57. ROČNÍK
MATEMATICKEJ
OLYMPIÁDY
NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

Správa o riešení úloh zo súťaže konanej v školskom roku 2007/2008

49. MEDZINÁRODNÁ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA
2. STREDOEURÓPSKA MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

S pomocou spolupracovníkov spracovali
Mgr. Peter Novotný, PhD.
RNDr. Karel Horák, CSc.,
doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.,
Mgr. Ján Mazák
Bc. Ivan Kováč
a členovia Úlohovej komisie MO.

Obsah

O priebehu 57. ročníka matematickej olympiády 5

Výsledky 9
Celoštátne kolo kategórie A 9
Krajské kolá 10

Zadania súťažných úloh 21
Kategória C 21
Kategória B 23
Kategória A 26

Riešenia súťažných úloh 31
Kategória C 31
Kategória B 41
Kategória A 52

Prípravné sústredenia pred IMO a MEMO 81
Zadania súťažných úloh 82

8. Česko-poľsko-slovenské stretnutie 85
Zadania súťažných úloh 86
Riešenia súťažných úloh 87

49. Medzinárodná matematická olympiáda 99
Zadania súťažných úloh 104
Riešenia súťažných úloh 105

2. Stredoeurópska matematická olympiáda 115
Zadania súťažných úloh 117
Riešenia súťažných úloh 118

Korešpondenčný seminár SK MO 129
Zadania súťažných úloh 130
Riešenia súťažných úloh 135

Iné korešpondenčné semináre 171

O priebehu 57. ročníka matematickej olympiády

Matematická olympiáda (MO) je najstaršia a najmasovejšia postupová intelektuálna súťaž žiakov základných a stredných škôl v SR. Matematickú olympiádu vyhlasuje Ministerstvo školstva Slovenskej republiky (MŠ SR) v spolupráci s Jednotou slovenských matematikov a fyzikov (JSMF). V školskom roku 2007/08 sa uskutočnil už 57. ročník MO.

Súťaž riadila Slovenská komisia matematickej olympiády (SK MO) a pracovala v nasledovnom zložení:

Mim. Prof. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., F-PEDAS ŽU Žilina, predseda
RNDr. Oliver Ralík, FPV UKF Nitra, podpredseda A
RNDr. Monika Dillingerová, PhD., FMFI UK Bratislava, podpredseda Z
Prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc., FPV UKF Nitra
Mgr. Ján Mazák, FMFI UK Bratislava
Doc. RNDr. Božena Mihalíková, CSc., PF UPJŠ Košice
Mgr. Peter Novotný, FMFI UK Bratislava
RNDr. Anna Pobešková, Nitra
Mgr. Martin Potočný, FMFI UK Bratislava
Doc. RNDr. Vladislav Rosa, CSc., FMFI UK Bratislava
Mgr. Milan Demko, PhD., FHPV PU Prešov, predseda KKMO PO
RNDr. Zuzana Frková, Gymn. Grösslingová Bratislava, predsedníčka KKMO BA
Doc. RNDr. Mária Lucká, CSc., PF TU Trnava, predsedníčka KKMO TT
RNDr. Tomáš Madaras, PhD., PF UPJŠ Košice, predseda KKMO KE
Doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc., F-PEDAS ŽU Žilina, predseda KKMO ZA
RNDr. Eva Oravcová, Gymn. J. G. T. Banská Bystrica, predsedníčka KKMO BB
RNDr. Soňa Pavlíková, CSc., TU Trenčín, predsedníčka KKMO TN
Prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc., FPV UKF Nitra, predseda KKMO NR
Ing. Tomáš Lučenič, IUVENTA Bratislava

*

V roku 2006 sa od MO odčlenila informatika a vytvorila samostatnú súťaž OI. Napriek tomu sa pod skratkou MO stále skrýva najstaršia súťaž tohto typu u nás, ktorá v dôsledku snahy veľkého množstva našich význačných predchodcov o čo najlepšie výsledky sa rozrástla na striktnú viackolovú súťaž s množstvom kategórií Z4, Z5, Z6, Z7, Z8, Z9 pre základné školy a C, B, A pre stredné školy. Vznik tých kategórií bol postupný a účelom zavedenia kategórií pre stále mladších žiakov bolo podchytiť talenty v čo najmladšom veku a obmedziť tak ich únik do iných súťaží. Vrcholnou súťažou v tejto oblasti je medzinárodná matematická olympiáda (IMO), z ktorej naši žiaci pravidelne vozia medaily. V septembri 2008 sa však uskutočnil už aj 2. ročník veľmi kvalitnej stredoeurópskej matematickej olympiády (MEMO). Aj keď týmto súťažiam sú v tejto Ročenke venované samostatné kapitoly, spomeňme tu aspoň toľko, že na 49. IMO v Madride získala šestica našich žiakov tri bronzové medaily a jedno čestné uznanie a šestica našich žiakov na 2. MEMO v Olomouci získala dve bronzové medaily a štyri čestné uznania napriek mimoriadne tvrdej konkurencii, pretože z veľmi silných družstiev prišli na MEMO tento rok okrem Poliakov aj Maďari a Nemci. Za všetky čísla v tejto chvíli už len toľko, že šestice našich žiakov na doterajších šestnástich IMO od vzniku SR získali 71 medailí z 96 možných.

Organizačná štruktúra MO sa nezmenila a podarilo sa uskutočniť všetky plánované akcie, ale v tomto ročníku vznikla jedna **mimoriadna vážna termínová kolízia**. Zásadný význam pre MO má tvorba úloh. V tejto oblasti stále udržujeme výbornú a obojstranne prospešnú spoluprácu s českými kolegami, aby úroveň príkladov u nás aj u nich bola čo najlepšia. V dôsledku toho však máme **spoločné termíny** súťaží. My ich spoločne naplánujeme **ďaleko dopredu**, aj dva roky, ale MŠ SR dáva termíny maturít (asi nie len pre nás) neskoro. Museli sme teda **zmeniť termín celoštátneho kola**, čo ale malo za následok výber úplne novej šestice úloh. Málokto z tých, čo nevymýšľajú úlohy pre MO, si uvedomuje, aké je náročné vybrať šesticu úloh tak, aby tieto *nadväzovali na predošlé kolá a aby boli primerane ťažké*. Oveľa ťažšie je však vybrať ďalšiu šesticu, ktorá navyše, teda pri splnení nadväznosti, sa *nemá vôbec podobať už raz vybranej šestici* (ktorá samozrejme už bola použitá v pôvodnom termíne).

SK MO občas dostane kritické vyjadrenie k voľbe termínov niektorých kôl. Musíme konštatovať, že kritika je obvykle podložená argumentmi typu „to je tesne po (nejakých lokálnych) prázdninách“, alebo „koliduje to s okresnou súťažou v moderných spôsoboch ekologického vykurovania (v ikebane, hre na fujare, ...)“, alebo „to je tesne pred krúžkovaním známok“, prípadne „koliduje to s talentovými skúškami na špeciálnej škole v Najprostrednejšej Hornej“. Zostáva nám len smutne zvesiť hlavu a vziať na vedomie, že naozaj nedokážeme zariadiť až takú bezkolíznosť. Je to na jednej strane preto, že o väčšine takých akcií nemáme prehľad, na druhej strane však preto, že ak by sme sa chceli vyhnúť aj takým kolíziám, tak by sme okrem hlavy zvesili aj firemnú tabuľu MO a už nikdy by sa žiadne kolo nemohlo konať. Riešením tejto situácie je, že žiak si určí priority, čoho sa chce zúčastniť. Všetko stihnúť v živote aj tak nemôže. My samozrejme budeme radi, ak si žiak z veľkej ponuky vyberie MO.

K tvorbe úloh poznamenajme, že SK MO dostáva **len nekonštruktívnu** kritiku ohľadne kvality a (ne)vhodnosti príkladov, ale matematickej olympiáde to veľa nepomôže – úlohové komisie robia, čo vedia. Navyše, **všetky** hodnotenia sú vždy subjektívne, a také sú aj naše. Keby kritizujúci pripojil aj niekoľko pekných úloh, malo by to väčší efekt. **Výzvu na tvorbu úloh uverejňujeme už viac rokov** po rôznych linkách, ale bohužiaľ, výzva sa nestretáva s pochopením. Prejavíme svoj nezlomný optimizmus (veďináč by sme pri MO neboli) a dúfame, že teraz to bude iné.

Pokiaľ ide o nespokojnosť s vyhodnotením výkonu žiaka v ktoromkoľvek kole, tomuto venuje SK MO mimoriadnu pozornosť a každou sťažnosťou sa veľmi zodpovedne zaoberá. Je potešujúce, že sťažností tohto typu je veľmi málo a sťažovateľ obvykle pochopí fundovanú odpoveď SK MO.

Ďakujeme firme REKON, ktorá financovala tričká pre reprezentačné družstvo SR na 49. IMO v Madride. Poďakovanie SK MO patrí ďalej všetkým, ktorí podporili celoštátne kolo MO, pretože cenový fond z MŠ SR sa riadi staršími predpismi a nie je dôstojný súťaže tejto kvality. Boli to: Slovenský plynárenský priemysel, a. s., Slovenské elektrárne Enel, Dexia banka Slovensko, a. s., OTP Banka Slovensko, a. s., Prvá stavebná

sporiteľňa, a. s., PC Revue, Ransan, spol. s. r. o., Banská Štiavnica, Hechter Slovakia, Mestský úrad Banská Bystrica, Gymnázium J. G. Tajovského.

Ohľadne finančného zabezpečenia MO treba uviesť, že dotácia MŠ SR na súťaže nebola valorizovaná už 5 rokov, aj keď prísľub bol ročne 11%, takže dnes by sme už mali mať takmer o 70% viac. K finančnému zabezpečeniu MO ďalej patrí, že autorovi týchto riadkov sa podarilo získať grant APVV, ktorý aj tento rok v nemalej miere pokryl náklady KMS a tieto financie (332 500, – Sk) dostaneme aj v 58. ročníku MO. Iný grantový projekt APVV, namierený na výraznú metodickú pomoc učiteľom stredných škôl pri organizovaní krúžkov MO, bol však vyhodnotený nekorektne, **so zjavným úmyslom škodiť** matematike, pretože pravidlá na Slovensku, bohužiaľ, umožňujú anonymné, teda úplne nezodpovedné hodnotenie. Je ťažké predstaviť si morálnu škodu, ktorá by sa napáchala tým, že anonymný učiteľ by nespravodlivo vyhodnotil žiaka a obral by ho o „miesto na výslní“. Obrovská matematická obec však pravdepodobne nie je schopná proti takej nehoráznosti **principiálne** sa postaviť… Takéto hodnotenie sa v MO nemôže uskutočniť, pretože všetci máme osobnú zodpovednosť, pričom vo vyšších kolách je kontrola viacnásobná.

Už tretíkrát Společnost Otakara Borůvky finančne zabezpečila tréningové sústredenie IMO-družstva ČR v Uherském Hradišti a na toto sústredenie pozvala aj IMO-družstvo SR, ktorému financovala účasť. Táto akcia nie je reciproká, a nám neostáva iné, ako úprimne naším českým kolegom znovu poďakovať za veľkorysosť a dúfať, že nás znovu pozvú; možno práve to pomôže našim žiakom skončiť (aj) pred českou konkurenciou.

Dúfam, že nová súťaž MEMO zvýši motiváciu najmä mladších žiakov, pretože v septembri 2009 sa uskutoční v Poľsku a o rok neskôr bude usporiadaná na Slovensku. Keďže IMO-družstvo a MEMO-družstvo musia byť disjunktné, táto akcia znamená účasť 12 študentov v kvalitnej medzinárodnej súťaži, čím sa značne zvyšuje šanca študenta na takú súťaž sa prebojovať.

*

Celoštátne kolo MO (CK MO) usporiadala KK MO Banská Bystrica, ktorej predsedníčkou je RNDr. Eva Oravcová a ktorá napriek už spomínanej termínovej kolízii odviedla profesionálnu a vynikajúcu prácu. V mene SK MO ďakujem jej a tiež všetkým organizátorom. Po CK MO sa uskutočnilo veľmi náročné výberové sústredenie, po ktorom vznikli reprezentačné družstvá Slovenska na IMO aj MEMO. Tieto potom absolvovali v rámci prípravy na 49. IMO a 2. MEMO aj tréningové sústredenia a už tradičné súťažné trojstretnutie ČR-Poľsko-SR. Viac o týchto akciách a tiež o korešpondenčných seminároch nájde záujemca v samostatných kapitolách tejto Ročenky. Už teraz však uveďme aspoň niektoré z mnohých zaujímavých internetových stránok:

matematika.okamzite.eu – archív zadaní, poradí a riešení MO,
fpedas.uniza.sk/˜novotny/MO.htm – aktuálne dokumenty, najmä pre Žilinský kraj,
www.iuventa.sk – stránka IUVENTY,
kms.sk/mo – informácie o MO na stránkach korešpondenčného seminára,
www.imo-2008.es – stránka 49. IMO v Madride,
imo-official.org – oficiálna stránka IMO.

Pretože Ročenka je len o celoštátnych akciách, nie je možné explicitne spomenúť všetkých, ktorí sa na práci v MO podieľajú na školách, v oblastiach a krajoch. Nie je to bezmenná armáda, sú to veľké počty konkrétnych ľudí, bez ktorých by to však nešlo. Dovolím si im teda aspoň touto cestou poďakovať.

Vojtech Bálint, predseda SK MO

Výsledky

Celoštátne kolo kategórie A

Víťazi

1.	Vladislav UJHÁZI	4 G P. J. Šafárika, Rožňava	6 4 7 7 7 2	33
2.	Martin MELICHERČÍK	4 G Párovská, Nitra	6 6 6 5 2 4	29
3.	Ladislav BAČO	2 G Poštová, Košice	7 6 6 0 7 2	28
	Michal SPIŠIAK	3 G Grösslingová, Bratislava	5 1 7 5 7 3	28
5.	Tomáš KOCÁK	4 G Poštová, Košice	7 6 4 0 7 3	27
6.	Miroslav BALÁŽ	4 G arm. gen. L. Svobodu, Humenné	5 6 3 0 6 6	26
7.	Jakub KÖRY	4 G J. A. Raymana, Prešov	7 1 5 6 5 1	25

Ďalší úspešní riešitelia

8.	Martin BACHRATÝ	2 G Veľká okružná, Žilina	3 3 7 0 7 4	24
	Michal HAGARA	2 G J. Hronca, Bratislava	6 1 6 7 1 3	24
	Filip SLÁDEK	2 G A. Bernoláka, Námestovo	7 1 1 7 1 7	24
	Tomáš SZANISZLO	3 G J. G. Tajovského, B. Bystrica	7 2 1 5 3 6	24
12.	Matúš BENKO	4 G J. A. Raymana, Prešov	7 6 0 1 7 2	23
	Peter CSIBA	3 ŠPMNDaG, Bratislava	3 6 3 2 7 2	23
14.	Albert HERENCSÁR	3 G Z. Kodálya, Galanta	5 1 6 3 7 0	22
15.	Jakub KONEČNÝ	2 G Grösslingová, Bratislava	6 6 5 0 2 2	21
	Mária STAROVSKÁ	4 G Grösslingová, Bratislava	7 1 5 5 0 3	21
17.	Eduard EIBEN	3 G Poštová, Košice	7 0 2 7 1 2	19
18.	Vladimír BOŽA	4 G D. Tatarku, Poprad	5 1 6 0 1 5	18
	Lenka MATEJOVIČOVÁ	3 G J. Hronca, Bratislava	7 6 1 0 1 3	18

Ostatní riešitelia

20.	Tomáš BELAN	2 ŠPMNDaG, Bratislava	5 1 7 0 1 3	17
	Dávid LAMI	3 G H. Selyeho, Komárno	5 1 1 5 2 3	17
	Jakub VAŇO	3 G J. A. Raymana, Prešov	5 2 0 4 1 5	17
23.	István PARASZTI	3 G H. Selyeho, Komárno	7 1 1 4 1 2	16
	András VARGA	4 G H. Selyeho, Komárno	7 0 5 0 2 2	16
25.	Lukáš KEKELY	4 G Varšavská, Žilina	7 0 1 4 1 2	15
26.	Natália KARÁSKOVÁ	2 G Grösslingová, Bratislava	0 1 4 2 1 5	13
	Dušan ŠVANCARA	4 G Golianova, Nitra	5 1 1 3 1 2	13
28.	Alena KOŠINÁROVÁ	4 G Grösslingová, Bratislava	5 0 0 3 1 2	11
29.	Tomáš KUZMA	3 G Alejová, Košice	6 0 1 0 0 3	10

	Martin LUKAČIŠIN	4 G J. F. Rimavského, Levoča	2 2 1 4 1 0	10
	Katarína POKORNÁ	4 G Grösslingová, Bratislava	3 2 2 0 1 2	10
32.	Matúš KUKAN	4 G Grösslingová, Bratislava	4 0 1 0 1 3	9
33.	Jozef JAKUBÍK	4 G Komenského, Partizánske	2 1 5 0 0 0	8
	Martin PITOŇÁK	3 G J. G. Tajovského, B. Bystrica	4 0 1 0 1 2	8
	Ondrej ŠEDO	3 G Veľká okružná, Žilina	5 0 1 0 0 2	8
	Nikola ŠPESOVÁ	4 G Konštantínova, Prešov	6 0 1 1 0 0	8
37.	Michal HAJDIN	3 G J. Hronca, Bratislava	3 1 1 0 2 0	7
38.	Martin POLAČKO	3 G Alejová, Košice	2 0 1 0 1 0	4

Úspešnosť jednotlivých úloh je zaznamenaná v tabuľke.

Počet bodov	**Spolu**	**Číslo úlohy**					
		1.	2.	3.	4.	5.	6.
7 bodov	29	12	0	4	4	8	1
6 bodov	23	6	8	5	1	1	2
5 bodov	24	10	0	5	5	1	3
4 body	11	2	1	2	4	0	2
3 body	20	4	1	2	3	1	9
2 body	30	3	4	2	2	5	14
1 bod	49	0	14	15	2	17	1
0 bodov	42	1	10	3	17	5	6
Priemer	2,96	5,16	2,03	3,05	2,37	2,55	2,58

Krajské kolá

Z príslušného kraja a v príslušnej kategórii A, B, C a Z9 sú uvedení všetci, resp. aspoň prvých 10 úspešných riešiteľov. Gymnáziá so zameraním na matematiku, študijný odbor 01, sú tieto:

Gymnázium Grösslingová, Bratislava,
Gymnázium Párovská, Nitra,
Gymnázium Veľká okružná, Žilina,
Gymnázium J. G. Tajovského, Banská Bystrica,
Gymnázium Alejová, Košice,
Gymnázium Poštová, Košice.

Kraj Bratislava

Kategória A

1.	Michal SPIŠIAK	3 Gymnázium Grösslingová
2.	Natália KARÁSKOVÁ	2 Gymnázium Grösslingová
3.	Samuel HAPÁK	4 Gymnázium Grösslingová
	Tomáš KOČISKÝ	4 Gymnázium Grösslingová
	Mária STAROVSKÁ	4 Gymnázium Grösslingová
6.	Lenka MATEJOVIČOVÁ	3 Gymnázium Jura Hronca
7.	Jakub KONEČNÝ	2 Gymnázium Grösslingová
8.	Peter CSIBA	3 ŠpMNDaG Skalická
	Michal HAGARA	2 Gymnázium Jura Hronca
10.	Tomáš BELAN	2 ŠpMNDaG Skalická
	Alena KOŠINÁROVÁ	4 Gymnázium Grösslingová
	Matúš KUKAN	4 Gymnázium Grösslingová

Kategória B

1.	Natália KARÁSKOVÁ	Gymnázium Grösslingová
2.	Michal HAGARA	Gymnázium Jura Hronca
3.	Jakub KONEČNÝ	Gymnázium Grösslingová
4.	Juraj HAŠÍK	Gymnázium Grösslingová
	Tomáš PEITL	ŠpMNDaG Skalická
6.	Marek KUKAN	Gymnázium Grösslingová
7.	Bruno CUC	Gymnázium Grösslingová
	Martin HURBAN	Gymnázium Grösslingová
	Vladimír JURENKA	Gymnázium Grösslingová
10.	Tomáš BELAN	ŠpMNDaG Skalická

Kategória C

1.	Matej BALOG	Gymnázium Grösslingová
	Pavol GURIČAN	Gymnázium Grösslingová
3.	Viktor SZABADOS	Gymnázium Grösslingová
4.	Anh LE TUAN	Gymnázium Grösslingová
	Ján PULMANN	Gymnázium Grösslingová
6.	Dominik CSIBA	ŠpMNDaG Skalická
	Andrej KOZÁK	Gymnázium Grösslingová
	Kristína ŠEŠEROVÁ	Gymnázium Grösslingová
	Matej VEČERÍK	ŠpMNDaG Skalická
10.	Matej HAMAŠ	Gymnázium Grösslingová

	Martina HLAVATÁ	Gymnázium Grösslingová
	Alexandra POLÁKOVÁ	Gymnázium Jura Hronca

Kategória Z9

1.	Matej MOLNÁR	ZŠ Tajovského, Senec
2.	Iveta KARPIŠOVÁ	Gymnázium Grösslingová
3.	Šimon KARKALÍK	Gymnázium Jura Hronca
4.	Peter ŠICHMAN	Gymnázium Grösslingová
5.	Martin DUGAS	Gymnázium Jura Hronca
	Filip GERÁT	Gymnázium Grösslingová
	Juraj POLACH	Gymnázium Grösslingová
8.	Jaroslava BARANOVÁ	ZŠ Za kasárňou
	Tomáš KOŠLAB	Gymnázium Jura Hronca
	Dominika PUPÁKOVÁ	ZŠ Pri kríži
	Ondrej RUDOLF	Gymnázium Grösslingová

Kraj Nitra

Kategória A

1.	Dávid LAMI	3 Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	Martin MELICHERČÍK	4 Gymnázium Párovská, Nitra
	András VARGA	4 Gymnázium H. Selyeho, Komárno
4.	István PARASZTI	3 Gymnázium H. Selyeho, Komárno
5.	Dušan ŠVANCARA	4 Gymnázium Golianova, Nitra
6.	Gergő ÉDES	4 Gymnázium H. Selyeho, Komárno
7.	Zoltán FÁBIK	2 Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	Marián MINÁRIK	4 Gymnázium Párovská, Nitra
	Fridrich VALACH	3 Gymnázium Ľ. J. Šuleka, Komárno

Kategória B

1.	Károly MARÁK	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
2.	Vincent LAMI	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
3.	Matej ŠIMŠÍK	Gymnázium A. Vrábla, Levice
4.	Ivana TONHAUSEROVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
5.	Vladimír BAČA	Gymnázium A. Vrábla, Levice
6.	Zoltán FÁBIK	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
7.	Ágnes BARTAL	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	Martin MÁŠIK	Gymnázium Golianova, Nitra

9.	Matúš ČELLÁR	Gymnázium Párovská, Nitra
	Adrián KNAPP	Gymnázium H. Selyeho, Komárno

KATEGÓRIA C

1.	Dávid IZSÁK	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	Jana ORAVCOVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
	Tomáš TRUNGEL	Gymnázium A. Vrábla, Levice
4.	Albert MIKÓ	Gymnázium sv. Vincenta de Paul, Levice
5.	Lívia LEŠŠOVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
	Gergely SZABÓ	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	Szilvia ŠTRBOVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
8.	Štefan FARSANG	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
9.	Eva MAGYAROVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
10.	Zuzana BÓDIOVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra

