predsedu SKMO. Dovolím si teda pridať malý sumár na záver, aj keď moju prácu pre MO budú hodnotiť určite iní. Po nástupe do funkcie predsedu SKMO v júni 2001 som si vytýčil dve hlavné úlohy: výrazne zlepšiť finančné zabezpečenie MO a pritiahnuť k systematickej a dlhoročnej práci pre MO viac mladých ľudí.

Ohľadne finančného zabezpečenia MO treba uviesť, že z úrovne 365 000,– Sk na roky 2001 – 2003 stúpla dotácia MO od roku 2004 na 1 200 000,– Sk ročne a MŠ SR sľúbilo ročný 11%-ný nárast dotácie na všetky postupové súťaže. Bol to vtedy veľký úspech, aj keď dotácie neboli odvtedy valorizované. Škoda, lebo dnes by sme už mali mať o 80% viac a tie peniaze samozrejme chýbajú. Nedá mi, aby som nedodal, že cesta k tomu značnému zvýšeniu peňazí pre MO viedla cez nekompromisné, ale vecné jednania v Koordinačnej rade, počas ktorých som si zadovážil mnoho nepriateľov – veď nikto sa peňazí dobrovoľne nechcel vzdať. K finančnému zabezpečeniu MO patrí, že na roky 2006 – 2008 sa mi podarilo pre MO získať grant APVV vo výške 332 500,– Sk ročne (to je takmer celý ročný rozpočet spred 4 rokov!) a tento počas troch rokov umožnil 85 žiakom letné sústredenie ako odmenu za dobré výsledky v Korešpondenčnom matematickom seminári (KMS). Na roky 2009 – 2013 som získal ďalší grant APVV, pričom v rámci neho sa za poctivú prácu s talentami presunie k učiteľom a lektorom vo forme odmien spolu vyše 64 000,– € (teda asi 2 milióny Sk, keď už som všetko doteraz uvádzal v Sk). Určite to bude všetkých aktérov motivovať ku kvalitnej práci, z ktorej nakoniec bude ťažiť jej veličenstvo matematika.

Čo sa týka omladenia množiny ľudí z okolia MO, vyššie spomenuté nezanedbateľné zvýšenie financií zlepšilo predovšetkým pracovnú chuť mladých ľudí, ktorí sa grupujú najmä z radov bývalých olympionikov, ktorí sa po maturite ako študenti (väčšinou) FMFI UK Bratislava a neskôr často ako doktorandi tejto ustanovizne aktívne zapájajú najmä do práce KMS, ale aj do práce SKMO a do tvorby úloh. Okrem zvýšenia financií sa mi listom ministrovi školstva podarilo presadiť, že od roku 2005 sa na medzinárodnej matematickej olympiáde pravidelne za SR zúčastňuje aj tzv. *Observer A*, ktorého účasť hradí MŠ SR. V duchu omladenia tak na IMO v Mexiku, Slovinsku, Vietname, Španielsku a Nemecku bol v tejto funkcii vyššie spomínaný Peter Novotný, ktorý tým získal absolútny prehľad o dianí na IMO a má vynikajúce predpoklady robiť v budúcnosti za SR v Jury samé dobré rozhodnutia a čo je najdôležitejšie – má schopnosť objaviť ťažko viditeľné, ale predsa len korektne hodnotiteľné body v zmätku, ktorý nejeden náš žiak na IMO dá na papier. Čerstvý predseda SKMO však nie je jediným mladíkom „zo špice“. Veď Mgr. Janko Mazák, doktorand FMFI UK, bol už päťkrát ako pedagogický vedúci na IMO (od roku 2004 v Grécku až doteraz, okrem roku 2008 v Madride, kde bol iný mladík vynikajúcich kvalít – RNDr. Tomáš Jurík, PhD.). Asi nemusím dodávať, že pedagogický vedúci si tiež vyberie nemalý podiel na hľadaní skrytých bodov v riešeniach našich žiakov. Nemôžem síce vymenovať všetkých, ale predsa len uvediem niekoľko mien z tej najmladšej generácie, ktorí sú veľkým prísľubom pre budúcnosť MO: Ing. RNDr. František Kardoš, PhD., Mgr. Martin Potočný, Mgr. Hana Budáčová, Mgr. Štefan Gyürki, PhD., Mgr. Erika Trojáková, Michal Burger, Ondrej Budáč, František Simančík, Michal Prusák, Michal Takács, …

Aby som zabránil úvahám, že kto a prečo ma odvolal z funkcie predsedu SKMO, prehlasujem, že odvolal som sa sám a pracoval som na tom už dosť rokov. Potvrdiť to môžu viacerí, o. i. aj doc. RNDr. Martin Kalina, CSc., terajší predseda JSMF. Petra Novotného som do funkcie predsedu SKMO presadzoval ja, takže ak sa neosvedčí, tak je to len moja chyba. Z toho ale obavy nemám.

Na záver ďakujem všetkým svojim kolegom (a samozrejme kolegyniam) v SKMO za dlhoročnú spoluprácu, ktorá nie vždy bola bezproblémová – a asi nie raz aj mojou vinou – ale ak sa obzrieme, výsledok spolupráce nie je najhorší. Hodnotenie však prenechávam iným.

Pretože Ročenka je len o celoštátnych akciách, nie je možné vymenovať všetkých, ktorí sa na práci v MO podieľajú na školách, v oblastiach a krajoch. Nie je to bezmenná armáda; sú to veľké počty konkrétnych ľudí, bez ktorých by to však nešlo. Dovolím si teda všetkým aspoň touto cestou poďakovať.

Vojtech Bálint, bývalý predseda SKMO

Výsledky

Celoštátne kolo kategórie A

Víťazi

1.	Michal SPIŠIAK	4 G Grösslingová, Bratislava	7 7 7 6 4 5	36
	Jakub UHRÍK	4 G Grösslingová, Bratislava	7 7 7 5 4 6	36
3.	Michal HAGARA	3 G Jura Hronca, Bratislava	7 7 5 7 7 0	33
4.	Eduard EIBEN	4 G Poštová, Košice	7 7 3 7 4 3	31
5.	Peter CSIBA	4 ŠPMNDaG, Bratislava	7 7 7 4 1 0	26
6.	Martin BACHRATÝ	3 G Veľká okružná, Žilina	7 6 2 6 3 0	24
7.	Filip SLÁDEK	3 G A. Bernoláka, Námestovo	7 1 2 7 4 2	23
8.	Ján HOZZA	2 G Jura Hronca, Bratislava	7 7 1 1 4 2	22

Ďalší úspešní riešitelia

9.	Tomáš KUZMA	4 G Alejová, Košice	7 0 7 5 2 0	21
	Vincent LAMI	3 G J. Selyeho, Komárno	7 7 1 2 0 4	21
11.	Peter FULLA	4 SPŠ strojnícka, Spišská Nová Ves	7 1 2 3 4 3	20
12.	Ladislav BAČO	3 G Poštová, Košice	7 3 0 2 4 1	17
	Albert HERENCSÁR	4 G Z. Kodálya, Galanta	7 3 0 0 2 5	17
	Tomáš SZANISZLO	4 G J. G. Tajovského, B. Bystrica	7 3 0 5 0 2	17
15.	Tomáš BELAN	3 ŠPMNDaG, Bratislava	7 2 3 3 0 1	16
	Radomír BOSÁK	4 G Grösslingová, Bratislava	7 0 1 6 2 0	16
	Nikola HRDÁ	3 G Jura Hronca, Bratislava	7 7 0 2 0 0	16
	Natália KARÁSKOVÁ	3 G Grösslingová, Bratislava	7 1 4 1 2 1	16
	Fridrich VALACH	4 G Ľ. J. Šuleka, Komárno	7 1 2 4 2 0	16

Ostatní riešitelia

20.	Lenka MATEJOVIČOVÁ	4 G Jura Hronca, Bratislava	7 0 5 0 3 0	15
	Peter SLUKA	4 G Ľ. Štúra, Zvolen	7 0 4 0 0 4	15
22.	Michal HOJČKA	4 G Partizánske	7 0 6 1 0 0	14
	Martin UKROP	3 G Ľ. Štúra, Zvolen	7 0 3 0 2 2	14
24.	Igor KOSSACZKÝ	4 G Grösslingová, Bratislava	7 1 3 0 2 0	13
	Marek KUKAN	3 G Grösslingová, Bratislava	7 3 0 2 0 1	13
	István PARASZTI	4 G J. Selyeho, Komárno	7 2 1 2 0 1	13
	Marián PAULÍK	3 G J. G. Tajovského, B. Bystrica	7 0 1 5 0 0	13
28.	Jakub JURSA	4 G Alejová, Košice	7 0 1 2 1 0	11
29.	Jakub KONEČNÝ	3 G Grösslingová, Bratislava	7 0 1 2 0 0	10
	Martin ŠIMO	4 G Grösslingová, Bratislava	0 4 0 6 0 0	10
	Ivana TONHAUSEROVÁ	3 G Párovská, Nitra	7 0 1 0 2 0	10
32.	Matúš IVAN	4 G Kukučínova, Poprad	0 0 1 5 2 0	8

33.	Jozef FEKIAČ	4 G Grösslingová, Bratislava	0 1 2 1 1 0	5
34.	Georgios CHALIVOPULOS	3 G Jura Hronca, Bratislava	2 0 1 0 0 0	3
	Michal MAIXNER	4 G Varšavská, Žilina	0 3 0 0 0 0	3
36.	Marek BEHÚN	3 G Ľ. Štúra, Michalovce	0 0 0 0 0 2	2
	Jozef JAŠŠ	4 G L. Stockela, Bardejov	0 0 1 0 0 1	2
	Andrej KREJČÍR	3 G V. B. Nedožerského, Prievidza	0 0 1 0 0 1	2
39.	Zosia ORAVCOVÁ	4 G J. G. Tajovského, B. Bystrica	0 1 0 0 0 0	1

Úspešnosť jednotlivých úloh je zaznamenaná v tabuľke.

Počet bodov	**Spolu**	**Číslo úlohy**					
		1.	2.	3.	4.	5.	6.
7 bodov	46	30	8	4	3	1	0
6 bodov	7	0	1	1	4	0	1
5 bodov	9	0	0	2	5	0	2
4 body	14	0	1	2	2	7	2
3 body	15	0	5	4	2	2	2
2 body	29	1	2	5	7	9	5
1 bod	33	0	7	12	4	3	7
0 bodov	81	8	15	9	12	17	20
Priemer	2,57	5,44	2,36	2,21	2,62	1,59	1,21

Krajské kolá

Z príslušného kraja a v príslušnej kategórii A, B, C a Z9 sú uvedení všetci, resp. aspoň prvých 10 úspešných riešiteľov.

Kraj Bratislava

Kategória A

1.	Jakub KONEČNÝ	3 Gymnázium Grösslingová
2.	Jakub UHRÍK	4 Gymnázium Grösslingová
3.	Michal HAGARA	3 Gymnázium Jura Hronca
	Marek KUKAN	3 Gymnázium Grösslingová
	Michal SPIŠIAK	4 Gymnázium Grösslingová
6.	Jozef FEKIAČ	4 Gymnázium Grösslingová
	Lenka MATEJOVIČOVÁ	4 Gymnázium Jura Hronca
8.	Tomáš BELAN	3 ŠpMNDaG Skalická
	Natália KARÁSKOVÁ	3 Gymnázium Grösslingová
10.	Peter CSIBA	4 ŠpMNDaG Skalická

Kategória B

1.	Ján PULMANN	Gymnázium Grösslingová
2.	Ján HOZZA	Gymnázium Jura Hronca
	Matej VEČERÍK	ŠpMNDaG Skalická
4.	Viktor SZABADOS	Gymnázium Grösslingová
5.	Matej BALOG	Gymnázium Grösslingová
	Mariana PHUONG	Gymnázium Jura Hronca
7.	Dominik CSIBA	ŠpMNDaG Skalická
	Pavol GURIČAN	Gymnázium Grösslingová
	Juraj MACHÁČ	Gymnázium Jura Hronca
	Mária ŠORMANOVÁ	ŠpMNDaG Skalická

Kategória C

1.	Juraj POLÁCH	Gymnázium Grösslingová
	Michal TÓTH	Gymnázium Jura Hronca
3.	Šimon KARKALÍK	Gymnázium Jura Hronca
4.	Iveta KARPIŠOVÁ	Gymnázium Grösslingová
	Matej MOLNÁR	Gymnázium Jura Hronca
6.	Peter ŠICHMAN	Gymnázium Grösslingová
7.	Michaela BELANOVÁ	ŠpMNDaG Skalická
8.	Ján KUZMÍK	Gymnázium Grösslingová
9.	Tomáš LANGER	Gymnázium Jura Hronca
10.	Juraj MATÚŠ	Gymnázium Jura Hronca
	Alexandra RAVINGEROVÁ	Gymnázium Grösslingová

Kategória Z9

1.	Richard KAKAŠ	ZŠ Škarniclova
	Marta KOSSACZKÁ	Gymnázium Grösslingová
	Ivan MÁŠAN	ŠpMNDaG Skalická
4.	Daniela PELLEROVÁ	Gymnázium Grösslingová
5.	Ondrej GARAJ	Gymnázium Grösslingová
	Michal HLEDÍK	Spojená škola sv. Vincenta de Paul
	Dušan KAVICKÝ	ZŠ Beňovského
	Matej SILNÝ	Gymnázium Grösslingová
	Martin SMOLÍK	Gymnázium Grösslingová
	Andrej STARUCH	Gymnázium Grösslingová

Kraj Nitra

Kategória A

1.	Fridrich VALACH	4 Gymnázium Ľ. J. Šuleka, Komárno
2.	István PARASZTI	4 Gymnázium J. Selyeho, Komárno
3.	Ivana TONHAUSEROVÁ	3 Gymnázium Párovská, Nitra
4.	Vincent LAMI	3 Gymnázium J. Selyeho, Komárno

Kategória B

1.	Dávid IZSÁK	Gymnázium J. Selyeho, Komárno
2.	Silvia ŠTRBOVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
3.	Lívia LEŠŠOVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
4.	Eva MAGYAROVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
5.	Tibor JUHÁSZ	Cirk. gymnázium Sv. Michala, Levice
	Gergely SZABÓ	Gymnázium J. Selyeho, Komárno
7.	Štefan FARŠANG	Gymnázium J. Selyeho, Komárno
8.	Imre KUCZMANN	Gymnázium Želiezovce
	Matyás VARGA	Gymnázium J. Selyeho, Komárno
10.	Tomáš SMOLÁRIK	Gymnázium Šurany
	Tomáš TRUNGEL	Gymnázium A. Vrábla, Levice

Kategória C

1.	Daniela NOVÁKOVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
	Tünde TARCSIOVÁ	Gymnázium J. Selyeho, Komárno
3.	Marián HORŇÁK	Gymnázium Párovská, Nitra
4.	Farkas FERENCZ	Gymnázium J. Selyeho, Komárno
5.	Andrej MARIŠ	Piaristické gymn. sv. J. Kalazanského, Nitra
6.	Mária MLADÁ	Gymnázium J. Kráľa, Zlaté Moravce
7.	Henrieta BACIGÁLOVÁ	Gymnázium J. Kráľa, Zlaté Moravce
	Anikó KUKLIS	Gymnázium J. Selyeho, Komárno
	Jakub PAVČO	Gymnázium A. Vrábla, Levice
	Tomáš VEŠKRNA	Gymnázium A. Vrábla, Levice

Kategória Z9

1.	Park CHOONG EUN	ZŠ Práce, Komárno
	László MÁZIK	ZŠ Práce, Komárno
	Máté ŠKODA	ZŠ Práce, Komárno
4.	Norbert DANIŠÍK	ZŠ Čakajovce

5.	Romana FRIDRIKOVÁ	Gymnázium Šurany
	Richard HODA	ZŠ G. Bethlena, Nové Zámky
	Bálint KISS	ZŠ Mierová, Želiezovce
	Dominika KUBALOVÁ	ZŠ Rozmarínová, Komárno
	Jozef KUŤKA	ZŠ Komjatice
	Miloš KÚTNY	ZŠ Močenok
	Zuzana ONDOVČINOVÁ	ZŠ Saratovská, Levice
	Nghia PHAM VAN	Gymnázium Šurany
	Daniela POLÁKOVÁ	ZŠ Komjatice
	Ladislav ÜRGE	ZŠ G. Czuczora, Nové Zámky
	Norbert ZSITVA	ZŠ Pribeta

Kraj Trnava

Kategória A

1.	Albert HERENCSÁR	4 Gymnázium Z. Kodálya, Galanta

Kategória B

1.	Péter BÖGI	Gymnázium Veľký Meder
	Jozef MELICHER	Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany
3.	Patrik LABAŠ	Gymnázium Skalica
4.	Andrej DANO	Športové gymnázium J. Herdu, Trnava
5.	Tomáš HUSÁR	Gymnázium Skalica
	Andrej MUDROCH	Gymnázium L. Novomeského, Senica

Kategória C

1.	Pavol KOPRDA	Gymnázium A. Merici, Trnava
2.	Anna FAZEKAS	Súkr. gymnázium D. Streda
	Marta SÁRKÖZYOVÁ	Gymnázium Veľký Meder

Kategória Z9

1.	Stanislav ČERNÝ	ZŠ Kľačany
2.	János LELKES	Gymnázium I. Madácha, Šamorín
	Lukáš SLOUKA	ZŠ Zavar
4.	Simona KUSENDOVÁ	Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany
	Stanislava LISICKÁ	ZŠ Komenského, Senica
	József RÓZSA	ZŠ Á. Vámbéryho, D. Streda

7.	Barbora ECKEROVÁ	ZŠ Červeník
	Kristína CHVOSTEKOVÁ	ZŠ Sadová, Senica
	Andrea JURÁKOVÁ	ZŠ Brezová, Piešťany
	Martin MASÁR	ZŠ Moravany nad Váhom
	Simona OŽVOLDÍKOVÁ	ZŠ Sadová, Senica
	Dominik PISAROVIČ	Gymnázium A. Merici, Trnava
	Miriam URBANOVÁ	ZŠ Brezová, Piešťany

Kraj Trenčín

Kategória A

1.	Michal HOJČKA	4 Gymnázium Partizánske
	Andrej KREJČÍR	3 Gymnázium V. B. Nedožerského, Prievidza

Kategória B

1.	Jarier WANNOUS	Gymnázium Dubnica nad Váhom
2.	Jana PODLUCKÁ	Gymn. J. Jesenského, Bánovce nad Bebravou
3.	Samuel BEZNÁK	Gymnázium Dubnica nad Váhom
	Lukáš KRAMÁRIK	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
5.	Zuzana ŠINSKÁ	Gymn. J. Jesenského, Bánovce nad Bebravou
6.	Andrea DIŽOVÁ	Gymnázium Partizánske
7.	Barbora DROZDOVÁ	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
8.	Miroslav HROMÁDKA	Gymnázium I. Bellu, Handlová
	Michal KRČIK	Gymnázium V. B. Nedožerského, Prievidza

Kategória C

1.	Samuel BEZNÁK	Gymnázium Dubnica nad Váhom
2.	Tomáš FARKAŠ	Gymnázium V. B. Nedožerského, Prievidza
3.	Patrik ŠVANČARA	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín

Kategória Z9

1.	Sabina FRAŇOVÁ	ZŠ Janka Kráľa, Nová Dubnica
2.	Andrej FIAČAN	ZŠ Mariánska, Prievidza
	Kristián HANUS	ZŠ Krajné
	Petra HROMADOVÁ	ZŠ Nedožery-Brezany
	Veronika MUDROŇOVÁ	ZŠ Dlhé Hony, Trenčín
6.	Martin KLIMČÍK	ZŠ Novomeského, Trenčín

	Monika MICHALÍKOVÁ	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
	Veronika PREKOPOVÁ	ZŠ Pod hájom, Dubnica nad Váhom
9.	Maroš ÁBEL	ZŠ Veľkomoravská, Trenčín
	Adriana BREHOVSKÁ	ZŠ Mládežnícka, Púchov
	Michal ČERVEŇÁK	ZŠ Gorazdova, Púchov
	Peter HOSTAČNÝ	ZŠ J. A. Komenského, Bánovce nad Bebravou
	Marek KURIŠ	ZŠ Rastislavova, Prievidza
	Alexandra MATOVÁ	ZŠ Štúrova, Nové Mesto nad Váhom

Kraj Žilina

Kategória A

1.	Martin BACHRATÝ	3 Gymnázium Veľká okružná, Žilina
2.	Filip SLÁDEK	3 Gymnázium A. Bernoláka, Námestovo
3.	Michal MAIXNER	4 Gymnázium Varšavská, Žilina

Kategória B

1.	Marián HALČIN	Gymnázium M. Hattalu, Trstená
2.	Michal KEKELY	Gymnázium Varšavská, Žilina
3.	Andrej ŽILINČÍK	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
4.	Matej JEČMEN	Gymnázium Varšavská, Žilina
	Lukáš KOPNICKÝ	Gymnázium J. Lettricha, Martin
	Jakub SANTER	Gymnázium M. Hattalu, Trstená
7.	Andrej VLČEK	Ev. gymnázium J. Tranovského, Lipt. Mikuláš
8.	Martin BEDNÁR	Gymnázium Veľká okružná, Žilina

Kategória C

1.	Katarína LEŠKOVÁ	Gymnázium Sučany
2.	Soňa GALOVIČOVÁ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
	Andrej VLČEK	Ev. gymnázium J. Tranovského, Lipt. Mikuláš
4.	Adriana SANTROVÁ	Gymnázium M. Hattalu, Trstená
5.	Barbora HALAJOVÁ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
	Katarína JASENČÁKOVÁ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina

Kategória Z9

1.	Juliana KLOUDOVÁ	Gymnázium Sučany
2.	Patricia KLOBUŠIAKOVÁ	ZŠ Bystrická cesta, Ružomberok

	Filip KURIC	ZŠ Krásno nad Kysucou
4.	Helena DOBOSZOVÁ	Gymnázium Varšavská, Žilina
	Juraj DRUSKA	ZŠ Liptovská Teplá
	Tomáš GAŠIAK	ZŠ Snežnica
	Martin GAZDAG	Gymnázium J. Lettricha, Martin
	Silvia HNILICKÁ	ZŠ Eliáša Lániho, Bytča
	Martin ILAVSKÝ	ZŠ J. Kráľa, Lipt. Mikuláš
	Maroš JÁNOVEC	ZŠ Krásno nad Kysucou
	Adam JENDRYŠČÍK	ZŠ Radoľa
	Michal KOTRČ	ZŠ V. Javorku, Žilina
	Martin LIKAVČAN	Gymnázium Varšavská, Žilina
	Eva SLANČÍKOVÁ	ZŠ J. Matúšku, D. Kubín
	Kristína ŠRÁMKOVÁ	Gymnázium Liptovský Hrádok
	Michal TURCEL	Gymnázium Varšavská, Žilina

Kraj Banská Bystrica

Kategória A

1.	Tomáš SZANISZLO	4	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
2.	Peter SLUKA	4	Gymnázium Ľ. Štúra, Zvolen
3.	Marián PAULÍK	3	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
4.	Martin UKROP	3	Gymnázium Ľ. Štúra, Zvolen
5.	Zosia ORAVCOVÁ	4	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica

Kategória B

1.	Radka CHOMUTOVÁ	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
2.	Filip KŠENZULIAK	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
3.	Jana FODOROVÁ	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Lukáš MATÚŠKA	Gymnázium B. S.-Timravy, Lučenec
	Jakub ŠINOGL	Gymnázium Žiar nad Hronom
6.	Michal MITTER	Gymnázium B. S.-Timravy, Lučenec
7.	Michal ANDERLE	Gymnázium B. S.-Timravy, Lučenec

Kategória C

V kategórii C neboli žiadni úspešní riešitelia.

Kategória Z9

1. Jakub CIMERMAN	ZŠ Badín
Ján MURÍN	ZŠ Nám. mládeže, Zvolen
3. Veronika HRAŠKOVÁ	Gymnázium B. S.-Timravy, Lučenec
Zuzana OSLANCOVÁ	ZŠ M. R. Štefánika, Žiar nad Hronom
5. Emese PREGI	ZŠ Veľké Dravce
6. Zuzana BOBOTOVÁ	ZŠ Kukučínova, Detva
Sabína ČAMAJOVÁ	ZŠ Dr. Jánskeho, Žiar nad Hronom
Roman FEHÉRVÁRI	ZŠ Školská, Fiľakovo
Lenka HELDOVÁ	ZŠ SSV, B. Bystrica
Kristína KOMANOVÁ	ZŠ Moskovská, B. Bystrica
Milada KOVÁČOVÁ	ZŠ A. Kmeťa, Žarnovica
Dávid LUPTÁK	ZŠ Bakossova, B. Bystrica
Vladimír MACKO	Gymnázium A. Sládkoviča, Krupina
Jela NOCIAROVÁ	ZŠ M. R. Štefánika, Lučenec
Kristína SACHEROVÁ	Gymnázium B. S.-Timravy, Lučenec
Juraj ŠIPULA	ZŠ Spojová, B. Bystrica

Kraj Košice

Kategória A

1. Ladislav BAČO	3 Gymnázium Poštová, Košice
2. Eduard EIBEN	4 Gymnázium Poštová, Košice
Peter FULLA	4 SPŠ strojnícka, Spišská Nová Ves
4. Marek BEHÚN	3 Gymnázium Ľ. Štúra, Michalovce
5. Tomáš KUZMA	4 Gymnázium Alejová, Košice
6. Jakub JURSA	4 Gymnázium Alejová, Košice

Kategória B

1. Peter MILOŠOVIČ	Gymnázium Poštová, Košice
Mária MRÁZOVÁ	Gymnázium P. Horova, Michalovce
3. Tomáš BABEJ	Gymnázium Poštová, Košice
Jana BOCKOVÁ	Gymnázium Poštová, Košice
Juraj HORŇÁK	Gymnázium P. Horova, Michalovce
Ladislav HOVAN	Gymnázium Exnárova, Košice
Erik KÉPEŠ	Gymnázium S. Máraiho, Košice
Stanislav ŠTEFANISKO	Gymnázium Ľ. Štúra, Michalovce
Monika ZLACZKÁ	Gymnázium Poštová, Košice

10.	Dávid HVIZDOŠ	Gymnázium Poštová, Košice
	Katarína RÉVÉSZOVÁ	Gymnázium Poštová, Košice
	Ištván SATMÁRI	Gymnázium Poštová, Košice

Kategória C

1.	Martin VODIČKA	Gymnázium Alejová, Košice
2.	Martina DRENČÁKOVÁ	Gymnázium Šrobárova, Košice
	Daniela VÍŤAZKOVÁ	Gymnázium Poštová, Košice
4.	Dávid SZABARI	Gymnázium Alejová, Košice
	Ondrej ŠOFRANKO	Gymnázium sv. T. Akvinského, Košice
6.	Klára FICKOVÁ	Gymnázium Poštová, Košice
	Radovan HNATIČ	Gymnázium Poštová, Košice
	Jozef LAMI	Gymnázium Poštová, Košice
	Michal MELÍŠEK	Gymnázium Poštová, Košice
10.	Michal KOVÁČ	Gymnázium Exnárova, Košice

Kategória Z9

1.	Patrik BELUŠKO	ZŠ Grundschule, Gelnica
	Michal GANOVSKÝ	ZŠ Grundschule, Gelnica
	Daniel HENNEL	ZŠ Hutnícka, Spišská Nová Ves
	Jana HOLÍKOVÁ	ZŠ Švermova, Michalovce
	František LAMI	ZŠ Nám. L. Novomeského, Košice
	Mária ORAVCOVÁ	ZŠ Abovská, Košice
	Jakub ŠAFIN	ZŠ Okružná, Michalovce
	Martin VODIČKA	Gymnázium Alejová, Košice
	Andrea ZAJACOVÁ	ZŠ Nad Medzou, Spišská Nová Ves
10.	Tomáš LIPTÁK	ZŠ Abovská, Košice
	Viliam VALENT	ZŠ Bernolákova, Košice

Kraj Prešov

Kategória A

1.	Adam MIDLIK	3 Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
2.	Jozef JAŠŠ	4 Gymnázium L. Stockela, Bardejov
3.	Matúš IVAN	4 Gymnázium Kukučínova, Poprad

Kategória B

1.	Jakub DEMJAN	Gymnázium Snina
2.	Jakub KOCÁK	Gymnázium arm. gen. L. Svobodu, Humenné
3.	Martin BENEJ	Gymnázium arm. gen. L. Svobodu, Humenné
	Denisa MARTONOVÁ	Gymnázium D. Tatarku, Poprad
5.	Samuel HAVADEJ	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
	Matúš NEMEC	Gymnázium Kukučínova, Poprad
	Miroslava VAŠKOVÁ	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
8.	Michal FECKO	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov

Kategória C

1.	Monika DANILÁKOVÁ	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
	Peter DUPEJ	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
3.	Jozef DŽAMA	Gymnázium sv. Moniky, Prešov
4.	Stanislava MARUŠINOVÁ	Gymnázium Kukučínova, Poprad
5.	Marcel SCHICHMAN	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
6.	Pavol GAJDOŠ	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
	Barbora KLEMBAROVÁ	Gymnázium Kukučínova, Poprad
	Barbora MAREČÁKOVÁ	Gymnázium Kukučínova, Poprad

Kategória Z9

1.	Štefan MLYNARČÍK	ZŠ Tajovského, Poprad
2.	Michaela POĽANOVSKÁ	ZŠ Nám. Štefana Kluberta, Levoča
	Jakub SENDERÁK	ZŠ Šmeralova, Prešov
4.	Stanislav KAČMARIK	ZŠ Slovenská Ves
	Kamila MAREŠOVÁ	ZŠ Jarná, Poprad
	Elena MIZERÁKOVÁ	ZŠ Šmeralova, Prešov
	Michaela ZORIČÁKOVÁ	ZŠ Dr. Fischera, Kežmarok
8.	Radka SVITANOVÁ	ZŠ Dr. Fischera, Kežmarok
	Paula ŽIDOVSKÁ	ZŠ Dr. Fischera, Kežmarok
10.	Katarína ČEKANOVÁ	Cirk. ZŠ sv. Jána Krstiteľa, Sabinov

Zadania súťažných úloh

Kategória C

C – I – 1

Tomáš, Jakub, Martin a Peter organizovali na námestí zbierku pre dobročinné účely. Za chvíľu sa pri nich postupne zastavilo päť okoloidúcich. Prvý dal Tomášovi do jeho pokladničky 3 Sk, Jakubovi 2 Sk, Martinovi 1 Sk a Petrovi nič. Druhý dal jednému z chlapcov 8 Sk a ostatným trom nedal nič. Tretí dal dvom chlapcom po 2 Sk a dvom nič. Štvrtý dal dvom chlapcom po 4 Sk a dvom nič. Piaty dal dvom chlapcom po 8 Sk a dvom nič. Potom chlapci zistili, že každý z nich vyzbieral inú čiastku, pričom tieto tvoria štyri po sebe idúce prirodzené čísla. Ktorý z chlapcov vyzbieral najmenej a ktorý najviac korún? (*Peter Novotný*)

C – I – 2

Pravouhlému trojuholníku ABC s preponou AB je opísaná kružnica. Päty kolmíc z bodov A, B na dotyčnicu k tejto kružnici v bode C označme D, E. Vyjadrite dĺžku úsečky DE pomocou dĺžok odvesien trojuholníka ABC. (*Pavel Leischner*)

C – I – 3

Nájdite všetky štvorciferné čísla n, ktoré majú nasledujúce tri vlastnosti: V zápise čísla n sú dve rôzne cifry, každá dvakrát. Číslo n je deliteľné siedmimi. Číslo, ktoré vznikne otočením poradia cifier čísla n, je tiež štvorciferné a deliteľné siedmimi.

(*Pavel Novotný*)

C – I – 4

Daný je konvexný päťuholník $ABCDE$. Na polpriamke BC zostrojte taký bod G, aby obsah trojuholníka ABG bol zhodný s obsahom daného päťuholníka.

(*Lucie Růžičková*)

C – I – 5

Z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 99\}$ vyberte čo najväčší počet čísel tak, aby súčet žiadnych dvoch vybraných čísel nebol násobkom jedenástich. (Vysvetlite, prečo zvolený výber má požadovanú vlastnosť a prečo žiadny výber väčšieho počtu čísel nevyhovuje.)

(*Jaromír Šimša*)

C – I – 6

Dokážte, že pre ľubovoľné rôzne kladné čísla a, b platí

$$\frac{a+b}{2} < \frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

(*Jaromír Šimša*)

C – S – 1

Dokážte, že pre ľubovoľné nezáporné čísla a, b, c platí

$$(a+bc)(b+ac) \geqq ab(c+1)^2.$$

Zistite, kedy nastane rovnosť. (*Jaromír Šimša*)

C – S – 2

V pravouhlom trojuholníku ABC označíme P pätu výšky z vrcholu C na preponu AB. Priesečník úsečky AB s priamkou, ktorá prechádza vrcholom C a stredom kružnice vpísanej trojuholníku PBC, označíme D. Dokážte, že úsečky AD a AC sú zhodné.

(*Pavel Leischner*)

C – S – 3

Keď isté dve prirodzené čísla v rovnakom poradí sčítame, odčítame, vydelíme a vynásobíme a všetky štyri výsledky sčítame, dostaneme 2 009. Určte tieto dve čísla.

(*Vojtech Bálint*)

C – II – 1

Uvažujme výraz

$$V(x) = \frac{5x^4-4x^2+5}{x^4+1}.$$

a) Dokážte, že pre každé reálne číslo x platí $V(x) \geqq 3$.
b) Nájdite najväčšiu hodnotu $V(x)$. (*Aleš Kobza*)

C – II – 2

V pravouhlom trojuholníku ABC označíme P pätu výšky z vrcholu C na preponu AB a D, E stredy kružníc vpísaných postupne trojuholníkom APC, CPB. Dokážte, že stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC je priesečníkom výšok trojuholníka CDE.

(*Pavel Leischner*)

C – II – 3

Z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 99\}$ je vybraných niekoľko rôznych čísel tak, že súčet žiadnych troch z nich nie je násobkom deviatich.

a) Dokážte, že medzi vybranými číslami sú najviac štyri deliteľné tromi.

b) Ukážte, že vybraných čísel môže byť 26. (*Jaromír Šimša*)

C – II – 4

Pravouhlému trojuholníku ABC s preponou AB a obsahom S je opísaná kružnica. Dotyčnica k tejto kružnici v bode C pretína dotyčnice vedené bodmi A a B v bodoch D a E. Vyjadrite dĺžku úsečky DE pomocou dĺžky c prepony a obsahu S.

(*Peter Novotný*)

Kategória B

B – I – 1

Na tabuli je napísané štvorciferné číslo deliteľné ôsmimi, ktorého posledná cifra je 8. Keby sme poslednú cifru nahradili cifrou 7, získali by sme číslo deliteľné deviatimi. Keby sme však poslednú cifru nahradili cifrou 9, získali by sme číslo deliteľné siedmimi. Určte číslo, ktoré je napísané na tabuli. (*Peter Novotný*)

B – I – 2

Určte všetky trojice (x, y, z) reálnych čísel, pre ktoré platí

$$x^2 + xy = y^2 + z^2,$$
$$z^2 + zy = y^2 + x^2.$$

(*Jaroslav Švrček*)

B – I – 3

Na strane BC, resp. CD rovnobežníka $ABCD$ určte body E, resp. F tak, aby úsečky

EF, BD boli rovnobežné a trojuholníky ABE, AEF a AFD mali rovnaké obsahy. (*Jaroslav Zhouf*)

B – I – 4

Na pláne 7×7 hráme hru lode. Nachádza sa na nej jedna loď 2×3. Môžeme sa spýtať na ľubovoľné políčko plánu, a ak loď zasiahneme, hra končí. Ak nie, pýtame sa znova. Určte najmenší počet otázok, ktoré potrebujeme, aby sme s istotou loď zasiahli. (*Ján Mazák*)

B – I – 5

Trojuholníku ABC je opísaná kružnica k. Os strany AB pretne kružnicu k v bode K, ktorý leží v polrovine opačnej k polrovine ABC. Osi strán AC a BC pretnú priamku CK postupne v bodoch P a Q. Dokážte, že trojuholníky AKP a KBQ sú zhodné. (*Leo Boček*)

B – I – 6

Nájdite všetky dvojice celých čísel (m, n), pre ktoré je hodnota výrazu

$$\frac{m + 3n - 1}{mn + 2n - m - 2}$$

celé kladné číslo. (*Vojtech Bálint*)

B – S – 1

V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} ax + y &= 2, \\ x - y &= 2a, \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$

s neznámymi x, y a reálnym parametrom a. (*Jaroslav Švrček*)

B – S – 2

Pre vnútorný bod P strany AB ostrouhlého trojuholníka ABC označme K a L päty kolmíc z bodu P na priamky AC a BC. Zostrojte taký bod P, pre ktorý priamka CP rozpoľuje úsečku KL. (*Pavel Calábek*)

B – S – 3

Číslo nazveme *magickým* práve vtedy, keď sa dá vyjadriť ako súčet trojciferného čísla m a trojciferného čísla m' zapísaného rovnakými číslicami v opačnom poradí. Niektoré magické čísla možno takto vyjadriť viacerými spôsobmi; napríklad $1554 = 579 + 975 = 777+777$. Určte všetky magické čísla, ktoré majú takých vyjadrení $m+m'$ čo najviac. (Na poradie m a m' neberieme ohľad.) (*Aleš Kobza*)

B – II – 1

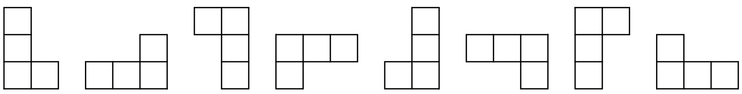
V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x + y &= 1, \\ x - y &= a, \\ -4ax + 4y &= z^2 + 4 \end{aligned}$$

s neznámymi x, y, z a reálnym parametrom a. (*Jaroslav Švrček*)

B – II – 2

Na pláne 5×5 hráme hru lode. Zo štyroch políčok plánu je vytvorená jedna loď niektorého z tvarov na obr. 1. Môžeme sa spýtať na ľubovoľné políčko plánu, a ak loď



Obr. 1

zasiahneme, hra končí.

a) Navrhnite osem políčok, na ktoré sa stačí spýtať, aby sme mali istotu zásahu lode.

b) Zdôvodnite, prečo žiadnych sedem otázok takú istotu nedáva. (*Ján Mazák*)

B – II – 3

Je daný ostrouhlý trojuholník ABC, ktorý nie je rovnoramenný. Označme K priesečník osi uhla ACB s osou strany AB. Priamka CK pretína výšky z vrcholov A a B v bodoch, ktoré označíme postupne P a Q. Predpokladajme, že trojuholníky AKP a BKQ majú rovnaký obsah. Určte veľkosť uhla ACB. (*Ján Mazák*)

B – II – 4

K ľubovoľnému prirodzenému číslu určíme jeho zvyšky po delení každým z desiatich prirodzených čísel $2, 3, 4, \ldots, 11$ a týchto desať zvyškov (niektoré môžu byť nulové) sčítame. Určte všetky také čísla menšie ako 25 000, ktoré majú uvedený súčet čo najmenší. (Nulu za prirodzené číslo nepovažujeme). (*Jaromír Šimša*)

Kategória A

A – I – 1

V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$2\sin x\cos(x+y)+\sin y=1,$$
$$2\sin y\cos(y+x)+\sin x=1.$$

(*Jaroslav Švrček*)

A – I – 2

Daný je tetivový štvoruholník $ABCD$. Dokážte, že spojnica priesečníkov výšok trojuholníka ABC s priesečníkom výšok trojuholníka ABD je rovnobežná s priamkou CD. (*Tomáš Jurík*)

A – I – 3

Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel x, y také, že $\dfrac{xy^2}{x+y}$ je prvočíslo. (*Ján Mazák*)

A – I – 4

Uvažujme nekonečnú aritmetickú postupnosť

$$a, a+d, a+2d, \dots, \qquad (*)$$

kde a, d sú prirodzené (t. j. kladné celé) čísla.

a) Nájdite príklad postupnosti $(*)$, ktorá obsahuje nekonečne veľa k-tych mocnín prirodzených čísel pre všetky $k=2,3,\dots$

b) Nájdite príklad postupnosti $(*)$, ktorá neobsahuje žiadnu k-tu mocninu prirodzeného čísla pre žiadne $k=2,3,\dots$

c) Nájdite príklad postupnosti $(*)$, ktorá neobsahuje žiadnu druhú mocninu prirodzeného čísla, ale obsahuje nekonečne veľa tretích mocnín prirodzených čísel.

d) Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla a, d, k ($k>1$) platí: Postupnosť $(*)$ buď neobsahuje žiadnu k-tu mocninu prirodzeného čísla, alebo obsahuje nekonečne veľa k-tych mocnín prirodzených čísel. (*Jaroslav Zhouf*)

A – I – 5

V každom vrchole pravidelného 2008-uholníka leží jedna minca. Vyberieme dve mince a premiestnime každú z nich do susedného vrcholu tak, že jedna sa posunie v smere a druhá proti smeru chodu hodinových ručičiek. Rozhodnite, či je možné týmto spôsobom všetky mince postupne presunúť:

a) na 8 kôpok po 251 minciach,
b) na 251 kôpok po 8 minciach. (*Radek Horenský*)

A – I – 6

Daný je trojuholník ABC. Vnútri strán AC, BC sú dané body E, D tak, že $|AE| = |BD|$. Označme M stred strany AB a P priesečník priamok AD a BE. Dokážte, že obraz bodu P v stredovej súmernosti so stredom M leží na osi uhla ACB.

(*Ján Mazák*)

A – S – 1

Zistite, pre ktoré dvojice kladných celých čísel m a n platí

$$\sqrt{m^2-4} < 2\sqrt{n} - m < \sqrt{m^2-2}.$$

(*Jaromír Šimša*)

A – S – 2

Nech ABC je ostrouhlý trojuholník, v ktorom vnútorný uhol pri vrchole A má veľkosť 45°. Označme D pätu výšky z vrcholu C. Uvažujme ďalej ľubovoľný vnútorný bod P výšky CD. Dokážte tvrdenie: Priamky AP a BC sú navzájom kolmé práve vtedy, keď úsečky AP a BC sú zhodné. (*Jaroslav Švrček*)

A – S – 3

Určte všetky prirodzené čísla, ktorými možno krátiť niektorý zo zlomkov tvaru

$$\frac{3p-q}{5p+2q},$$

kde p a q sú nesúdeliteľné celé čísla. (*Vojtech Bálint*)

A – II – 1

Isté štvorciferné prirodzené číslo je deliteľné siedmimi. Ak zapíšeme jeho číslice v opačnom poradí, dostaneme väčšie štvorciferné číslo, ktoré je tiež deliteľné siedmimi. Navyše po delení číslom 37 dávajú obe spomenuté štvorciferné čísla rovnaký zvyšok. Určte pôvodné štvorciferné číslo. (*Jaromír Šimša*)

A – II – 2

Na odvesnách dĺžok a, b pravouhlého trojuholníka ležia postupne stredy dvoch kružníc k_a, k_b. Obe kružnice sa dotýkajú prepony a prechádzajú vrcholom oproti prepone. Polomery uvedených kružníc označme ϱ_a, ϱ_b. Určte najväčšie kladné reálne číslo p také, že nerovnosť

$$\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} \geqq p\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

platí pre všetky pravouhlé trojuholníky. (*Jaroslav Švrček*)

A – II – 3

Určte veľkosti vnútorných uhlov α, β, γ trojuholníka, pre ktoré platí

$$\begin{aligned} 2\sin\beta\sin(\alpha+\beta) - \cos\alpha &= 1, \\ 2\sin\gamma\sin(\beta+\gamma) - \cos\beta &= 0. \end{aligned}$$

(*Jaroslav Švrček*)

A – II – 4

Vnútri strany BC ostrouhlého trojuholníka ABC zvoľme bod D a na úsečke AD bod P tak, aby neležal na ťažnici z vrcholu C. Priamka tejto ťažnice pretne kružnicu opísanú trojuholníku CPD v bode, ktorý označíme K ($K \neq C$). Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku AKP prechádza okrem bodu A ďalším pevným bodom, ktorý od výberu bodov D a P nezávisí. (*Tomáš Jurík*)

A – III – 1

Dokážte, že ak sú všetky čísla p, $3p+2$, $5p+4$, $7p+6$, $9p+8$ a $11p+10$ prvočísla, tak číslo $6p+11$ je zložené. (*Pavel Novotný*)

A – III – 2

Na kratšom z oblúkov CD kružnice opísanej pravouholníku $ABCD$ zvoľme bod P. Päty kolmíc z bodu P na priamky AB, AC a BD označme postupne K, L a M. Ukážte, že uhol LKM má veľkosť $45°$ práve vtedy, keď $ABCD$ je štvorec. (*Tomáš Jurík*)

A – III – 3

Nájdite najmenšie kladné číslo x, pre ktoré platí: Ak a, b, c, d sú ľubovoľné kladné čísla, ktorých súčin je 1, potom

$$a^x + b^x + c^x + d^x \geqq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

(*Pavel Novotný*)

A – III – 4

Skúmajme, pre ktoré prirodzené čísla n existujú práve štyri prirodzené čísla k také, že číslo $n + k$ je deliteľom čísla $n + k^2$.

a) Ukážte, že vyhovuje $n = 58$ a nájdite príslušné štyri k.

b) Dokážte, že párne $n = 2p$, kde $p \geqq 3$, vyhovuje práve vtedy, keď p aj $2p + 1$ sú prvočísla.

(Nulu medzi prirodzené čísla nepočítame.) (*Jaromír Šimša*)

A – III – 5

V každom z vrcholov pravidelného n-uholníka $A_1A_2 \dots A_n$ leží určitý počet mincí: vo vrchole A_k je to práve k mincí, $1 \leqq k \leqq n$. Vyberieme dve mince a preložíme každú z nich do susedného vrcholu tak, že jedna sa posunie v smere a druhá proti smeru chodu hodinových ručičiek. Rozhodnite, pre ktoré n možno po konečnom počte takých preložení dosiahnuť, že pre ľubovoľné k, $1 \leqq k \leqq n$, bude vo vrchole A_k ležať $n + 1 - k$ mincí. (*Radek Horenský*)

A – III – 6

V rovine ω sú dané dva rôzne body O a T. Nájdite množinu vrcholov všetkých trojuholníkov, ktoré ležia v rovine ω a majú ťažisko v bode T a stred opísanej kružnice v bode O. (*Jaromír Šimša*)

Riešenia súťažných úloh

Kategória C

C – I – 1

Dokopy chlapci dostali $3 + 2 + 1 + 8 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 8 = 42$ Sk. Toto číslo možno jediným spôsobom vyjadriť ako súčet štyroch po sebe idúcich prirodzených čísel: $42 = 9 + 10 + 11 + 12$. Štyria chlapci teda (v nejakom poradí) vyzbierali sumy 9, 10, 11 a 12 Sk.

Žiadny chlapec nemohol dostať 8 Sk zároveň od druhého aj od piateho okoloidúceho (inak by mal aspoň 16 Sk, najviac však mohol každý z chlapcov dostať 12 Sk). Takže od druhého a piateho majú traja chlapci po 8 Sk a jeden od nich nedostal nič. Najviac jeden z týchto troch chlapcov mohol dostať 4 Sk od štvrtého okoloidúceho, inak by mali už aspoň dvaja chlapci aspoň 12 Sk. Štvrtý okoloidúci musel teda dať 4 Sk práve jednému z nich a 4 Sk zostávajúcemu chlapcovi. Bez peňazí prvého a tretieho okoloidúceho teda majú chlapci vybraných 12, 8, 8 a 4 Sk. Chlapec, ktorý dostal v súčte od druhého, štvrtého a piateho okoloidúceho dvanásť korún, už nemohol dostať od prvého a tretieho okoloidúceho nič, lebo by mal viac ako dvanásť korún. Ten, ktorý dostal v súčte od druhého, štvrtého a piateho okoloidúceho 4 Sk, musel dostať od prvého a tretieho v súčte maximálnu možnú čiastku, t. j. $3+2 = 5$ Sk, inak by mal dokopy menej ako 9 Sk (dostal teda práve 9 Sk a vyzbieral najmenej). Takže najmenej vyzbieral Tomáš, lebo on dostal od prvého okoloidúceho 3 Sk, a najviac Peter, ktorý od prvého okoloidúceho nedostal nič.

Úvahy ľahko dokončíme a ukážeme, že popísané rozdelenie *je* skutočne *možné*. Ako už vieme, Tomáš vyzbieral 9 Sk a Peter 12 Sk. Jakub, ktorý dostal 2 Sk od prvého, nemohol dostať od tretieho nič, takže dostal celkom 10 Sk, a Martin 11 Sk. Všetky úvahy môžeme prehľadne usporiadať do tabuľky, ktorú postupne dopĺňame.

1	2	3	4	5	Σ
	$\boxed{8}$		0	0	
	0		0	$\boxed{8}$	
0	0	0	$\boxed{4}$	$\boxed{8}$	$12 \to$ P
3	0	**2**	$\boxed{4}$	0	$\leqq 9 \to$ T
1+**2**+**3**	1×**8**	2×**2**	2×**4**	2×**8**	

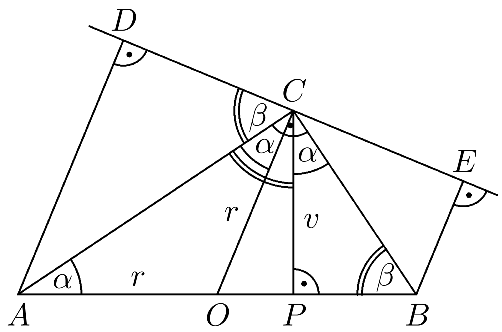
C – I – 2

Označme odvesny trojuholníka ABC zvyčajným spôsobom a, b a protiľahlé uhly α, β. Stred prepony AB (ktorý je súčasne stredom opísanej kružnice) označíme O (obr. 2).

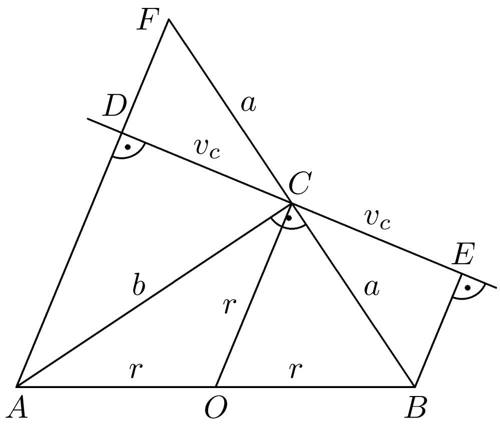
Výška $v = CP$ rozdeľuje trojuholník ABC na trojuholníky ACP a CBP podobné trojuholníku ABC podľa vety *uu* ($\alpha + \beta = 90°$), úsečka OC je kolmá na DE a navyše $|OC| = |OA| = r$ (polomer opísanej kružnice). Odtiaľ $|\measuredangle OCA| = |\measuredangle OAC| = \alpha$ a $|\measuredangle DCA| = 90° - |\measuredangle OCA| = \beta$.

Pravouhlé trojuholníky ACP a ACD so spoločnou preponou AC sa teda zhodujú aj v uhloch pri vrchole C. Sú preto zhodné, dokonca súmerne združené podľa priamky AC. Analogicky sú trojuholníky CBP a CBE súmerne združené podľa BC. Takže $|CD| = |CE| = v$, čiže $|DE| = 2v = 2ab/\sqrt{a^2 + b^2}$, lebo z dvojakého vyjadrenia dvojnásobku obsahu trojuholníka ABC vyplýva $v = ab/|AB|$, pričom $|AB| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Poznámka. Namiesto dvojakého vyjadrenia obsahu môžeme na výpočet výšky CP využiť podobnosť trojuholníkov CBP a ABC: $\sin\alpha = |CP|/|AC| = |BC|/|AB|$.



Obr. 2



Obr. 3

Iné riešenie. Úsečka OC je strednou priečkou lichobežníka $DABE$, lebo je rovnobežná so základňami a prechádza stredom O ramena AB. Preto D je obrazom bodu E v súmernosti podľa stredu C. Obraz F bodu B v tej istej súmernosti leží na polpriamke AD za bodom D (obr. 3). Máme $|CF| = |BC| = a$, uhol ACF je pravý, a teda trojuholníky AFC a ABC sú zhodné. Vidíme, že CD je výška v trojuholníku AFC zhodná s výškou v_c trojuholníka ABC, a DE je jej dvojnásobkom. Veľkosť výšky v_c dopočítame rovnako ako v predchádzajúcom riešení.

Odpoveď. $|DE| = 2ab/\sqrt{a^2 + b^2}$.

C – I – 3

V riešení budeme označovať číslo, ktoré vznikne otočením poradia cifier čísla n, ako $\bar{n}$. Rozoberieme tri prípady.

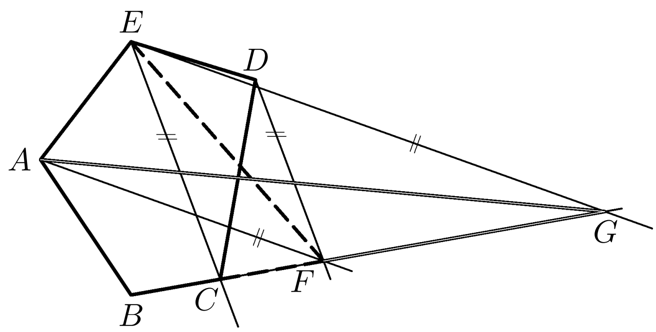
(i) Číslo n má tvar $aabb$, kde a, b sú rôzne cifry. Takže $n = 1100a + 11b$ a $\bar{n} = 1100b + 11a$. Číslo 7 má deliť ako n, tak $\bar{n}$, teda aj ich rozdiel $n - \bar{n} = 1089(a - b)$ a súčet $n + \bar{n} = 1111(a + b)$. Keďže ani číslo 1089, ani číslo 1111 nie sú násobkom siedmich a sedem je prvočíslo, tak $7 \mid a - b$ aj $7 \mid a + b$. Ak použijeme rovnakú úvahu ešte raz, vidíme, že $7 \mid (a-b)+(a+b)=2a$ a $7 \mid (a+b)-(a-b)=2b$, teda $7 \mid a$ a $7 \mid b$, čiže $a, b \in \{0, 7\}$. Cifry a, b sú navzájom rôzne, preto jedna z nich musí byť 0. Ale potom jedno z čísel $aabb$, $bbaa$ nie je štvorciferné. Hľadané číslo n teda nemôže mať uvedený tvar.

(ii) Číslo n má tvar $abab$. Potom $7 \mid n = 1010a + 101b$ a tiež $7 \mid \bar{n} = 1010b + 101a$. Podobne ako v predchádzajúcom prípade odvodíme, že $7 \mid n - \bar{n} = 909(a-b)$ a $7 \mid n + \bar{n} = 1111(a+b)$, a z rovnakých dôvodov ako v predchádzajúcom prípade zisťujeme, že $7 \mid a$, $7 \mid b$. Niektorá z cifier by teda musela byť 0. Číslo n tak nemôže mať ani tvar $abab$.

(iii) Číslo n má tvar $abba$. Potom otočením poradia cifier vznikne to isté číslo, takže máme jedinú podmienku $7 \mid 1001a + 110b$. Keďže $7 \mid 1001$ a $7 \nmid 110$, je táto podmienka ekvivalentná s podmienkou $7 \mid b$. Preto $b \in \{0, 7\}$, $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$, $a \neq b$. Vyhovuje tak všetkých 17 čísel, ktoré práve uvedené podmienky spĺňajú: 1 001, 2 002, 3 003, 4 004, 5 005, 6 006, 7 007, 8 008, 9 009, 1 771, 2 772, 3 773, 4 774, 5 775, 6 776, 8 778, 9 779.

C – I – 4

Rozbor. Najskôr uvažujme bod F, ktorý je priesečníkom priamky BC a rovnobežky s EC prechádzajúcej bodom D (keďže $E \notin BC$, sú EC a BC rôznobežné, obr. 4). Obsahy trojuholníkov ECD a ECF sú zhodné (majú spoločnú stranu EC a zhodnú výšku na túto stranu), obsah päťuholníka $ABCDE$ je teda zhodný s obsahom štvoruholníka $ABFE$.



Obr. 4

Ďalej uvažujme bod G, ktorý je priesečníkom priamky BC a rovnobežky s AF prechádzajúcej bodom E. Potom sú opäť obsahy trojuholníkov AFE a AFG zhodné, a sú preto zhodné aj obsahy štvoruholníka $ABFE$ a trojuholníka ABG. Bod G tak má požadovanú vlastnosť.

Hľadaný bod je na polpriamke BC jediný, lebo pre rôzne body X, Y na polpriamke BC majú trojuholníky ABX a ABY rôzne výšky na spoločnú stranu AB, majú teda rôzne obsahy.

Popis konštrukcie.

1. p; $p \parallel EC$, $D \in p$;

2. F; $F \in p \cap BC$;
3. q; $q \parallel AF$, $E \in q$;
4. G; $G \in q \cap BC$;

Úloha má jediné riešenie.

C – I – 5

Čísla od 1 do 99 rozdelíme podľa ich zvyšku po delení číslom 11 do jedenástich deväťprvkových skupín T_0, T_1, …, T_{10}:

$$\begin{aligned} T_0 &= \{11, 22, 33, \dots, 99\},\\ T_1 &= \{\ 1, 12, 23, \dots, 89\},\\ T_2 &= \{\ 2, 13, 24, \dots, 90\},\\ &\ \vdots\\ T_{10} &= \{10, 21, 32, \dots, 98\}. \end{aligned}$$

Ak vyberieme jedno číslo z T_0 (viac ich ani vybrať nesmieme) a všetky čísla z T_1, T_2, T_3, T_4 a T_5, dostaneme vyhovujúci výber $1 + 5 \cdot 9 = 46$ čísel, lebo súčet dvoch čísel z 0, 1, 2, 3, 4, 5 je deliteľný jedenástimi jedine v prípade $0 + 0$, z množiny T_0 sme však vybrali iba jedno číslo.

Na druhej strane, v ľubovoľnom vyhovujúcom výbere je najviac jedno číslo zo skupiny T_0 a najviac 9 čísel z každej zo skupín

$$T_1 \cup T_{10},\ T_2 \cup T_9,\ T_3 \cup T_8,\ T_4 \cup T_7,\ T_5 \cup T_6,$$

lebo pri výbere 10 čísel z niektorej skupiny $T_i \cup T_{11-i}$ by medzi vybranými bolo niektoré číslo zo skupiny T_i a aj niektoré číslo zo skupiny T_{11-i}; ich súčet by potom bol deliteľný jedenástimi. Celkom je teda vo výbere najviac $1 + 5 \cdot 9 = 46$ čísel.

