2007/2008
57. ročník MO *Riešenia úloh domáceho kola kategórie B*

1. *Nájdite všetky prirodzené čísla k, pre ktoré je dekadický zápis čísla $6^k \cdot 7^{2007-k}$ ukončený dvojčíslím a) 02; b) 04.* (*Eva Řídká*)

Riešenie. Opakovaným násobením číslom 6 zistíme, že posledné dvojčíslia mocnín 6^k pre $k = 1, 2, 3, \dots$ sú postupne

$$06, 36, 16, 96, 76, 56, 36, 16, 96, 76, 56, \dots, \tag{1}$$

opakujú sa teda od druhého člena s periódou dĺžky 5. Podobne opakovaným násobením číslom 7 zistíme, že posledné dvojčíslia mocnín 7^m pre $m = 1, 2, 3, \dots$ sú postupne

$$07, 49, 43, 01, 07, 49, 43, 01, \dots, \tag{2}$$

opakujú sa teda už od prvého člena s periódou dĺžky 4.

a) Pretože každá mocnina šiestich je zakončená číslicou 6, bude číslo $6^k \cdot 7^{2007-k}$ zakončené dvojkou jedine vtedy, keď bude číslo 7^{2007-k} zakončené dvojčíslím 07 (iné dvojčíslie z (2) nevyhovuje). Násobením číslami 6, 36, 16, 96, 76 a 56 však zistíme, že číslo $6^k \cdot 7^{2007-k}$ môže mať v takom prípade na predposlednom mieste iba niektorú z číslic 1, 3, 4, 5, 7, 9. Zakončenie dvojčíslím 02 preto nie je možné.

b) Keďže každá mocnina šiestich je zakončená číslicou 6, bude číslo $6^k \cdot 7^{2007-k}$ zakončené štvorkou práve vtedy, keď 7^{2007-k} bude zakončené dvojčíslím 49 (iné dvojčíslie z (2) nevyhovuje). Násobením všetkými rôznymi číslami z (1) zistíme, že $6^k \cdot 7^{2007-k}$ je zakončené dvojčíslím 04 jedine vtedy, keď 6^k končí dvojčíslím 96. Číslo 6^k končí na 96 práve vtedy, keď je exponent k tvaru $k = 4 + 5a$; číslo 7^{2007-k} končí na 49 práve vtedy, keď príslušný exponent má tvar $2\,007 - k = 2 + 4b$. Dosadením $k = 4 + 5a$ dostaneme rovnicu $2\,007 - 4 - 5a = 2 + 4b$, pričom a a b sú celé nezáporné čísla. Z nej vychádza

$$b = \frac{2\,001 - 5a}{4} = 500 - a - \frac{a-1}{4}.$$

Aby bolo b celé, musí byť $a - 1$ deliteľné štyrmi, teda $a = 4c + 1$; potom $b = 499 - 5c$, $k = 9 + 20c$. Exponent $2\,007 - k$ rovný $1\,998 - 20c$ nemôže byť záporný, preto $c \leqq 99$.

Číslo $6^k \cdot 7^{2007-k}$ je zakončené dvojčíslím 04 práve vtedy, keď je číslo k tvaru $k = 9 + 20c$, pričom $c \in \{0, 1, 2, \dots, 99\}$.

Poznámka. Rovnica tvaru $ax + by = c$, kde a, b, c sú dané celé čísla a x, y celočíselné neznáme, sa nazýva *lineárna diofantická rovnica* o dvoch neznámych. Žiaci by sa mali oboznámiť s riešením takých rovníc.

Návodné a doplňajúce úlohy:

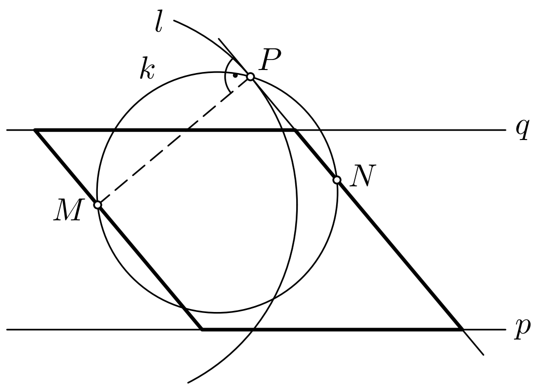
N1. Zistite, ktorým dvojčíslím končí dekadický zápis čísla 7^{2007}. [43]

N2. Určte všetky prirodzené čísla k, pre ktoré dekadický zápis čísla $7^k + 9^k$ končí dvojčíslím 22. [$k = 20n + 8$]