KATEGÓRIA Z9

1.	Marián HORŇÁK	ZŠ Močenok
2.	Martin ZAJIČEK	ZŠ Komjatice
3.	Ferenc FARKAŠ	ZŠ Sokolce
4.	Matúš FALIS	Gymnázium A. Vrábla, Levice
5.	Viktor BABINEC	ZŠ G. Bethlena, Nové Zámky
	Lukáš BÉREŠ	ZŠ Tlmače
7.	Terézia KONČOVÁ	ZŠ Komenského, Komárno
	Tünde TARCSIOVÁ	ZŠ F. Móru, Zemianska Olča
9.	Martin ŠVOLÍK	ZŠ Krčméryho, Nitra
10.	Jozef AGÁRDY	ZŠ Školská, Levice
	Juraj KARLUBÍK	Gymnázium Golianova, Nitra
	Matyás MIHÁLKA	ZŠ s VJM, Štúrovo
	Michaela ŠIMIAKOVÁ	ZŠ Cabajská, Nitra
	Tomáš VEŠKRNA	ZŠ Pri Podlužianke, Levice

Kraj Trnava

KATEGÓRIA A

1.	Erik BOHONY	4 Gymnázium Á. Vámbéryho, D. Streda
	Lukáš KONEČNÝ	4 Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany
3.	Albert HERENCSÁR	3 Gymnázium Z. Kodálya, Galanta
4.	Ladislav DUBRAVSKÝ	4 Gymnázium J. Hollého, Trnava

	Filip KOZÁK	4 Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany
	László OLLŐS	3 Gymnázium Á. Vámbéryho, D. Streda
7.	Eva BEDNÁRIKOVÁ	4 Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany

Kategória B

1.	Balázs PONGRÁCZ	Gymnázium Á. Vámbéryho, D. Streda
2.	Lóránt BORÁROS	Gymnázium Á. Vámbéryho, D. Streda
3.	Gábor MOLNÁR	Gymnázium I. Madácha, Šamorín
4.	Andrea PAVLOVIČOVÁ	Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany
	Eva VIDLIČKOVÁ	Gymnázium A. Merici, Trnava
6.	Róbert PECSÉRKE	Gymnázium Sereď
	Juraj TOMAŠOVIČ	Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany

Kategória C

1.	Tomáš HUSÁR	Gymnázium Skalica
2.	Michal DURILA	Gymnázium Komenského, Hlohovec
3.	Dóra FEKETE	Gymnázium Á. Vámbéryho, D. Streda
4.	Norbert FÜLE	Gymnázium M. R. Štefánika, Šamorín
	Ján JAKUBÍK	SPŠ elektrotechnická, Piešťany
	Veronika ŠOKOVÁ	Gymnázium Komenského, Hlohovec
	Martin TOMKO	Gymnázium A. Merici, Trnava
8.	Darina KRIŽÁKOVÁ	Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany
	Róbert MADARÁSZ	Gymnázium Z. Kodálya, Galanta
10.	Tamás SZENTANDRÁSI	Gymnázium Z. Kodálya, Galanta

Kategória Z9

1.	Michal LOFFLER	ZŠ Kľačany
2.	Olívia KUNERTOVÁ	ZŠ Brezová, Piešťany
3.	Erika KÁČEROVÁ	Gymnázium Komenského, Hlohovec
	Matej MÉZEŠ	ZŠ Pusté Úľany
5.	Simona ANTÁLKOVÁ	ZŠ Kúty
	Aneta VÁVROVÁ	ZŠ Kúty
7.	Pavol KOPRDA	Gymnázium A. Merici, Trnava
	Patrik KRAJČA	ZŠ Šoporňa

Kraj Trenčín

KATEGÓRIA A

1.	Jozef JAKUBÍK	4 Gymnázium Partizánske
2.	Peter ONDRÚŠKA	4 SPŠ Dubnica nad Váhom

KATEGÓRIA B

1.	Lenka BAČINSKÁ	Gymnázium Považská Bystrica
	Andrej KREJČÍR	Gymnázium V. B. Nedožerského, Prievidza
3.	Ján DUGÁČEK	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín

KATEGÓRIA C

1.	Jarier WANNOUS	Gymnázium Dubnica nad Váhom
2.	Lenka KUNÍKOVÁ	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
3.	Andrea DIŽOVÁ	Gymnázium Partizánske
4.	Patrícia FLIMMELOVÁ	Gymnázium 1. mája, Púchov
5.	Martina SIVÁKOVÁ	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín

KATEGÓRIA Z9

1.	Tomáš FARKAŠ	ZŠ Bojnice
2.	Samuel BEZNÁK	ZŠ Centrum I, Dubnica nad Váhom
3.	Matej KOYŠ	ZŠ Hodžova, Trenčín
	Alena NOVÝSEDLÁKOVÁ	ZŠ Slov. partizánov, Považská Bystrica
	Patrik ŠVANČARA	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
6.	Danica PAPOVÁ	ZŠ Pod hájom, Dubnica nad Váhom
7.	Veronika JANEGOVÁ	ZŠ J. A. Komenského, Bánovce nad Bebravou
	Ondrej MOSNÁČEK	Gymnázium J. Braneckého, Trenčín
9.	Dávid VELIKÝ	ZŠ Ilava
10.	Martina DIVINSKÁ	Cirk. ZŠ sv. Margity, Púchov
	Peter KOSEC	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
	Mário PUTERKA	ZŠ Školská, Bánovce nad Bebravou

Kraj Žilina

Kategória A

1.	Martin BACHRATÝ	2 Gymnázium Veľká okružná, Žilina
2.	Lukáš KEKELY	4 Gymnázium Varšavská, Žilina
3.	Filip SLÁDEK	2 Gymnázium A. Bernoláka, Námestovo
4.	Ondrej ŠEDO	3 Gymnázium Veľká okružná, Žilina
	Marián ŠPÁNIK	3 Gymnázium sv. Františka z Assisi, Žilina
6.	Filip KUBINA	4 Gymnázium P. O. Hviezdoslava, D. Kubín

Kategória B

1.	Filip SLÁDEK	Gymnázium A. Bernoláka, Námestovo
2.	Martin BACHRATÝ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
3.	Zuzana ROŠŤÁKOVÁ	Gymnázium M. M. Hodžu, Lipt. Mikuláš
4.	Michal OKÁL	Gymnázium sv. Františka z Assisi, Žilina
5.	Kamila ŠTYRÁKOVÁ	Gymnázium P. O. Hviezdoslava, D. Kubín
6.	Jakub HNIDKA	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
	Mojmír MAJDIŠ	Gymnázium P. O. Hviezdoslava, D. Kubín

Kategória C

1.	Alžbeta BOHINÍKOVÁ	Gymnázium Varšavská, Žilina
	Jakub SANTER	Gymnázium M. Hattalu, Trstená
3.	Michal KEKELY	Gymnázium Varšavská, Žilina
4.	František GAŽO	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
	Matej JEČMEN	Gymnázium Varšavská, Žilina
6.	Katarína DUNÍKOVÁ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
7.	Martin BEDNÁR	Gymnázium Veľká okružná, Žilina

Kategória Z9

1.	Soňa GALOVIČOVÁ	ZŠ Jarná, Žilina
2.	Jozef KOZÁRIK	Mestská ZŠ, Rajec
3.	Andrej VLČEK	Ev. gymnázium J. Tranovského, Lipt. Mikuláš
4.	Štefan KAVEC	Mestská ZŠ, Rajec
5.	Adriana BOHYNÍKOVÁ	Cirk. ZŠ R. Zaymusa, Žilina
	Barbora HALAJOVÁ	ZŠ Limbová, Žilina
	Mário CHROMEK	ZŠ Oravská Lesná

Kraj Banská Bystrica

Kategória A

1.	Martin PITOŇÁK	2	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Tomáš SZANISZLO	3	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
3.	Katarína JURÍKOVÁ	4	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
4.	Peter SLUKA	3	Gymnázium Ľ. Štúra, Zvolen
	Katarína TUREKOVÁ	4	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
6.	Vladimír KOBZA	4	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Jakub KONČOK	4	Gymnázium B. S.-Timravy, Lučenec
	Matej MORAVČÍK	4	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica

Kategória B

1.	Martin UKROP	Gymnázium Ľ. Štúra, Zvolen
2.	Patrik ŽILKA	Gymnázium A. H. Škultétyho, Veľký Krtíš
3.	Ondrej BALÚN	Gymnázium Žiar nad Hronom
	Zlatica KONÔPKOVÁ	Gymnázium Ľ. Štúra, Zvolen

Kategória C

1.	Jana FODOROVÁ	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
2.	Zuzana KORDOVÁ	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Lukáš MATÚŠKA	Gymnázium B. S.-Timravy, Lučenec
4.	Marek KAŠTAN	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
5.	Michal ANDERLE	Gymnázium B. S.-Timravy, Lučenec
	Alena GOLJEROVÁ	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Dominika JACKOVÁ	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Barbora RÝSOVÁ	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Michaela ŠATKOVÁ	Gymnázium Žiar nad Hronom
10.	Filip ADLER	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Joel DRAGOŠEK	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Radka CHOMUTOVÁ	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Kamil KARTÁČ	Kat. gymnázium Š. Moyzesa, B. Bystrica
	Erik MAJLÁTH	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Peter PETRINEC	Gymnázium B. S.-Timravy, Lučenec
	Peter VACULČIAK	Kat. gymnázium Š. Moyzesa, B. Bystrica

Kategória Z9

1.	Tomáš TURIS	ZŠ Dobrá Niva
2.	Jozef GÁBORÍK	ZŠ Kriváň

Kraj Košice

Kategória A

1.	Ladislav BAČO	2 Gymnázium Poštová, Košice
	Vladislav UJHÁZI	4 Gymnázium P. J. Šafárika, Rožňava
3.	Tomáš KOCÁK	4 Gymnázium Poštová, Košice
4.	Eduard EIBEN	3 Gymnázium Poštová, Košice
5.	Tomáš KUZMA	3 Gymnázium Alejová, Košice
	Martin POLAČKO	3 Gymnázium Alejová, Košice
	Dávid VENDEL	3 Gymnázium Poštová, Košice
8.	Peter FULLA	3 SPŠ strojnícka, Spišská Nová Ves
	Jakub HVIZDOŠ	3 Gymnázium Poštová, Košice
10.	Richard DUBIEL	4 Gymnázium Poštová, Košice
	Ľubomír REMÁK	3 Gymnázium Alejová, Košice
	Martin VAVREK	4 Gymnázium Šrobárova, Košice

Kategória B

1.	Ladislav BAČO	Gymnázium Poštová, Košice
2.	Jana BARANOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
3.	Milan JANČÁR	Gymnázium P. Horova, Michalovce
4.	Zuzana COCUĽOVÁ	Gymnázium Poštová, Košice
	Marek KLUČÁR	Gymnázium Javorová, Spišská Nová Ves
6.	Róbert TÓTH	Gymnázium Alejová, Košice
7.	Marek BEHÚN	Gymnázium Ľ. Štúra, Michalovce
	Pavol ROHÁR	Gymnázium Alejová, Košice

Kategória C

1.	Dávid HVIZDOŠ	Gymnázium Poštová, Košice
	Peter MILOŠOVIČ	Gymnázium Poštová, Košice
3.	Tomáš BABEJ	Gymnázium Poštová, Košice
	Juraj HORŇÁK	Gymnázium P. Horova, Michalovce
	Ladislav HOVAN	Gymnázium Exnárova, Košice
6.	Ištván SATMÁRI	Gymnázium Poštová, Košice

7.	Dáša KRASNAYOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
8.	Mária MRÁZOVÁ	Gymnázium P. Horova, Michalovce
9.	Tatiana ĎURKOVIČOVÁ	Gymnázium Trebišov
	Peter GROMÓCZKI	Gymnázium Poštová, Košice

Kategória Z9

1.	Klára FICKOVÁ	ZŠ Kežmarská, Košice
	Martin VODIČKA	Gymnázium Alejová, Košice
3.	Jakub GEDERA	ZŠ Jána Švermu, Michalovce
	Lucia KEKEŇÁKOVÁ	ZŠ S. Máraiho, Košice
	Michal MELÍŠEK	ZŠ Park Angelinum, Košice
	Patrícia SZEPEZIOVÁ	ZŠ Bruselská, Košice
7.	Martina DRENČÁKOVÁ	ZŠ Jenisejská, Košice
8.	Alžbeta HRUŠOVSKÁ	ZŠ Nám. L. Novomeského, Košice
9.	Dominika KOLCÚNOVÁ	ZŠ Fábryho, Košice
	Peter MIKOLAJ	ZŠ Jána Švermu, Michalovce

Kraj Prešov

Kategória A

1.	Matúš BENKO	4	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
2.	Miroslav BALÁŽ	4	Gymnázium arm. gen. L. Svobodu, Humenné
3.	Martin LUKAČIŠIN	4	Gymnázium J. F. Rimavského, Levoča
4.	Vladimír BOŽA	4	Gymnázium D. Tatarku, Poprad
	Jakub VAŇO	3	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
6.	Jakub KÖRY	4	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
	Nikola ŠPESOVÁ	4	Gymnázium Konštantínova, Prešov
8.	Michaela MOKCSAYOVÁ	4	Gymnázium Daxnerova, Vranov nad Topľou

Kategória B

1.	Adam MIDLIK	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
2.	Jana ČURLÍKOVÁ	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
3.	Július GAJDÁR	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
4.	Emília RIGDOVÁ	Gymnázium Kukučínova, Poprad
5.	Miroslava KUCHÁROVÁ	Gymnázium Kukučínova, Poprad
6.	Andrea LEŠKOVÁ	Gymnázium Lipany
	Katarína PRIPUTENOVÁ	Cirk. gymnázium sv. Mikuláša, Stará Ľubovňa

Kategória C

1.	Jakub KOCÁK	Gymnázium arm. gen. L. Svobodu, Humenné
2.	Denisa MARTONOVÁ	Gymnázium D. Tatarku, Poprad
3.	Martin BENEJ	Gymnázium arm. gen. L. Svobodu, Humenné
4.	Michal FECKO	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
	Anton HOVANA	Gymnázium T. Vansovej, Stará Ľubovňa
	Jana ŠKROPEKOVÁ	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
7.	Michaela PRISTAŠOVÁ	Gymnázium Kukučínova, Poprad
	Daniel ŠRAMKO	Gymnázium Lipany

Kategória Z9

1.	Marcel SCHICHMAN	ZŠ Šmeralova, Prešov
2.	Peter DUPEJ	ZŠ Šmeralova, Prešov
	Daniela VÍŤAZKOVÁ	ZŠ Sečovská Polianka
4.	Monika DANILÁKOVÁ	ZŠ Šmeralova, Prešov
5.	Jozef DŽAMA	ZŠ Bystré
	Viliam JOBKO	ZŠ Stropkov
	Viktor LUKÁČEK	ZŠ Šmeralova, Prešov
	Dávid PROCHÁZKA	ZŠ Šmeralova, Prešov
	Peter SLANINKA	Cirk. ZŠ Sabinov
10.	Ondrej MULÁR	Gymnázium sv. J. Bosca, Bardejov
	Matej ŠIMA	ZŠ Važecká, Prešov

Zadania súťažných úloh

Kategória C

C – I – 1

Určte najmenšie prirodzené číslo n, pre ktoré aj čísla $\sqrt{2n}$, $\sqrt[3]{3n}$, $\sqrt[5]{5n}$ sú prirodzené.

(Jaroslav Švrček)

C – I – 2

Štvoruholníku $ABCD$ je vpísaná kružnica so stredom S. Určte rozdiel $|\sphericalangle ASD| - |\sphericalangle CSD|$, ak $|\sphericalangle ASB| - |\sphericalangle BSC| = 40°$.

(Jaromír Šimša)

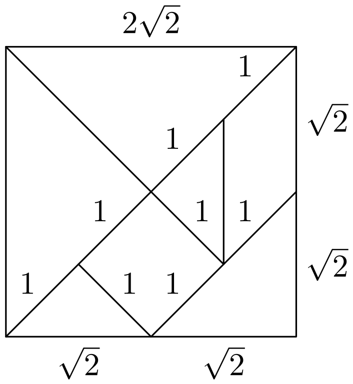
C – I – 3

Máme určitý počet krabičiek a určitý počet guľôčok. Ak dáme do každej krabičky práve jednu guľôčku, ostane nám n guľôčok. Keď však necháme práve n krabičiek bokom, môžeme všetky guľôčky rozmiestniť tak, aby ich v každej zostávajúcej krabičke bolo práve n. Koľko máme krabičiek a koľko guľôčok?

(Vojtech Bálint)

C – I – 4

Tangram je skladačka, ktorú možno vyrobiť z papiera rozrezaním vystrihnutého štvorca na sedem dielov podľa čiar vyznačených na obr. 1. Predpokladajme, že dĺžka strany



Obr. 1

štvorca je $2\sqrt{2}$ cm. Rozhodnite, či možno z dielov tangramu zložiť:

a) obdĺžnik $2\,\mathrm{cm} \times 4\,\mathrm{cm}$,
b) obdĺžnik $\sqrt{2}\,\mathrm{cm} \times 4\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$.

(Pavel Leischner)

C – I – 5

V skupine n ľudí ($n \geqq 4$) sa niektorí poznajú. Vzťah „poznať sa“ je vzájomný: ak osoba A pozná osobu B, tak aj B pozná A a nazývame ich dvojicou známych.

a) Dokážte, že ak medzi každými štyrmi osobami sú aspoň štyri dvojice známych, tak každé dve osoby, ktoré sa nepoznajú, majú spoločného známeho.
b) Zistite, pre ktoré $n \geqq 4$ existuje skupina osôb, v ktorej sú medzi každými štyrmi osobami aspoň tri dvojice známych a súčasne sa niektoré dve osoby ani nepoznajú, ani nemajú spoločného známeho.
c) Rozhodnite, či v skupine šiestich osôb môžu byť v každej štvorici práve tri dvojice známych a práve tri dvojice neznámych.

(Ján Mazák)

C – I – 6

Klárka mala na papieri napísané trojciferné číslo. Keď ho správne vynásobila deviatimi, dostala štvorciferné číslo, ktoré začínalo rovnakou číslicou ako pôvodné číslo, prostredné dve číslice sa rovnali a posledná číslica bola súčtom číslic pôvodného čísla. Ktoré štvorciferné číslo mohla Klárka dostať?

(Peter Novotný)

C – S – 1

Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b väčších ako 1 tak, aby ich súčet aj súčin boli mocniny prvočísel.

(Ján Mazák)

C – S – 2

V danom rovnobežníku $ABCD$ je bod E stred strany BC a bod F leží vnútri strany AB. Obsah trojuholníka AFD je $15\,\mathrm{cm}^2$ a obsah trojuholníka FBE je $14\,\mathrm{cm}^2$. Určte obsah štvoruholníka $FECD$.

(Peter Novotný)

C – S – 3

V skupine šiestich ľudí existuje práve 11 dvojíc známych. Vzťah „poznať sa“ je vzájomný, t. j. ak osoba A pozná osobu B, tak aj B pozná A. Keď sa ktokoľvek zo skupiny dozvie nejakú správu, povie ju všetkým svojim známym. Dokážte, že sa týmto spôsobom nakoniec správu dozvedia všetci.

(Vojtech Bálint)

C – II – 1

Trojuholník ABC spĺňa pri zvyčajnom označení dĺžok strán podmienku $a \leqq b \leqq c$. Vpísaná kružnica sa dotýka strán AB, BC a AC postupne v bodoch K, L a M. Dokážte, že z úsečiek AK, BL a CM možno zostrojiť trojuholník práve vtedy, keď platí $b+c < 3a$.

(Jaroslav Švrček)

C – II – 2

Klárka urobila chybu pri písomnom násobení dvoch dvojciferných čísel, a tak jej vyšlo číslo o 400 menšie, ako bol správny výsledok. Pre kontrolu vydelila číslo, ktoré dostala, menším z násobených čísel. Tentoraz počítala správne a vyšiel jej neúplný podiel 67 a zvyšok 56. Ktoré čísla Klárka násobila?

(Jaromír Šimša)

C – II – 3

Dokážte, že pokiaľ v skupine šiestich osôb existuje aspoň desať dvojíc známych, tak v nej možno nájsť tri osoby, ktoré sa poznajú navzájom. Vzťah „poznať sa“ je vzájomný, t. j. ak osoba A pozná osobu B, tak aj B pozná A. Ukážte, že taká trojica existovať nemusí, ak v skupine šiestich osôb je menej ako desať dvojíc známych.

(Vojtech Bálint)

C – II – 4

Nájdite všetky trojice celých čísel x, y, z, pre ktoré platí

$$x + y\sqrt{3} + z\sqrt{7} = y + z\sqrt{3} + x\sqrt{7}.$$

(Ján Mazák)

Kategória B

B – I – 1

Nájdite všetky prirodzené čísla k, pre ktoré je dekadický zápis čísla $6^k \cdot 7^{2007-k}$ ukončený dvojčíslím a) 02; b) 04.

(Eva Řídká)

B – I – 2

V páse medzi rovnobežkami p, q sú dané dva rôzne body M a N. Zostrojte kosoštvorec alebo štvorec, ktorého dve protiľahlé strany ležia na priamkach p a q a zostávajúce dve strany prechádzajú bodmi M a N (každá jedným).

(Jaromír Šimša)

B – I – 3

Dokážte, že ak x a y sú reálne čísla, pre ktoré platí $x^3 + y^3 \leqq 2$, tak $x + y \leqq 2$.

(Ján Mazák)

B – I – 4

Nájdite všetky pravouhlé trojuholníky s dĺžkami strán a, b, c a dĺžkami ťažníc t_a, t_b, t_c, pre ktoré platí $a+t_a = b+t_b$. Uvažujte oba prípady, keď AB je a) prepona, b) odvesna.

(Pavel Novotný)

B – I – 5

Určte všetky dvojice a, b reálnych čísel, pre ktoré má každá z kvadratických rovníc

$$ax^2 + 2bx + 1 = 0, \quad bx^2 + 2ax + 1 = 0$$

dva rôzne reálne korene, pričom práve jeden z nich je spoločný obom rovniciam.

(Jaroslav Švrček)

B – I – 6

Obdĺžnik $2\,005 \times 2\,007$ je rozdelený na čierne a biele jednotkové štvorčeky. Dokážte, že pre niektorú z farieb (čiernu alebo bielu) existuje viac ako 95 800 pravouholníkov so šírkou aspoň 2, ktoré sa skladajú z jednotkových štvorčekov, navzájom sa neprekrývajú a ktorých rohové políčka majú túto farbu.

(Pavel Leischner)

B – S – 1

Keď ľubovoľné prvočíslo vydelíme tridsiatimi, bude zvyškom číslo 1 alebo prvočíslo. Dokážte.

(Vojtech Bálint)

B – S – 2

Určte všetky dvojice (a, b) reálnych čísel, pre ktoré majú rovnice

$$x^2 + (3a + b)x + 4a = 0, \quad x^2 + (3b + a)x + 4b = 0$$

spoločný reálny koreň.

(Jaroslav Švrček)

B – S – 3

V rovine sú dané dve rovnobežky p a q, bod A na priamke p a bod M ležiaci vnútri pásu medzi priamkami p a q. Zostrojte kosoštvorec alebo štvorec $ABCD$ tak, aby strana AB ležala na priamke p, strana CD na priamke q a aby uhlopriečka BD prechádzala bodom M.