Poznámka. Možno uvedené „učesané“ riešenie vyzerá príliš trikovo. Avšak počiatočné úvahy každého riešiteľa k nemu rýchlo vedú: iste záleží len na zvyškoch vybraných čísel, takže rozdelenie na triedy T_i a vyberanie z nich je prirodzené. Je jasné, že z T_0 môže byť vybrané len jedno číslo a všetko ďalšie, o čo sa musíme starať, je požiadavka, aby sme nevybrali zároveň po čísle zo skupiny T_i aj zo skupiny T_{11-i}. Ak je už vybrané niektoré číslo z triedy T_i, kde $i \neq 0$, môžeme kľudne vybrať všetky čísla z T_i, to už skúmanú vlastnosť nepokazí. Je preto dokonca jasné, ako *všetky* možné výbery najväčšieho počtu čísel vyzerajú.

C – I – 6

Ľavú nerovnosť dokážeme ekvivalentnými úpravami:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} &< \frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}, \qquad \Big| \cdot 6(a+b)\\ 3(a+b)^2 &< 4(a^2+ab+b^2),\\ 0 &< (a-b)^2. \end{aligned}$$

Posledná nerovnosť vzhľadom na predpoklad $a \neq b$ platí. Aj pravú nerovnosť zo zadania budeme ekvivalentne upravovať, začneme umocnením každej strany na druhú:

$$\begin{aligned} \frac{4(a^2+ab+b^2)^2}{9(a+b)^2} &< \frac{a^2+b^2}{2}, \qquad \Big| \cdot 18(a+b)^2 \\ 8(a^2+ab+b^2)^2 &< 9(a^2+b^2)(a+b)^2, \\ 8(a^4+b^4+2a^3b+2ab^3+3a^2b^2) &< 9(a^4+b^4+2a^3b+2ab^3+2a^2b^2), \\ 6a^2b^2 &< a^4+b^4+2a^3b+2ab^3. \end{aligned}$$

Posledná nerovnosť je súčtom nerovností $2a^2b^2 < a^4+b^4$ a $4a^2b^2 < 2a^3b+2ab^3$, ktoré obe platia, lebo po presune členov z ľavých strán na pravé dostaneme po rozklade už zrejmé nerovnosti $0 < (a^2-b^2)^2$, resp. $0 < 2ab(a-b)^2$.

C – S – 1

Roznásobením a ďalšími ekvivalentnými úpravami dostaneme

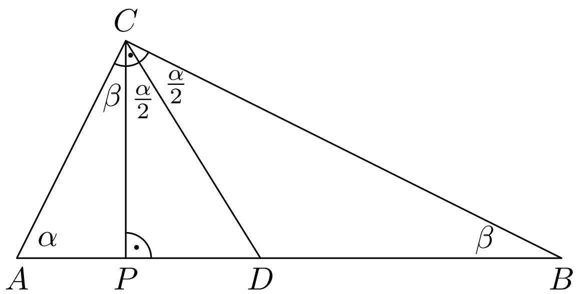
$$\begin{aligned} ab+b^2c+a^2c+abc^2 &\geqq abc^2+2abc+ab, \\ b^2c+a^2c &\geqq 2abc, \\ (a-b)^2c &\geqq 0. \end{aligned}$$

Podľa zadania platí $c \geqq 0$ a druhá mocnina reálneho čísla $a-b$ je tiež nezáporná, takže je nezáporná aj ľavá strana upravenej nerovnosti. Rovnosť v tejto (a rovnako aj v pôvodnej nerovnosti) nastane práve vtedy, keď $a-b=0$ alebo $c=0$, teda práve vtedy, keď je splnená aspoň jedna z podmienok $a=b$, $c=0$.

C – S – 2

V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou AB pre veľkosti α, β uhlov pri vrcholoch A, B platí $\alpha+\beta=90°$, preto $|\measuredangle ACP| = 90° - \alpha = \beta$ a $|\measuredangle BCD| = |\measuredangle DCP| = \frac{1}{2}(90° - \beta) = \frac{1}{2}\alpha$, lebo priamka CD je osou uhla BCP (obr. 5). Pre vonkajší uhol ADC trojuholníka BCD tak zrejme platí $|\measuredangle ADC| = |\measuredangle DBC| + |\measuredangle BCD| = \beta + \frac{1}{2}\alpha = |\measuredangle DCA|$.

Zistili sme, že trojuholník ADC má pri vrcholoch C, D zhodné vnútorné uhly, je teda rovnoramenný, a preto $|AD| = |AC|$.



Obr. 5

C – S – 3

Pre hľadané prirodzené čísla x a y sa dá podmienka zo zadania vyjadriť rovnicou

$$(x+y)+(x-y)+\left(\frac{x}{y}\right)+(x\cdot y)=2\,009, \tag{1}$$

v ktorej sme čiastočné výsledky jednotlivých operácií dali do zátvoriek.

Vyriešme rovnicu (1) vzhľadom na neznámu x (v ktorej je, na rozdiel od neznámej y, rovnica *lineárna*):

$$\begin{aligned} 2x+\frac{x}{y}+xy &= 2\,009,\\ 2xy+x+xy^2 &= 2\,009y,\\ x(y+1)^2 &= 2\,009y,\\ x &= \frac{2\,009y}{(y+1)^2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Hľadáme práve tie prirodzené čísla y, pre ktoré má nájdený zlomok celočíselnú hodnotu, čo možno vyjadriť vzťahom $(y+1)^2 \mid 2\,009y$. Keďže čísla y a $y+1$ sú nesúdeliteľné, sú nesúdeliteľné aj čísla y a $(y+1)^2$, takže musí platiť $(y+1)^2 \mid 2\,009 = 7^2\cdot 41$. Keďže $y+1$ je celé číslo väčšie ako 1 (a činitele 7, 41 sú prvočísla), poslednej podmienke vyhovuje iba hodnota $y=6$, ktorej po dosadení do (2) zodpovedá $x=246$. (Skúška nie je nutná, lebo rovnice (1) a (2) sú v obore prirodzených čísel ekvivalentné.)

Hľadané čísla v uvažovanom poradí sú 246 a 6.

C – II – 1

Výraz V je zrejme definovaný pre všetky reálne čísla x.

a) Keďže $x^4+1>0$ pre každé x, nerovnosť $V(x)\geqq 3$ je ekvivalentná s nerovnosťou $5x^4-4x^2+5\geqq 3(x^4+1)$, čiže $2x^4-4x^2+2\geqq 0$. Výraz na ľavej strane je rovný $2(x^2-1)^2$, takže je nezáporný pre každé x.

b) Využime nasledujúcu úpravu:

$$V(x)=\frac{5x^4-4x^2+5}{x^4+1}=\frac{5(x^4+1)}{x^4+1}-\frac{4x^2}{x^4+1}=5-\frac{4x^2}{x^4+1}.$$

Keďže zlomok

$$\frac{4x^2}{x^4+1}$$

je vďaka párnym mocninám premennej x pre ľubovoľné reálne číslo x nezáporný, nadobúda výraz V svoju najväčšiu hodnotu $V_{\max}$ práve vtedy, keď

$$\frac{4x^2}{x^4+1}=0,$$

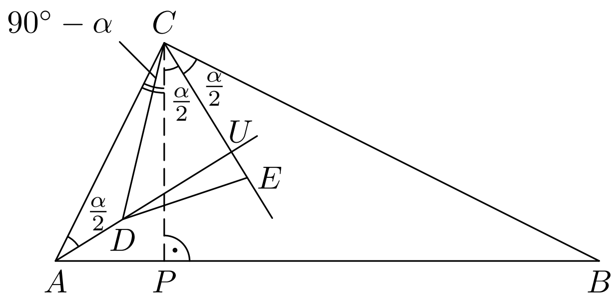
teda práve vtedy, keď $x = 0$. Dostávame tak $V_{\max} = V(0) = 5$.

C – II – 2

V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou AB označme α veľkosť vnútorného uhla pri vrchole A, zrejme potom platí $|\angle ACP| = 90° - \alpha$, $|\angle PCB| = \alpha$. Stred D kružnice vpísanej trojuholníku APC leží na osi uhla PAC, takže $|\angle DAC| = \frac{1}{2}\alpha$, a podobne aj $|\angle PCE| = \frac{1}{2}\alpha$. Odtiaľ pre veľkosť uhla AUC v trojuholníku AUC, pričom U je priesečník polpriamok AD a CE (obr. 6), vychádza

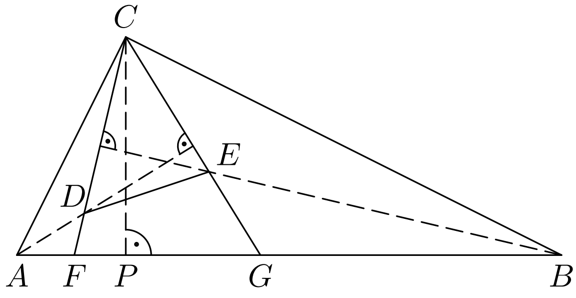
$$|\angle AUC| = 180° - (90° - \alpha + \tfrac{1}{2}\alpha) - \tfrac{1}{2}\alpha = 90°.$$

To znamená, že polpriamka AD je kolmá na CE, úsečka DU je teda výška v trojuholníku DEC. Úplne rovnako zistíme, že aj polpriamka BE (ktorá je zároveň osou uhla ABC) je kolmá na CD. Dostávame tak, že priesečník polpriamok AD a BE, čo je stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC, je zároveň aj priesečníkom výšok trojuholníka DEC.



Obr. 6

Iné riešenie. Označme F a G zodpovedajúce priesečníky priamok CD a CE so stranou AB (obr. 7). Podľa tvrdenia 2. úlohy školského kola je trojuholník CAG rovno-



Obr. 7

ramenný so základňou CG. Os AD uhla CAG rovnoramenného trojuholníka CAG je tak aj jeho osou súmernosti a je preto kolmá na základňu CG, teda aj na CE. Podobne zistíme, že aj trojuholník CBF je rovnoramenný so základňou CF, takže os BE uhla

FBC je kolmá na CF, teda aj na CD. Priesečník oboch osí AD a BE je tak nielen stredom kružnice vpísanej trojuholníku ABC, ale aj priesečníkom výšok trojuholníka CDE, čo sme mali dokázať.

C – II – 3

Podľa zvyškov po delení deviatimi rozdelíme všetkých 99 uvažovaných čísel do deviatich jedenásťprvkových tried $T_0, T_1, \ldots, T_8$ (do triedy T_i patria všetky čísla so zvyškom i):

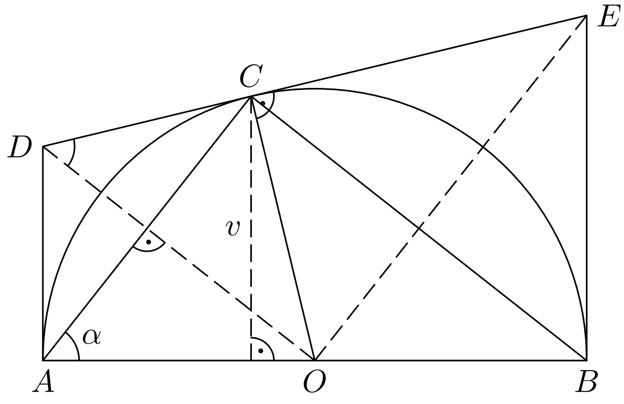
$$\begin{aligned} T_0 &= \{9, 18, 27, \ldots, 99\},\\ T_1 &= \{1, 10, 19, \ldots, 91\},\\ T_2 &= \{2, 11, 20, \ldots, 92\},\\ &\vdots\\ T_8 &= \{8, 17, 26, \ldots, 98\}.\end{aligned}$$

a) Našou úlohou je dokázať, že v $T_0 \cup T_3 \cup T_6$ ležia najviac štyri vybrané čísla. Z každej z tried T_0, T_3, T_6 môžu pochádzať najviac dve z vybraných čísel (súčet ľubovoľných troch čísel z jednej takej triedy už totiž deliteľný deviatimi je). Keďže súčet ľubovoľných troch čísel, ktoré po jednom ležia v triedach T_0, T_3 a T_6, je deviatimi deliteľný, aspoň jedna z týchto tried žiadne vybrané číslo neobsahuje. Z oboch vyslovených záverov vyplýva dokazované tvrdenie: vybraných čísel deliteľných tromi je totiž najviac $2 + 2 + 0 = 4$.

b) Ukážeme, že vyhovujúci výber môže obsahovať 26 čísel. Vyberieme po dvoch číslach z T_0, T_3 a po 11 číslach (teda všetky čísla) z T_1 a T_2. Dostaneme tak celkom $2 \cdot 2 + 2 \cdot 11 = 26$ čísel; pritom súčet ľubovoľných troch z nich dáva po delení deviatimi zvyšok aspoň $0 + 0 + 1 = 1$, najviac však $2 + 3 + 3 = 8$, takže deviatimi deliteľný byť nemôže.

C – II – 4

Označme O stred opísanej kružnice, teda stred prepony AB daného pravouhlého trojuholníka ABC, a v veľkosť jeho výšky na preponu (obr. 8). Trojuholník EDO je



Obr. 8

zrejme tiež pravouhlý, pretože jeho strany DO a EO sú kolmé na odvesny trojuholníka ABC; pritom jeho výškou na preponu je úsečka OC (s veľkosťou $\frac{1}{2}c$). Vzhľadom na súmernosť úsečky AC podľa osi OD platí pre jeho uhol pri vrchole D, že $|\measuredangle CDO| = 90^\circ - |\measuredangle COD| = 90^\circ - |\measuredangle AOD| = \alpha$. Trojuholníky EDO a ABC sú teda podobné (uu). Koeficient k tejto podobnosti je daný pomerom dĺžok zodpovedajúcich výšok na prepony, takže $k = |OC|/v = \frac{1}{2}c/v$, a keďže $vc = 2S$, je

$$k = \frac{c^2}{4S}.$$

V uvedenej podobnosti zodpovedá prepone AB prepona DE, preto pre jej veľkosť platí

$$|DE| = kc = \frac{c^3}{4S}.$$

Iné riešenie. Zo súmernosti dotyčníc z bodu ku kružnici vyplýva, že oba trojuholníky ACD aj BCE sú rovnoramenné, $|AD| = |DC|$, $|BE| = |CE|$. Rovnoramenné sú aj trojuholníky ACO a BCO, pričom O je stred prepony AB (ramená oboch trojuholníkov majú veľkosť polomeru kružnice opísanej pravouhlému trojuholníku ABC, čo je $\frac{1}{2}c$). Ukážeme, že ide o dve dvojice podobných trojuholníkov $ACD \sim BCO$ a $ACO \sim BCE$. K tomu si stačí všimnúť, že v štvoruholníku $AOCD$, ktorý je zložený z dvoch zhodných pravouhlých trojuholníkov, platí $|\measuredangle CDA| = 180^\circ - |\measuredangle AOC| = |\measuredangle COB|$. Rovnoramenné trojuholníky ACD a BCO sú teda podobné podľa vety uu. Z tejto podobnosti vyplýva rovnosť $|CD| : |CA| = |CO| : |CB|$, takže pri zvyčajnom označení odvesien dostávame $|CD| = \frac{1}{2}cb/a$, a z podobnosti trojuholníkov ACO a BCE potom $|CE| = \frac{1}{2}ca/b$. Celkom tak je

$$|DE| = |DC| + |CE| = \frac{cb}{2a} + \frac{ca}{2b} = \frac{cb^2 + ca^2}{2ab} = \frac{c(a^2 + b^2)}{2 \cdot 2S} = \frac{c^3}{4S}.$$

Poznámky. Podobnosť spomenutých rovnoramenných trojuholníkov môžeme odvodiť tiež tak, že si všimneme rovnosti zodpovedajúcich uhlov ACO a BCE pri základniach: oba totiž dopĺňajú uhol OCB do pravého uhla (ACB, resp. OCE). Preto $ACO \sim BCE$.

Ďalšiu možnosť dáva objavenie rovnosti $|\measuredangle ADO| = |\measuredangle BAC| = \alpha$ (ramená jedného uhla sú kolmé na ramená druhého). Z pravouhlého trojuholníka ODA tak máme $|AO| : |AD| = \operatorname{tg} |\measuredangle ADO| = \operatorname{tg} \alpha = a : b$, takže $|CD| = |AD| = \frac{1}{2}cb/a$, a analogicky pre pravouhlý trojuholník OEB.

Kategória B

B – I – 1

Označme n trojciferné číslo určené prvým trojčíslím (zľava) hľadaného štvorciferného čísla, ktoré je potom rovné $10n + 8$. Podľa zadania úlohy platí

$$8 \mid 10n + 8, \tag{1}$$
$$9 \mid 10n + 7, \tag{2}$$
$$7 \mid 10n + 9. \tag{3}$$

Zo vzťahu (1) vyplýva $8 \mid 10n$, čiže $4 \mid 5n$. Čísla 4 a 5 sú nesúdeliteľné, preto $4 \mid n$, čiže $n = 4k$, kde k je prirodzené číslo. Dosadením $n = 4k$ do vzťahu (2) dostaneme $9 \mid 40k + 7$, čiže $9 \mid 4k + 7$. Z tabuľky zvyškov čísel $4k + 7$ po delení deviatimi

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$4k+7$	7	2	6	1	5	0	4	8	3

vidíme, že toto číslo je deliteľné deviatimi práve vtedy, keď číslo k po delení deviatimi dáva zvyšok 5. Preto $k = 9l + 5$, kde l je celé číslo, takže $n = 4k = 36l + 20$. Dosadením takého n do vzťahu (3) dostaneme $7 \mid 360l + 209$, čiže $7 \mid 3l - 1$. Opäť zostavíme tabuľku zvyškov, tentoraz po delení čísla $3l - 1$ siedmimi.

l	0	1	2	3	4	5	6
$3l-1$	6	2	5	1	4	0	3

Vidíme, že $7 \mid 3l - 1$ práve vtedy, keď $l = 7m + 5$, kde m je celé číslo. Odtiaľ dostávame, že všetky celočíselné n spĺňajúce trojicu podmienok (1)–(3) sú tvaru $n = 36l + 20 = 252m + 200$.

Dodajme, že namiesto zostavovania tabuliek sme mohli využiť úpravy

$$40k + 7 = 36k + 4(k - 5) + 27,$$
$$360l + 209 = 357l + 3(l - 5) + 224,$$

z ktorých by sme ako skôr dostali $9 \mid k - 5$ a $7 \mid l - 5$.

Číslo $n = 252m + 200$ je trojciferné jedine pre $m \in \{0, 1, 2, 3\}$; hľadané n je preto z množiny $\{200, 452, 704, 956\}$ a na tabuli bolo napísané jedno z čísel 2 008, 4 528, 7 048, 9 568. Skúškou (ktorá však pri našom postupe nie je nutná) môžeme overiť, že každé z týchto štyroch čísel vyhovuje zadaniu úlohy.

Iné riešenie. Pri druhom postupe budeme úvahy o deliteľnosti výhodne zapisovať kongruenciami. Zápis $a \equiv b \pmod{m}$ (čítame „a je kongruentné s b modulo m“) znamená, že čísla a, b dávajú po delení číslom m rovnaké zvyšky, čiže $m \mid a - b$.

Označme N hľadané štvorciferné číslo končiace číslicou 8. Keďže pri jej zámene číslicou 7, resp. 9 dostaneme číslo $N-1$, resp. $N+1$, všetky podmienky zo zadania úlohy možno vyjadriť štyrmi kongruenciami

$$N \equiv 8 \pmod{10}, \tag{4}$$
$$N \equiv 0 \pmod{8}, \tag{5}$$
$$N-1 \equiv 0 \pmod{9}, \tag{6}$$
$$N+1 \equiv 0 \pmod{7}. \tag{7}$$

Zo vzťahu (5) vyplýva $N = 8k$, kde k je celé číslo. Dosadením do vzťahu (4) dostaneme $8k \equiv 8 \pmod{10}$, čiže $4k \equiv 4 \pmod{5}$, čo po delení číslom 4 (nesúdeliteľným s číslom 5) vedie k podmienke $k \equiv 1 \pmod{5}$. Preto $k = 5l+1$, kde l je celé číslo. Dosadením $N = 8k = 40l+8$ do vzťahu (6) obdržíme podmienku $40l+7 \equiv 0 \pmod{9}$. Jej úpravou dostaneme

$$40l \equiv -7 \equiv -7 + 9 \cdot 23 = 200 \pmod{9}$$

a po vydelení číslom 40 (nesúdeliteľným s číslom 9) dôjdeme k podmienke $l \equiv 5 \pmod{9}$. Existuje teda celé číslo m také, že $l = 9m+5$. Dosadením $N = 40l + 8 = 360m+208$ do vzťahu (7) dostaneme $360m+209 \equiv 0 \pmod{7}$, čiže $3m \equiv 1 \pmod{7}$. Úpravou

$$3m \equiv 1 \equiv 1 + 2 \cdot 7 = 15 \pmod{7}$$

po vydelení číslom 3 vyjde $m \equiv 5 \pmod{7}$, takže $m = 7n+5$, kde n je celé číslo. Hľadané N je preto tvaru $N = 360m + 208 = 2\,520n + 2\,008$. Také N je štvorciferné práve vtedy, keď $n \in \{0,1,2,3\}$. Na tabuli preto mohlo byť napísané ktorékoľvek číslo z množiny $\{2\,008, 4\,528, 7\,048, 9\,568\}$ a žiadne iné.

B – I – 2

Odčítaním prvej rovnice od druhej dostaneme po úprave

$$(z-x)(2z+2x+y) = 0.$$

Sú preto možné dva prípady, ktoré rozoberieme samostatne.

a) *Prípad* $z - x = 0$. Dosadením $z = x$ do prvej rovnice sústavy dostaneme $x^2 + xy = y^2 + x^2$, čiže $y(x-y) = 0$. To znamená, že platí $y = 0$ alebo $x = y$. V prvom prípade dostávame trojice $(x,y,z) = (x,0,x)$, v druhom $(x,y,z) = (x,x,x)$; také trojice sú riešeniami danej sústavy pre ľubovoľné reálne číslo x, ako ľahko overíme dosadením (aj keď taká skúška pri našom postupe vlastne nie je nutná).

b) *Prípad* $2z + 2x + y = 0$. Dosadením $y = -2x - 2z$ do prvej rovnice sústavy dostaneme

$$x^2 + x(-2x-2z) = (-2x-2z)^2 + z^2, \quad \text{čiže} \quad 5(x+z)^2 = 0.$$

Posledná rovnica je splnená práve vtedy, keď $z = -x$, vtedy však $y = -2x - 2z = 0$. Dostávame trojice $(x, y, z) = (x, 0, -x)$, ktoré sú riešeniami danej sústavy pre každé reálne x, ako overíme dosadením. (O takej skúške platí to isté čo v prípade a).)

Odpoveď. Všetky riešenia (x, y, z) danej sústavy sú trojice troch typov:

$$(x, x, x), \quad (x, 0, x), \quad (x, 0, -x),$$

kde x je ľubovoľné reálne číslo.

Iné riešenie. Obe rovnice sústavy sčítame. Po úprave dostaneme rovnicu

$$y(x + z - 2y) = 0$$

a opäť rozlíšime dve možnosti.

a) *Prípad* $y = 0$. Z prvej rovnice sústavy ihneď vidíme, že $x^2 = z^2$, čiže $z = \pm x$. Skúškou overíme, že každá z trojíc $(x, 0, x)$ a $(x, 0, -x)$ je pre ľubovoľné reálne x riešením.

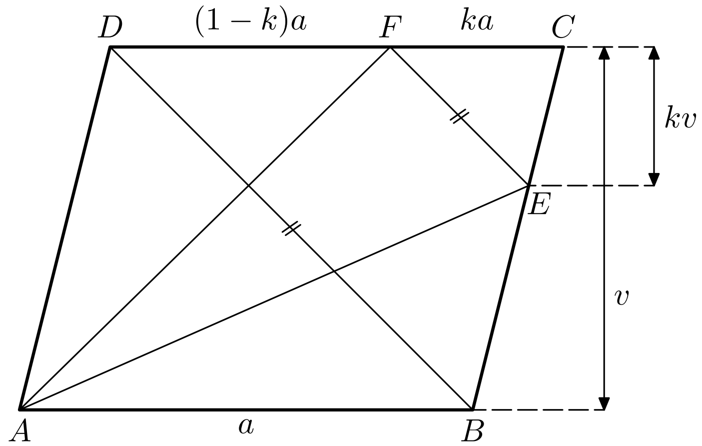
b) *Prípad* $x+z-2y = 0$. Dosadením $y = \frac{1}{2}(x+z)$ do prvej rovnice sústavy dostaneme

$$x^2 + \frac{x(x+z)}{2} = \frac{(x+z)^2}{4} + z^2, \quad \text{po úprave} \quad x^2 = z^2.$$

Platí teda $z = -x$ alebo $z = x$. Dosadením do rovnosti $x + z - 2y = 0$ v prvom prípade dostaneme $y = 0$, v druhom prípade $y = x$. Zodpovedajúce trojice $(x, 0, -x)$ a (x, x, x) sú riešeniami pre každé reálne x (prvé z nich sme však našli už v časti a)).

B – I – 3

Označme a veľkosť strán AB a CD a v vzdialenosť ich priamok, ktorá je zároveň rovná výške trojuholníka AFD z vrcholu A (obr. 9). Z podmienky $EF \parallel BD$ podľa vety *uu* vyplýva, že trojuholníky BCD a ECF sú podobné; označme $k \in (0, 1)$ koeficient ich podobnosti. Keď ho vypočítame, bude úloha vyriešená.



Obr. 9

Keďže $|FC| = ka$, $|FD| = (1-k)a$ a výšky trojuholníkov ECF, ABE zo spoločného vrcholu E majú veľkosti kv, resp. $(1-k)v$, pre obsahy trojuholníkov AFD a ABE platí

$$S_{AFD} = \frac{(1-k)av}{2} = \frac{a(1-k)v}{2} = S_{ABE},$$

takže oba obsahy sa rovnajú pre ľubovoľné $k \in (0,1)$. Obsah trojuholníka ECF má hodnotu $S_{ECF} = \frac{1}{2}ka \cdot kv = \frac{1}{2}k^2av$ a obsah celého rovnobežníka $ABCD$ je daný vzťahom $S_{ABCD} = av$, preto môžeme obsah trojuholníka AEF vyjadriť takto:

$$\begin{aligned} S_{AEF} &= S_{ABCD} - S_{ABE} - S_{ECF} - S_{AFD} = \\ &= av\left(1 - \tfrac{1}{2}(1-k) - \tfrac{1}{2}k^2 - \tfrac{1}{2}(1-k)\right) = av\left(k - \tfrac{1}{2}k^2\right). \end{aligned}$$

Obsahy trojuholníkov ABE, AFD teda budú zhodné s obsahom trojuholníka AEF práve vtedy, keď bude platiť

$$\tfrac{1}{2}(1-k) = k - \tfrac{1}{2}k^2, \quad \text{čiže} \quad k^2 - 3k + 1 = 0.$$

Táto kvadratická rovnica má korene

$$k_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2},$$

z ktorých podmienke $k \in (0,1)$ vyhovuje iba koreň $k = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$. Dodajme, že pre také k platí

$$1 - k = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{k}{1-k}.$$

Odpoveď. Hľadané body E, F sú určené pomermi

$$|CE| : |EB| = |CF| : |FD| = \left(\sqrt{5} - 1\right) : 2.$$

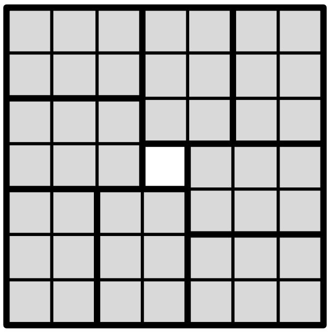
Poznámka. Rovnosť $(1-k) : 1 = k : (1-k)$ zo záveru riešenia znamená, že body E, F delia príslušné strany rovnobežníka v pomere tzv. *zlatého rezu.* Vyjadrujú to rovnosti

$$|CE| : |EB| = |EB| : |BC| \quad \text{a} \quad |CF| : |FD| = |FD| : |DC|.$$

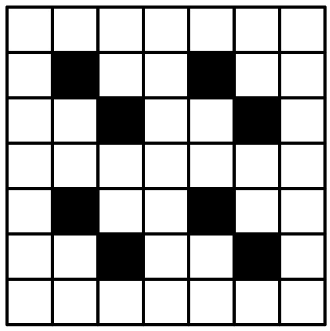
B – I – 4

Podľa obr. 10 môžeme na plán umiestniť 8 disjunktných obdĺžnikov 2×3 (stredné políčko plánu zostane prázdne). Aby sme s istotou zasiahli loď, musíme sa spýtať na aspoň jedno políčko v každom z ôsmich vyznačených obdĺžnikov, preto je nutný počet otázok aspoň 8.

Na obr. 11 je uvedený príklad výberu ôsmich políčok, na ktoré sa stačí spýtať, aby sa už mimo nich nedala na plán umiestniť žiadna loď 2×3. Preto týchto 8 otázok k zasiahnutiu lode vždy stačí.



Obr. 10



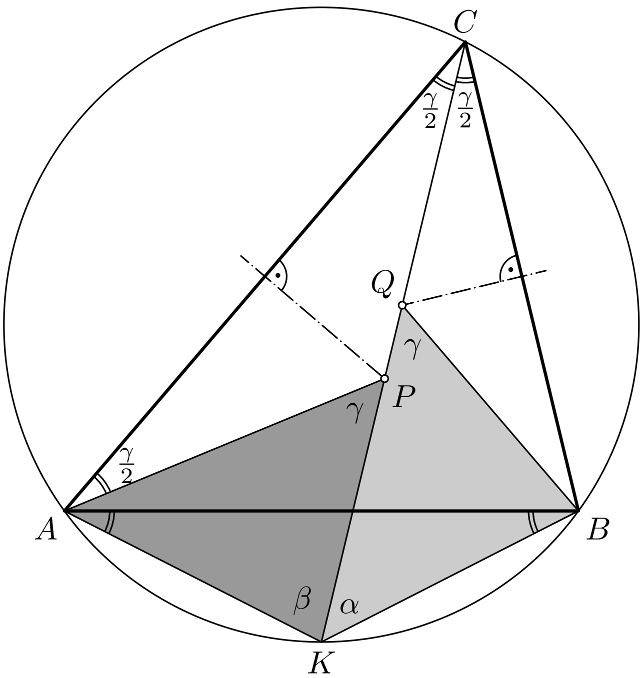
Obr. 11

Z oboch uvedených úvah vyplýva nasledujúci záver.

Odpoveď. Najmenší počet otázok, ktoré potrebujeme, aby sme s istotou loď zasiahli, je práve 8.

B – I – 5

Označme α, β, γ zvyčajným spôsobom veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC (obr. 12). Bod K leží na osi úsečky AB, preto $|AK| = |KB|$. Trojuholník AKB je rovnoramenný so základňou AB, jeho vnútorné uhly pri vrcholoch A a B sú teda



Obr. 12

zhodné. Podľa vety o obvodových uhloch sú zhodné aj uhly BCK a BAK, resp. ACK a ABK, preto sú zhodné aj uhly BCK a ACK. Polpriamka CK je teda osou uhla ACB:

$$|\measuredangle ACK| = |\measuredangle BCK| = \frac{\gamma}{2}.$$

Keďže bod P leží na osi strany AC, je trojuholník ACP rovnoramenný a jeho vnútorné uhly pri základni AC majú veľkosť $\frac{1}{2}\gamma$, takže jeho vonkajší uhol APK pri vrchole P má veľkosť $\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\gamma = \gamma$. Rovnako z rovnoramenného trojuholníka BCQ odvodíme, že aj veľkosť uhla BQK je γ. Podľa vety o obvodových uhloch sú zhodné uhly ABC a AKC, teda uhol AKC (čiže uhol AKP) má veľkosť β a – celkom analogicky – uhol BKQ má veľkosť α.

V každom z trojuholníkov AKP a BKQ už poznáme veľkosti dvoch vnútorných uhlov (β, γ, resp. α, γ), takže vidíme, že zostávajúce uhly KAP a KBQ majú veľkosti α, resp. β.

Z predošlého vyplýva, že trojuholníky AKP a KBQ sú zhodné podľa vety *usu*, lebo majú zhodné strany AK a KB aj obe dvojice k nim priľahlých vnútorných uhlov.

K uvedenému postupu dodajme, že výpočet uhlov KAP a KBQ cez uhly APK a BQK možno obísť takto: zhodnosť uhlov KAP a BAC (resp. KBQ a ABC) vyplýva zo zhodnosti uhlov KAB a PAC (resp. KBA a QBC).

B – I – 6

Najskôr si všimnime, že menovateľ zlomku možno postupným vynímaním rozložiť na súčin $(m + 2)(n - 1)$. Preto bude výhodné položiť $a = m + 2$, $b = n - 1$ a pre nové neznáme (nenulové!) celé čísla a, b skúmať, kedy je hodnota daného výrazu

$$V = \frac{m + 3n - 1}{mn + 2n - m - 2} = \frac{(a - 2) + 3(b + 1) - 1}{ab} = \frac{a + 3b}{ab}$$

(ako vyžaduje zadanie) *celé kladné* číslo (používajme ďalej zvyčajný termín *prirodzené číslo*). Uveďme dva možné prístupy k riešeniu takej otázky.

Pri prvom spôsobe využijeme rozklad

$$V = \frac{a + 3b}{ab} = \frac{1}{b} + \frac{3}{a}$$

a zrejmé odhady

$$0 < \left|\frac{1}{b}\right| \leqq 1, \qquad 0 < \left|\frac{3}{a}\right| \leqq 3.$$

Keby platilo $a < 0$, bolo by $\frac{3}{a} < 0$, čiže $V < 1/b \leqq 1$, teda V by nebolo prirodzené číslo. Preto nutne platí $a > 0$.

Pre $a > 6$ je $3/a < \frac{1}{2}$, a teda $V < 1/b + \frac{1}{2}$, takže nerovnosť $V \geqq 1$ platí jedine vtedy, keď $1/b > \frac{1}{2}$, čo spĺňa jediné celé číslo $b = 1$, pre ktoré máme $1 < V < \frac{3}{2}$. Preto musí platiť $1 \leqq a \leqq 6$. Týchto šesť možností jednotlivo rozoberieme:

▷ $a = 1$. Číslo $V = 3 + 1/b$ je celé jedine pre $b = \pm 1$, kedy je aj kladné. V pôvodných neznámych dostávame dve riešenia $(m, n) = (-1, 2)$ a $(m, n) = (-1, 0)$.

▷ $a = 2$. Číslo $V = \frac{3}{2} + 1/b$ je prirodzené práve vtedy, keď $b = \pm 2$; zodpovedajúce riešenia sú $(m, n) = (0, 3)$ a $(m, n) = (0, -1)$.

▷ $a = 3$. Číslo $V = 1 + 1/b$ je prirodzené práve vtedy, keď $b = 1$, teda $(m, n) = (1, 2)$.

▷ $a = 4$. Číslo $V = \frac{3}{4} + 1/b$ je prirodzené práve vtedy, keď $b = 4$, teda $(m, n) = (2, 5)$.

▷ $a = 5$. Číslo $V = \frac{3}{5} + 1/b$ zrejme nie je celé pre žiadne celé b.

▷ $a = 6$. Číslo $V = \frac{1}{2} + 1/b$ je prirodzené práve vtedy, keď $b = 2$, teda $(m, n) = (4, 3)$.

Odpoveď. Existuje práve 7 dvojíc celých čísel (m, n), pre ktoré je hodnota daného výrazu V celým kladným číslom, sú to dvojice

$$(m, n) \in \{(-1, 2), (-1, 0), (0, 3), (0, -1), (1, 2), (2, 5), (4, 3)\}.$$

Iné riešenie. Hľadáme nenulové celé a, b, pre ktoré $a + 3b = kab$ pre vhodné prirodzené k. Označme $d \geqq 1$ najväčší spoločný deliteľ takých čísel a, b. Potom $a = xd$ a $b = yd$ pre celé nesúdeliteľné čísla x, y, ktoré spĺňajú rovnicu $(x + 3y)d = kxyd^2$, čiže $x + 3y = kxyd$. Odtiaľ vyplýva, že číslo y delí nesúdeliteľné číslo x. To je možné jedine vtedy, keď $y = \pm 1$.

V prípade $y = 1$ máme rovnicu $x + 3 = kxd$, čiže $3 = x(kd - 1)$. Keďže platí $kd \geqq 1$ (čísla k, d sú prirodzené), tak buď $x = 1$ a $kd - 1 = 3$ (potom $kd = 4$, a teda $d \in \{1, 2, 4\}$, takže $(a, b) = (d, d)$ je jedna z dvojíc $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(4, 4)$), alebo $x = 3$ a $kd - 1 = 1$ (potom $kd = 2$, a teda $d \in \{1, 2\}$, takže $(a, b) = (3d, d)$ je jedna z dvojíc $(3, 1)$, $(6, 2)$).

V prípade $y = -1$ máme rovnicu $x - 3 = -kxd$, čiže $3 = x(1 + kd)$, čo vzhľadom na nerovnosť $1 + kd \geqq 2$ znamená, že $x = 1$ a $1 + kd = 3$, takže $kd = 2$, a teda $d \in \{1, 2\}$, preto $(a, b) = (d, -d)$ je jedna z dvojíc $(1, -1)$, $(2, -2)$.

Zistili sme, že existuje sedem vyhovujúcich dvojíc (a, b), vypísať zodpovedajúce riešenia $(m, n) = (a - 2, b + 1)$ je už jednoduché (poz. odpoveď vyššie).

B – S – 1

Sčítaním druhej a tretej rovnice dostaneme $2x = 2a + 1$, odčítaním druhej rovnice od tretej $2y = -2a + 1$. Odtiaľ vyjadríme

$$x = a + \tfrac{1}{2}, \quad y = -a + \tfrac{1}{2} \tag{1}$$

a dosadíme do prvej rovnice pôvodnej sústavy. Po úprave dostaneme kvadratickú rovnicu

$$a^2 - \tfrac{1}{2}a - \tfrac{3}{2} = 0, \tag{2}$$

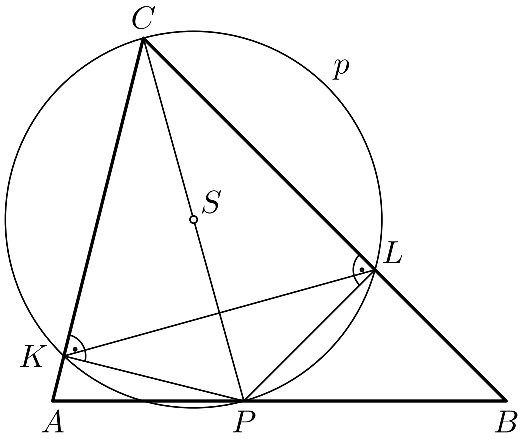
ktorá má korene $a_1 = -1$ a $a_2 = \frac{3}{2}$. Pre každú z týchto dvoch (jediných možných) hodnôt parametra a už ľahko stanovíme neznáme x a y dosadením do vzťahov (1).

Daná sústava rovníc má riešenie iba pre dve hodnoty parametra a, jednak pre $a = -1$, keď je jej jediným riešením $(x, y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, jednak pre $a = \frac{3}{2}$, keď $(x, y) = (2, -1)$.

Skúška dosadením je jednoduchá, možno ju vynechať takýmto zdôvodnením: Sústava dvoch rovníc, ktorú sme dostali (a vyriešili) sčítaním a odčítaním druhej a tretej rovnice, je s dvojicou pôvodných rovníc ekvivalentná. Zostávajúca (prvá) rovnica sústavy je potom ekvivalentná s kvadratickou rovnicou (2), ktorej riešením sme našli možné hodnoty parametra a.

B – S – 2

Označme S stred úsečky CP. Podľa Tálesovej vety ležia body K a L na kružnici p zostrojenej nad priemerom CP. Predpokladajme, že bod P má požadovanú vlastnosť, t. j. že priemer CP rozpoľuje tetivu KL (obr. 13).



Obr. 13

Priemer ľubovoľnej kružnice rozpoľuje každý iný priemer tejto kružnice a tiež všetky tetivy naň kolmé. Žiadnu inú tetivu rozpoľovať nemôže: keď totiž prechádza dvoma *rôznymi* bodmi jej osi súmernosti (stredom tetivy a stredom kružnice), musí byť – rovnako ako táto os – na danú tetivu kolmý.

Tetiva KL však nemôže byť priemerom kružnice p, pretože podľa Tálesovej vety by bol uhol KCL (a teda aj uhol ACB) pravý, čo odporuje zadaniu, preto je tetiva KL na priemer CP kolmá. V tomto prípade sú trojuholníky CKP a CLP súmerne združené podľa priamky CP, odkiaľ už vyplýva, že uhly KCP a LCP sú zhodné. Polpriamka CP je teda osou uhla ACB.

Ak je naopak polpriamka CP osou uhla ACB, zhodujú sa pravouhlé trojuholníky CKP a CLP v spoločnej prepone CP a v dvoch vnútorných uhloch, takže body K a L sú súmerne združené podľa priamky CP. Preto tetiva CP rozpoľuje úsečku KL.

Odpoveď. Existuje práve jeden vnútorný bod strany AB ostrouhlého trojuholníka ABC, pre ktorý úsečka CP rozpoľuje úsečku KL. Je to priesečník osi vnútorného uhla pri jeho vrchole C so stranou AB.

B – S – 3

Každé trojciferné číslo má vyjadrenie $m = 100a + 10b + c$, kde a, b, c sú jeho cifry a $a \neq 0$. Trojciferné číslo zapísané rovnakými ciframi v opačnom poradí má potom vyjadrenie $m' = 100c + 10b + a$, $c \neq 0$. Keďže na poradie čísel m a m' neberieme ohľad, pre určitosť predpokladajme, že $m \leqq m'$, čiže $a \leqq c$, pričom $a, c \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ a $b \in$ $\in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

Pre magické číslo x podľa zavedeného označenia cifier platí

$$x = m + m' = 101(a + c) + 20b.$$

Vidíme, že hodnota x nezávisí ani tak od jednotlivých cifier a, c, ako od ich súčtu $s =$ $= a + c$, ktorý môže nadobúdať hodnoty $s \in \{2, 3, \dots, 18\}$. Ďalej už budeme pracovať iba s vyjadrením $x = 101s + 20b$.

Predpokladajme na chvíľu, že sa ako súčet $101s + 20b$ dá niektoré magické číslo x zapísať dvoma rôznymi spôsobmi:

$$x = 101s + 20b = 101s' + 20b'. \tag{1}$$

Z rovnosti $101(s - s') = 20(b - b')$ a nesúdeliteľnosti čísel 101 a 20 vyplýva, že číslo 101 musí deliť číslo $b - b'$. Keďže však b a b' sú cifry, platí $-9 \leqq b - b' \leqq 9$. V tomto intervale nájdeme jediné číslo deliteľné číslom 101, a to číslo 0. Preto $b - b' = 0$, čiže $b = b'$, a teda aj $s = s'$. To však odporuje predpokladu, že číslo x má dve rôzne vyjadrenia tvaru (1). Znamená to, že vo vyjadrení $x = 101s + 20b$ má každé magické číslo x jednoznačne určenú cifru b aj jednoznačne určený súčet s.

Počet spôsobov, ktorými možno magické číslo vyjadriť ako súčet $m + m'$, čiže $101s +$ $+ 20b$, sa preto rovná počtu spôsobov, ktorými možno vyjadriť zodpovedajúcu hodnotu s ako súčet dvoch cifier a a c, pričom $1 \leqq a \leqq c \leqq 9$. V množine $\{2, 3, \dots, 18\}$ má najväčší počet takých vyjadrení číslo $s = 10$, ktoré sa dá vyjadriť práve piatimi vyhovujúcimi súčtami:

$$10 = 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6 = 5 + 5.$$

Ostatné čísla majú takých vyjadrení menej.

Naozaj: v prípade $s \leqq 9$ z rovnosti $a + c \leqq 9$ a predpokladu $a \leqq c$ vyplýva $a \leqq$ $\leqq 4$, takže menšia cifra a nadobúda nanajvýš štyri hodnoty, rovnako ako väčšia cifra c v prípade $s \geqq 11$, keď zo vzťahov $a + c \geqq 11$ a $a \leqq c$ vyplýva $c \geqq 6$.

Najväčším počtom súčtov $m + m'$ (piatimi súčtami) sa dajú vyjadriť magické čísla tvaru $101 \cdot 10 + 20b$, kde $b \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, jedná sa teda o čísla z desaťprvkovej množiny

$$\{1\,010, 1\,030, 1\,050, \dots, 1\,190\}.$$

B – II – 1

Sčítaním prvej a druhej rovnice danej sústavy dostaneme $2x = 1 + a$, odčítaním druhej rovnice od prvej $2y = 1 - a$. Odtiaľ

$$x = \frac{1}{2}(1 + a), \qquad y = \frac{1}{2}(1 - a). \tag{1}$$

Keď dosadíme za x a y do tretej rovnice pôvodnej sústavy, dostaneme rovnicu

$$-2a(1+a)+2(1-a)=z^2+4, \quad \text{čiže} \quad z^2+2a^2+4a+2=0,$$

ktorú upravíme na tvar

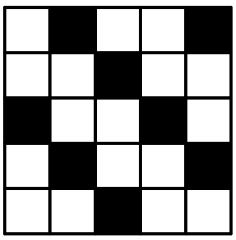
$$z^2+2(a+1)^2=0.$$

Oba sčítance na ľavej strane poslednej rovnice sú nezáporné čísla. Ich súčet je 0 práve vtedy, keď $z=0$, $a=-1$. Dosadením týchto hodnôt do (1) dostaneme $x=0$, $y=1$.

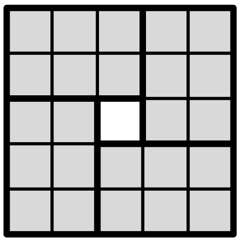
Záver. Daná sústava rovníc má riešenie iba pre $a=-1$, a to $x=0$, $y=1$, $z=0$. Skúška pri tomto postupe nie je nutná.

B – II – 2

a) Stačí sa spýtať napríklad na čierne políčka na obr. 14: v každom riadku aj stĺpci sú vedľa seba najviac dve biele políčka, zatiaľ čo každá z lodí zakryje v jednom z oboch smerov pravé tri vedľa sebe stojace políčka. Aspoň jedno z nich teda bude čierne.



Obr. 14

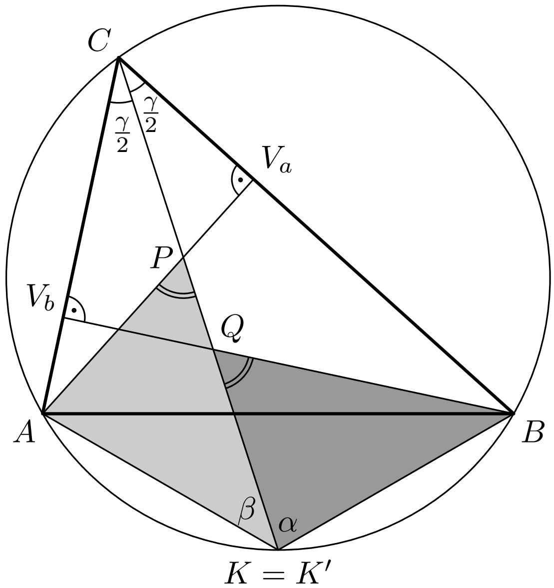


Obr. 15

b) Na zásah lode na pláne s rozmermi 3×2 potrebujeme aspoň dve otázky, pretože žiadne jeho políčko neleží na všetkých lodiach, ktoré na tento plán môžeme umiestniť. Na pláne 5×5 môžeme vyznačiť štyri neprekrývajúce sa oblasti 3×2 (obr. 15). Aj keby loď bola umiestnená iba na jednej z týchto štyroch oblastí, sedem otázok na jej zásah by nestačilo – podľa predchádzajúcej úvahy totiž potrebujeme aspoň $4\cdot 2=8$ otázok.

B – II – 3

Označme vnútorné uhly v trojuholníku ABC zvyčajným spôsobom. Nech K' je druhý priesečník osi uhla ACB s kružnicou opísanou trojuholníku ABC. Zo zhodnosti obvodových uhlov ACK' a BCK' vyplýva zhodnosť zodpovedajúcich tetív AK' a BK', takže bod K' rozpoľuje oblúk AB ležiaci oproti vrcholu C, a je preto totožný s bodom K (obr. 16). Podľa vety o obvodových uhloch sú veľkosti uhlov AKC a BKC



Obr. 16

postupne rovné β a α. Označme V_a, V_b päty výšok prislúchajúcich vrcholom A, B trojuholníka ABC. Keďže ABC je ostrouhlý trojuholník, sú body V_a a V_b vnútorné body zodpovedajúcich strán. Veľkosť uhla APK je zhodná s veľkosťou vnútorného uhla pri vrchole P v pravouhlom trojuholníku CPV_a, je teda rovná $90° - \frac{1}{2}\gamma$. Rovnakú veľkosť má analogicky aj uhol BQK.

Trojuholníky AKP a BKQ majú rovnaký obsah, zhodné strany AK a BK, a teda aj výšky na ne, a navyše sa zhodujú aj v uhle oproti nim. Z konštrukcie trojuholníka podľa danej strany, výšky na túto stranu a protiľahlého vnútorného uhla a zo súmernosti zostrojených riešení vyplýva, že trojuholník AKP je zhodný buď s trojuholníkom KBQ, alebo s trojuholníkom BKQ. Keďže trojuholník ABC nie je rovnoramenný (t. j. $\alpha \neq \beta$), je trojuholník AKP zhodný s trojuholníkom KBQ. Veľkosť vnútorného uhla pri vrchole A trojuholníka PAK je $180° - \beta - (90° - \frac{1}{2}\gamma) = 90° - \beta + \frac{1}{2}\gamma$, takže z uvedenej zhodnosti vyplýva

$$90° - \beta + \frac{\gamma}{2} = \alpha, \qquad \text{čiže} \qquad 90° + \frac{\gamma}{2} = \alpha + \beta = 180° - \gamma.$$

Odtiaľ dostávame $\gamma = 60°$. Naopak ak $\gamma = 60°$, je $|\measuredangle APK| = |\measuredangle BQK| = 60°$ a trojuholníky AKP a KBQ sú zhodné podľa vety *usu*, majú teda rovnaký obsah.

Záver. Uhol ACB má veľkosť $60°$.

B – II – 4

Uvažujme prirodzené číslo $n < 25\,000$ a označme $r_2, r_3, \ldots, r_{11}$ jemu prislúchajúce zvyšky po delení číslami 2, 3, ..., 11. Súčet nezáporných zvyškov $z = r_2 + r_3 + \cdots + r_{11}$ je tiež nezáporný. V danom prípade však nemôže byť rovný 0, pretože to by znamenalo, že číslo n je deliteľné každým z prvkov množiny $\mathsf{M} = \{2, 3, 4, \ldots, 11\}$, ktorých najmenší spoločný násobok je $27\,720 > 25\,000$.

Ukážeme, že najmenší možný súčet je 1, a zároveň nájdeme aj všetky čísla n menšie ako 25 000 s touto vlastnosťou.

Ak je príslušný súčet rovný 1, sú všetky zvyšky r_k s výnimkou jedného rovné 0, a existuje teda práve jedno $d \in \mathsf{M}$ také, že $r_d = 1$. Ukážeme, že $d = 7$ alebo $d = 11$. Zrejme nemôže byť $d \leqq 5$, to by totiž nenulový zvyšok prislúchal aj číslu $2d \in \mathsf{M}$. Keby zvyšok 1 prislúchal jednému z čísel $d = 6, 8, 9, 10$, prislúchal by nutne aj jednému z čísel 2 alebo 3.

Ak $d = 7$, musí byť hľadané číslo násobkom všetkých čísel z množiny $\mathsf{M} \setminus \{7\}$, teda násobkom čísla 3 960. Toto číslo dáva po delení 7 zvyšok 5, zvyšok 1 dáva jeho trojnásobok $n = 3 \cdot 3\,960 = 11\,880$, ktorý vyhovuje podmienkam úlohy, a všeobecne každý $(3 + 7a)$-násobok; avšak ďalší násobok $10 \cdot 3\,960$ s vyhovujúcim zvyškom je už väčší ako 25 000.

Ak $d = 11$, musí byť hľadané číslo násobkom všetkých čísel z množiny $\mathsf{M} \setminus \{11\}$, teda násobkom čísla 2 520. Keďže toto číslo dáva po delení 11 zvyšok 1, vyhovuje pre $d = 11$ jedine ono (ďalší násobok $(1 + 11) \cdot 2\,520$ s vyhovujúcim zvyškom je totiž už väčší ako 25 000).

Záver. Hľadané čísla sú dve, a to 11 880 a 2 520.

Kategória A

A – I – 1

Použitím známych vzorcov

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

dostaneme úpravou ľavej strany prvej rovnice

$$\begin{aligned} 2\sin x \cos(x+y) + \sin y &= 2\sin x(\cos x \cos y - \sin x \sin y) + \sin y = \\ &= 2 \sin x \cos x \cos y + (1 - 2\sin^2 x) \sin y = \\ &= \sin 2x \cos y + \cos 2x \sin y = \\ &= \sin(2x+y). \end{aligned}$$

Podobne ľavá strana druhej rovnice je rovná $\sin(2y+x)$. Zadaná sústava je teda ekvivalentná so sústavou

$$\begin{aligned} \sin(2x+y) &= 1, \\ \sin(2y+x) &= 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Keďže funkcia sínus nadobúda hodnotu 1 práve v bodoch tvaru $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, kde k je celé číslo, budú riešením sústavy práve tie dvojice (x,y), pre ktoré existujú celé čísla k, l také, že

$$2x + y = \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad 2y + x = \tfrac{\pi}{2} + 2l\pi. \tag{2}$$

Odtiaľ buď odčítaním vhodných násobkov rovníc alebo priamym vyjadrením jednej premennej z prvej rovnice a dosadením do druhej rovnice po úprave dostaneme

$$x = \tfrac{\pi}{6} + (4k-2l)\tfrac{\pi}{3}, \quad y = \tfrac{\pi}{6} + (4l-2k)\tfrac{\pi}{3}.$$

Riešením sústavy sú teda dvojice $\left(\frac{\pi}{6} + (4k-2l)\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6} + (4l-2k)\frac{\pi}{3}\right)$, kde k, l sú ľubovoľné celé čísla. Nie je nutné robiť skúšku, nakoľko z postupu vyplýva, že takéto dvojice (x,y) spĺňajú vzťahy (2) a teda aj sústavu (1).

Poznámka. Uvedený výsledok možno zapísať aj v inom tvare. Keďže $x - y = (6k - 6l)\frac{\pi}{3} = 2\pi(k-l)$, možno pri položení $m = k - l$, $n = 2k - l$ písať $x = \frac{\pi}{6} + n\frac{2\pi}{3}$, $y = x - 2\pi m$, teda riešením sú dvojice $\left(\frac{\pi}{6} + n\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6} + n\frac{2\pi}{3} - 2\pi m\right)$, kde m, n sú ľubovoľné celé čísla. (Keď k, l prebiehajú všetky možné dvojice celých čísel, tak aj m, n prebehnú všetky možné dvojice celých čísel.)

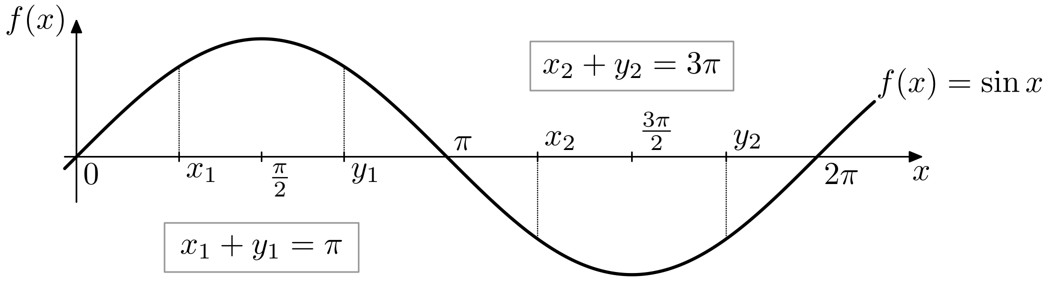
Iné riešenie. Zrejme ak je riešením zadanej sústavy dvojica (x,y), sú vďaka periodickosti funkcií sínus a kosínus s periódou 2π riešením aj všetky dvojice $(x + 2k\pi, y + 2l\pi)$. Budeme teda sústavu riešiť v obore $\langle 0, 2\pi)$ a na konci nájdené riešenia „posunieme“ o $(2k\pi, 2l\pi)$, aby sme získali všeobecné riešenie.

Odčítaním rovníc sústavy získame po rozklade ľavej strany na súčin rovnicu

$$(\sin x - \sin y)\bigl(2\cos(x+y) - 1\bigr) = 0.$$

Rozlíšime dva prípady podľa toho, ktorý z činiteľov je nulový.

I. Ak $\sin x = \sin y$, tak vzhľadom na podmienku $x, y \in \langle 0, 2\pi)$ máme tri možnosti: buď $x = y$, alebo $x + y = \pi$, alebo $x + y = 3\pi$ (obr. 17).



Obr. 17

Pri prvej možnosti po dosadení do pôvodnej sústavy získame jedinú rovnicu

$$2\sin x\cos 2x + \sin x = 1.$$

Z nej s využitím vzorca $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ a po substitúcii $\sin x = t$ ekvivalentnými úpravami postupne dostaneme

$$\begin{aligned} 2\sin x(1 - 2\sin^2 x) + \sin x &= 1,\\ 2t(1 - 2t^2) + t &= 1,\\ 4t^3 - 3t + 1 &= 0,\\ (t+1)(2t-1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Pri poslednej úprave sme „uhádli“ koreň $t = -1$ a rozklad na súčin získali vydelením mnohočlena $4t^3 - 3t + 1$ koreňovým činiteľom $t + 1$. Vzhľadom na použitú substitúciu $t = \sin x$ sú riešením ostatnej rovnice tie $x \in \langle 0, 2\pi)$, pre ktoré buď $\sin x = -1$, alebo $\sin x = \frac{1}{2}$, čiže $x \in \{\pi/6, 5\pi/6, 3\pi/2\}$. V skúmanom obore teda dostávame ako riešenia zadanej sústavy dvojice $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$, $(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ a $(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

Pri druhej a tretej možnosti, t. j. keď $x + y = \pi$ alebo $x + y = 3\pi$, máme $\cos(x + y) = -1$. Dosadením do pôvodnej sústavy (s využitím rovnosti $\sin x = \sin y$) získame jedinú rovnicu $2\sin x \cdot (-1) + \sin x = 1$. Preto $\sin x = -1$, a teda aj $\sin y = -1$. Odtiaľ získame v skúmanom obore jediné riešenie $x = y = \frac{3\pi}{2}$, ktoré sme našli aj pri prvej možnosti.