N3. Zistite, pre koľko prirodzených čísel n menších ako $1\,000$ je súčet $n^{2007} + 2\,007^n + 1$ deliteľný siedmimi. [95. Po delení siedmimi sú zvyšky čísel $n^{2\,007}$ rovnaké ako zvyšky čísel n^3 a pre jednotlivé n sa opakujú s periódou dĺžky 7, pri číslach $2\,007^n$ sú zvyšky rovnaké ako pri číslach 5^n a opakujú sa s periódou dĺžky 6. Vyhovujúce n majú dvojaké vyjadrenie $n = 7k = 6l + 3$, $n = 7k + 1 = 6l + 1$, $n = 7k + 2 = 6l + 1$ alebo $n = 7k + 4 = 6l + 1$.]

2. *V páse medzi rovnobežkami p, q sú dané dva rôzne body M a N. Zostrojte kosoštvorec alebo štvorec, ktorého dve protiľahlé strany ležia na priamkach p a q a zostávajúce dve strany prechádzajú bodmi M a N (každá jedným).* (Jaromír Šimša)

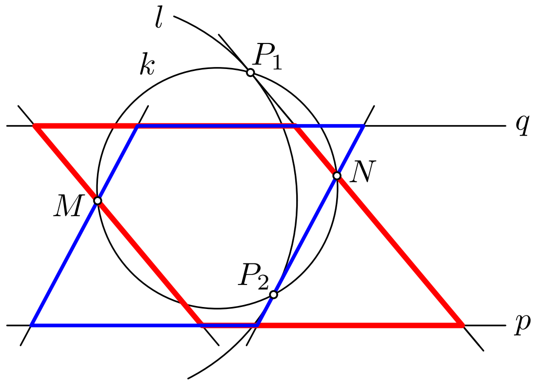
Riešenie. V kosoštvorci (resp. vo štvorci, v nasledujúcich úvahách to budeme často vynechávať) sú vzdialenosti oboch dvojíc protiľahlých strán rovnaké. Našou úlohou je teda viesť bodmi M a N rovnobežky, ktorých vzdialenosť sa rovná vzdialenosti d rovnobežiek p a q. Päta P kolmice z bodu M na stranu hľadaného kosoštvorca prechádzajúcu bodom N leží na Tálesovej kružnici nad priemerom MN a má od bodu M vzdialenosť d (obr. 1). Odtiaľ vyplýva *konštrukcia*:



Obr. 1

Zostrojíme Tálesovu kružnicu k nad priemerom MN a kružnicu l so stredom M, ktorej polomer sa rovná vzdialenosti d priamok p a q. Označíme P priesečník kružníc k a l. Na priamke PN leží jedna zo strán hľadaného kosoštvorca. Protiľahlá strana prechádza bodom M a je s priamkou PN rovnobežná.

Vzniknutý rovnobežník je skutočne kosoštvorec alebo štvorec, lebo zo zhodnosti výšok vyplýva zhodnosť strán.



Obr. 2

Diskusia. Existencia riešenia je podmienená existenciou bodu P. Zrejme potom nemôže byť $NP \parallel q$, pretože by to znamenalo, že je $|MP| < d$. Takže rovnobežky prechádzajúce bodmi M, N vždy vytnú požadovaný rovnobežník. Ak $|MN| > d$, majú kružnice k a l dva rôzne priesečníky $P_1 \neq P_2$ (obr. 2), takže úloha má dve riešenia. Ak $|MN| = d$, potom $P = N$; stranu kosoštvorca prechádzajúcu bodom N zostrojíme ako kolmicu na MN a úloha má len jedno riešenie. V prípade $|MN| < d$ nemá úloha riešenie.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. V rovine sú dané body A, B, priamka p a úsečka dĺžky v. Zostrojte trojuholník ABC, ktorého vrchol C leží na priamke p a ktorého výška na stranu BC má dĺžku v.

D1. V rovine je daná priamka p a body M, N, S. Zostrojte pravouholník $ABCD$ tak, aby vrchol A ležal na priamke p, bod M na priamke AB, bod N na priamke BC a aby S bol priesečník jeho uhlopriečok. [Uvažujeme obrazy priamky p a bodu M v otočení o $90°$ so stredom S, ktoré zobrazí stranu AB na stranu BC.]