(Jaromír Šimša)

B – II – 1

Uvažujme dve kvadratické rovnice

$$x^2 - ax - b = 0, \quad x^2 - bx - a = 0$$

s reálnymi parametrami a, b. Zistite, akú najmenšiu a akú najväčšiu hodnotu môže nadobudnúť súčet $a + b$, ak existuje práve jedno reálne číslo x, ktoré súčasne vyhovuje obom rovniciam. Určte ďalej všetky dvojice (a, b) reálnych parametrov, pre ktoré tento súčet tieto hodnoty nadobúda.

(Jaroslav Švrček)

B – II – 2

V trojuholníku ABC má uhol α veľkosť $20°$. Vypočítajte veľkosti uhlov β a γ, ak platí rovnosť $a + 2v_a = b + 2v_b$.

(Pavel Novotný)

B – II – 3

V rovine je daný rovnobežník $ABCD$, ktorého uhlopriečka BD je kolmá na stranu AD. Označme M ($M \neq A$) priesečník priamky AC s kružnicou majúcou priemer AD. Dokážte, že os úsečky BM prechádza stredom strany CD.

(Jaroslav Švrček)

B – II – 4

Hokejový turnaj sa hrá systémom „každý s každým“. V priebehu turnaja sa každá dvojica družstiev stretne práve raz. Turnaj sa odohráva po jednotlivých kolách. Pri párnom počte družstiev odohrá každé v jednom kole jedno stretnutie, pri nepárnom počte má v každom kole jedno družstvo voľno. Za remízu dostane každý zo súperov po jednom bode. Ak sa stretnutie neskončí remízou, dostane víťaz dva body, porazený nezíska žiadny bod. O poradí v tabuľke rozhoduje predovšetkým počet bodov, pri rovnosti bodov potom skóre. Po odohratí niekoľkých kôl nemala žiadna dvojica družstiev ten istý počet bodov. Dokážte, že v tom prípade už posledný v tabuľke stratil nádej na celkové prvenstvo. Úlohu riešte pre turnaj

a) desiatich družstiev,

b) jedenástich družstiev.

(Martin Panák)

Kategória A

A – I – 1

Nájdite všetky také trojice reálnych čísel a, b, c, že každá z rovníc

$$x^3 + (a+1)x^2 + (b+3)x + (c+2) = 0,$$
$$x^3 + (a+2)x^2 + (b+1)x + (c+3) = 0,$$
$$x^3 + (a+3)x^2 + (b+2)x + (c+1) = 0$$

má v obore reálnych čísel tri rôzne korene, spolu je to však iba päť rôznych čísel.

(Jaromír Šimša)

A – I – 2

V rovine je daná úsečka AV a ostrý uhol veľkosti α. Určte množinu stredov kružníc opísaných všetkým tým trojuholníkom ABC s vnútorným uhlom α pri vrchole A, ktorých výšky sa pretínajú v bode V.

(Pavel Leischner)

A – I – 3

Množinu M tvorí $2n$ rôznych kladných reálnych čísel, pričom $n \geqq 2$. Uvažujme n obdĺžnikov, ktorých rozmery sú čísla z množiny M, pričom každý prvok z M je použitý práve raz. Určte, aké rozmery majú tieto obdĺžniky, ak je súčet ich obsahov

a) najväčší možný; b) najmenší možný.

(Jaroslav Švrček)

A – I – 4

Určte počet konečných rastúcich postupností prirodzených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_k$ všetkých možných dĺžok k, pre ktoré platí $a_1 = 1$, $a_i \mid a_{i+1}$ pre $i = 1, 2, \ldots, k-1$ a $a_k = 969\,969$.

(Martin Panák)

A – I – 5

Je daná kružnica k, bod O, ktorý na nej neleží, a priamka p, ktorá ju nepretína.

Uvažujme ľubovoľnú kružnicu l, ktorá má vonkajší dotyk s kružnicou k a dotýka sa aj priamky p. Príslušné body dotyku označme A a B. Pokiaľ body O, A, B neležia na jednej priamke, zostrojíme kružnicu m opísanú trojuholníku OAB. Dokážte, že všetky také kružnice m prechádzajú spoločným bodom rôznym od bodu O, alebo sa dotýkajú jednej priamky.

(Ján Mazák)

A – I – 6

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n existuje celé číslo a $(1 < a < 5^n)$ také, že platí $5^n \mid a^3 - a + 1$.

(Ján Mazák)

A – S – 1

V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x^2 - y &= z^2, \\ y^2 - z &= x^2, \\ z^2 - x &= y^2. \end{aligned}$$

(Ján Mazák)

A – S – 2

Podstavy hranola sú tvorené dvoma zhodnými konvexnými n-uholníkmi. Počet v vrcholov tohto telesa, počet s jeho stenových uhlopriečok a počet t jeho telesových uhlopriečok tvoria v istom poradí prvé tri členy aritmetickej postupnosti. Pre ktoré n to platí? (Poznámka: Steny hranola sú bočné steny aj podstavy. Telesová uhlopriečka je úsečka spájajúca dva vrcholy hranola, ktoré neležia v rovnakej stene.)

(Vojtech Bálint)

A – S – 3

V rovine je daný uhol XSY a kružnica k so stredom S. Uvažujme ľubovoľný trojuholník ABC s vpísanou kružnicou k, ktorého vrcholy A a B ležia postupne na polpriamkach SX a SY. Určte množinu vrcholov C všetkých takých trojuholníkov ABC.

(Jaromír Šimša)

A – II – 1

Nájdite všetky štvorice p, q, r, s navzájom rôznych reálnych čísel, pre ktoré sú p, q koreňmi rovnice

$$x^2 + rx + s - 1 = 0$$

a r, s koreňmi rovnice

$$px^2 + p(q-1)x + 12 = 0.$$

(Tomáš Jurík)

A – II – 2

V tabuľke $n \times n$, pričom $n \geqq 2$, sú po riadkoch napísané všetky čísla $1, 2, \dots, n^2$ v tomto poradí (v prvom riadku sú za sebou napísané čísla $1, 2, \dots, n$, v druhom riadku $n + +1, n+2, \dots, 2n$, atď.). V jednom kroku môžeme zvoliť ľubovoľné dve čísla na susedných políčkach (t. j. na takých, ktoré majú spoločnú stranu), a ak je ich aritmetický priemer celé číslo, obe nahradíme týmto priemerom. Pre ktoré n možno po konečnom počte krokov dostať tabuľku, v ktorej sú všetky čísla rovnaké?

(Peter Novotný)

A – II – 3

Daný je ostrouhlý trojuholník ABC s pätami výšok D, E, F ležiacimi postupne na stranách AB, BC, CA. Obraz bodu F v stredovej súmernosti podľa stredu strany AB leží na priamke DE. Určte veľkosť uhla BAC.

(Ján Mazák)

A – II – 4

Dokážte, že pre nezáporné reálne čísla x, y spĺňajúce vzťah $x^2 + y^6 = 2$ platí

$$x^2 + 2 \geqq 3xy.$$

(Ján Mazák)

A – III – 1

Určte koeficienty p, q, r polynómu $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$, ak viete, že sú to nenulové navzájom rôzne celé čísla a že $f(p) = p^3$, $f(q) = q^3$.

(Vojtech Bálint)

A – III – 2

V ostrouhlom trojuholníku ABC, v ktorom $|AC| \neq |BC|$, označme D a E päty výšok z vrcholov A a B. Nech V je priesečník výšok trojuholníka ABC, bod F je priesečník priamok AB a DE a bod S je stred strany AB. Ďalej nech K je priesečník kružníc opísaných trojuholníkom BDS a AES rôzny od bodu S.

a) Dokážte, že body D, E, V, K ležia na jednej kružnici.

b) Dokážte, že body F, V, K ležia na jednej priamke.

(Ján Mazák)

A – III – 3

V tabuľke $n \times n$, pričom $n \geqq 2$, sú po riadkoch napísané všetky čísla $1, 2, \dots, n^2$ v tomto poradí (v prvom riadku sú za sebou napísané čísla $1, 2, \dots, n$, v druhom riadku $n + 1, n+2, \dots, 2n$, atď.). V jednom kroku môžeme zvoliť ľubovoľné dve čísla na susedných políčkach (t. j. na takých, ktoré majú spoločnú stranu) a buď obidve súčasne zväčšiť o 1 alebo obidve súčasne zmenšiť o 1. Pre ktoré n možno po konečnom počte krokov dostať tabuľku, v ktorej sú všetky čísla rovné 365?

(Peter Novotný)

A – III – 4

Dokážte, že pre žiadne prirodzené číslo n nie je číslo $27^n - n^{27}$ prvočíslom.

(Ján Mazák)

A – III – 5

Nech x, y, z sú kladné reálne čísla, ktorých súčin je 1. Dokážte, že ak k, m sú kladné celé čísla, pričom $k > m$, tak

$$x^k + y^k + z^k \geqq x^m + y^m + z^m.$$

(Pavel Novotný)

A – III – 6

Označme zvyčajným spôsobom dĺžky strán a ťažníc daného trojuholníka. Nájdite všetky možné hodnoty výrazu

$$\text{a)}\quad \frac{t_a^2 - t_b^2}{b^2 - a^2}; \qquad\qquad \text{b)}\quad \frac{t_a - t_b}{b - a}.$$

(Pavel Novotný)

Riešenia súťažných úloh

Kategória C

C – I – 1

Vysvetlíme, prečo prvočíselný rozklad hľadaného čísla musí obsahovať len vhodné mocniny prvočísel 2, 3 a 5. Každé prípadné ďalšie prvočíslo by sa v rozklade čísla n muselo vyskytovať v mocnine, ktorej exponent je deliteľný dvoma, tromi aj piatimi zároveň. Po vyškrtnutí takého prvočísla by sa číslo n zmenšilo a skúmané odmocniny by pritom ostali celočíselné.

Položme preto $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, pričom a, b, c sú prirodzené čísla. Čísla $\sqrt[3]{3n}$ a $\sqrt[5]{5n}$ sú celé, preto je exponent a násobkom troch a piatich. Aj $\sqrt{2n}$ je celé číslo, preto musí byť číslo a nepárne. Je teda nepárnym násobkom pätnástich: $a \in \{15, 45, 75, \dots\}$. Analogicky je exponent b taký násobok desiatich, ktorý po delení tromi dáva zvyšok 2: $b \in \{20, 50, 80, \dots\}$. Napokon c je násobok šiestich, ktorý po delení piatimi dáva zvyšok 4: $c \in \{24, 54, 84, \dots\}$. Z podmienky, že n je najmenšie, dostávame $n = 2^{15} \cdot 3^{20} \cdot 5^{24}$.

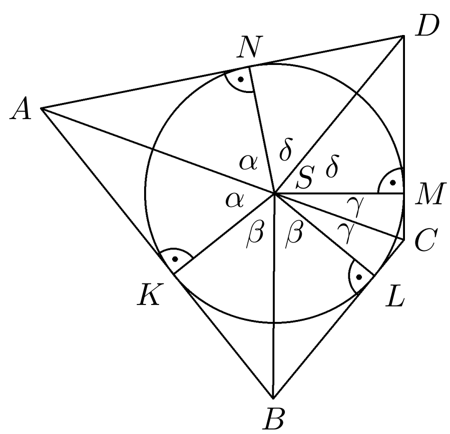
Presvedčíme sa ešte, že dané odmocniny sú prirodzené čísla:

$$\sqrt{2n} = 2^8 \cdot 3^{10} \cdot 5^{12}, \quad \sqrt[3]{3n} = 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^8, \quad \sqrt[5]{5n} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^5.$$

Záver. Hľadaným číslom je $n = 2^{15} \cdot 3^{20} \cdot 5^{24}$.

C – I – 2

Päty kolmíc spustených zo stredu S vpísanej kružnice na strany AB, BC, CD a DA označme postupne K, L, M a N (obr. 2). Pravouhlé trojuholníky ASK a ASN sú



Obr. 2

zhodné podľa vety *Ssu*. Majú totiž spoločnú preponu AS a zhodné odvesny SK a SL, ktorých dĺžka je rovná polomeru vpísanej kružnice. Zo zhodnosti týchto trojuholníkov vyplýva jednak známe tvrdenie o dĺžkach dotyčníc ($|AK| = |AN|$), jednak zhodnosť uhlov ASK a ASN, ktorých spoločnú veľkosť označíme α:

$$|\measuredangle ASK| = |\measuredangle ASN| = \alpha.$$

Analogicky zistíme zhodnosť trojuholníkov SBK a SBL, ďalej SCL a SCM, a nakoniec SDM a SDN. Na základe uvedených zhodností môžeme položiť

$$|\measuredangle BSK| = |\measuredangle BSL| = \beta, \quad |\measuredangle CSL| = |\measuredangle CSM| = \gamma, \quad |\measuredangle DSM| = |\measuredangle DSN| = \delta.$$

Odtiaľ a z obr. 2 potom dostávame

$$\begin{aligned}|\measuredangle ASD| - |\measuredangle CSD| &= (\alpha + \delta) - (\gamma + \delta) = \alpha - \gamma = \\ &= (\alpha + \beta) - (\gamma + \beta) = |\measuredangle ASB| - |\measuredangle BSC| = 40^\circ.\end{aligned}$$

Záver. $|\measuredangle ASD| - |\measuredangle CSD| = 40^\circ$.

C – I – 3

Keď označíme x počet krabičiek a y počet guľôčok, dostaneme zo zadania sústavu rovníc

$$x + n = y \qquad \text{a} \qquad (x - n) \cdot n = y \tag{1}$$

s neznámymi x, y a n z oboru prirodzených čísel. Vylúčením neznámej y dostaneme rovnicu $x + n = (x - n) \cdot n$, ktorá pre $n = 1$ nemá riešenie. Pre $n \geqq 2$ dostaneme

$$x = \frac{n^2 + n}{n - 1} = n + 2 + \frac{2}{n - 1}, \tag{2}$$

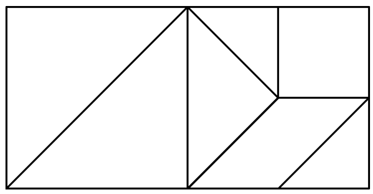
odkiaľ vidíme, že (prirodzené) číslo $n - 1$ musí byť deliteľom čísla 2. Teda $n \in \{2, 3\}$. Prípustné hodnoty n dosadíme do (1) a sústavu vyriešime (možno tiež využiť vzťah (2)). Pre $n = 2$ dostaneme $x = 6$, $y = 8$ a pre $n = 3$ určíme $x = 6$ a $y = 9$.

Skúška. Majme šesť krabičiek a osem guľôčok. Keď do každej krabičky dáme práve jednu guľôčku, ostane $n = 2$ guľôčok. Keď však odoberieme dve krabičky, môžeme do zostávajúcich štyroch rozdeliť guľôčky práve po dvoch. Podmienky úlohy sú teda splnené. Pre šesť krabičiek a deväť guľôčok urobíme skúšku rovnako ľahko.

Záver. Buď máme šesť krabičiek a osem guľôčok, alebo šesť krabičiek a deväť guľôčok.

C – I – 4

a) Daný obdĺžnik sa zložiť dá (obr. 3).



Obr. 3

b) Celková dĺžka „iracionálnych“ strán všetkých dielov tangramu je $10\sqrt{2}$ cm. Je teda rovná obvodu obdĺžnika, ktorý máme zložiť. Odtiaľ vyplýva, že všetky „iracionálne“ strany dielov tangramu musia byť umiestnené na hranici skladaného obdĺžnika.[1] To však nie je možné, lebo protiľahlé „iracionálne“ strany kosodĺžnikového dielu majú vzdialenosť menšiu ako 1 cm, ale najmenšia vzdialenosť protiľahlých strán obdĺžnika je $\sqrt{2}$ cm.

Záver. Obdĺžnik 2 cm × 4 cm sa z tangramu zložiť dá, obdĺžnik $\sqrt{2}\,\mathrm{cm} \times 4\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$ sa zložiť nedá.

C – I – 5

a) Označme A, B dve osoby, ktoré sa nepoznajú, a pridajme k nim ľubovoľné ďalšie dve osoby X a Y. Keby ani osoba X, ani osoba Y nebola spoločným známym osôb A a B, mali by sme zo všetkých šiestich dvojíc vo štvorici $ABXY$ aspoň tri dvojice neznámych: dvojicu AB, dvojicu AX alebo BX a dvojicu AY alebo BY. Dvojice známych vo štvorici $ABXY$ by tak boli najviac tri, čo odporuje predpokladu zo zadania časti a). Tým je časť a) dokázaná.

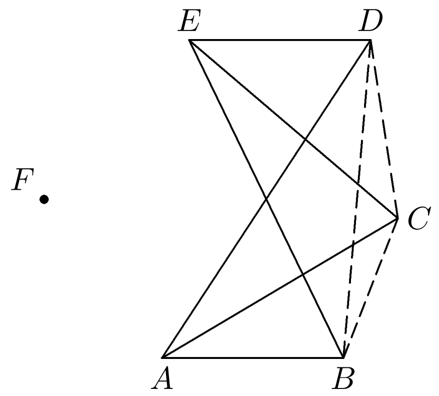
b) Skupina požadovaných vlastností existuje pre všetky $n \geqq 4$. Ako príklad stačí zvoliť skupinu, v ktorej sa osoba A nepozná s nikým a ostatní sa poznajú navzájom. Potom existuje dokonca $n-1$ dvojíc osôb, ktoré sa ani nepoznajú, ani nemajú spoločného známeho, a medzi každými štyrmi osobami sú aspoň tri dvojice známych.

c) Budeme predpokladať, že šestica osôb s opísanou vlastnosťou existuje. Využijeme grafické znázornenie, v ktorom osoby zakreslíme ako body. Plnou (resp. prerušovanou) úsečkou, ktorou niektoré dva z týchto bodov spojíme, vyznačíme dvojicu známych (resp. dvojicu neznámych).

Z každého bodu grafického znázornenia skupiny šiestich osôb vychádza práve päť úsečiek. Podľa Dirichletovho princípu preto aspoň tri úsečky, ktoré vychádzajú z jedného bodu, majú rovnaký typ (sú buď prerušované, alebo plné). Označme body A, B, C, D,

[1] Používame známe tvrdenie, že pre celé čísla a, b, c, d platí $a+b\sqrt{2} = c+d\sqrt{2}$ práve vtedy, keď $a = c$ a $b = d$.

E a F tak, aby mali rovnaký typ úsečky AB, AC a AD, a predpokladajme najskôr, že označujú dvojice známych. Vo štvorici $ABCD$ sú však podľa predpokladu práve tri dvojice neznámych, a preto je trojuholník BCD v grafickom znázornení zakreslený prerušovane. Vo štvorici $BCDE$ potom úsečky EB, EC, ED nutne predstavujú dvojice známych (obr. 4). Odtiaľ vyplýva, že vo štvorici $ABDE$ sú aspoň štyri dvojice známych, ktoré na obr. 4 znázorňujú úsečky AB, AD, EB a ED, čo je v rozpore s naším predpokladom. Prípad, keď úsečky AB, AC a AD predstavujú dvojice neznámych, vedie ku sporu analogicky (v predchádzajúcich úvahách stačí zameniť vzťahy *poznať sa* a *nepoznať sa* a samozrejme aj prerušované a plné úsečky).



Obr. 4

Záver. Neexistuje skupina šiestich osôb, ktorá má v každej svojej štvorici práve tri dvojice známych a práve tri dvojice neznámych.

C – I – 6

Hľadajme pôvodné číslo $x = 100a + 10b + c$, ktorého cifry sú a, b, c. Cifru, ktorá sa vyskytuje na prostredných dvoch miestach výsledného súčinu, označme d. Zo zadania vyplýva

$$9(100a + 10b + c) = 1\,000a + 100d + 10d + (a + b + c), \tag{1}$$

pričom výraz v poslednej zátvorke predstavuje cifru zhodnú s poslednou cifrou súčinu $9c$. To však znamená, že nemôže byť $c \geqq 5$: pre také c totiž končí číslo $9c$ cifrou neprevyšujúcou 5, a pretože $a \neq 0$, platí naopak $a + b + c > c \geqq 5$.

Zrejme tiež $c \neq 0$ (v opačnom prípade by platilo $a = b = c = x = 0$). Ostatné možnosti vyšetríme zostavením nasledujúcej tabuľky.

c	$9c$	$a+b+c$	$a+b$
1	9	9	8
2	18	8	6
3	27	7	4
4	36	6	2

Rovnosť (1) možno prepísať na tvar

$$100(b - a - d) = 10d + a + 11b - 8c. \tag{2}$$

Hodnota pravej strany je aspoň -72 a menšia ako 200, lebo každé z čísel a, b, c, d je najviac rovné deviatim. Takže buď $b - a - d = 0$, alebo $b - a - d = 1$.

V prvom prípade po substitúcii $d = b - a$ upravíme vzťah (2) na tvar $8c = 3(7b - 3a)$, z ktorého vidíme, že c je násobkom troch. Z prvej tabuľky potom vyplýva $c = 3$, $a = 4 - b$, čo po dosadení do rovnice $8c = 3(7b - 3a)$ vedie k riešeniu $a = b = 2$, $c = 3$. Pôvodné číslo je teda $x = 223$ a jeho deväťnásobok $9x = 2\,007$.

V druhom prípade dosadíme $d = b - a - 1$ do (2) a zistíme, že $8c + 110 = 3(7b - 3a)$. Výraz $8c + 110$ je teda deliteľný tromi, preto číslo c dáva po delení tromi zvyšok 2. Dosadením jediných možných hodnôt $c = 2$ a $b = 6 - a$ do poslednej rovnice zistíme, že $a = 0$, čo je v rozpore s tým, že číslo $x = 100a + 10b + c$ je trojciferné.

Záver. Klárka dostala štvorciferné číslo 2 007.

Poznámka. Prvá tabuľka ponúka jednoduchší, ale numericky prácnejší postup priameho dosadzovania všetkých prípustných hodnôt čísel a, b, c do rovnice (1). Počet všetkých možností možno obmedziť na desať odhadom $b \geqq a$, ktorý zistíme pomocou vhodnej úpravy vzťahu (1) napríklad na tvar (2). Riešenie uvádzame v druhej tabuľke.

a	1	2	3	4	1	2	3	1	**2**	1
b	7	6	5	4	5	4	3	3	**2**	1
c	1	1	1	1	2	2	2	3	**3**	4
$9x$	1 539	2 349	3 159	3 969	1 368	2 178	2 988	1 197	**2 007**	1 026

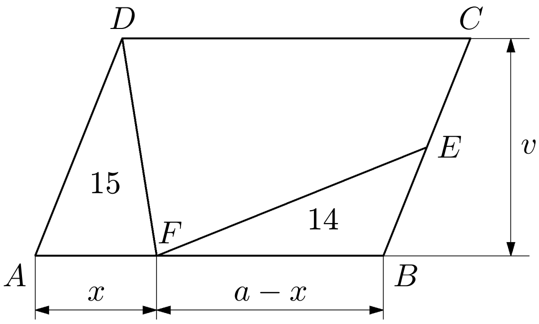
C – S – 1

Z podmienky pre súčin vyplýva, že a aj b sú mocninami toho istého prvočísla p: $a = p^r$, $b = p^s$, pričom r, s sú celé kladné čísla. Keby bolo p nepárne, bol by súčet $a+b$ deliteľný okrem čísla p aj číslom 2, takže by nebol mocninou prvočísla. Ak $p = 2$ a $r < s$, je súčet $a + b = 2^r(1 + 2^{s-r})$ opäť číslo párne deliteľné nepárnym číslom väčším ako 1, nie je teda mocninou prvočísla. K rovnakému záveru dôjdeme aj v prípade, keď $r > s$. Ostáva preto jediná možnosť: $a = b = 2^r$, pričom r je celé kladné číslo. Skúška $a + b = 2^r + 2^r = 2^{r+1}$ a $ab = 2^{2r}$ potvrdzuje, že riešením sú všetky dvojice $(a, b) = (2^r, 2^r)$, kde r je celé kladné číslo.