II. Ak $2\cos(x + y) - 1 = 0$, čiže $\cos(x + y) = \frac{1}{2}$, tak $x + y = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ pre nejaké celé k a niektoré znamienko. Po dosadení do pôvodnej sústavy dostaneme jedinú rovnicu $\sin x + \sin y = 1$, ktorá prejde na tvar $\sin x + \sin(\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi - x) = 1$. Vďaka periodickosti funkcie sínus s periódou 2π a použitím známeho vzorca

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

môžeme ľavú stranu upraviť na tvar

$$\sin x+\sin(\pm\tfrac{\pi}{3}+2k\pi-x)=\sin x+\sin(\pm\tfrac{\pi}{3}-x)=2\sin(\pm\tfrac{\pi}{6})\cos(x\mp\tfrac{\pi}{6})=$$
$$=2\cdot(\pm\tfrac{1}{2})\cos(x\mp\tfrac{\pi}{6})=\pm\cos(x\mp\tfrac{\pi}{6}).$$

Riešená rovnica je teda ekvivalentná s rovnicou $\pm\cos(x\mp\frac{\pi}{6})=1$.

Pre „horné“ znamienko dostávame $\cos(x-\frac{\pi}{6})=1$, čomu v obore $\langle 0,2\pi)$ vyhovuje iba $x=\frac{\pi}{6}$. Odtiaľ $y=\frac{\pi}{3}+2k\pi-x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$, čomu v skúmanom obore vyhovuje iba $y=\frac{\pi}{6}$. Pre „dolné“ znamienko máme $\cos(x+\frac{\pi}{6})=-1$, čomu v skúmanom obore vyhovuje iba $x=\frac{5\pi}{6}$. Odtiaľ $y=-\frac{\pi}{3}+2k\pi-x=2k\pi-\frac{7\pi}{6}$, čomu v skúmanom obore vyhovuje iba $y=\frac{5\pi}{6}$. Dostávame tak len riešenia, ktoré sme objavili aj v prvom prípade.

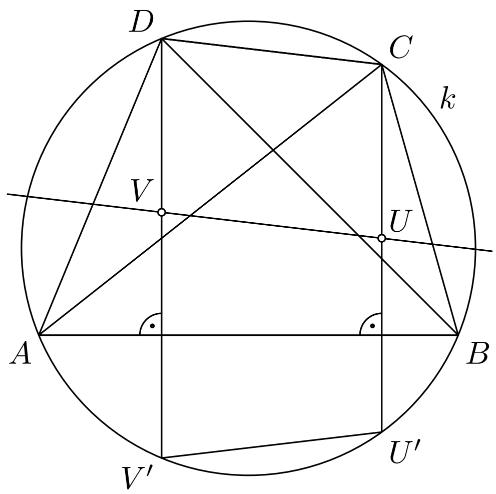
Záver. Riešením v obore $\langle 0,2\pi)$ sú dvojice $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})$, $(\frac{5\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$, $(\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$. V obore reálnych čísel sú to potom dvojice

$$(\tfrac{\pi}{6}+2k\pi,\tfrac{\pi}{6}+2l\pi),\quad(\tfrac{5\pi}{6}+2k\pi,\tfrac{5\pi}{6}+2l\pi),\quad(\tfrac{3\pi}{2}+2k\pi,\tfrac{3\pi}{2}+2l\pi),$$

kde k, l sú ľubovoľné celé čísla.

A – I – 2

Označme k kružnicu opísanú štvoruholníku $ABCD$. Nech priesečníky výšok trojuholníkov ABC a ABD sú postupne U a V (obr. 18).



Obr. 18

Je známe, že obraz priesečníka výšok v osovej súmernosti podľa strany trojuholníka leží na kružnici opísanej tomuto trojuholníku. V našej situácii teda obraz U' bodu U v osovej súmernosti podľa strany AB leží na kružnici k, ktorá je opísanou kružnicou trojuholníka ABC. (Toto platí aj pre tupouhlý trojuholník ABC.) Podobne leží na kružnici k aj obraz V' bodu V v osovej súmernosti podľa strany AB.

Predpokladajme, že trojuholníky ABC a ABD sú ostrouhlé. Potom body U a V ležia v polrovine ABC. Priamky CU' a DV' sú rovnobežné, preto štvoruholník $CU'V'D$ je tetivový lichobežník, a teda je to lichobežník rovnoramenný. Z tohto a z vlastností osovej súmernosti dostávame rovnosti

$$|\measuredangle CDV'| = |\measuredangle U'V'D| = |\measuredangle UVV'|.$$

Keďže body C a U ležia v rovnakej polrovine vzhľadom na priamku $V'D$, sú priamky CD a UV rovnobežné, ako sme mali dokázať. (V poslednej úvahe sme využili, že body D, V, V' ležia na priamke v tomto poradí.)

V prípade, keď aspoň jeden z trojuholníkov ABC a ABD je tupouhlý, je argumentácia veľmi podobná. Body C, D, V', U' vždy vytvoria rovnoramenný lichobežník, aj keď na jeho obvode môžu ležať v inom poradí.

Iné riešenie. Nech U je priesečník výšok trojuholníka ABC. Ukážeme, že dĺžka úsečky CU nezávisí od polohy bodu C na oblúku AB kružnice k opísanej trojuholníku ABC.

Budeme používať štandardné označenie pre veľkosti strán a uhlov v trojuholníku ABC. Označme navyše K pätu výšky z vrcholu A na stranu BC. Predpokladajme najskôr, že trojuholník ABC je ostrouhlý. Jednoduchým výpočtom z vhodných trojuholníkov zistíme, že $|\measuredangle CUK| = \beta$. Využitím goniometrických funkcií v trojuholníkoch AKC a UKC dostaneme

$$|CU| = \frac{|CK|}{\sin|\measuredangle CUK|} = \frac{b\cos\gamma}{\sin\beta} = \frac{c\cos\gamma}{\sin\gamma},$$

posledná rovnosť vyplýva zo sínusovej vety v trojuholníku ABC. Analogickým spôsobom možno ukázať, že aj v prípade, keď ABC je tupouhlý trojuholník, platí $|CU| = c|\cos\gamma|/\sin\gamma$. Dĺžka úsečky CU teda závisí len od dĺžky úsečky AB a od veľkosti obvodového uhla ACB. V našom prípade je úsečka AB aj oblúk kružnice pevný, preto sa dĺžka úsečky CU nemení.

Body C a D ležia na tom istom oblúku kružnice k určenom úsečkou AB. Preto sú úsečky CU a DV rovnako dlhé. Navyše sú rovnobežné, čiže štvoruholník $CDVU$ je rovnobežník. A teda priamky CD a VU sú rovnobežné.

A – I – 3

Predpokladajme, že prirodzené čísla x, y vyhovujú zadaniu, t. j.

$$\frac{xy^2}{x+y} = p, \tag{1}$$

pričom p je prvočíslo. Označme d najväčšieho spoločného deliteľa čísel x, y. Potom $x = da$, $y = db$, pričom prirodzené čísla a, b už nemajú žiadneho spoločného deliteľa väčšieho ako 1, teda sú nesúdeliteľné. Rovnosť (1) tak môžeme po vynásobení menovateľom $x + y$ a vydelení kladným číslom d zapísať v tvare

$$d^2ab^2 = p(a+b). \tag{2}$$

Keďže b^2 delí ľavú stranu, musí deliť aj pravú stranu. Avšak čísla a, b sú nesúdeliteľné, preto aj čísla b^2, $a+b$ sú nesúdeliteľné. Podľa známeho tvrdenia[1] potom $b^2 \mid p$. Prvočíslo p má iba dva delitele: 1 a p. Z nich je druhou mocninou iba číslo 1, preto nutne $b = 1$. Rovnosť (2) teda môžeme prepísať na

$$d^2 a = p(a + 1). \tag{3}$$

Zopakujeme teraz podobné úvahy. Keďže a delí ľavú stranu, musí deliť aj pravú stranu. Pritom čísla a, $a + 1$ sú nesúdeliteľné, takže $a \mid p$. Nutne preto buď $a = 1$, alebo $a = p$. Rozlíšime dva prípady.

Ak $a = 1$, tak po dosadení do (3) máme $d^2 = 2p$. Zrejme $2p$ je druhou mocninou prirodzeného čísla jedine v prípade $p = 2$. Potom $d = 2$ a dostávame dvojicu $x = 2$, $y = 2$.

Ak $a = p$, dosadením do (3) a vydelením kladným p dostaneme $d^2 = p + 1$, čiže $p = (d + 1)(d - 1)$. Čísla $d + 1$, $d - 1$ sú teda dva rôzne (nezáporné) delitele prvočísla p, z čoho nutne $d - 1 = 1$, $d + 1 = p$. Takže $d = 2$, $p = 3$ a dostávame dvojicu $x = 6$, $y = 2$.

Skúškou sa ľahko presvedčíme, že obe nájdené dvojice vyhovujú zadaniu.

Záver. Zadaniu vyhovujú dvojice $(2, 2)$ a $(6, 2)$.

A – I – 4

a) Položme napríklad $a = 1$, $d = 1$. Potom postupnosť $(*)$ má tvar

$$1, 2, 3, 4, \dots ,$$

t. j. obsahuje všetky prirodzené čísla. Medzi nimi je samozrejme nekonečne veľa k-tych mocnín pre každé k. (Vyhovujúce a, d možno zvoliť aj mnohými inými spôsobmi.)

b) Položme napríklad $a = 2$, $d = 4$. Postupnosť $(*)$ má vtedy tvar

$$2, 6, 10, 14, \dots ,$$

t. j. obsahuje čísla $4n + 2$, kde $n = 0, 1, 2, \dots$ Táto postupnosť obsahuje len párne čísla, preto určite neobsahuje žiadnu k-tu mocninu *nepárneho* čísla. Avšak k-ta mocnina ľubovoľného *párneho* čísla je deliteľná číslom 2^k, teda aj číslom 4 (pre $k \geqq 2$), a nemôže byť tvaru $4n + 2$. Takže zvolená postupnosť neobsahuje žiadnu k-tu mocninu prirodzeného čísla pre žiadne $k = 2, 3, \dots$ (Podobne možno zdôvodniť, že vyhovuje postupnosť, ktorú dostaneme voľbou $a = p$, $d = p^2$ pre ľubovoľné prvočíslo p.)

c) Položme napríklad $a = 8$, $d = 16$. Postupnosť $(*)$ má vtedy tvar

$$8, 24, 40, 56, \dots ,$$

t. j. obsahuje čísla $16n + 8$, kde $n = 0, 1, 2, \dots$ Keďže $16n + 8 = 8(2n + 1)$, zvolená postupnosť neobsahuje žiadnu druhú mocninu prirodzeného čísla. V rozklade na súčin

[1] Ak k, l sú nesúdeliteľné a $k \mid lm$, tak $k \mid m$.

prvočísel má totiž každý jej člen činiteľ 2^3, zatiaľ čo druhé mocniny majú v rozklade na súčin prvočísel všetky exponenty párne. Na druhej strane, v danej postupnosti sa zrejme nachádzajú všetky čísla $(2\cdot 1)^3, (2\cdot 3)^3, (2\cdot 5)^3, \ldots$, čiže 8-násobky tretích mocnín nepárnych čísel. Takže postupnosť obsahuje nekonečne veľa tretín mocnín prirodzených čísel. (Opäť sme mohli a, d zvoliť aj inak, stačí zobrať $a = p^3$, $d = p^4$, kde p je ľubovoľné prvočíslo.)

d) Ak sa v postupnosti $(*)$ nenachádza žiadna k-ta mocnina, dokazované tvrdenie triviálne platí. Predpokladajme, že sa v postupnosti nachádza aspoň jedna k-ta mocnina. Všeobecný člen v $(*)$ má tvar $a + nd$, pričom n je nezáporné celé číslo. Pre nejaké prirodzené číslo m teda platí $m^k = a + nd$. Chceme ukázať, že medzi členmi z $(*)$ je nekonečne veľa ďalších k-tych mocnín. Všetky členy postupnosti $(*)$ dávajú po delení číslom d rovnaký zvyšok (taký, ako dáva po delení číslom d číslo a). Zároveň vieme, že ak dve čísla dávajú po delení d rovnaký zvyšok, dávajú rovnaký zvyšok po delení d aj ich k-te mocniny. V postupnosti $(*)$ teda budú ležať aj k-te mocniny čísel $m + td$ pre ľubovoľné prirodzené číslo t. Naozaj, podľa binomickej vety máme

$$\begin{aligned}(m+td)^k &= m^k + km^{k-1}td + \tbinom{k}{2}m^{k-2}t^2d^2 + \cdots + kmt^{k-1}d^{k-1} + t^kd^k = \\ &= m^k + d\cdot\Big(km^{k-1}t + \tbinom{k}{2}m^{k-2}t^2d + \cdots + kmt^{k-1}d^{k-2} + t^kd^{k-1}\Big) = \\ &= m^k + d\cdot M = a + nd + dM = a + d(n+M).\end{aligned}$$

Keďže M (výraz vo veľkej zátvorke) je zjavne prirodzené číslo, $(m+td)^k = a+d(n+M)$ je členom postupnosti $(*)$ pre každé prirodzené t. Takže $(*)$ obsahuje nekonečne veľa k-tych mocnín.

A – I – 5

Očíslujme si zaradom vrcholy daného mnohouholníka číslami od 1 po 2008.

a) Po chvíli nájdeme postup, ako presúvať mince, aby sme došli k zadanému cieľu. Popíšeme jednu z možností.

Mince z vrcholov $1, 2, \ldots, 251$ postupne zhromaždíme na jednej kôpke vo vrchole s číslom 251. Ich pohyb budeme vyvažovať presúvaním mincí z vrcholov 1758 až 2008 do vrcholu s číslom 1758. Takto vytvoríme dve kôpky po 251 minciach. Podobným spôsobom zhromaždíme mince z vrcholov s číslami 252 až 502 na jednej kôpke vo vrchole s číslom 502. Ich pohyb vyvážime vytvorením rovnako početnej kôpky vo vrchole s číslom 1507. Takto postupujeme aj ďalej; posledné dve kôpky s 251 mincami budú vo vrcholoch s číslami 1004 a 1005.

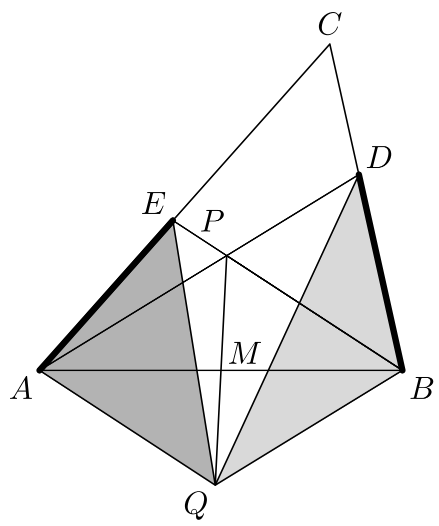
b) Postup spĺňajúci pravidlá presunu mincí sa nájsť nedá, čo v ďalšom dokážeme.

Priraďme každej minci číslo vrcholu, v ktorom sa nachádza. Všimnime si súčet S všetkých čísel priradených minciam. Čo sa stane, keď presunieme dvojicu mincí? Ak presun nenastane medzi dvoma vrcholmi s číslami 1 a 2008, hodnota súčtu S sa nezmení: jednej z presúvaných mincí sa priradené číslo o 1 zväčší a druhej sa o 1 zmenší. Ak medzi vrcholmi s číslami 1 a 2008 presun nastane, hodnota S sa buď nezmení (vtedy, keď sa obe mince presúvajú medzi týmito vrcholmi, teda si len navzájom vymenia pozície), alebo sa zmení o 2008 (môže vzrásť alebo klesnúť). Celkovo to môžeme zhrnúť tak, že zvyšok súčtu S po delení číslom 2008 sa pri presunoch mincí nemení.

Hodnota S je na začiatku $1 + 2 + \cdots + 2008 = 1004 \cdot 2009$. Toto číslo dáva po delení číslom 8 zvyšok 4. Na konci máme 251 kôpok po 8 mincí. Každá z kôpok prispieva do S násobkom čísla 8, preto hodnota S by mala byť na konci deliteľná číslom 8. Zvyšok hodnoty S po delení číslom 8 sa však nemení, lebo $8 \mid 2008$. Zvyšky hodnoty S po delení 8 sú rôzne pre úvodnú a cieľovú pozíciu, čiže popísanými presunmi mincí nemôžeme dosiahnuť z úvodnej pozície pozíciu s 251 kôpkami po 8 mincí.

A – I – 6

Nech Q je obrazom bodu P v stredovej súmernosti so stredom M. Bod Q leží na osi uhla ACB práve vtedy, keď je rovnako vzdialený od priamok AC a BC.

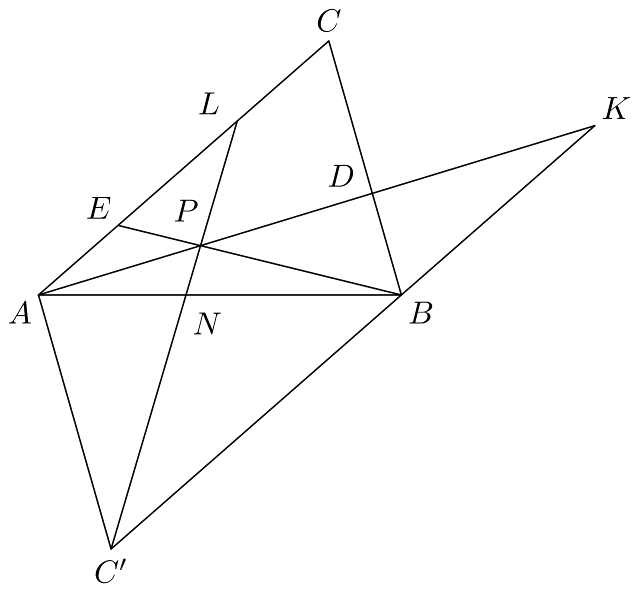


Obr. 19

Chceme využiť rovnosť dĺžok úsekov AE a BD v súvislosti s bodom Q. Všimnime si preto trojuholníky AEQ a BDQ (obr. 19). Bod Q je rovnako vzdialený od priamok AC a BC práve vtedy, keď trojuholníky AEQ a BDQ majú rovnaký obsah. Dokážeme tvrdenie o rovnosti obsahov týchto trojuholníkov.

Priamka BQ je rovnobežná s priamkou AD, pretože je jej obrazom v stredovej súmernosti so stredom M. Preto trojuholníky QBD a QBA majú rovnaký obsah (majú rovnaké výšky na spoločnú základňu QB). Podobne aj obsah trojuholníka QAE je rovnaký, ako obsah trojuholníka QAB. Takže náš dôkaz je hotový.

Iné riešenie. V zadaní sa spomína stredová súmernosť so stredom M. Takáto súmernosť často pomáha v úlohách týkajúcich sa ťažníc trojuholníka. Poďme ju využiť aj tu. Nech sa v tejto stredovej súmernosti zobrazí bod C do bodu C' a bod P do bodu Q. Ďalej označíme K priesečník priamok $C'B$ a AD. Priesečníky priamky $C'P$ s priamkami AB a AC označíme N a L (obr. 20).



Obr. 20

Máme dokázať, že bod Q leží na osi uhla ACB. Vďaka vlastnostiam stredovej súmernosti toto platí práve vtedy, keď bod P leží na osi uhla $AC'B$ (vnútorného v trojuholníku $AC'B$). Je známe (pozri druhú návodnú úlohu), že toto je pravda práve vtedy, keď bod N rozdelí úsečku AB v pomere dĺžok úsečiek AC a BC. Naším cieľom preto bude určiť veľkosť pomeru $AN : BN$. Nech $|BD| = |AE| = x$, $|CD| = y$ a $|AC| = b$.

Trojuholníky ADC a KDB sú podobné, preto

$$|BK| = |AC| \cdot \frac{|BD|}{|CD|} = b \cdot \frac{x}{y}.$$

Rovnoľahlosť rovnobežných priamok BC' a AC so stredom v bode P zachováva pomery, preto

$$|LE| = |AE| \cdot \frac{|C'B|}{|KB|} = x \cdot \frac{b}{b \cdot \frac{x}{y}} = y.$$

Nakoniec, trojuholníky ANL a BNC' sú podobné, z čoho dostaneme

$$\frac{|AN|}{|BN|} = \frac{|AL|}{|BC'|} = \frac{|AE| + |LE|}{|BC'|} = \frac{x+y}{|BC'|} = \frac{|AC'|}{|BC'|}.$$

Platnosť tejto rovnosti znamená, že priamka $C'N$, a teda aj priamka $C'P$, je osou uhla $AC'B$.

A – S – 1

Ak prirodzené čísla m, n spĺňajú zadané nerovnosti, tak zrejme

$$m \geqq 2 \qquad \text{a} \qquad 2\sqrt{n} - m > 0 \tag{1}$$

(inak by výraz na ľavej strane zadaných nerovností nebol definovaný, resp. prostredný výraz by nebol väčší ako nezáporný výraz na ľavej strane). Predpokladajme, že podmienky (1) sú splnené. V takom prípade môžeme urobiť na každej z oboch nerovností v jednom stĺpci nasledujúce *ekvivalentné* úpravy (pri každom zo štyroch umocňovaní na druhú sú obe strany dobre definované a nezáporné):

$$\begin{array}{rll@{\qquad}rll}
2\sqrt{n}-m < \sqrt{m^2-2} & \big|\,^2 & & \sqrt{m^2-4} < 2\sqrt{n}-m & \big|\,^2 \\
4n-4m\sqrt{n}+m^2 < m^2-2 & & & m^2-4 < 4n-4m\sqrt{n}+m^2 & \\
n+\frac12 < m\sqrt{n} & \big|\,^2 & & m\sqrt{n} < n+1 & \big|\,^2 \\
n^2+n+\frac14 < m^2 n & \big|\, : n & & m^2 n < n^2+2n+1 & \big|\, : n \\
n+1+\dfrac{1}{4n} < m^2 & & & m^2 < n+2+\dfrac{1}{n} &
\end{array}$$

Posledné dve nerovnosti platia práve vtedy, keď sa m^2 nachádza v intervale

$$\left(n+1+\frac{1}{4n},\, n+2+\frac{1}{n}\right).$$

Ten vzhľadom na zrejmé nerovnosti $0 < \frac{1}{4n} \leqq \frac14$ a $0 < \frac1n \leqq 1$ obsahuje jediné prirodzené číslo $n+2$. Prirodzené čísla m, n teda spĺňajú výsledné nerovnosti práve vtedy, keď $m^2 = n+2$.

Ešte treba zistiť, kedy pre $n = m^2-2$ platia podmienky (1). Pre $m \geqq 2$ môžeme urobiť nasledujúce ekvivalentné úpravy:

$$\begin{aligned}
2\sqrt{m^2-2}-m &> 0,\\
2\sqrt{m^2-2} &> m, \quad \big|\,^2\\
4(m^2-2) &> m^2,\\
3m^2 &> 8.
\end{aligned}$$

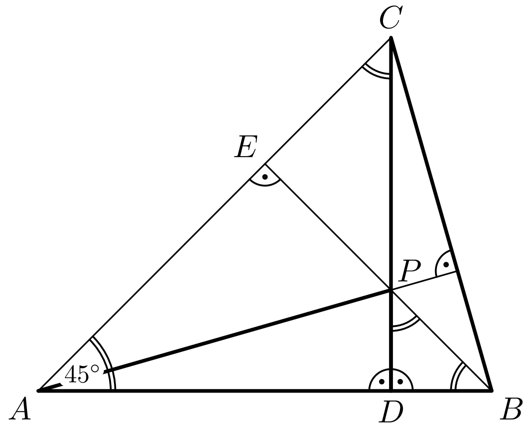
Posledná nerovnosť a teda aj podmienky (1) sú pre každé $m \geqq 2$ splnené.

Odpoveď. Hľadané dvojice sú $(m,n) = (m, m^2-2)$, kde $m \geqq 2$ je ľubovoľné prirodzené číslo.

A – S – 2

Dokážeme najprv prvú implikáciu. Nech $AP \perp BC$. Potom bod P je priesečníkom výšok trojuholníka ABC. Chceme dokázať, že úsečky AP a BC sú zhodné, preto nájdeme dva zhodné trojuholníky, v ktorých sú tieto úsečky zodpovedajúcimi si stranami.

Označme E priesečník priamky BP so stranou AC, t. j. pätu výšky spustenej z vrcholu B. Z pravouhlého trojuholníka ABE a zadanej veľkosti uhla BAC ľahko dopočítame, že $|\measuredangle PBD| = 45°$. Preto trojuholník PDB je pravouhlý a rovnoramenný, čiže $|DP| = |DB|$. Podobne trojuholník ADC je rovnoramenný a pravouhlý, teda $|DA| = |DC|$. Podľa vety *sus* sú potom pravouhlé trojuholníky APD a CBD zhodné a ich prepony AP, BC majú rovnakú dĺžku (obr. 21).



Obr. 21

Ostáva dokázať druhú implikáciu. Predpokladajme, že $|AP| = |BC|$. Keďže ADC je rovnoramenný pravouhlý trojuholník, platí $|AD| = |CD|$, z čoho vyplýva, že trojuholníky PAD a BCD sú zhodné podľa vety *Ssu*. Odtiaľ máme $|PD| = |BD|$, z čoho dostávame $|\measuredangle ABP| = 45°$. Označme opäť E priesečník priamky BP so stranou AC. Z trojuholníka ABE jednoducho odvodíme, že uhol BEA je pravý, takže priamka BP je výškou trojuholníka ABC (obr. 21). Preto bod P je priesečník výšok tohto trojuholníka. Z toho vyplýva, že AP je výška na stranu BC, čiže je na ňu kolmá.

Iné riešenie. Ak $AP \perp BC$, je bod P priesečníkom výšok trojuholníka ABC. Označme $|\measuredangle BAC| = \alpha = 45°$. Podobne ako v jednom z riešení úlohy A – I – 2 možno odvodiť

$$|AP| = \frac{|BC| \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha} = |BC| \cdot \operatorname{cotg}\alpha = |BC| \cdot \operatorname{cotg} 45° = |BC|.$$

Nech naopak $|AP| = |BC|$. Označme Q priesečník výšok trojuholníka ABC. Z dokázanej prvej implikácie máme $|AQ| = |BC|$. Všetky body úsečky CD majú navzájom rôznu vzdialenosť od bodu A, preto vnútri úsečky CD môže ležať nanajvýš jeden bod P s vlastnosťou $|AP| = |BC|$, a tento bod musí byť totožný s bodom Q.

A – S – 3

Aby sa uvedený zlomok dal krátiť prirodzeným číslom d, musí byť d zároveň deliteľom čitateľa aj menovateľa. Predpokladajme teda, že pre nejaké prirodzené číslo d a nesúdeliteľné celé čísla p, q platí $d \mid 3p - q$ a súčasne $d \mid 5p + 2q$. Vhodným násobením a sčítaním oboch výrazov dostávame

$$d \mid 2(3p - q) + (5p + 2q) = 11p, \qquad \text{a tiež} \qquad d \mid 3(5p + 2q) - 5(3p - q) = 11q.$$

Takže d je deliteľom oboch čísel $11p$, $11q$ a musí deliť aj číslo[2]

$$\mathrm{nsd}(11p, 11q) = 11 \cdot \mathrm{nsd}(p, q) = 11.$$

Odtiaľ máme $d \in \{1, 11\}$. Uvedený zlomok, ak vôbec, sa teda dá krátiť iba číslom 11 (ak $d = 1$, sotva možno hovoriť o „krátení“). Ľahko nájdeme príklad nesúdeliteľných čísel p, q, pre ktoré sa jedenástimi daný zlomok naozaj dá krátiť. Napr. pre $p = 9$, $q = 5$ platí

$$\frac{3p - q}{5p + 2q} = \frac{3 \cdot 9 - 5}{5 \cdot 9 + 2 \cdot 5} = \frac{11 \cdot 2}{11 \cdot 5} = \frac{2}{5}.$$

Odpoveď. Jediné prirodzené číslo, ktorým sa dá krátiť niektorý z uvedených zlomkov, je 11.

Poznámka. Úvahu, že z vlastností $d \mid 11p$, $d \mid 11q$ a $\mathrm{nsd}(p, q) = 1$ vyplýva $d \in \{1, 11\}$, možno previesť aj inými spôsobmi. Môžeme napríklad rozlíšiť dva prípady: Ak d nie je násobkom jedenástich, tak z $d \mid 11p$, $d \mid 11q$ máme $d \mid p$, $d \mid q$, čiže $d = 1$. Ak $d = 11k$, kde k je prirodzené, tak z $d \mid 11p$, $d \mid 11q$ vyplýva $k \mid p$, $k \mid q$, čiže $k = 1$ a $d = 11$.

A – II – 1

Označme hľadané číslo $n = \overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$ a číslo s opačným poradím číslic $k = \overline{dcba} = 1000d + 100c + 10b + a$. Obe čísla dávajú rovnaký zvyšok po delení číslom 37, preto je ich rozdiel

$$\begin{aligned} k - n &= (1000d + 100c + 10b + a) - (1000a + 100b + 10c + d) = \\ &= 999(d - a) + 90(c - b) = 37 \cdot 27(d - a) + 90(c - b) \end{aligned} \tag{1}$$

deliteľný číslom 37, čiže $37 \mid 90(c - b)$. Keďže 37 je prvočíslo a číslo 90 nie je jeho násobkom, nutne $37 \mid c - b$. To je pre číslice b, c možné len v prípade, že $b = c$. Naopak, ak $b = c$, tak z vyjadrenia (1) je zrejmé, že rozdiel $k - n$ je deliteľný číslom 37, t. j. čísla n a k dávajú po delení 37 rovnaký zvyšok. Môžeme teda položiť $n = \overline{abbd}$, $k = \overline{dbba}$ a ďalej sa už zaoberať len podmienkami o deliteľnosti siedmimi.

Keďže sú siedmimi deliteľné obe čísla n, k, je siedmimi deliteľný aj ich rozdiel. Dosadením $c = b$ do vyjadrenia (1) dostávame

$$7 \mid k - n = 37 \cdot 27(d - a).$$

Rovnakou úvahou ako predtým (7 je prvočíslo a $37 \cdot 27$ nie je jeho násobkom) dostávame $7 \mid d - a$. Navyše zo zadanej podmienky $k > n$ vyplýva $d > a$; nemôže byť ani $d = a$, inak by sme mali $n = \overline{abbd} = \overline{dbba} = k$. Číslice a, d preto musia spĺňať vzťah $d - a = 7$. Prípustné sú len dve možnosti: $a = 1$, $d = 8$, alebo $a = 2$, $d = 9$. (Prípad $a = 0$, $d = 7$ je vylúčený, lebo a je začiatočnou číslicou čísla n.)

[2] Využívame známy poznatok, že každý spoločný deliteľ daných dvoch celých čísel a, b je deliteľom ich najväčšieho spoločného deliteľa $\mathrm{nsd}(a, b)$.

Ak $a = 1$, $d = 8$, budú čísla

$$n = \overline{1bb8} = 1008 + 110b = 7 \cdot 144 + 110b,$$
$$k = \overline{8bb1} = 8001 + 110b = 7 \cdot 1143 + 110b$$

deliteľné siedmimi vtedy a len vtedy, keď $7 \mid b$, čiže $b = 0$ alebo $b = 7$. Teda $n = 1008$ alebo $n = 1778$.

Ak $a = 2$, $d = 9$, budú čísla

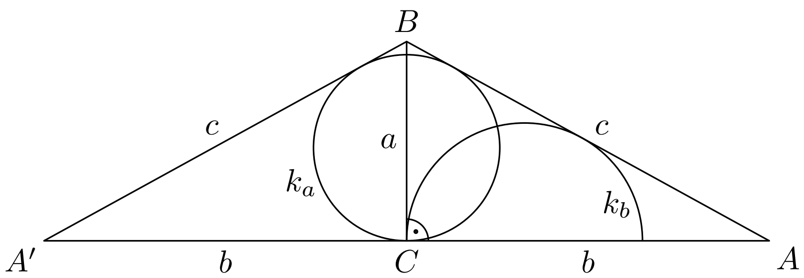
$$n = \overline{2bb9} = 2009 + 110b = 7 \cdot 287 + 110b,$$
$$k = \overline{9bb2} = 9002 + 110b = 7 \cdot 1286 + 110b$$

deliteľné siedmimi vtedy a len vtedy, keď $7 \mid b$, čiže $b = 0$ alebo $b = 7$. Teda $n = 2009$ alebo $n = 2779$.

Odpoveď. Hľadané štvorciferné číslo je niektoré zo štvorice 1008, 1778, 2009, 2779.

A – II – 2

Označme vrcholy daného trojuholníka A, B, C tak, aby vrcholy A, B ležali postupne oproti odvesnám dĺžok a, b.



Obr. 22

Najprv vypočítame veľkosti polomerov polkružníc k_a a k_b. Označme A' obraz bodu A v osovej súmernosti podľa priamky BC. Kružnica k_a je vpísaná do trojuholníka ABA' (obr. 22). Rovnoramenný trojuholník ABA' má obvod $o = 2(b + c)$ a obsah $S = ab$, preto polomer kružnice k_a vypočítame podľa známeho vzťahu

$$\varrho_a = \frac{2S}{o} = \frac{ab}{b + c}.$$

Podobne vypočítame polomer kružnice k_b, dostaneme $\varrho_b = ab/(a + c)$.

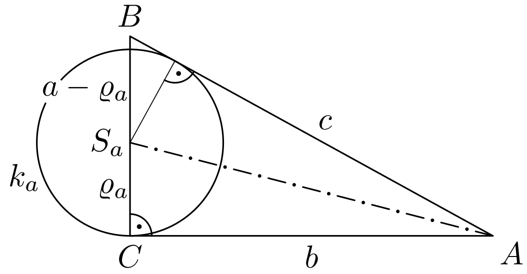
Pre p a pre ľubovoľný pravouhlý trojuholník s odvesnami a, b a preponou c má platiť

$$p \leqq \frac{\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{\frac{b+c}{ab} + \frac{a+c}{ab}}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{a + b + 2c}{a + b} = 1 + \frac{2c}{a + b} = 1 + \frac{2\sqrt{a^2 + b^2}}{a + b}.$$

Voľbou $a = b$ dostávame $p \leqq 1 + 2\sqrt{2a^2}/2a = 1 + \sqrt{2}$. Ukážeme, že pre $p = 1 + \sqrt{2}$ je zadaná nerovnosť vždy splnená. Naozaj, z uvedeného výpočtu a z nerovnosti medzi kvadratickým a aritmetickým priemerom dostávame

$$\frac{\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = 1 + \frac{2\sqrt{a^2 + b^2}}{a + b} = 1 + \frac{2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\sqrt{2}}{a + b} \geqq 1 + \frac{2\frac{a+b}{2}\sqrt{2}}{a + b} = 1 + \sqrt{2}.$$

Odpoveď. Najväčšie reálne číslo také, že zadaná nerovnosť platí pre všetky pravouhlé trojuholníky, je $p = 1 + \sqrt{2}$.



Obr. 23

Poznámka. Veľkosť polomerov ϱ_a a ϱ_b je možné vypočítať aj inými spôsobmi, napríklad takto: Nech c je dĺžka prepony. Stredy S_a, S_b polkružníc k_a, k_b ležia na osiach uhlov CAB a CBA. Je známe, že os uhla delí v trojuholníku protiľahlú stranu v pomere priľahlých strán. V našom prípade (obr. 23) dostávame $|S_aC|/|S_aB| = |AC|/|AB|$, t. j.

$$\frac{\varrho_a}{a - \varrho_a} = \frac{b}{c},$$

odkiaľ úpravou ľahko vyjadríme $\varrho_a = ab/(b + c)$. Analogicky vypočítame ϱ_b.

A – II – 3

Podobne ako pri riešení prvej úlohy domáceho kola, využitím známych súčtových vzorcov goniometrických funkcií pre ľubovoľné reálne čísla x, y dostávame

$$\begin{aligned} 2\sin y \sin(x + y) - \cos x &= 2\sin y(\sin x \cos y + \cos x \sin y) - \cos x = \\ &= 2\sin y \cos y \sin x + (2\sin^2 y - 1)\cos x = \\ &= \sin 2y \sin x - \cos 2y \cos x = \\ &= -\cos(x + 2y). \end{aligned}$$

Z podmienok úlohy potom pre veľkosti vnútorných uhlov α, β, γ trojuholníka platí

$$\cos\alpha - 2\sin\beta\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha + 2\beta) = -1, \tag{1}$$
$$\cos\beta - 2\sin\gamma\sin(\beta + \gamma) = \cos(\beta + 2\gamma) = 0. \tag{2}$$

Vnútorné uhly ľubovoľného trojuholníka ležia v intervale $(0,\pi)$, z čoho vyplývajú nerovnosti $0<\alpha+2\beta<3\pi$.[3] Ich spojením s (1) máme $\alpha+2\beta=\pi$. Odtiaľ

$$\gamma=\pi-(\alpha+\beta)=\pi-(\alpha+2\beta)+\beta=\pi-\pi+\beta=\beta.$$

Dosadením do (2) dostávame

$$\cos 3\beta=0. \tag{3}$$

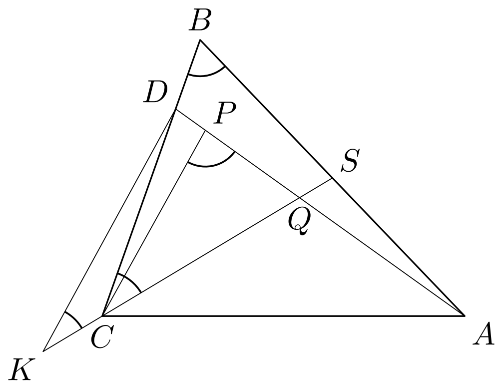
Uhol β je ostrý, lebo je zhodný s uhlom γ a trojuholník nemôže mať dva pravé, resp. dva tupé vnútorné uhly. Teda $0<3\beta<\frac{3}{2}\pi$, a vzhľadom na (3) máme $3\beta=\frac{1}{2}\pi$, čiže $\beta=\gamma=\frac{1}{6}\pi$. Ľahko dopočítame $\alpha=\pi-\beta-\gamma=\frac{2}{3}\pi$. Skúškou (ktorá však pri uvedenom postupe nie je nutná) ľahko overíme, že táto trojica α, β, γ spĺňa všetky podmienky zadania.

Odpoveď. Podmienkam úlohy vyhovuje trojuholník, ktorého veľkosti vnútorných uhlov (uvedené v stupňoch) sú $\alpha=120°$, $\beta=\gamma=30°$.

Poznámka. Úlohu možno riešiť aj iným postupom. Z druhej rovnice sústavy sa dá odvodiť vzťah $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\gamma=-1$, z ktorého vyplýva $\alpha-\gamma=\pm\frac{1}{2}\pi$. Pre každú z oboch možností znamienka dosadením do prvej rovnice získame kubickú rovnicu v premennej $t=\sin\gamma$, ktorú možno vyriešiť uhádnutím koreňov.

A – II – 4

Označme Q priesečník úsečky AD a ťažnice z vrcholu C (teda Q je „zakázaná“ poloha bodu P). Sú dve možnosti, kde môže ležať bod P: vnútri úsečky DQ alebo vnútri úsečky QA. Ukážeme, že v oboch prípadoch prechádza kružnica opísaná trojuholníku AKP bodom M súmerne združeným s bodom C podľa stredu strany AB (ktorého poloha samozrejme od výberu bodov D a P nezávisí).



Obr. 24

Uvažujme ako prvý prípad, keď bod P leží vnútri úsečky DQ. Dokážme najskôr, že potom bod K leží vnútri úsečky CQ. Nech S je stred strany AB. Bod K nemôže ležať

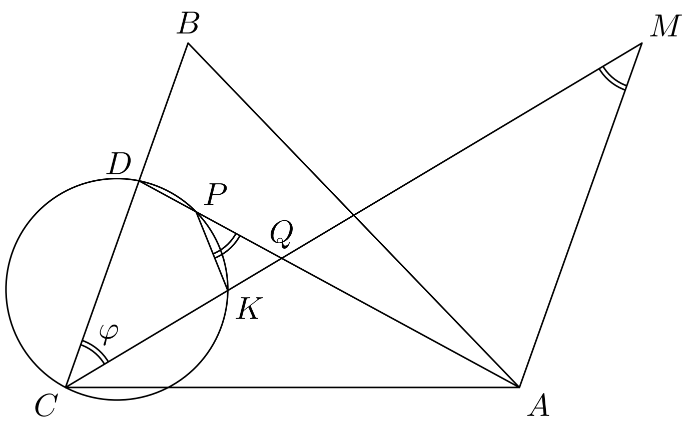
[3] Platí dokonca $\alpha+2\beta<2\pi$, lebo $\alpha+\beta=\pi-\gamma<\pi$.

vnútri polpriamky opačnej k polpriamke QC, v takom prípade by totiž bod P ležal vnútri trojuholníka CKD, t. j. body C, K, D, P by v žiadnom prípade nemohli ležať na jednej kružnici. Zadanie triviálne vylučuje aj možnosti $K = Q$ a $K = C$. Ostáva vylúčiť možnosť, že K leží vnútri polpriamky opačnej k polpriamke CQ (obr. 24). Ak by to tak bolo, tak by body K a P ležali v opačných polrovinách určených priamkou DC a uhly DKC a CPA by museli mať rovnakú veľkosť, aby bol štvoruholník $DKCP$ tetivový. Pri uvažovanej polohe bodov však zrejme platí

$$|\measuredangle DKC| < |\measuredangle DCS| \qquad \text{a} \qquad |\measuredangle CBS| = |\measuredangle CBA| < |\measuredangle CPA|.$$

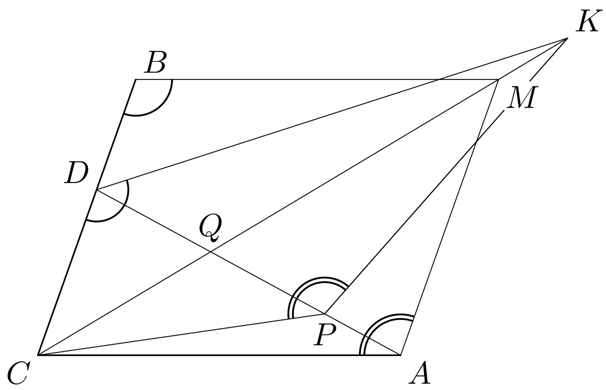
Z ostrouhlosti trojuholníka ABC vyplýva $|\measuredangle DCS| < |\measuredangle CBS|$ (lebo $|CS| > |BS|$, keďže C leží zvonka Tálesovej kružnice so stredom S a priemerom AB). Spolu máme $|\measuredangle DKC| < |\measuredangle CPA|$.

Bod K teda musí ležať vnútri úsečky CQ (obr. 25). Označme φ veľkosť uhla KCB. Body C a P sú protiľahlými vrcholmi tetivového štvoruholníka $CDPK$, preto $|\measuredangle DPK| = 180° - \varphi$. Z toho dostávame $|\measuredangle APK| = \varphi$. Rovnakú veľkosť ako uhol APK má aj uhol AMC, pretože priamky AM a BC sú rovnobežné. Zrejme body P a M ležia v rovnakej polrovine vzhľadom na priamku AK (oba totiž ležia v polrovine AKQ). Z rovnosti $|\measuredangle APK| = |\measuredangle AMK|$ potom vyplýva, že body A, K, P a M ležia na kružnici.



Obr. 25

V druhom prípade leží bod P vnútri úsečky QA. Dokážme, že potom K leží vnútri úsečky QM. Bod K samozrejme musí ležať na polpriamke opačnej k polpriamke QC, t. j. na polpriamke QM. Stačí vylúčiť možnosť, že K leží až „za“ bodom M, čiže na polpriamke opačnej k polpriamke MQ (obr. 26). Ak by to tak bolo, zrejme by s využitím



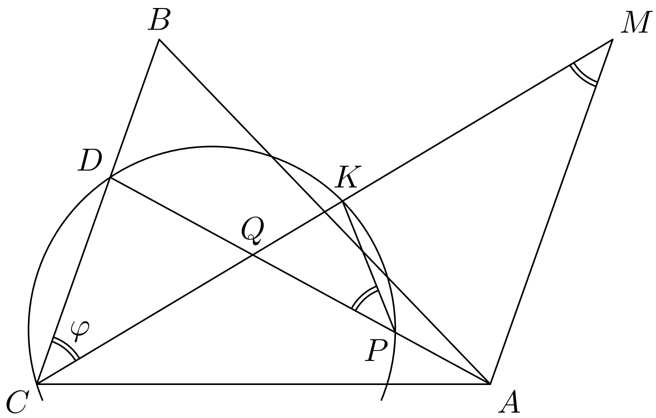
Obr. 26

ostrosti uhla γ v trojuholníku ABC platilo

$$|\measuredangle CDK| > |\measuredangle CBM| = 180° - \gamma > 90° \quad \text{a} \quad |\measuredangle CPK| > |\measuredangle CAM| = 180° - \gamma > 90°.$$

Odtiaľ $|\measuredangle CDK| + |\measuredangle CPK| > 180°$, čo nie je možné vzhľadom na tetivovosť štvoruholníka $CPKD$ (súčet veľkostí protiľahlých uhlov musí byť rovný 180°).

Bod K teda musí ležať vnútri úsečky QM (obr. 27). Označme opäť φ veľkosť uhla KCB. Uhly DCK a DPK sú obvodové uhly nad tetivou DK, čiže $|\measuredangle DPK| = \varphi$ a $|\measuredangle APK| = 180° - \varphi$. Uhol AMC má veľkosť φ. Priamka AK oddeľuje body Q a M, preto body P a M ležia v rôznych polrovinách vzhľadom na túto priamku. Takže $APKM$ je tetivový štvoruholník, lebo uhly pri protiľahlých vrcholoch P a M majú súčet 180°.



Obr. 27

Iné riešenie. Dokážeme tvrdenie bez predpokladu ostrouhlosti trojuholníka ABC. Označme body Q a M rovnako ako v prvom riešení. Nevýhodou predošlého postupu je, že musíme rozoberať veľa možností a zdôvodňovať, že štvorice bodov ležia na uvažovaných kružniciach v správnom poradí (pritom pri tupouhlom trojuholníku ABC môže bod K ležať aj na polpriamke opačnej k polpriamke CQ, resp. MQ). Namiesto obvodových uhlov využijeme mocnosť bodu ku kružnici. Z nej pre bod Q a kružnicu opísanú štvoricu bodov C, P, D, K dostávame (bez ohľadu na polohu bodu P) $|QK| \cdot |QC| = |QP| \cdot |QD|$, teda $|QK| : |QP| = |QD| : |QC|$. Z podobnosti trojuholníkov QDC a QAM, ktorá vyplýva z rovnobežnosti priamok BC a AM, máme $|QD| : |QC| = |QA| : |QM|$. Platí teda

$$\frac{|QK|}{|QP|} = \frac{|QD|}{|QC|} = \frac{|QA|}{|QM|},$$

odkiaľ $|QK| \cdot |QM| = |QP| \cdot |QA|$. Z tejto rovnosti a zo známeho „obráteného“ tvrdenia o mocnosti bodu ku kružnici už priamo vyplýva, že body K, M, P, A ležia na jednej kružnici, bez ohľadu na to, či bod Q leží vnútri oboch úsečiek KM, PA, alebo mimo oboch týchto úsečiek. (Zrejme nie je možné, aby ležal vnútri jednej z nich a mimo druhej z nich; na dôkaz toho stačí rozlíšiť dve možné polohy bodu P na úsečke DA podobne ako v prvom riešení).

A – III – 1

Predpokladajme, že všetky čísla p, $3p+2$, $5p+4$, $7p+6$, $9p+8$ a $11p+10$ sú prvočíslami. Skúmajme, aký zvyšok po delení piatimi môže dávať p, teda pre aké l z množiny $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ a nezáporné celé číslo k môže platiť $p = 5k + l$.

- ▷ Ak $p = 5k$, tak $11p + 10 = 5(11k + 2)$ nie je prvočíslom pre žiadne k.
- ▷ Ak $p = 5k + 1$, tak $3p + 2 = 5(3k + 1)$ je prvočíslom jedine pre $k = 0$, ale potom $p = 1$, čo nie je prvočíslo.
- ▷ Ak $p = 5k + 2$, tak $7p + 6 = 5(7k + 4)$ nie je prvočíslom pre žiadne k.
- ▷ Ak $p = 5k + 3$, tak $9p + 8 = 5(9k + 7)$ nie je prvočíslom pre žiadne k.

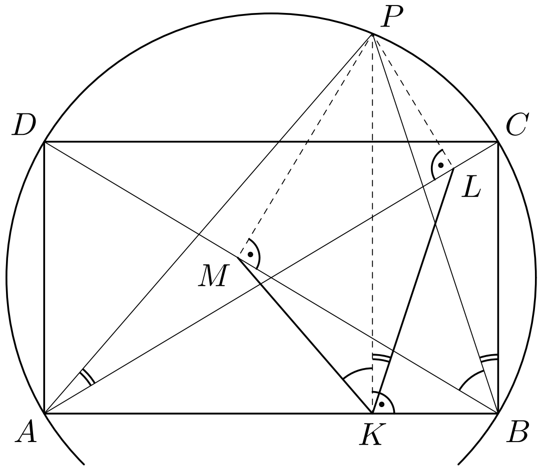
Číslo p preto musí byť tvaru $5k + 4$. Potom $6p + 11 = 5(6k + 7)$, čo je zložené číslo pre každé nezáporné celé k.

Poznámka. Najmenšie p, pre ktoré sú p, $3p + 2$, $5p + 4$, $7p + 6$, $9p + 8$ a $11p + 10$ prvočíslami, je $p = 2\,099$.

A – III – 2

Ukážeme, že uhol LKM má rovnakú veľkosť ako uhol CBD. Odtiaľ zadané tvrdenie triviálne vyplýva (uhol CBD má veľkosť 45° práve vtedy, keď $|BC| = |CD|$, čiže keď $ABCD$ je štvorec).

Body B, K, M, P ležia v tomto poradí na Tálesovej kružnici nad priemerom BP. Pre veľkosti obvodových uhlov nad tetivou PM teda platí $|\measuredangle PKM| = |\measuredangle PBM|$. Podobne body A, K, L, P ležia v tomto poradí na Tálesovej kružnici nad priemerom AP a pre veľkosti obvodových uhlov nad tetivou PL máme $|\measuredangle LKP| = |\measuredangle LAP|$. Napokon, z obvodových uhlov nad tetivou CP kružnice opísanej pravouholníku $ABCD$ dostávame $|\measuredangle CAP| = |\measuredangle CBP|$.



Obr. 28

Z uvedených rovností vyplýva (obr. 28)

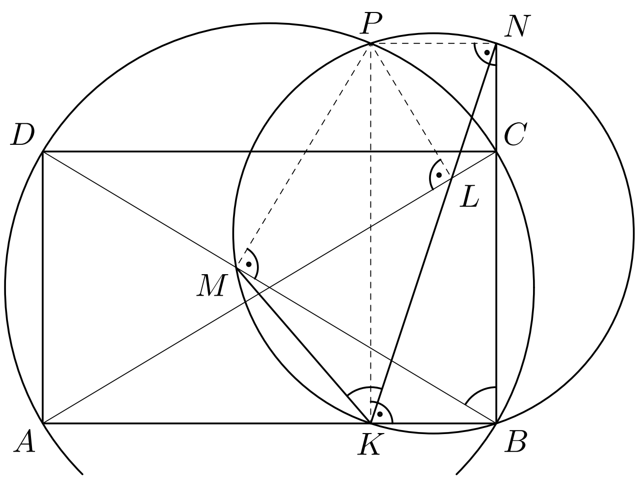
$$|\measuredangle LKM| = |\measuredangle LKP| + |\measuredangle PKM| = |\measuredangle LAP| + |\measuredangle PBM| = |\measuredangle CAP| + |\measuredangle PBD| = \\ = |\measuredangle CBP| + |\measuredangle PBD| = |\measuredangle CBD|,$$

čo sme chceli dokázať.

Poznámka. Uvedený postup možno použiť aj v triviálnom prípade, keď $P = C$ alebo $P = D$; vtedy majú niektoré z uvažovaných uhlov nulovú veľkosť.

Iné riešenie. Opäť dokážeme, že uhly LKM a CBD majú rovnakú veľkosť. Označme N pätu kolmice z bodu P na priamku BC. Body K, L, N ležia na Simsonovej priamke prislúchajúcej bodu P a trojuholníku ABC (obr. 29). Na Tálesovej kružnici nad priemerom PB ležia body K, M aj N. Z obvodových uhlov nad tetivou MN teda máme

$$|\measuredangle LKM| = |\measuredangle NKM| = |\measuredangle NBM| = |\measuredangle CBD|.$$



Obr. 29

A – III – 3

Nech a, b, c, d sú ľubovoľné kladné čísla, ktorých súčin je 1. Podľa nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom trojice čísel a^x, b^x, c^x máme

$$\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \geqq \sqrt[3]{a^x b^x c^x} = \sqrt[3]{\frac{1}{d^x}}.$$

Zvolením $x = 3$ v predošlej nerovnosti dostávame $\frac{1}{3}(a^3+b^3+c^3) \geqq 1/d$. Zrejme rovnako platí

$$\tfrac{1}{3}(a^3 + b^3 + d^3) \geqq 1/c, \quad \tfrac{1}{3}(a^3 + c^3 + d^3) \geqq 1/b, \quad \tfrac{1}{3}(b^3 + c^3 + d^3) \geqq 1/a.$$

Sčítaním uvedených štyroch nerovností dostávame

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geqq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d},$$

teda pre $x = 3$ zadaná nerovnosť vždy platí.

Ukážeme, že $x = 3$ je hľadanou najmenšou hodnotou, teda že pre ľubovoľné $x < 3$ zadaná nerovnosť nie je vždy splnená. Hľadajme štvoricu, pre ktorú nerovnosť nebude platiť, v tvare $a = b = c = t$, $d = 1/t^3$ pre vhodné t (závislé na danom $x < 3$). Pre takéto a, b, c, d vždy platí $abcd = 1$, a tiež

$$a^x + b^x + c^x + d^x = 3t^x + \frac{1}{t^{3x}},$$
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{3}{t} + t^3 > t^3.$$

Ak $t > 1$, tak $1/t^{3x} < t^x$ a ľavá strana zadanej nerovnosti je menšia ako $4t^x$. Aby nerovnosť neplatila, stačí zvoliť $t > 1$ tak, aby platilo $t^3 > 4t^x$, čo je pre $x < 3$ ekvivalentné s podmienkou

$$t > \sqrt[3-x]{4}.$$

Tú vieme voľbou dostatočne veľkého t triviálne splniť.

Záver. Hľadané najmenšie kladné číslo je $x = 3$.

A – III – 4

Z rovnosti $n + k^2 = (k+n)(k-n) + n(n+1)$ vidíme, že $n + k \mid n + k^2$ práve vtedy, keď $n + k \mid n(n + 1)$. Počet čísel k s touto vlastnosťou je teda rovný počtu tých deliteľov čísla $D = n(n + 1)$, ktoré sú väčšie ako n.

a) V prípade $n = 58$ z rozkladu na prvočinitele príslušného $D = 58 \cdot 59 = 2 \cdot 29 \cdot 59$ vidíme, že delitele čísla D väčšie ako 58 sú práve štyri: 59, $2 \cdot 59 = 118$, $29 \cdot 59 = 1\,711$ a $2 \cdot 29 \cdot 59 = 3\,422$. To sú hodnoty $58 + k$, takže príslušné k sú o 58 menšie, teda postupne $k = 1$, $k = 60$, $k = 1\,653$ a $k = 3\,364 = 58^2$.

b) Pre párne $n = 2p$, kde $p \geqq 3$, platí $D = 2p(2p+1)$, takže ľahko vypíšeme štyri delitele čísla D, ktoré sú väčšie ako dané $n = 2p$:

$$2p+1 < 2(2p+1) < p(2p+1) < 2p(2p+1). \tag{1}$$

Ak sú p, $2p+1$ prvočísla, žiadne iné také delitele číslo D zrejme nemá, teda $n = 2p$ spĺňa vlastnosť zo zadania.

Dokážeme, že ak aspoň jedno z čísel p, $2p+1$ je zložené, tak D má okrem deliteľov vypísaných v (1) ešte aspoň jedného deliteľa väčšieho ako $2p$.

Ak je číslo $p \geqq 3$ zložené, je deliteľné niektorým q, $2 \leqq q \leqq \frac{1}{2}p$ a číslo D má deliteľa $2q(2p+1)$, ktorý s výnimkou prípadu $q = \frac{1}{2}p$ leží medzi druhým a tretím deliteľom vypísaným v (1):

$$2(2p+1) < 2q(2p+1) < p(2p+1).$$

Ak číslo p nemá iného netriviálneho deliteľa okrem $q = \frac{1}{2}p$, platí $p = 4$. Vtedy však ani číslo $2p+1 = 9$ nie je prvočíslo, takže piateho deliteľa nájdeme podľa nasledujúceho odseku.

Ak (nepárne) číslo $2p+1$ je zložené, tak je deliteľné niektorým q, $3 \leqq q < p$, a číslo D má deliteľa $2pq$, ktorý leží medzi druhým a tretím deliteľom vypísaným v (1):

$$2(2p+1) < 2pq < p(2p+1), \quad \text{lebo} \quad q > 2 + \frac{1}{p} \text{ a } q < p + \frac{1}{2}.$$

Ekvivalencia z časti b) je tak dokázaná.

A – III – 5

Označme každú mincu číslom vrcholu, na ktorom leží (teda číslom z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$) a po každom preložení dvojice mincí označenie upravme. Sledujme, ako sa zmení súčet S všetkých čísel priradených minciam po jednom preložení.

Ak neprekladáme mince medzi vrcholmi A_1 a A_n, súčet sa nezmení, lebo na jednej minci sa číslo zmenší a na druhej zväčší o 1. Rovnako sa súčet nezmení, ak preložíme jednu mincu z A_1 do A_n a druhú z A_n do A_1. Ak preložíme jednu mincu z A_1 do A_n a druhú z A_i do A_{i+1} (kde $1 \leqq i \leqq n-1$), súčet S stúpne o $(n-1)+1 = n$. Ak naopak preložíme jednu mincu z A_n do A_1 a druhú z A_{i+1} do A_i (kde $1 \leqq i \leqq n-1$), súčet S klesne o n. Z uvedeného vyplýva, že zvyšok súčtu S po delení číslom n sa nikdy nezmení.

V počiatočnej pozícii má súčet S hodnotu

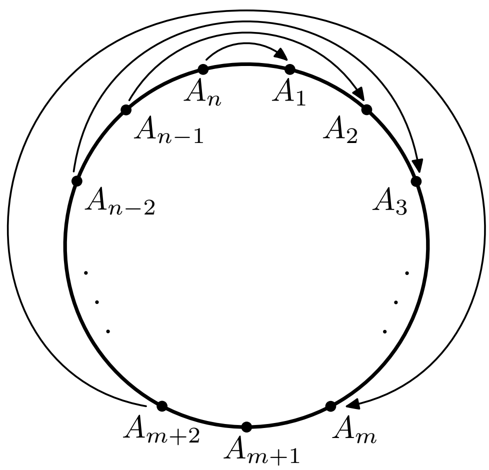
$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \dots + n \cdot n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

v želanej konečnej pozícii má S hodnotu

$$\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k) = (n+1)\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2 =$$
$$= \frac{1}{2}n(n+1)^2 - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

(využili sme známe vzorce pre súčet prvých a druhých mocnín čísel od 1 po n). Aby bolo možné presunúť mince z počiatočnej do želanej konečnej pozície, musia uvedené dve hodnoty dávať rovnaký zvyšok po delení n. To je možné len vtedy, keď ich rozdiel $\frac{1}{6}n(n+1)(n-1)$ je deliteľný n, čiže keď číslo $\frac{1}{6}(n+1)(n-1) = \frac{1}{6}(n^2-1)$ je celé. Dosadením jednotlivých zvyškových tried modulo 6 ľahko overíme, že táto podmienka je splnená práve vtedy, keď n dáva po delení šiestimi zvyšok 1 alebo 5.