D2. V rovine sú dané tri rovnobežné priamky a, b, c a priamka d s nimi rôznobežná. Zostrojte štvorec $ABCD$ tak, aby $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$, $D \in d$. [Zostrojíme najskôr ľubovoľný štvorec $ABCD$, ktorý spĺňa prvé tri podmienky: Zvoľme bod $B \in b$, vrchol A takého štvorca potom leží na priamke a a zároveň na priamke c otočenej okolo bodu B o $90°$. Hľadaný štvorec dostaneme posunutím v smere rovnobežiek a, b, c, v ktorom sa priamka $d' \parallel d$ obsahujúca vrchol D zobrazí na priamku d.]

---

3. *Dokážte, že ak x a y sú reálne čísla, pre ktoré platí $x^3 + y^3 \leqq 2$, tak $x + y \leqq 2$.*
(*Ján Mazák*)

Riešenie. Tvrdenie dokážeme sporom. Pripusťme, že platí $x + y > 2$. Potom $y > 2 - x$, takže $y^3 > (2 - x)^3$, lebo funkcia $s = t^3$ je v premennej t rastúca na celom obore reálnych čísel. Preto platí

$$x^3 + y^3 > x^3 + (2 - x)^3 = 8 - 12x + 6x^2 = 6(x - 1)^2 + 2 \geqq 2.$$

To je v spore s predpokladom. Tým je tvrdenie dokázané.

Iné riešenie. Dvojčlen $x^3 + y^3$ rozložíme na súčin $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$. Keby platilo $x + y > 2$, pre druhý činiteľ $x^2 - xy + y^2$ by sme mali odhad

$$x^2 - xy + y^2 = \frac{1}{4}(x + y)^2 + \frac{3}{4}(x - y)^2 > 1.$$

Pre výraz $x^3 + y^3$ by potom platilo

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) > 2 \cdot 1 = 2.$$

To je opäť v spore s predpokladom. Tým je tvrdenie dokázané.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Ak x, y sú reálne čísla, pre ktoré platí $x + y > 2$, tak $x^2 + y^2 > 2$; dokážte. [Tvrdenie vyplýva z nerovnosti $(x + y)^2 \leqq 2(x^2 + y^2)$.]

D1. Nech a, b, c sú reálne čísla, ktorých súčet je väčší ako 1. Dokážte, že súčet ich druhých mocnín je väčší ako $\frac{1}{3}$. [Tvrdenie vyplýva z tzv. *Cauchyho nerovnosti* $(x + y + z)^2 \leqq 3(x^2 + y^2 + z^2)$, ktorú možno overiť úpravou na tvar $(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 \geqq 0$.]

D2. Nech x, y sú nezáporné čísla, pre ktoré platí $x^2 + y^2 > 2$. Dokážte, že potom $x^3 + y^3 > 2$. [Potrebnú nerovnosť $(x^2 + y^2)^3 \leqq 2(x^3 + y^3)^2$ dokážeme tak, že rozdiel medzi pravou a ľavou stranou upravíme na tvar $(x - y)^2(x^4 + 2xy^3 + 2xy^3 + y^4)$.]

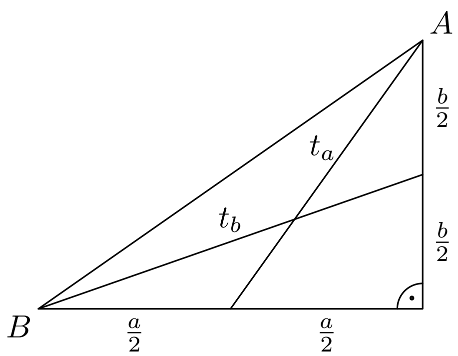
4. *Nájdite všetky pravouhlé trojuholníky s dĺžkami strán a, b, c a dĺžkami ťažníc t_a, t_b, t_c, pre ktoré platí $a + t_a = b + t_b$. Uvažujte oba prípady, keď AB je a) prepona, b) odvesna.* (*Pavel Novotný*)

Riešenie. a) Nech a aj b sú odvesny (obr. 3). Potom podľa Pytagorovej vety

$$t_a = \sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}, \quad t_b = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2},$$

takže podmienka $a + t_a = b + t_b$ má tvar

$$a + \sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = b + \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$