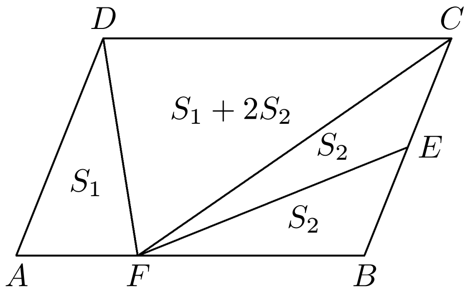
C – S – 2

Označme v vzdialenosť bodu C od priamky AB, $a = |AB|$ a $x = |AF|$. Pre obsahy trojuholníkov AFD a FBE (obr. 5) platí $\frac{1}{2}x \cdot v = 15$, $\frac{1}{2}(a - x) \cdot \frac{1}{2}v = 14$. Odtiaľ $xv = 30$, $av - xv = 56$. Sčítaním oboch rovností nájdeme obsah rovnobežníka $ABCD$: $S_{ABCD} = av = 86\,\mathrm{cm}^2$. Obsah štvoruholníka $FECD$ je teda $S_{FECD} = S_{ABCD} - (S_{AFD} + S_{FBE}) = 57\,\mathrm{cm}^2$.

Iné riešenie. Trojuholníky BEF a ECF majú spoločnú výšku z vrcholu F a zhodné základne BE a EC. Preto sú obsahy oboch trojuholníkov rovnaké. Z obr. 6 vidíme, že obsah trojuholníka CDF je polovicou obsahu rovnobežníka $ABCD$ (oba útvary



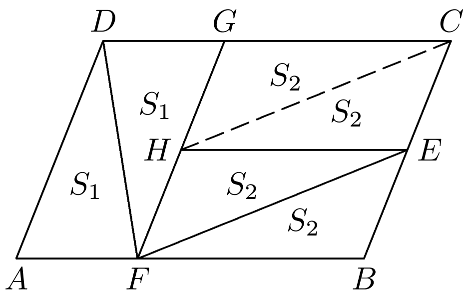
Obr. 5



Obr. 6

majú spoločnú základňu CD a rovnakú výšku). Druhú polovicu tvorí súčet obsahov trojuholníkov AFD a BCF. Odtiaľ $S_{FECD} = S_{ECF} + S_{CDF} = S_{ECF} + (S_{AFD} + S_{BCF}) = S_{AFD} + 3S_{FBE} = 57\,\mathrm{cm}^2$.

Iné riešenie. Do rovnobežníka dokreslíme úsečky FG a EH rovnobežné so stranami BC a AB tak, ako znázorňuje obr. 7. Rovnobežníky $AFGD$ a $FBEH$ sú svojimi



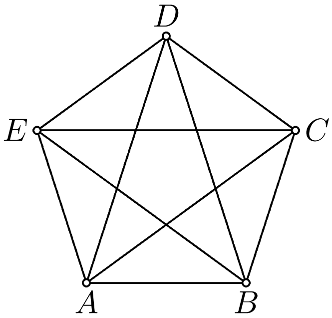
Obr. 7

uhlopriečkami DF a EF rozdelené na dvojice zhodných trojuholníkov. Takže $S_{GDF} = S_{AFD} = 15\,\mathrm{cm}^2$ a $S_{HFE} = S_{BEF} = 14\,\mathrm{cm}^2$. Zo zhodnosti rovnobežníkov $HECG$ a $FBEH$ navyše ľahko nahliadneme, že všetky štyri trojuholníky FBE, EHF, HEC a CGH sú zhodné, takže obsah štvoruholníka $FECD$ je $S_{AFD} + 3S_{FBE} = 57\,\mathrm{cm}^2$.

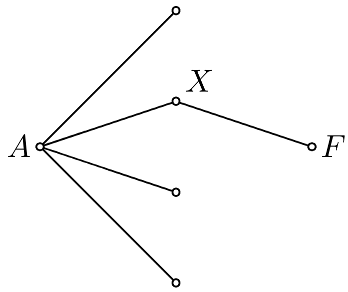
C – S – 3

Jednotlivé osoby označíme písmenami A, B, C, D, E a F. Aspoň jedna z nich (označme ju A) má aspoň štyroch známych (ak by mala každá osoba najviac troch známych, bolo by dvojíc známych menej ako desať). Keby mala dokonca päť známych, dozvie sa správu od každého v skupine a môže ju komukoľvek v skupine povedať.

Ak má osoba A práve štyroch známych, napríklad osoby B, C, D a E, existuje v skupine osôb A, B, C, D, E najviac 10 známostí (obr. 8, dvojice známych znázorňujú úsečky), a tak sa osoba F musí poznať s niektorou osobou $X \in \{B, C, D, E\}$. Možnosť



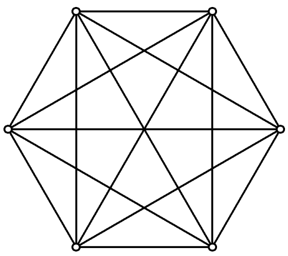
Obr. 8



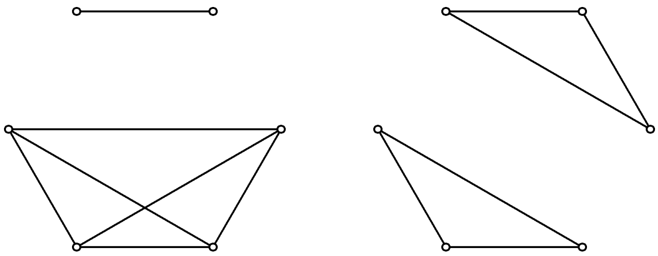
Obr. 9

šírenia správy od ľubovoľnej osoby ku ktorejkoľvek inej ľahko overíme podľa obr. 9.

Iné riešenie. Znázornenie ktorejkoľvek množiny práve jedenástich dvojíc známych v skupine šiestich osôb dostaneme odstránením štyroch z pätnástich hrán úplného grafu (obr. 10, v ňom z každého uzla vychádza práve päť hrán). Po odstránení iba štyroch hrán z grafu na obr. 10 musí teda z každého vrcholu vychádzať aspoň jedna hrana. V skupine teda neexistuje človek, ktorý by nikoho nepoznal. Aby sa preto správa nemohla od niektorej z osôb rozšíriť ku všetkým ostatným, musela by v príslušnom grafe existovať buď aspoň jedna oddelená dvojica, alebo dve oddelené trojice, v ktorých sa osoby môžu poznať navzájom. V žiadnej z týchto situácií však počet dvojíc známych neprevyšuje sedem, ako vidíme z obr. 11. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.



Obr. 10



Obr. 11

C – II – 1

Označme $x = |AK| = |AM|$, $y = |BL| = |BK|$, $z = |CM| = |CL|$ (obr. 12) zhodné úseky dotyčníc z jednotlivých vrcholov trojuholníka ku vpísanej kružnici. Zrejme

$$a = y + z, \quad b = z + x, \quad c = x + y. \tag{1}$$

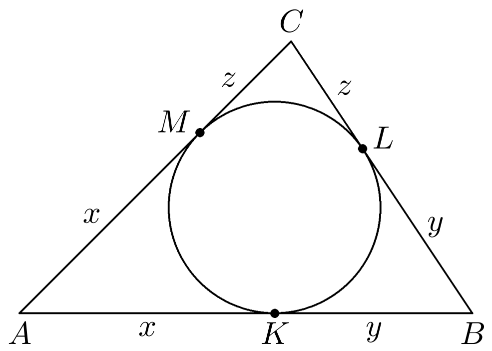
Z uvedených rovností vidíme, že daná podmienka

$$b + c < 3a \tag{2}$$

je ekvivalentná nerovnosti

$$x < y + z, \tag{3}$$

čo je nutná podmienka existencie trojuholníka so stranami dĺžok x, y a z.



Obr. 12

Dosadením z (1) do podmienok $b \leqq c$ a $a \leqq b$ zistíme, že $z \leqq y$ a $y \leqq x$. To znamená, že ďalšie dve trojuholníkové nerovnosti $y < z + x$ a $z < x + y$ sú automaticky splnené, takže nerovnosť (3), a tým aj (2) je podmienkou postačujúcou. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

C – II – 2

Označme x menšie a y väčšie z násobených čísel. Podľa zadania platí $xy - 400 = 67x + 56$, čiže

$$x(y - 67) = 456. \tag{1}$$

Číslo x je teda dvojciferný deliteľ čísla $456 = 2^3 \cdot 3 \cdot 19$. Zo zadania navyše vyplýva, že číslo x je väčšie ako príslušný zvyšok 56. Najmenšie také x je $x = 3 \cdot 19 = 57$. Pre každý ďalší taký deliteľ platí $x \geqq 4 \cdot 19 = 76$ a $y - 67 \leqq 2 \cdot 3 = 6$, takže $y \leqq 73 < x$, čo odporuje zvolenému označeniu $x < y$. Teda $x = 57$ a $y = 75$. Ľahko overíme, že tieto čísla vyhovujú zadaniu úlohy.

Záver. Klárka násobila čísla 57 a 75.

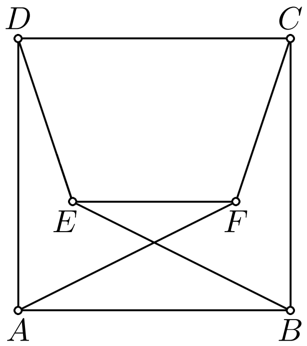
C – II – 3

Nazvime A osobu (prípadne jednu z osôb), ktorá má v danej skupine najviac známych, a tento počet známych označme n. Zrejme $n \leqq 5$.

Ak $n = 5$, existuje medzi zostávajúcimi osobami aspoň päť ďalších dvojíc známych. Ktorákoľvek z týchto dvojíc potom tvorí s osobou A trojicu známych.

Ak $n = 4$, existuje osoba B, ktorá sa s A nepozná, a tá má tiež najviac štyroch známych. Preto sa medzi známymi osoby A vyskytujú aspoň dve dvojice známych. Osoba A s jednou z týchto dvojíc tvorí opäť trojicu známych.

Situácia $n \leqq 3$ nemôže nastať, pretože celkový počet dvojíc známych v skupine by vtedy bol nanajvýš $\frac{1}{2} \cdot 6n \leqq 9$.



Obr. 13

Príklad skupiny šiestich osôb s deviatimi dvojicami, ale s žiadnou trojicou známych, je znázornený grafom na obr. 13. V ňom body A, B, C, D, E a F predstavujú jednotlivé osoby a dvojice známych sú vyznačené úsečkami. Pritom žiadne tri z úsečiek netvoria trojuholník. Pokiaľ je v skupine menej ako deväť dvojíc známych, zostrojíme vhodný príklad odstránením príslušného počtu úsečiek z obr. 13 (pritom určite žiadny trojuholník nevznikne).

Iné riešenie. Ak je v šestici osôb aspoň 10 dvojíc známych, je v nej najviac 5 dvojíc neznámych, lebo všetkých dvojíc je práve 15. Budeme preto naopak predpokladať, že v každej trojici sa nájde dvojica neznámych, a dokážeme, že v celej šestici je takých dvojíc aspoň 6. Pri uvedenom predpoklade môžeme označenie osôb zvoliť tak, aby v trojiciach ABC a DEF boli dvojice neznámych AB a DE. Potom ďalšie štyri rôzne dvojice neznámych nájdeme (po jednej) v trojiciach ACD, AEF, BCE, BDF (presvedčte sa, že každá dvojica sa vyskytuje najviac v jednej z uvedených štyroch trojíc a žiadna z týchto trojíc neobsahuje ani dvojicu AB, ani dvojicu DE).

Príklad pre menší počet dvojíc známych zostrojíme rovnako ako v predchádzajúcom riešení.

C – II – 4

Rovnicu prepíšeme na tvar

$$x - y = (z - y)\sqrt{3} + (x - z)\sqrt{7}$$

a umocníme. Po jednoduchej úprave dostaneme

$$(x - y)^2 - 3(z - y)^2 - 7(x - z)^2 = 2(x - z)(z - y)\sqrt{21}. \tag{1}$$

Pre $x \neq z$ a $y \neq z$ nemôže rovnosť (1) platiť, pretože jej pravá strana je v takom prípade číslo iracionálne, zatiaľ čo ľavá strana je číslo celé. Rovnosť teda môže nastať, len keď $x = z$ alebo $y = z$.

V prvom prípade po dosadení $x = z$ do pôvodnej rovnice dostaneme $z-y = \sqrt{3}(z-y)$. Odtiaľ $z = y = x$.

V druhom prípade, keď $y = z$, dôjdeme analogicky k rovnakému výsledku.

Záver. Riešením danej rovnice sú všetky trojice $(x, y, z) = (k, k, k)$, kde k je ľubovoľné celé číslo.

Kategória B

B – I – 1

Opakovaným násobením číslom 6 zistíme, že posledné dvojčíslia mocnín 6^k pre $k = 1, 2, 3, \dots$ sú postupne

$$06, 36, 16, 96, 76, 56, 36, 16, 96, 76, 56, \dots, \tag{1}$$

opakujú sa teda od druhého člena s periódou dĺžky 5. Podobne opakovaným násobením číslom 7 zistíme, že posledné dvojčíslia mocnín 7^m pre $m = 1, 2, 3, \dots$ sú postupne

$$07, 49, 43, 01, 07, 49, 43, 01, \dots, \tag{2}$$

opakujú sa teda už od prvého člena s periódou dĺžky 4.

a) Pretože každá mocnina šiestich je zakončená číslicou 6, bude číslo $6^k \cdot 7^{2007-k}$ zakončené dvojkou jedine vtedy, keď bude číslo 7^{2007-k} zakončené dvojčíslím 07 (iné dvojčíslie z (2) nevyhovuje). Násobením číslami 6, 36, 16, 96, 76 a 56 však zistíme, že číslo $6^k \cdot 7^{2007-k}$ môže mať v takom prípade na predposlednom mieste iba niektorú z číslic 1, 3, 4, 5, 7, 9. Zakončenie dvojčíslím 02 preto nie je možné.

b) Keďže každá mocnina šiestich je zakončená číslicou 6, bude číslo $6^k \cdot 7^{2007-k}$ zakončené štvorkou práve vtedy, keď 7^{2007-k} bude zakončené dvojčíslím 49 (iné dvojčíslie z (2) nevyhovuje). Násobením všetkými rôznymi číslami z (1) zistíme, že $6^k \cdot 7^{2007-k}$ je zakončené dvojčíslím 04 jedine vtedy, keď 6^k končí dvojčíslím 96. Číslo 6^k končí na 96 práve vtedy, keď je exponent k tvaru $k = 4 + 5a$; číslo 7^{2007-k} končí na 49 práve vtedy, keď príslušný exponent má tvar $2\,007 - k = 2 + 4b$. Dosadením $k = 4 + 5a$ dostaneme rovnicu $2\,007 - 4 - 5a = 2 + 4b$, pričom a a b sú celé nezáporné čísla. Z nej vychádza

$$b = \frac{2\,001 - 5a}{4} = 500 - a - \frac{a-1}{4}.$$

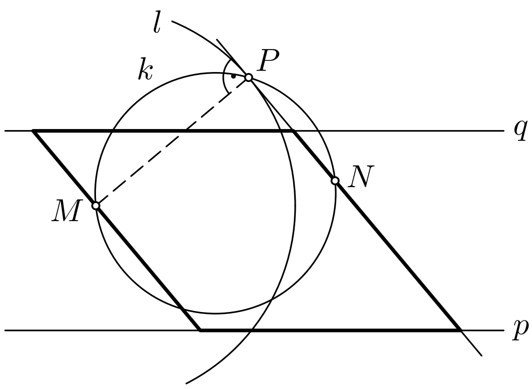
Aby bolo b celé, musí byť $a - 1$ deliteľné štyrmi, teda $a = 4c + 1$; potom $b = 499 - 5c$, $k = 9 + 20c$. Exponent $2\,007 - k$ rovný $1\,998 - 20c$ nemôže byť záporný, preto $c \leqq 99$.

Číslo $6^k \cdot 7^{2007-k}$ je zakončené dvojčíslím 04 práve vtedy, keď je číslo k tvaru $k = 9 + 20c$, pričom $c \in \{0, 1, 2, \dots, 99\}$.

B – I – 2

V kosoštvorci (resp. vo štvorci, v nasledujúcich úvahách to budeme často vynechávať) sú vzdialenosti oboch dvojíc protiľahlých strán rovnaké. Našou úlohou je teda viesť bodmi M a N rovnobežky, ktorých vzdialenosť sa rovná vzdialenosti d rovnobežiek p a q. Päta P kolmice z bodu M na stranu hľadaného kosoštvorca prechádzajúcu bodom N

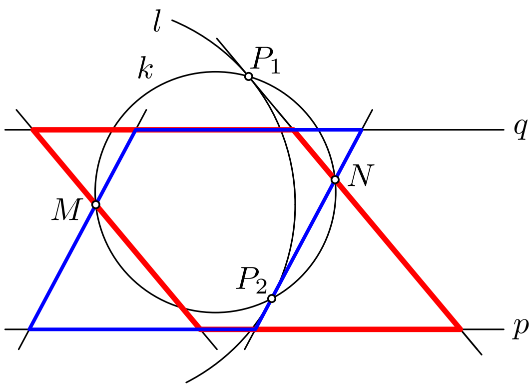
leží na Tálesovej kružnici nad priemerom MN a má od bodu M vzdialenosť d (obr. 14). Odtiaľ vyplýva *konštrukcia*:



Obr. 14

Zostrojíme Tálesovu kružnicu k nad priemerom MN a kružnicu l so stredom M, ktorej polomer sa rovná vzdialenosti d priamok p a q. Označíme P priesečník kružníc k a l. Na priamke PN leží jedna zo strán hľadaného kosoštvorca. Protiľahlá strana prechádza bodom M a je s priamkou PN rovnobežná.

Vzniknutý rovnobežník je skutočne kosoštvorec alebo štvorec, lebo zo zhodnosti výšok vyplýva zhodnosť strán.



Obr. 15

Diskusia. Existencia riešenia je podmienená existenciou bodu P. Zrejme potom nemôže byť $NP \parallel q$, pretože by to znamenalo, že je $|MP| < d$. Takže rovnobežky prechádzajúce bodmi M, N vždy vytnú požadovaný rovnobežník. Ak $|MN| > d$, majú kružnice k a l dva rôzne priesečníky $P_1 \neq P_2$ (obr. 15), takže úloha má dve riešenia. Ak $|MN| = d$, potom $P = N$; stranu kosoštvorca prechádzajúcu bodom N zostrojíme ako kolmicu na MN a úloha má len jedno riešenie. V prípade $|MN| < d$ nemá úloha riešenie.

B – I – 3

Tvrdenie dokážeme sporom. Pripusťme, že platí $x + y > 2$. Potom $y > 2 - x$, takže $y^3 > (2 - x)^3$, lebo funkcia $s = t^3$ je v premennej t rastúca na celom obore reálnych čísel. Preto platí

$$x^3 + y^3 > x^3 + (2 - x)^3 = 8 - 12x + 6x^2 = 6(x - 1)^2 + 2 \geqq 2.$$

To je v spore s predpokladom. Tým je tvrdenie dokázané.

Iné riešenie. Dvojčlen $x^3 + y^3$ rozložíme na súčin $(x+y)(x^2 - xy + y^2)$. Keby platilo $x + y > 2$, pre druhý činiteľ $x^2 - xy + y^2$ by sme mali odhad

$$x^2 - xy + y^2 = \frac{1}{4}(x + y)^2 + \frac{3}{4}(x - y)^2 > 1.$$

Pre výraz $x^3 + y^3$ by potom platilo

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) > 2 \cdot 1 = 2.$$

To je opäť v spore s predpokladom. Tým je tvrdenie dokázané.

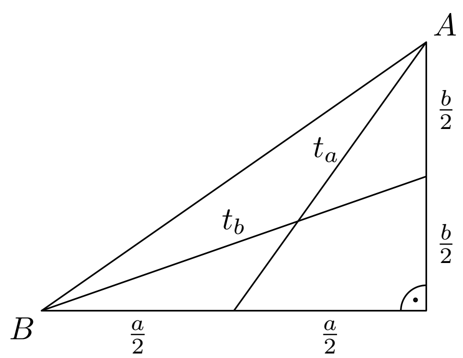
B – I – 4

a) Nech a aj b sú odvesny (obr. 16). Potom podľa Pytagorovej vety

$$t_a = \sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}, \quad t_b = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2},$$

takže podmienka $a + t_a = b + t_b$ má tvar

$$a + \sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = b + \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$



Obr. 16

Keďže z nerovnosti $a > b$ vyplýva $t_b > t_a$, sú nasledujúce úpravy ekvivalentné:

$$\begin{aligned} 2a - 2b &= \sqrt{4a^2 + b^2} - \sqrt{4b^2 + a^2}, \\ 4a^2 - 8ab + 4b^2 &= 5a^2 + 5b^2 - 2\sqrt{(4a^2 + b^2)(4b^2 + a^2)}, \\ 2\sqrt{4a^4 + 17a^2b^2 + 4b^4} &= a^2 + 8ab + b^2, \\ 16a^4 + 68a^2b^2 + 16b^4 &= a^4 + 16a^3b + 66a^2b^2 + 16ab^3 + b^4, \\ 15a^4 - 16a^3b + 2a^2b^2 - 16ab^3 + 15b^4 &= 0. \end{aligned}$$

Mnohočlen na ľavej strane poslednej rovnice je zrejme deliteľný dvojčlenom $a - b$ (pre $a = b$ je totiž rovný nule). Delením zistíme, že výsledný mnohočlen tretieho stupňa má opäť rovnakú vlastnosť, takže po opakovanom delení prevedieme skúmanú rovnicu na súčinový tvar

$$(a - b)^2(15a^2 + 14ab + 15b^2) = 0.$$

Ostatná rovnosť platí práve vtedy, keď $a = b$, pretože $15a^2 + 14ab + 15b^2 > 0$ pre každú dvojicu reálnych čísel a, b.

V prípade a) môžeme postupovať aj nasledovne: Odčítaním rovností

$$t_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2, \quad t_b^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

dostaneme

$$t_a^2 - t_b^2 = \tfrac{3}{4}(b^2 - a^2).$$

Na oboch stranách ostatnej rovnice sú rozdiely druhých mocnín. Prevedieme ich na súčiny a potom využijeme danú rovnosť $a + t_a = b + t_b$ upravenú na tvar $t_a - t_b = b - a$:

$$\begin{aligned} (t_a - t_b)(t_a + t_b) &= \tfrac{3}{4}(b - a)(b + a), \\ (b - a)(t_a + t_b) &= \tfrac{3}{4}(b - a)(a + b). \end{aligned}$$

Keby bolo $a \neq b$, vyjde $t_a + t_b = \frac{3}{4}(a + b)$; to spolu s rovnosťou $t_a - t_b = b - a$ dáva $t_a = \frac{7}{8}b - \frac{1}{8}a$, teda $t_a < b$, čo odporuje tomu, že t_a je prepona a b odvesna toho istého pravouhlého trojuholníka (obr. 16). Preto musí platiť rovnosť $a = b$.

b) Nech napr. a je prepona (ak je preponou b, stačí strany a, b v nasledujúcom texte navzájom vymeniť). Potom z Tálesovej a Pytagorovej vety vyplýva

$$t_a = \frac{a}{2}, \quad t_b = \sqrt{c^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2},$$

čiže rovnosť zo zadania má tvar

$$\frac{3a}{2} = b + \sqrt{a^2 - b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Keďže prepona a je dlhšia ako odvesna b, t. j. $a > b$, sú nasledujúce úpravy ekvivalentné:

$$\begin{aligned} 3a - 2b &= \sqrt{4a^2 - 3b^2}, \\ 9a^2 - 12ab + 4b^2 &= 4a^2 - 3b^2, \\ 5a^2 - 12ab + 7b^2 &= 0, \\ (a-b)(5a-7b) &= 0, \\ 5a - 7b &= 0. \end{aligned}$$

Záver. Rovnosť $a + t_a = b + t_b$ platí pre pravouhlé rovnoramenné trojuholníky s odvesnami $a = b$ a pre pravouhlé trojuholníky, ktoré majú strany v pomere $5 : \sqrt{24} : 7$, a pritom najkratšia z nich je (tretia) strana c.