Ostáva ukázať, že pre takéto n vieme mince poprekladať požadovaným spôsobom. Popíšeme jeden z možných postupov. Mincu, ktorá je na začiatku vo vrchole A_1, nazvime M. Všetky mince budeme prekladať v rovnakom smere, jedine mincu M (ktorú preložíme v každom kroku bez toho, aby by sme to v nasledujúcom odseku pripomínali) budeme prekladať opačným smerom a dodržiavať tak zadané pravidlá prekladania.



Obr. 30

Označme $n = 2m+1$ (zrejme uvažované hodnoty n sú nepárne). Mince budeme prekladať tak, ako je znázornené na obr. 30. Najprv preložíme $n-1$ mincí z vrcholu A_n na vrchol A_1 (posun o 1), potom $n-3$ mincí z vrcholu A_{n-1} na vrchol A_2 (posun o 3), atď., až napokon preložíme 2 mince z vrcholu A_{m+2} na vrchol A_m (posun o $n-2$). Tým dosiahneme, nepočítajúc mincu M, že v každom vrchole bude požadovaný počet mincí, len vo vrchole A_1 bude $n-1$ mincí. Vypočítajme, kde sa po uvedených preloženiach nachádza minca M.

Celkový počet preložení bol

$$T = (n-1)\cdot 1 + (n-3)\cdot 3 + \dots + 2\cdot(n-2) = \sum_{k=1}^{m} k(n-k) =$$
$$= (2m+1)\sum_{k=1}^{m} k - \sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{1}{2}m(m+1)(2m+1) - \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1) =$$
$$= \frac{1}{3}m(m+1)(2m+1) = \frac{1}{3}m(m+1)n.$$

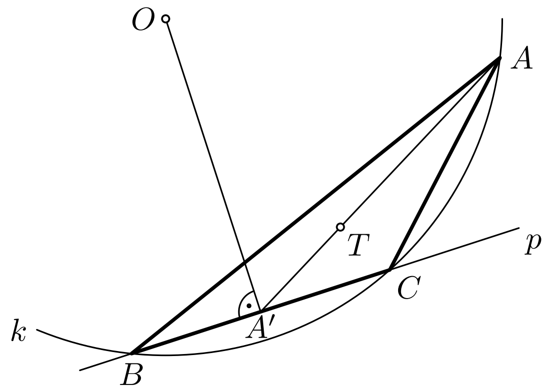
Pritom $m(m+1) = \frac{1}{4}(n+1)(n-1)$ je číslo deliteľné tromi, lebo n nie je násobkom troch. Takže T je celočíselným násobkom n a minca M sa po príslušnom počte okruhov ocitla opäť vo vrchole A_1. V ňom je preto tiež požadovaný počet n mincí.

Odpoveď. Požadovaný stav je možné dosiahnuť práve vtedy, keď n dáva po delení šiestimi zvyšok 1 alebo 5.

A – III – 6

Vezmime nejaký bod A z roviny ω. Aby mohol byť vrcholom trojuholníka opísaného v zadaní, musí byť rôzny od bodov O a T. Popíšeme všeobecnú konštrukciu trojuholníka ABC, v ktorom máme daný vrchol A, stred opísanej kružnice O a ťažisko T (pre trojicu navzájom rôznych bodov A, O, T). Potom zistíme, pre ktoré body A takýto trojuholník nie je možné skonštruovať.

Nech A' je stred strany BC. Bod A' je obrazom bodu A v rovnoľahlosti so stredom T a koeficientom $-\frac{1}{2}$. Ak $A' \neq O$, body B a C ležia na kolmici p na priamku OA' vedenej bodom A' a zároveň na opísanej kružnici k so stredom O a polomerom OA (obr. 31).



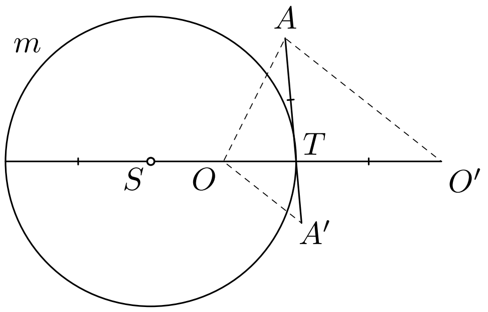
Obr. 31

K danému bodu A vieme vždy zostrojiť bod A' ako jeho obraz v uvedenej rovnoľahlosti. Predpokladajme najprv, že $A' \neq O$. Aby sme dostali dva rôzne body B a C, musí byť priamka p sečnicou kružnice k. To nastáva práve vtedy, keď $|OA'| < |OA|$. Označme O' obraz bodu O v rovnoľahlosti so stredom T a koeficientom -2. Platí $|O'A| = 2|OA'|$, preto konštrukčnú podmienku môžeme zapísať v tvare $|O'A| < 2|OA|$. Takže bod A musí ležať mimo kruhu určeného Apollóniovou kružnicou[4] $m(S; |ST|)$, kde S je bod súmerne združený s bodom T podľa bodu O (obr. 32).

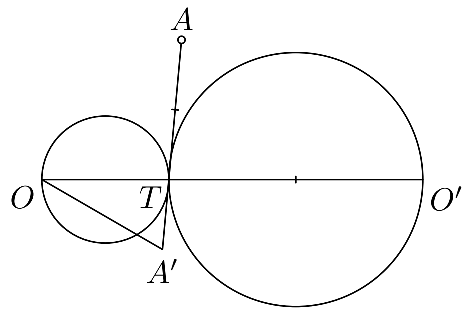
Ak teda $A' \neq O$, čiže $A \neq O'$, dostaneme konštrukciou tri body A, B, C. Tie budú vrcholmi vyhovujúceho trojuholníka, ak neležia na priamke. Na priamke ležia, keď je priamka BC totožná s priamkou AT, t. j. keď priamka OA' je kolmá na AT. Bod A' preto nesmie ležať na Tálesovej kružnici nad priemerom OT a (po „zobrazení" tejto

[4] Pre dané dva rôzne body P, Q a kladné číslo $k \neq 1$ je Apollóniova kružnica množina bodov X, pre ktoré platí $|PX| = k|QX|$. Stred Apollóniovej kružnice leží na priamke PQ, rovnako ako dva body kružnice, ktoré vieme pre dané k jednoducho zostrojiť.

podmienky v rovnoľahlosti so stredom T a koeficientom -2) bod A nesmie ležať na Tálesovej kružnici nad priemerom $O'T$ (obr. 33).

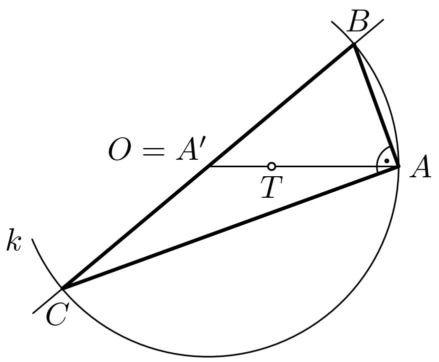


Obr. 32

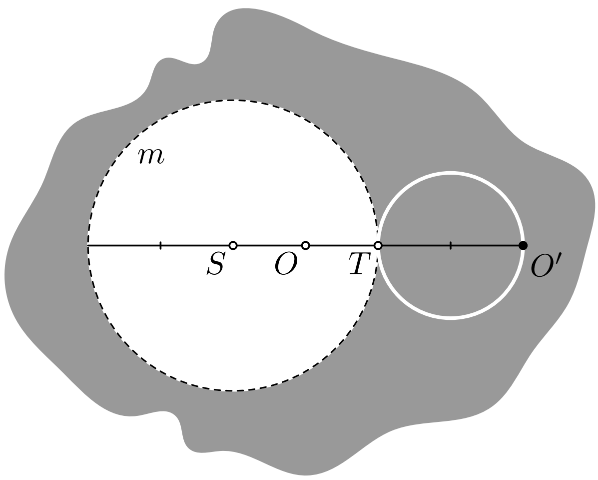


Obr. 33

V prípade, že bod A je totožný s bodom O', t. j. $A' = O$, namiesto kolmice p môžeme zobrať ľubovoľnú priamku (rôznu od AT) prechádzajúcu bodom O (obr. 34). Dostaneme tak nekonečne veľa rôznych trojuholníkov ABC s pravým uhlom pri vrchole A, ktoré spĺňajú všetky podmienky zadania.



Obr. 34



Obr. 35

Záver. Hľadanou množinou bodov je vonkajšia oblasť kružnice m okrem bodov ležiacich na Tálesovej kružnici nad priemerom $O'T$, pričom bod O' do hľadanej množiny tiež patrí (obr. 35).

Poznámka. Hľadaná množina bodov sa dá popísať analyticky bez toho, aby sme využili poznatok o Apollóniovej kružnici.

Prípravné sústredenia pred IMO a MEMO

Pred medzinárodnou matematickou olympiádou (IMO) a stredoeurópskou matematickou olympiádou (MEMO) sa každoročne koná jedno výberové a jedno prípravné sústredenie pre najlepších riešiteľov celoštátneho kola kategórie A (CK MO). Od 55. ročníka MO sa navyše každoročne koná aj spoločné prípravné sústredenie českého a slovenského IMO-družstva.

Po výberovom sústredení SKMO vyberie 6 najlepších študentov do reprezentačného družstva Slovenska pre IMO a určí jedného náhradníka. Spomedzi tých, ktorí sa nedostali na IMO a zároveň nie sú v maturitnom ročníku (t. j. majú možnosť súťažiť v MO aj nasledujúci školský rok), vyberie SKMO najlepších 6 študentov do družstva pre MEMO. Na výberovom sústredení pred IMO sa zúčastnilo 17 súťažiacich, najúspešnejších riešiteľov tretieho kola MO kategórie A. Sústredenie sa konalo v dňoch 29. 3. – 4. 4. 2009 v Bratislave. Úlohy zadávali lektori z FMFI UK Bratislava:

Peter Novotný, úlohy 1 – 3,

Ondrej Mikuláš, Michal Prusák, úlohy 4 – 7,

Martin Potočný, úlohy 8 – 10,

Peter Novotný, Erika Trojáková, úlohy 11 – 14,

Michal Burger, úlohy 15 – 17.

Každý deň študenti riešili sériu troch či štyroch úloh pri podobných podmienkach ako na IMO. V poobedňajších hodinách sa konal spoločný rozbor úloh s lektorom. Na konci sústredenia sa získané body za jednotlivé dni sčítali a s prihliadnutím na výsledky tretieho kola MO boli vybrané šesťčlenné družstvá pre účasť na IMO a MEMO.

Výsledky sústredenia:

Michal Spišiak	35	*Jakub Uhrík*	25
Eduard Eiben	34,5	*Vincent Lami*	24
Filip Sládek	34	*Tomáš Szaniszlo*	24
Ladislav Bačo	33,5	*Tomáš Belan*	20,5
Martin Bachratý	32,5	*Ján Hozza*	20
Michal Hagara	31,5	*Albert Herencsár*	17
Natália Karásková	31	*Nikola Hrdá*	7,5
Peter Csiba	30,5	*Tomáš Kuzma*	7
Peter Fulla	27		

Poradie po zohľadnení výsledkov CKMO:

1.	*Michal Spišiak*	71
2.	*Eduard Eiben*	65,5
3.	*Michal Hagara*	64,5
4.	*Jakub Uhrík*	61
5.	*Filip Sládek*	57
6.	*Martin Bachratý*	56,5
	Peter Csiba	56,5
8.	*Ladislav Bačo*	50,5
9.	*Peter Fulla*	47
	Natália Karásková	47
11.	*Vincent Lami*	45
12.	*Ján Hozza*	42
13.	*Tomáš Szaniszlo*	41
14.	*Tomáš Belan*	36,5
15.	*Albert Herencsár*	34
16.	*Tomáš Kuzma*	28
17.	*Nikola Hrdá*	23,5

Prípravné sústredenie sa konalo v dňoch 27. 5. – 2. 6. 2009 v Bratislave. Sústredenie bolo zamerané obzvlášť na prípravu reprezentačných družstiev na IMO a MEMO. Lektormi boli (všetci FMFI UK Bratislava):

Mgr. Martin Potočný (kombinatorika),
Bc. Michal Burger (algebra, invarianty),
RNDr. Tomáš Jurík (nerovnosti, geometria),
Ondrej Budáč (teória čísel),
Mgr. Peter Novotný, PhD. (geometria).

V poradí tretie spoločné sústredenie českého a slovenského družstva sa uskutočnilo v dňoch 14. – 19. 6. 2009 v ČR v Uherskom Hradišti v regionálnom vzdelávacom stredisku Eduha. Sústredenie sa uskutočnilo pod záštitou Společnosti Otakara Borůvky a bolo finančne zabezpečené z neštátnych prostriedkov. Pedagogický dozor slovenským (a na mieste aj českým) študentom robil Mgr. Martin Potočný zo združenia Trojsten, FMFI UK Bratislava. Odborné prednášky viedli

doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., MÚ AV ČR, Brno (teória čísel),
RNDr. Pavel Calábek, CSc., PF UP, Olomouc (algebra),
Mgr. Martin Panák, PhD., MÚ AV ČR, Brno (kombinatorika),
RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., PF UP, Olomouc (syntetická planimetria).

Zadania súťažných úloh výberového sústredenia pred IMO

1. Nech $S \subset \mathbb{R}$ je podmnožina množiny reálnych čísel. Hovoríme, že dvojica funkcií $f\colon S \to S$, $g\colon S \to S$ tvorí *brémsku dvojicu* na S, ak sú splnené nasledovné podmienky:
(i) Obe funkcie sú rýdzo rastúce, teda $f(x) < f(y)$ a $g(x) < g(y)$ pre ľubovoľné $x, y \in S$ spĺňajúce $x < y$.
(ii) Pre každé $x \in S$ platí $f(g(g(x))) < g(f(x))$.
Rozhodnite, či existuje brémska dvojica
a) na množine $S = \mathbb{N}$, t. j. na množine prirodzených čísel;
b) na množine $S = \{a - 1/b;\ a, b \in \mathbb{N}\}$.

2. Pre každé prirodzené číslo n určte počet takých permutácií $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, že

$$k \mid 2(a_1 + a_2 + \dots + a_k) \quad \text{pre všetky } k = 1, 2, \dots, n.$$

3. Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník a P, Q sú body v jeho vnútri, pričom štvoruholníky $PQDA$ a $QPBC$ sú tetivové. Na úsečke PQ leží taký bod E, že

$$|\measuredangle PAE| = |\measuredangle QDE| \quad \text{a} \quad |\measuredangle PBE| = |\measuredangle QCE|.$$

Dokážte, že štvoruholník $ABCD$ je tetivový.

4. Postupnosť reálnych čísel $\{a_n\}_{n \geqq 0}$ spĺňa nasledovnú podmienku:

$$a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n}) \quad \text{pre všetky } m \geqq n \geqq 0.$$

Vypočítajte hodnotu a_{2009} za podmienky, že $a_1 = 1$.

5. Na niektorých políčkach štvorčekovej mriežky 2009×2009 je položený kamienok (na každom políčku najviac jeden). Pre každé prázdne políčko mriežky nachádzajúce sa v i-tom riadku a j-tom stĺpci platí, že súčet počtu kamienkov v i-tom riadku a počtu kamienkov v j-tom stĺpci je aspoň 2009. Nájdite najmenší počet kamienkov, ktoré tam musia byť položené.

6. Kružnice k_1 a k_2 sa dotýkajú zvonka v bode K. Navyše sa dotýkajú zvnútra kružnice m v bode A_1, resp. A_2. Nech P je jeden z priesečníkov kružnice m so spoločnou dotyčnicou kružníc k_1 a k_2 prechádzajúcou bodom K. Priamka PA_1 pretína k_1 druhýkrát v bode B_1, podobne PA_2 pretína k_2 druhýkrát v bode B_2. Dokážte, že B_1B_2 je spoločná dotyčnica kružníc k_1 a k_2.

7. Nájdite všetky kladné celé čísla n také, že ich prvočíselný rozklad obsahuje iba čísla 2 a 5 (nie nutne obe), pričom $n + 25$ je druhou mocninou prirodzeného čísla.

8. Na štvorčekovom papieri s dĺžkou strany štvorčeka 1 uvažujme množinu S všetkých mrežových bodov. Pre prirodzené číslo k nazveme dvojicu rôznych bodov k-priateľskou, ak existuje bod C z S taký, že obsah trojuholníka ABC je rovný k. Podmnožinu T množiny S nazveme k-banda, ak každá dvojica bodov v T je k-priateľskou. Nájdi najmenšie celé kladné číslo k, pre ktoré existuje k-banda s viac ako 200 prvkami.

9. Je daný lichobežník $ABCD$ s rovnobežnými stranami AB a CD. Predpokladajme existenciu bodu E na priamke BC mimo úsečky BC a bodu F vnútri úsečky AD takých, že veľkosti uhlov DAE a CBF sú rovnaké. Označme I priesečník CD a EF a J priesečník AB a EF. Nech K je stredom úsečky EF, pričom neleží na priamke AB. Dokážte, že I patrí kružnici opísanej trojuholníku ABK práve vtedy, keď K patrí kružnici opísanej trojuholníku CDJ.

10. Nech k a n sú nezáporné celé čísla, pričom k je menšie ako $n-1$. Uvažujme množinu $\mathcal{L}$ obsahujúcu n priamok v rovine takú, že žiadna dvojica nie je rovnobežná a žiadna trojica sa nepretína v jednom bode. Označme $\mathcal{I}$ množinu priesečníkov priamok z $\mathcal{L}$. Nech O je bod v rovine neležiaci na žiadnej priamke z $\mathcal{L}$. Bod X z $\mathcal{I}$ je ofarbený na červeno, ak otvorená úsečka OX (bez koncových bodov) pretína najviac k priamok z $\mathcal{L}$. Dokážte, že $\mathcal{I}$ obsahuje najmenej $(k+1)(k+2)/2$ červených bodov.

11. Nech S_a, S_b, S_c sú stredy a R_a, R_b, R_c polomery kružníc pripísaných ku stranám BC, CA, AB trojuholníka ABC. Označme postupne r_a, r_b, r_c polomery kružníc vpísaných trojuholníkom BCS_a, ACS_b, ABS_c. Dokážte, že

$$\frac{r_a}{R_a}+\frac{r_b}{R_b}+\frac{r_c}{R_c}=1.$$

12. Nech $n \geqq 2$ je dané prirodzené číslo. Nájdite všetky mnohočleny P stupňa menšieho ako n s celočíselnými koeficientmi spĺňajúce nasledujúcu podmienku: Existuje postupnosť celých čísel $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ takých, že

$$P(x_{k+1}) = P(x_k) + 7 \quad \text{pre } k = 1, 2, \dots, n-1.$$

13. Čísla a, b, c sú dĺžkami strán daného trojuholníka. Dokážte, že

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c} \geqq \frac{b+c-a}{a}+\frac{c+a-b}{b}+\frac{a+b-c}{c}.$$

14. Dané je prirodzené číslo k. Určte najmenšiu hodnotu, akú môže nadobúdať ciferný súčet nejakého násobku čísla 10^k-1.

15. V rovine je daný rovnoramenný trojuholník ABC s ramenami AB a AC. Bod M je stredom jeho základne BC. Zvoľme ľubovoľný bod X vo vnútri menšieho z oblúkov MA na kružnici opísanej trojuholníku ABM. Označme T taký bod vnútri ostrého uhla BMA, že $|\measuredangle TMX| = 90°$ a $|TX| = |BX|$. Dokážte, že rozdiel

$$|\measuredangle BTM| - |\measuredangle MTC|$$

nezávisí od voľby bodu X.

16. Nech pre nepárne celé čísla a, b, c, d platí $0 < a < b < c < d$ a $ad = cd$. Dokážte, že ak $a+d = 2m$ a $b+c = 2k$ pre nejaké prirodzené čísla m a k, potom $a = 1$.

17. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre každé dve reálne čísla x, y platí

$$f(xf(y)) + y + f(x) = f(x + f(y)) + yf(x).$$

9. Česko-poľsko-slovenské stretnutie

V rámci záverečnej prípravy pred IMO sa uskutočnilo po deviaty krát prípravné stretnutie medzi družstvami Českej republiky, Poľska a Slovenska. Jednotlivé krajiny reprezentovali šestice študentov, ktorí si vybojovali vo svojich krajinách účasť na 50. IMO v Nemecku, resp. náhradníci.

Súťaž sa uskutočnila 21. – 24. 6. v Žiline na fakulte PEDAS Žilinskej univerzity. Organizácia a priebeh súťaže zostali nezmenené z predchádzajúcich ročníkov – je prispôsobená štýlu celoštátneho kola našej MO a podmienkam IMO. Súťažiacim boli počas dvoch dní predložené dve trojice súťažných úloh, pričom za každú správnu úlohu mohli získať najviac 7 bodov, t. j. celkove 42 bodov (rovnako ako na IMO). Na každú trojicu úloh mali súťažiaci vymedzené 4,5 hodiny čistého času.

Prehľad výsledkov:

Por.	Meno	Štát	1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$
1.	Jakub Oćwieja	Poľsko	7	7	7	7	7	7	42
2.	Tomasz Kociumaka	Poľsko	7	7	0	7	7	7	35
3.	Damian Orlef	Poľsko	7	0	7	7	7	4	32
4.	Tomasz Pawłowski	Poľsko	7	0	7	7	7	0	28
	Josef Tkadlec	Česká rep.	6	0	7	7	7	1	28
	Jakub Witaszek	Poľsko	7	7	0	7	7	0	28
7.	*Martin Bachratý*	Slovensko	7	0	1	7	7	0	22
	David Klaška	Česká rep.	1	7	0	7	7	0	22
9.	Mikołaj Frączyk	Poľsko	4	0	1	7	5	4	21
	Michal Hagara	Slovensko	7	0	0	7	7	0	21
	Jan Matějka	Česká rep.	7	0	0	7	7	0	21
	Filip Sládek	Slovensko	6	0	1	7	7	0	21
13.	Samuel Říha	Česká rep.	6	0	0	7	7	0	20
14.	*Ladislav Bačo*	Slovensko	7	0	1	7	3	0	18
15.	*Eduard Eiben*	Slovensko	4	0	1	7	5	0	17
16.	*Jakub Uhrík*	Slovensko	4	0	1	0	7	0	12
	Jan Vaňhara	Česká rep.	2	0	0	4	6	0	12
18.	Josef Ondřej	Česká rep.	7	0	1	3	0	0	11

Štát	1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$
Česká rep.	29	7	8	35	34	1	114
Poľsko	39	21	22	42	40	22	186
Slovensko	35	0	5	35	36	0	111

Opravu riešení zabezpečila medzinárodná porota, ktorú tvorili RNDr. Jaroslav Švrček, CSc. a Mgr. Martin Panák, PhD. z Českej republiky, dr. Małgorzata Bednarska a Bartłomiej Bzdęga z Poľska, Mgr. Peter Novotný, PhD. a doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc. zo Slovenska. Organizačne súťaž zabezpečil doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.

Najviac sa darilo tradične poľskému družstvu, i keď tento rok neobsadilo (na rozdiel od posledných dvoch rokov) prvých šesť priečok – v prvej šestici malo piatich. Slovenské družstvo tak súťažilo najmä s českým a opäť za ním v súčte zaostalo o malý kúsok (tento rok o 3 body, predošlý rok o 4, rok predtým o 2). Tešiť nás môže aspoň fakt, že po štyroch rokoch sa nám podarilo pokoriť 100-bodovú hranicu, čo však závisí najmä od náročnosti úloh. Treba samozrejme pripomenúť, že táto súťaž slúži hlavne ako príprava pred IMO, študenti na nej nezískavajú medaily ani ceny. Dôležitý je aj spoločenský rozmer podujatia.

V budúcom roku sa spoločné prípravné stretnutie uskutoční v Českej republike.

Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia

Úloha 1.
Označme $\mathbb{R}^+$ množinu všetkých kladných reálnych čísel. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R}^+ \to \to \mathbb{R}^+$, ktoré pre ľubovoľné $x, y \in \mathbb{R}^+$ spĺňajú podmienku

$$\bigl(1 + yf(x)\bigr)\bigl(1 - yf(x+y)\bigr) = 1.$$

(*František Kardoš*)

Úloha 2.
Pre dané kladné celé čísla a, k je postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definovaná vzťahmi

$$a_1 = a \qquad \text{a} \qquad a_{n+1} = a_n + k \cdot \varrho(a_n) \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots,$$

pričom $\varrho(m)$ označuje súčin cifier čísla m zapísaného v desiatkovej sústave (napríklad $\varrho(413) = 12$, $\varrho(308) = 0$ a pod.). Dokážte, že existujú kladné celé čísla a, k také, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ obsahuje práve 2009 rôznych čísel. (*Peter Novotný*)

Úloha 3.
Nech k je kružnica pripísaná k strane BC daného trojuholníka ABC. Zvoľme priamku p rovnobežnú so stranou BC pretínajúcu úsečky AB, AC v bodoch D, E. Kružnicu vpísanú do trojuholníka ADE označme l. Dotyčnice ku kružnici k vedené z bodov D, E neprechádzajúce bodom A sa pretínajú v bode P. Dotyčnice ku kružnici l vedené z bodov B, C neprechádzajúce bodom A sa pretínajú v bode Q. Dokážte, že priamka PQ prechádza pevným bodom nezávislým od voľby priamky p. (*Tomáš Jurík*)

Úloha 4.
Daná je kružnica k a jej tetiva AB, ktorá nie je jej priemerom. Vnútri dlhšieho oblúka AB kružnice k zvolíme ľubovoľne bod C. Obrazy bodov A a B v osových súmernostiach podľa priamok BC a AC označíme K a L. Dokážte, že vzdialenosť stredov úsečiek KL a AB nezávisí od polohy bodu C. (*Tomáš Jurík*)

Úloha 5.
Daná je n-tica celých čísel $a_1, \dots, a_n$ spĺňajúca nasledujúce podmienky:

(i) $1 \leqq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leqq 50$;

(ii) pre každú n-ticu kladných celých čísel $b_1, \dots, b_n$ existuje kladné celé číslo m a n-tica kladných celých čísel $c_1, \dots, c_n$ taká, že

$$m \cdot b_i = c_i^{a_i} \quad \text{pre } i = 1, \dots, n.$$

Dokážte, že $n \leqq 16$ a určte počet rôznych n-tíc $a_1, \dots, a_n$ spĺňajúcich dané podmienky pre $n = 16$. (*Peter Novotný*)

Úloha 6.
Nech $n \geqq 16$ je prirodzené číslo. Uvažujme množinu

$$G = \{(x, y) \ : \ x, y \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

pozostávajúcu z n^2 bodov roviny. Nech A je ľubovoľná podmnožina množiny G obsahujúca aspoň $4n\sqrt{n}$ prvkov. Dokážte, že existuje aspoň n^2 konvexných štvoruholníkov majúcich vrcholy v A, ktorých všetky uhlopriečky prechádzajú jedným bodom. (*Poľsko*)

Riešenia úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia

Úloha 1.
Postupnými úpravami zadanej podmienky dostávame

$$\begin{aligned} 1 + yf(x) - yf(x+y) - y^2 f(x) f(x+y) &= 1, \\ yf(x) - yf(x+y) &= y^2 f(x) f(x+y). \end{aligned}$$

Poslednú rovnosť môžeme vydeliť hodnotou $y \neq 0$. Pre ľubovoľné $x, y \in \mathbb{R}^+$ tak po ďalších úpravách (všetky výrazy, ktorými budeme deliť, sú evidentne nenulové) dostaneme

$$\begin{aligned} f(x) - f(x+y) &= yf(x)f(x+y), \\ f(x+y) &= \frac{f(x)}{1 + yf(x)}, \\ \frac{1}{f(x+y)} &= y + \frac{1}{f(x)}, \end{aligned}$$

a teda aj

$$\frac{1}{f(y+x)} = x + \frac{1}{f(y)}.$$

Odtiaľ

$$y + \frac{1}{f(x)} = x + \frac{1}{f(y)}$$

pre všetky kladné x, y. Dosadením $y = 1$ dostaneme

$$\frac{1}{f(x)} = x + \frac{1}{f(1)} - 1 = x + c, \qquad \text{teda} \qquad f(x) = \frac{1}{x+c},$$

kde c je konštanta. Keďže $f(x) > 0$ pre každé $x > 0$, musí byť $x + c > 0$ pre každé $x > 0$, čiže $c \geqq 0$.

Ľahko overíme, že každá funkcia $f(x) = 1/(x + c)$, kde $c \geqq 0$, vyhovuje:

$$\left(1 + \frac{y}{x+c}\right)\left(1 - \frac{y}{x+y+c}\right) = \frac{x+c+y}{x+c} \cdot \frac{x+y+c-y}{x+y+c} = 1.$$

Iné riešenie. Dosaďme do zadanej podmienky $x = 1$ a $f(1) = a > 0$. Úpravou dostávame

$$\begin{aligned} (1 + ay)\bigl(1 - yf(y+1)\bigr) &= 1, \\ ay - yf(y+1)(1+ay) &= 0, \\ f(y+1) &= \frac{a}{1+ay}. \end{aligned}$$

Keď teraz opäť do zadanej podmienky dosadíme $y = 1$ a $f(x + 1) = a/(1 + ax)$, máme

$$\begin{aligned} \bigl(1 + f(x)\bigr)\left(1 - \frac{a}{1+ax}\right) &= 1, \\ f(x) \cdot \frac{1+ax-a}{1+ax} &= \frac{a}{1+ax}, \\ f(x) &= \frac{a}{1+ax-a} = \frac{1}{x + \frac{1}{a} - 1} = \frac{1}{x+c}. \end{aligned}$$

Podobne ako v prvom riešení musí byť $c \geqq 0$ a ľahko overíme, že každá taká funkcia vyhovuje.

Poznámka. Riešenie možno zapísať aj v tvare

$$f(x) = \frac{a}{1 + (x-1)a},$$

kde $a = f(1) \in (0, 1\rangle$ je reálny parameter. Dá sa očakávať, že viaceré súťažné riešenia budú zapísané práve takto.

Úloha 2.
Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je evidentne rastúca až po prvý člen, v ktorého zápise sa vyskytne cifra 0 a počnúc týmto členom je konštantná. Naším cieľom je teda nájsť také hodnoty a, k, že cifra 0 sa po prvý raz vyskytne v člene a_{2009}. Úlohu vyriešime všeobecnejšie – uvedieme také hodnoty a, k, že cifra 0 sa po prvý raz vyskytne v člene a_m, pričom $m > 4$ je dané celé číslo.

Zoberme

$$a = \frac{10^{2m-5}-1}{9} = \underbrace{11\ldots1}_{2m-5 \text{ jednotiek}}, \qquad k = 10^{m-3}+4 = 1\underbrace{00\ldots0}_{m-4 \text{ núl}}4.$$

Postupne máme

$$\begin{aligned}
a_1 &= a = \underbrace{11\ldots1}_{2m-5},\\
\varrho(a_1) &= 1,\\
a_2 &= a_1 + k = a_1 + 1\underbrace{00\ldots0}_{m-4}4 = \underbrace{11\ldots1}_{m-3}2\underbrace{11\ldots1}_{m-4}5,\\
\varrho(a_2) &= 10,\\
a_3 &= a_2 + 10k = a_2 + 1\underbrace{00\ldots0}_{m-4}40 = \underbrace{11\ldots1}_{m-4}22\underbrace{11\ldots1}_{m-5}55,\\
\varrho(a_3) &= 100,\\
&\vdots\\
a_i &= a_{i-1} + 10^{i-2}k = \underbrace{11\ldots1}_{m-i-1}\underbrace{22\ldots2}_{i-1}\underbrace{11\ldots1}_{m-i-2}\underbrace{55\ldots5}_{i-1},\\
\varrho(a_i) &= 10^{i-1},\\
&\vdots\\
a_{m-2} &= a_{m-3} + 10^{m-4}k = 1\underbrace{22\ldots2}_{m-3}\underbrace{55\ldots5}_{m-3},\\
\varrho(a_{m-2}) &= 10^{m-3},\\
a_{m-1} &= a_{m-2} + 10^{m-3}k = a_{m-2} + 1\underbrace{00\ldots0}_{m-4}4\underbrace{00\ldots0}_{m-3} = \underbrace{22\ldots2}_{m-3}6\underbrace{55\ldots5}_{m-3},\\
\varrho(a_{m-1}) &= 6\cdot 10^{m-3},\\
a_m &= a_{m-1} + 6\cdot 10^{m-3}k = a_{m-1} + 6\underbrace{00\ldots0}_{m-5}24\underbrace{00\ldots0}_{m-3} = 8\underbrace{22\ldots2}_{m-5}50\underbrace{55\ldots5}_{m-3},\\
\varrho(a_m) &= 0.
\end{aligned}$$

Záver. Postupnosť obsahuje práve 2009 rôznych čísel napríklad pre $a = \frac{1}{9}(10^{4013}-1)$, $k = 10^{2006}+4$.

Iné riešenie. Zvoľme

$$a = 6\underbrace{11\ldots1}_{2007}, \qquad k = \underbrace{33\ldots3}_{2007}4 = \frac{1}{6}\cdot 2\underbrace{00\ldots0}_{2007}4.$$

Potom

$$\begin{aligned}
a_1 &= 6\underbrace{11\ldots1}_{2007}, & \varrho(a_1) &= 6, & k\varrho(a_1) &= 2\underbrace{00\ldots0}_{2007}4,\\
a_2 &= 26\underbrace{11\ldots1}_{2006}5, & \varrho(a_2) &= 60, & k\varrho(a_2) &= 2\underbrace{00\ldots0}_{2007}40,\\
a_3 &= 226\underbrace{11\ldots1}_{2005}55, & \varrho(a_3) &= 600, & k\varrho(a_3) &= 2\underbrace{00\ldots0}_{2007}400,\\
a_4 &= 2226\underbrace{11\ldots1}_{2004}555, & \varrho(a_4) &= 6000, & k\varrho(a_4) &= 2\underbrace{00\ldots0}_{2007}4000,\\
&\vdots\\
a_{i+1} &= \underbrace{22\ldots2}_{i}6\underbrace{11\ldots1}_{2007-i}\underbrace{55\ldots5}_{i}, & \varrho(a_{i+1}) &= 6\underbrace{0\ldots0}_{i}, & k\varrho(a_{i+1}) &= 2\underbrace{00\ldots0}_{2007}4\underbrace{00\ldots0}_{i},\\
&\vdots\\
a_{2007} &= \underbrace{22\ldots2}_{2006}61\underbrace{55\ldots5}_{2006}, & \varrho(a_{2007}) &= 6\underbrace{0\ldots0}_{2006}, & k\varrho(a_{2007}) &= 2\underbrace{00\ldots0}_{2007}4\underbrace{00\ldots0}_{2006},\\
a_{2008} &= \underbrace{22\ldots2}_{2007}6\underbrace{55\ldots5}_{2007}, & \varrho(a_{2008}) &= 6\underbrace{0\ldots0}_{2007}, & k\varrho(a_{2008}) &= 2\underbrace{00\ldots0}_{2007}4\underbrace{00\ldots0}_{2007},\\
a_{2009} &= \underbrace{22\ldots2}_{2007}30\underbrace{55\ldots5}_{2007}, & \varrho(a_{2009}) &= 0, & k\varrho(a_{2009}) &= 0
\end{aligned}$$

a ďalej samozrejme $a_{2009} = a_{2010} = a_{2011} = \ldots$

Poznámka. Na vyriešenie úlohy stačí nájsť také hodnoty a, k, aby postupnosť obsahovala *aspoň* 2009 rôznych čísel a zároveň neobsahovala nekonečne veľa rôznych čísel. Ak totiž uvedená postupnosť obsahuje práve m rôznych čísel, pričom $m > 2009$, tak postupnosť s prvým členom a_{m-2008} bude obsahovať želaných 2009 rôznych čísel.

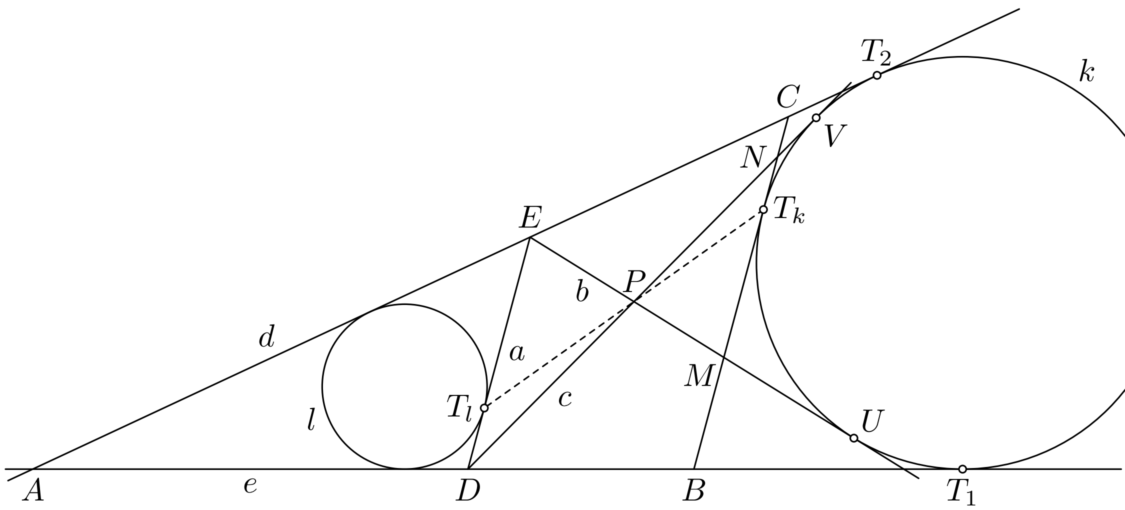
Úloha 3.
Nech T_k je bod, v ktorom sa kružnica k dotýka strany BC a T_l je bod, v ktorom sa kružnica l dotýka strany DE. Ukážeme, že hľadaným pevným bodom je bod T_k.

Najskôr dokážeme, že body T_k, T_l a P sú kolineárne. Označme body dotyku kružnice k s priamkami EP, DP postupne U, V, priesečníky strany BC s týmito priamkami postupne M, N a body dotyku kružnice k s polpriamkami AB, AC postupne T_1, T_2.

Keďže $BC \parallel DE$, sú trojuholníky DEP a NMP podobné a rovnoľahlosť $\mathcal{H}$ so stredom P a koeficientom $q = |MN|/|ED|$ zobrazí úsečku DE na úsečku NM. Na kolineárnosť bodov T_k, T_l, P stačí dokázať rovnosť

$$\frac{|MT_k|}{|NT_k|} = \frac{|ET_l|}{|DT_l|}; \tag{1}$$

ak je totiž splnená, zobrazí sa v rovnoľahlosti $\mathcal{H}$ bod T_l do bodu T_k.



Obr. 36

Označme a, b, c dĺžky strán trojuholníka DEP tak ako na obr. 36. Ďalej nech $|AD| = e$, $|AE| = d$. Pripomeňme známe vzťahy pre dĺžku úseku medzi vrcholom trojuholníka a dotykovým bodom vpísanej, resp. pripísanej kružnice: V trojuholníku XYZ je vzdialenosť vrcholu X od dotykového bodu vpísanej, resp. pripísanej kružnice (ležiaceho na strane XY) rovná $(|XY|+|XZ|-|YZ|)/2$, resp. $(|XY|+|YZ|-|XZ|)/2$.

Kružnica k je pripísanou kružnicou k strane NM trojuholníka NMP. Preto

$$\frac{|MT_k|}{|NT_k|} = \frac{(|MN|+|NP|-|MP|)/2}{(|MN|+|MP|-|NP|)/2} = \frac{qa+qc-qb}{qa+qb-qc} = \frac{a+c-b}{a+b-c}. \tag{2}$$

Kružnica l je vpísanou kružnicou do trojuholníka DEA. Preto

$$\frac{|ET_l|}{|DT_l|} = \frac{(|DE|+|AE|-|AD|)/2}{(|DE|+|AD|-|AE|)/2} = \frac{a+d-e}{a+e-d}. \tag{3}$$

Ak z nejakého bodu vedieme ku kružnici dve dotyčnice, vzdialenosť oboch dotykových bodov od daného bodu je rovnaká. Opakovaným použitím tohto faktu dostávame

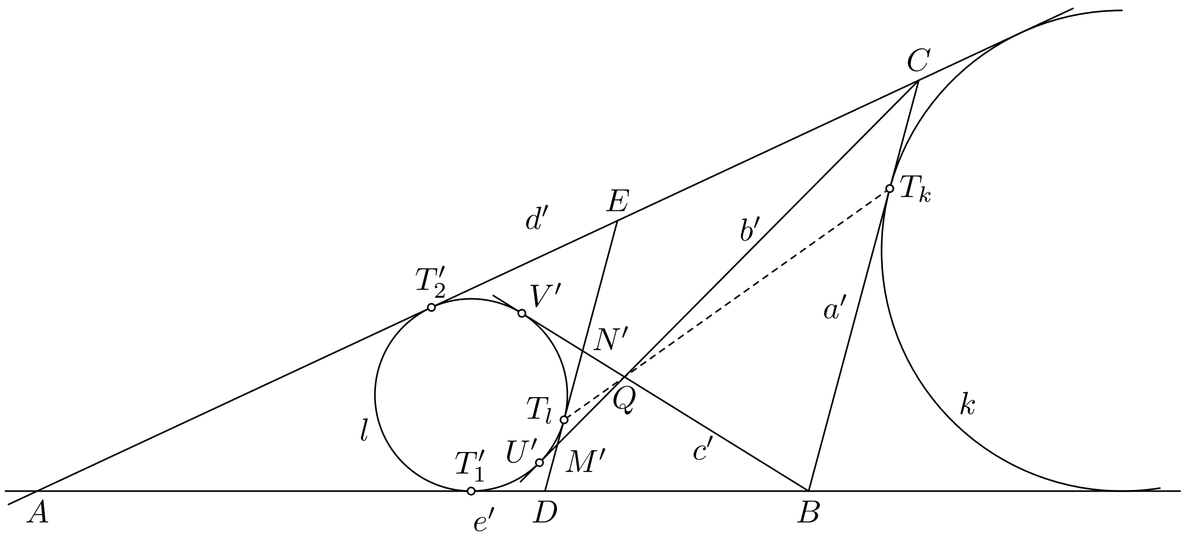
$$e+c+|PU| = e+c+|PV| = e+|DT_1| = |AT_1| = |AT_2| = d+|ET_2| = d+b+|PU|,$$

čiže $e+c = d+b$. Preto $c-b = d-e$ a dosadením do (2), (3) okamžite dostávame

$$\frac{|MT_k|}{|NT_k|} = \frac{a+(c-b)}{a-(c-b)} = \frac{a+(d-e)}{a-(d-e)} = \frac{|ET_l|}{|DT_l|},$$

čo je požadovaná rovnosť (1). Bod P teda leží na priamke T_lT_k.

Podobne dokážeme, že aj body T_k, T_l a Q sú kolineárne. Označme body dotyku kružnice l s priamkami CQ, BQ postupne U', V', priesečníky strany DE s týmito priamkami postupne M', N' a body dotyku kružnice l so stranami AD, AE postupne T_1', T_2'. Ďalej nech a', b', c' sú dĺžky strán trojuholníka BCQ, $|AB| = e'$, $|AC| = d'$.



Obr. 37

Analogickými úvahami ako v prvej časti dostávame (tentoraz sú obe kružnice pripísané)

$$\frac{|M'T_l|}{|N'T_l|} = \frac{a' + c' - b'}{a' + b' - c'}, \qquad \frac{|CT_k|}{|BT_k|} = \frac{a' + e' - d'}{a' + d' - e'}.$$

Porovnávaním dĺžok (obr. 37) máme

$$e' - c' - |QU'| = e' - c' - |QV'| = e' - |BT_1'| = |AT_1'| = |AT_2'| = d' - |CT_2'| = d' - b' - |QU'|,$$

čiže $c' - b' = e' - d'$ a následne

$$\frac{|M'T_l|}{|N'T_l|} = \frac{|CT_k|}{|BT_k|}.$$

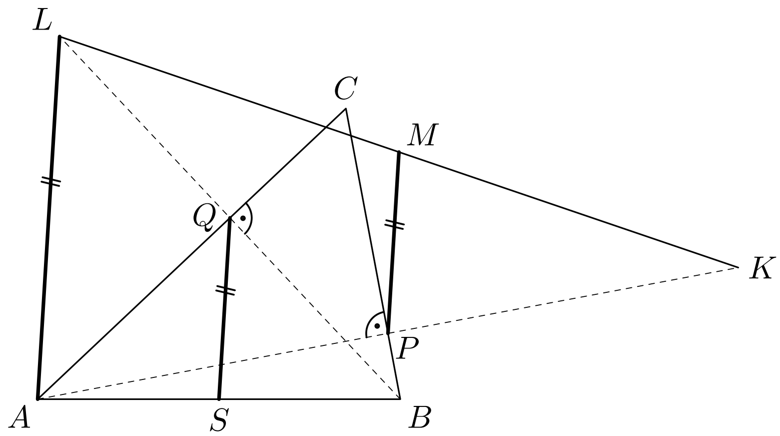
Z rovnoľahlosti trojuholníkov BCQ a $N'M'Q$ napokon dostávame, že bod Q leží na priamke T_lT_k.

Priamka PQ (zrejme $P \neq Q$) je teda totožná s priamkou T_lT_k a prechádza bodom T_k, ktorý je nezávislý od polohy priamky p.

Úloha 4.
V trojuholníku ABC označme S stred strany AB a P, Q päty výšok z vrcholov A, B. Stred úsečky KL označme M. Body P, Q sú samozrejme stredmi úsečiek AK, BL (obr. 38). Takže QS je strednou priečkou trojuholníka LAB a MP strednou priečkou trojuholníka LAK. Odtiaľ

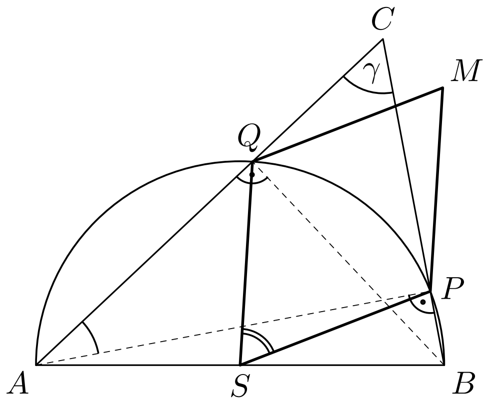
$$|QS| = \tfrac{1}{2}|LA| = |MP| \qquad \text{a} \qquad QS \parallel LA \parallel MP,$$

čiže $SPMQ$ je rovnobežník (to zrejme platí aj v prípade, keď niektorý z trojuholníkov LAB, LAK je „degenerovaný“).

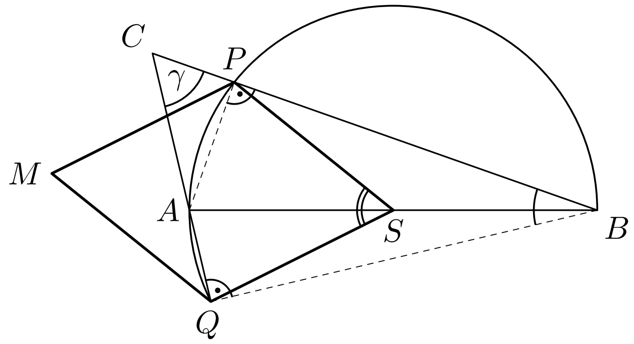


Obr. 38

Body P, Q ležia na Tálesovej kružnici nad priemerom AB, preto $|SP| = |SQ| = \frac{1}{2}|AB|$. Rovnobežník $SPMQ$ je teda kosoštvorec a dĺžka jeho strany nezávisí od polohy bodu C. Aby sme dokázali, že ani dĺžka jeho uhlopriečky SM nezávisí od polohy bodu C, stačí dokázať, že veľkosť uhla, ktorý zvierajú jeho strany SP, SQ, je pre ľubovoľnú polohu bodu C na kružnici k rovnaká (všetky možné kosoštvorce $SPMQ$, a teda aj ich uhlopriečky SM, sú potom navzájom zhodné).



Obr. 39a



Obr. 39b

Ak je uhol α trojuholníka ABC ostrý, leží bod Q vnútri strany AC (uhol γ je podľa zadania ostrý vždy) a uhol PSQ je stredovým uhlom k obvodovému uhlu PAQ nad tetivou PQ Tálesovej kružnice nad priemerom AB (obr. 39a). Takže

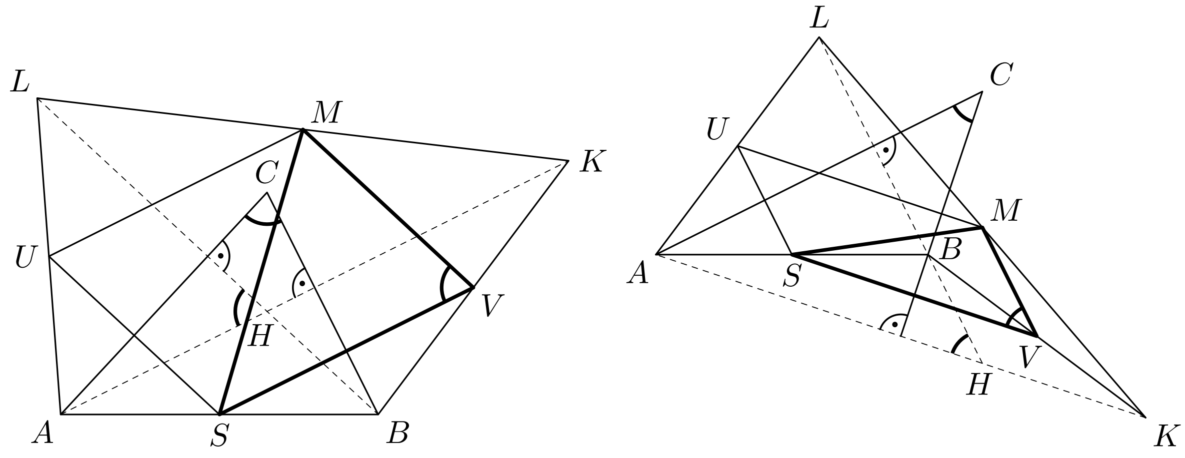
$$|\measuredangle PSQ| = 2|\measuredangle PAQ| = 2(90^\circ - \gamma) = 180^\circ - 2\gamma.$$

Rovnaké vyjadrenie dostaneme aj v prípade, že uhol α nie je ostrý, vtedy je totiž ostrý uhol β a môžeme namiesto uhla PAQ použiť obvodový uhol PBQ (obr. 39b):

$$|\measuredangle PSQ| = 2|\measuredangle PBQ| = 2(90^\circ - \gamma) = 180^\circ - 2\gamma.$$

Keďže pri pohybe bodu C po kružnici k sa veľkosť uhla γ nemení (je to obvodový uhol nad pevnou tetivou AB), nemení sa ani veľkosť uhla PSQ, čo sme chceli dokázať.

Iné riešenie. Označme α, β, γ veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC. Budeme predpokladať, že uhol α je ostrý; prípad, keď α nie je ostrý je analogický (vtedy je β ostrý). Nech S, M, U, V sú postupne stredy úsečiek AB, KL, AL, BK a H je priesečník priamok AK a BL (obr. 40a, b). Štvoruholník $USVM$ je rovnobežník ($SU \parallel BL \parallel MV$,



Obr. 40a Obr. 40b

$SV \parallel AK \parallel MU$). Zrejme

$$|SV| = |AB|\sin\beta,\ |MV| = |SU| = |AB|\sin\alpha,\ |\measuredangle SVM| = |\measuredangle AHL| = |\measuredangle ACB| = \gamma.$$

Použitím sínusovej vety v trojuholníku ABC máme

$$\frac{|AC|}{|SV|} = \frac{1}{|AB|}\cdot\frac{|AC|}{\sin\beta} = \frac{1}{|AB|}\cdot\frac{|BC|}{\sin\alpha} = \frac{|BC|}{|MV|},$$

teda trojuholníky SVM a ACB sú podobné (strany zvierajúce rovnaký uhol majú dĺžky v rovnakom pomere). Keď opäť použijeme sínusovú vetu v trojuholníku ABC, dostaneme

$$|SM| = |AB|\cdot\frac{|SV|}{|AC|} = \frac{|AB|^2\sin\beta}{|AC|} = \frac{|AB|^2\sin\gamma}{|AB|} = |AB|\sin\gamma,$$

čo je výraz, ktorý zrejme nezávisí od polohy bodu C.

Úloha 5.

Najskôr dokážeme, že čísla $a_1, \ldots, a_n$ sú navzájom nesúdeliteľné. Ak by to tak nebolo, mali by sme $(a_i, a_j) = d > 1$ pre nejaké $i \neq j$. Nech $a_i = u\cdot d$, $a_j = v\cdot d$. Zvoľme $b_i = 1$, $b_j = 2$. Podľa podmienky (ii) existujú m, c_i a c_j také, že

$$m\cdot b_i = c_i^{a_i} \quad\text{a}\quad m\cdot b_j = c_j^{a_j}, \qquad\text{teda}\qquad m = (c_i^u)^d \quad\text{a}\quad 2m = (c_j^v)^d.$$

Odtiaľ $2(c_i^u)^d = (c_j^v)^d$, čo nie je možné, nakoľko exponent prvočísla 2 v prvočíselnom rozklade pravej strany je násobkom čísla d a v prvočíselnom rozklade ľavej strany nie je násobkom čísla d.

Predpokladajme, že čísla $a_1, \dots, a_n$ sú navzájom nesúdeliteľné. Ukážeme, že potom je podmienka (ii) splnená. Nech $b_1, \dots, b_n$ je ľubovoľná n-tica prirodzených čísel a $p_1, \dots, p_k$ sú všetky prvočísla nachádzajúce sa v prvočíselných rozkladoch čísel $b_1, \dots, b_n$. Hľadajme m v tvare

$$m = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

Pre každé $i = 1, \dots, n$ označme $\beta_{i,j}$ exponent prvočísla p_j v prvočíselnom rozklade b_i. Aby číslo $m \cdot b_i$ bolo a_i-tou mocninou, stačí, aby pre každé $j = 1, \dots, k$ bolo $\alpha_j + \beta_{i,j}$ násobkom a_i. Každú hodnotu α_j teda stačí zvoliť tak, aby platilo

$$\alpha_j \equiv -\beta_{1,j} \pmod{a_1}, \quad \alpha_j \equiv -\beta_{2,j} \pmod{a_2}, \quad \dots, \quad \alpha_j \equiv -\beta_{n,j} \pmod{a_n}.$$

Existencia takého α_j vyplýva z čínskej zvyškovej vety (keďže $a_1, \dots, a_n$ sú navzájom nesúdeliteľné).

Dokázali sme, že podmienka (ii) je splnená práve vtedy, keď sú čísla $a_1, \dots, a_n$ navzájom nesúdeliteľné. Medzi číslami 1, 2, ..., 50 je práve pätnásť prvočísel. Ak by bolo $n \geqq 17$, medzi číslami $2 \leqq a_2 < a_3 < \ldots < a_n \leqq 50$ by určite existovali aspoň dve čísla majúce v prvočíselnom rozklade rovnaké prvočíslo, teda by boli súdeliteľné. Preto nutne $n \leqq 16$.

Ak $n = 16$, musí byť $a_1 = 1$ a každé z pätnástich čísel $a_2, a_3, \dots, a_{16}$ musí byť mocninou iného prvočísla. Vypíšme, ktoré mocniny prvočísel môžeme použiť:

$$\begin{array}{ll} p = 2: & 2, 4, 8, 16, 32, \\ p = 3: & 3, 9, 27, \\ p = 5: & 5, 25, \\ p = 7: & 7, 49, \\ p \geqq 11: & \text{iba } p. \end{array}$$

Celkový počet vyhovujúcich šestnástic je teda $5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 60$.

Úloha 6.

Označme $|A| = m \geqq 4n\sqrt{n}$. Nech $\mathcal{S}$ je množina všetkých úsečiek majúcich krajné body v A. Zrejme $|\mathcal{S}| = \binom{m}{2}$. Súradnice stredu každej úsečky z $\mathcal{S}$ sú celé násobky čísla $\frac{1}{2}$ a ležia v konvexnom obale množiny G. Takých bodov je $(2n-1)^2$, teda menej ako $4n^2$. Preto existuje bod B, ktorý je stredom aspoň $\binom{m}{2}/(4n^2)$ úsečiek z $\mathcal{S}$. Nech $\mathcal{P}$ je množina všetkých úsečiek z $\mathcal{S}$, ktorých stredom je B. Potom

$$|\mathcal{P}| \geqq \frac{\binom{m}{2}}{4n^2} = \frac{m(m-1)}{8n^2} \geqq \frac{4n\sqrt{n}(4n\sqrt{n}-1)}{8n^2} = \frac{16n^3 - 4n\sqrt{n}}{8n^2} = 2n - \frac{1}{2\sqrt{n}} > 2n - 1,$$

takže $|\mathcal{P}| \geqq 2n$.

Rozdeľme $\mathcal{P}$ na triedy úsečiek ležiacich na jednej priamke. Označme počet týchto tried k a počet úsečiek v i-tej triede a_i pre $i = 1, \ldots, k$. Každá úsečka spomedzi a_i úsečiek jednej triedy má krajné body v G a všetkých $2a_i$ krajných bodov (ktoré sú zrejme rôzne) úsečiek jednej triedy leží na jednej priamke, preto $2a_i \leqq n$. Pritom každé dve úsečky z $\mathcal{P}$ sú uhlopriečkami rovnobežníka práve vtedy, keď neležia na jednej priamke. Pre počet rôznych rovnobežníkov s uhlopriečkami patriacimi do $\mathcal{P}$ tak dostávame

$$\sum_{1\leqq i<j\leqq k} a_i a_j = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{k} a_i^2\right) \geqq \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \frac{n}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(|\mathcal{P}|^2 - |\mathcal{P}| \cdot \frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2}|\mathcal{P}|\left(|\mathcal{P}| - \frac{n}{2}\right) \geqq n\left(2n - \frac{n}{2}\right) = \frac{3}{2}n^2 > n^2.$$

Existuje teda viac ako n^2 konvexných štvoruholníkov (rovnobežníkov) s požadovanou vlastnosťou.