Obr. 3

Keďže z nerovnosti $a > b$ vyplýva (viď návodná úloha 1) $t_b > t_a$, sú nasledujúce úpravy ekvivalentné:

$$\begin{aligned}
2a - 2b &= \sqrt{4a^2 + b^2} - \sqrt{4b^2 + a^2},\\
4a^2 - 8ab + 4b^2 &= 5a^2 + 5b^2 - 2\sqrt{(4a^2 + b^2)(4b^2 + a^2)},\\
2\sqrt{4a^4 + 17a^2b^2 + 4b^4} &= a^2 + 8ab + b^2,\\
16a^4 + 68a^2b^2 + 16b^4 &= a^4 + 16a^3b + 66a^2b^2 + 16ab^3 + b^4,\\
15a^4 - 16a^3b + 2a^2b^2 - 16ab^3 + 15b^4 &= 0.
\end{aligned}$$

Mnohočlen na ľavej strane poslednej rovnice je zrejme deliteľný dvojčlenom $a - b$ (pre $a = b$ je totiž rovný nule). Delením zistíme, že výsledný mnohočlen tretieho stupňa má opäť rovnakú vlastnosť, takže po opakovanom delení prevedieme skúmanú rovnicu na súčinový tvar

$$(a - b)^2(15a^2 + 14ab + 15b^2) = 0.$$

Ostatná rovnosť platí práve vtedy, keď $a = b$, pretože $15a^2 + 14ab + 15b^2 > 0$ pre každú dvojicu reálnych čísel a, b.

V prípade a) môžeme postupovať aj nasledovne: Odčítaním rovností

$$t_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2, \quad t_b^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

dostaneme

$$t_a^2 - t_b^2 = \tfrac{3}{4}(b^2 - a^2).$$

Na oboch stranách ostatnej rovnice sú rozdiely druhých mocnín. Prevedieme ich na súčiny a potom využijeme danú rovnosť $a + t_a = b + t_b$ upravenú na tvar $t_a - t_b = b - a$:

$$\begin{aligned}(t_a - t_b)(t_a + t_b) &= \tfrac{3}{4}(b - a)(b + a),\\ (b - a)(t_a + t_b) &= \tfrac{3}{4}(b - a)(a + b).\end{aligned}$$

Keby bolo $a \neq b$, vyjde $t_a + t_b = \frac{3}{4}(a + b)$; to spolu s rovnosťou $t_a - t_b = b - a$ dáva $t_a = \frac{7}{8}b - \frac{1}{8}a$, teda $t_a < b$, čo odporuje tomu, že t_a je prepona a b odvesna toho istého pravouhlého trojuholníka (obr. 3). Preto musí platiť rovnosť $a = b$.

b) Nech napr. a je prepona (ak je preponou b, stačí strany a, b v nasledujúcom texte navzájom vymeniť). Potom z Tálesovej a Pytagorovej vety vyplýva

$$t_a = \frac{a}{2}, \quad t_b = \sqrt{c^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2},$$

čiže rovnosť zo zadania má tvar

$$\frac{3a}{2} = b + \sqrt{a^2 - b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Keďže prepona a je dlhšia ako odvesna b, t. j. $a > b$, sú nasledujúce úpravy ekvivalentné:

$$\begin{aligned}3a - 2b &= \sqrt{4a^2 - 3b^2},\\ 9a^2 - 12ab + 4b^2 &= 4a^2 - 3b^2,\\ 5a^2 - 12ab + 7b^2 &= 0,\\ (a - b)(5a - 7b) &= 0,\\ 5a - 7b &= 0.\end{aligned}$$

Záver. Rovnosť $a + t_a = b + t_b$ platí pre pravouhlé rovnoramenné trojuholníky s odvesnami $a = b$ a pre pravouhlé trojuholníky, ktoré majú strany v pomere $5 : \sqrt{24} : 7$, a pritom najkratšia z nich je (tretia) strana c.

NÁVODNÉ A DOPLŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Dokážte, že ťažnice všeobecného trojuholníka (či už je pravouhlý alebo nie) majú rovnakú vlastnosť ako jeho výšky: ku kratšej strane smeruje dlhšia ťažnica. Odvoďte odtiaľ, že rovnosť $a + t_b = b + t_a$ platí práve vtedy, keď $a = b$. [Nerovnosti medzi stranami a, b a medzi časťami ťažníc $\frac{2}{3}t_a$, $\frac{2}{3}t_b$ porovnajte na základe toho, že vrchol C aj ťažisko T trojuholníka ABC ležia v jednej polrovine určenej osou strany AB.]

N2. Vypočítajte dĺžku ťažnice t_b trojuholníka ABC, ak $a = 96$, $b = 144$, $t_a = 107$. [Dokážte, že v každom trojuholníku platí $t_a^2 - t_b^2 = \frac{3}{4}(b^2 - a^2)$.]