B – I – 5

Zo zadania vyplýva, že $a \neq 0$, $b \neq 0$ (inak by rovnice neboli kvadratické) a $a \neq b$ (inak by rovnice boli totožné, a ak by mali dva reálne korene, boli by oba spoločné).

Označme x_0 spoločný koreň oboch rovníc, takže

$$ax_0^2 + 2bx_0 + 1 = 0, \quad bx_0^2 + 2ax_0 + 1 = 0.$$

Odčítaním oboch rovníc dostaneme $(a-b)(x_0^2 - 2x_0) = x_0(a-b)(x_0 - 2) = 0$. Keďže $a \neq b$ a 0 zrejme koreňom daných rovníc nie je, musí byť spoločným koreňom číslo $x_0 = 2$. Dosadením do daných rovníc tak dostaneme jedinú podmienku $4a + 4b + 1 = 0$, čiže

$$b = -a - \tfrac{1}{4}.$$

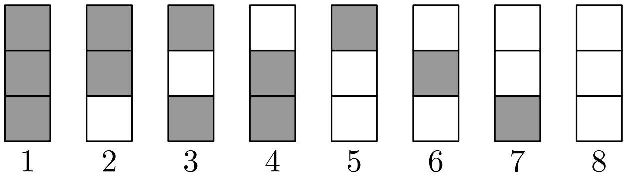
Diskriminant druhej z daných rovníc je potom $4a^2 - 4b = 4a^2 + 4a + 1 = (2a+1)^2$, takže rovnica má dva rôzne reálne korene pre ľubovoľné $a \neq -\frac{1}{2}$. Podobne diskriminant prvej z daných rovníc je $4b^2 - 4a = 4b^2 + 4b + 1 = (2b+1)^2$. Rovnica má teda dva rôzne reálne korene pre ľubovoľné $b \neq -\frac{1}{2}$, čiže $a \neq \frac{1}{4}$.

Z uvedených predpokladov však zároveň vyplýva $a \neq -\frac{1}{4}$ $(b \neq 0)$ a $a \neq -\frac{1}{8}$ $(a \neq b)$.

Záver. Vyhovujú všetky dvojice $(a, -a - \frac{1}{4})$, kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, 0, \frac{1}{4}\}$.

B – I – 6

Budeme hľadať obdĺžnik s čo najmenším obsahom, v ktorom musí byť obsiahnutý pravouholník majúci všetky rohové políčka rovnakej farby. Šírka 2 nestačí (pri ľubovoľnej dĺžke by napríklad mohol byť jeden celý riadok čierny a druhý biely). Uvažujme teda obdĺžnik šírky 3. Jeho stĺpce môžu byť ofarbené ôsmimi spôsobmi ako na obr. 17.



1 2 3 4 5 6 7 8

Obr. 17

Ak je obdĺžnik zložený iba zo šiestich stĺpcov 2 až 7, nemá žiadny pravouholník s rozmermi väčšími ako 1 v ňom obsiahnutý všetky rohové políčka jednej farby. Uvedených šesť stĺpcov totiž predstavuje všetky možnosti, ako ofarbiť stĺpec zložený z troch políčok dvoma farbami tak, aby nebol jednofarebný (jednofarebné sú zvyšné dva stĺpce 1 a 8). Keby v takom obdĺžniku existoval pravouholník s rohovými políčkami jednej farby, boli by príslušné stĺpce rovnaké.

Avšak ak má obdĺžnik šírky 3 dĺžku aspoň 7, sú v ňom buď dva rovnaké stĺpce, alebo v ňom je niektorý z jednofarebných stĺpcov (1 a 8). V prípade dvoch rovnakých stĺpcov je existencia pravouholníka s rohovými políčkami jednej farby zrejmá. Ak nie sú žiadne dva stĺpce rovnaké, ale je tam jednofarebný stĺpec farby A, musí v obdĺžniku byť aj stĺpec, ktorého dve políčka majú farbu A. Tento stĺpec a jednofarebný stĺpec farby A určujú pravouholník, ktorého všetky rohové políčka majú farbu A.

Daný obdĺžnik $2\,005 \times 2\,007$ teraz rozdelíme na dve časti $2\,002 \times 2\,007$ a $3 \times 2\,007$. Keďže $2\,002 = 7 \cdot 286$, $2\,007 = 3 \cdot 669$, skladá sa prvá časť z $286 \cdot 669$ neprekrývajúcich sa obdĺžnikov 7×3. V druhej časti je ešte ďalších 286 obdĺžnikov 7×3. Obdĺžnikov 7×3 je teda celkom $286 \cdot 669 + 286 = 286 \cdot 670 = 191\,620$. V každom z nich je obsiahnutý aspoň jeden pravouholník, ktorý má všetky rohové políčka jednej farby. Pre najmenej polovicu takto nájdených obdĺžnikov, teda pre aspoň 95 810, je potom farba rohových políčok rovnaká.

B – S – 1

Ľubovoľné prvočíslo p sa dá napísať v tvare $p = 30a + z$, kde a je celé nezáporné a $z \in \in \{1, 2, \dots 29\}$ je zvyšok po delení čísla p tridsiatimi (keď p je prvočíslo, môžeme nulový zvyšok z vylúčiť).

Ak p je prvočíslo menšie ako 30, zrejme $z = p$ je tiež prvočíslo.

Predpokladajme teda, že p je prvočíslo väčšie ako 30, t. j. $a \geqq 1$. Pripusťme, že zvyšok z nie je ani číslo 1 ani prvočíslo a označme q jeho najmenší prvočíselný deliteľ. Zrejme $q^2 \leqq z < 30 < 7^2$, odkiaľ $q < 7$, čiže $q \in \{2, 3, 5\}$. Keďže číslo 30 je deliteľné dvoma, tromi aj piatimi, je deliteľné prvočíslom q. Takže aj číslo $p = 30a + z$ je prvočíslom q deliteľné. Nemôže to teda byť prvočíslo.

Iné riešenie. Vyjadríme číslo p v tvare $p = 30a + z$. Keby bolo zvyškom z niektoré z čísel 0, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, bolo by p párne a pritom väčšie ako 2, takže by nebolo prvočíslom. Keby bolo zvyškom niektoré z čísel 9, 15, 21, 27, bolo by p deliteľné tromi a pritom väčšie ako 3 a nemohlo by byť prvočíslom. Nakoniec pri zvyšku 25 by bolo p deliteľné piatimi a pritom väčšie ako 5, opäť by to teda nebolo prvočíslo.

B – S – 2

Nech x_0 je spoločný koreň oboch rovníc. Potom platí

$$x_0^2 + (3a + b)x_0 + 4a = 0, \quad x_0^2 + (3b + a)x_0 + 4b = 0.$$

Odčítaním týchto rovníc dostaneme $(2a-2b)x_0+4(a-b)=0$, odkiaľ po úprave získame $(a-b)(x_0+2)=0$.

Rozoberieme dve možnosti:

Ak $a=b$, majú obidve dané rovnice rovnaký tvar $x^2+4ax+4a=0$. Aspoň jeden koreň (samozrejme spoločný) existuje práve vtedy, keď je diskriminant $16a^2-16a$ nezáporný, teda $a \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle 1, \infty)$.

Ak $x_0=-2$, dostaneme z prvej aj z druhej rovnice $4-2a-2b=0$, teda $b=2-a$. Dosadením do zadania dostaneme rovnice

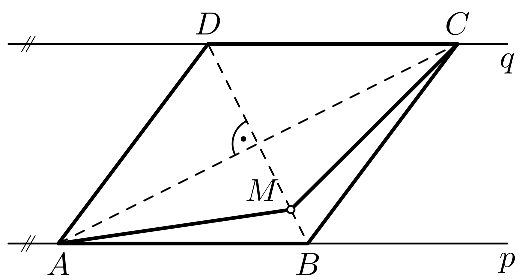
$$x^2+(2a+2)x+4a=0, \quad x^2+(6-2a)x+8-4a=0,$$

ktoré majú pri ľubovoľnej hodnote parametra a spoločný koreň -2.

Záver. Dané rovnice majú aspoň jeden spoločný koreň pre všetky dvojice (a,a), kde $a \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle 1, \infty)$, a pre všetky dvojice tvaru $(a, 2-a)$, kde a je ľubovoľné.

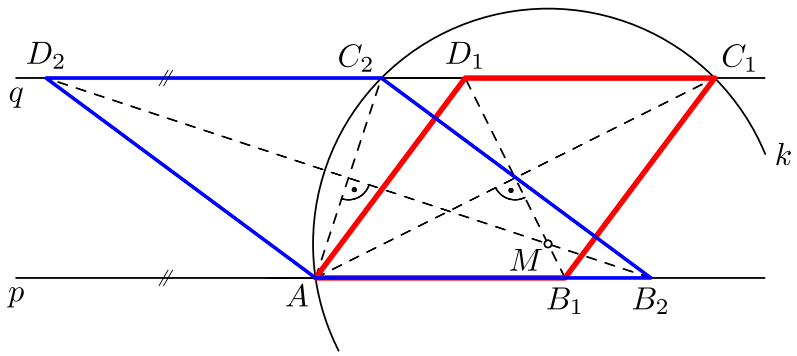
B – S – 3

Zo zhodnosti trojuholníkov ABM a CBM (*sus*) vyplýva $|CM|=|AM|$; preto musí bod C ležať na kružnici so stredom M a polomerom $|AM|$ (obr. 18). Uhlopriečky kosoštvorca (štvorca) sú na seba kolmé, preto body B a D ležia na kolmici vedenej bodom M na priamku AC.



Obr. 18

Konštrukcia. Zostrojíme kružnicu k so stredom M a polomerom $|AM|$. Priesečník tejto kružnice s priamkou q je bod C. Bodom M vedieme kolmicu na priamku AC. Jej priesečníky s priamkami p a q sú body B a D (obr. 19). Zostrojený štvoruholník má zrejme všetky požadované vlastnosti.



Obr. 19

Diskusia. Ak je vzdialenosť bodu M od priamky q väčšia ako jeho vzdialenosť od bodu A, nemá kružnica k s priamkou q spoločný bod a úloha nemá riešenie.

Ak má bod M rovnakú vzdialenosť od priamky q ako od bodu A, má kružnica k s priamkou q jediný spoločný bod C. Pokiaľ bod M neleží na osi pásu medzi rovnobežkami p a q, nie je priamka AC kolmá na p, preto kolmica vedená bodom M na priamku AC nie je s priamkou p rovnobežná a úloha má jedno riešenie. Pokiaľ ale bod M leží na osi pásu (je to teda priesečník osi pásu s kolmicou vedenou bodom A na priamku p), nemá úloha riešenie.

Ak je vzdialenosť bodu M od priamky q menšia ako jeho vzdialenosť od bodu A, pretína kružnica k priamku q v dvoch bodoch. Pokiaľ bod M leží na osi pásu medzi rovnobežkami p a q, leží jeden z priesečníkov na kolmici vedenej bodom A na priamku p a úloha má jedno riešenie; ak bod M na osi pásu neleží, má úloha dve riešenia.

Iné riešenie. Priesečník S uhlopriečok kosoštvorca (štvorca) $ABCD$ musí ležať na osi pásu medzi rovnobežkami p a q.

Ak leží bod M na osi pásu, musí platiť $S = M$; bod C je potom priesečník priamok AS a q, B a D sú priesečníky kolmice na priamku AC vedenú bodom M s priamkami p a q. Ak $AM \perp p$, nemá úloha riešenie, inak má jedno riešenie.

Ak bod M neleží na osi pásu, je uhol ASM pravý. Preto je bod S priesečníkom osi pásu s Tálesovou kružnicou nad priemerom AM. Body C, B, D potom nájdeme podobne ako je uvedené vyššie. Podľa počtu spoločných bodov osi pásu a Tálesovej kružnice má potom úloha dve riešenia, jedno riešenie alebo nemá žiadne riešenie.

Iné riešenie. Bod M leží na osi uhla ADC, preto má od priamok AD a q rovnakú vzdialenosť. Priamka AD je teda dotyčnicou kružnice, ktorá má stred M a dotýka sa priamky q.

Konštrukcia. Zostrojíme kružnicu h so stredom M, ktorá sa dotýka priamky q. Vrchol D hľadaného kosoštvorca (štvorca) je priesečník priamky q s dotyčnicou kružnice h prechádzajúcou bodom A. Body B a C potom už nájdeme ľahko.

Diskusia. Ak má bod M od bodu A menšiu vzdialenosť ako od priamky q, neprechádza bodom A žiadna dotyčnica kružnice h a úloha nemá riešenie.

Ak má bod M od bodu A rovnakú vzdialenosť ako od priamky q, leží bod A na kružnici h a prechádza ním jedna dotyčnica tejto kružnice. Pokiaľ pritom bod M leží na osi pásu medzi rovnobežkami p a q, je touto dotyčnicou priamka p, ktorá priamku q nepretína, a úloha nemá riešenie. Pokiaľ ale bod M na osi pásu neleží, dotyčnica je s priamkou q rôznobežná a úloha má jedno riešenie.

Ak má bod M od bodu A väčšiu vzdialenosť ako od priamky q, existujú dve dotyčnice kružnice h prechádzajúce bodom A. Pokiaľ pritom bod M leží na osi pásu, je jednou z dotyčníc priamka p a úloha má jedno riešenie; pokiaľ bod M na osi pásu neleží, sú obidve dotyčnice s q rôznobežné a úloha má dve riešenia.

B – II – 1

Odčítaním oboch daných rovníc dostaneme rovnosť $(b-a)x+a-b=0$, čiže $(b-a)(x-1)=0$. Odtiaľ vyplýva, že $b=a$ alebo $x=1$.

Ak $b=a$, majú obidve rovnice tvar $x^2-ax-a=0$. Práve jedno riešenie existuje práve vtedy, keď diskriminant a^2+4a je nulový. To platí pre $a=0$ a pre $a=-4$. Pretože $b=a$, má súčet $a+b$ v prvom prípade hodnotu 0 a v druhom prípade hodnotu -8.

Ak $x=1$, dostaneme z daných rovníc $a+b=1$, teda $b=1-a$. Rovnice potom majú tvar

$$x^2-ax+a-1=0 \quad \text{a} \quad x^2+(a-1)x-a=0.$$

Prvá má korene 1 a $a-1$, druhá má korene 1 a $-a$. Práve jedno spoločné riešenie tak dostaneme vždy s výnimkou prípadu, keď $a-1=-a$, čiže $a=\frac{1}{2}$ – vtedy sú spoločné riešenia dve.

Záver. Najmenšia hodnota súčtu $a+b$ je -8 a je dosiahnutá pre $a=b=-4$. Najväčšia hodnota súčtu $a+b$ je 1; túto hodnotu má súčet $a+b$ pre všetky dvojice $(a,1-a)$, kde $a\neq\frac{1}{2}$ je ľubovoľné reálne číslo.

B – II – 2

Z dvojakého vyjadrenia obsahu trojuholníka ABC dostaneme rovnosť $av_a=bv_b$. Dosadením $b=a+2v_a-2v_b$ do tejto rovnosti dostaneme $av_a=av_b+2v_av_b-2v_b^2$ a po úprave $(a-2v_b)(v_a-v_b)=0$.

Sú dve možnosti: Ak $a=2v_b$, tak $\sin\gamma=\frac{v_b}{a}=\frac{1}{2}$, a teda $\gamma=30^\circ$ alebo $\gamma=150^\circ$; potom $\beta=180^\circ-\alpha-\gamma$. Ak $v_a=v_b$, tak $a=b$, a teda $\beta=\alpha=20^\circ$.

Úloha má tri riešenia: $\beta=130^\circ$ a $\gamma=30^\circ$, $\beta=10^\circ$ a $\gamma=150^\circ$ alebo $\beta=20^\circ$ a $\gamma=140^\circ$.

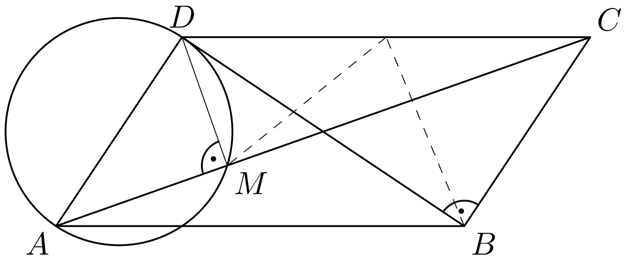
Iné riešenie. Z vyjadrenia výšok pomocou uhla γ, t. j. $v_a=b\sin\gamma$ a $v_b=a\sin\gamma$, dostaneme dosadením do zadaného vzťahu rovnosť $a+2b\sin\gamma=b+2a\sin\gamma$, ktorá platí práve vtedy, keď $(a-b)(1-2\sin\gamma)=0$.

Ak $a=b$, vychádza $\beta=\alpha=20^\circ$, takže $\gamma=140^\circ$. Inak musí byť $\sin\gamma=\frac{1}{2}$, takže $\gamma=30^\circ$ alebo $\gamma=150^\circ$; uhol β v oboch prípadoch dopočítame ako $\beta=180^\circ-\alpha-\gamma$.

Dostaneme tak rovnakú trojicu riešení ako pri prvom postupe.

B – II – 3

Podľa Tálesovej vety je uhol AMD pravý. Preto je aj uhol DMC pravý (obr. 20). Strany BC a AD sú rovnobežné, preto je uhlopriečka BD kolmá aj na stranu BC. Body M a B teda ležia na Tálesovej kružnici s priemerom CD. Od stredu úsečky CD majú potom rovnakú vzdialenosť, a preto tento stred leží na osi úsečky MB.



Obr. 20

B – II – 4

a) Turnaj sa skladá z deviatich kôl. Ak má každé družstvo iný počet bodov, musí mať prvý v tabuľke aspoň o 9 bodov viac ako posledný. Na zisk deviatich bodov je potrebné odohrať aspoň päť stretnutí; to znamená, že už muselo prebehnúť aspoň 5 kôl, takže do konca turnaja ostávajú nanajvýš štyri kolá. V nich môže posledný v tabuľke získať maximálne 8 bodov a prvého už nemôže dostihnúť.

b) V turnaji prebehne 11 kôl (každé družstvo desaťkrát hrá a raz má voľno). Ak má každé družstvo iný počet bodov, muselo už byť udelených aspoň $0+1+2+\ldots+10=55$ bodov. V jednom kole sa odohrá 5 stretnutí, takže sa rozdelí $5\cdot 2=10$ bodov. Preto už muselo byť odohraných aspoň 6 kôl a do konca ich ostáva nanajvýš 5.

Keby bol medzi niektorými susedmi v tabuľke väčší rozdiel ako jednobodový, mal by prvý aspoň o 11 bodov viac ako posledný a v zostávajúcich nanajvýš piatich kolách by ním nemohol byť dostihnutý. Pripusťme teda, že rozdiely medzi susedmi v tabuľke sú iba jednobodové. Ak má posledný b bodov (zrejme $0 \leqq b < 11$), je celkový počet udelených bodov $b+(b+1)+(b+2)+\ldots+(b+10)=11b+55$. Na to je potrebné odohrať

$$k=\frac{11b+55}{10}=b+5+\frac{b+5}{10}$$

kôl. Počet odohraných kôl je celé číslo, preto $10 \mid b+5$. Odtiaľ vyplýva $b=5$, a teda $k=$ $=11$. To znamená, že sú odohrané všetky kolá a posledné miesto v tabuľke je definitívne.

Iné riešenie časti b). Rovnako ako v prvom riešení dokážeme, že už muselo prebehnúť aspoň 6 kôl. Medzi prvým a posledným v tabuľke je aspoň desaťbodový rozdiel. Keby prebehlo aspoň 7 kôl, ostávali by do konca najviac 4 kolá a v nich by nemohol posledný najmenej desaťbodový náskok prvého vyrovnať. Predpokladajme teda, že prebehlo presne 6 kôl, v ktorých bolo rozdelených $6\cdot 10=60$ bodov. Keby mal posledný v tabuľke aspoň jeden bod, bol by celkový počet udelených bodov aspoň

$1 + 2 + 3 + \ldots + 11 = 66 > 60$. Posledný teda musel byť bez bodu. Potom ale prvý musel mať viac ako 10 bodov, pretože v opačnom prípade by bol bodový zisk všetkých družstiev $0 + 1 + 2 + \ldots + 10 = 55 < 60$ bodov. Prvý teda mal pred posledným aspoň jedenásťbodový náskok a ten nemôže byť v zostávajúcich piatich kolách vyrovnaný.

Kategória A

A – I – 1

Označme zadané rovnice postupne (1), (2), (3). Predpokladajme, že čísla a, b, c majú požadovanú vlastnosť. Všimneme si najskôr, že každé dve z daných rovníc musia mať spoločný koreň, inak by mali spolu šesť rôznych koreňov.

Spoločné korene dvoch z daných troch kubických rovníc sú korene kvadratických rovníc, ktoré dostaneme ich odčítaním. Vypíšme všetky tri „rozdielové“ rovnice, ktoré sú nezávislé od parametrov a, b, c (to je pre vyriešenie pozitívne zistenie), a rozložme hneď ich ľavé strany na koreňové činitele:

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0, \qquad (2) - (1)$$
$$2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1) = 0, \qquad (3) - (1)$$
$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2) = 0. \qquad (3) - (2)$$

Vidíme, že rovnice (1) a (2) majú jediný spoločný koreň $x = 1$, takže majú spolu práve päť rôznych koreňov. Preto musí byť každý z koreňov rovnice (3) koreňom aspoň jednej z rovníc (1) alebo (2). Z uvedených rozkladov vyplýva, že číslo $x = 1$ je aj koreňom rovnice (3).

Vysvetlime, prečo ostatné dva korene rovnice (3) nemôžu byť zároveň aj korene jednej z rovníc (1) alebo (2). V opačnom prípade by jedna z rovníc (1), (2) mala s rovnicou (3) rovnakú trojicu koreňov, a preto by museli mať rovnaké koeficienty nielen pri kubickom člene. To však neplatí, lebo pre ľubovoľnú hodnotu parametra c sú čísla $c+1$, $c+2$, $c+3$ (t. j. absolútne členy rovníc) všetky navzájom rôzne.

Rovnica (3) má teda okrem koreňa $x = 1$ ešte jeden spoločný koreň s rovnicou (1) a jeden spoločný koreň s rovnicou (2); podľa rozkladov (3–1) a (3–2) vidíme, že sa jedná o čísla $x = -\frac{1}{2}$ a $x = -2$. Ľavá strana rovnice (3) má preto rozklad

$$(x-1)(x+2)\left(x+\frac{1}{2}\right) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 1.$$

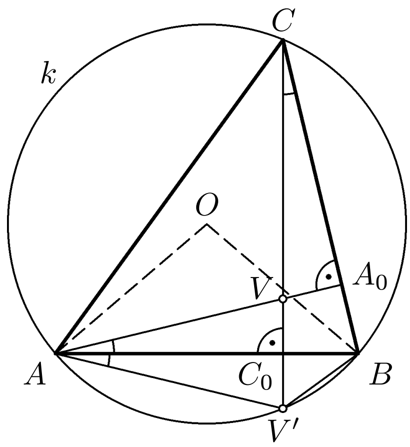
Odtiaľ už porovnaním s koeficientmi zapísanými v (3) dostaneme $a = -\frac{3}{2}$, $b = -\frac{7}{2}$, $c = -2$.