50. Medzinárodná matematická olympiáda

Najstaršia celosvetová intelektuálna súťaž pre žiakov stredných škôl sa dožila polstoročnice: v dňoch 10. – 22. júla 2009 sa v Nemecku uskutočnil jubilejný 50. ročník Medzinárodnej matematickej olympiády (IMO). Pôvodne bolo zaevidovaných 575 žiakov zo 105 krajín a ďalšie tri krajiny boli zastúpené pozorovateľmi, nakoniec bola účasť o trochu nižšia, ale aj tak rekordná: 565 žiakov zo 104 štátov a ďalšie dva štáty tam mali svojich pozorovateľov. Zloženie delegácie SR bolo nasledovné:

doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., Žilinská Univerzita, vedúci družstva SR,
Mgr. Ján Mazák, FMFI UK Bratislava, pedagogický vedúci,
Mgr. Peter Novotný, PhD., FMFI UK Bratislava, observer.

Podstatu družstva samozrejme tvorilo 6 súťažiacich:

Martin Bachratý, Gymnázium Veľká okružná, Žilina, 3. ročník,
Peter Csiba, ŠPMNDaG Teplická, Bratislava, 4. ročník,
Eduard Eiben, Gymnázium Poštová, Košice, 4. ročník,
Michal Hagara, Gymnázium Jura Hronca, Bratislava, 3. ročník,
Filip Sládek, Gymnázium A. Bernoláka, Námestovo, 3. ročník,
Jakub Uhrík, Gymnázium Grösslingová, Bratislava, 4. ročník.

Obr. 41
(Zľava vpredu: J. Uhrík, P. Csiba, P. Novotný; vzadu: O. Ralík, F. Sládek, E. Eiben, J. Mazák, M. Bachratý, M. Hagara, V. Bálint.)

Oficiálnym členom výpravy SR bol aj RNDr. Oliver Ralík, UKF Nitra – jeho pobyt financoval sponzor, ktorý si neželá byť menovaný a tiež MUDr. Dagmar Bálintová, ktorej pobyt hradil vedúci výpravy.

IMO je súťaž jednotlivcov a na prvých dvoch miestach s plným počtom 42 bodov skončili Makoto Soejima z Japonska a Dongyi Wei z Číny; posledne menovaný mal 42 bodov aj na predošlej IMO a získal tak svoju druhú zlatú medailu. Výsledky našich žiakov sú v tabuľke.

Meno	1	2	3	4	5	6	Súčet	Cena
Martin Bachratý	7	1	1	7	0	0	16	bronz
Peter Csiba	7	1	0	0	0	0	8	HM
Eduard Eiben	3	2	0	0	2	0	7	
Michal Hagara	7	7	1	3	2	0	20	bronz
Filip Sládek	7	2	1	1	0	0	11	HM
Jakub Uhrík	7	3	1	0	0	0	11	HM

Obr. 42
(Zľava: M. Hagara a M. Bachratý s bronzovými medailami.)

Získali sme teda dva bronzy a tri čestné uznania. Jednou z príčin tohto slabšieho výsledku bola neúčasť Michala Spišiaka, Gymnázium Grösslingová Bratislava – nemáme totiž talenty nazvyš. Michal tento rok zvíťazil na celoštátnom kole MO, na výberovom sústredení svoj náskok zväčšil pred ostatnými „o celé kolo“. Ak k tomu pridáme, že už bol skúseným olympionikom (čestné uznanie na 48. IMO vo Vietname a vlani bronzová medaila na 49. IMO v Španielsku), tak mal byť oporou družstva. Máme za to, že mohol získať možno aj striebornú medailu. V každom prípade družstvo SR by získalo o 12 až 18 bodov viac a v celkovom poradí by sme skončili do 40. miesta. Michal však dal prednosť medzinárodnej fyzikálnej olympiáde IPhO, lebo tá sa konala v Mexiku; tam získal bronzovú medailu.

Vzhľadom na značný úbytok hodín matematiky na všetkých typoch škôl sa dá očakávať, že v budúcnosti bude čoraz ťažšie dosiahnuť úspech, a ak sa taký úspech aj dosiahne, tak nebude to ukazovateľom mimoriadnej kvality nášho školstva, lebo úroveň v matematike a v prírodných vedách bude upadať – úbytok hodín matematiky a prírodných vied sa bude totiž oveľa výraznejšie prejavovať.

Bronzovú medailu získal aj Raúl Arturo Chávez Sarmiento, 11-ročný Peruánec, a stal sa tak druhým najmladším držiteľom medaile z IMO. Pre zaujímavosť poznamenajme, že tým úplne najmladším medailistom v histórii IMO bol Terence Tao z Austrálie, ktorý postupne získal bronzovú, striebornú a potom zlatú medailu v rokoch 1986 – 88. Ďalšie medaile nezískal zrejme len preto, že ako 13-ročný nastúpil na univerzitu a preto sa na ďalších IMO už nemohol zúčastniť – pravidlá sú neúprosné. Dnes ako 34-ročný pokračuje v získavaní prívlastkov najmladší – je najmladším profesorom matematiky na UCLA.

Keďže išlo o jubilejný 50. ročník IMO, jeden deň bol venovaný oslave, na ktorú bolo pozvaných niekoľko mimoriadnych osobností, ktoré svoj dobrý výsledok z IMO potvrdili aj vo vedeckej práci:

Béla Bollobás, University of Cambridge and University of Memphis,

Timothy Gowers, University of Cambridge,

László Lovász, Budapest University, toho času je prezidentom celosvetovej organizácie matematikov International Mathematical Union (IMU),

Stanislav Smirnov, University of Geneva,

Terence Tao, University of California at Los Angeles,

Jean-Christophe Yoccoz, College de France, Paris.

Títo povedali mnoho zaujímavostí o svojej vedeckej práci a nadaná mládež dostala navyše možnosť priamo si s nimi pohovoriť. Uveďme pre zaujímavosť najúspešnejších účastníkov IMO v doterajšej histórii:

Christian Reiher, Nemecko, $(4, 0, 1, 0)$,

Reid Barton, USA, $(4, 0, 0, 0)$,

Wolfgang Burmeister, NDR (pre mladších – Nemecká demokratická republika), $(3, 2, 0, 2)$,

Iurie Boreico, Moldava, $(3, 2, 0, 1)$,

Martin Härterich, Nemecko, $(3, 1, 1, 0)$,

László Lovász, Maďarsko, $(3, 1, 0, 2)$,

József Pelikán, Maďarsko, $(3, 1, 0, 2)$.

Význam prvkov usporiadanej štvorice je postupne počet zlatých, strieborných a bronzových medailí a nakoniec počet zvláštnych cien; tie sa udeľujú naozaj len výnimočne, teda za celkom mimoriadne riešenie. Celý zoznam (ako aj množstvo iných informácií) môže záujemca nájsť na adrese *www.imo-official.org*.

Por.	Štát	Z	S	B	$\sum$	Por.	Štát	Z	S	B	$\sum$
1.	Čína	6			221	53.	Slovensko			2	73
2.	Japonsko	5		1	212	54.	Mongolsko			3	72
3.	Rusko	5	1		203	55.	Španielsko			4	71
4.	Južná Kórea	3	3		188	56.	Švédsko			2	70
5.	Severná Kórea	3	2	1	183	57.	Dánsko		1	1	68
6.	USA	2	4		182	58.	Bangladéš			2	67
7.	Thajsko	1	5		181	59.	Rakúsko			2	66
8.	Turecko	2	4		177	60.	Luxembursko			3	65
9.	Nemecko	1	4	1	171	61.	Bosna a Hercegovina			1	63
10.	Bielorusko	1	4	1	167	62.	Lotyšsko			1	61
11.	Taiwan	1	5		165	63.	Nórsko			2	60
	Taliansko	2	2	2	165	64.	Arménsko			2	59
13.	Rumunsko	2	2	2	163	65.	Slovinsko			1	58
14.	Ukrajina	3	1	2	162	66.	Nový Zéland			1	53
15.	Irán	1	4	1	161	67.	Fínsko				49
	Vietnam	2	2	2	161		Macao			1	49
17.	Brazília	1	3	2	160	69.	Cyprus		1		45
18.	Kanada	1	3	2	158	70.	Chile (4)		1		41
19.	Bulharsko	1	3	2	157	71.	Estónsko				40
	Maďarsko	1	2	3	157	72.	Kostarika (4)			1	34
	Veľká Británia	1	3	2	157	73.	Kirgizstan				33
22.	Srbsko	1	3	1	153	74.	Maroko				32
23.	Austrália	2	1	2	151	75.	Malajzia (2)		1		31
24.	Peru		4	2	144	76.	Trinidad a Tobago				28
25.	Gruzínsko		3	2	140	77.	Tunisko (5)			1	27
	Poľsko		2	4	140	78.	Ekvádor				26
27.	Kazachstan		3	3	136		Filipíny (4)			1	26
28.	India		3	2	130		Island				26
29.	Hongkong	1	2	2	122	81.	Albánsko				24
30.	Singapur		2	3	116		Honduras (3)			1	24
31.	Francúzsko		1	3	112	83.	Čierna Hora (4)				23
32.	Chorvátsko		1	4	110		Portoriko				23
33.	Portugalsko		1	3	99	85.	Kuba (1)			1	21
34.	Turkmenistan		1	3	97		Lichtenštajnsko (2)			1	21
35.	Argentína		1	1	93		Pakistan (5)			1	21
36.	Azerbajdžan		1	2	91		Uruguaj				21
	Macedónsko		1	3	91	89.	Írsko				20
38.	Belgicko		1	2	89	90.	Nigéria				17
39.	Kolumbia		1	2	88	91.	Guatemala (4)				14
40.	Česká republika		1	2	87		Kambodža				14
41.	Grécko			3	86		Paraguaj (4)				14
42.	Uzbekistan		1	2	85	94.	Salvádor (3)				13
43.	Indonézia			4	84		Venezuela (2)				13
	Južná Afrika			2	84	96.	Panama (1)				12
45.	Tadžikistan		1	2	82	97.	Bolívia (3)				9
46.	Izrael			3	80	98.	Mauritánia				8
47.	Holandsko		1	1	79	99.	Sýria (5)				7
	Švajčiarsko			3	79	100.	Zimbabwe (2)				5
49.	Litva		1	1	77	101.	Benin (2)				3
50.	Mexiko			3	74		Kuvajt (4)				3
	Moldavsko			4	74		Spojené arabské emiráty (5)				3
	Srí Lanka			2	74	104.	Alžírsko (4)				2

IMO je súťaž jednotlivcov, ale býva zvykom sledovať aj *neoficiálne* poradie družstiev. Na čele poradia skončila podľa očakávania Čína (221 bodov z 252 možných), ale len veľmi tesne pred Japonskom (212 bodov). Ďalšie poradie je v tabuľke (čísla v zátvorke sú uvedené za krajinami, ktoré mali na IMO menší počet účastníkov). Pritom – ako obvykle – všetci súťažiaci z Číny získali zlaté medaily.

Naše družstvo v rámci krajín EU skončilo v strede, pričom za nami zaostali Španielsko, Švédsko, Dánsko, Rakúsko, Luxembursko, Lotyšsko, Nórsko, Slovinsko, Fínsko (s enormne vychvaľovaným školským systémom), Cyprus, Estónsko a Írsko. Aj keď tento zoznam sa zdá byť dosť dlhý, predbehlo nás celkovo neobvykle veľa krajín… Len pre zaujímavosť: Česká republika skončila s 87 bodmi na 40. mieste, pričom jej žiaci získali jednu striebornú a dve bronzové medaily.

Peru potvrdilo vlaňajšie (vtedy veľmi prekvapujúce) výborné umiestnenie a so ziskom 144 bodov (!) skončilo na 24. mieste. Práve výsledok Peru (a tento rok aj Portugalska, Turkmenistanu, Azerbajdžanu, Belgicka, …) ukazuje to, čo som napísal už vlani, že treba dobre zrátať obe tzv. ľahké úlohy (č. 1 a č. 4) a ak sa k tomu pridá dobre zrátaná aj jedna z tzv. stredne ťažkých úloh (č. 2 a č. 5), tak výsledok družstva je veľmi dobrý. Na toto sa v príprave sústreďujeme aj my, ale príklady musia nakoniec počítať žiaci… Platí totiž, že naučiť žiakov spoľahlivo riešiť ťažké úlohy (č. 3 a č. 6 na IMO) sa v podstate nedá – k tomu potrebuje mať žiak mimoriadne nadanie. Napr. úlohu č. 6 tento rok vyriešili len traja.

Je však pravda, že tento rok práve úloha č. 4, ktorá mala byť ľahká, sa stala kameňom úrazu pre mnohých a – bohužiaľ – aj pre nás. Táto úloha bola v tzv. *Shortliste* zaradená ako úloha G1, teda ako najľahšia geometria. Zrejme ale najľahšia nebola, ak si všimneme, kto všetko na nej koľko bodov z maximálneho počtu $6 \times 7 = 42$ získal, takže vlastne veľa stratil: Japonsko 33, USA 33, Turecko 32, Taiwan 35, Taliansko 29, Rumunsko 28, Maďarsko 21, … Všetky tieto krajiny (a aj mnohé ďalšie) získali z „ľahkej“ úlohy č. 4 menej bodov, ako zo stredne ťažkej úlohy č. 5 a o hodne menej, ako zo stredne ťažkej úlohy č. 2.

Výlet v predposledný deň sa konal na Wangerooge. Je to nesporne zaujímavý ostrov, ale usporiadatelia mali vlastne šťastie, že počasie pol hodinu po našom príchode začalo byť dobré, lebo cestou tam (najprv loďou a potom miestnym vláčikom do jedinej obývanej osady) to vyzeralo ako v súdny deň. Potom však počasie umožnilo pešiu turistiku. Program bol v podstate voľný a pri zhruba 15°C a strednom vetre sa kúpali len tí najotrlejší. Takže prešli sme ostrov dookola až po prístav a tam sme zistili, že v okruhu 4 km nie je možné kúpiť žiadny nápoj a nie je možné ani vykonať potrebu… Takže sme prešli ostrov ešte raz opačným smerom, ale prišla piesková búrka, fúkalo presne oproti nám, takže hodinu sme nič nevideli…

Na predošlých olympiádach sa usporiadatelia vždy snažili poučiť z chýb predošlých usporiadateľov, takže pomaly už nebolo na jednotlivých IMO čo zlepšovať – usporiadanie tejto obrovskej celosvetovej akcie bolo posledné roky vynikajúce. Vzhľadom na povestnú precíznosť Nemcov sme všetci očakávali, že tento trend bude pokračovať, ale nestalo sa tak. Nemeckým usporiadateľom sa podarilo pokaziť aj veci, ktoré je dosť ťažké pokaziť – otrasne pôsobil najmä nedostatok dôležitých informácií a najmä ich meškanie.

V žiadnom prípade sa nedá povedať ani to, že by akceptovali stravovacie špecifiká účastníkov vyplývajúce z ich viery. Jeden autobus odišiel pol hodinu pred plánovaným odchodom a informácia o zmene odchodu bola len na zastávke toho (samozrejme nie linkového) autobusu. O nedostatkoch, ktoré vznikli v dôsledku šetrnosti usporiadateľov radšej písať nebudem. Na záverečnom „bankete“ niektorí čakali 3 hodiny (!), kým sa dostali k jedlu. Mne sa podarilo zachrániť od smrti hladom Marcina Kuczmu, čestného hosťa z Poľska… Tí starší sme sa zhodli, že to bola najhoršie usporiadaná IMO za posledných asi 30 rokov a ďalej už IMO-pamäť nikomu nesiahala.

Dovolím si aj touto cestou v mene SKMO poďakovať firme REKON, ktorá našej výprave opäť financovala reprezentačné tričká. Ďakujem tiež pracovníčkam Oddelenia služieb medzinárodnej spolupráce MŠ SR Eme Jenisovej a Želmíre Fischerovej za promptné vybavenie všetkých formalít súvisiacich s vycestovaním našej výpravy.

Dejiskom 51. IMO má byť Astana v Kazachstane, ďalej nasledujú Holandsko (2011) a Argentína (2012). SKMO urobí všetko preto, aby navzdory zhubným účinkom školskej reformy výsledky našich žiakov boli na takýchto súťažiach lepšie. S pokračujúcou školskou reformou u nás a s rozvojom vyučovania všade inde, aj v tzv. zaostalých krajinách, to však bude čoraz ťažšie, lebo tam stále považujú školu nie za miesto zábavy, ale za miesto serióznej a tvrdej práce.

Vojtech Bálint

IMO pohľadom súťažiacich

V čase, keď píšem tento report, je 16 mesiacov po IMO. Prečítal som si zopár reportov z minulých rokov a rozhodol som sa, že napíšem aj svoje pocity z môjho výsledku.

Ale pekne porade. Pre väčšinu z nás bolo IMO udalosťou roka – bol to horizont budúcnosti, za ktorý sme už nevideli. Môžem za seba povedať, že som sa priebežne pripravoval a priebežne hecoval, že sa tam chcem dostať.

Do Brém v Nemecku sme leteli na jeden prestup v Mníchove. Na letisku v Brémach nás čakal guide s nápisom „Slovakia“. Išlo o postaršieho študenta, ktorý nebol až tak zhovorčivý, ale povedal nám všetko dôležité a bol k nám priateľský. Pristavené autobusy nás prepravili na internát Jacob's University. Všetko prebehlo až podozrivo plynule.

Internáty (campus) tvorili prestavané kasárne v klasickom nemeckom, tehlovom štýle. Komplex zahŕňal vlastný kostolík, spoločenské centrá, veľké trávnaté plochy, viaceré jedálne, veľký počet športovísk. Proste tu bolo čo robiť vo voľnom čase. Organizátori chceli, aby sme boli všetci ubytovaní v tom istom komplexe, a tak niektorí z nás spali na prístelkách. Bolo to mierne nepohodlné. Na druhej strane sme často stretávali cudzích ľudí, s ktorými sa dalo dobre porozprávať. Stravovali sme sa v študentských jedálňach s podobnou ponukou každý deň. Mali sme k dispozícii väčšinu druhov zeleniny a pečiva dopĺňaných o denné menu. Bolo to chutné, výživné a bolo toho vždy dostatok.

Ďalší deň oddych a aklimatizácia, prechádzka centrom Brém, ktorého symbolom sú štyri zvieratá stojace na sebe. Otvárací ceremoniál prebiehal v hale, ktorá bola určená na diskotéky. Po prejavoch organizátorov a vystúpeniach tanečných a hudobných skupín sa postupne predstavili všetky krajiny. Mali sme možnosť z diaľky vidieť našich leadrov, ktorí už mali vybrané zadania na súťaž.

Dlho očakávaný deň súťaže. Priviezli nás autobusmi do extrémne veľkej haly veľkosti dedinského futbalového ihriska. V hale boli pripravené veľké stoly s veľkými rozostupmi a na nich fľaše vody a keksy. Zaujali ma kartičky, s ktorými sme si pýtali papier, pitie, otázky a prístup na WC. Po 10 minútach od môjho vstupu sa vydal pokyn na distribúciu zadaní. Tridsať guide-ov ich rozdalo za chvíľu. Organizácia súťaže pracovala ako švajčiarske hodinky.

V mojej hlave sa hemžili rôzne pocity. Bol som ohúrený veľkosťou haly, počtom ľudí, plynulosťou organizácie a pocitom zodpovednosti za svoj výkon. Dalo mi chvíľu času, aby som sa začal sústrediť a riešiť. Potom už išiel čas extrémne rýchlo. Po vyriešení jedného príkladu som myslel už len na to, že som „splnil plán“ a nesústredil som sa ďalej až tak. Na súťaži ale plán neexistuje, treba podať čo najlepší výkon a teda sa sústrediť celý čas.

Po prvom dni súťaže boli cítiť pocity sklamania. Výnimkou bol Michal Hagara, ktorý vyriešil dva príklady. V očakávaní úspešnejšieho druhého dňa sme išli skoro spať.

Nepomohlo. Objektívne bola štvrtá úloha náročnejšia ako piata a to nás potopilo. Väčšina z nás strávila štvrtou úlohou väčšinu času a podarilo sa ju vyriešiť iba Maťovi Bachratému. Koniec súťaže, sklamanie v očiach, smútok. Prišli sme za horizont, ktorý sme toľko očakávali. Nevedeli sme, čo máme ďalej robiť.

Mentálnej aktivity sme mali dosť a tak sme vo voľnom čase hrávali frisbee, basketbal alebo súťažne futbal (za česko-slovensko-ruské družstvo). Prípadne sme si išli do spoločenskej zahrať stolný futbal, biliard, alebo sme išli na diskotéku. Niektorý z nás ale neustále analyzovali svoje výkony a rozmýšľali, ako to v budúcnosti zlepšiť.

Organizátori pre nás pripravili tri hromadné akcie. Prvou akciou bol výlet do Hamburgu a návšteva najväčšieho múzea modelov. Išlo o modely krajiniek, cez ktoré premávali vláčiky a autíčka. Múzeum bola jedna dlhá miestnosť a menila sa v nej postupne intenzita svetla – akoby sa striedali noc a deň. Krajinky boli dotvorené malými situačnými vtipmi a zaujímavosťami. Bolo to super.

Druhou akciou boli matematické prednášky z dôvodu jubilea IMO. Prišli prednášatelia, ktorí predtým veľmi úspešne obstáli na IMO. Medzi inými aj Terence Tao a pán Pelikán. Cez prestávku sa s nimi dalo nezáväzne rozprávať. Program spestrili nekonečné množstvá chlebíčkov a koláčov.

Treťou, najväčšou akciou, bol výlet na ostrov Wangerooge. Ide o prírodnú rezerváciu s unikátnou flórou a faunou. Najzaujímavejší je jav, že počas odlivu je možné dostať sa po súši do 3 km vzdialeného Nemecka. Videli sme riečky vytvárané odtekajúcim morom, duny, pláž a letisko. Okúpali sme sa v mori, pohrali sme sa s pieskom a mali sme peknú prechádzku po ostrove. Bolo tam nádherne, až na silný vietor.

Posledné dni nás čakalo už len oficiálne vyhodnotenie v historickej budove divadla. Zatlieskali sme našim dvom medailistom a takisto viacerým českým. Nakoniec neustávajúci potlesk pre prvých troch, medzi ktorými bola netradične aj žena. Večer bol rockový koncert, grill-párty, pivo zadarmo a teda veľká zábava. Celý večer sme strávili s našimi českými priateľmi.

Nasledujúci deň sme išli domov, takisto hladko ako sme sem prišli. Celé IMO prebehlo veľmi plynulo, organizácia celej súťaže a výletov bola špičková, nikdy sme nečakali viac ako 10 minút. Videli sme kus Nemecka, zažili sme veľkú súťaž na vlastnej koži a stretli ľudí z vyše 100 krajín. Za to všetko patrí organizátorom veľká vďaka.

Záver. Určite bolo IMO životná skúsenosť. Cítil som veľké sklamanie z osobného neúspechu a historicky najhoršieho výsledku slovenskej reprezentácie. Prvé pocity boli deprimujúce, hemžili sa mi hlavou vety ako „celá príprava bola zbytočná“, „načo som vlastne chodil“ a „som taký šupák“. Povzbudili ma ale dobre volené slová moderátora: „There is a life after IMO“ (existuje život po IMO), a to je pravda.

Po roku aj pol sa na to pozerám inak. Áno, mohol som sa pripravovať efektívnejšie, mohol som sa na súťaži viac sústrediť a podať lepší výkon. Pre mňa bolo ale najdôležitejšie zúčastniť sa. Uvedomiť si ako to chodí s dlhodobými prípravami na veľké, krátko trvajúce akcie. Spoznať veľa nových ľudí, s ktorými sa v živote ešte určite stretnem. Aj keď som bol v momente po súťaži sklamaný, teraz viem, že ma IMO ovplyvnila veľmi pozitívne. Dalo mi to skalopevný dôvod sa ďalej vzdelávať v oblasti, ktorá ma baví, a tou je matematika.

Peter Csiba

Zadania úloh IMO

Úloha 1.
Nech n je kladné celé číslo a $a_1, \ldots, a_k$ ($k \geqq 2$) sú navzájom rôzne celé čísla z množiny $\{1, \ldots, n\}$ také, že n je deliteľom čísla $a_i(a_{i+1} - 1)$ pre $i = 1, \ldots, k-1$. Dokážte, že n nie je deliteľom čísla $a_k(a_1 - 1)$. (*Austrália*)

Úloha 2.
Daný je trojuholník ABC so stredom opísanej kružnice O. Nech P resp. Q je vnútorný bod strany CA resp. AB. Označme postupne K, L, M stredy úsečiek BP, CQ, PQ a Γ kružnicu prechádzajúcu bodmi K, L, M. Predpokladajme, že priamka PQ sa dotýka kružnice Γ. Dokážte, že $|OP| = |OQ|$. (*Rusko*)

Úloha 3.
Predpokladajme, že $s_1, s_2, s_3, \ldots$ je rastúca postupnosť kladných celých čísel taká, že obe jej podpostupnosti

$$s_{s_1},\ s_{s_2},\ s_{s_3},\ \ldots \qquad \text{a} \qquad s_{s_1+1},\ s_{s_2+1},\ s_{s_3+1},\ \ldots$$

sú aritmetické. Dokážte, že potom aj postupnosť $s_1, s_2, s_3, \ldots$ je aritmetická. (*USA*)

Úloha 4.
Daný je trojuholník ABC, pričom $|AB| = |AC|$. Osi uhlov CAB a ABC pretínajú strany BC a CA postupne v bodoch D a E. Nech K je stred kružnice vpísanej do trojuholníka ADC. Predpokladajme, že $|\measuredangle BEK| = 45°$. Nájdite všetky možné veľkosti uhla CAB. (*Belgicko*)

Úloha 5.
Určte všetky také funkcie f z množiny kladných celých čísel do množiny kladných celých

čísel, že pre všetky kladné celé čísla a, b existuje nedegenerovaný trojuholník so stranami dĺžok

$$a, \quad f(b), \quad f(b+f(a)-1).$$

(Trojuholník je *nedegenerovaný*, ak jeho vrcholy neležia na jednej priamke.)

(*Francúzsko*)

Úloha 6.
Nech a_1, a_2, ..., a_n sú navzájom rôzne kladné celé čísla a M je množina $n-1$ kladných celých čísel neobsahujúca číslo $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Lúčny koník skáče pozdĺž číselnej osi, pričom začína v bode 0 a urobí smerom doprava n skokov s dĺžkami a_1, a_2, ..., a_n v nejakom poradí. Dokážte, že poradie skokov sa dá zvoliť tak, aby lúčny koník nepristál na žiadnom čísle z množiny M. (*Rusko*)

Riešenia úloh IMO

Úloha 1.
(Podľa *Michala Hagaru.*) Podmienku $n \mid a_i(a_{i+1}-1)$ prepíšeme v tvare kongruencie a upravíme:

$$\begin{aligned} a_i(a_{i+1}-1) &\equiv 0 \pmod{n}, \\ a_i a_{i+1} - a_i &\equiv 0 \pmod{n}, \\ a_i a_{i+1} &\equiv a_i \pmod{n}, \qquad i = 1, 2, \dots, k-1. \end{aligned} \tag{1}$$

Využitím (1) postupne pre $i = 1, 2, \dots, k-1$ dostávame

$$a_1 \equiv a_1 a_2 \equiv a_1 a_2 a_3 \equiv a_1 a_2 a_3 a_4 \equiv \cdots \equiv a_1 a_2 \dots a_k \pmod{n}. \tag{2}$$

Predpokladajme sporom, že $n \mid a_k(a_1-1)$, teda že $a_k a_1 \equiv a_k \pmod{n}$. Potom

$$a_1 a_2 \dots a_k = a_2 \dots a_k a_1 \equiv a_2 \dots a_k \pmod{n},$$

čo v spojení s (2) dáva

$$a_1 \equiv a_2 \dots a_k \pmod{n}. \tag{3}$$

Rovnako ako pri (2), využitím (1) postupne pre $i = 2, \dots, k-1$ máme

$$a_2 \equiv a_2 a_3 \equiv a_2 a_3 a_4 \equiv \cdots \equiv a_2 \dots a_k \pmod{n}.$$

Spolu s (3) odtiaľ

$$a_1 \equiv a_2 \dots a_k \equiv a_2 \pmod{n},$$

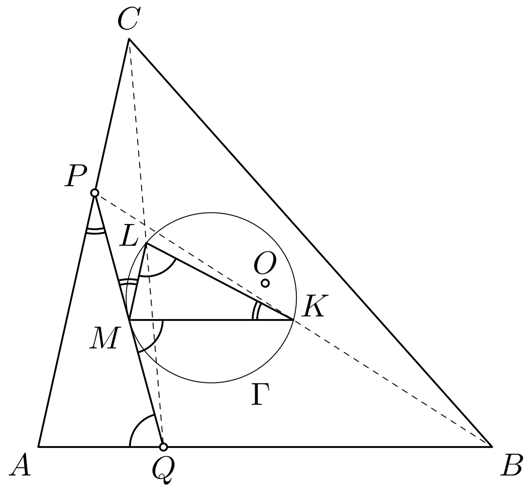
teda a_1 a a_2 dávajú rovnaký zvyšok po delení n, čo je v spore s predpokladom, že sú to navzájom rôzne čísla z množiny $\{1, \dots, n\}$.

Úloha 2.
(Podľa *Michala Hagaru.*) Úsečka MK je strednou priečkou trojuholníka QBP, preto

$$|KM| = \frac{1}{2}|QB| \qquad \text{a} \qquad AB \parallel MK.$$

Zo striedavých uhlov potom $|\measuredangle AQP| = |\measuredangle KMQ|$. Keďže PQ je dotyčnicou kružnice Γ, z rovnosti úsekového a obvodového uhla prislúchajúceho tetive MK máme $|\measuredangle KMQ| = |\measuredangle KLM|$. Spolu teda $|\measuredangle AQP| = |\measuredangle KLM|$. Analogicky dostaneme (obr. 43)

$$|LM| = \frac{1}{2}|PC| \qquad \text{a} \qquad |\measuredangle APQ| = |\measuredangle LMP| = |\measuredangle LKM|.$$



Obr. 43

Z uvedených rovností uhlov vyplýva podobnosť trojuholníkov QAP a LMK (majú rovnaké veľkosti prislúchajúcich vnútorných uhlov). Z pomerov strán postupne (po dosadení vyjadrených dĺžok $|KM|$ a $|LM|$) dostávame

$$\frac{|QA|}{|LM|} = \frac{|PA|}{|KM|},$$
$$\frac{|QA|}{\frac{1}{2}|PC|} = \frac{|PA|}{\frac{1}{2}|QB|},$$
$$|QA| \cdot |QB| = |PA| \cdot |PC|.$$

Posledná rovnosť znamená, že body Q a P majú rovnakú mocnosť ku kružnici opísanej trojuholníku ABC (zrejme oba body ležia vnútri tejto kružnice). Ak označíme r jej polomer, zhodnú mocnosť možno zapísať v tvare

$$|OQ|^2 - r^2 = |OP|^2 - r^2,$$

odkiaľ už triviálne $|OP| = |OQ|$.

Úloha 3.
Označme D diferenciu aritmetickej postupnosti s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, … a pre každé $n = 1, 2, \dots$ označme $d_n = s_{n+1} - s_n$. Naším cieľom je dokázať, že hodnota d_n je pre všetky n rovnaká. Najskôr ukážeme, že množina hodnôt d_n je ohraničená. Keďže zadaná postupnosť je rastúca, pre každé n je $d_n \geqq 1$. Preto[5]

$$d_n = s_{n+1} - s_n = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{(s_{n+1}-s_n)\text{-krát}} \leqq d_{s_n} + d_{s_n+1} + \dots + d_{s_{n+1}-1} = D.$$

Označme m najmenšiu a M najväčšiu z hodnôt d_n (z ohraničenosti vyplýva existencia minima aj maxima). Stačí dokázať, že $m = M$. Predpokladajme sporom, že $m < M$.

Nech k je ľubovoľný taký index, že $d_k = m$. Teda $s_{k+1} - s_k = m$, odkiaľ

$$\begin{aligned} D &= s_{s_{k+1}} - s_{s_k} = s_{s_k+m} - s_{s_k} = \\ &= d_{s_k} + d_{s_k+1} + \dots + d_{s_k+m-1} \leqq \underbrace{M + M + \dots + M}_{m\text{-krát}} = mM. \end{aligned} \tag{1}$$

Podobne ak K je ľubovoľný taký index, že $d_K = M$, tak $s_{K+1} - s_K = M$, teda

$$\begin{aligned} D &= s_{s_{K+1}} - s_{s_K} = s_{s_K+M} - s_{s_K} = \\ &= d_{s_K} + d_{s_K+1} + \dots + d_{s_K+M-1} \geqq \underbrace{m + m + \dots + m}_{M\text{-krát}} = Mm. \end{aligned} \tag{2}$$

Z (1) a (2) vyplýva, že $D = Mm$, a aby platila rovnosť, nutne $d_{s_k} = d_{s_k+1} = \ldots = d_{s_k+m-1} = M$ a $d_{s_K} = d_{s_K+1} = \ldots = d_{s_K+M-1} = m$. Špeciálne máme

$$d_{s_k} = M \qquad \text{a} \qquad d_{s_K} = m. \tag{3}$$

Z rastúcosti postupnosti $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vyplýva $s_k \geqq k$. Navyše dokonca $s_k > k$, lebo ak by sme mali $s_k = k$, tak podľa (3) by bolo $m = d_k = d_{s_k} = M$, čo je v spore s $m < M$. Rovnako možno ukázať, že $s_K > K$.

Položme $n_1 = k$. Teda $d_{n_1} = m$ a podľa (3) platí $d_{s_{n_1}} = M$. Ďalej zvoľme $n_2 = s_{n_1} > n_1$. Keďže $d_{n_2} = M$, môže n_2 vystupovať v pozícii K a teda podľa (3) máme $d_{s_{n_2}} = m$ a taktiež $s_{n_2} > n_2$. Následne preto môžeme zvoliť $n_3 = s_{n_2}$ a z (3) (keďže n_3 môže vystupovať v pozícii k) opäť $d_{s_{n_3}} = M$, atď. Predpisom $n_{i+1} = s_{n_i}$ takto skonštruujeme rastúcu postupnosť n_1, n_2, n_3, … takú, že

$$d_{s_{n_1}} = M, \quad d_{s_{n_2}} = m, \quad d_{s_{n_3}} = M, \quad d_{s_{n_4}} = m, \quad \dots \tag{4}$$

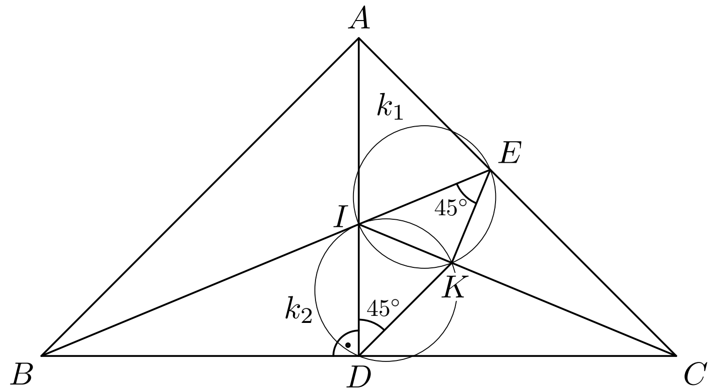
Pritom postupnosť $d_{s_{n_1}}$, $d_{s_{n_2}}$, … je podpostupnosťou postupnosti d_{s_1}, d_{s_2}, … Tá má členy, ktoré sú rozdielmi členov aritmetických postupností s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, … a s_{s_1},

[5] Ohraničenosť hodnôt d_n sa dá zdôvodniť aj menej formálne: Každé dva po sebe idúce členy postupnosti $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ možno zrejme vložiť medzi niektoré dva členy postupnosti $1, s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots$, ktorá je od druhého člena aritmetická. Preto triviálne $s_{n+1} - s_n \leqq \max\{D, s_{s_1} - 1\}$.

s_{s_2}, ..., teda aj sama je aritmetickou postupnosťou. Keďže podľa (4) sa v nej nekonečne veľakrát opakuje hodnota m (aj M), nutne to musí byť konštantná aritmetická postupnosť a $m = M$.

Úloha 4.

(Podľa *Martina Bachratého*.) Označme I stred kružnice vpísanej do trojuholníka ABC (je to priesečník priamok AD, BE, CK). Uvažujme kružnice k_1, k_2 opísané trojuholníkom IKE, IKD (obr. 44). Obe majú nad spoločnou tetivou IK obvodový uhol veľkosti $45°$, lebo K leží na osi pravého uhla ADC. Preto sú obe kružnice zhodné a teda osovo súmerné podľa priamky CI. Podľa tejto priamky sú však osovo súmerné aj priamky AC, BC. Takže v osovej súmernosti podľa priamky CI sa priesečníky kružnice k_1 so stranou AC zobrazia na priesečníky kružnice k_2 so stranou BC.

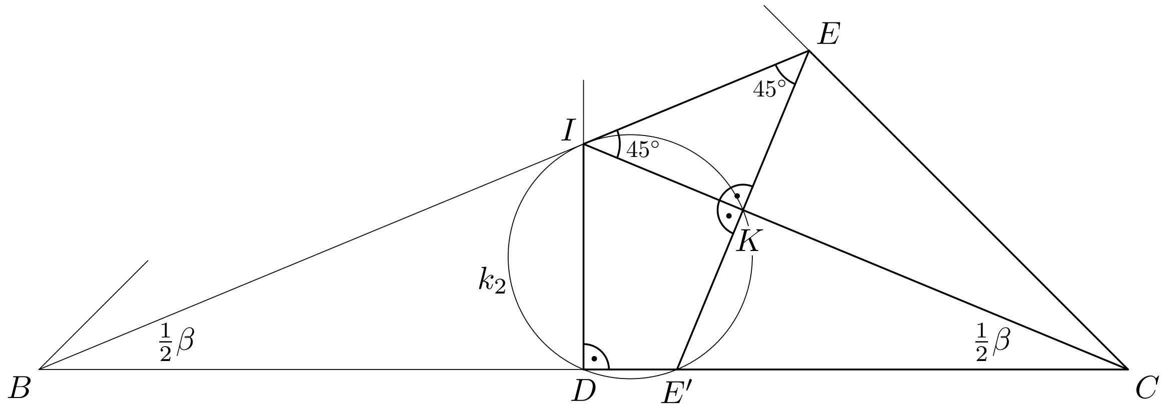


Obr. 44

Keďže jeden zo spoločných bodov kružnice k_1 a priamky AC je bod E a jeden zo spoločných bodov kružnice k_2 a priamky BC je bod D, môžu nastať dva prípady.

Prípad 1. Bod D je obrazom bodu E v osovej súmernosti podľa CI (Tento prípad zahŕňa aj možnosť, že kružnice k_1, k_2 sa dotýkajú priamok AC, BC – vtedy sú E a D jediné „priesečníky" kružníc s priamkami a nutne musia byť navzájom súmerné). Potom sú osovo súmerné podľa CI celé trojuholníky CID a CIE, z ktorých prvý je pravouhlý. Nutne teda aj uhol CEI je pravý, čo znamená, že v trojuholníku ABC je os uhla pri vrchole B totožná s výškou na stranu AC. To je zrejme možné jedine v prípade, že trojuholník ABC je rovnoramenný so základňou AC. Avšak podľa zadania je rovnoramenným so základňou AB. Takže musí byť rovnostranný, z čoho $|\angle CAB| = 60°$.

Prípad 2. Kružnica k_2 pretína priamku BC v dvoch rôznych bodoch D a E', pričom E' a E sú súmerné podľa priamky CI. Keďže E' leží na BC, uhol IDE' je pravý a teda IE' je priemerom Tálesovej kružnice prechádzajúcej bodom D. Táto kružnica je evidentne totožná s k_2, preto aj uhol IKE' je pravý (obr. 45). Vzhľadom na spomenutú súmernosť



Obr. 45

je potom pravý aj uhol IKE a tretí uhol v trojuholníku IKE musí mať veľkosť

$$|\measuredangle EIK| = 180^\circ - |\measuredangle IKE| - |\measuredangle IEK| = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ.$$

Ak označíme β veľkosť vnútorného uhla v rovnoramennom trojuholníku ABC pri vrcholoch B a C, tak rovnoramenný trojuholník BCI má pri základni BC vnútorné uhly veľkosti $\frac{1}{2}\beta$ a oproti základni uhol veľkosti $180^\circ - |\measuredangle EIK| = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$. Z rovnosti

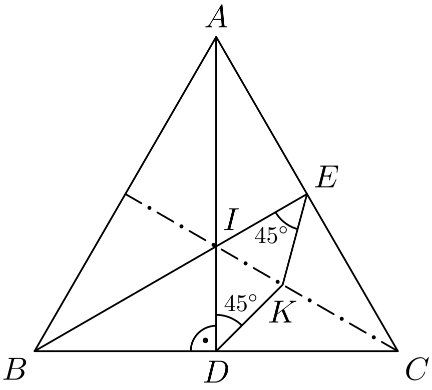
$$\tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{2}\beta + 135^\circ = 180^\circ$$

už triviálne dopočítame $\beta = 45^\circ$, čiže $|\measuredangle CAB| = 180^\circ - 2\beta = 90^\circ$.

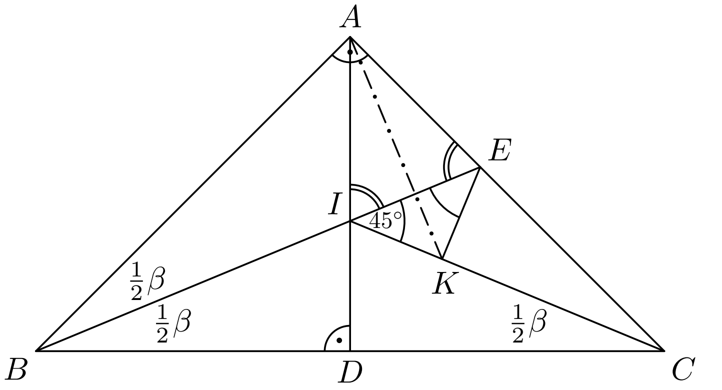
Teda jediné prípustné hodnoty pre veľkosť uhla CAB sú 60° a 90°. Pre dokončenie úlohy ešte musíme dokázať, že pre rovnoramenný trojuholník so základňou BC a uhlom CAB veľkosti 60° resp. 90° je veľkosť uhla BEK skutočne 45°. (Zatiaľ sme dokázali len jeden smer implikácie: ak $|\measuredangle BEK| = 45^\circ$, tak $|\measuredangle CAB| \in \{60^\circ, 90^\circ\}$. Potrebujeme dokázať aj opačný smer, t. j. že hodnoty 60° a 90° sú v zadanej situácii naozaj možné veľkosti uhla CAB.)

Každý z oboch prípadov preveríme osobitne. Možných postupov je viacero, v daných konfiguráciách je trojuholník ABC (až na veľkosť strany BC) jednoznačne daný, takže sa jedná o štandardnú úlohu. Uvedieme postup bez použitia goniometrických funkcií alebo analytickej geometrie.

Ak $|\measuredangle CAB| = 60^\circ$, tak ABC je rovnostranný trojuholník (obr. 46a). Zo symetrie potom $|\measuredangle BEK| = |\measuredangle ADK| = 45^\circ$ (keďže K leží na osi pravého uhla ADC).



Obr. 46a



Obr. 46b

Ak $|\measuredangle CAB| = 90° = \alpha$, tak $\beta = 45°$ a ľahko vypočítame veľkosti

$$|\measuredangle EIK| = |\measuredangle CBI| + |\measuredangle BCI| = \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{2}\beta = \beta = 45°,$$
$$|\measuredangle AEI| = 180° - \alpha - \tfrac{1}{2}\beta = 180° - 90° - 22{,}5° = 67{,}5°,$$
$$|\measuredangle AIE| = |\measuredangle BID| = 180° - 90° - \tfrac{1}{2}\beta = 90° - 22{,}5° = 67{,}5°.$$

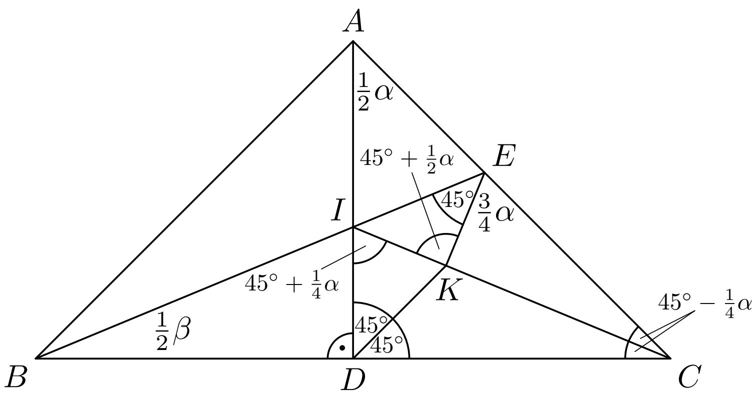
Teda AIE je rovnoramenný trojuholník so základňou IE a body I, E sú súmerne združené podľa priamky AK, ktorá je osou uhla CAD (obr. 46b). Odtiaľ $|KI| = |KE|$, čiže KIE je rovnoramenný trojuholník a $|\measuredangle BEK| = |\measuredangle EIK| = 45°$.

Iné riešenie. Označme $|\measuredangle BAC| = \alpha$ a $|\measuredangle ABC| = |\measuredangle BCA| = \beta = 90° - \frac{1}{2}\alpha$. Bod I nech je rovnako ako v predošlom riešení stred kružnice vpísanej do trojuholníka ABC. Bod K leží na priesečníkoch osí uhlov trojuholníka ADC, preto

$$|\measuredangle ECK| = |\measuredangle KCD| = \tfrac{1}{2}\beta = 45° - \tfrac{1}{4}\alpha \qquad \text{a} \qquad |\measuredangle CDK| = |\measuredangle KDA| = 45°.$$

Z trojuholníka DCI potom $|\measuredangle DIC| = 45° + \frac{1}{4}\alpha$. Pomocou zadaného predpokladu $|\measuredangle BEK| = 45°$ následne z trojuholníkov BCE a KCE odvodíme

$$|\measuredangle KEC| = 180° - \tfrac{1}{2}\beta - \beta - 45° = 135° - \tfrac{3}{2}\beta = 135° - \tfrac{3}{2}(90° - \tfrac{1}{2}\alpha) = \tfrac{3}{4}\alpha,$$
$$|\measuredangle IKE| = \tfrac{3}{4}\alpha + 45° - \tfrac{1}{4}\alpha = 45° + \tfrac{1}{2}\alpha.$$



Obr. 47

Zo sínusových viet v trojuholníkoch ICE, IKE, IDK, IDC teda máme (obr. 47)

$$\frac{|IC|}{|IE|} = \frac{\sin(45^\circ + \frac{3}{4}\alpha)}{\sin(45^\circ - \frac{1}{4}\alpha)}, \qquad \frac{|IE|}{|IK|} = \frac{\sin(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha)}{\sin 45^\circ},$$
$$\frac{|IK|}{|ID|} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin(90^\circ - \frac{1}{4}\alpha)}, \qquad \frac{|ID|}{|IC|} = \frac{\sin(45^\circ - \frac{1}{4}\alpha)}{\sin 90^\circ}.$$

Vynásobením uvedených štyroch rovností dostaneme

$$1 = \frac{\sin(45^\circ + \frac{3}{4}\alpha)\sin(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha)}{\sin(90^\circ - \frac{1}{4}\alpha)}.$$

Použitím známych goniometrických identít

$$\sin(90^\circ - x) = \cos x \qquad \text{a} \qquad \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

rovnicu upravíme na

$$\cos\tfrac{1}{4}\alpha = \frac{1}{2}(\cos\tfrac{1}{4}\alpha - \cos(90^\circ + \tfrac{5}{4}\alpha)),$$
$$\frac{1}{2}(\cos(90^\circ + \tfrac{5}{4}\alpha) + \cos\tfrac{1}{4}\alpha) = 0.$$

Použitím ďalšej identity $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)$ napokon získame

$$\cos(45^\circ + \tfrac{3}{4}\alpha)\cdot\cos(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha) = 0.$$

To znamená (keďže $0^\circ < \alpha < 180^\circ$), že buď $45^\circ + \frac{3}{4}\alpha = 90^\circ$, t. j. $\alpha = 60^\circ$, alebo $45^\circ + \frac{1}{2}\alpha = 90^\circ$, t. j. $\alpha = 90^\circ$. Takže jediné prípustné hodnoty pre veľkosť uhla CAB sú 60° a 90°. Na druhej strane, pri oboch týchto hodnotách platí $|\measuredangle BEK| = 45^\circ$, čo možno ukázať rovnako ako v prvom riešení.

Úloha 5.
Trojuholníkovú nerovnosť pre trojicu čísel x, y, z budeme používať aj v tvare $|x-y| < z$ (táto nerovnosť zahŕňa $x < y + z$ a zároveň $y < x + z$). Označme $f(1) = m$. Po dosadení $a = 1$ dostávame, že čísla 1, $f(b)$, $f(b+m-1)$ sú pre každé prirodzené b stranami trojuholníka, spĺňajú teda nerovnosť

$$|f(b) - f(b+m-1)| < 1,$$

čo je vzhľadom na celočíselnosť hodnôt $f(b)$, $f(b+m-1)$ možné jedine v prípade, že $f(b) = f(b+m-1)$.

Ak by bolo $m > 1$, tak f by bola periodická s periódou $m-1$. V takom prípade by (periodicky) nadobúdala iba hodnoty

$$f(1),\ f(2),\ \dots,\ f(m-1).$$

Ak označíme H najväčšiu z týchto hodnôt, po dosadení $a = 2H$ dostávame, že čísla $2H$, $f(b)$, $f(b + f(2H) - 1)$ spĺňajú trojuholníkovú nerovnosť

$$2H < f(b) + f(b + f(2H) - 1) \leqq H + H = 2H,$$

čo je očividne spor.

Nutne teda $m = 1$, t. j. $f(1) = 1$. Dosadením $b = 1$ z toho dostávame, že čísla a, 1, $f(f(a))$ sú pre ľubovoľné prirodzené číslo a stranami trojuholníka, takže $|a - f(f(a))| < 1$, čo opäť vzhľadom na celočíselnosť a a $f(f(a))$ znamená

$$f(f(a)) = a \quad \text{pre všetky prirodzené čísla } a. \tag{1}$$

Označme $f(2) = k$. Zrejme $k \neq 1$, lebo podľa (1) máme $f(k) = f(f(2)) = 2$, zatiaľ čo $f(1) = 1$. Z (1) dokonca vyplýva, že funkcia f je prostá, t. j. žiadnu hodnotu nenadobúda viac než raz. Ak totiž $f(x) = f(y)$, tak nutne $x = f(f(x)) = f(f(y)) = y$. Tento známy fakt (že z (1) vyplýva prostosť f) budeme v riešení využívať.

Položme $a = 2$, $b = k$. Potom 2, 2 a $f(k+k-1) = f(2k-1)$ sú stranami trojuholníka, čiže

$$|f(2k - 1) - 2| < 2, \qquad \text{a odtiaľ} \quad f(2k - 1) \in \{1, 2, 3\}.$$

Avšak f už nadobúda hodnotu 1 v bode 1 a hodnotu 2 v bode k a zároveň $2k - 1 \neq 1$ a $2k - 1 \neq k$. Z prostosti f teda nutne vyplýva $f(2k - 1) = 3$.

Položme ďalej $a = 2$, $b = 2k - 1$. Z toho 2, 3 a $f(2k - 1 + k - 1) = f(3k - 2)$ sú stranami trojuholníka a analogicky dostávame

$$|f(3k - 2) - 3| < 2, \qquad \text{čiže} \quad f(3k - 2) \in \{2, 3, 4\}.$$

Keďže hodnoty 2, 3 už f nadobúda v bodoch k, $2k - 1$ a zároveň $3k - 2 \neq k$ a $3k - 2 \neq 2k - 1$, nutne $f(3k - 2) = 4$.

Matematickou indukciou (ktorej prvý krok sme pre hodnoty $n = 1, 2, 3$ práve urobili) ľahko dokážeme, že

$$f(nk - (n - 1)) = n + 1 \qquad \text{pre všetky prirodzené čísla } n.$$

Ak totiž toto tvrdenie platí pre n aj pre $n - 1$, po dosadení $a = 2$, $b = nk - (n - 1)$ dostávame trojicu strán 2, $n + 1$ a $f(nk - (n - 1) + k - 1) = f((n + 1)k - n)$, teda

$$|f((n + 1)k - n) - (n + 1)| < 2, \qquad \text{odkiaľ} \quad f((n + 1)k - n) \in \{n, n + 1, n + 2\}.$$

Hodnoty n a $n + 1$ sú však podľa indukčného predpokladu už „obsadené“ bodmi $(n - 1)k - (n - 2)$ a $nk - (n - 1)$ (ktoré sú oba rôzne od $(n + 1)k - n$), takže jedinou možnosťou je $f((n + 1)k - n) = n + 2$ a tvrdenie platí aj pre $n + 1$. Tým je dôkaz indukciou ukončený.

Špeciálne potom tvrdenie platí aj pre $n = k - 1$, teda

$$f((k - 1)k - (k - 2)) = k.$$

Keďže sme už skôr ukázali, že $f(2) = k$, z prostosti f máme $(k-1)k - (k-2) = 2$, z čoho po triviálnej úprave $k(k-2) = 0$. Samozrejme $k \neq 0$, dostávame tak $k = 2$ a indukciou dokázané tvrdenie prechádza na tvar

$$f(n+1) = n+1 \qquad \text{pre všetky prirodzené čísla } n.$$

Spolu s tvrdením $f(1) = 1$, ktoré sme dokázali na začiatku, dostávame, že jedinou vyhovujúcou funkciou môže byť identita $f(x) = x$. Ľahko overíme, že táto funkcia vyhovuje, lebo trojica čísel a, b, $a+b-1$ spĺňa všetky tri trojuholníkové nerovnosti triviálne (pre ľubovoľné $a, b \in \mathbb{N}$).

Úloha 6.

Na začiatku si všimnime, že zo zadaného tvrdenia vyplýva jeho zovšeobecnenie: Predpoklad, že množina M obsahuje práve $n-1$ kladných celých čísel možno nahradiť podmienkou $|M \cap (0, s - a_{\min}\rangle| \leqq n-1$, pričom $a_{\min}$ je najmenšie spomedzi a_1, a_2, …, a_n. Tento fakt v dôkaze použijeme.

Postupovať budeme matematickou indukciou vzhľadom na n. Prípad $n = 1$ je triviálny. V druhom kroku indukcie predpokladajme, že $n > 1$ a že tvrdenie je pravdivé pre všetky prirodzené čísla menšie ako n. Ďalej nech a_1, a_2, …, a_n, s, M sú dané a spĺňajú predpoklady dokazovaného tvrdenia. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $a_n < a_{n-1} < \cdots < a_2 < a_1$. Označme

$$T_k = \sum_{i=1}^{k} a_i \quad \text{pre } k = 0, 1, \ldots, n.$$

Zrejme $0 = T_0 < T_1 < \cdots < T_n = s$. Najskôr dokážeme pomocné tvrdenie.

Tvrdenie 1. Stačí ukázať, že pre nejaké $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ dokáže urobiť koník m skokov, pričom nikdy nepristane na čísle z M a navyše počas týchto m skokov preskočí spolu aspoň ponad m bodov z M.

Dôkaz. Keďže $|M| = n-1$, evidentne $m \neq n$. Položme $n' = n - m$. Potom $1 \leqq n' < n$. Zvyšných n' skokov bez pristátia na ktoromkoľvek zo zvyšných zakázaných nanajvýš $n'-1$ čísel z M dokáže koník urobiť vďaka indukčnému predpokladu (stačí posunúť začiatok z čísla 0 do čísla, kde sa koník nachádza po m skokoch). □

Číslo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ budeme nazývať *slušné*, ak koník dokáže urobiť k skokov s dĺžkami a_1, a_2, …, a_k (v nejakom poradí) tak, že s výnimkou posledného skoku nikdy nepristane na čísle z M (po k-tom skoku môže a nemusí skončiť na čísle z M).

Číslo 1 je očividne slušné. Preto existuje najväčšie číslo k^* také, že všetky čísla 1, 2, …, k^* sú slušné. Ak $k^* = n$, niet čo dokazovať. Zaoberajme sa ďalej len prípadom $k^* \leqq n-1$ (teda k^*+1 nie je slušné). Dokážeme ďalšie pomocné tvrdenie.

Tvrdenie 2. Platí

$$T_{k^*} \in M \qquad \text{a} \qquad |M \cap (0, T_{k^*})| \geqq k^*.$$

Dôkaz. Ak $T_{k^*} \notin M$, postupnosť skokov, vďaka ktorej je číslo k^* slušné, možno predĺžiť pridaním skoku dĺžky a_{k^*+1}, čo je v spore s tým, že k^*+1 nie je slušné. Takže nutne $T_{k^*} \in M$.

Ak $|M\cap(0,T_{k^*})| < k^*$, tak existuje $l\in\{1,2,\dots,k^*\}$ také, že $T_{k^*+1}-a_l\notin M$. Potom podľa indukčného predpokladu (s hodnotou k^* namiesto n) dokáže koník doskákať do čísla $T_{k^*+1}-a_l$ pomocou k^* skokov s dĺžkami z množiny $\{a_1,a_2,\dots,a_{k^*}+1\}\setminus\{a_l\}$, pričom ani raz nepristane na čísle z M. Takže aj k^*+1 je slušné, čo je spor. $\square$

Podľa práve dokázaného tvrdenia existuje najmenšie číslo $\tilde k\in\{1,2,\dots,k^*\}$ také, že

$$T_{\tilde k}\in M \qquad \text{a} \qquad |M\cap(0,T_{\tilde k})|\geqq \tilde k.$$

Tvrdenie 3. Stačí uvažovať prípad

$$|M\cap(0,T_{\tilde k-1}\rangle|\leqq \tilde k-1. \tag{1}$$

Dôkaz. Ak $\tilde k=1$, tak (1) platí triviálne. Ďalej nech $\tilde k>1$. Ak $T_{\tilde k-1}\in M$, tak (1) vyplýva z minimálnosti $\tilde k$. Ak $T_{\tilde k-1}\notin M$ a platilo by $|M\cap(0,T_{\tilde k-1}\rangle|\geqq\tilde k-1$, zo slušnosti čísla $\tilde k-1$ by sme dostali situáciu ako v Tvrdení 1 pre $m=\tilde k-1$. V tomto prípade teda dokonca stačí uvažovať prípad $|M\cap(0,T_{\tilde k-1}\rangle|\leqq\tilde k-2$. $\square$

Označme $v\geqq 0$ číslo, pre ktoré $|M\cap(0,T_{\tilde k})|=\tilde k+v$. Nech $r_1>r_2>\dots>r_p$ sú všetky také indexy $r\in\{\tilde k+1,\tilde k+2,\dots,n\}$, že $T_{\tilde k}+a_r\notin M$. Potom

$$n-1=|M|=|M\cap(0,T_{\tilde k})|+1+|M\cap(T_{\tilde k},s)|\geqq\tilde k+v+1+(n-\tilde k-p)$$

a odtiaľ $p\geqq v+2$. Platí

$$T_{\tilde k}+a_{r_1}-a_1<T_{\tilde k}+a_{r_1}-a_2<\dots<T_{\tilde k}+a_{r_1}-a_{\tilde k}<T_{\tilde k}+a_{r_2}-a_{\tilde k}<\dots<T_{\tilde k}+a_{r_{v+2}}-a_{\tilde k}$$

a všetkých $\tilde k+v+1$ čísel porovnaných v predošlých nerovnostiach leží v intervale $(0,T_{\tilde k})$. Preto existujú $r\in\{\tilde k+1,\tilde k+2,\dots,n\}$ a $q\in\{1,2,\dots,\tilde k\}$ také, že $T_{\tilde k}+a_r\notin M$ a $T_{\tilde k}+ + a_r-a_q\notin M$. Zoberme množinu skokových dĺžok $B=\{a_1,a_2,\dots,a_{\tilde k},a_r\}\setminus\{a_q\}$. Máme

$$\sum_{x\in B}x=T_{\tilde k}+a_r-a_q$$

a

$$T_{\tilde k}+a_r-a_q-\min(B)=T_{\tilde k}-a_q\leqq T_{\tilde k-1}.$$

Podľa (1), indukčného predpokladu a zovšeobecnenia spomenutého úplne na začiatku s hodnotou $\tilde k$ namiesto n sa koník dokáže dostať na číslo $T_{\tilde k}+a_r-a_q$ pomocou $\tilde k$ skokov s dĺžkami z množiny B bez pristátia na čísle z M. Odtiaľ vie skočiť na $T_{\tilde k}+a_r$, čím dosiahneme situáciu ako v Tvrdení 1 s hodnotou $m=\tilde k+1$. Tým je tvrdenie dokázané.