D1. V ľubovoľnom trojuholníku ABC označme T ťažisko, D stred strany AC a E stred strany BC. Nájdite všetky pravouhlé trojuholníky ABC s preponou AB, pre ktoré je štvoruholník $CDTE$ dotyčnicový. [56–B–I–4]

5. *Určte všetky dvojice a, b reálnych čísel, pre ktoré má každá z kvadratických rovníc*

$$ax^2 + 2bx + 1 = 0, \quad bx^2 + 2ax + 1 = 0$$

dva rôzne reálne korene, pričom práve jeden z nich je spoločný obom rovniciam.

(*Jaroslav Švrček*)

Riešenie. Zo zadania vyplýva, že $a \neq 0$, $b \neq 0$ (inak by rovnice neboli kvadratické) a $a \neq b$ (inak by rovnice boli totožné, a ak by mali dva reálne korene, boli by oba spoločné).

Označme x_0 spoločný koreň oboch rovníc, takže

$$ax_0^2 + 2bx_0 + 1 = 0, \quad bx_0^2 + 2ax_0 + 1 = 0.$$

Odčítaním oboch rovníc dostaneme $(a-b)(x_0^2 - 2x_0) = x_0(a-b)(x_0-2) = 0$. Keďže $a \neq b$ a 0 zrejme koreňom daných rovníc nie je, musí byť spoločným koreňom číslo $x_0 = 2$. Dosadením do daných rovníc tak dostaneme jedinú podmienku $4a + 4b + 1 = 0$, čiže

$$b = -a - \tfrac{1}{4}.$$

Diskriminant druhej z daných rovníc je potom $4a^2 - 4b = 4a^2 + 4a + 1 = (2a+1)^2$, takže rovnica má dva rôzne reálne korene pre ľubovoľné $a \neq -\frac{1}{2}$. Podobne diskriminant prvej z daných rovníc je $4b^2 - 4a = 4b^2 + 4b + 1 = (2b+1)^2$. Rovnica má teda dva rôzne reálne korene pre ľubovoľné $b \neq -\frac{1}{2}$, čiže $a \neq \frac{1}{4}$.

Z uvedených predpokladov však zároveň vyplýva $a \neq -\frac{1}{4}$ ($b \neq 0$) a $a \neq -\frac{1}{8}$ ($a \neq b$).

Záver. Vyhovujú všetky dvojice $(a, -a - \frac{1}{4})$, kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, 0, \frac{1}{4}\}$.

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

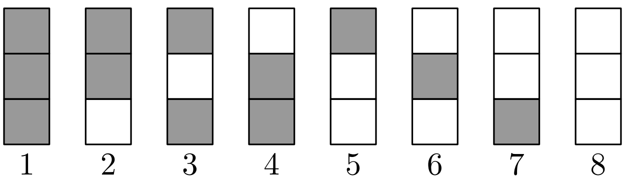
N1. Nájdite spoločné korene rovníc $2x^3 + 3x^2 - 6x + 2 = 0$ a $2x^3 + 7x^2 + 2x - 6 = 0$. [$-1 \pm \sqrt{3}$, spoločný koreň je koreňom kvadratickej rovnice, ktorú dostaneme odčítaním kubických rovníc.]

N2. Zistite, pre ktoré hodnoty parametra a majú rovnice $x^2 + ax - 3 = 0$ a $x^2 + 3x - a = 0$ aspoň jeden spoločný koreň. [$a = 3$, $a = -2$]

N3. Nájdite všetky dvojice (a, b) reálnych čísel, pre ktoré má každá z rovníc $x^2 + (a-2)x + b - 3 = 0$, $x^2 + (a+2)x + 3b - 5 = 0$ dvojnásobný koreň. [$(6, 7)$, $(2, 3)$]

6. *Obdĺžnik* $2\,005 \times 2\,007$ *je rozdelený na čierne a biele jednotkové štvorčeky. Dokážte, že pre niektorú z farieb (čiernu alebo bielu) existuje viac ako 95 800 pravouholníkov so šírkou aspoň 2, ktoré sa skladajú z jednotkových štvorčekov, navzájom sa neprekrývajú a ktorých rohové políčka majú túto farbu.* (*Pavel Leischner*)

Riešenie. Budeme hľadať obdĺžnik s čo najmenším obsahom, v ktorom musí byť obsiahnutý pravouholník majúci všetky rohové políčka rovnakej farby. Šírka 2 nestačí (pri ľubovoľnej dĺžke by napríklad mohol byť jeden celý riadok čierny a druhý biely). Uvažujme teda obdĺžnik šírky 3. Jeho stĺpce môžu byť ofarbené ôsmimi spôsobmi ako na obr. 4.