Z nášho postupu vyplýva, že pre nájdené hodnoty a, b, c má rovnica (3) trojicu koreňov 1, $-\frac{1}{2}$ a -2, že čísla 1, $-\frac{1}{2}$ sú korene rovnice (1) a že čísla 1, -2 sú korene rovnice (2). Musíme sa ešte presvedčiť, že tretie korene rovníc (1) a (2) sú ďalšie dve (rôzne) čísla. Tieto tretie korene môžeme výhodne nájsť pomocou Viètových vzťahov. Keďže súčin troch koreňov rovnice (1) je číslo opačné k absolútnemu členu $c+2$ rovnému nule, je číslo nula tretí koreň rovnice (1). Podobne súčin troch koreňov rovnice (2) je rovný -1, takže tretí koreň je číslo $x = \frac{1}{2}$.

Záver. Jediným riešením úlohy sú čísla $a = -\frac{3}{2}$, $b = -\frac{7}{2}$, $c = -2$.

A – I – 2

Najskôr dokážme jedno všeobecne užitočné tvrdenie o priesečníku V výšok ľubovoľného ostrouhlého trojuholníka ABC. Označme V' priesečník priamky obsahujúcej výšku CC_0 s kružnicou opísanou trojuholníku ABC (obr. 21). Pravouhlé trojuholníky



Obr. 21

C_0VA a A_0VC sú podobné (zhodujú se ešte v uhle pri vrchole V), preto $|\measuredangle BAA_0| = |\measuredangle BCC_0|$. Uhly BCC_0 a $V'AB$ sú zhodné obvodové uhly nad oblúkom $V'B$, takže *body V a V' sú súmerne združené podľa priamky AB.*

Ak označíme uhly v trojuholníku ABC zvyčajným spôsobom, tak $|\measuredangle ACV'| = |\measuredangle ACC_0| = 90°-\alpha$, takže pre dĺžku úsečky AV vďaka uvedenej súmernosti dostaneme

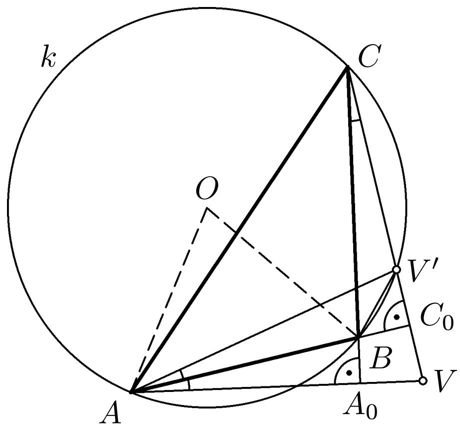
$$|AV| = |AV'| = 2r\sin(90° - \alpha) = 2r\cos\alpha, \tag{1}$$

pričom r je veľkosť polomeru kružnice k opísanej trojuholníku ABC (a zároveň aj trojuholníku $AV'C$). Rovnaký vzťah (1) platí pre trojuholník ABC s ostrým vnútorným uhlom α pri vrchole A aj v prípade, keď jeden z ostatných dvoch vnútorných uhlov (napr. pri vrchole B) je pravý alebo tupý (obr. 22). Celú úvahu môžeme doslova zopakovať.

Teraz sa už pustíme do riešenia úlohy so zadanými bodmi A, V a danou veľkosťou ostrého uhla α. Vzťah (1) nás privádza k záveru, že kružnice opísané všetkým uvažovaným trojuholníkom ABC budú mať rovnaký polomer

$$r = \frac{|AV|}{2\cos\alpha}, \tag{2}$$

takže ich stredy O budú mať od daného bodu A pevnú, práve určenú vzdialenosť r. Je však potrebné určiť, akú časť kružnice $l(A, r)$ stredy O vyplnia; určite to bude množina súmerná podľa priamky AV, pretože súmernosť podľa osi AV zobrazuje vyhovujúci trojuholník na vyhovujúci trojuholník. S týmto cieľom vyjadríme veľkosť uhla VAO



Obr. 22

pomocou vnútorných uhlov $\beta = |\measuredangle ABC|$ a $\gamma = |\measuredangle ACB|$. Budeme pritom predpokladať, že $\beta \geqq \gamma$ (v opačnom prípade môžeme od úplného začiatku označenie vrcholov B, C navzájom vymeniť).

Predpokladajme najskôr, že $\beta < 90°$, takže trojuholník ABC je ostrouhlý a môžeme opäť pracovať s obr. 21. Z rovnoramenného trojuholníka ABO s vnútorným uhlom 2γ pri hlavnom vrchole O vidíme, že $|\measuredangle BAO| = 90° - \gamma$, z pravouhlého trojuholníka BAA_0 zasa vyplýva $|\measuredangle BAV| = 90° - \beta$. Vzhľadom na to, že oba body O, V ležia v polrovine ABC, dostávame pre uhol VAO vyjadrenie

$$|\measuredangle VAO| = |\measuredangle BAO| - |\measuredangle BAV| = (90° - \gamma) - (90° - \beta) = \beta - \gamma$$

(pripomeňme, že $\beta \geqq \gamma$).

V prípade $\beta \geqq 90°$ podľa obr. 22 podobne zistíme, že $|\measuredangle BAO| = 90° - \gamma$ a $|\measuredangle BAV| = \beta - 90°$, teda

$$|\measuredangle VAO| = |\measuredangle BAO| + |\measuredangle BAV| = (90° - \gamma) + (\beta - 90°) = \beta - \gamma.$$

Vidíme, že $|\measuredangle VAO| = \beta - \gamma$ bez ohľadu na to, či je trojuholník ABC ostrouhlý, pravouhlý alebo tupouhlý.

Teraz už ľahko dokončíme riešenie úlohy. Z odvodenej veľkosti uhla VAO vyplýva odhad

$$|\measuredangle VAO| = \beta - \gamma < \beta + \gamma = 180° - \alpha,$$

takže bod O leží vnútri oblúka kružnice $l(A, r)$ určeného nerovnosťou

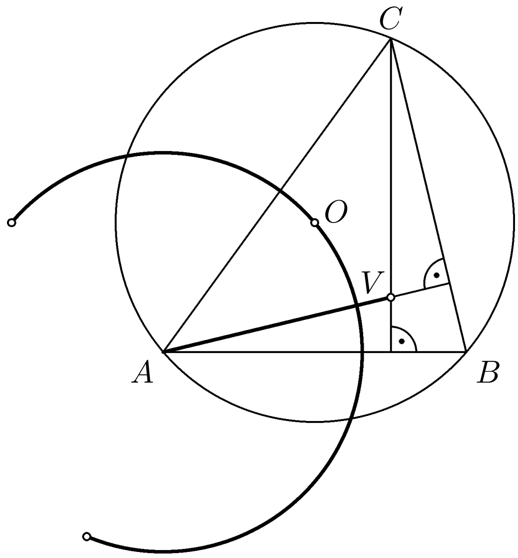
$$|\measuredangle VAO| < 180° - \alpha.$$

Ak naopak zvolíme uhol ε, $0° \leqq \varepsilon < 180° - \alpha$, jednoducho vypočítame, akú veľkosť musia mať vnútorné uhly β a γ, aby platilo $|\measuredangle VAO| = \varepsilon$:

$$\beta = \frac{180° - \alpha + \varepsilon}{2}, \quad \gamma = \frac{180° - \alpha - \varepsilon}{2}.$$

Ak teda vpíšeme do akejkoľvek kružnice s polomerom r zo vzťahu (2) pomocný trojuholník $A'B'C'$ s daným uhlom α pri vrchole A' a vypočítanými uhlami β, γ pri vrcholoch B', resp. C', pre jeho ortocentrum V' a stred O' opísanej kružnice budú splnené rovnosti $|A'V'| = |AV|$ a $|\measuredangle V'A'O'| = \varepsilon$. V zhodnom zobrazení, ktoré zobrazí úsečku $A'V'$ na úsečku AV, sa potom trojuholník $A'B'C'$ zobrazí na vyhovujúci trojuholník ABC, ktorého stred O opísanej kružnice bude ležať na kružnici l a vyhovovať rovnosti $|\measuredangle VAO| = \varepsilon$.

Záver. Hľadanou množinou stredov O opísaných kružníc je oblúk kružnice so stredom A a polomerom $r = \frac{1}{2}|AV|/\cos\alpha$ určený nerovnosťou $|\measuredangle VAO| < 180° - \alpha$ (krajné body tohto oblúka teda do výslednej množiny nepatria, obr. 23).



Obr. 23

A – I – 3

Venujme sa najskôr najjednoduchšej situácii, keď $n = 2$. Danú množinu M tak tvoria štyri kladné čísla, ktoré označíme podľa veľkosti

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4.$$

Máme iba tri možnosti, ako požadovaným spôsobom zostaviť dvojicu obdĺžnikov. Vypíšme na troch riadkoch ich rozmery:

$$\begin{aligned} &a_1 \times a_2 \quad \text{a} \quad a_3 \times a_4,\\ &a_1 \times a_3 \quad \text{a} \quad a_2 \times a_4,\\ &a_1 \times a_4 \quad \text{a} \quad a_2 \times a_3,\end{aligned}$$

a ukážme, že súčty obsahov týchto obdĺžnikov sú v uvedenom poradí klesajúce, t. j. že platí

$$a_1a_2 + a_3a_4 > a_1a_3 + a_2a_4 > a_1a_4 + a_2a_3. \tag{1}$$

Namiesto dvoch jednoduchých dôkazov poznamenajme, že obe nerovnosti sú rovnakého typu a možno ich zdôvodniť všeobecným pravidlom

$$a < b,\ c < d \quad\Longrightarrow\quad ac + bd > ad + bc, \tag{2}$$

ktoré platí pre ľubovoľnú štvoricu reálnych čísel a, b, c, d vďaka rovnosti

$$(ac + bd) - (ad + bc) = (b - a)(d - c).$$

Naozaj, ľavú nerovnosť z (1) dostaneme z pravidla (2) voľbou

$$a = a_1,\quad b = a_4,\quad c = a_2,\quad d = a_3\quad (\text{platí } a_1 < a_4 \text{ a } a_2 < a_3),$$

pravú nerovnosť zasa voľbou

$$a = a_1,\quad b = a_2,\quad c = a_3,\quad d = a_4\quad (\text{platí } a_1 < a_2 \text{ a } a_3 < a_4).$$

Tým je úloha v prípade $n = 2$ vyriešená. Táto skúsenosť nás iste privedie k odhadu výsledku pre všeobecné $n \geqq 2$:

Ak $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2n}$ sú prvky danej množiny M, tak v súčte najväčší obsah má jediná n-tica obdĺžnikov s rozmermi $a_1 \times a_2, a_3 \times a_4, \ldots, a_{2n-1} \times a_{2n}$; v súčte najmenší obsah má jediná n-tica obdĺžnikov s rozmermi $a_1 \times a_{2n}, a_2 \times a_{2n-1}, \ldots, a_n \times a_{n+1}$.

Pre dôkaz prvého záveru predpokladajme, že vyhovujúca n-tica obdĺžnikov je zostavená tak, že čísla a_1, a_2 nie sú rozmery toho istého obdĺžnika. Potom v takej n-tici sú obdĺžniky $a_1 \times a_i$ a $a_2 \times a_j$, kde $i, j > 2$. Nahraďme ich obdĺžnikmi $a_1 \times a_2$ a $a_i \times a_j$. Dostaneme (inú) vyhovujúcu n-ticu obdĺžnikov, ktorá bude mať oproti pôvodnej n-tici v súčte väčší obsah, lebo platí

$$a_1a_2 + a_ia_j > a_1a_i + a_2a_j,$$

a to opäť vďaka pravidlu (2) pre čísla $a_1 < a_j$ a $a_2 < a_i$. Z tejto úvahy vyplýva, že v súčte najväčší obsah môže mať len taká n-tica uvažovaných obdĺžnikov, medzi ktorými je obdĺžnik $a_1 \times a_2$. Tento obdĺžnik môžeme teda dať bokom a uvažovať úlohu o najmenšom obsahu pre redukovanú množinu M' s $2n-2$ prvkami $a_3 < a_4 < \ldots < a_{2n}$. Opakovaním predchádzajúceho postupu vytvoríme obdĺžnik $a_3 \times a_4$ a urobíme ďalšiu redukciu množiny atď. (formálne môžeme využiť matematickú indukciu). Hypotéza o zostave obdĺžnikov v súčte s najväčším obsahom je tak dokázaná.

Veľmi podobne dokážeme záver o zostave v súčte s najmenším obsahom. Ak a_1, a_{2n} nie sú rozmery toho istého obdĺžnika, sú medzi uvažovanými obdĺžnikmi aj obdĺžniky $a_1 \times a_i$ a $a_j \times a_{2n}$ (pričom $1 < i, j < 2n$), ktoré nahradíme obdĺžnikmi $a_1 \times a_{2n}$ a $a_i \times a_j$. Tým sa v súčte obsah obdĺžnikov zmenší, lebo podľa pravidla (2) pre čísla $a_1 < a_j$ a $a_i < a_{2n}$ platí

$$a_1a_i + a_ja_{2n} > a_1a_{2n} + a_ia_j.$$

V súčte najmenší obsah preto môže mať len taká vyhovujúca n-tica obdĺžnikov, medzi ktorými je obdĺžnik $a_1 \times a_{2n}$. Tento obdĺžnik dáme bokom a uvažujeme úlohu o najmenšom obsahu pre redukovanú množinu M' s $2n-2$ prvkami $a_2 < a_3 < \ldots < a_{2n-1}$. Všetko ostatné je už zbytočné opakovať.

A – I – 4

Zo zadania úlohy vyplýva, že všetky členy uvažovaných postupností budú deliteľmi ich posledného člena, rovného číslu 969 969. Nájdime preto najskôr rozklad tohto čísla na súčin prvočísel:

$$969\,969 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19. \tag{1}$$

Teraz už ľahko môžeme vytvárať príklady vyhovujúcich postupností rôznych dĺžok. Vypíšme napríklad tú najkratšiu, jednu z najdlhších a ešte jednu ďalšiu:

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) &= (1, 969\,969),\\ (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) &= (1, 13, 91, 1\,729, 5\,187, 57\,057, 969\,969),\\ (a_1, a_2, a_3, a_4) &= (1, 21, 4\,641, 88\,179, 969\,969).\end{aligned}$$

(Skontrolujte uvedené príklady výpočtom podielu a_{i+1}/a_i pre všetky prípustné i).

Experimentovaním s konkrétnymi postupnosťami dôjdeme k poznaniu ich spoločných vlastností, ktoré ich úplne charakterizujú:

Ľubovoľný člen a_i každej vyhovujúcej postupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_k$ je súčinom niekoľkých (v prípade $i = 1$ žiadneho, v prípade $i = k$ všetkých) zo šiestich rôznych prvočísel z rozkladu (1), *pritom (v prípade $i < k$) člen a_{i+1} má okrem všetkých činiteľov člena a_i ešte aspoň jedného nového činiteľa navyše (postupnosť má byť rastúca!). Naopak, každá takáto konečná postupnosť je vyhovujúca.*

Z uvedeného vyplýva spôsob, ako „úsporne“ zadať každú vyhovujúcu postupnosť; stačí len uviesť, ako sa nové činitele postupne objavujú, t. j. zadať postupnosť podielov

$$\frac{a_2}{a_1},\ \frac{a_3}{a_2},\ \frac{a_4}{a_3},\ \ldots,\ \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}},\ \frac{a_k}{a_{k-1}}, \tag{2}$$

do ktorých rozkladov na súčin prvočísel je šesť prvočísel z (1) rozdelených (v každom aspoň jedno). Preto je hľadaný počet vyhovujúcich postupností rovný počtu rozdelení šiestich daných prvočísel do jednej alebo niekoľkých *očíslovaných* neprázdnych skupín (zodpovedajúcich prvočiniteľom podielov (2), takže na poradí prvočísel v skupine nezáleží). Slovo „očíslovaných“ znamená, že na poradí skupín záleží. Napríklad pre rozdelenie do dvoch skupín $\{3, 11, 19\}$, $\{7, 13, 17\}$ dostaneme podľa toho, v akom poradí obe skupiny vezmeme, dve vyhovujúce postupnosti $(1, u, uv)$ a $(1, v, uv)$, pričom $u = 3 \cdot 11 \cdot 19$ a $v = 7 \cdot 13 \cdot 17$.

Dospeli sme tak ku kombinatorickej úlohe určenia hodnoty $P(6)$, pričom $P(n)$ označuje počet rozdelení n-prvkovej množiny X na ľubovoľný počet očíslovaných neprázdnych podmnožín X_1, X_2, X_3, … Nie je ľahké hodnotu $P(6)$ vypočítať *priamo*, avšak bude možné hodnoty $P(n)$ počítať *postupne* pre $n = 1$, $n = 2$, atď. až po potrebné

$n = 6$. Takému spôsobu výpočtu hovoríme *rekurentný.* V našej úlohe bude výpočet založený na rekurentnom vzťahu

$$P(n) = \binom{n}{1}P(n-1) + \binom{n}{2}P(n-2) + \ldots + \binom{n}{n-1}P(1) + 1 \tag{3}$$

platnom pre každé $n \geqq 2$, ako teraz ukážeme.

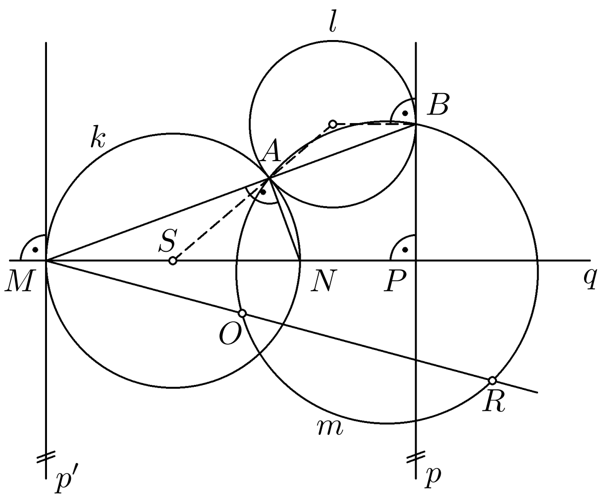
Všetky uvažované rozdelenia n-prvkovej množiny X rozdelíme na n skupín podľa počtu j prvkov prvej podmnožiny X_1 ($1 \leqq j \leqq n$). Prvú podmnožinu X_1 s j prvkami možno vybrať práve $\binom{n}{j}$ spôsobmi, práve $P(n-j)$ spôsobmi potom možno zvyšnú množinu $X' = X \setminus X_1$ rozdeliť na neprázdne očíslované podmnožiny X_2, X_3, X_4, … (Platí to aj v prípade $j = n$, keď položíme $P(0) = 1$, keďže už nie je čo rozdeľovať.) Podľa pravidla súčinu je preto počet všetkých rozdelení pôvodnej množiny X s prvou množinou X_1 majúcou j prvkov rovný $\binom{n}{j}P(n-j)$. Tým je vzťah (3), na ktorého pravej strane posledný člen 1 zodpovedá hodnote $j = n$, dokázaný.

Zo zrejmej hodnoty $P(1) = 1$ vypočítame opakovaným použitím vzťahu (3) ďalšie hodnoty $P(2) = 3$, $P(3) = 13$, $P(4) = 75$, $P(5) = 541$ a $P(6) = 4\,683$.

Záver. Existuje práve 4 683 vyhovujúcich postupností.

A – I – 5

Jedna z vyhovujúcich kružníc l je znázornená na obr. 24. Bod A vonkajšieho dotyku kružníc k, l je ich (vnútorným) stredom rovnoľahlosti, v ktorej dotyčnici p kružnice l zodpovedá s ňou rovnobežná dotyčnica p' kružnice k. Jej bod dotyku M s kružnicou k leží na osi q kružnice k, ktorá je kolmá na priamku p. Pritom z dvoch priesečníkov M, N priamky q s kružnicou k je bod M ten vzdialenejší od priamky p, lebo úsečka spájajúca rovnoľahlé body dotyku M a B pretína kružnicu k v bode A (v strede príslušnej rovnoľahlosti).



Obr. 24

Bod M teda od voľby kružnice l nezávisí. Body $A \in k$ a $B \in p$ pochopiteľne áno, ukážme však, že ich vzájomná poloha na polpriamke s počiatkom M je viazaná podmienkou

$$|MA| \cdot |MB| = |MN| \cdot |MP|, \tag{1}$$

kde P je priesečník kolmíc p a q. To jednoducho vyplýva z podobnosti

$$|MA| : |MN| = |MP| : |MB|$$

pravouhlých trojuholníkov AMN, PMB. Vzťah (1) možno tiež zdôvodniť pomocou mocnosti bodu M ku kružnici zostrojenej nad priemerom NB (ktorá prechádza bodmi P, A podľa Tálesovej vety).

Až teraz vstúpi do našich úvah daný bod O. Na obr. 24 je kružnica l vybraná tak, že zodpovedajúca priamka AB bodom O neprechádza, takže existuje kružnica m opísaná trojuholníku OAB. Podľa zadania $O \notin k$, a teda $O \neq M$, takže je určená polpriamka MO, ktorá okrem bodu O bude mať s kružnicou m spoločný ešte jeden bod, ktorý označíme R (v prípade, keď MO je dotyčnica kružnice m, položíme $R = O$).[2] Dvojakým vyjadrením mocnosti bodu M ku kružnici m potom dostaneme

$$|MA| \cdot |MB| = |MO| \cdot |MR|,$$

odkiaľ porovnaním s (1) zistíme, že úsečka MR má dĺžku

$$|MR| = \frac{|MN| \cdot |MP|}{|MO|},$$

ktorá zrejme nezávisí od voľby kružnice l. Keďže bod R navyše leží na pevnej polpriamke MO, je v prípade $|MR| \neq |MO|$ bod R spoločným bodom všetkých kružníc m ($R \neq O$), v prípade $|MR| = |MO|$ je priamka MO ich spoločná dotyčnica. Tým je riešenie úlohy dokončené.

A – I – 6

Začneme trochu obšírnejšie prípadom $n = 1$. Nájdeme *všetky* celé čísla a s vlastnosťou $5 \mid a^3 - a + 1$. Najskôr zostavíme tabuľku hodnôt $r^3 - r + 1$ pre všetky možné zvyšky r po delení piatimi, teda pre $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$:

r	0	1	2	3	4
$r^3 - r + 1$	1	1	7	25	61

Pre ostatné celé čísla a už hodnoty $a^3 - a + 1$ počítať nemusíme. Ak je totiž r zvyšok čísla a po delení piatimi, teda $a = 5q + r$ pre vhodné celé q, tak čísla $a^3 - a + 1$ a $r^3 - r + 1$ dávajú po delení piatimi rovnaký zvyšok, lebo ich rozdiel

$$(a^3 - a + 1) - (r^3 - r + 1) = (a^3 - r^3) - (a - r) = (a - r)(a^2 + ar + r^2 - 1)$$

[2] Zdôraznime, že vzhľadom na vzájomnú polohu bodov M, A, B leží bod M vo vonkajšej oblasti *každej* kružnice prechádzajúcej bodmi A, B, teda aj kružnice m. Polpriamka MO má teda s kružnicou m, ak nie je jej dotyčnicou, spoločné skutočne dva rôzne body.

je deliteľný číslom $a - r = 5q$, je teda násobkom piatich.[3] Z uvedenej tabuľky vidíme, že pre celé a platí $5 \mid a^3 - a + 1$ práve vtedy, keď $a = 5q + 3$.