3. Stredoeurópska matematická olympiáda

V dňoch 24. – 29. 9. 2009 sa v poľskej Poznani uskutočnila 3. ročník Stredoeurópskej matematickej olympiády (MEMO). Zúčastnilo sa ho 59 žiakov stredných škôl z 10 krajín. Každá krajina mohla vyslať najviac 6 súťažiach. Slovensko reprezentovali

Ladislav Bačo, Gymnázium Poštová, Košice, 3. ročník,

Tomáš Belan, ŠPMNDaG Teplická, Bratislava, 3. ročník,

Ján Hozza, Gymnázium Jura Hronca, Bratislava, 2. ročník,

Nikola Hrdá, Gymnázium Jura Hronca, Bratislava, 3. ročník,

Natália Karásková, Gymnázium Grösslingová, Bratislava, 3. ročník,

Vincent Lami, Gymnázium J. Selyeho, Komárno, 3. ročník.

Vedúcim družstva SR bol Mgr. Peter Novotný, PhD. (odborný asistent na FMFI UK Bratislava), zástupcu vedúceho a pedagogický dozor vykonával Mgr. Martin Potočný.

Samotná súťaž mala dve časti. V súťaži jednotlivcov sme získali dve medaily – jednu zlatú, jednu striebornú, pričom zlatú medailu sa nám podarilo vybojovať na MEMO vôbec po prvý krát (na prvom ročníku v Rakúsku sme získali jednu striebornú a dve bronzové medaily, vlani v Českej republike sme získali dve bronzové medaily). V súťaži družstiev (t. j. v súťaži, v ktorej všetci naši šiesti študenti pracovali pri riešení úloh spoločne a odovzdávali spoločné riešenie) sme skončili na siedmom mieste. Najviac sa darilo družstvám z Poľska a Maďarska – Poľsko vyhralo súťaž družstiev a v súťaži jednotlivcov získalo dve zlaté medaily, Maďarsko bolo v súťaži družstiev druhé a v súťaži jednotlivcov získalo tri zlaté medaily.

Výsledky našich účastníkov v súťaži jednotlivcov sú uvedené v prvej tabuľke. Prehľad výsledkov všetkých krajín v súťaži jednotlivcov je v druhej tabuľke. Krajiny sú v nej zoradené podľa súčtu bodov celého družstva, podobne ako pri neoficiálnom poradí krajín na IMO. (Číslo v zátvorke pri Slovinsku znamená menší počet účastníkov ako 6.) Výsledky súťaže družstiev možno nájsť v tretej tabuľke.

Prehľad výsledkov:

Meno	I-1	I-2	I-3	I-4	Súčet	Cena
Ladislav Bačo	2	0	3	1	6	
Tomáš Belan	8	0	8	0	16	zlato
Ján Hozza	2	0	1	1	4	
Nikola Hrdá	0	1	0	0	1	
Natália Karásková	5	0	1	1	7	
Vincent Lami	0	5	8	1	14	striebro

Por.	Štát	Z	S	B	$\sum$	Por.	Štát	Z	S	B	$\sum$
1.	Maďarsko	3	1	2	100	6.	Česká republika		1	4	51
2.	Poľsko	2	3	1	86	7.	Slovensko	1	1		48
3.	Nemecko	1	2	2	75	8.	Rakúsko		1	2	39
4.	Chorvátsko		2	3	59	9.	Litva			1	17
5.	Slovinsko (5)		2	3	54	10.	Švajčiarsko			1	16

	štát	T-1	T-2	T-3	T-4	T-5	T-6	T-7	T-8	$\sum$
1.	Poľsko	8	6	8	8	8	8	6	8	60
2.	Maďarsko	6	5	8	8	8	4	8	8	55
3.	Nemecko	8	4	8	8	8	8	0	8	52
4.	Chorvátsko	8	5	8	5	8	2	8	8	52
5.	Česká rep.	8	6	8	8	8	3	1	0	42
6.	Slovinsko	8	2	8	0	8	0	2	8	36
7.	Rakúsko	8	3	4	3	2	0	8	6	34
	Slovensko	7	3	8	6	8	0	1	1	34
9.	Švajčiarsko	0	2	4	8	8	0	0	8	30
10.	Litva	8	2	4	0	5	0	1	4	24

Študenti boli počas celého pobytu ubytovaní v rekreačnej oblasti jazera Kiekrz, zatiaľ čo vedúci bývali v hoteli Inter Sport Sobieski v blízkosti areálu univerzity Adama Mickiewicza, na ktorej sa konala samotná súťaž, ale takisto aj stretnutia jury a bodovanie študentských riešení. Popri súťaži pripravili organizátori pre študentov vo voľnom čase súťaž v bowlingu a návštevu lanového parku.

Výsledky súťaže boli vyhlásené v historickej budove univerzity v centre Poznane. Na konci vyhlásenia (pred záverečným banketom) udelili organizátori slovo vedúcemu slovenského družstva, aby pozval účastníkov na ďalší ročník. Nasledujúci (4.) ročník MEMO sa totiž bude konať na Slovensku.

Peter Novotný

Zadania úloh MEMO

Súťaž jednotlivcov

Úloha I-1.
Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že

$$f(xf(y)) + f(f(x) + f(y)) = yf(x) + f(x + f(y))$$

pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$, pričom $\mathbb{R}$ označuje množinu všetkých reálnych čísel. (*Slovinsko*)

Úloha I-2.
Majme $n \geqq 3$ rôznych farieb. Nech $f(n)$ označuje najväčšie celé číslo s vlastnosťou, že

každá strana a každá uhlopriečka konvexného mnohouholníka majúceho $f(n)$ vrcholov sa dá ofarbiť jednou z n farieb nasledujúcim spôsobom:

- použité sú aspoň dve farby a
- každé tri vrcholy mnohouholníka určujú buď trojicu úsečiek rovnakej farby, alebo trojicu úsečiek troch rôznych farieb.

Dokážte, že $f(n) \leqq (n-1)^2$, a že rovnosť v tejto nerovnosti nastáva pre nekonečne veľa hodnôt n. (*Slovinsko*)

Úloha I-3.
Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník, pričom strany AB a CD nie sú rovnobežné a $|AB| = |CD|$. Stredy uhlopriečok AC a BD označme E a F. Priamka EF pretína úsečky AB, CD postupne v bodoch G, H. Dokážte, že $|\measuredangle AGH| = |\measuredangle DHG|$.
(*Maďarsko*)

Úloha I-4.
Nájdite všetky celé čísla $k \geqq 2$ také, že číslo $n^{n-1} - m^{m-1}$ nie je deliteľné číslom k pre žiadnu dvojicu (m, n) rôznych kladných celých čísel menších alebo rovných k.
(*Švajčiarsko*)

Súťaž družstiev

Úloha T-1.
Reálne čísla x, y, z spĺňajú podmienku $x^2 + y^2 + z^2 + 9 = 4(x + y + z)$. Dokážte, že

$$x^4 + y^4 + z^4 + 16(x^2 + y^2 + z^2) \geqq 8(x^3 + y^3 + z^3) + 27$$

a zistite, kedy v nerovnosti platí rovnosť. (*Slovensko, Ján Mazák*)

Úloha T-2.
Dané sú reálne čísla a, b, c, pričom ku každým dvom rovniciam spomedzi

$$x^2 + ax + b = 0, \quad x^2 + bx + c = 0, \quad x^2 + cx + a = 0$$

existuje práve jedno reálne číslo, ktoré je riešením obidvoch. Určte všetky možné hodnoty výrazu $a^2 + b^2 + c^2$. (*Slovensko, Pavel Novotný*)

Úloha T-3.
Na tabuli sú napísané čísla $0, 1, 2, \dots, n$, pričom $n \geqq 2$. V každom kroku zotrieme číslo, ktoré je aritmetickým priemerom dvoch rôznych čísel, ktoré ešte na tabuli zostali. Také kroky robíme až do momentu, keď už nemôžeme zotrieť žiadne číslo. Označme $g(n)$ najmenší možný počet čísel, ktoré môžu na konci zostať na tabuli. Určte $g(n)$ pre každé n. (*Poľsko*)

Úloha T-4.
Každé políčko hracej plochy rozmerov 2009×2009 ofarbíme jednou z n farieb (nemusíme použiť všetky farby). Hovoríme, že daná farba je *súvislá*, ak má na celej ploche takú

farbu iba jedno políčko, alebo ak pre ľubovoľné dve políčka tejto farby môže šachová dáma prejsť z jedného na druhé, pričom nikdy nezastaví na políčku inej farby (šachová dáma sa vie pohybovať vodorovne, zvisle a diagonálne). Nájdite najväčšie také n, že pre ľubovoľné ofarbenie hracej plochy je aspoň jedna *použitá* farba súvislá. (*Poľsko*)

Úloha T-5.
V rovnobežníku $ABCD$, v ktorom $|\measuredangle BAD| = 60°$, označme E priesečník uhlopriečok. Kružnica opísaná trojuholníku ACD pretína priamku BA v bode $K \neq A$, priamku BD v $P \neq D$ a priamku BC v $L \neq C$. Priamka EP pretína kružnicu opísanú trojuholníku CEL v bodoch E a M. Dokážte, že trojuholníky KLM a CAP sú zhodné. (*Slovinsko*)

Úloha T-6.
Daný je tetivový štvoruholník $ABCD$, pričom $|CD| = |DA|$. Body E, F ležia postupne na stranách AB, BC, pričom $|\measuredangle ADC| = 2|\measuredangle EDF|$. Úsečky DK a DM sú postupne výškou a ťažnicou trojuholníka DEF. Bod L je obrazom bodu K v stredovej súmernosti podľa bodu M. Dokážte, že priamky DM a BL sú rovnobežné. (*Poľsko*)

Úloha T-7.
Nájdite všetky dvojice celých čísel (m, n), ktoré sú riešením rovnice

$$(m+n)^4 = m^2n^2 + m^2 + n^2 + 6mn.$$

(*Chorvátsko*)

Úloha T-8.
Nájdite všetky riešenia rovnice

$$2^x + 2009 = 3^y 5^z$$

v obore celých nezáporných čísel. (*Litva*)

Riešenia úloh MEMO

Úloha I-1.
Konštantná funkcia $f(x) = 0$ zrejme vyhovuje. Predpokladajme ďalej, že existuje $a \in \mathbb{R}$ také, že $f(a) = 0$. Dokážeme, že potom je f prostá.

Nech $f(y_1) = f(y_2)$ pre nejaké $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Po postupnom dosadení $y = y_1$, $y = y_2$ do zadanej rovnice a odčítaní vzniknutých rovností dostaneme $y_1 f(x) = y_2 f(x)$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$. Po zvolení $x = a$ môžeme $f(a)$ vykrátiť, teda $y_1 = y_2$ a f je naozaj prostá.

Dosadením $x = 0$, $y = 1$ do pôvodnej rovnice získame

$$f(0) + f(f(0) + f(1)) = f(0) + f(f(1)),$$

teda $f(f(0) + f(1)) = f(f(1))$ a vzhľadom na prostosť f máme $f(0) + f(1) = f(1)$, odkiaľ $f(0) = 0$.

Zvolením $y = 0$ následne zo zadanej rovnice dostaneme $f(f(x)) = f(x)$, z čoho opäť vďaka prostosti vyplýva $f(x) = x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$. Aj táto funkcia vyhovuje, o čom sa dosadením ľahko presvedčíme. Jedinými riešeniami sú teda funkcie $f(x) = 0$ a $f(x) = x$.

Úloha I-2.
V úlohe ide o mnohouholník s ofarbenými všetkými uhlopriečkami aj stranami, môžeme teda o ňom uvažovať ako o kompletnom grafe. Farbíme všetky hrany s použitím n farieb tak, že každý trojuholník resp. kompletný trojbodový podgraf, tzv. 3-klika, bude buď jednofarebný alebo trojfarebný. Celý graf ale nemôže byť jednofarebný.

Vzácny čitateľ isto rýchlo pochopí, že podmienka pre trojuholníky je v skutočnosti ekvivalentná s nasledovnou podmienkou. Graf pozostáva výlučne z kompletných jednofarebných podgrafov, tzv. klík, pričom dve kliky jednej farby sú vrcholovo disjunktné. Otázne už je len ako veľké môžu takéto kliky byť a koľko ich bude najviac z jednej farby.

Ak by jedna z týchto jednofarebných klík (povedzme modrá) mala n alebo viac vrcholov, musel by existovať vrchol v mimo nej, ktorý by bol s každým vrcholom modrej kliky spojený inou ako modrou farbou. Všetky trojuholníky tvorené dvoma vrcholmi z modrej kliky a vrcholom v obsahujú jednu modrú a jednu inú hranu, sú teda trojfarebné. Čiže n hrán spájajúcich vrchol v s modrou klikou by muselo byť navzájom rôznofarebných, čo nie je možné, lebo okrem modrej farby máme k dispozícii už len $n-1$ farieb. Preto každá jednofarebná klika má maximálne $n-1$ vrcholov.

Jeden vrchol leží v maximálne n rôznych klikách (rôznej farby) a každá z nich má najviac $n-2$ ďalších vrcholov. Tento vrchol má teda najviac $n(n-2)$ susedov. V grafe je teda nanajvýš $f(n) = n(n-2) + 1 = (n-1)^2$ vrcholov.

V druhej časti úlohy sa budeme zaoberať konštrukciou n-farebného ofarbenia hrán kompletného grafu s $(n-1)^2$ vrcholmi pre čo najviac rôznych hodnôt čísla n. Všimnime si, že dve kliky rôznych farieb majú v tomto maximálnom prípade práve jeden spoločný vrchol a dve kliky rovnakej farby ani jeden. Natíska sa tu idea nakresliť si všetky body jednej kliky na priamku jednej farby. Body kliky inej farby budú na priamke nielen inej farby ale aj iného smeru tak, aby priesečník týchto dvoch priamok reprezentoval spoločný vrchol príslušných dvoch klík. Dve kliky rovnakej farby by sa dali reprezentovať rovnobežkami.

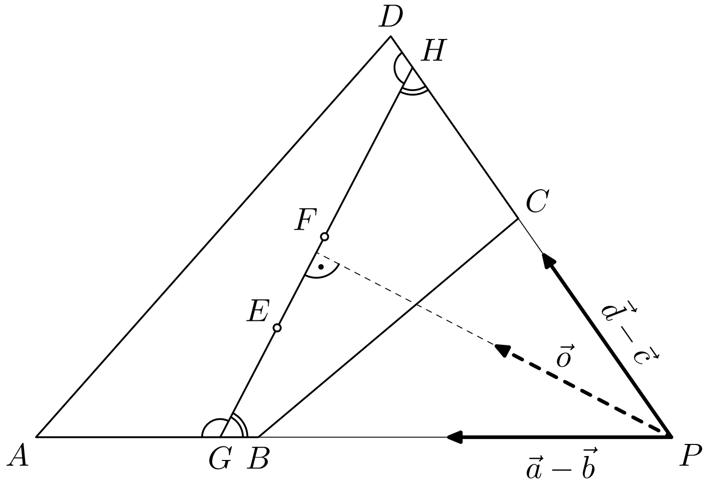
Skutočnosť, že vrcholov je dokopy $(n-1)^2$, nám našepkáva umiestniť ich do štvorca (vrcholy teda budeme reprezentovať súradnicami (i, j), pričom $i, j \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$) a pospájať ich pomocou $n-1$ vodorovných priamok prvej farby. Potom ich pospájame $n-1$ zvislými priamkami druhej farby. Prvá priamka tretej farby pôjde po hlavnej diagonále bodmi tvaru (k, k) kde $k \in \{0, \ldots, n-2\}$. Ostatné budú rovnobežne s ňou spájať všetky body tvaru $((a+k) \bmod (n-1), k)$. Budú to vlastne všetky priamky so smernicou 1, ktoré keď „vybehnú“ vpravo zo štvorca, vrátia sa v príslušnej výške zľava. Dá sa to predstaviť aj tak, že by sme pravý okraj štvorca (s prvou súradnicou $n-1$) stotožnili s ľavým (s prvou súradnicou 0). Vznikol by tak valec.

Podobne smernica všetkých $n-1$ priamok štvrtej farby bude 2 a princíp kongruencie sa tu bude uplatňovať nielen v pravo-ľavom smere ale aj zdola nahor. Dalo by sa to predstaviť tak, že v spomínanom valci navyše stotožníme spodný okraj s horným (vznikol by tzv. torus). Podobne smernice ostatných $(n-1)$-tíc priamok budú vždy 3, 4, …, $(n-2)$.

Ak $n-1$ je prvočíslo, dá sa poľahky ukázať, že táto konštrukcia zaručí, že prienik dvoch klík rôznej farby bude práve jeden vrchol. Keďže prvočísel je nekonečne veľa, máme nekonečne veľa rôznych n, pre ktoré $f(n)=(n-1)^2$. Tým je úloha vyriešená.

Poznámka. Skúste sami, či by ste vedeli vymyslieť konštrukciu, ktorá by niečo podobné zaručovala pre širšiu množinu čísel ako je množina tých n, že $n-1$ je prvočíslo.

Úloha I-3.
Zvoľme za počiatok súradnicovej sústavy priesečník P priamok AB a CD. Polohové vektory bodov A, B, C, D označíme postupne $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$. Potom smerové vektory priamok



Obr. 48

AB, CD sú $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{d}-\vec{c}$ a keďže podľa zadania majú rovnakú veľkosť, smerový vektor osi uhla nimi tvoreného je

$$\vec{o}=\frac{(\vec{a}-\vec{b})+(\vec{d}-\vec{c})}{2}.$$

Stredy E, F uhlopriečok AC, BD majú polohové vektory $\vec{e}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c})$, $\vec{f}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{d})$. Z rovnosti $|AB|=|CD|$ vyplýva

$$0=(\vec{a}-\vec{b})^2-(\vec{d}-\vec{c})^2=\Big((\vec{a}-\vec{b})-(\vec{d}-\vec{c})\Big)\cdot\Big((\vec{a}-\vec{b})+(\vec{d}-\vec{c})\Big)=$$
$$=4\left(\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}-\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}\right)\cdot\frac{(\vec{a}-\vec{b})+(\vec{d}-\vec{c})}{2}=4(\vec{e}-\vec{f}\,)\cdot\vec{o}$$

(všetky uvedené násobenia a druhé mocniny vektorov sú *skalárne* súčiny). Teda os uhla zovretého priamkami AB a CD je kolmá na priamku EF a trojuholník GHP je rovnoramenný so základňou GH (os uhla je totožná s výškou jedine v rovnoramennom trojuholníku, obr. 48). Keďže body A a D ležia v tej istej polrovine určenej priamkou

GH, uhly AGH a DHG sú zhodné (buď sú oba vnútornými uhlami pri základni rovnoramenného trojuholníka, alebo sú ich doplnkami do $180°$).

Úloha I-4.
Podmienka v zadaní je ekvivalentná s injektívnosťou funkcie

$$f(m) = m^{m-1} \bmod k$$

na obore zvyškových tried po delení číslom k.

Skúsime za k dosadiť najskôr malé hodnoty a všimneme si, že pre $k = 2$ a $k = 3$ je táto funkcia injektívnou. Navyše pre každé k platí $f(1) = 1$ a $f(k) = 0$. Pre párne k väčšie ako 2 dostávame

$$f(k-1) \equiv (k-1)^{k-2} \equiv 1 = f(1) \pmod{k},$$

teda funkcia f nie je injektívna. Ak sa v rozklade čísla k na súčin prvočísel nachádza niektoré prvočíslo, nazvime ho p, viac ako raz, potom

$$f(k/p) = 0 = f(k).$$

Ďalšie vyhovujúce k môžu teda mať v rozklade len rôzne nepárne prvočísla. Uvažujme teraz vyhovujúce nepárne k väčšie ako 4. Hodnoty $f(k)$, $f(k-2)$, $\dots$, $f(3)$, $f(1)$ a $f(4) \equiv \equiv 4^3 = 8^2 \pmod{k}$ sú všetko zvyšky druhých mocnín prirodzeného čísla po delení číslom k a je ich spolu $\frac{1}{2}(k+1)+1$. Ale rôznych kvadratických zvyškov je nanajvýš $\frac{1}{2}(k+1)$, lebo $a^2 \equiv (k-a)^2 \pmod{k}$. Čiže aspoň dve zo spomenutých hodnôt funkcie f budú rovnaké a funkcia nebude injektívna. Okrem hodnôt 2 a 3 už ďalšie vyhovujúce k neexistuje.

Úloha T-1.
Danú podmienku možno prepísať na tvar

$$x(x-4) + y(y-4) + z(z-4) = -9$$

a skúmanú nerovnosť zase na nápadne podobný tvar

$$x^2(x-4)^2 + y^2(y-4)^2 + z^2(z-4)^2 \geqq 27.$$

Teraz už len vhodne použijeme Cauchyho nerovnosť pre dvojicu vektorov $(1,1,1)$ a $(x(x-4), y(y-4), z(z-4))$:

$$\begin{aligned} 81 = (-9)^2 = \bigl(1 \cdot x(x-4) + 1 \cdot y(y-4) + 1 \cdot z(z-4)\bigr)^2 \leqq \\ \leqq (1^2+1^2+1^2)\bigl(x^2(x-4)^2 + y^2(y-4)^2 + z^2(z-4)^2\bigr). \end{aligned}$$

Rovnosť v Cauchyho nerovnosti nastáva práve vtedy, keď

$$x(x-4) = y(y-4) = z(z-4) = -3.$$

Riešením je 8 usporiadaných trojíc

$$(1,1,1),\ (1,1,3),\ (1,3,1),\ (3,1,1),\ (1,3,3),\ (3,1,3),\ (3,3,1),\ (3,3,3).$$

Iné riešenie. S využitím väzby $x^2+y^2+z^2+9=4(x+y+z)$ možno zadanú nerovnosť ekvivalentne upraviť na tvar

$$(x-2)^4+(y-2)^4+(z-2)^4 \geqq 3,$$

zatiaľ čo samotnú väzbu priamo prepíšeme na $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=3$. Pre trojicu reálnych čísel u, v, w spĺňajúcich $u^2+v^2+w^2=3$ však platí

$$\begin{aligned}(u^2-1)^2+(v^2-1)^2+(w^2-1)^2 &\geqq 0,\\ u^4+v^4+w^4+3 &\geqq 2(u^2+v^2+w^2)=6,\\ u^4+v^4+w^4 &\geqq 3,\end{aligned}$$

čo je po substitúcii $u=x-2$, $v=y-2$, $w=z-2$ ekvivalentné s dokazovaným tvrdením. Rovnosť zrejme nastáva, keď $u^2=v^2=w^2=1$, z čoho dostaneme rovnaké trojice ako v prvom riešení.

Úloha T-2.

Vyšetríme dva prípady.

Ak všetky tri rovnice majú jeden spoločný koreň x_1, tak

$$x_1^2+ax_1+b=0, \tag{1}$$
$$x_1^2+bx_1+c=0, \tag{2}$$
$$x_1^2+cx_1+a=0. \tag{3}$$

Potom kombináciou rovností $((1)-(2))+(x_1-1)((1)-(3))$ a úpravou dostaneme

$$(x_1^2-x_1+1)(a-c)=0,$$

čo vzhľadom na nenulovosť kvadratického výrazu $x_1^2-x_1+1$ (so záporným diskriminantom) znamená $a=c$. Pomocou cyklickej zámeny dostaneme $c=b=a$, a aby mali každé dve z troch totožných kvadratických rovníc x^2+ax+a práve jedno spoločné riešenie, musia mať dvojnásobný koreň. Odtiaľ $a^2-4a=0$, teda $a=b=c=0$ alebo $a=b=c=4$, z čoho $a^2+b^2+c^2=0$, resp. 48.

Druhý prípad, kedy jedna rovnica má korene x_1, x_2, druhá rovnica má korene x_2, x_3 a tretia x_1, x_3 (pričom všetky tri korene sú rôzne, inak by sme mali predošlý prípad) sa vyšetruje už o niečo komplikovanejšie. Treba sa prirodzene zaoberať koeficientmi polynómu

$$(x^2+ax+b)(x^2+bx+c)(x^2+cx+a), \tag{4}$$

o ktorom vieme, že má tri dvojnásobné nulové body a teda tvar

$$(x^3 - px^2 + qx - r)^2, \tag{5}$$

pričom navyše z Viètovych vzťahov pre pôvodné polynómy vyplýva

$$2p = 2(x_1 + x_2 + x_3) = -(a + b + c) = -(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) = -q, \tag{6}$$

Ak označíme $a + b + c = e$, $ab + bc + ca = f$, $abc = g$, tak roznásobením totožných polynómov (4) a (5) a porovnaním ich koeficientov pri mocninách x^5, x^4, x^3 a x^0 dostaneme postupne

$$e = -2p, \qquad e + f = p^2 - 4p, \qquad e^2 - f + g = 4p^2 - 2r, \qquad g = r^2. \tag{7}$$

Koeficienty pri x^2 a x síce nie sú symetrické v premenných a, b, c (a nedajú sa teda vyjadriť pomocou e, f, g), ale ich súčet symetrický je, teda porovnaním po úprave dostaneme

$$f + ef - 3g = 4p^2 + 6pr. \tag{8}$$

Spojením (6), (7) a (8) dostávame sústavu šiestich rovníc o šiestich neznámych p, q, r, e, f, g. Tú môžeme riešiť viacerými rôznymi spôsobmi. Napríklad z prvých dvoch rovníc máme $q = -2p$, $e = -2p$, teda po dosadení do tretej získame $f = p^2 - 2p$. Z piatej rovnice máme priamo $g = r^2$, teda za všetky premenné q, e, f, g vieme do štvrtej a šiestej rovnice dosadiť výrazy zapísané len premennými p, r. Po úprave dostaneme rovnice

$$(p - 1)^2 = (r + 1)^2, \qquad -2p^3 + p^2 - 2p - 6pr - 3r^2 = 0.$$

Ak $p-1 = r+1$, dosadením $r = p-2$ do poslednej rovnice dostaneme rovnicu $(p+6)(p-1)^2 = 0$. Ak naopak $p-1 = -(r+1)$, dosadením $r = -p$ dostaneme $p(p-1)^2 = 0$. Ak $p = -6$, dostaneme $r = -8$, $q = 12$, teda polynóm v (5) by bol rovný $(x + 2)^6$ a nemal by tri *rôzne* korene. Rovnako nevyhovuje $p = 0$, kedy by uvedený polynóm vyšiel x^6. Jedinou možnosťou je $p = 1$, odkiaľ $r = -1$, $q = -2$, $e = -2$, $f = -1$, $g = 1$ a polynóm v (5) má tvar

$$(x^3 - x^2 - 2x + 1)^2. \tag{9}$$

Ľahko možno nahliadnuť, že tento polynóm má tri rôzne reálne dvojnásobné korene (ležiace postupne vnútri intervalov $(-2, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$). Už len dopočítame $a^2 + b^2 + c^2 = e^2 - 2f = 6$.

Odpoveď. Uvedený výraz môže nadobúdať hodnoty 0, 6 a 48.

Poznámka. Pre správne riešenie treba ešte zdôvodniť, že k trojici koreňov (x_1, x_2, x_3) polynómu (9) skutočne prislúchajú tri kvadratické rovnice s koeficientmi ako v zadaní. Tento technický krok vynecháme.

Úloha T-3.
Krajné hodnoty 0 a n sa nedajú nijako zotrieť a hravo vyskúšame, že

$$g(1) = g(2) = 2, \qquad g(3) = 3, \qquad g(4) = 2.$$

Technika zotierania použitá pre $n = 4$ sa dá rozšíriť na všetky $n = 2^a$, preto tiež $g(2^a) = 2$ pre všetky prirodzené čísla a.

Majme teraz n, ktoré nie je mocninou dvojky a teda $2^a < n < 2^{a+1}$ pre nejaké prirodzené a. Predstavme si, že by na konci ostali tiež len dve čísla. Pri spätnej rekonštrukcii (t. j. pridávaním aritmetického priemeru niektorých dvoch čísel na tabuli) vieme v ľubovoľnom kroku skonštruovať iba číslo tvaru $tn/2^k$, pričom t a $k \geqq 1$ sú prirodzené čísla. Teda nikdy by takto nevzniklo číslo 1 (keď n nie je mocninou dvoch, ani žiadny jeho násobok ňou nemôže byť), čo je spor[6].

Naopak, existuje postup zotierania najskôr čísel $n-1$, $n-2$ a tak ďalej až po 2^a+1 (číslo $n-i$ je aritmetickým priemerom čísel n a $n-2i$), na ktorý sa dá nadviazať skôr spomenutou technikou zotierania všetkých čísel medzi 0 a 2^a. Na tabuli potom zostanú len tri čísla 0, 2^a, n. Preto ak n nie je mocninou dvojky, tak $g(n) = 3$.

Úloha T-4.

Predvedieme jeden príklad ofarbenia plochy $k \times k$ (pre veľké nepárne k) troma nesúvislými farbami 1, 2, 3. Do všetkých políčok napíšeme pre začiatok 0. Vyberieme si dva susediace stĺpce, napríklad druhý a tretí. Do políčka $(2,k)$ pripočítame 1, do políčka $(3,1)$ zase 2. Teraz do všetkých políčok dosiahnuteľných ťahom dámy z políčka $(2,k)$, okrem tohto políčka samotného, pripočítame 2. Podobne do všetkých políčok dosiahnuteľných ťahom dámy z políčka $(3,1)$, okrem tohto políčka samotného, pripočítame 1. V tabuľke je znázornená situácia pre $k = 9$.

2	**1**	3	2	2	2	2	2	2
2	2	3						
	2	1	2					1
	2	1		2			1	
	2	1			2	1		
	2	1			1	2		
1	2	1		1			2	
	3	1	1					2
1	3	**2**	1	1	1	1	1	1

Všimnime si, že pre nepárne k majú políčka $(2,k)$ a $(3,1)$ rôzne pôvodné „šachovnicové“ farby. Preto len 4 políčka vo vybraných dvoch stĺpcoch majú farbu $1+2=3$. Sú to $(2,1)$, $(2,2)$ a $(3,k)$, $(3,k-1)$. Pre dostatočne veľké nepárne k sú tieto dva súvislé páry vzájomne nesúvislé. Do políčok, kde ešte stále ostala 0, môžeme teraz vpísať ľubovoľné z čísel 1 a 2. Políčka $(2,k)$ a $(3,1)$ ostanú „izolované“ od ostatných políčok svojej farby. Táto technika ofarbovania troma farbami sa dokonca dá poľahky rozšíriť na párne dostatočne veľké k zvolením „izolovaných“ políčok $(2,k)$ a $(4,1)$. Preto n je menšie ako 3.

V druhej časti riešenia naznačíme dôkaz, že pre každú plochu $k \times m$ je v ľubovoľnom jej dvojfarebnom ofarbení aspoň jedna z farieb súvislá. Použijeme matematickú indukciu vzhľadom na súčet rozmerov $k+m$. Prvý indukčný krok je triviálny.

[6] Formálne možno použiť na dôkaz matematickú indukciu.

V druhom kroku predpokladajme, že tvrdenie je pravdivé pre ľubovoľnú plochu $k' \times m'$ spĺňajúcu $k' + m' < k + m$. Uvažujme ľubovoľné ofarbenie plochy S s rozmermi $k \times m$ dvoma farbami, napr. červenou a modrou. Označme S_1, S_2, resp. S_3 plochy, ktoré dostaneme z S odstránením prvého stĺpca, posledného stĺpca, resp. posledného riadka. Podľa indukčného predpokladu a Dirichletovho princípu niektoré dve plochy S_i, S_j majú súvislú rovnakú farbu, napr. červenú. Označme $A_0 = S_i \cap S_j$, $A_1 = S_j \setminus S_i$ a $A_2 = S_i \setminus S_j$.

Ľahko možno dokázať pravdivosť nasledujúcich troch pozorovaní:

(1) Ak celá množina A_0 je jednofarebná, napr. modrá, tak modrá farba je súvislá v celej S.

(2) Ak v A_0 existuje červené políčko, tak červená je súvislá v celej množine $S_i \cup S_j$.

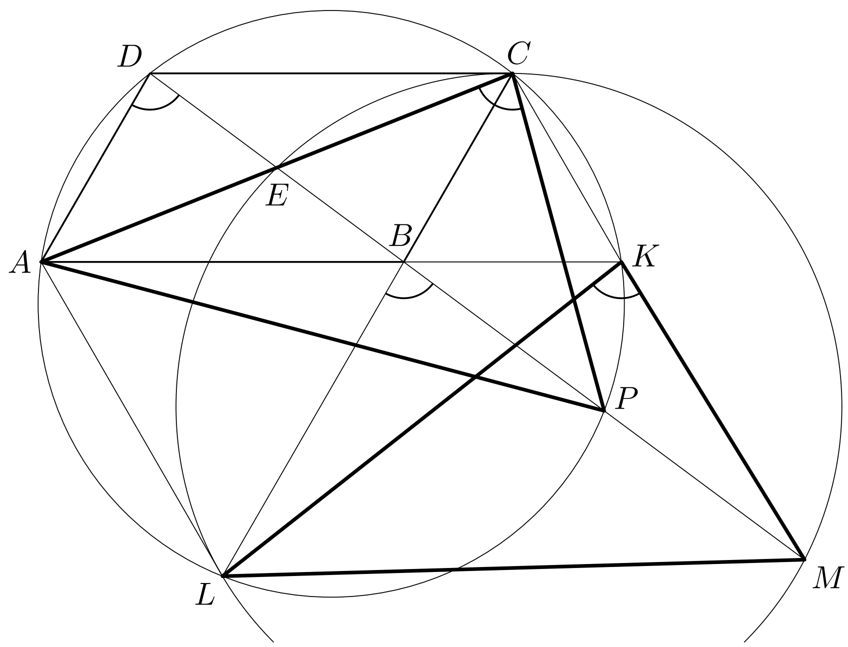
(3) Ak množina $A_1 \cup A_2$ je jednofarebná, napr. modrá, tak modrá farba je súvislá v celej S.

Predpokladajme sporom, že v S nie je ani jedna farba súvislá. Potom podľa (1) existuje v A_0 červené políčko. Môžu nastať dve možnosti. Ak $S = S_i \cup S_j$ (t. j. ak $\{i, j\} = \{1, 2\}$), tak podľa (2) je v S súvislá červená farba, čo je spor. V opačnom prípade tvorí množina $S_i \cup S_j$ celú S okrem jedného rohového políčka. Jedinou možnosťou, ako nájsť nesúvislé červené políčka v S, je ofarbiť červenou uvedené rohové políčko a celý zvyšok stĺpca a riadka obsahujúceho toto políčko ofarbiť modrou. Potom je však podľa (5) súvislá modrá farba, čo je opäť spor.

Odpoveď. Najväčšie hľadané číslo je $n = 2$.

Úloha T-5.

Ak vezmeme bod F na polpriamke AB taký, že $|BC| = |BF| = |FC|$, dostaneme rovnoramenný lichobežník, ktorého opísaná kružnica je zároveň opísanou kružnicou trojuholníka ADC. Preto tento bod F bude zhodný s bodom K. Analogicky ak vezmeme



Obr. 49

bod G na polpriamke BC taký, že $|GB| = |GA| = |BA|$, zistíme, že bude zhodný s bodom L. Preto $|AC| = |KL|$, keďže sú symetrické podľa osi uhla CBK (alebo uhla ABL).

Z tetivového štvoruholníka $APCD$ máme

$$|\measuredangle APC| = 180^\circ - |\measuredangle ADC| = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Uvažujme zobrazenie $\mathcal{Z}$, ktoré vznikne zložením kružnicovej inverzie podľa kružnice so stredom B a polomerom $\sqrt{|BA| \cdot |BK|} = \sqrt{|BL| \cdot |BC|}$ a stredovej súmernosti so stredom B. V tomto zobrazení sa body K, L zobrazia postupne na A, C. Navyše z mocností bodu B máme $|BA| \cdot |BK| = |BD| \cdot |BP|$ a tiež $|BL| \cdot |BC| = |BE| \cdot |BM|$, čiže $\mathcal{Z}(D) = P$ a $\mathcal{Z}(E) = M$. Keďže obrazy bodov A, C, E sú K, L, M a z vlastností inverzie obraz každej priamky neprechádzajúcej cez B je kružnica prechádzajúca cez B, štvoruholník $BLMK$ je tetivový. Preto

$$|\measuredangle KML| = 180^\circ - |\measuredangle KBL| = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Ďalej máme (obr. 49)

$$|\measuredangle LKM| = |\measuredangle LBM| = |\measuredangle DBC| = |\measuredangle ADP| = |\measuredangle ACP|.$$

Preto trojuholníky APC, LMK sú podobné a vzhľadom na fakt $|AC| = |LK|$ dokázaný v úvode musia byť zhodné.

Úloha T-6.

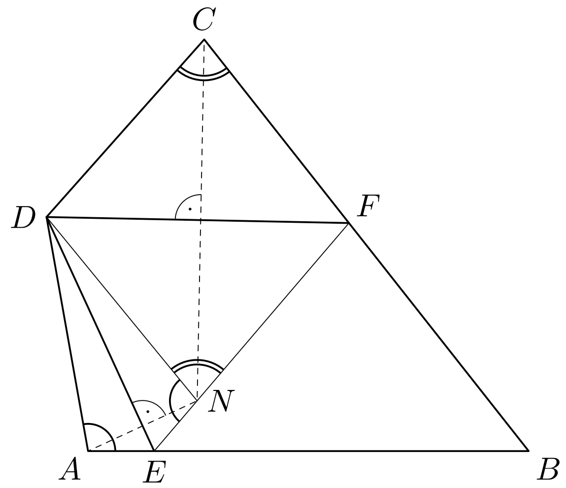
Ak N je obraz bodu A v osovej súmernosti podľa DE, potom

$$|\measuredangle CDN| = |\measuredangle CDA| - |\measuredangle ADN| = 2|\measuredangle EDF| - 2|\measuredangle EDN| = 2|\measuredangle FDN|$$

a $|ND| = |AD| = |CD|$. Takže N je zároveň obrazom bodu C v osovej súmernosti podľa DF. Teda trojuholníky ADE a NDE sú zhodné, rovnako aj trojuholníky CDF a NDF. Preto

$$|\measuredangle END| + |\measuredangle DNF| = |\measuredangle EAD| + |\measuredangle DCF| = |\measuredangle BAD| + |\measuredangle DCB| = 180^\circ,$$

čiže N leží na úsečke EF (obr. 50).

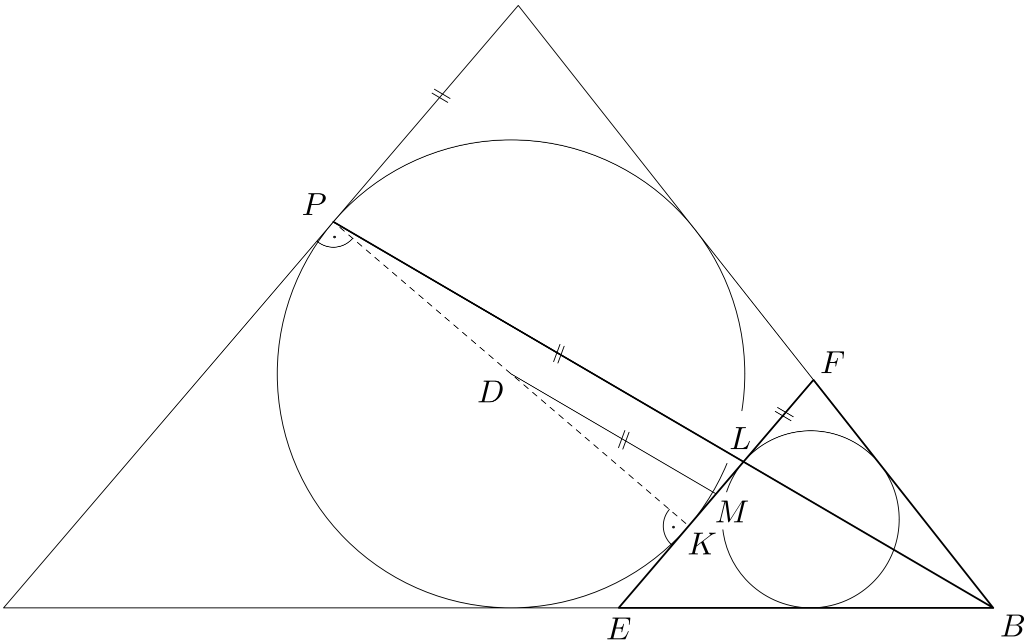


Obr. 50

Použime označenie $d(X, YZ)$ pre vzdialenosť bodu X od priamky YZ. Potom

$$d(D, BE) = d(D, AE) = d(D, NE) = d(D, FN) = d(D, FC) = d(D, FB),$$

pričom druhá a predposledná rovnosť sú dôsledkom spomenutých zhodností trojuholníkov. Všimnime si, že bod D leží v rovnakej vzdialenosti od troch priamok obsahujúcich strany trojuholníka BEF a je teda stredom pripísanej kružnice trojuholníka BEF. Preto pripísaná kružnica sa dotýka úsečky EF v bode K.



Obr. 51

Z vlastností vpísanej a pripísanej kružnice vyplýva, že vpísaná kružnica trojuholníka BEF sa dotýka úsečky EF v bode L (stačí si spomenúť na vyjadrenie dĺžok úsekov od vrcholov trojuholníka k dotykovým bodom vpísanej, resp. pripísanej kružnice). Nech P je obraz bodu K v stredovej súmernosti so stredom v bode D (obr. 51). Rovnoľahlosť so stredom v bode B, ktorá zobrazí vpísanú kružnicu trojuholníka BEF na jeho pripísanú kružnicu, zobrazí L na P, a teda body B, L, P ležia na jednej priamke. Teraz už dokazované tvrdenie vyplýva z rovnobežnosti DM a PL, ktorá je triviálnym dôsledkom rovnosti pomerov $|KL| : |KM| = |KP| : |DP| = 2$.

Úloha T-7.
Ak je dvojica (m, n) riešením, sú ním aj dvojice (n, m), $(-m, -n)$ a $(-n, -m)$. Pre $n = 0$ dostaneme rovnicu $m^4 = m^2$ s riešeniami $m \in \{-1, 0, 1\}$. Zo symetrickosti riešenia vyplýva, že riešením je päť dvojíc

$$(n, m) \in \{(0, -1), (-1, 0), (0, 0), (0, 1), (1, 0)\}.$$

Treba si uvedomiť, že ak by boli m aj n kladné, ľavá strana by bola rádovo väčšia ako pravá, čo dáva silné tušenie neexistencie takéhoto riešenia. Formálny dôkaz správnosti tohto tušenia môže vyzerať napríklad takto: Bez ujmy na všeobecnosti nech $0 < n \leqq m$, potom na základe rovnice platia aj nerovnosti

$$\begin{aligned} (m+1)^4 \leqq (m+n)^4 = m^2n^2 + (m+n)^2 + 4mn &\leqq m^4 + 8m^2, \\ 4m^3 + 6m^2 + 4m + 1 &\leqq 8m^2, \\ 2m^2(2m-1) &< 0. \end{aligned}$$

Pre ľubovoľné prirodzené číslo m je toto spor, preto riešením nie je žiadna dvojica kladných čísel. Navyše analogicky ani žiadna dvojica záporných čísel.

Preto bez ujmy na všeobecnosti nech $n = -k$ je záporné a $0 < k \leqq m$. Potom

$$\begin{aligned} (m-k)^4 &= m^2k^2 + m^2 + k^2 - 6mk, \\ m^4 - 4m^3k + 5m^2k^2 - 4mk^3 + k^4 &= m^2 - 6mk + k^2, \\ (m^2 - mk + k^2)(m^2 - 3mk + k^2) &= m^2 - 6mk + k^2, \\ (m^2 - mk + k^2)(m^2 - 3mk + k^2 - 1) &= -5mk \\ \text{a zároveň} \qquad (m^2 - mk + k^2 - 1)(m^2 - 3mk + k^2) &= -3mk. \end{aligned}$$

Odtiaľ

$$(m^2 - mk + k^2) \mid 5mk \qquad \text{a} \qquad (m^2 - 3mk + k^2) \mid 3mk.$$

Nech $\mathrm{nsd}(m,k) = d$ a $k = da$, $m = db$ (pričom $a, b > 0$), potom

$$(b^2 - ba + a^2) \mid 5ba \qquad \text{a} \qquad (b^2 - 3ba + a^2) \mid 3ba.$$

Ale

$$\mathrm{nsd}(b^2 - ba + a^2, b) = 1 \qquad \text{a} \qquad \mathrm{nsd}(b^2 - ba + a^2, a) = 1,$$

čo je ekvivalentné s $\mathrm{nsd}(b^2 - ba + a^2, ba) = 1$, preto

$$b^2 - ba + a^2 \in \{1, 5\}.$$

Ak $b^2 - ba + a^2 = 1$ a pozrieme sa na to ako na kvadratickú rovnicu s neznámou a, diskriminant $4 - 3b^2$ je štvorcom prirodzeného čísla len pre $b = 1$. Odtiaľ sa poľahky dopočítajú riešenia

$$(n, m) \in \{(2, -2), (-2, 2)\}.$$

Ak $b^2 - ba + a^2 = 5$, diskriminant $20 - 3b^2$ nie je štvorcom prirodzeného čísla nikdy. Celočíselným riešením rovnice je teda sedmica už spomenutých dvojíc.

Poznámka. Druhú „vetvu“ s výrazom $3mk$ na pravej strane sme v riešení nepotrebovali. Ak by sme ju použili v analogickom postupe, museli by sme pre výraz $b^2 - 3ba + a^2$ preverovať až štyri hodnoty ± 1, ± 3. Pri výraze $b^2 - ba + a^2$ sme hodnoty -1, -5 preverovať nemuseli, lebo $b^2 + a^2 \geqq 2ab$, t. j. $b^2 - ab + a^2 > 0$. Okrem toho, diskriminant by pre niektorú rovnicu $b^2 - 3ba + a^2 = \pm 1$, resp. ± 3, mohol byť štvorcom pre nekonečne veľa hodnôt b.

Inou možnosťou je skombinovať obe vetvy a riešiť sústavy $b^2 - ba + a^2 = p$, $b^2 - 3ba + a^2 = q$ pre $p \in \{1, 5\}$, $q \in \{\pm 1, \pm 3\}$. Tým sa možno vyhnúť úvahám o diskriminantoch, keďže každú zo sústav je ľahké v obore celých čísel vyriešiť (napr. po odčítaní rovníc priamo dostaneme hodnotu súčinu ab).

Úloha T-8.
Ľahko nahliadneme, že $x \geqq 2$ a $y + z \geqq 1$. Uvažujúc nad danou rovnicou v zvyškových triedach dostaneme $1 \equiv (-1)^y \pmod 4$, preto y musí byť párne. Podobne ak $y > 0$, tak $(-1)^x + 2 \equiv 0 \pmod 3$, čiže x je párne. Ak $z > 0$, máme $2^x - 1 \equiv 0 \pmod 5$, čo pre x znamená deliteľnosť štyrmi. Ale aspoň jedno z dvojice y, z je kladné, a teda x musí byť tak či onak párne. Nech $x = 2t$ a $y = 2u$. Potom

$$\begin{aligned} 2^x + 2009 &\equiv 2^x \in \{1, 2, 4\} \pmod 7, \\ 3^y 5^z &\equiv 9^u (-2)^z \in \{3, 5, 6\} \pmod 7 \quad \text{pre nepárne } z. \end{aligned}$$

Preto z je párne a $z = 2v$. Rovnicu teraz možno prepísať na tvar

$$2009 = (3^u 5^v - 2^t)(3^u 5^v + 2^t).$$

Existuje však len jedna dvojica čísel, ktorých súčin je 2009 a ich rozdiel je mocninou dvoch (t. j. 2^{t+1}): 41 a 49. Z toho už poľahky dopočítame jediné riešenie

$$x = 4, \quad y = 4, \quad z = 2.$$

Korešpondenčný seminár SKMO

Korešpondenčný seminár Slovenskej komisie Matematickej olympiády (KS SKMO) vznikol pred vyše 30 rokmi ako jeden z prvých matematických korešpondenčných seminárov (vtedy ešte ako československý seminár) preto, aby bolo umožnené venovať individuálnu starostlivosť aj tým študentom, ktorí nenavštevovali triedy so zameraním na matematiku. Úlohy tohto seminára svojou náročnosťou prevyšujú akúkoľvek inú matematickú súťaž na Slovensku pre stredoškolákov, seminár je preto dôležitou súčasťou prípravy aj na medzinárodnú matematickú olympiádu.

Počas svojej existencie prešiel seminár viacerými zmenami. Po jednoročnej prestávke v 52. ročníku MO jeho organizovanie prebrali vedúci korešpondenčného seminára KMS. Odvtedy je KS SKMO jeho kategóriou GAMA a KMS je oficiálnym seminárom SKMO.

KS SKMO má každý rok šesť sérií – tri zimné prebiehajúce od septembra do decembra a tri letné prebiehajúce od februára do mája. V každej sérii je zadaných 5 úloh.

Celkové poradie KS SKMO 2008/2009

1. *Josef Tkadlec*, 4. ročník, Gymnázium J. Keplera, Praha, 172 bodov
2. *Peter Csiba*, 4. ročník, ŠpMNDaG Skalická, Bratislava, 162 bodov
3. *Filip Sládek*, 3. ročník, Gymnázium A. Bernoláka, Námestovo, 106 bodov
4. *Jakub Konečný*, 3. ročník, Gymnázium Grösslingová, Bratislava, 86 bodov

Uvádzame všetky príklady tohto ročníka súťaže spolu s riešeniami, často študentskými. Príklady boli vyberané z národných olympiád či iných súťaží a z rôznych zbierok úloh.

Zadania súťažných úloh KS SKMO

Prvá séria

1.1 Dané sú nenulové celé čísla a, b, c také, že aj

$$u = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \quad \text{a} \quad v = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$$

sú celé čísla. Dokážte, že $|a| = |b| = |c|$. (*Rusko, 1995*)

1.2 Nech $p(x)$ je polynóm s celočíselnými koeficientmi a nech c_n je ciferný súčet čísla $p(n)$. Dokážte, že v nekonečnej postupnosti $c_1, c_2, c_3, \ldots$ sa nejaká hodnota vyskytne nekonečne veľakrát. (*Poľsko, 1987*)

1.3 Zistite, či existujú funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre každé reálne číslo x platia rovnosti
a) $f(g(x)) = x^2$, $g(f(x)) = x^3$;
b) $f(g(x)) = x^2$, $g(f(x)) = x^4$. (*Ukrajina, 1998*)

1.4 Postupnosť $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ je definovaná nasledovne:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= 2, \\ a_3 &= 24, \\ a_n &= \frac{6a_{n-1}^2 a_{n-3} - 8a_{n-1}a_{n-2}^2}{a_{n-2}a_{n-3}} \quad \text{pre } n > 3. \end{aligned}$$

Dokážte, že n delí a_n pre každé prirodzené číslo n. (*Putnam, 1999*)

1.5 Nájdite rozdelenie pravouhlého trojuholníka so stranami 3, 4, 5 na štyri časti s najmenším možným priemerom. Priemer rozdelenia definujeme ako maximum zo vzdialeností medzi bodmi patriacimi do tej istej časti. Napríklad rozdelenie strednými priečkami má priemer 5/2. (*Putnam, 1997*)

DRUHÁ SÉRIA

2.1 Nájdite všetky prvočísla p, pre ktoré existujú kladné celé čísla n, x, y spĺňajúce rovnosť

$$p^n = x^3 + y^3.$$

(*Maďarsko, 2000*)

2.2 Nech $d(n)$ označuje počet kladných deliteľov čísla n^2+n+1, kde n je prirodzené číslo. Dokážte, že nerovnosť

$$d(n) \geqq d(n+1)$$

platí pre nekonečne veľa rôznych prirodzených čísel n. (*Južná Kórea, 2005*)

2.3 Kúzelníci Miťo a Mazo si pripravili malé vystúpenie. Na začiatku je v miestnosti s divákmi len Mazo. Diváci uložia n mincí do ľubovoľnej postupnosti znakov a hláv a vyberú si jedno číslo z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Mazo potom otočí práve jednu mincu naopak a zavolá Miťa zo zákulisia, ktorý sa z rozloženia mincí snaží uhádnuť, aké číslo si diváci vybrali.

a) Dokážte, že ak sa toto kúzlo dá spraviť pre n_1 a n_2, potom sa dá spraviť aj pre $n_1 n_2$.

b) Nájdite všetky n, pre ktoré sa toto kúzlo dá spraviť. (*Mathlinks, 2008*)

2.4 Stred opísanej kružnice trojuholníka ABC označme O. Priamka prechádzajúca bodom O pretína vnútra strán AB a AC v bodoch M a N. Označme S a R stredy úsečiek BN a CM. Dokážte, že uhly ROS a BAC sú rovnaké.

(*Mathlinks, 2004*)

2.5 Galéria moderného umenia má tvar n-uholníka (nie nutne konvexného). Vedenie galérie sa v nej rozhodlo rozostaviť niekoľko statických kamier so zorným uhlom 360 stupňov. Koľko najmenej (v závislosti od n) kamier potrebujeme, aby sme určite vedeli ustrážiť celú galériu?

TRETIA SÉRIA

3.1 Ukážte, že existuje reálne číslo $c > 1$ také, že ak prirodzené čísla m, n spĺňajú $m/n < \sqrt{7}$, potom $7n^2 - m^2 \geqq c$. Zistite tiež, aké najväčšie môže byť také c.

(*Švédsko, 1988*)

3.2 V Žáboviciach sa uskutočnil turnaj, ktorého sa zúčastnilo n hráčov. Každý hral s každým práve jeden zápas v žábošachu, pričom zápas vždy skončil výhrou jedného z hráčov. Dokážte, že nech turnaj dopadol akokoľvek, vždy musí nastať jeden z dvoch nasledujúcich prípadov. Buď môžme hráčov rozdeliť do dvoch neprázdnych skupín A, B tak, že každý hráč z A vyhral nad každým hráčom z B alebo vieme hráčov označiť $P_1, P_2, \dots, P_n$ tak, že P_1 vyhral nad P_2, P_2 vyhral nad P_3, …, P_{n-1} vyhral nad P_n, P_n vyhral na P_1. (*Poľsko, 1990*)

3.3 Nech $a_1, a_2, \dots, a_n$ je postupnosť celých čísel taká, že každá jej neprázdna podpostupnosť má nenulový súčet. Rozdeľte množinu prirodzených čísel na konečne veľa množín tak, aby pre ľubovoľné $x_1, x_2, \dots, x_n$ z tej istej množiny bol výraz $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ nenulový. (*Rakúsko-Poľsko, 1990*)

3.4 Dokážte, že pre nezáporné reálne čísla x, y, z, ktoré spĺňajú rovnosť $x + y + z = 1$, platí

$$2 \leqq (1 - x^2)^2 + (1 - y^2)^2 + (1 - z^2)^2 \leqq (1 + x)(1 + y)(1 + z).$$

(*Rakúsko-Poľsko, 2000*)

3.5 Ondro a Feráč majú nekonečnú šachovnicu a hrávajú na nej nasledovnú hru. Každý hráč ovláda jedného jazdca, Ondrejov začína na políčku $(0, 0)$, Feráčov na (X, Y). Hráči sa striedajú v ťahoch, prvý ťahá Feráč. V jednom ťahu je dovolené spraviť ľubovoľný (nenulový) počet normálnych šachových krokov pre jazdca, všetky však musia byť presne v tom istom smere a vzájomná euklidovská vzdialenosť medzi oboma jazdcami sa musí každým krokom zmenšiť. Hráč prehrá vtedy, keď nemôže spraviť žiadny krok. Predpokladajte, že obaja hráči hrajú optimálne. Kto vyhrá? (*TopCoder, 2008*)

Štvrtá séria

4.1 Bus má rád modré skrinky. V každej modrej skrinke sa nachádza niekoľko rôznych prirodzených čísel. Bus považuje modrú skrinku za *špeciálnu*, ak z nej vieme vybrať šesť prirodzených čísel, ktorých súčet je deliteľný šiestimi.
a) Nájdite takú modrú skrinku, že obsahuje desať čísel a nie je špeciálna.
b) Ukážte, že každá modrá skrinka s jedenástimi číslami je špeciálna.
(*Veľká Británia, 2000*)

4.2 Istá organizácia má n členov a $n + 1$ trojčlenných výborov ($n \geqq 5$), z ktorých žiadne dva nemajú troch rovnakých členov. Dokážte, že vždy vieme nájsť dvojicu výborov, ktoré majú spoločného práve jedného člena.

4.3 Do štvorčekov nekonečného štvorčekového papiera sú vpísané reálne čísla. Dané sú dve šablóny zložené z konečného počtu štvorčekov. Tieto šablóny môžeme posúvať pozdĺž čiar na štvorčekovom papieri, nemeníme však ich orientáciu. Vieme, že ak prvú šablónu priložíme na ľubovoľné miesto, súčet čísel na políčkach, ktoré zakrýva, bude kladný. Dokážte, že existuje také umiestnenie druhej šablóny, že súčet čísel na políčkach, ktoré zakrýva, je tiež kladný.