1 2 3 4 5 6 7 8

Obr. 4

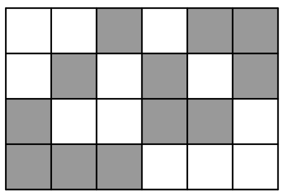
Ak je obdĺžnik zložený iba zo šiestich stĺpcov 2 až 7, nemá žiadny pravouholník s rozmermi väčšími ako 1 v ňom obsiahnutý všetky rohové políčka jednej farby. Uvedených šesť stĺpcov totiž predstavuje všetky možnosti, ako ofarbiť stĺpec zložený z troch políčok dvoma farbami tak, aby nebol jednofarebný (jednofarebné sú zvyšné dva stĺpce 1 a 8). Keby v takom obdĺžniku existoval pravouholník s rohovými políčkami jednej farby, boli by príslušné stĺpce rovnaké.

Avšak ak má obdĺžnik šírky 3 dĺžku aspoň 7, sú v ňom buď dva rovnaké stĺpce, alebo v ňom je niektorý z jednofarebných stĺpcov (1 a 8). V prípade dvoch rovnakých stĺpcov je existencia pravouholníka s rohovými políčkami jednej farby zrejmá. Ak nie sú žiadne dva stĺpce rovnaké, ale je tam jednofarebný stĺpec farby A, musí v obdĺžniku byť aj stĺpec, ktorého dve políčka majú farbu A. Tento stĺpec a jednofarebný stĺpec farby A určujú pravouholník, ktorého všetky rohové políčka majú farbu A.

Daný obdĺžnik $2\,005 \times 2\,007$ teraz rozdelíme na dve časti $2\,002 \times 2\,007$ a $3 \times 2\,007$. Keďže $2\,002 = 7 \cdot 286$, $2\,007 = 3 \cdot 669$, skladá sa prvá časť z $286 \cdot 669$ neprekrývajúcich sa obdĺžnikov 7×3. V druhej časti je ešte ďalších 286 obdĺžnikov 7×3. Obdĺžnikov 7×3 je teda celkom $286 \cdot 669 + 286 = 286 \cdot 670 = 191\,620$. V každom z nich je obsiahnutý aspoň jeden pravouholník, ktorý má všetky rohové políčka jednej farby. Pre najmenej polovicu takto nájdených obdĺžnikov, teda pre aspoň 95 810, je potom farba rohových políčok rovnaká.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Obdĺžnik 6×4 je rozdelený na 24 jednotkových štvorčekov. Každý z nich ofarbite čiernou alebo bielou farbou tak, aby žiadne štyri rovnako ofarbené štvorčeky neboli rohovými štvorčekmi jedného pravouholníka (nájdite aspoň jedno riešenie). [Viď obr. 5: vzhľadom na jeho „farebné súmernosti“ stačí overiť neexistenciu pravouholníka len pre jednu farbu rohových políčok.]



Obr. 5

N2. Obdĺžnik 3×7 je rozdelený na 21 jednotkových štvorčekov, z ktorých každý je ofarbený bielou alebo čiernou farbou. Dokážte, že niektoré štyri rovnako ofarbené štvorce sú rohovými štvorcami jedného pravouholníka. [Viď riešenie súťažnej úlohy.]

N3. Obdĺžnik 6×4 je rozdelený na 24 jednotkových štvorčekov. Trinásť z nich je ofarbených čiernou farbou. Dokážte, že niektoré štyri čierne štvorce sú rohovými štvorcami jedného pravouholníka. [Aspoň jeden zo šiestich stĺpcov musí obsahovať aspoň tri čierne štvorce. Ak sú dokonca štyri, máme pre umiestnenie zvyšných deviatich štvorcov päť stĺpcov, takže v jednom z nich musia byť aspoň dva. Ak sú práve tri, buď existuje aspoň jeden ďalší stĺpec s tromi čiernymi štvorcami (v týchto dvoch stĺpcoch už požadovaný pravouholník nájdeme), alebo v každom zo zvyšných piatich stĺpcov sú práve dva čierne štvorce; je iba $\binom{4}{2} = 6$ možností, ako štyri štvorce v stĺpci takto ofarbiť, pričom tri z nich už dávajú požadovaný pravouholník s pôvodne nájdenými tromi čiernymi štvorcami v stĺpci.]