Zadanú úlohu vyriešime tak, že indukciou vzhľadom na číslo n dokážeme existenciu celého čísla a_n z intervalu $(1, 5^n)$, ktoré vyhovuje podmienke $5^n \mid a_n^3 - a_n + 1$. Pre $n = 1$ podľa prvého odseku dokazované tvrdenie spĺňa v intervale $(1, 5)$ jediné číslo $a_1 = 3$.

V druhom indukčnom kroku predpokladajme, že pre niektoré prirodzené k poznáme číslo a_k z intervalu $(1, 5^k)$ s vlastnosťou $5^k \mid a_k^3 - a_k + 1$, a na základe znalosti a_k zostrojme vyhovujúce číslo a_{k+1}. Zvyškom čísla $a_k^3 - a_k + 1$ po delení číslom 5^{k+1} musí byť číslo deliteľné 5^k, teda jedno z čísel

$$0,\ 5^k,\ 2 \cdot 5^k,\ 3 \cdot 5^k,\ 4 \cdot 5^k.$$

Zapíšme preto tento zvyšok v tvare $r \cdot 5^k$, pričom $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, a hľadajme číslo a_{k+1} v tvare $a_{k+1} = a_k + s \cdot 5^k$ pre vhodné $s \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. (Je hneď jasné, že v prípade $r = 0$ môžeme položiť $a_{k+1} = a_k$, teda $s = 0$). Aj keď hodnotu s vyberieme až za chvíľu, z podmienky $1 < a_k < 5^k$ a nerovností $a_k \leqq a_{k+1} \leqq a_k + 4 \cdot 5^k$ už teraz vyplýva, že podmienka $1 < a_{k+1} < 5^{k+1}$ bude splnená (nech dopadne výber s akokoľvek). Pre číslo a_{k+1} zvoleného tvaru dostávame

$$\begin{aligned}
\frac{a_{k+1}^3 - a_{k+1} + 1}{5^{k+1}} &= \frac{\left(a_k + s \cdot 5^k\right)^3 - \left(a_k + s \cdot 5^k\right) + 1}{5^{k+1}} = \\
&= \frac{a_k^3 + 3a_k^2 s \cdot 5^k + 3a_k s^2 {\cdot} 5^{2k} + s^3 {\cdot} 5^{3k} - a_k - s \cdot 5^k + 1}{5^{k+1}} = \\
&= 3a_k s^2 {\cdot} 5^{k-1} + s^3 {\cdot} 5^{2k-1} + \frac{\left(a_k^3 - a_k + 1\right) - r \cdot 5^k}{5^{k+1}} + \frac{\left(3a_k^2 - 1\right) s + r}{5}.
\end{aligned}$$

Ak budú oba záverečné zlomky celočíselné, bude taká aj hodnota celého posledného súčtu. Prvý zlomok túto vlastnosť má vďaka tomu, ako sme zaviedli číslo $r \in \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Preto je len potrebné nájsť také $s \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, aby aj druhý zlomok bol celočíselný, teda aby číslo $\left(3a_k^2 - 1\right) s + r$ bolo deliteľné piatimi. Stačí ukázať, že päť čísel

$$c(s) = \left(3a_k^2 - 1\right) s + r, \quad \text{pričom} \quad s \in \{0, 1, 2, 3, 4\},$$

dáva po delení piatimi navzájom rôzne zvyšky (jeden z nich potom bude nula). Keby to tak nebolo, platilo by $5 \mid c(s) - c(s')$ pre niektoré dve rôzne $s, s' \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$; z vyjadrenia

$$c(s) - c(s') = \left(3a_k^2 - 1\right)(s - s')$$

by sme potom usúdili, že číslo $3a_k^2 - 1$ je deliteľné piatimi. Vzťah $5 \mid 3a^2 - 1$ však neplatí pre žiadne celé a; podľa úvah z prvého odstavca sa stačí o tom presvedčiť pre päť hodnôt $a \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$:

a	0	1	2	3	4
$3a^2 - 1$	-1	2	11	26	47

[3] Rovnako ľahko sa dokáže všeobecnejší užitočný poznatok: pre ľubovoľný mnohočlen F s celočíselnými koeficientmi a ľubovoľné celé a, b je rozdiel $F(a) - F(b)$ celočíselným násobkom rozdielu $a - b$.

Tým je celý dôkaz matematickou indukciou ukončený. Pre zaujímavosť dodajme, že sme schopní ľahko vysvetliť, že naše číslo $3a_k^2 - 1$ dáva po delení piatimi vždy zvyšok 1 (takže v prípade $r \neq 0$ vyhovuje $s = 5 - r$). Naozaj, vzhľadom na to, že $k \geqq 1$, z podmienky $5^k \mid a_k^3 - a_k + 1$ vyplýva $5 \mid a_k^3 - a_k + 1$, čo je podľa prvého odstavca splnené práve vtedy, keď $a_k = 5k + 3$; číslo $3a_k^2 - 1$ teda po delení piatimi dáva rovnaký zvyšok ako číslo $3 \cdot 3^2 - 1 = 26$.

A – S – 1

Sčítaním všetkých troch rovníc po zrušení kvadratických členov dostaneme

$$x + y + z = 0. \tag{1}$$

Odtiaľ vyjadríme $z = -x - y$ a dosadíme do prvej rovnice sústavy. Obdržíme $x^2 - y = (-x - y)^2$, čo po úprave dá rovnicu $y(2x + y + 1) = 0$. Rozoberieme preto dva prípady podľa toho, ktorý z oboch činiteľov na jej ľavej strane je rovný nule.

V prípade $y = 0$ z rovnice (1) obdržíme $z = -x$ a po dosadení y, z do pôvodnej sústavy dostaneme pre neznámu x jedinú podmienku $x(x - 1) = 0$, ktorú spĺňa iba $x = 0$ a $x = 1$. Tomu zodpovedajú riešenia (x, y, z) tvaru $(0, 0, 0)$ a $(1, 0, -1)$.

V prípade, keď $2x + y + 1 = 0$, čiže $y = -2x - 1$, z (1) máme $z = -x - y = x + 1$. Po dosadení y, z do pôvodnej sústavy dostaneme pre neznámu x jedinú podmienku $x(x + 1) = 0$, ktorú spĺňajú iba $x = 0$ a $x = -1$. Tomu zodpovedajú riešenia (x, y, z) tvaru $(0, -1, 1)$ a $(-1, 1, 0)$.

Záver. Daná sústava má práve štyri riešenia (x, y, z): trojice $(0, 0, 0)$, $(1, 0, -1)$, $(0, -1, 1)$ a $(-1, 1, 0)$.

Iné riešenie. Sčítaním dvoch prvých rovníc danej sústavy eliminujeme neznámu x a dostaneme rovnicu $y^2 - z^2 = y + z$, ktorú možno zapísať v tvare súčinu

$$(y + z)(y - z - 1) = 0. \tag{2}$$

Rozoberieme opäť dva prípady podľa toho, ktorý z dvoch činiteľov v poslednej rovnici sa rovná nule.

V prípade $y + z = 0$ z tretej rovnice danej sústavy vyjde $x = 0$ a z prvých dvoch rovníc po dosadení $x = 0$ a $z = -y$ dostaneme pre neznámu y jedinú podmienku $y(y + 1) = 0$, teda $y = 0$ alebo $y = -1$. Zodpovedajúce riešenia (x, y, z) sú $(0, 0, 0)$ a $(0, -1, 1)$.

V prípade, keď $y - z - 1 = 0$, čiže $z = y - 1$, získame z tretej rovnice sústavy $x = z^2 - y^2 = (y - 1)^2 - y^2 = 1 - 2y$. Dosadením x, z dostaneme pre neznámu y jedinú podmienku $y(y - 1) = 0$, teda $y = 0$ alebo $y = 1$. Zodpovedajúce riešenia (x, y, z) sú $(1, 0, -1)$ a $(-1, 1, 0)$.

A – S – 2

Každý n-boký hranol má práve n vrcholov v každej zo svojich podstáv, takže $v = 2n$. Z každého vrcholu vychádza $n - 3$ uhlopriečok ležiacich v podstave a dve uhlopriečky ležiace v bočných stenách, celkom je to $n-1$ stenových uhlopriečok. Z $2n$ vrcholov teda vychádza $2n(n-1)$ stenových uhlopriečok, každá z nich je však započítaná dvakrát, preto $s = n(n-1)$. Podobne určíme počet t telesových uhlopriečok: z každého vrcholu ich vychádza $n-3$ (do všetkých vrcholov druhej podstavy s výnimkou tých troch vrcholov, s ktorými je daný vrchol spojený hranou alebo uhlopriečkou v bočnej stene), preto $t = 2n(n-3)/2 = n(n-3)$.

Hľadáme tie celé $n \geqq 3$, pre ktoré čísla

$$v = 2n, \quad s = n(n-1) \quad \text{a} \quad t = n(n-3)$$

tvoria vo vhodnom poradí trojicu x, y, z s vlastnosťou $y - x = z - y$, čiže $y = \frac{1}{2}(x+z)$. Jednoduchým dosadením zistíme, že pre $n = 3$ máme nevyhovujúcu trojicu čísel 6, 6, 0, zatiaľ čo pre $n = 4$ vychádza vyhovujúca trojica 8, 12, 4 (platí $8 = \frac{1}{2}(4+12)$). Pre ľubovoľné $n \geqq 5$ máme $n-1 > n-3 \geqq 2$, odkiaľ po násobení číslom n dostaneme $s > t \geqq \geqq v$, takže požadovaná rovnosť s aritmetickým priemerom musí byť tvaru $t = \frac{1}{2}(v+s)$. Po dosadení dostávame rovnicu

$$n(n-3) = \frac{2n + n(n-1)}{2}$$

s jediným prípustným koreňom $n = 7$ (koreň $n = 0$ nemá reálny zmysel).

Záver. Vyhovujú jedine $n = 4$ a $n = 7$.

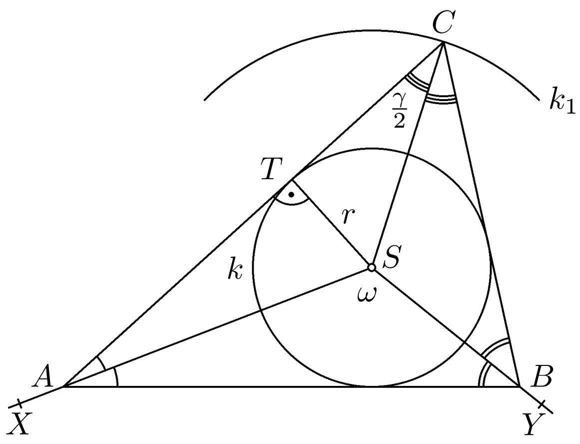
A – S – 3

Označme r polomer danej kružnice k a ω veľkosť daného (konvexného) uhla XSY. V ľubovoľnom vyhovujúcom trojuholníku ABC označme zvyčajným spôsobom vnútorné uhly. V trojuholníku ABS platí (obr. 25)

$$\omega = |\measuredangle ASB| = 180^\circ - |\measuredangle SAB| - |\measuredangle SBA| = 180^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2} = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}.$$

Odtiaľ vyplýva, že hľadaná množina je prázdna, ak $\omega \leqq 90^\circ$ alebo $\omega = 180^\circ$, a že všetky vyhovujúce trojuholníky ABC majú vnútorný uhol γ, pre ktorého veľkosť platí

$$\gamma = 2\omega - 180^\circ.$$



Obr. 25

Z pravouhlého trojuholníka CST, pričom T je bod dotyku kružnice k so stranou AC (obr. 25), vyjadríme dĺžku prepony SC vzťahom

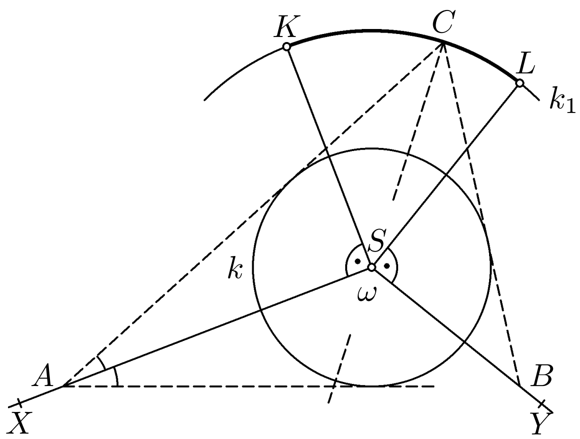
$$|SC| = \frac{|ST|}{\sin\frac{1}{2}\gamma} = \frac{r}{\sin(\omega - 90^\circ)}.$$

Bod C preto leží na kružnici k_1 so stredom S a polomerom $r_1 = r/\sin(\omega - 90^\circ)$.

Rovnako ako uhol ASB sú aj uhly ASC a BSC (čiže uhly XSC a YSC) tupé, lebo

$$|\measuredangle ASC| = 90^\circ + \frac{\beta}{2} \quad \text{a} \quad |\measuredangle BSC| = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}. \tag{1}$$

Spolu tak dostávame, že bod C je vnútorným bodom oblúka KL kružnice k_1, ktorý leží zvonka daného uhla XSY a ktorého krajné body K, L sú určené pravými uhlami XSK a YSL (obr. 26).



Obr. 26

Ak naopak vyberieme ľubovoľný vnútorný bod C oblúka KL, polpriamky SX, SY a SC rozdelia rovinu na tri tupé uhly, pričom polpriamka CS oddelí body X a Y. Z rovnosti $|SC| = r_1$ vyplýva, že dotyčnica z bodu C ku kružnici k zostrojená v polrovine CSX zviera s polpriamkou CS ostrý uhol $\omega - 90°$, takže pretne polpriamku SX v bode, ktorý označíme A. Analogicky dotyčnica z bodu C ku kružnici k zostrojená v polrovine CSY pretne polpriamku SY v bode, ktorý označíme B.

Zvoľme teraz hodnoty α, β, γ tak, aby $\omega - 90° = \frac{1}{2}\gamma$, $|\measuredangle CSK| = \frac{1}{2}\beta$, $|\measuredangle CSL| = \frac{1}{2}\alpha$, potom z plného uhla pri vrchole S vyplýva

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 180° - \omega = 90° - \frac{\gamma}{2} \quad \text{čiže } \alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Ako ľahko spočítame, dotyčnica z nájdeného bodu A ku kružnici k súmerne združená s dotyčnicou AC podľa priamky SX pretína polpriamku CS pod uhlom $\frac{1}{2}\gamma + \alpha$, a podobne vyjde, že analogická dotyčnica z nájdeného bodu B pretne tú istú polpriamku pod uhlom $\frac{1}{2}\gamma + \beta$. Súčet oboch uvedených uhlov je však 180°, preto sú obe dotyčnice ku kružnici k rovnobežné, a teda totožné (oba príslušné body dotyku musia totiž ležať vnútri konvexného uhla XSY). Nájdený trojuholník ABC má preto požadované vlastnosti.

A – II – 1

Ak $p = 0$, druhá rovnica má tvar $12 = 0$, nemá teda žiadne riešenie. Pre všetky hľadané štvorice je teda $p \neq 0$ a obe rovnice sú kvadratické.

Rôzne čísla p, q sú koreňmi kvadratickej rovnice $x^2 + rx + s - 1 = 0$ práve vtedy, keď spĺňajú Viètove vzťahy

$$p + q = -r, \qquad pq = s - 1. \tag{1}$$

Podobne sú *rôzne* čísla r, s koreňmi kvadratickej rovnice $px^2 + p(q-1)x + 12 = 0$ práve vtedy, keď spĺňajú Viètove vzťahy

$$r + s = -\frac{p(q-1)}{p}, \qquad rs = \frac{12}{p}. \tag{2}$$

Z (1) vyjadríme $r = -p - q$, $s = pq + 1$ a dosadíme do (2). Postupnými úpravami dostaneme rovnosti

$$\begin{aligned} -p - q + pq + 1 &= -\frac{p(q-1)}{p}, \\ -p + pq + 1 - q &= 1 - q, \\ pq &= p, \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} (-p - q)(pq + 1) &= \frac{12}{p}, \\ -p(p + q)(pq + 1) &= 12. \end{aligned}$$

Keďže $p \neq 0$, z rovnosti naľavo máme $q = 1$ a po dosadení do rovnosti napravo získame rovnicu $-p(p+1)^2 = 12$, ktorá po úprave prejde na rovnicu tretieho stupňa

$$p^3 + 2p^2 + p + 12 = 0. \tag{3}$$

Tá má koreň $p = -3$ a po vyňatí výrazu $(p+3)$ pred zátvorku ju upravíme na súčinový tvar $(p+3)(p^2 - p + 4) = 0$. Keďže kvadratická rovnica $p^2 - p + 4 = 0$ nemá žiadne reálne riešenie (jej diskriminant je -15), je $p = -3$ jediným riešením rovnice (3). Podľa (1) potom $r = -(-3) - 1 = 2$, $s = (-3) \cdot 1 + 1 = -2$. Skúškou ľahko overíme, že štvorica $(p, q, r, s) = (-3, 1, 2, -2)$ spĺňa Viètove vzťahy (1), (2) a je teda jedinou štvoricou vyhovujúcou zadaniu.

A – II – 2

Po vypísaní uvedenej tabuľky 3×3, prípadne 5×5, ihneď zistíme, že pre tieto hodnoty n nemožno urobiť žiadny krok, ktorý by čísla zmenil. Totiž v každej dvojici čísel na susedných políčkach je jedno párne a jedno nepárne číslo, takže ich súčet je nepárny a aritmetický priemer nie je celé číslo.

Takáto situácia nastáva pri všetkých nepárnych hodnotách n: Ak ofarbíme tabuľku ako šachovnicu (pričom číslo 1 bude na bielom políčku), bude každý riadok začínať opačnou farbou ako má prvé políčko predošlého riadku. To má pri nepárnom n rovnakú farbu ako posledné políčko v riadku. Takže čísla $1, 2, 3, \ldots, n^2$ budú v tomto poradí napísané striedavo na políčkach s farbou biela, čierna, biela, …, biela, teda nepárne čísla budú na bielych políčkach a párne na čiernych. Keďže v každej dvojici susedných políčok je jedno biele a jedno čierne, nie je aritmetický priemer žiadnych dvoch susedných čísel celým číslom.

Fakt, že pre nepárne n sú na ľubovoľných dvoch susedných políčkach čísla s opačnou paritou, možno zdôvodniť aj inak: Každé číslo k susedí v tabuľke s číslami $k-1$, $k+1$, $k-n$ a $k+n$ (prípadne len s niektorými z nich, ak leží na okraji tabuľky). Všetky tieto čísla majú opačnú paritu ako k.

Ukážeme, že ani žiadne párne n nespĺňa podmienky zadania. Súčet S všetkých čísel v tabuľke sa zrejme po žiadnom kroku nezmení. Stále má rovnakú hodnotu ako na začiatku, t. j.

$$S = 1 + 2 + \cdots + n^2 = \frac{(n^2+1)n^2}{2}.$$

Ak by bolo po niekoľkých krokoch všetkých n^2 čísel rovnakých, museli by sa rovnať číslu

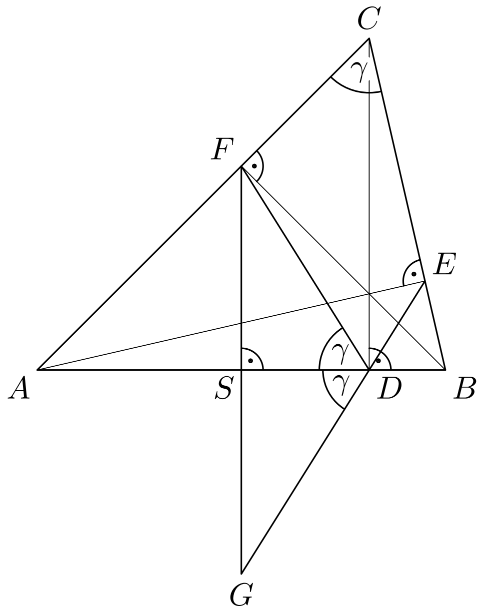
$$\frac{S}{n^2} = \frac{n^2+1}{2}.$$

Avšak pre párne n je čitateľ n^2+1 nepárny a uvedený zlomok nie je celým číslom.

Záver. Tabuľku, v ktorej sú všetky čísla rovnaké, nemožno dostať pre žiadne n.

A – II – 3

Označme S stred strany AB a G obraz bodu F v stredovej súmernosti podľa stredu S. Veľkosť uhla BCA označme γ. Z ostrouhlosti trojuholníka ABC je zrejmé, že bod G leží v polrovine opačnej k polrovine ABC (obr. 27).



Obr. 27

Štvoruholník $ADEC$ je tetivový (body D, E ležia na Tálesovej kružnici nad priemerom AC), preto

$$|\measuredangle ADE| = 180° - \gamma \quad \text{a} \quad |\measuredangle ADG| = 180° - |\measuredangle ADE| = \gamma.$$

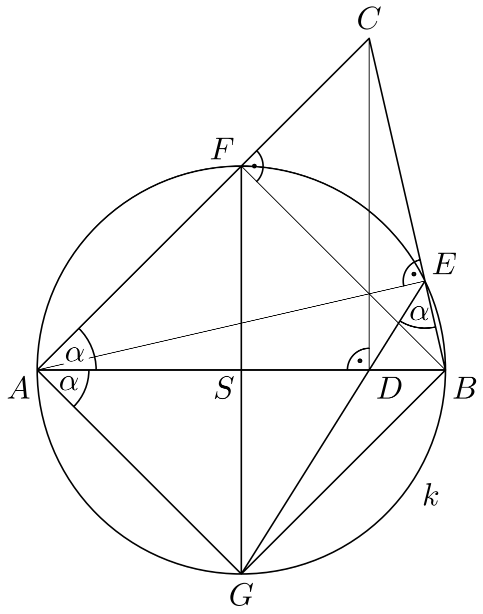
Aj štvoruholník $BDFC$ je tetivový (body D, F ležia na Tálesovej kružnici nad priemerom BC), preto

$$|\measuredangle BDF| = 180° - \gamma \quad \text{a} \quad |\measuredangle ADF| = 180° - |\measuredangle BDF| = \gamma.$$

V trojuholníku FDG teda splývajú ťažnica a os uhla z vrcholu D a ten je preto rovnoramenný. Takže úsečka FS je kolmá na úsečku AS. Keďže bod F leží na Tálesovej kružnici nad priemerom AB, ktorá má stred v bode S, je trojuholník SFA rovnoramenný a pravouhlý, a teda veľkosť uhla BAC je 45°.

Iné riešenie. Podobne ako v prvom riešení označme body S a G. Veľkosť uhla BAC označme α.

Bod S je stredom Tálesovej kružnice k nad priemerom AB. Na tejto kružnici ležia zrejme okrem bodov A, B aj body E, F, a G – pri pätách výšok sú pravé uhly a bod G je od stredu súmernosti S rovnako vzdialený ako bod F (obr. 28). Štvoruholník $ADEC$



Obr. 28

je tetivový (body D, E ležia na Tálesovej kružnici nad priemerom AC), preto

$$|\measuredangle DEC| = 180^\circ - \alpha \quad \text{a} \quad |\measuredangle GEB| = 180^\circ - |\measuredangle DEC| = \alpha.$$

Keďže uhly GEB a GAB sú obvodové uhly nad tetivou GB kružnice k, aj uhol GAB má veľkosť α. Preto uhol FAG má veľkosť 2α. Tento uhol je však pravý, lebo úsečka FG je priemerom kružnice k. Z toho dostávame, že hľadaná veľkosť uhla α je 45°.