(*KS SKMO, 1996*)

4.4 Do polynómu $x^{10} + a_9x^9 + a_8x^8 + \cdots + a_1x + 1$ dvaja hráči striedavo dopĺňajú reálne koeficienty. Ak nakoniec polynóm nemá žiadny reálny koreň, vyhráva prvý hráč. Inak vyhrá druhý hráč. Pre ktorého hráča existuje vyhrávajúca stratégia? Popíšte ju. (Prvý hráč začína.)

4.5 Na zjazde matematikov sa stretlo $12k$ účastníkov a každý z nich sa pozdravil s práve $3k + 6$ inými matematikmi. Pre každú dvojicu zúčastnených je počet ľudí, ktorí pozdravili oboch, rovnaký. Koľko ľudí sa stretlo na zjazde? (Pozdravenie je symetrické.) Pre tento počet popíšte prípad, kedy táto situácia nastáva.

(*KS SKMO, 1996*)

Piata séria

5.1 Nech ABC je rovnoramenný pravouhlý trojuholník s pravým uhlom pri vrchole A. Body M a N sú také vnútorné body úsečky BC, že $|\angle MAN| = 45°$. Kružnica opísaná trojuholníku AMN pretína postupne AB a AC v bodoch P a Q. Dokážte, že $|BP| + |CQ| = |PQ|$. (*Mathlinks*)

5.2 Nech ABC je trojuholník a nech D je priesečník dotyčnice ku kružnici opísanej trojuholníku ABC v bode A a priamky BC. Nech E je priesečník kolmice na BC v bode B a osi strany BA. Nech F je priesečník kolmice na BC v bode C a osi strany CA. Dokážte, že body D, E a F ležia na jednej priamke.

(*Mathlinks*)

5.3 Definujme funkciu $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pomocou nasledovnej rekurencie. Nech $f(1) = 1$ a $f(n+1)$ je najväčšie také m, že existuje aritmetická postupnosť prirodzených čísel

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_m = n$$

taká, že

$$f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_m).$$

Dokážte, že potom existujú prirodzené čísla a, b také, že platí $f(an+b) = n+2$ pre každé prirodzené n. (*KS SKMO, 1996*)

5.4 Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník. Body P, Q ležia postupne na úsečkách BC, DC tak, že $|\angle BAP| = |\angle DAQ|$. Dokážte, že trojuholníky ABP a ADQ

majú rovnaký obsah práve vtedy, keď priamka prechádzajúca cez ich ortocentrá je kolmá na AC. (*Irán, 2004*)

5.5 Šachová figúrka princ sa môže pohybovať vodorovne alebo zvislo, vždy práve o jedno políčko. Princom preskáčeme všetky políčka šachovnice 8×8 (na každé skočíme práve raz) a skončíme na políčku, z ktorého sme začínali. Môže sa stať, že počet horizontálnych a vertikálnych skokov bude rovnaký? (*Švédsko, 2003*)

Siesta séria

6.1 Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x a y platí

$$f(xf(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y.$$

(*Macedónsko*)

6.2 V rovine sú štyri nerozlíšiteľné kúsky plastelíny, ktoré môžeme presúvať len nasledujúcim spôsobom. Kúsok môžeme presunúť do novej pozície, ak sa presne v strede medzi pôvodnou a novou pozíciou nachádza nejaký iný kúsok plastelíny. Na začiatku sú jednotlivé kúsky na bodoch so súradnicami $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$. Vieme po konečnom počte presunutí kúskov plastelíny dostať kúsky na body so súradnicami $(0,0)$, $(1,1)$, $(3,0)$, $(2,-1)$? (*Nemecko, 2008*)

6.3 Šachovnica rozmerov 100×100 je zafarbená 4 farbami tak, že v každom riadku a v každom stĺpci je presne 25 políčok každej farby. Dokážte, že v nej existujú štyri políčka navzájom rôznych farieb, ktoré tvoria obdĺžnik so stranami rovnobežnými s okrajom šachovnice.

6.4 Pre $n > 1$ označme $p(n)$ najväčšie prvočíslo, ktoré delí n. Dokážte, že existuje nekonečne veľa prirodzených čísel n spĺňajúcich

$$p(n) < p(n+1) < p(n+2).$$

(*Brazília, 1995*)

6.5 Dokážte, že pre $x, y, z > 0$, ktoré spĺňajú $x + y + z = 1$, platí

$$\frac{1}{x^2 + y} + \frac{1}{y^2 + z} + \frac{1}{z^2 + x} > \frac{13}{2}.$$

(*Mathlinks, 2007*)

Riešenia súťažných úloh KS SKMO

PRVÁ SÉRIA

1.1

Majme čísla a, b, c a označme d ich najväčší spoločný deliteľ. Hodnota výrazov u a v sa nezmení, ak do nich namiesto a, b, c dosadíme a/d, b/d, c/d. Táto nová trojica má najmenší spoločný deliteľ rovný 1 a ak pre ňu dokážeme $|a/d| = |b/d| = |c/d|$, tak bude platiť aj $|a| = |b| = |c|$. Takže sa vráťme k pôvodnému označeniu a, b, c a predpokladajme, že $\mathrm{nsd}(a, b, c) = 1$. Výrazy u a v môžeme upraviť na zlomkový tvar

$$\begin{aligned} u &= \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{a^2c + b^2a + c^2b}{abc}, \\ v &= \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2b + b^2c + c^2a}{abc}. \end{aligned}$$

Keďže u a v sú celé čísla, čitateľ musí deliť menovateľ, t. j. abc delí $a^2b + b^2c + c^2a$. Preto aj a delí $a^2b + b^2c + c^2a$, a keďže $a \mid a^2b + c^2a$, musí platiť aj $a \mid b^2c$. Podobnými úvahami dostaneme spolu šesť deliteľností

$$\begin{aligned} &a \mid c^2b, \quad b \mid a^2c, \quad c \mid b^2a, \\ &a \mid b^2c, \quad b \mid c^2a, \quad c \mid a^2b. \end{aligned}$$

Teraz rozoberieme dve možnosti, podľa toho, či spomedzi a, b, c vieme alebo nevieme vybrať nesúdeliteľnú dvojicu.

Najprv rozoberieme prípad, keď niektoré dve čísla z trojice a, b, c sú nesúdeliteľné. Bez ujmy na všeobecnosti nech najväčší spoločný deliteľ čísel a a b je 1. Potom z $a \mid b^2c$ a $b \mid a^2c$ vyplýva, že $a \mid c$ a $b \mid c$. Čísla a a b sú však nesúdeliteľné, teda musí platiť $ab \mid c$. Inými slovami, existuje celé číslo k také, že $c = kab$. Potom z výrokov $c \mid a^2b$, $c \mid b^2a$ vieme, že $k \mid a$, $k \mid b$, čo kvôli nesúdeliteľnosti a, b implikuje $|k| = 1$. Takže musí platiť $|c| = |ab|$ a do výrazu u môžeme dosadiť $c = \pm ab$, čo nám povie, že

$$u = \frac{a}{b} + \frac{b}{\pm ab} + \frac{\pm ab}{a} = \frac{a^2 \pm b}{ab} \pm b$$

je celé číslo. To ale znamená, že $a \mid b$ aj $b \mid a$ a preto $|a| = |b| = 1 = |ab| = |c|$ a to sme chceli dokázať.

Teraz rozoberieme možnosť, keď každá dvojica čísel z trojice a, b, c má spoločného deliteľa väčšieho ako 1. Nech $\mathrm{nsd}(a, b) = k$, $\mathrm{nsd}(b, c) = l$, $\mathrm{nsd}(a, c) = m$. Potom k, l, m sú po dvoch nesúdeliteľné (ak by neboli, tak by a, b, c boli súdeliteľné). Čísla a, b, c vieme tým pádom napísať ako $a = xkm$, $b = ykl$, $c = zlm$ pre nejaké celé čísla x, y, z. Teraz dokážeme, že $|x| = |y| = |z| = 1$. Výrok $a \mid b^2c$ vieme prepísať ako $xkm \mid (ykl)^2zlm$, po zjednodušení $x \mid y^2zkl^3$. Číslo x je nesúdeliteľné s l (inak by $\mathrm{nsd}(a,b,c) \neq 1$) a tiež aj s y a z (inak by sme mali spor s výberom k, l, m). Preto to vieme zjednodušiť na $x \mid m$. Z výroku $a \mid bc^2$ zase dostaneme $x \mid k$, čo dokopy s $x \mid m$ znamená $|x| = 1$. Analogicky dostaneme $|y| = |z| = 1$. Výrazy u a v sú pre trojicu a, b, c rovnaké ako pre trojicu m/y, l/x, k/z. Tieto čísla sú ale po dvoch nesúdeliteľné, a preto podľa prvého prípadu vieme povedať

$$1 = \left|\frac{m}{y}\right| = \left|\frac{l}{x}\right| = \left|\frac{k}{z}\right| = |m| = |l| = |k|.$$

Z toho opäť dostávame $|a| = |b| = |c| = 1$.

Iné riešenie. (Podľa *Josefa Tkadleca.*) Zaveďme substitúciu $x = a/b$, $y = b/c$, $z = c/a$. Čísla x, y, z sú potom racionálne. Polynóm $p(t) = t^3 - ut^2 + vt - 1$ má korene x, y, z, pretože sú splnené Viètove vzťahy:

$$\begin{aligned}
&u = x + y + z,\\
&v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) xyz = xy + yz + zx,\\
&1 = xyz.
\end{aligned}$$

Ak racionálne korene polynómu $p(t)$ vyjadríme ako zlomky v základnom tvare, tak musí platiť, že čitateľ tohto zlomku delí absolútny člen polynómu $p(t)$, t. j. -1, a menovateľ delí koeficient pri vedúcom člene polynómu $p(t)$, t. j. 1. Teda čitatele aj menovatele týchto zlomkov musia byť 1 alebo -1, a preto $|x| = |y| = |z| = 1$. Z toho už nutne vyplýva $|a| = |b| = |c|$.

1.2

Keď prvýkrát vidíme túto úlohu, môže sa nám zdať, že to určite nemôže platiť. Keď totiž vezmeme ľubovoľný nekonštantný polynóm, jeho hodnoty budú časom rásť do nekonečna (alebo mínus nekonečna), a veľké hodnoty majú obvykle veľký ciferný súčet. Skúsme teda začať hľadaním protipríkladu.

Pre konštantné polynómy $p(x) = k$ tvrdenie platí, hodnoty c_n sú totiž všetky rovné cifernému súčtu čísla k. Vezmime lineárny polynóm $p(x) = x$. Mohlo by sa stať, že nekonečne veľa z čísel $c_1, c_2, c_3, \ldots$ bude rovnakých? Po chvíľke premýšľania prídeme na to, že mohlo. Platí totiž

$$\begin{aligned}
c_1 &= 1,\\
c_{10} &= 1,\\
c_{100} &= 1,\\
c_{1000} &= 1,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Presne to isté platí aj pre ľubovoľný polynóm tvaru $p(x) = x^k$. Potrebujeme preto nejaký komplikovanejší protipríklad. Vyberme nejaký skoro úplne náhodný polynóm, napríklad $p(x) = 9x^3 + 41x^2 + 5$. S prekvapením po chvíli zistíme, že aj pre tento polynóm funguje veľmi podobný postup, budeme však musieť začať od $x = 100$:

$$\begin{aligned} p(100) &= 9\,410\,005 & &\Rightarrow & c_{100} &= 19,\\ p(1000) &= 9\,041\,000\,005 & &\Rightarrow & c_{1000} &= 19,\\ p(10\,000) &= 9\,004\,100\,000\,005 & &\Rightarrow & c_{10\,000} &= 19,\\ & & & & &\vdots \end{aligned}$$

Malo by byť už jasné, že to isté môžeme spraviť pre ľubovoľný polynóm s nezápornými celočíselnými koeficientmi. Presnejšie povedané, pre polynóm

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0, \qquad a_i \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} \quad \text{pre všetky } i$$

vezmeme také k, aby $a_i < 10^k$ pre každé i. Potom bude platiť $c_{10^k} = c_{10^{k+1}} = c_{10^{k+2}} = \dots$ Tento postup funguje tiež v prípade, že sú všetky nenulové koeficienty polynómu $p(x)$ záporné. (Hodnota polynómu bude záporné číslo, ale ciferný súčet tejto hodnoty bude rovnaký, ako keby boli všetky koeficienty kladné.)

Potrebujeme už vyriešiť len prípad, keď majú niektoré z koeficientov polynómu navzájom rôzne znamienka. Toto sa môže na prvý pohľad javiť ako omnoho komplikovanejšia úloha, nie je tomu však tak. Predpokladajme, že vedúci koeficient (t. j. koeficient pri člene s najvyšším exponentom) je kladný. (Opačný prípad sa rieši analogicky.) Všetky záporné koeficienty polynómu $p(x)$ môžeme odstrániť posunutím premennej x o dostatočne veľkú konštantu – čo to znamená sa opäť najľahšie ukáže na príklade:

$$\begin{aligned} p(x) &= 2x^2 - 6x - 11,\\ p(x) &= 2((x-5)+5)^2 - 6((x-5)+5) - 11,\\ p(x) &= 2(x-5)^2 + 20(x-5) + 50 - 6(x-5) - 30 - 11,\\ p(x) &= 2(x-5)^2 + 14(x-5) + 9. \end{aligned}$$

V skutočnosti sme s polynómom nespravili nič, iba ho zapísali v inom tvare. Dôležité však je, že v tomto novom tvare sa pri členoch $(x-5)^k$ objavujú len samé nezáporné koeficienty, môžeme použiť už známy postup – dosadiť do $p(x)$ hodnoty $10^2 + 5$, $10^3 + 5$, $10^4 + 5$, … Zatiaľ sme však uviedli len príklad, potrebujeme ešte dokázať, že každý polynóm sa dá naozaj prepísať do takéhoto tvaru. Formálne by to bol dôkaz matematickou indukciou, najzaujímavejší je indukčný krok:

Nech je najvyšší člen so záporným koeficientom $-a_k x^k$ a nech je vedúci člen nášho polynómu $a_n x^n$ ($n > k$, $a_k > 0$). Koeficienty $a_n, a_{n-1}, \dots, a_{k+1}$ sú všetky nezáporné. Posuňme premennú x o a_k tak, ako v predchádzajúcom príklade. (Stačilo by aj o menej, ale takto je to jednoduchšie.) Ľahko možno overiť, že koeficienty pri $(x-a_k)^n$, $(x-a_k)^{n-1}, \dots, (x-a_k)^{k+1}$ zostanú aj naďalej nezáporné, dokonca každý z nich (okrem a_n) by sa mal oproti pôvodnému koeficientu zväčšiť. Koeficient pri $(x-a_k)^k$ bude

$$a_k' = a_n\binom{n}{k}a_k^{n-k} + a_{n-1}\binom{n-1}{k}a_k^{n-1-k} + \dots - a_k \geqq a_n\binom{n}{k}a_k^{n-k} - a_k \geqq a_k - a_k = 0.$$

Zbavili sme sa teda záporného koeficientu. Ďalej môžeme pokračovať opakovaním tohto postupu.

1.3

a) Predpokladajme, že také funkcie f a g existujú. Čo o nich vieme povedať? Začnime funkciou f. Z druhej rovnice ľahko dostaneme, že je prostá. Ak totiž $f(x) = f(y)$, potom

$$x^3 = g(f(x)) = g(f(y)) = y^3 \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

Prvá rovnica nám o f prezradí, že nadobúda všetky kladné reálne hodnoty. A čo funkcia g? Druhá rovnica o nej hovorí, že nadobúda všetky hodnoty z $\mathbb{R}$. Z prvej rovnice zase vieme, že g je prostá na nezáporných reálnych číslach a taktiež na nekladných reálnych číslach (nie však na všetkých naraz). Na tých množinách platí

$$g(x) = g(y) \quad \Rightarrow \quad x^2 = f(g(x)) = f(g(y)) = y^2 \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

Ďalšie informácie vieme získať kombinovaním vzťahov pre skladanie f a g. Napríklad

$$f(g(f(x))) = f^2(x), \qquad f(g(f(x))) = f(x^3),$$

podľa toho, ktorý predpoklad využijeme. Posledný vzťah vieme napísať ako $f^2(x) - f(x^3) = 0$. Ak za x dosadíme hodnoty -1, 0 a 1 (Sú to riešenia rovnice $x = x^3$) dostávame

$$\begin{aligned} f^2(-1) - f(-1) &= 0, \\ f^2(0) - f(0) &= 0, \\ f^2(1) - f(1) &= 0. \end{aligned}$$

Inak povedané, hodnoty $f(-1)$, $f(0)$ a $f(1)$ sú korene polynómu $x^2 - x$. To je polynóm druhého stupňa s dvoma koreňmi a preto sa nejaké dve z tých hodnôt musia rovnať. To je ale v spore s prostosťou funkcie f. Tým sme dokázali, že vhodné funkcie f a g nemôžu existovať.

b) Aj v tomto prípade treba spraviť analýzu vlastností f a g. Znovu môžeme šikovne poskladať funkcie f a g aby sme dostali

$$f(x^4) = f(g(f(x))) = f^2(x), \tag{1}$$
$$g(x^2) = g(f(g(x))) = g^4(x). \tag{2}$$

Teraz sa nám podobný spor ako v prvom prípade nepodarí. Takže zatiaľ by také funkcie mohli teoreticky existovať. Skúsme nájsť funkcie f a g, ktoré by spĺňali posledne odvodené vzťahy (1) a (2). Také funkcie existujú. Napríklad sú to

$$f(x) = e^{\sqrt{|\ln|x||}}, \quad g(x) = e^{\ln^2 x^2}.$$

Tie ešte nie sú riešením, len majú vhodné vlastnosti. Stačí ich však trochu upraviť a dostaneme úplné riešenie, konkrétne

$$f(x)=\begin{cases}0 & x=0,\\ e^{-\sqrt{|\ln|x||}} & |x|\in(0,1),\\ e^{\sqrt{\ln|x|}} & |x|\geqq 1,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}0 & x=0,\\ e^{-\ln^2 x^2} & |x|\in(0,1),\\ e^{\ln^2 x^2} & |x|\geqq 1.\end{cases}$$

V správnom riešení treba ešte overiť, že tieto (resp. iné nájdené) funkcie naozaj vyhovujú pôvodnému systému rovníc. Túto mechanickú činnosť necháme na čitateľa.

1.4

Zaujímavá vec, ktorú je fajn si všímať na podobných rekurenciách je akási „homogénnosť“. Keby sme totiž v tom vyjadrení mali všade a namiesto rôznych a_i, tak po vykrátení tam ostane práve násobok a. Toto tak trošku napovedá, že nemusí byť úplne zlé skúsiť hrať sa s podielmi členov. Upravme dané vyjadrenie n-tého člena nasledovne:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=6\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}-8\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}.$$

Urobme substitúciu $b_{n-2}=a_n/a_{n-1}$. (Indexujeme to tak kvôli tomu, aby nová postupnosť začínala prvkami $b_0=a_2/a_1=2$, $b_1=a_3/a_2=12$. Za chvíľu uvidíme, prečo práve tak.) Pre $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ vieme napísať rekurentný vzťah

$$b_n=6b_{n-1}-8b_{n-2}.$$

Vieme niečo urobiť s takýmto rekurentným vyjadrením postupnosti? Teraz chvíľku nechajme na pokoji prvé hodnoty postupnosti a pozrime sa len na daný rekurentný vzťah. Keď máme takú jednoduchšiu postupnosť, kde n-tý člen je vyjadrený len pomocou $(n-1)$-ého, vieme všeobecne n-tý člen napísať ako mocninu nejakého čísla. Čo tak skúsiť niečo podobné? Skúsme hľadať explicitné vyjadrenie n-tého člena našej rekurencie v tvare x^n. Potom musí platiť

$$\begin{aligned}x^n&=6x^{n-1}-8x^{n-2},\\ x^{n-2}(x^2-6x+8)&=0.\end{aligned}$$

Ak je x koreňom takto vzniknutej kvadratickej rovnice, bude x^n spĺňať daný rekurentný vzťah. Ak má daná rovnica korene dva, budú tento vzťah spĺňať oba a dokonca je jasné, že ho bude spĺňať aj ľubovoľná ich lineárna kombinácia. A už sme „doma“; máme predsa dva korene, čiže dva parametre a k nim prvé dva členy postupnosti. V našom konkrétnom prípade je $x_1=2$, $x_2=4$ a všeobecné riešenie rekurencie je $b_n=c_1\cdot 2^n+c_2\cdot 4^n$. Hodnoty c_1 a c_2 získame zo sústavy rovníc

$$\begin{aligned}c_1+c_2&=b_0=2,\\ 2c_1+4c_2&=b_1=12.\end{aligned}$$

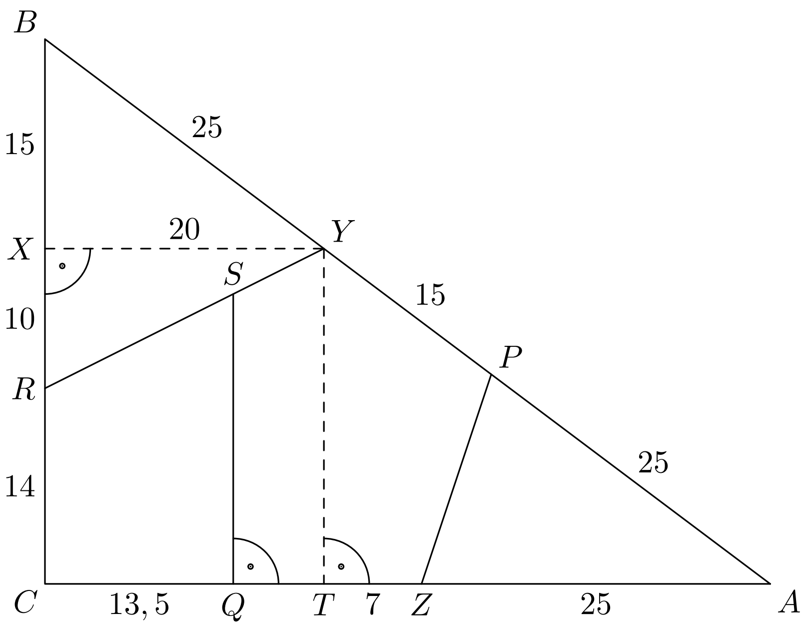
Dostaneme $c_1 = -2$ a $c_2 = 4$ a preto

$$\begin{aligned} b_{n-2} &= 4^{n-1} - 2^{n-1}, \\ a_n &= a_{n-1} \cdot 2^{n-1}(2^{n-1} - 1). \end{aligned}$$

Ostáva už len ukázať zadanú deliteľnosť. Každé číslo sa dá napísať ako súčin nepárneho čísla a nejakej mocniny čísla 2 ($n = 2^s \cdot r$). Deliteľnosť mocninou dvojky vidíme rovno, už teda len tá nepárna časť. Použijeme všeobecnejšiu verziu malej Fermatovej vety, tzv. Eulerovu vetu. Tá tvrdí, že $r \mid a^{\varphi(r)} - 1$ pre $\mathrm{nsd}(a, r) = 1$, pričom $\varphi(r)$ je počet čísel menších ako r nesúdeliteľných s číslom r. Takže keď vzťah pre a_n dôsledne rozpíšeme až po a_2, dostaneme v súčine všetky výrazy tvaru $2^k - 1$ pre $k < n$, a tak tam bude aj žiadané $2^{\varphi(r)} - 1$. Už to máme, 2^s delí a_n aj r delí a_n, preto aj n delí a_n.

1.5

(Podľa *Josefa Tkadleca.*) Najprv spomenieme niekoľko myšlienok, ktoré je vhodné si uvedomiť, no riešenie sa zaobíde aj bez nich. Ak chceme lepšie rozdelenie ako uvádza zadanie, malo by minimálne platiť, že vrcholy A, B a C sú v iných častiach. Budeme mať nejaké pracovné číslo r a budeme vytvárať tri oblasti, ktoré budú obsahovať postupne vrcholy A, B a C a budú mať priemer najviac r. Keď budeme r postupne zväčšovať, tak sa priestor v trojuholníku, ktorý nezahŕňame do týchto častí, bude zmenšovať, až jeho priemer bude tiež r. Takto by sme teoreticky mohli dosiahnuť optimálne rozdelenie a minimálny priemer rozdelenia na štyri časti. Vhodným interpretovaním týchto ideí sa dá dospieť až k finálnemu elegantnému riešeniu.



Obr. 52

Dĺžky strán pre jednoduchosť prenásobíme číslom 13. Vyznačme body Y a Z ako na obr. 52, čiže bude platiť $|BY| = |YZ| = |ZA| = 25$ a všetky ostatné vzájomné vzdialenosti bodov A, B, C, Y, Z sú väčšie. Nejaká dvojica tých bodov musí byť v jednej zo štyroch častí a preto minimálny priemer je aspoň 25. Ukážeme, že rozdelenie s priemerom 25 existuje.

Na úsečke AB zvoľme bod P tak, že $|AP| = 25$ a na úsečke BC bod R tak, že $|BR| = 25$. Označme písmenom Q stred úsečky CZ a S priesečník RY a kolmice na CA z bodu Q. Dokážeme, že vyhovuje rozdelenie na mnohouholníky BRY, $CQSR$, $QZPYS$ a ZAP. Ako nájdeme maximálnu vzdialenosť dvoch bodov pre mnohouholník? Stačí keď budeme uvažovať len vzdialenosti medzi vrcholmi, teda dĺžky strán a uhlopriečok. (V riešení to treba zdôvodniť.) Teraz už len overiť všetky štyri časti.

- BRY: Platí $|RY| < |RB| = |BY| = 25$.
- $CQRS$: Najdlhšia priečka v tomto štvoruholníku je zrejme CS a pre ňu platí

$$|CS| = \sqrt{13{,}5^2 + 20{,}75^2} < 25.$$

- $QZPYS$: Do úvahy pripadajú len uhlopriečky. Platí

$$\begin{aligned} &|SZ| = |CS| < 25, && |ZY| = 25, \\ &|QP| = \sqrt{13{,}5^2 + 15^2} < 25, && |PS| = \sqrt{18{,}5^2 + 5{,}75^2} < 25, \\ &|YQ| = \sqrt{24^2 + 6{,}5^2} < 25. \end{aligned}$$

- ZAP: Platí $|PZ| < |ZA| = |PA| = 25$.

Tým sme dokázali, že najmenší možný priemer rozdelenia je 25, a tak po spätnom predelení strán trinástimi je to 25/13.

Druhá séria

2.1

(Podľa *Tomáša Peitla.*) Začneme tým, že výraz $x^3 + y^3$ rozložíme na súčin $(x+y)(x^2 - xy + y^2)$. Pretože sa to má rovnať mocnine prvočísla p, tak aj $(x+y)$ aj $(x^2 - xy + y^2)$ sa musia rovnať nejakej mocnine p. Označme

$$x + y = p^r, \tag{1}$$
$$x^2 - xy + y^2 = p^s, \tag{2}$$

vyjadrime y z (1) a dosaďme do (2). Po pár úpravách dostaneme

$$3x^2 - 3p^r x + p^{2r} - p^s = 0.$$

Ak má táto rovnica mať riešenie x, tak jej diskriminant nesmie byť záporný, preto

$$0 \leqq D = 9p^{2r} - 4 \cdot 3(p^{2r} - p^s).$$

Po jednoduchých úpravách dostaneme $4 \geqq p^{2r-s}$. Vyhovujúce x, y a n vieme nájsť pre obe prvočísla spĺňajúce $p < 4$:

$$2^1 = 1^3 + 1^3,$$
$$3^2 = 1^3 + 2^3.$$

Pre $p > 4$ musí taktiež platiť $D \geqq 0$, čo v tomto prípade znamená $2r - s \leqq 0$. Z toho $2r \leqq s$ a preto $p^{2r} \leqq p^s$, čo pomocou (1) a (2) vieme napísať ako

$$p^{2r} = (x+y)^2 \leqq x^2 - xy + y^2 = p^s,$$
$$3xy \leqq 0.$$

Toto nemôže nikdy nastať, lebo x a y sú kladné celé čísla. Takže jediné vyhovujúce prvočísla sú 2 a 3.

Iné riešenie. Začneme rovnako, rozložíme $x^3 + y^3$ na (1) a (2). Aké môžu byť čísla r a s? Osobitne to najprv vyriešime v prípade, ak je niektoré z nich rovné 0. Vieme, že $x + y \geqq 2$, lebo sú to kladné celé čísla. Preto musí platiť

$$x^2 - xy + y^2 = 1.$$

To je ekvivalentné s $(x-y)^2 = 1-xy$. Vieme, že $(x-y)^2 \geqq 0$, čiže musí platiť $1-xy \geqq 0$. Jediná vyhovujúca možnosť je $x = y = 1$. Vtedy dostaneme $p = 2$ a jedno riešenie je na svete.

Ďalej môžeme uvažovať $r > 0$, $s > 0$. Potom musí platiť

$$p \mid x + y,$$
$$p \mid (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$
$$p \mid (x^2 - xy + y^2) + 3xy,$$
$$p \mid 3xy.$$

Z toho vidíme, že buď $p \mid 3$, $p \mid x$, alebo $p \mid y$. Ak $p \mid 3$ tak $p = 3$. Ak $p \mid x$, tak z toho, že $p \mid x + y$ vyplýva aj $p \mid y$. (Toto funguje aj naopak.) Potom môžem x a y zapísať $x = px_0$ a $y = py_0$. Potom

$$x^3 + y^3 = p^3x_0^3 + p^3y_0^3 = p^n.$$

Po vydelení p^3 dostávame obdobu pôvodnej rovnice, len s x_0 a y_0 namiesto x a y. Týmto postupom by sme vedeli znižovať x a y delením p, až kým p nebude deliť xy. Z toho už priamo vyplýva, že jedinými riešeniami sú prvočísla 2 a 3.

Poznámka. Použitý postup sa nazýva *Reductio ad absurdum.* Ak by pre $p > 3$ existovalo riešenie, tak by sme postupným delením x a y získavali menšie a menšie riešenia. Nakoniec by sme dostali také, kde by x alebo y bolo nedeliteľné p, čo by znamenalo spor. Dá sa to zdôvodniť ešte jednoduchšie, pomocou extremálneho princípu.

Nech pre prvočíslo $p > 3$ existuje nejaké riešenie našej rovnice. Spomedzi všetkých riešení vyberme to najmenšie (také pre ktoré je výraz $x + y$ najmenší). Potom však musí platiť $p \mid x$, $p \mid y$ a aj x/p, y/p (a $n - 3$ namiesto n) bude riešenie, ktoré bude navyše menšie od x, y, čo je spor. Preto riešenia pre $p > 3$ neexistujú.

2.2

Pokúsime sa o dôkaz sporom, čiže budeme predpokladať, že nerovnosť je splnená iba pre konečne veľa rôznych n. Potom ale jedno z nich musí byť posledné – označme ho M. (Pre úplnosť by sme mali dodať, že aspoň jedno také n existuje – napríklad $n = 1$.) Číslo M je preto najväčšie také číslo, že

$$d(M) \geqq d(M+1).$$

To ale znamená, že pre všetky $n > M$ už musí platiť

$$d(n) < d(n+1),$$

a keďže hodnoty $d(n)$ sú celé čísla, platí pre $n > M$ dokonca aj

$$d(n) + 1 \leqq d(n+1).$$

Sčítaním viacerých takýchto po sebe idúcich nerovností dostaneme všeobecnú verziu, ktorá nás bude zaujímať najviac. Pre všetky prirodzené čísla $n > M$ a k platí

$$d(n+k) \geqq d(n+k-1) + 1 \geqq \ldots \geqq d(n) + k.$$

Zamyslime sa teraz nad tým, koľko môže mať deliteľov číslo n^2+n+1. Vo všeobecnosti musí mať každé prirodzené číslo k menej ako $2\sqrt{k}$ deliteľov. Prečo je to tak? Rozdeľme si všetky delitele čísla k na tie, čo sú menšie ako $\sqrt{k}$, a tie, čo sú väčšie. (V prípade, že je k štvorec, máme ešte tretiu skupinu, v ktorej je len samotné $\sqrt{k}$.) Deliteľov v prvej skupine je určite menej ako $\sqrt{k}$, pretože všetkých prirodzených čísel menších ako $\sqrt{k}$ je menej ako $\sqrt{k}$. Pre deliteľov v druhej skupine zasa platí, že každý z nich má svoj pár v prvej skupine – ak je totiž k deliteľné číslom $a > \sqrt{k}$, musí byť deliteľné aj číslom k/a a toto číslo je menšie ako $\sqrt{k}$. Čísel v druhej skupine je rovnako veľa ako čísel v prvej skupine, čiže menej ako $\sqrt{k}$, spolu je všetkých deliteľov čísla k menej ako $2\sqrt{k}$. Zabudli sme ešte rozobrať prípad, keď je k štvorcom a má ako deliteľa samotné $\sqrt{k}$, v tom prípade je však v prvej aj druhej skupine najviac $\sqrt{k} - 1$ čísel a náš odhad stále platí.

Ak chceme použiť tento odhad na číslo $n^2 + n + 1$, mali by sme z neho nájsť odmocninu:

$$n^2 < n^2 + n + 1 < (n+1)^2,$$
$$n < \sqrt{n^2 + n + 1} < n + 1.$$

Vidíme, že $n^2 + n + 1$ nie je štvorec, v prvej skupine môže mať najviac n deliteľov, celkovo ich môže mať najviac $2n$, čiže $d(n) \leqq 2n$. Nám by sa však oveľa viac hodilo, keby sme mali odhad $d(n) \leqq cn$ kde $c < 1$ – prečo, to bude jasné už čoskoro.

Všimnime si, že $n^2 + n + 1$ nie je nikdy deliteľné dvoma ani piatimi – toto možno dokázať rozobraním všetkých možností zvyšku čísla n po delení dvoma a piatimi. To znamená, že ani žiaden z deliteľov $n^2 + n + 1$ nemôže byť deliteľný dvoma ani piatimi. (Číslo, ktoré má párneho deliteľa, je určite párne, rovnako to platí pre päťku.) Prvú skupinu deliteľov môžeme trochu okresať. Aby sa nám jednoduchšie počítalo, berme do úvahy len také n, ktoré sú deliteľné desiatimi. V takom prípade môže byť medzi číslami od jedna po n najviac $4n/10$ deliteľov čísla $n^2 + n + 1$, čím dostávame $d(n) \leqq \frac{4}{5}n$.

Podobný odhad by sme vedeli nájsť aj pre n, ktoré nie sú deliteľné desiatimi, nebude to však treba. Vráťme sa späť k tvrdeniu (ktoré sme dokázali na začiatku riešenia), že pre každé $n > M$ a k platí

$$d(n + k) \geqq d(n) + k.$$

Táto nerovnosť hovorí, že číslo $d(n)$ musí pre $n > M$ stále stúpať aspoň o jedna. Zároveň sme však pred chvíľou ukázali, že $d(n)$ by sa malo zväčšovať tak priemerne o najviac štyri pätiny, zdá sa, že by sme mali byť schopní prísť ku sporu. Dosaďme do predchádzajúcej nerovnosti najmenšie možné n, t. j. $n = M + 1$, a spravme substitúciu $M + 1 + k = m$:

$$\begin{aligned} d(n + k) &\geqq d(n) + k, \\ d(M + 1 + k) &\geqq d(M + 1) + k, \\ d(m) &\geqq d(M + 1) + m - M - 1. \end{aligned}$$

Ak ešte označíme číslo $d(M + 1) - M - 1 = c$, dostávame, že pre každé $m > N$ platí

$$d(m) \geqq m + c.$$

Keby číslo c nebolo záporné, mali by sme $d(m) \geqq m$ a dosadením ľubovoľného $n > M$ deliteľného desiatimi by sme dostali spor s $d(n) \leqq \frac{4}{5}n$. V prípade že c je záporné, budeme musieť dosadiť za m dostatočne veľké číslo, napríklad $m = -10c$ (čo mimochodom zaručí deliteľnosť desiatimi):

$$\begin{aligned} d(m) &\geqq m + c, \\ d(-10c) &\geqq -10c + c, \\ d(-10c) &\geqq -9c > -8c = \frac{4(-10c)}{5}. \end{aligned}$$

To je opäť spor. Tvrdenie zo zadania musí platiť.

2.3

a) Nech sa kúzlo dá spraviť pre n_1 a n_2. Predstavme si, že tých $n_1 n_2$ mincí leží v obdĺžniku $n_1 \times n_2$ (n_1 stĺpcov a n_2 riadkov). Mazo a Miťo sa môžu dohodnúť na nejakej bijekcii medzi množinou $\{1, 2, \dots, n_1 n_2\}$ a množinou dvojíc (k_1, k_2), kde $k_1 \in \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ a $k_2 \in \{1, 2, \dots, n_2\}$. Keď publikum povie číslo m, tak Mazo zoberie ku m prislúchajúcu dvojicu (k_1, k_2). Pozrime sa na stĺpce a každému priraďme hlavu alebo znak, podľa parity počtu hláv v danom stĺpci.[7] Priradených hláv a znakov je dokopy n_1. Zmenou práve jednej hodnoty vie Mazo podľa predpokladu zanechať informáciu o čísle k_1. To znamená, že tam existuje stĺpec, v ktorom ak zmeníme ľubovoľnú mincu, tak stĺpce budú kódovať číslo k_1. (Samozrejme, kúzelníci sa na tom musia dopredu dohodnúť.) Analogicky, keď sa pozrieme na riadky, vieme nájsť jeden riadok taký, že zmenou ľubovoľnej mince v ňom budú riadky kódovať číslo k_2. Vybraný riadok a stĺpec majú spoločnú jednu mincu, ktorú Mazo otočí. Miťo po príchode zistí zo stĺpcov a riadkov hodnoty k_1 a k_2 a tejto dvojici naspäť priradí hodnotu m. A je to.

b) Miťo po príchode do miestnosti nemá iné informácie ako poradie mincí, preto každé poradie musí presne určovať nejaké číslo od 1 po n, ktoré Miťo povie (a ktoré tiež povedali diváci). Uvažujme tie poradia, ktoré určujú číslo jedna. Ak ich je dokopy k, tak takých poradí, z ktorých sa k nim vieme dostať na otočenie práve jednej mince, je najviac nk. My chceme, aby sa z každého začiatočného poradia ku nim dalo dostať, preto žiadame $nk \geqq 2^n$, teda $k \geqq \lceil 2^n/n \rceil$. Rovnakú úvahu vieme spraviť pre každú z hodnôt 1 až n. Preto máme aspoň

$$n \left\lceil \frac{2^n}{n} \right\rceil \geqq 2^n$$

rôznych poradí. Rovnosť nastáva práve vtedy, keď výraz $2^n/n$ je celočíselný, takže n musí byť mocnina dvoch. Ak rovnosť nenastáva, dostávame nezmysel, lebo poradí nemôže byť viac ako 2^n.

Zostáva už len dokázať, že pre mocniny dvojky to ide. To je však pre $n = 2$ jednoduché ukázať a podľa časti a) to potom ide aj pre ostatné mocniny dvojky.

2.4

Najprv sa zbavíme bodov R a S. Označme postupne X, Y, B', A', C' obrazy bodov M, N, A, B a C v stredovej súmernosti podľa bodu O. Nech ďalej L je priesečník BY a CX. Potom úsečka RO je strednou priečkou v trojuholníku CMX, preto sú priamky RO a CX rovnobežné. Taktiež SO je stredná priečka v trojuholníku BNY, preto sú priamky SO a BY rovnobežné. Zisťujeme, že uhly ROS a CLB sú rovnaké. Našou úlohou je dokázať rovnosť uhlov BLC a BAC, na čo stačí ukázať, že L leží na opísanej kružnici k trojuholníka ABC (je zrejmé, že L leží v správnej polrovine).

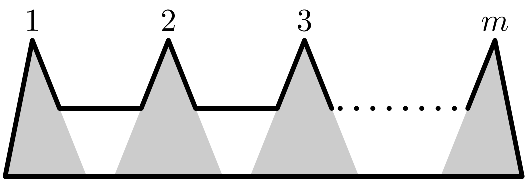
Dokážeme to sporom. Predpokladajme, že L leží mimo k. Potom aj jeho obraz L' v stredovej súmernosti podľa O leží mimo k. Označme L'' priesečník $B'L'$ a kružnice k rôzny od B'. Body B, B', L'', C', C, A ležia na k a môžeme na ne (v tomto poradí) aplikovať Pascalovu vetu. Tá hovorí, že priesečníky dvojíc priamok BB' a $C'C$, $B'L''$ a CA, $L''C'$ a AB ležia na jednej priamke. Prvé dva priesečníky poznáme. Sú to O a N.

[7] Môžeme si predstaviť hlavy ako jednotky a znaky ako nuly. Potom to, čo robíme, je sčítanie mincí v stĺpci a urobenie zvyšku po delení dvoma.

Prípad $X = O$ je triviálny (trojuholník ABC vtedy musí byť pravouhlý). Ak $N \neq O$, musí priesečník $L''C'$ a AB ležať na priamke XO a tým pádom sa musia pretínať v bode M. Obe priamky $L''C'$ aj $L'C'$ majú prechádzať bodom M, z čoho máme $L''C' = L'C'$ a preto $L' = L''$. Bod L' leží na kružnici, čo je spor. Dôkaz je hotový.

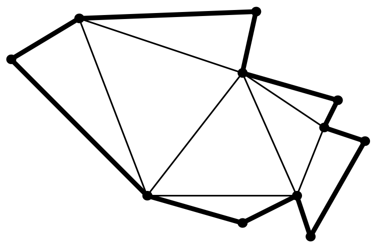
2.5

Je jasné, že pokiaľ má miestnosť tvar konvexného mnohouholníka, stačí na stráženie jedna kamera. Dokonca je úplne jedno, kam ju umiestnime. Otázka je, ako veľmi to môžeme „pokaziť". Zoberme napríklad taký čudný „zúbkovaný" útvar ako na obr. 53. Všimnime si, že každý z vrcholov 1, 2, $\dots m$ vidíme len z príslušného vyfarbeného trojuholníka. Keďže dané trojuholníky sú disjunktné, potrebujeme aspoň m kamier. Takže pre takýto $3m$-uholník potrebujeme aspoň m kamier. Ak „usekneme" jeden alebo dva vrcholy, dostaneme galériu s $n-1$ alebo $n-2$ vrcholmi, pričom vidíme, že počet kamier potrebných na pozorovanie celej miestnosti sa zníži o 1, teda bude $\lfloor \frac{1}{3}n \rfloor$. Ukážeme, že týmto spôsobom sme to „pokazili" najviac ako sa dalo.



Obr. 53

Najprv nakreslime do nášho n-uholníka $n-3$ nepretínajúcich sa diagonál tak, že rozdelíme daný n-uholník na $n-2$ trojuholníkov (obr. 54). Že to vždy vieme urobiť, ukážeme neskôr. Teraz sa pozrime na takýto útvar ako na graf; vrcholy n-uholníka sú vrcholy grafu a strany n-uholníka spolu s dokreslenými diagonálami sú jeho hrany.



Obr. 54

Tvrdenie. Vrcholy tohto grafu vieme zafarbiť troma farbami tak, že žiadne dva, ktoré sú spojené hranou, nebudú mať rovnakú farbu.

Dôkaz. Použijeme indukciu. Pre $n \leqq 3$ je to triviálne. Pre $n > 3$ vyberme nejaké dva vrcholy u, v, ktoré sú spojené diagonálou. Táto diagonála rozdelí graf na dva menšie, ktoré oba obsahujú hranu uv. Z indukčného predpokladu oba menšie grafy vieme zafarbiť troma farbami tak, že žiadne dva susedné vrcholy nemajú rovnakú farbu. Dokonca to vieme urobiť tak, že vrcholy u a v budú mať v oboch menších grafoch rovnaké farby. Keď potom spojíme oba menšie grafy vrcholmi u a v dohromady, dostaneme zafarbenie nami požadovaného grafu. Tým je tvrdenie dokázané.

A ako to súvisí s najmenším možným počtom kamier v galérii? Keďže vrcholov máme n, z Dirichletovho princípu je vrcholov aspoň jednej farby najviac $\lfloor \frac{1}{3}n \rfloor$. Čo sa stane keď do týchto vrcholov umiestnime kamery? Každý trojuholník obsahuje vrchol danej farby a teda každý trojuholník môžeme pomocou danej kamery vidieť. A keďže trojuholníky pokrývajú celú galériu, tak sme práve dokázali čo sme chceli.

Ešte chýba dôkaz, že každý n-uholník vieme diagonálami rozrezať na trojuholníky[8]. Tento dôkaz (indukciou) nebudeme robiť úplne do detailov, keďže sa jedná o známe tvrdenie. Urobíme len najťažší krok: z n-uholníka, ktorý chceme rozdeliť na trojuholníky, urobíme dva menšie útvary (o ktorých to už z indukčného predpokladu môžeme tvrdiť). V podstate potrebujeme ukázať, že tam máme diagonálu, ktorá celá leží vnútri n-uholníka.

Určite v n-uholníku máme nejaký vrchol, pri ktorom je uhol menší ako 180°. (Súčet uhlov v n-uholníku je len $180°(n-2)$.) Vezmime tento vrchol a jeho susedné vrcholy, ktoré označme B a C. Pokiaľ úsečka BC leží celá vnútri n-uholníka, tak sme vyhrali. Ak nie, potom máme v trojuholníku ABC ešte iné vrcholy n-uholníka. Budeme teraz posúvať BC smerom k A. Posledný vrchol, na ktorý narazíme, spojíme s A. Táto spojnica bude diagonála, ktorá bude celá ležať v danom n-uholníku.

TRETIA SÉRIA

3.1

Našou úlohou je nájsť za danej podmienky najmenšiu možnú hodnotu rozdielu $7n^2 - m^2$. Podmienka $m/n < \sqrt{7}$ sa po jednoduchých úpravách (všetky budú v tomto prípade ekvivalentné) zmení na

$$7n^2 - m^2 > 0.$$

Poďme teda skúmať hodnotu výrazu $7n^2 - m^2$. O číslach m a n vieme, že sú prirodzené. Takže číslo $7n^2 - m^2$ bude celé a keďže je podľa predpokladu v zadaní kladné, bude dokonca prirodzené. Preto číslo c zo zadania bude tiež prirodzené.

Prvou úlohou je nájsť c väčšie ako 1. Stačí preto ukázať, že $7n^2 - m^2 \neq 1$. Neexistencia riešenia nejakej rovnice sa dá veľmi často dokázať pomocou deliteľnosti. Poďme na to sporom a predpokladajme, že rovnica

$$7n^2 = m^2 + 1$$

má riešenie. (Kvôli prehľadnosti sme m^2 dali na druhú stranu.) V danom výraze máme nejaké druhé mocniny, pričom jedna je vynásobená siedmimi. To tak trochu napovedá, že stojí za pokus vyskúšať zvyšky po delení siedmimi. Číslo $7n^2$ dáva zvyšok 0. Číslo m^2 môže dávať zvyšky 0, 1, 2 a 4. To ale znamená, že $m^2 + 1$ môže dávať len zvyšky 1, 2, 3

[8] Tento proces sa nazýva triangulácia

a 5, čím sme došli k sporu. Preto daná rovnica nemá riešenie a teda c je aspoň 2. Tým je prvá časť úlohy za nami.

Je 2 najväčšia možná hodnota c? Môžeme sa chvíľu hrať s rôznymi m a n a postupne ich dosádzať a zisťovať hodnotu výrazu $7n^2 - m^2$. Pre $m = 2$ a $n = 1$ dostaneme $7n^2 - m^2 = 7 - 4 = 3$. Odtiaľ vidíme, že $c \leqq 3$. (Keby totiž platilo $c > 3$, daná podmienka $7n^2 - m^2 \geqq c$ by nebola splnená pre $m = 2$ a $n = 1$.) Ostáva už len nejako preveriť možnosť $c = 2$. Buď nájsť nejaké m a n, pre ktoré platí rovnosť $7n^2 - m^2 = = 2$, alebo ukázať, že také m a n neexistujú. Opäť si spomenieme na zvyšky po delení siedmimi. Ľavá strana rovnice

$$7n^2 = m^2 + 2$$

je deliteľná siedmimi a teda musí byť aj pravá. Ako sme už zistili, číslo m^2 môže dávať zvyšky 0, 1, 2 a 4 a teda $m^2 + 2$ môže dávať po delení siedmimi len zvyšky 2, 3, 4 a 6. Keďže 0 medzi nimi nie je, riešenie takejto rovnice neexistuje. Tým sme ukázali, že $c = 3$.

Poznámka. V úlohách ako je táto, kde sa vyskytujú prirodzené čísla, alebo ešte lepšie, ich druhé mocniny, často pomáha deliteľnosť. Súvisí to s tým, že napr. po delení ôsmimi môže číslo n dávať osem rôznych zvyškov, číslo n^2 však len tri. Podobne to funguje aj pre rôzne iné čísla. Oplatí sa použiť tie, ktoré sa, podobne ako číslo 7 v tejto úlohe, vyskytujú rovno v zadaní.

3.2

Najskôr doplňme zadanie o predpoklad $n \geqq 2$. Ďalej nech H označuje množinu všetkých zúčastnených hráčov na turnaji. Pod pojmom *kružnica* budeme rozumieť takú množinu k hráčov ($k \geqq 3$), pre ktorých existuje označenie $K_1, K_2, \ldots, K_k$ také, že K_1 vyhral nad K_2, K_2 vyhral nad K_3, …, K_{k-1} vyhral nad K_k a K_k vyhral nad K_1.

Ak po skončení turnaja existuje hráč, ktorý vyhral všetky svoje zápasy (nazvime ho *bocian*) alebo hráč, ktorý všetko prehral (nazvime ho *žubrienka*), zrejme nastal prvý prípad zo zadania. Stačí dať tohto špeciálneho jedinca samého do jednej skupiny.

Ak v H neexistuje ani bocian ani žubrienka (to je možné až od $n \geqq 3$), každý hráč nejaký zápas vyhral a nejaký prehral. Teraz dokážeme, že v H musí existovať kružnica. Vezmime jedného ľubovoľného hráča z H, napr. Žabča. (Označme ho H_1.) Žabčo určite niekoho porazil, napr. Rosničku. (Označme ju H_2.) Aj Rosnička určite niekoho porazila, napr. Ropuchu. (Označme ju H_3.) Takto pokračujme ďalej. Keďže počet hráčov n je konečný, po konečnom počte krokov musíme prísť k hráčovi, ktorého sme už označili ako H_i (pričom i nie je nutne 1). Tým sme vytvorili kružnicu.

Ďalšie kroky dôkazu by sa mohli snažiť túto kružnicu zväčšovať, až by sme do nej dostali všetkých hráčov, alebo našli vhodné delenie na skupiny A a B, čím by sme príklad vyriešili. Celé to zjednodušíme nasledovne. Nech K je kružnica s najväčším možným počtom hráčov. Ak je takých viac, vyberieme jednu z nich. Označme k počet hráčov K. Ak $k = n$, tak nastal druhý prípad zo zadania. Nech teda $k < n$. Zoberme hráča H_0 z H, ktorý nie je v K. Ak by nad niektorými hráčmi z K vyhral a nad niektorými prehral, tak potom v kružnici K existujú dvaja po sebe idúci hráči K_j a K_{j+1} takí, že K_j porazil H_0 a H_0 porazil K_{j+1}. To znamená, že H_0 môžeme pridať do kružnice, čo je však spor s maximálnosťou kružnice K. Preto hráči z H, ktorí nie sú v K, buď so všetkými hráčmi z K vyhrali, označme ich ako množinu víťazov V, alebo so všetkými prehrali, označme ich ako množinu porazených P. Môže nastať niekoľko možností.

- Ak $V = \emptyset$, tak stačí zvoliť $A = K$ a $B = P$.
- Ak $P = \emptyset$, tak stačí zvoliť $A = V$ a $B = K$.
- Ak V aj P sú neprázdne a zároveň všetci z V vyhrali nad všetkými z P, tak opäť nastal prvý prípad zo zadania a stačí položiť napríklad $A = V$ a $B = K \cup P$.

Mohlo by sa stať, že niekto z P porazil niekoho z V? Ak áno, tak pridaním týchto dvoch hráčov (za sebou) na ľubovoľnú pozíciu do kružnice K sled kružnice nenarušíme a ešte ju zväčšíme. To je spor s jej maximálnosťou.

Ukázali sme, že vždy nastane jeden alebo druhý prípad zo zadania. Tým sme úlohu vyriešili.

3.3

Ako by sme vedeli zaručiť nenulovosť výrazu, do ktorého môžeme dosadzovať ľubovoľné prvky (aj) z nekonečne veľkých podmnožín prirodzených čísel? Mohli by nám pomôcť kongruencie (zvyšky po delení nejakým číslom) a to ako pri dokazovaní nenulovosti, tak aj pri delení množiny prirodzených čísel na niekoľko podmnožín.

Zoberme prvočíslo p väčšie ako $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$. To, že p je „dostatočne veľké“, nám pomôže časom. Ďalej označme $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Dajme do množiny N_1' všetky prirodzené čísla, ktoré dávajú po delení p zvyšok 1. Ak zoberieme ľubovoľnú n-ticu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prvkov množiny N_1', tak

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \equiv a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S \pmod{p}.$$

Vďaka voľbe prvočísla p platí $-p < S < p$ a zo zadania vieme, že $S \neq 0$. Preto p nedelí S, čo znamená, že výraz

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \tag{1}$$

je nenulový. Analogicky môžeme dodefinovať $N_2', N_3', \ldots, N_{p-1}'$ tak, že N_i' bude obsahovať prirodzené čísla, ktoré dávajú po delení p zvyšok i. Potom ak $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú z N_i', tak

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \equiv (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)i = Si \pmod{p},$$

ale keďže p nedelí S ani i, tak výraz (1) je opäť nenulový. Tým sme rozdelili „skoro všetky“ prirodzené čísla do $p - 1$ vhodných skupín. Problém máme akurát s číslami deliteľnými p. Nemôžeme všetky dať do jednej skupiny. To by bolo ekvivalentné tomu, dať všetky prirodzené čísla do jednej množiny. Môžeme ich však nejako primiešať do už existujúceho rozdelenia na $p - 1$ množín. Nech N_i je množina takých čísel $n \in \mathbb{N}$, že

- $n \in N_i'$ alebo
- n sa dá napísať ako $n = p^k \cdot m$, kde p nedelí m a $m \in N_i'$.

Je jednoduché dokázať, že takto rozdelíme $\mathbb{N}$ na $p-1$ disjunktných množín N_1, N_2, $\ldots$, N_{p-1}. Symbolicky sa to dá napísať ako[9]

$$N_i = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} p^k N_i'.$$

Dokážeme, že toto rozdelenie je už vyhovujúce.

Majme ľubovoľnú n-ticu $x_1, x_2, \ldots, x_n \in N_i$. Nech maximálna mocnina p, ktorá delí všetky tieto čísla, je p^k. Nech $x_1', x_2', \ldots x_m'$ je podpostupnosť tých, ktoré sú deliteľné p^k, ale nie p^{k+1} a nech $a_1', a_2', \ldots, a_m'$ sú k nim prislúchajúce páry z výrazu (1). Keď sa na (1) pozrieme modulo p^{k+1}, dostaneme

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \equiv (a_1'x_1' + \cdots + a_m'x_m') \equiv (a_1' + \ldots + a_m')ip^k \pmod{p^{k+1}}.$$

Keďže ľubovoľná podpostupnosť $a_1, a_2, \ldots, a_m$ má nenulový súčet v absolútnej hodnote menší ako p, tak nie je deliteľný p. Rovnako ani i nie je deliteľné p, preto posledná kongruencia nemôže byť nulová modulo p^{k+1}, čo opäť implikuje nenulovosť výrazu (1). Stačilo teda len $p-1$ množín a dokonca sa nám ich podarilo popísať konštrukčne.

3.4

(Podľa *Josefa Tkadleca.*) Musíme ukázať platnosť dvoch nerovností. Prvá z nich je jednoduchšia a dá sa dokázať iba upravovaním výrazov a opakovaným používaním podmienky $x+y+z=1$. Uvedieme trochu poučnejšie riešenie, ktoré používa techniku *mixing variables.* Označme

$$V(x,y,z) = (1-x^2)^2 + (1-y^2)^2 + (1-z^2)^2.$$

Chceme dokázať $V(x,y,z) \geqq 2$. Rovnosť nastáva, keď $x=1$, $y=z=0$ a v ďalších dvoch cyklických prípadoch. Vyzerá to teda, že čím „ďalej“ sú od seba x, y, z, tým je ten výraz menší. Túto vlastnosť vieme nejakým spôsobom napísať aj matematicky, napr., že $V(x,y,z)$ je väčšie ako $V(0,x+y,z)$[10]. Skúsime to dokázať:

$$\begin{aligned} V(x,y,z) &\geqq V(0,x+y,z),\\ 1-2x^2+x^4+1-2y^2+y^4 &\geqq 1+1-2(x+y)^2+(x+y)^4,\\ 4xy &\geqq 4x^3y+6x^2y^2+4xy^3,\\ 4 &\geqq 4(x+y)^2-2xy. \end{aligned}$$

Posledná nerovnosť zrejme platí, lebo $(x+y)^2 \leqq 1$. Keďže úpravy boli ekvivalentné, tak platí aj nerovnosť, ktorú sme chceli dokázať. Použitím tohto odhadu a symetrickosti výrazu V máme

$$V(x,y,z) \geqq V(0,x+y,z) = V(x+y,z,0) \geqq V(0,x+y+z,0) = V(0,1,0) = 2.$$

[9] Keď A je množina a b číslo, tak pod označením bA rozumieme množinu všetkých súčinov ba, kde a je ľubovoľný prvok množiny A.

[10] Toto je presne tá technika mixing variables. Premenné x a y sme trochu „vzdialili“ na 0 a $x+y$ (majte na pamäti podmienku $x+y+z=1$) a keďže sme menili len dve premenné, tak sa dokazovanie ešte zjednoduší.

Tým sme dokázali prvú nerovnosť.

Druhá nerovnosť je náročnejšia a riešenie je o niečo prácnejšie. Najprv zadefinujeme isté rozumné označenia, aby sa nám dobre pracovalo. Nech

$$\begin{aligned}A &= x^2 + y^2 + z^2,\\ B &= xy + yz + zx,\\ C &= x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2,\\ D &= xyz.\end{aligned}$$

Ľahko možno odvodiť, že

$$x^4 + y^4 + z^4 = A^2 - 2C = 4B^2 - 4B + 1 - 2C = 2C - 4B + 8D + 1.$$

Potom vieme výraz $(1 - x^2)^2 + (1 - y^2)^2 + (1 - z^2)^2$ napísať ako

$$3 - 2A + (2C - 4B + 8D + 1) = 4 - 2(A + 2B) + 2C + 8D = 2 + 2C + 8D.$$

V poslednom kroku sme využili $A + 2B = (x + y + z)^2 = 1$. Všimnime si, že z tohto zápisu ihneď vyplýva prvá nerovnosť. Pokračujme ďalej. Výraz $(1 + x)(1 + y)(1 + z)$ vieme napísať ako $2 + B + D$. Tým pádom chceme dokázať nerovnosť

$$\begin{aligned}2 + 2C + 8D &\leqq 2 + B + D,\\ 2C + 7D &\leqq B.\end{aligned}$$

Pomocou rovnosti $B^2 = C + 2D$ vieme nahradiť písmenko C a dostaneme ekvivalentnú nerovnosť

$$0 \leqq B - 2B^2 - 3D.$$

Využitím známej nerovnosti $A \geqq B$ dostaneme $B - 2B^2 = B(1 - 2B) = BA \geqq B^2$. Stačí teda dokázať

$$0 \leqq B^2 - 3D,$$

čo sa po opätovnom použití $B^2 = C + 2D$ opäť zjednoduší na

$$D \leqq C.$$

Viac sa to už zjednodušiť nepodarí a tak opäť prejdime k premenným x, y a z. Dostaneme

$$xyz \leqq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2.$$

Po vynásobení ľavej strany $x + y + z$ a „jemnej“ úprave dostaneme

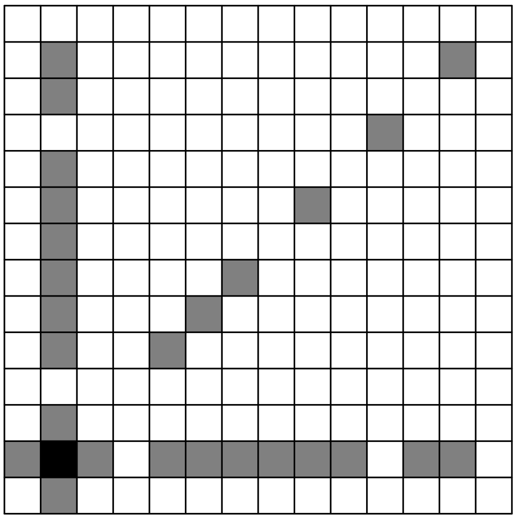
$$(xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 \geqq xy \cdot yz + yz \cdot zx + zx \cdot xy,$$

čo je opäť skrytá jednoduchá nerovnosť ekvivalentná s $A \geqq B$. Tým sme dokázali aj druhú nerovnosť.

Poznámka. Toto zďaleka nie je jediný postup, ale je to návod, ako veľmi úsporne zapísať prácne riešenie.

3.5

Úloha sa trošku zjednoduší, keď si uvedomíme, že kroky šachového jazdca sú vo všetkých ôsmich smeroch symetrické. Odtiaľ vyplýva napríklad to, že ak navzájom vymeníme pozície oboch jazdcov, tak sa herná situácia nezmení. Toto bude platiť, aj keby sme jazdcov menili po každom ťahu. Preformulujeme teda úlohu tak, že obaja hráči striedavo ťahajú jedným a tým istým jazdcom, pričom v každom kroku sa musia priblížiť k políčku $(0,0)$.



Obr. 55

Na obr. 55 sú znázornené pozície v prvom kvadrante: tmavé políčka sú prehrávajúce a biele vyhrávajúce. Políčko $(0,0)$, ktoré je tiež prehrávajúce, je znázornené čiernou. Všimnime si, že všetky prehrávajúce pozície ležia v riadku $y=0$, stĺpci $x=0$ alebo na diagonálach $x=y$ a $x=-y$ (na obr. 55 vidíme len prvú z nich). Dokážeme, že to tak bude vždy.

Zaveďme nasledovnú terminológiu: políčka spĺňajúce $x=0$, $y=0$, $x=y$ alebo $x=-y$ nazveme *okrajové*, všetky ostatné políčka budeme volať *vnútorné*. Zo symetrie stačí pracovať len v jednom „polkvadrante“, napr. v oblasti $0 \leqq x \leqq y$. Dokážeme, že:

- z každej vyhrávajúcej okrajovej pozície sa dá dostať do prehrávajúcej pozície pomocou dovolených krokov v smere $(-1,-2)$;
- každá vnútorná pozícia je vyhrávajúca.

Postupovať budeme indukciou podľa vzdialenosti pozície od nuly. Takto budeme totiž môcť predpokladať, že tvrdenie platí pre všetky pozície, do ktorých sa vieme dostať. Skontrolujeme, že tvrdenie platí pre všetky pozície na obrázku, stačí teda pokračovať v indukcii len pre dostatočne veľké y (napr. $y \geqq 12$).

Predpokladajme, že sme vo vyhrávajúcej pozícii $(0,n)$. Z definície vyhrávajúcej pozície odtiaľto musí existovať postupnosť dovolených krokov v tom istom smere vedúcich do prehrávajúcej pozície. Až na symetriu máme dva rôzne dovolené smery: $(+2,-1)$ a $(-1,-2)$. Ukážeme, že prvý z nich určite do prehrávajúcej pozície nevedie. Podľa indukčného predpokladu sú všetky vnútorné pozície, do ktorých sa vieme dostať, vyhrávajúce. Stačí teda ukázať, že krokmi $(+2,-1)$ sa nevieme dostať do žiadnej okrajovej pozície. Je to tak preto, že po určitom počte krokov sa naša vzdialenosť od nuly začne zväčšovať, a toto sa stane skôr ako vôbec stihneme prísť na diagonálu $x=y$. Po k krokoch stojíme na políčku $(2k, n-k)$. Ďalší krok môžeme spraviť, pokiaľ

$$\begin{aligned}(2k+2)^2+(n-k-1)^2 &< (2k)^2+(n-k)^2,\\ (2k)^2+8k+4+(n-k)^2-2(n-k)+1 &< (2k)^2+(n-k)^2,\\ 10k+5 &< 2n.\end{aligned}$$

Čiže môžeme urobiť najviac $n/5$ krokov. Na to, aby sme sa dostali na diagonálu, ich ale potrebujeme až $n/3$. To znamená, že týmto smerom sa nevieme dostať do žiadnej okrajovej pozície, preto do prehrávajúcej pozície musí viesť smer $(-1,-2)$.

Teraz predpokladajme, že sme vo vyhrávajúcej pozícii (n,n). Tak ako minule, zasa máme až na symetriu dva rôzne smery, ktoré zmenšia vzdialenosť od nuly. Sú to $(-2,+1)$ a $(-1,-2)$. Pozrime sa na prvý z nich. Ak sme už spravili k krokov, tak ďalší môžeme spraviť len ak

$$\begin{aligned}(n-2k-2)^2+(n+k+1)^2 &< (n-2k)^2+(n+k)^2,\\ (n-2k)^2-4(n-2k)+4+(n+k)^2+2(n+k)+1 &< (n-2k)^2+(n+k)^2,\\ 10k+5 &< 2n,\end{aligned}$$

čo je opäť málo na to, aby sme narazili na okrajovú pozíciu (tentoraz potrebujeme až $n/2$ krokov na to, aby sme dosiahli stĺpec $x=0$). Do prehrávajúcej pozície musí preto viesť smer $(-1,-2)$.

Ostáva už len dokázať, že vnútorná pozícia (x,y) je vyhrávajúca, teda že sa z nej vieme dostať do prehrávajúcej pozície. To už nie je ťažké. Jednoducho začnime robiť kroky $(-1,-2)$ a po istom čase určite narazíme na okrajovú pozíciu (pracujeme v oblasti $0 \leqq x \leqq y$). To preto, že každým krokom sa vzdialenosť od stĺpca $x=0$ aj od diagonály $x=y$ zmenší presne o jedna, teda ich nemôžeme preskočiť. Máme dve možnosti: buď je táto pozícia prehrávajúca (a môžeme skončiť tu) alebo je vyhrávajúca. V druhom prípade však podľa indukčného predpokladu stačí pokračovať v tomto smere ďalej a určite narazíme na prehrávajúcu pozíciu.

Tak to by bolo. Teraz už vieme, že všetky vnútorné pozície sú vyhrávajúce. Tiež sme dokázali, že okrajová pozícia je vyhrávajúca len vtedy, keď sa z nej dá krokmi $(-1,-2)$ dostať do prehrávajúcej pozície. Ukážeme, že takáto prehrávajúca pozícia, ktorá musí byť tiež okrajová, je vždy najviac jedna (pre políčka dostatočne ďaleko od nuly).

Najprv sa pozrime na políčko $(0,n)$. Smer $(-1,-2)$ je symetrický k $(1,2)$, pre jednoduchosť zoberme druhý z nich. Rovnako ako v predošlom dôkaze môžeme počítaním krokov ukázať, že týmto smerom vždy vieme prísť po diagonálu $x=y$, riadok $y=0$ už ale dosiahnuť nevieme. Na to, aby sme doskočili presne na diagonálu, potrebujeme, aby n bolo deliteľné tromi, inak ju netrafíme. Jediné okrajové políčko, ktoré teda vieme dosiahnuť z $(0, n)$, je $(n/3, n/3)$, a aj to len vtedy, keď n je deliteľné tromi.

Podobne, jediné okrajové políčko (až na symetriu) dosiahnuteľné z (n, n) je $(0, n/2)$, a to len v prípade, keď n je párne.

Pre dostatočne veľké n teda dostávame, že

- pozícia $(0, n)$ je vyhrávajúca práve vtedy, keď n je deliteľné tromi a $(n/3, n/3)$ je prehrávajúca;
- pozícia (n, n) je vyhrávajúca práve vtedy, keď n je párne a $(0, n/2)$ je prehrávajúca.

V okolí nuly naša analýza zlyháva, „ručne“ skontrolujeme, že jediné výnimky sú vyhrávajúce pozície $(0, 2)$ a $(1, 1)$. Teraz už dokončiť riešenie nie je problém. Vyhrávajúce okrajové pozície sú práve tie tvaru $(0, 2 \cdot 6^k)$, $(0, 3p \cdot 6^k)$, $(6^k, 6^k)$ a $(2q \cdot 6^k, 2q \cdot 6^k)$, pričom $k \geqq 0$, $p \neq 1$ a p je nepárne, $q \neq 2$ a q nie je deliteľné tromi. V ostatných „polkvadrantoch“ je riešenie symetrické.

Štvrtá séria

4.1

a) Poďme hľadať opísanú skrinku. Vyskúšajme najskôr takú, v ktorej budú len čísla deliteľné šiestimi. Táto zjavne nevyhovuje, veď ľubovoľná šestica čísel z nej robí špeciálnu skrinku. Takýto neúspech nás však nemôže odradiť. Práve naopak. Už vieme, že v „nešpeciálnej“ skrinke musí byť menej ako šesť čísel deliteľných šiestimi. Nech je ich napríklad päť. K nim zoberme ešte päť čísel, ktoré dávajú po delení šiestimi zvyšok 1. Je táto skrinka špeciálna? Najskôr si uvedomme, že na to, aby bolo číslo deliteľné šiestimi, musí mať zvyšok po delení šiestimi rovný nule. V našej skrinke však takýto zvyšok súčtu dosiahnuť nevieme. Najmenší dosiahnuteľný zvyšok je totiž 1. Ten dostaneme tak, že vezmeme päť čísel deliteľných šiestimi a jedno, ktoré dáva zvyšok 1. Naopak najväčší možný zvyšok môže byť 5. To znamená, že zvyšok 0 po delení šiestimi nevieme dosiahnuť a teda žiaden súčet šiestich čísel z našej skrinky nemôže byť deliteľný šiestimi. Príkladom takejto skrinky je $\{6, 7, 12, 13, 18, 19, 24, 25, 30, 31\}$.

b) Využijeme, že číslo 6 je zložené a budeme sa najprv zaoberať paritou a potom deliteľnosťou tromi. Takýto prístup nám ušetrí mnohé strany. Rozdeľme čísla v skrinke na dve skupinky – párne a nepárne. Keďže čísel je nepárny počet (11), práve v jednej skupinke je nepárny počet čísel. Preto jedno číslo z tejto skupinky vynecháme a ostatné popárujeme v rámci svojich skupiniek. Takto dostaneme päť dvojíc čísel s peknou vlastnosťou, že súčet v rámci každej dvojice je párny. Keďže šesť je párne číslo, môže byť zvyšok po delení šiestimi každého z týchto súčtov rovný jednému z čísel 0, 2 alebo 4. Teraz si stačí uvedomiť, že ak sa niektorý z týchto zvyškov vyskytuje aspoň trikrát, tak stačí zobrať prislúchajúcich šesť čísel (čiže tri dvojice) a tie majú súčet deliteľný šiestimi. Ak to tak nie je, tak sa každý zo zvyškov 0, 2, 4 vyskytuje aspoň raz. To však znamená, že ak vyberieme pre každý zvyšok jednu dvojicu, ktorá má v súčte tento zvyšok po delení šiestimi, tak sme hotoví. To preto, lebo týchto šesť čísel má zvyšok $0 + 2 + 4 = 0$ po delení šiestimi, čo sme chceli.

4.2

(Podľa *Ladislava Bača a Andrey Chlebíkovej.*) Budeme postupovať sporom. Nech nie je pravda, že tvrdenie zo zadania platí pre každé prirodzené $n \geqq 5$. My zoberme najmenšie také n, pre ktoré neplatí. Platí teda opak, t. j. existuje n členov v $n+1$ výboroch tak, že každá dvojica výborov buď nemá spoločných členov alebo má práve dvoch spoločných členov. Úplne rovnaké výbory vylučujeme, pretože je to tak v zadaní a jedného spoločného člena zakazujeme kvôli sporu.

V $n+1$ trojčlenných výboroch je dohromady $3n+3$ členov, niektorí zarátaní aj viackrát. Máme iba n členov, preto z Dirichletovho princípu dostávame, že určite existuje človek, ktorý je členom aspoň štyroch výborov. Označme tohto človeka A. Skúmajme, ako tieto výbory môžu vyzerať.

Vezmime nejaký výbor, ktorého členom je A a označme jeho ďalších členov B a C. Ako sme povedali, A je okrem toho členom aspoň ďalších troch výborov. Keďže sme zakázali práve jedného spoločného člena dvojice výborov, v každom z týchto zvyšných výborov musí okrem A byť aj B alebo C (ale nie obaja).

Skúsme najprv situáciu, že by tým spoločným členom bol aj B aj C. Tri výbory by teda bez ujmy na všeobecnosti mohli byť ABC, ABD a ACD (člen D musí byť v oboch pridaných výboroch, inak by mali iba jedného spoločného člena A). K týmto trom ešte potrebujeme vytvoriť minimálne štvrtý výbor obsahujúci A. Čo o ňom vieme povedať? Musí obsahovať okrem A aj jedného člena z dvojice B, C. Situácia je symetrická, povedzme že je to B. Ostáva tretí člen, C ani D to byť nemôže, inak by sme tam mali dva identické výbory ABC resp. ABD. Ale to je potom spor – tento výbor by mal s výborom ACD iba jedného spoločného člena. Tadiaľto cesta nevedie.

Zatiaľ sme zistili, že všetky výbory obsahujúce člena A musia mať okrem neho jedného spoločného člena, bez ujmy na všeobecnosti člena B (nemôže to byť aj B aj C). Označme k počet výborov obsahujúcich dvojicu AB, pričom $k \geqq 4$, pretože výbory obsahujúce A sú aspoň štyri. Ostatní členovia týchto k výborov musia byť rôzni, pomenujme ich $X_1, X_2, \ldots, X_k$. Pozorný čitateľ si určite všimol, že toto je možné iba pre $n \geqq 6$, pre $n = 5$ sme týmito úvahami tvrdenie vlastne už dokázali. Žiadny človek X_i pre $1 \leqq i \leqq k$ už nemôže byť členom žiadneho iného výboru. Ak by bol, musel by mať tento výbor s výborom ABX_i spoločných dvoch známych, teda okrem X_i aj A alebo B. Avšak všetky výbory obsahujúce A sme už popísali ako $ABX_1, ABX_2, \ldots, AB_k$, preto by to musel byť spoločný člen B. Takže by sme mali nejaký výbor BX_iY, ten ale musí mať dvoch spoločných známych aj s ABX_j pre $i \neq j$. Lenže z toho dostávame, že nutne $A = Y$ a výbor BX_iY je totožný s pôvodným ABX_i. Dokázali sme, že X_i nemôže byť pre žiadne i členom iného výboru než ABX_i.

Ak sa pozrieme na to, čo sa nám už o štruktúre výborov podarilo zistiť, zistíme, že $k+2$ ľudí $A, B, X_1, X_2, \ldots, X_k$ je „izolovaných“ od zvyšku, majú svojich k vlastných výborov (do cudzích záležitostí sa nemiešajú). Inak povedané, žiadny zo zmienených ľudí nie je členom nejakého výboru, ktorý by mal nejakých iných členov než niekoho spomedzi spomínaných $k+2$ ľudí. A máme tam vôbec ešte nejaké iné výbory? Áno, lebo k je najviac $n-2$ (kvôli počtu ľudí n) a do celkového počtu $n+1$ výborov ešte niečo určite zostáva. Táto skupina izolovaných ľudí spĺňa samostatne všetky potrebné podmienky, preto si ju odtiaľ môžeme odmyslieť. Ostalo nám $n - (k + 2) = n - k - 2$ ľudí a $(n + 1) - k = n - k + 1$ výborov.

Podľa predpokladu hore sme povedali, že n je najmenšie možné, pre ktoré tvrdenie zo zadania neplatí. Pre $n-k-2 < n$ ľudí a $n-k-1$ výborov (a tým skôr aj pre $n-k+1$ výborov) tvrdenie zo zadania preto musí platiť, nájdeme tam dvojicu výborov, ktoré majú spoločného práve jedného člena. Lenže potom to musí platiť aj pre n, pretože nájdená dvojica pre $n - k - 2$ ľudí a $n - k - 1$ výborov je dobrou dvojicou aj pre n ľudí a $n + 1$ výborov. No a to je spor s predpokladom, že pre n už tvrdenie zo zadania neplatí.

Má to ale ešte jeden háčik. Môže sa totiž stať, že po odobratí našej izolovanej skupiny, teda pri znížení počtu ľudí a výborov na $n - k - 2$ resp. $n - k + 1$, klesne hodnota $n - k - 2$ pod 5, čím stratíme možnosť urobiť to, čo vyššie (lebo podľa zadania máme dolné obmedzenie 5 na počet ľudí). Tento háčik sa dá rýchlo odbaviť jednoduchým argumentom – pri počte ľudí štyri a menej už nejde urobiť toľko výborov, koľko potrebujeme. Podrobnosti si premyslite sami.

4.3

Najprv sa dohodneme na označení. Štvorčeky nekonečného štvorčekového papiera vieme reprezentovať ako usporiadané dvojice (a, b), pričom $a, b \in \mathbb{Z}$. Množinu všetkých takýchto usporiadaných dvojíc bežne označujeme $\mathbb{Z}^2$. Na takýchto dvojiciach môžeme dodefinovať všelijaké operácie, napríklad sčitovanie. Ak $x, y \in \mathbb{Z}^2$, teda $x = (a_1, b_1)$, $y = (a_2, b_2)$, tak tieto dvojice budeme sčitovať ako vektory: $x + y = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$. Takto definované sčitovanie zabezpečí vzťah $x+y = y+x$ pre všetky dvojice $x, y \in \mathbb{Z}^2$.

Položme do roviny prvú šablónu ľubovoľne. Nech zakrýva políčka $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Z}^2$. Aké políčka bude zakrývať, keď ju posunieme inam (a ponecháme orientáciu)? Zrejme to budú $x_1 + x$, $x_2 + x$, $\dots$, $x_n + x$ pre nejaké $x \in \mathbb{Z}^2$. Políčko x tu chápeme hlavne ako dvojicu čísel, o ktoré posunieme prvé a druhé súradnice políčok šablóny.

Vieme, že v každom štvorčeku je nejaké reálne číslo. Matematicky to môžeme popísať tak, že máme danú funkciu $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$. Hodnota na štvorčeku $x \in \mathbb{Z}^2$ bude $f(x)$. Predpokladáme, že pre ľubovoľné posunutie prvej šablóny je súčet štvorčekov, čo zakrýva, kladný. V našom označení to znamená, že pre každé $x \in \mathbb{Z}^2$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i + x) > 0. \tag{1}$$

Teraz zapojíme druhú šablónu. Nech pri nejakom položení do roviny zakryje štvorčeky y_1, y_2, $\dots$, y_m, ktoré sú prvkami $\mathbb{Z}^2$. Za využitia predpokladu o prvej šablóne chceme dokázať, že túto šablónu vieme umiestniť tak, aby zakrývala kladný súčet. Skúsme dosadzovať y_1, y_2, $\dots$, y_m za x do (1). Dostávame nerovnice tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i + y_j) > 0$$

pre $j = 1, 2, \dots, m$. Ich sčítaním cez všetky možné j dostaneme

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_i + y_j) > 0. \tag{2}$$

Rovnica (2) nám veľmi pomôže vďaka svojej symetrii. Môžeme vymeniť poradie súm a získame

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} f(y_j + x_i)\right) > 0.$$

Výraz v zátvorke je súčet políčok, ktoré zakryje druhá šablóna pri posunutí o x_i. Keďže sčitujeme n takýchto súčtov a výsledok je kladný, musí existovať také $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, že

$$\sum_{j=1}^{m} f(y_j + x_k) > 0$$

a preto existuje umiestnenie druhej šablóny, ktoré zakrýva kladný súčet. A to sme chceli dokázať.

4.4

(Podľa *Josefa Tkadleca.*) Ukážeme, že druhý hráč dokáže zariadiť, aby daný polynóm P mal reálny koreň. Stačí mu na to, aby pre nejaké reálne číslo c bolo $P(c) < 0$. Polynóm je totiž párneho stupňa, takže „pôjde do plus nekonečna“ keď budeme veľmi zmenšovať alebo veľmi zväčšovať vstupnú hodnotu. Okrem toho je to spojitá funkcia, preto ak niekde nadobúda kladnú hodnotu a inde zápornú, tak niekde medzi nimi určite leží nejaký koreň.

Tak poďme k stratégii. Máme 9 koeficientov, ktoré treba doplniť – 4 pri párnych mocninách a 5 pri nepárnych. Počas prvých šiestich ťahov doplní druhý hráč vždy koeficient pri nejakej mocnine x opačnej parity ako doplnil prvý hráč. V siedmom ťahu má teda prvý hráč na výber jeden koeficient pri párnej mocnine a dva pri nepárnych mocninách. Riešenie ďalej závisí od výberu prvého hráča.

Nech si vyberie jeden z dvoch koeficientov pri nepárnych mocninách. Potom druhý hráč doplní koeficient pri párnej mocnine tak, aby súčet všetkých koeficientov pri párnych mocninách bol 0. Tým dosiahne

$$\begin{aligned} P(1) &= 1 + a_9 + a_8 + a_7 + \dots a_2 + a_1 + 1,\\ P(-1) &= 1 - a_9 + a_8 - a_7 + \dots a_2 - a_1 + 1. \end{aligned}$$

Sčítaním dostaneme

$$P(1) + P(-1) = 2(1 + a_8 + a_6 + a_4 + a_2 + 1) = 0,$$

lebo posledný koeficient pri párnej mocnine sme vhodne vybrali, aby tento súčet bol nula. Vidíme, že aspoň jedna z hodnôt $P(1)$ a $P(-1)$ bude menšia resp. rovná nule a teda P bude mať reálny koreň. (Bez ohľadu na to, čo vyplní v poslednom ťahu prvý hráč.)

Teraz predpokladajme, že si prvý hráč vyberie koeficient pri párnej mocnine a druhému ostanú na výber už len dva pri rôznych nepárnych mocninách. Urobíme podobný trik ako predtým, len bude trochu zložitejší. Polynóm P môžeme po siedmom ťahu napísať v tomto prípade ako $P(x) = Q(x) + a_i x^i + a_j x^j$, kde a_i a a_j sú zostávajúce neurčené koeficienty, pričom i, j sú nepárne čísla, $i > j$. Skúmajme hodnotu $P(2)$ a $P(-1)$:

$$\begin{aligned} P(2) &= Q(2) + a_i 2^i + a_j 2^j, \\ P(-1) &= Q(-1) - a_i - a_j. \end{aligned}$$

Teraz vynásobíme druhú rovnicu číslom 2^j, sčítame ich a dostaneme

$$P(2) + 2^j P(-1) = Q(2) + 2^j Q(-1) + a_i(2^i - 2^j).$$

Keď sa na to poriadne pozrieme, vidíme, že koeficient a_i vie druhý hráč vybrať tak, aby pravá strana bola rovná nule. Takže opäť dostaneme, že buď $P(2)$ alebo $P(-1)$ je menšie alebo rovné nule.

Tým sme dokázali, že vždy vyhrá druhý hráč.

4.5

Vieme, že pre každú dvojicu matematikov je počet tých, ktorí sa pozdravili s oboma, rovnaký. Označme tento počet l. Vezmime ľubovoľného matematika a označme ho M. Vieme, že M sa pozdravil s $3k+6$ matematikmi a každý z nich sa pozdravil s $3k+5$ matematikmi rôznymi od M. To je spolu $(3k+6)(3k+5)$ matematikov, niektorí sú zrejme zarátaní viackrát. Každý matematik B je v tom počte zarátaný práve toľkokrát, koľko existuje matematikov C, ktorí sa pozdravili s A, ale aj s B, čo je podľa zadania presne l. Tým dostávame vzťah

$$(3k+6)(3k+5) = (12k-1)l. \tag{1}$$

Aby l bolo prirodzené, musí $12k-1$ deliť $(3k+5)(3k+6)$. Keďže $12k-1$ nie je deliteľné prvočíslom 3, tak musí deliť dokonca $(3k+5)(k+2) = 3k^2+11k+10$. To vieme napísať aj ako

$$(12k-1, 3k^2+11k+10) = 12k-1, \tag{2}$$

kde (a, b) značí najväčší spoločný násobok celých čísel a, b. Upravujme

$$\begin{aligned} (12k-1, 3k^2+11k+10) &= (12k-1, 12k^2+44k+40) = (12k-1, 45k+40) = \\ &= (12k-1, 180k+160) = (12k-1, 175). \end{aligned}$$

Aby bolo splnené (2), musí $12k-1$ deliť číslo 175. Overením deliteľov $175 = 5^2 \cdot 7$ zistíme, že vyhovuje jedine 35 a preto $k=3$. Z (1) dostávame $l=6$.

Dokázali sme, že ak daná situácia mohla nastať, tak sa stretlo 36 matematikov, každý sa pozdravil s 15 matematikmi a pre každú dvojicu existuje práve 6 matematikov, ktorí sa pozdravili s oboma. Takýto prípad naozaj môže nastať. Poskytneme návod, ako ho skonštruovať. Detaily prenecháme na čitateľa.

Keďže matematikov je taký pekný počet (štvorec), reprezentujme ich ako usporiadané dvojice čísel (a, b), kde $a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Takýchto dvojíc je presne 36 a túto množinu zvykneme označovať $\mathbb{Z}_6^2$. Je to množina usporiadaných dvojíc zvyškov po delení 6. (Množina $\mathbb{Z}_6$ je množina zvyškov po delení 6.) S takýmito dvojicami môžeme robiť rôzne veci. Napríklad môžeme definovať sčitovanie po zložkách, teda ak $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{Z}_6^2$, definujeme $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Čo sa stane ak napr. $x_1 + x_2 > 5$? Jednoducho zoberieme zvyšok $x_1 + x_2$ po delení 6. Akoby sme stále pracovali len so zvyškami.[11] Teraz zoberme ľubovoľného matematika (a, b) a nechajme ho pozdraviť sa s matematikmi

$$\begin{aligned} &(a, b) + (k, 0) \quad \text{pre } k \in \mathbb{Z}_6,\ k \neq 0, \\ &(a, b) + (0, k) \quad \text{pre } k \in \mathbb{Z}_6,\ k \neq 0, \\ &(a, b) + (k, k) \quad \text{pre } k \in \mathbb{Z}_6,\ k \neq 0. \end{aligned}$$

Zostáva overiť pár faktov:

- Ak sa matematik (a, b) pozdravil s matematikom (c, d), tak to platí aj naopak.
- Každý matematik sa pozdravil s práve pätnástimi inými matematikmi.
- Pre každých dvoch matematikov existuje práve 6 matematikov, ktorí sa pozdravili s oboma.

Dôkaz týchto tvrdení sa dá urobiť formálne, ale aj pomocou pekného obrázka. Vhodné je nakresliť množinu $\mathbb{Z}_6^2$ ako štvorec 6×6 a vyznačiť, s kým sa podľa nášho predpisu pozdraví nejaký matematik.

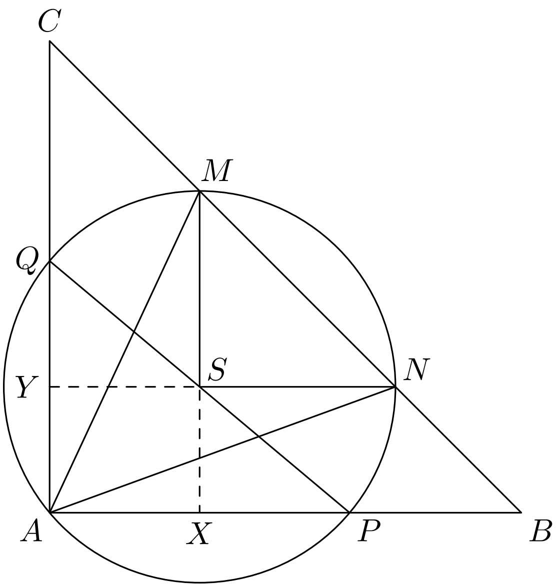
PIATA SÉRIA

5.1

Zadanie úlohy sa zdá až priveľmi pravouhlé. Nakreslime obr. 56 a pozrime sa na uhly, ktoré sa v ňom javia „pekne“. Na poradí M, N na úsečke BC nezáleží, nech teda M je bližšie k bodu C.

Kružnicu opísanú trojuholníku AMN označme k, jej polomer r a stred S. Potom $|MS| = |NS| = |PS| = |AS| = |QS| = r$, pretože sú to polomery kružnice k. Navyše PQ bude priemer tejto kružnice, lebo $|PAQ| = 90°$ a body P a Q ležia na nej. Keďže $|\measuredangle MAN| = 45°$, jemu prislúchajúci stredový uhol MSN bude pravý. Trojuholník MSN je teda rovnoramenný pravouhlý.

[11] Pre vysvetlenie pár príkladov: $(2, 5) + (2, 4) = (4, 3)$, $(1, 2) + (5, 4) = (0, 0)$.



Obr. 56

Platí $|\measuredangle SMN| = |\measuredangle ACN|$, preto $MS \parallel CA$ a $NS \parallel BA$. Označme X priesečník priamky MS so stranou AB a Y priesečník priamky NS so stranou AC. Potom z rovnobežnosti MX a CA, resp. NY a BA vyplýva $|\measuredangle YQS| = |\measuredangle XSP|$, resp. $|\measuredangle SPX| = |\measuredangle QSY|$ (súhlasné uhly). Trojuholníky QSY a SPX sú preto podobné. Dokonca sú zhodné, pretože $|QS| = |SP|$. Pre ďalšie potreby označme $|YS| = |XP| = a$, $|QY| = |SX| = b$.

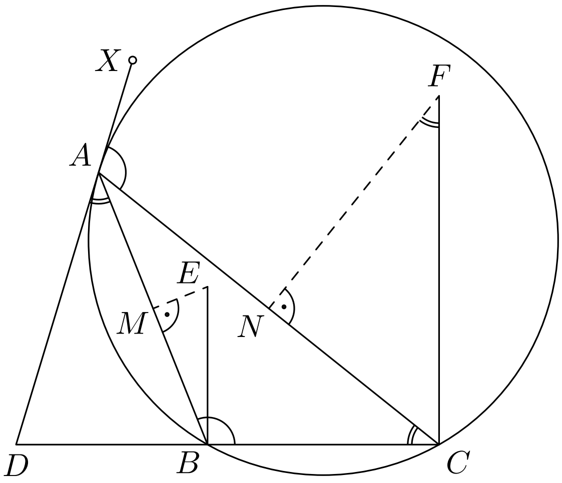
Do hry by sme konečne mohli zapojiť aj úsečky PB a QC, keďže obidve sa vyskytujú v tvrdení, ktoré chceme dokázať. Úsečka PB je súčasťou rovnoramenného pravouhlého trojuholníka MXB, platí teda $|MX| = |XP| + |PB|$. Podobne $|YN| = |CQ| + |QY|$. Poďme sa teraz konečne pustiť do úpravy súčtu dĺžok CQ a PB:

$$\begin{aligned}|CQ| + |PB| &= (|YN| - |QY|) + (|MX| - |XP|) = (|YN| - b) + (|MX| - a) = \\ &= (|YN| - a) + (|MX| - b) = (|YN| - |YS|) + (|MX| - |XS|) = \\ &= |SN| + |SM| = 2r.\end{aligned}$$

Ale $|PQ| = 2r$, pretože je to priemer. Dokázali sme, že $|PQ| = 2r = |CQ| + |PB|$.

5.2

Chceme dokázať, že body D, E a F ležia na jednej priamke. Keďže body E a F ležia na kolmiciach na úsečku BC, úsečky BE a CF sú rovnobežné. Predstavme si, že body D, E a F ležia na jednej priamke. Aj body D, B, C ležia na priamke a úsečka BE je rovnobežná s úsečkou CF. To znamená, že úsečka BE sa prenesie v rovnoľahlosti so stredom v bode D a koeficientom $k = |DC|/|DB|$ na úsečku CF a zrejme rovnako celý trojuholník DBE sa prenesie na trojuholník DCF. Z toho je zrejmé, že tieto dva trojuholníky sú podobné (obr. 57).



Obr. 57

Táto úvaha funguje aj opačným smerom. Ak dokážeme, že trojuholníky DCF a DBE sú podobné, tak potom už musia body D, E a F ležať na priamke. Na dokázanie podobnosti dvoch pravouhlých trojuholníkov stačí ukázať, že majú rovnaký pomer odvesien, teda $|CF|/|DC| = |BE|/|DB|$.

Pustíme sa do počítania týchto dĺžok, pričom našou snahou bude vyjadriť ich pomocou strán a uhlov trojuholníka ABC. Označme dĺžky jeho strán a, b, c a uhly α, β, γ. Označme ďalej M stred strany AB a N stred strany AC. Zrejme úsečka ME je kolmá na AB, keďže leží na osi strany AB. Trojuholník EMB je pravouhlý a podľa známych vzťahov máme

$$|BE| = \frac{|MB|}{\sin|\measuredangle BEM|}.$$

Platí $|\measuredangle MBE| = \beta - 90°$ a $|\measuredangle EMB| = 90°$, z čoho vyplýva $|\measuredangle BEM| = 180° - \beta$. Vieme, že dĺžka MB je polovicou dĺžky strany AB, teda

$$|BE| = \frac{c/2}{\sin(180° - \beta)} = \frac{c}{2\sin\beta}.$$

Všimnime si, že bod F je na rozdiel od bodu E mimo trojuholníka ABC. Preto podobnými výpočtami nedostaneme $|\measuredangle CFN| = 180° - \gamma$, ale vyjde $|\measuredangle CFN| = \gamma$. Z pravouhlého trojuholníka CFN dostaneme

$$|CF| = \frac{b}{2\sin\gamma}.$$

Ešte potrebujeme spočítať dĺžky úsečiek DB a DC. Zatiaľ sme nevyužili, že DA je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku ABC. Z obvodových a úsekových uhlov vieme, že

$$|\measuredangle BAD| = |\measuredangle BCA| = \gamma, \qquad |\measuredangle XAC| = |\measuredangle ABC| = \beta,$$

pričom bod X využívame len kvôli označeniu uhla.

Podľa sínusovej vety v trojuholníku DBA platí

$$\frac{|DB|}{\sin|\angle BAD|} = \frac{|AB|}{\sin|\angle ADB|}, \qquad \text{čiže} \qquad |DB| = \frac{c\sin\gamma}{\sin|\angle ADB|}.$$

Podľa sínusovej vety v trojuholníku DCA platí

$$\frac{|DC|}{\sin|\angle CAD|} = \frac{|CA|}{\sin|\angle ADC|}, \qquad \text{čiže} \qquad |DC| = \frac{b\sin(180^\circ-\beta)}{\sin|\angle ADB|} = \frac{b\sin\beta}{\sin|\angle ADB|}.$$

Vyjadrili sme všetky potrebné dĺžky a ľahko overíme platnosť rovnosti $|CF|/|DC| = |BE|/|DB|$, ktorú sme chceli dostať.

Diskusia. Na obr. 57 je uhol ABC väčší ako 90°. Takto nám vyšlo, že $|\angle BEM| = 180^\circ - \beta$. Ak by bol uhol ABC nanajvýš 90°, tak bod E nebude vnútri trojuholníka ABC a dostaneme $|\angle BEM| = \beta$. V ďalšom výpočte to však nerobí problém, keďže počítame len so sínusom tohto uhla a $\sin\beta = \sin(180^\circ - \beta)$.

Uvažovali sme prípad $|AB| < |CA|$, teda bod D bol bližšie k bodu B ako k bodu C. V situácii $|AB| = |CA|$ sa dotyčnica v bode A nepretne s priamkou BC, tento prípad preto nemusíme uvažovať. Ak $|AB| > |CA|$, tak bod D bude bližšie k bodu C a budeme postupovať analogicky.

5.3

(Podľa *Josefa Tkadleca.*) Po dôkladnom pochopení zadania sa môžeme pustiť do vypisovania prvých členov:

$$\begin{array}{llll} 1,1,2,1, & 2,2,2,3, & 1,2,2,3, & 2,3,2,4, \\ 1,3,2,5, & 1,2,2,6, & 1,4,2,7, & 1,4,2,8, \quad \ldots \end{array}$$

Napriek nepravidelnému začiatku vieme nahliadnuť, že ak postupnosť rozdelíme na štvorice, tak časom dosiahneme len štvorice typu $(1, n, 2, n+4)$, kde n sa postupne zvyšuje, vždy o jedna. Pokúsime sa dokázať pomocou indukcie, že postupnosť (počnúc štvoricou $(1, 4, 2, 8)$) má len členy tohto typu. Prvý indukčný krok je zrejmý. V druhom kroku predpokladajme, že máme postupnosť

$$\ldots \quad 1,4,2,8, \quad 1,5,2,9, \quad \ldots \quad 1,n,2,n+4,$$

pričom $n \geqq 4$, a chceme zistiť, aká je ďalšia štvorica. Prvé číslo za $n+4$ bude určite 1, pretože $n+4$ je v postupnosti určite len raz. Každá zo štvoríc $(1, m, 2, m+4)$, pričom $m \in \{4, 5, \ldots, n\}$, začínala jednotkou a dokonca aj tri štvorice pred $(1, 4, 2, 8)$ začínali rovnako. Preto vieme, že nasledujúci člen je aspoň $3 + (n-3) + 1 = n+1$. Väčšiu hodnotu by sme teoreticky mohli dosiahnuť s väčšou diferenciou, ktorá by potom musela byť aspoň 8. Jednotka, ktorá nasleduje po $n+4$, je na $(4n+17)$-tej pozícii. Maximálna dĺžka postupnosti s diferenciou aspoň 8 končiaca číslom $4n+17$ je

$$\left\lfloor \frac{(4n+17)-1}{8} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3.$$

Táto hodnota je však najviac $n+1$ pre $n \geqq 4$, čím sme dokázali, že nasledujúci člen je naozaj $n+1$. Tretie číslo v nami dopĺňanej štvorici bude 2, pretože číslo $n+1$ máme v postupnosti (využitím indukčného predpokladu a štruktúry prvých 28 členov postupnosti) práve dva razy. Posledné číslo bude aspoň $n+5$, pretože všetky čísla na pozíciách tvaru $4k+3$ sú 2 a je ich spolu $n+5$. Zrejme väčšie už nemôže byť.

Tým je indukcia kompletná. Odpoveď na otázku zo zadania je teraz jednoduchá. Je zrejmé, že

$$f(4n+8) = n+2.$$

5.4

Označme A_1, A_2 postupne päty výšok z vrcholu A na priamky BC, DC a nech H_1, H_2 sú ortocentrá trojuholníkov ABP, ADQ. Ukážeme, že tieto trojuholníky majú rovnaký obsah práve vtedy, keď $|AA_1| \cdot |AH_1| = |AA_2| \cdot |AH_2|$.

Nech α je spoločná veľkosť uhlov BAP a DAQ, pätu výšky z bodu P na stranu AB označme P_1. Štvoruholník $A_1H_1P_1B$ je tetivový, preto z mocnosti bodu A ku kružnici jemu opísanej vyplýva

$$|AA_1| \cdot |AH_1| = |AB| \cdot |AP_1| = |AB| \cdot |AP| \cos\alpha = \frac{2S_{ABP}}{\sin\alpha} \cos\alpha.$$

Podobne

$$|AA_2| \cdot |AH_2| = \frac{2S_{ADQ}}{\sin\alpha} \cos\alpha,$$

odkiaľ

$$S_{ABP} = S_{ADQ} \quad \Longleftrightarrow \quad |AA_1| \cdot |AH_1| = |AA_2| \cdot |AH_2|.$$

Teraz je už úloha jednoduchá. Predpokladajme, že priamka AC je kolmá na H_1H_2, ich priesečník označme H. Potom štvoruholníky A_1H_1HC a A_2H_2HC sú oba tetivové, čiže

$$|AA_1| \cdot |AH_1| = |AH| \cdot |AC| = |AA_2| \cdot |AH_2|.$$

Naopak, ak $|AA_1| \cdot |AH_1| = |AA_2| \cdot |AH_2|$, tak pre päty výšok G_1 a G_2 z vrcholov H_1 a H_2 na priamku AC platí

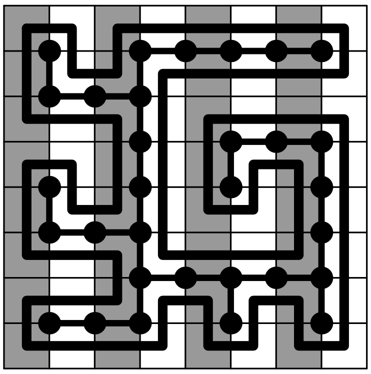
$$|AG_1| \cdot |AC| = |AA_1| \cdot |AH_1| = |AA_2| \cdot |AH_2| = |AG_2| \cdot |AC|.$$

Teda $G_1 = G_2$ a priamky AC a H_1H_2 sú navzájom kolmé.

5.5

(Podľa *Josefa Tkadleca*.) Princ svojou cestou po šachovnici ohraničí nejaký útvar U. Skúsme o ňom niečo zistiť. Ak strana jedného políčka šachovnice má dĺžku 1, tak obvod U je 64. (Princ urobil 64 ťahov.) Obsah môžeme získať jednoducho použitím Pickovej vety. Stredy políčok šachovnice tvoria mrežovú sieť. Zjavne U nemá vnútri žiadny z týchto mrežových bodov a na obvode práve 64. Podľa Pickovej vety je jeho obsah $64/2 - 1 = 31$. Teda ak sa pozrieme na pôvodnú šachovnicu, je v nej práve

31 rohov políčok, ktoré ležia vnútri U. Odteraz ich budeme volať vrcholy. (Na obr. 58 znázornené plnými krúžkami.) Každé dva vrcholy, ktoré sú vzdialené práve 1, spojíme hranou a dostaneme tak graf o 31 vrcholoch. Keďže princ prešiel cez všetky políčka jedným ťahom, je zrejmé, že tento graf neobsahuje kružnice. To znamená, že sa skladá z niekoľkých *stromov.* (Takýto graf voláme *les.*) Nie je ťažké si rozmysliet si, že ten strom musí byť práve jeden. Takže máme jeden strom s 31 vrcholmi a 30 hranami.



Obr. 58

Ofarbime šachovnicu zvislými pruhmi ako na obr. 58. Teraz budeme U a aj celú trasu princa zmenšovať tak, že budeme zo stromu postupne odrezávať *listy.* Budú nastávať dva rôzne prípady:

- Keď odrežeme list s vodorovnou hranou, tak obvod U skrátime o dva vodorovné úseky dĺžky 1 a cesta prestane prechádzať dvoma políčkami rovnakej farby.
- Keď odrežeme list so zvislou hranou, tak obvod U skrátime o dva zvislé úseky dĺžky 1 a cesta prestane prechádzať jedným čiernym a jedným bielym políčkom.

Keď odrežeme 30 listov, skončíme s jedným vrcholom, 0 hranami, s cestou tvorenou dvoma zvislými a dvoma vodorovnými úsekmi dĺžky jedna na dvoch bielych a dvoch čiernych políčkach.

Teraz predpokladajme, že princ na obvode U spravil 32 zvislých a 32 vodorovných skokov, museli by sme pri orezávaní 15-krát odrezať list s vodorovnou hranou a 15-krát odrezať list so zvislou hranou. Keďže počet orezaných listov s vodorovnou hranou je nepárny, počty čiernych a bielych políčok odstránených z princovej cesty pri orezávaní listov sú rôzne. To je však spor, lebo už vieme, že ten počet je pre obe farby $32 - 2 = 30$. Tým sme dokázali, že počet horizontálnych a vertikálnych ťahov princa nemôže byť rovnaký.

Siesta séria

6.1

(Podľa *Josefa Tkadleca.*) Vzťah zo zadania má platiť pre všetky dvojice reálnych čísel x, y, takže môžeme smelo dosadzovať. Pre $x = 0$ dostaneme

$$f(f(y)) = f^2(0) + y. \tag{1}$$

Premennú y môžeme zvoliť tak, že pravá strana (1) bude rovná ľubovoľnému reálnemu číslu. Preto ľavá strana (1) taktiež nadobúda každú reálnu hodnotu, čiže pre každé $c \in \mathbb{R}$ existuje $z \in \mathbb{R}$ také, že platí $f(z) = c$. Nech teda $x_0 \in \mathbb{R}$ je také, že $f(x_0) = 0$. Dosaďme do pôvodnej rovnice $x = x_0$. Dostaneme, že

$$f(f(y)) = y \tag{2}$$

platí pre každé $y \in \mathbb{R}$. Dosaďme do pôvodnej rovnice namiesto x hodnotu $f(x)$. Získame

$$f(f(x)f(f(x)) + f(y)) = (f(f(x)))^2 + y,$$

čo s využitím (2) vieme upraviť na

$$f(xf(x) + f(y)) = x^2 + y. \tag{3}$$

Spojením (3) a pôvodnej rovnice dostaneme

$$x^2 + y = f(xf(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y,$$

čiže pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí $(f(x))^2 = x^2$, alebo inak $|f(x)| = |x|$. Mohlo by sa zdať, že už to máme, ale ešte nás od kompletného riešenia delí kus cesty. Ľahko možno overiť, že funkcie $f(x) = x$, $f(x) = -x$ spĺňajú $|f(x)| = |x|$ a vyhovujú aj pôvodnej rovnici. Funkcií, ktoré spĺňajú $|f(x)| = |x|$, je však oveľa viac. Mohlo by sa stať, že $f(x)$ bude niekde rovné x a niekde $-x$. Čo by sa dialo vtedy? Nech existuje f, ktoré vyhovuje zadanej rovnici a navyše máme nejaké nenulové rôzne $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ také, že

$$f(a_1) = a_1, \qquad f(a_2) = -a_2.$$

Dosaďme do pôvodnej rovnice $x = a_1$ a $y = a_2$. Dostaneme

$$f(a_1^2 - a_2) = a_1^2 + a_2.$$

Potom musí platiť $a_1^2 - a_2 = a_1^2 + a_2$ alebo $a_1^2 - a_2 = -a_1^2 - a_2$. Z prvej rovnice dostaneme $a_2 = 0$ a z druhej $a_1 = 0$, takže obe možnosti vedú ku sporu. Preto jedinými riešeniami úlohy sú funkcie $f(x) = x$ a $f(x) = -x$.

6.2

Najjednoduchší spôsob, ktorým by sa dala táto úloha vyriešiť, by bolo nájsť postupnosť skokov, ktorou by sme sa zo začiatočného stavu dostali do koncového. Po dlhom skúšaní však prídeme k záveru, že sa to asi nedá. Ako vieme čosi také dokázať?

Prvý nápad by mohol byť dokazovať, že sa žiadnou z plastelín nevieme dostať na pozíciu $(3, 0)$ alebo $(2, -1)$. Bohužiaľ, na obe z týchto pozícií sa dostať vieme. Dokonca sa vieme dostať aj na každú možnú trojicu koncových bodov, len na ten štvrtý bod sa nám to akosi stále nechce podariť. Skúsme sa pozrieť na túto úlohu od konca. Nezáleží, ktorý stav je začiatočný a ktorý koncový, lebo vieme robiť aj „spätné“ ťahy, teda ak zo stavu A vieme prejsť do stavu B, tak sa z B vieme aj vrátiť naspäť do A. Predstavme si, že sa nám nejako podarilo dostať do koncového stavu. Aký musel byť posledný krok, ktorý sme spravili? Možností je dosť veľa, a keď ich aj skúsime vypísať, nevidno na prvý pohľad žiaden dôvod, prečo by sme sa do týchto stavov nemohli dostať.

Ak sa však budeme pozerať dostatočne pozorne, všimneme si jednu zaujímavú vec. Plastelíny máme na konci vo vrcholoch rovnobežníka R, ktorý je tvorený počiatkom súradnicovej sústavy $(0,0)$, dvoma bodmi $(1,1)$, $(2,-1)$ (môžeme ich chápať aj ako vektory) a ich súčtom $(3,0)$. Predstavme si teraz množinu všetkých bodov roviny, ktoré sú nejakým celočíselným násobkom alebo celočíselnou kombináciou vektorov $(1,1)$, $(2,-1)$, teda všetky body, ktoré sa dajú napísať ako $a\cdot(1,1)+b\cdot(2,-1)$ pre nejaké celé čísla a, b. Do tejto množiny patria aj všetky štyri vrcholy R. Keď si túto množinu bodov nakreslíme na papier, dostaneme pravidelnú „mriežku“ – takú istú, ako keby sme sa pokúsili rovnobežníkmi zhodnými s rovnobežníkom R pravidelne vyplniť celú rovinu. Na konci preskakovania budú všetky kúsky plastelíny ležať na bodoch mriežky. Jeden krok pred koncom museli tiež ležať všetky kúsky plastelíny na bodoch mriežky – dá sa totiž ľahko všimnúť, že ak po preskočení plastelíny A plastelínou B budú obe ležať v bodoch mriežky, musela plastelína B ležať na nejakom bode mriežky aj pred skákaním. (Plastelína A samozrejme tiež, pretože tá sa nehýbala.) Z toho teda vychádza, že všetky kúsky plastelíny museli ležať v bodoch mriežky aj na začiatku, čo však nie je pravda, čím sme dostali spor. Preto sa zo začiatočného stavu nedá dostať do koncového (a ani do žiadneho iného, kde by všetky štyri kúsky plastelíny ležali naraz na bodoch našej mriežky).

6.3

(Podľa *Josefa Tkadleca.*) V každom riadku je práve $100\cdot 75/2 = 50\cdot 75$ dvojíc rôznofarebných políčok. Pre všetky riadky je to spolu $100\cdot 50\cdot 75$ dvojíc. Existuje presne $100\cdot 99/2 = 50\cdot 99$ dvojíc stĺpcov, na ktorých ležia tie rôznofarebné dvojice políčok. Z Dirichletovho princípu dostaneme, že existujú dva stĺpce, ktoré majú aspoň v 76 riadkoch rôzne farby. Odteraz budeme uvažovať iba tie dva stĺpce. Ak takých dvojíc stĺpcov existuje viac, vyberieme ľubovoľnú z nich.

Máme dva stĺpce, ktoré chápeme ako 100 dvojíc (políčka tvoria dvojicu, keď sú v jednom riadku), z toho aspoň 76 je rôznofarebných. Označme použité farby a, b, c, d. Máme šesť kombinácií ako môžu vyzerať rôznofarebné dvojice: ab, ac, ad, bc, bd, cd. Samozrejme, ešte musíme uvažovať aj poradie. Ak by sa v našich dvoch stĺpcoch nachádzali riadky farieb ab aj cd, tak máme požadovaný obdĺžnik. Rovnako to platí pre dvojice ac a bd, ad a bc.

Predpokladajme teda, že z dvojíc farebných kombinácií (ab, cd), (ac, bd) a (ad, bc) sa vyskytuje vždy najviac jedna. Teraz môžu nastať dve možnosti.

- Jedna z farieb a, b, c, d nie je v žiadnom rôznofarebnom riadku. Potom sú na aspoň 76 rôznofarebných riadkov použité najviac tri farby a teda jedna sa v našich dvoch stĺpcoch vyskytuje aspoň $\lceil 76\cdot 2/3\rceil = 51$-krát, čo nie je možné.
- V rôznofarebných riadkoch sa nachádzajú všetky štyri farby. Potom musí existovať farba, ktorá sa nachádza v každom rôznofarebnom riadku a preto je tam aspoň 76-krát, čo opäť nie je možné.

Tým sme ukázali, že vždy musí existovať obdĺžnik s vrcholmi rôznej farby.

6.4

(Podľa *Josefa Tkadleca.*) Budeme hľadať n v špeciálnom tvare. Funkciu p vieme pekne vyhodnocovať pre prvočísla a ich mocniny. Skúsme $n = q^2-1$, kde q je nepárne prvočíslo. Chceli by sme, aby platilo

$$p(q^2-1) < p(q^2) < p(q^2+1).$$

Prvá nerovnosť platí pre všetky nepárne prvočísla q, to sa dokáže ľahko. Tá druhá nanešťastie platiť nemusí. Riešiť, či platí pre nekonečne veľa prvočísel q, je nad naše sily. Nám teda prekáža, keď

$$p(q^2) = q \geqq p(q^2+1). \tag{1}$$

Skúsme ďalšiu trojicu: q^4-1, q^4, q^4+1. Vieme, že $(q^4-1) = (q^2-1)(q^2+1)$ a keďže platí (1), je zrejmé, že (q^4-1) má prvočíselných deliteľov len menších ako q. Táto druhá trojica je riešením nerovností práve vtedy, keď

$$p(q^4) = q < p(q^4+1).$$

Opäť sme tam, kde sme boli. Táto nerovnosť asi nemusí vždy platiť. Už je však jasné, kam toto riešenie vedie. Ak toto nie je riešením, tak sa posunieme o rád vyššie na trojicu, q^8-1, q^8, q^8+1, atď.

Formálne, vezmime najmenšie prirodzené k také, že

$$p\left(q^{2^k}\right) > q.$$

Potom

$$p\left(q^{2^k}-1\right) < p\left(q^{2^k}\right) < p\left(q^{2^k}+1\right).$$

Musí ale také k existovať? Predpokladajme (dôkaz sporom), že také k neexistuje, čiže čísla tvaru $q^{2^k}+1$ majú v prvočíselných rozkladoch iba prvočísla menšie ako p. Čitateľovi dávame za úlohu dokázať, že to nemôže nastať. Poradíme, že pomôže ukázať, že čísla takého tvaru majú najväčší spoločný deliteľ rovný dvom.

6.5

Riešenie úlohy nebolo v korešpondenčnom seminári zverejnené.

Iné korešpondenčné semináre

Okrem Matematickej olympiády sú pre študentov základných aj stredných škôl počas školského roka organizované aj iné matematické súťaže. Patria medzi ne predovšetkým korešpondenčné semináre. Tieto súťaže sa v detailoch istotne líšia, avšak základné črty majú spoločné. Počas školského roka prebiehajú dve časti (letná a zimná), ktoré pozostávajú zväčša z troch sérií úloh rozosielaných riešiteľom do škôl alebo domov. Riešenia súťažiaci vypracovávajú rovnakou formou ako v MO a v určenom termíne ich odosielajú na adresu príslušného seminára, odkiaľ sa po niekoľkých dňoch až týždňoch vrátia opravené spolu so vzorovými riešeniami a výsledkovou listinou. Mladší a menej skúsení riešitelia zväčša nemusia riešiť tie najzložitejšie príklady, aby aj oni mali šancu ovplyvniť poradie na prvých miestach. Na konci oboch častí súťaže sú približne tridsiati najúspešnejší riešitelia pozývaní na týždňové sústredenie, účasť na ktorom býva často najsilnejšou motiváciou na riešenie úloh. Nie je ale možné nespomenúť, že takýto pravidelný tréning sa odráža aj na výsledkoch dosahovaných v MO, a že drvivá väčšina reprezentantov Slovenska na IMO sa aktívne zapájala do viacerých z týchto seminárov.

Nižšie uvedené korešpondenčné semináre (KS) sú určené študentom stredných škôl, svojím záberom pokrývajú územie celého Slovenska a často majú aj riešiteľov z Českej republiky. Je však možné, že vo svojom okolí nájdete aj menšie súťaže podobného druhu.

Korešpondenčný matematický seminár – KMS

KMS vznikol v roku 2002 spojením Bratislavského a Stredoslovenského korešpondenčného matematického seminára (BKMS a SKMS), ktoré do 51. ročníka MO prebiehali samostatne. Organizovaný je študentmi FMFI UK v Bratislave.

KMS má tri kategórie. Začínajúcim a mladším riešiteľom je určená kategória ALFA, pre skúsenejších je kategória BETA. Rozdelenie do kategórií umožňuje bojovať o miesta na sústredení aj neskúseným študentom, ktorí by v príliš silnej konkurencii strácali motiváciu. Kategória GAMA je seminár SKMO a je mu venovaná predchádzajúca kapitola.

KMS
OATČ KAGDM FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

e-mail: kms@kms.sk
web: http://kms.sk

Súťaž talentovaných riešiteľov obľubujúcich matematiku – STROM

Korešpondenčný seminár STROM je pokračovateľom najstaršieho korešpondenčného seminára v bývalom Československu. Je organizovaný z PF UPJŠ v Košiciach skupinou nadšencov, väčšinou bývalých riešiteľov seminára a študentov UPJŠ. V posledných rokoch sa na organizovaní seminára okrem košickej skupiny podieľajú aj študenti FMFI UK pochádzajúci z východného Slovenska. Riešiteľskú základňu má prevažne na východnom Slovensku.

STROM
PF UPJŠ
Jesenná 5
041 54 Košice

e-mail: strom@strom.sk
web: http://www.strom.sk

Ak ste sa rozhodli do niektorého zo seminárov zapojiť, najrozumnejšie je zadania a pravidlá nájsť na internete začiatkom septembra alebo začiatkom januára, prípadne v tomto období požiadať e-mailom o zaslanie úloh prvej série.

Päťdesiatyôsmy ročník
Matematickej olympiády
na stredných školách

Mgr. Peter Novotný, PhD. – RNDr. Karel Horák, CSc.
doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc. – Bc. Ondrej Budáč
Mgr. Ivan Kováč – RNDr. Ján Mazák – Mgr. Martin Potočný
Úlohová komisia MO

Jazyková úprava:	neprešlo jazykovou úpravou
Grafická úprava:	Mgr. Peter Novotný, PhD., RNDr. Karel Horák, CSc., sadzba programom $\mathcal{AMS}$-TEX
Autor fotografií:	Mgr. Peter Novotný, PhD.
Náklad:	500 ks
Rozsah:	167 strán
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava
Rok vydania:	2010

ISBN: 978–80–8072–115–2

Vydané s finančnou podporou Ministerstva školstva SR.
Nepredajné.