A – II – 4

Z nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom trojice (nezáporných) čísel x^2, 1, 1 vyplýva odhad

$$\frac{x^2+1+1}{3} \geqq \sqrt[3]{x^2 \cdot 1 \cdot 1},$$

čiže $x^2+2 \geqq 3\sqrt[3]{x^2}$. Stačí teda dokázať nerovnosť $3\sqrt[3]{x^2} \geqq 3xy$. Po vykrátení a umocnení na šiestu dostaneme ekvivalentnú nerovnosť $x^4 \geqq x^6y^6$ a po dosadení zadanej rovnosti $y^6 = 2 - x^2$ a prevedením na jednu stranu postupne získame

$$\begin{aligned} x^4 &\geqq x^6(2-x^2), \\ x^4 - 2x^6 + x^8 &\geqq 0, \\ x^4(x^2-1)^2 &\geqq 0. \end{aligned}$$

Ostatná nerovnosť zjavne platí, platí teda aj zadaná nerovnosť.

Iné riešenie. Z nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom šestice (nezáporných) čísel y^6, x^2, x^2, x^2, 1, 1 vyplýva

$$\frac{y^6+x^2+x^2+x^2+1+1}{6} \geqq \sqrt[6]{y^6 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot 1 \cdot 1} = xy.$$

Odtiaľ po dosadení zadanej rovnosti máme $(2x^2 + 4)/6 \geqq xy$. Vynásobením tromi získame dokazovanú nerovnosť.

Iné riešenie. Keď (ekvivalentne) umocníme dokazovanú nerovnosť na šiestu, budeme sa môcť dosadením zadanej rovnosti zbaviť premennej y:

$$(x^2 + 2)^6 \geqq 3^6 \cdot x^6 y^6 = 3^6 \cdot x^6 (2 - x^2).$$

Po substitúcii $t = x^2$ a úprave dostaneme polynomickú nerovnosť s jednou premennou

$$t^6 + 12t^5 + 789t^4 - 1298t^3 + 240t^2 + 192t + 64 \geqq 0.$$

Mnohočlen na ľavej strane má dvojnásobný koreň 1, preto ho vieme rozložiť na súčin dvoch činiteľov (napríklad použijeme známy postup pre delenie mnohočlena koreňovým činiteľom). Nerovnosť má potom tvar

$$(t - 1)^2 \cdot (t^4 + 14t^3 + 816t^2 + 320t + 64) \geqq 0.$$

Druhý činiteľ je pre $t = x^2 \geqq 0$ zjavne nezáporný, z čoho vidíme, že ostatná nerovnosť platí, a preto platí aj s ňou ekvivalentná dokazovaná nerovnosť.

A – III – 1

Predpokladajme, že koeficienty p, q, r spĺňajú zadané podmienky. Úpravou vzťahov $f(p) = p^3$, $f(q) = q^3$ získame

$$\begin{aligned} p^3 + p^3 + pq + r &= p^3, \qquad & q^3 + pq^2 + q^2 + r &= q^3, \\ p^3 + pq + r &= 0, & pq^2 + q^2 + r &= 0. \end{aligned}$$

Odčítaním oboch výsledných rovností a ďalšou úpravou máme postupne

$$\begin{aligned} p^3 - pq^2 + pq - q^2 &= 0, \\ p(p - q)(p + q) + q(p - q) &= 0, \\ (p - q)(p^2 + pq + q) &= 0. \end{aligned}$$

Podľa zadania $p \neq q$, po vydelení nenulovým výrazom $(p - q)$ preto ďalej dostaneme

$$\begin{aligned} p^2 + pq + q &= 0, \\ q(p + 1) &= -p^2, \end{aligned}$$

odkiaľ vyplýva, že $p \neq -1$. Za tohto predpokladu môžeme vyjadriť

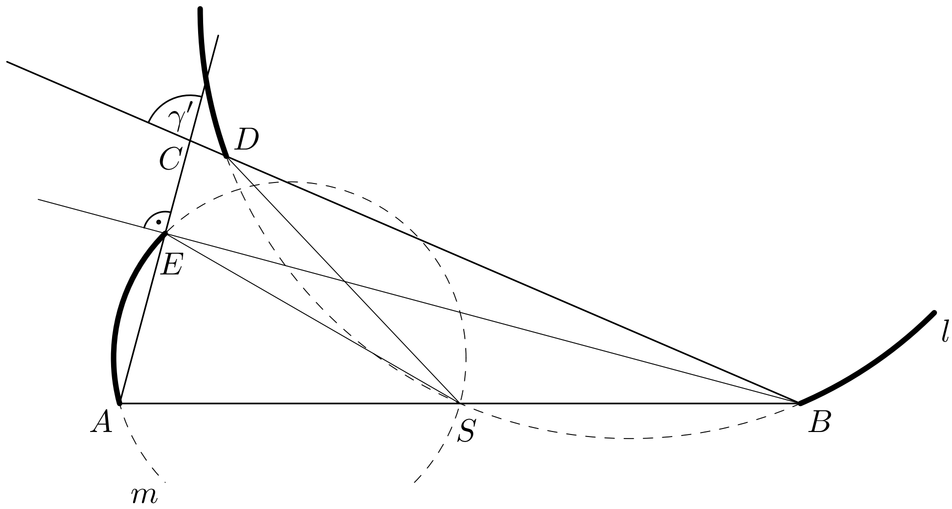
$$q = -\frac{p^2}{p + 1} = -\frac{p^2 - 1 + 1}{p + 1} = 1 - p - \frac{1}{p + 1}.$$

Keďže p aj q sú celé čísla, musí byť aj zlomok $1/(p+1)$ celé číslo, teda $p+1 \in \{1,-1\}$. Vzhľadom na podmienku $p \neq 0$ nutne $p=-2$. Potom $q = 1-(-2)-1/(-2+1) = 4$ a ľahko dopočítame, že $r = 16$. Skúškou overíme, že trojica $(p,q,r) = (-2,4,16)$ spĺňa zadané podmienky.

A – III – 2

Označme vnútorné uhly trojuholníka ABC zvyčajným spôsobom. Ďalej označme l kružnicu opísanú trojuholníku BDS a m kružnicu opísanú trojuholníku AES. Body D a E ležia na Tálesovej kružnici k so stredom S a priemerom AB, preto trojuholníky BSD, ASE sú rovnoramenné so základňami BD, AE. Aby sme nemuseli rozoberať rôzne prípady, dokážeme najskôr, že bod K leží vždy vnútri trojuholníka ABC.

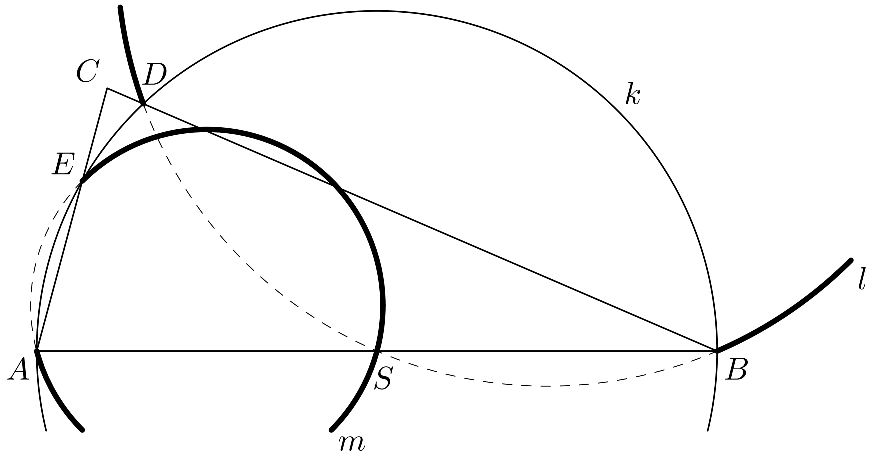
Zrejme oblúk BD kružnice l *neobsahujúci* bod S sa nepretína s oblúkom AE kružnice m *neobsahujúcim* bod S. Totiž prvý z nich leží celý v polrovine opačnej k polrovine BCA, druhý leží celý v polrovine opačnej k polrovine ACB, takže pretínať by sa mohli len v uhle γ', ktorý je vrcholovým uhlom k vnútornému uhlu γ trojuholníka ABC (obr. 29). Avšak aspoň jeden z uhlov BSD, ASE je ostrý (keďže ich súčet je menej



Obr. 29

ako 180°), nech je to napríklad uhol ASE. Potom je sledovaný oblúk AE „kratším“ oblúkom svojej kružnice (lebo k nemu prislúcha tupý obvodový uhol) a teda leží celý v polrovine BEA, ktorá nemá s uhlom γ' žiadny spoločný bod.

Oblúk BD kružnice l *neobsahujúci* bod S sa nepretína ani s oblúkom AE kružnice m *obsahujúcim* bod S, lebo prvý z nich leží zvonka kružnice k, zatiaľ čo druhý leží vnútri kružnice k (obr. 30). Z podobných dôvodov sa nepretínajú ani oblúk BD kružnice l



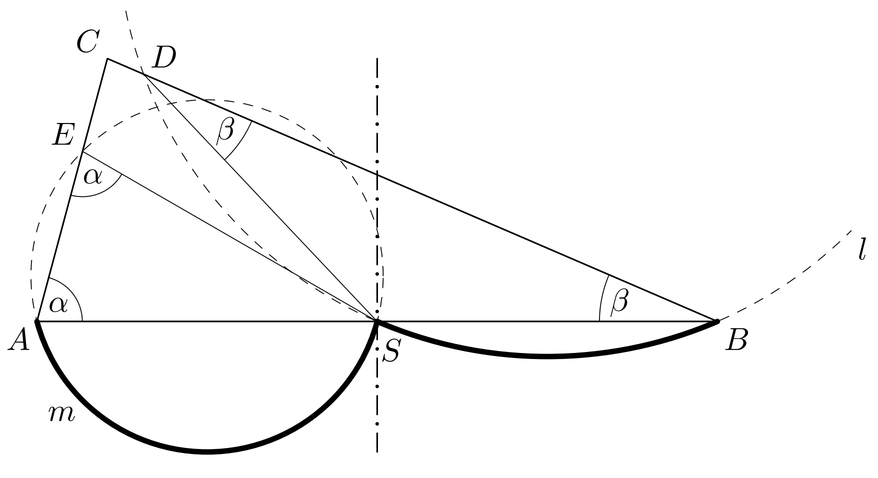
Obr. 30

obsahujúci bod S s oblúkom AE kružnice m *neobsahujúcim* bod S.

Kružnice l, m sa teda musia pretínať na tých oblúkoch BD a AE, ktoré obsahujú bod S. Prvý z nich leží v polrovine BCA, druhý v polrovine ABC, takže ich priesečník musí ležať v uhle γ. Z rovnoramennosti trojuholníkov BSD, ASE vyplýva

$$|\measuredangle BDS| = \beta, \qquad |\measuredangle AES| = \alpha, \tag{1}$$

takže uhly BDS, AES sú ostré. Preto oblúky BS, AS kružníc l, m neobsahujúce postupne body D, E sú „kratšími“ oblúkmi svojich kružníc (prislúcha im tupý obvodový uhol) a nemôžu sa pretínať (oddeľuje ich os strany AB, obr. 31). Kružnice l, m sa teda



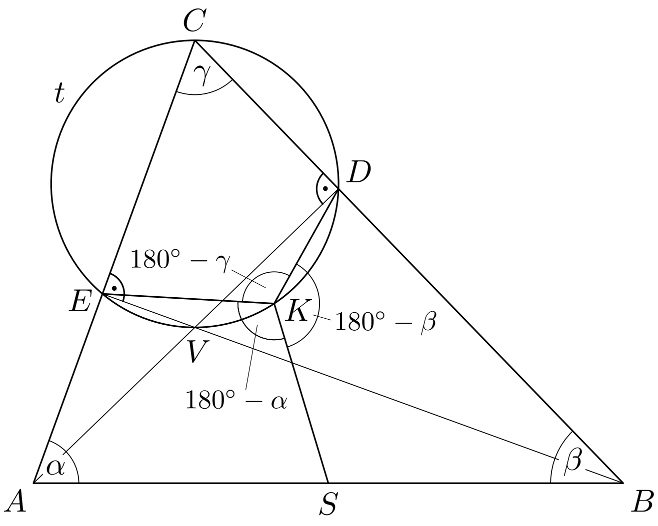
Obr. 31

nemôžu pretínať v polrovine opačnej k polrovine ABC. Spolu s predošlým zistením dostávame, že ich priesečník (rôzny od S) musí ležať vnútri trojuholníka ABC.

a) Aby sme dokázali, že body D, E, V, K ležia na jednej kružnici, stačí dokázať, že bod K leží na kružnici prechádzajúcej bodmi D, E, V, ktorou je zrejme Tálesova kružnica t s priemerom CV. Z tetivových štvoruholníkov $BSKD$, $ASKE$ vyplýva $|\measuredangle SKD| = 180° - \beta$, $|\measuredangle SKE| = 180° - \alpha$. Preto

$$|\measuredangle EKD| = 360° - |\measuredangle SKD| - |\measuredangle SKE| = 360° - (180° - \beta) - (180° - \alpha) = \alpha + \beta = \\ = 180° - \gamma = 180° - |\measuredangle DCE|.$$

Takže štvoruholník $CEKD$ je tetivový a bod K naozaj leží na kružnici t (obr. 32).



Obr. 32

b) Ak $V = K$, Tak body F, V, K celkom určite ležia na jednej priamke. Zaoberajme sa ďalej len prípadom $V \neq K$[4]. Ukážeme najprv, že body A, V, K, B ležia na jednej kružnici. Z pravouhlých trojuholníkov ABD, ABE dostávame $|\measuredangle BAD| = 90° - \beta$, $|\measuredangle ABE| = 90° - \alpha$, preto z trojuholníka ABV máme

$$|\measuredangle AVB| = 180° - (90° - \beta) - (90° - \alpha) = \alpha + \beta$$

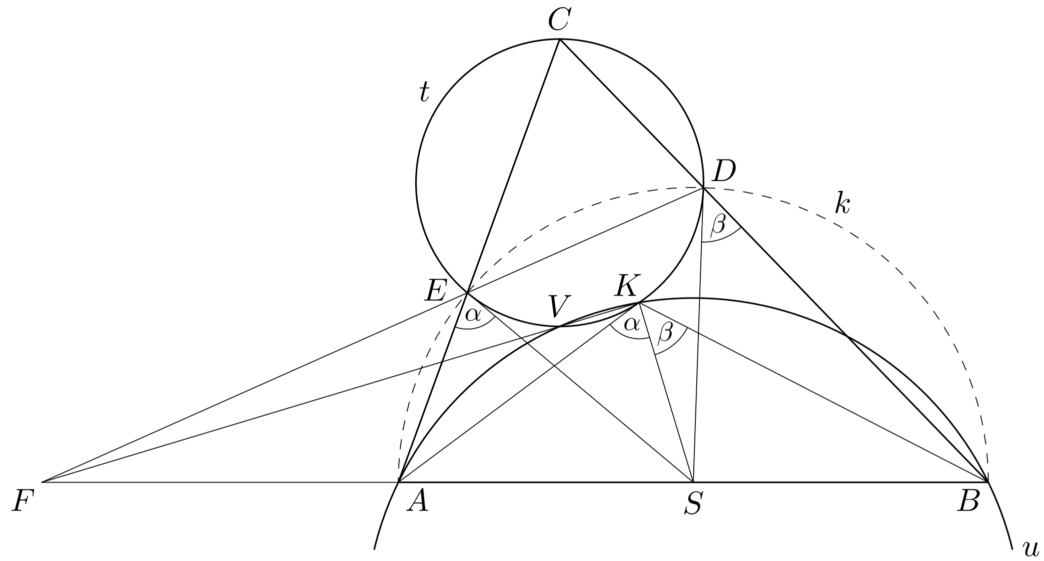
(uvedený vzťah možno odvodiť aj z tetivového štvoruholníka $CEVD$ na obr. 32). Podľa (1) a z vlastností obvodových uhlov v tetivových štvoruholníkoch $BSKD$, $ASKE$ máme

$$|\measuredangle AKS| = |\measuredangle AES| = \alpha, \qquad |\measuredangle BKS| = |\measuredangle BDS| = \beta.$$

Takže $|\measuredangle AKB| = \alpha + \beta = |\measuredangle AVB|$ a body A, V, K, B naozaj ležia na jednej kružnici, označme ju u (obr. 33).

---

[4] Dá sa ukázať, že predpoklady zadania vylučujú prípad $V = K$, ale pri riešení to nepotrebujeme.



Obr. 33

Body V, K sú teda priesečníkmi kružnice u s kružnicou t z časti a). Priamka VK je preto chordálou kružníc t, u. Aby sme ukázali, že na nej leží bod F, stačí ukázať, že jeho mocnosť k obom kružniciam je rovnaká. To je však pravda, lebo z mocnosti bodu F ku kružnici k vyplýva

$$|FE| \cdot |FD| = |FA| \cdot |FB|.$$

Pravá strana tejto rovnosti je zároveň mocnosťou bodu F ku kružnici t, ľavá strana je jeho mocnosťou ku kružnici u. Tým je časť b) dokázaná[5].

Poznámka. Pomocou mocnosti bodu C ku kružniciam k, l, m možno podobne odvodiť, že K leží na priamke CS. Tento fakt môže jednak pomôcť dokázať, že K leží vnútri trojuholníka ABC (iným postupom, ako sme to urobili tu), jednak poskytuje alternatívne možnosti na dôkaz časti a) (dá sa ukázať, že priamky VK a CS sú na seba kolmé).

A – III – 3

Najskôr dokážeme, že pre ľubovoľné párne n je možné dostať požadovanú tabuľku. Ukážeme jeden z mnohých možných postupov. Zrejme ak sú na dvoch susedných políčkach celé čísla líšiace sa práve o 1, po konečnom počte krokov vieme dostať (bez zmeny ostatných políčok) tabuľku, v ktorej väčšie z oboch čísel bude nahradené číslom 365 a menšie číslom 364: Ak sú na daných dvoch susedných políčkach čísla k a $k+1$, stačí $|364-k|$-krát spraviť krok, v ktorom na oboch týchto políčkach čísla o 1 zväčšíme (keď $k \leqq 364$), resp. zmenšíme (keď $k > 364$). Na začiatku sú na susedných políčkach v každom riadku čísla líšiace sa práve o 1 (pričom číslo „napravo“ je vždy väčšie), navyše v každom riadku je párne veľa políčok. Môžeme teda políčka každého riadku

[5] Možno argumentovať aj priamejšie: priamky ED, VK, AB sú chordálami kružníc k, t, u (každá priamka prislúcha jednej dvojici kružníc) preto sa pretínajú v jednom bode.

rozdeliť do dvojíc a každú dvojicu čísel na nich po konečnom počte krokov zmeniť na dvojicu $(364, 365)$. Dostaneme tak tabuľku, v ktorej sú na políčkach v nepárnych stĺpcoch len čísla 364 a v párnych stĺpcoch len čísla 365. Teraz už stačí rozdeliť do dvojíc políčka v nepárnych stĺpcoch a každú dvojicu čísel $(364, 364)$ nahradiť po jednom kroku dvojicou $(365, 365)$. Pre hodnotu $n = 6$ je postup načrtnutý na obr. 34.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

$\longrightarrow$

364	365	364	365	364	365
364	365	364	365	364	365
364	365	364	365	364	365
364	365	364	365	364	365
364	365	364	365	364	365
364	365	364	365	364	365

$\longrightarrow$

364	365	364	365	364	365
364	365	364	365	364	365
364	365	364	365	364	365
364	365	364	365	364	365
364	365	364	365	364	365
364	365	364	365	364	365

$\longrightarrow$

365	365	365	365	365	365
365	365	365	365	365	365
365	365	365	365	365	365
365	365	365	365	365	365
365	365	365	365	365	365
365	365	365	365	365	365

Obr. 34

Zaoberajme sa ďalej prípadom, keď n je nepárne. Ofarbime celú tabuľku striedavo čiernou a bielou farbou ako šachovnicu, pričom prvé políčko (t. j. to, na ktorom je na začiatku číslo 1) bude biele. Čísla, ktoré sú na bielych políčkach, nazývajme *biele*, čísla na čiernych políčkach nazývajme *čierne*. Keďže susedné políčka majú opačnú farbu, v každom kroku zmeníme jedno biele a jedno čierne číslo. Ak teda označíme B súčet všetkých bielych čísel a C súčet všetkých čiernych čísel, rozdiel $R = B - C$ sa po žiadnom kroku nezmení (v každom kroku sa buď B aj C zväčšia o 1, alebo sa obe zmenšia o 1). Na začiatku sú biele čísla všetky nepárne a čierne všetky párne, takže

$$R = (1 + 3 + \cdots + n^2) - \big(2 + 4 + \cdots + (n^2 - 1)\big) =$$

$$= 1 + (3 - 2) + (5 - 4) + \cdots + \big(n^2 - (n^2 - 1)\big) = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{(n^2+1)/2\text{-krát}} = \frac{n^2 + 1}{2}.$$

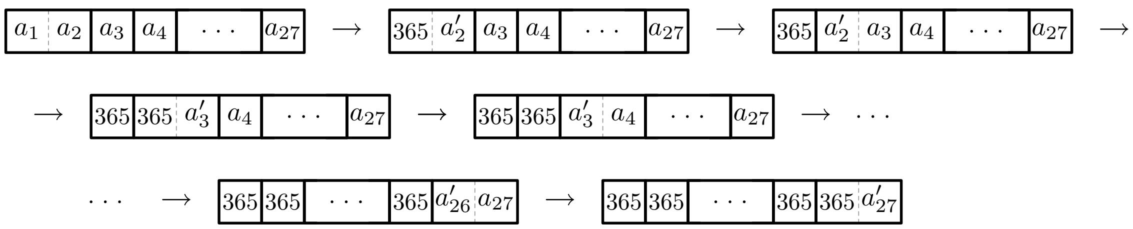
Bielych políčok je o jedno viac ako čiernych. Ak by teda bolo po nejakom počte krokov na všetkých políčkach číslo 365, mal by rozdiel R hodnotu 365. To znamená, že nutnou podmienkou, aby sa tabuľka dala zmeniť na požadovaný tvar, je rovnosť

$$\frac{n^2 + 1}{2} = 365,$$

ktorá nastáva jedine pre $n = 27$.

Dokázali sme, že pre nepárne čísla rôzne od 27 nie je možné dostať tabuľku so všetkými číslami rovnými 365. Zostáva ukázať, že pre $n = 27$ to možné je. Zrejme nech sú na dvoch susedných políčkach ľubovoľné celé čísla, vieme po konečnom počte krokov (bez zmeny ostatných políčok) dosiahnuť, že jedno z nich bude rovné 365 (stačí čísla na oboch políčkach príslušný počet krát zväčšiť alebo zmenšiť).

Ukážeme, že týmto postupom dokážeme tabuľku zmeniť tak, že na všetkých políčkach okrem posledného (v pravom dolnom rohu) bude číslo 365. Môžeme to urobiť napríklad nasledovne: Najprv číslo na prvom políčku zmeníme pomocou druhého políčka na 365, potom číslo na druhom políčku pomocou tretieho, atď. Tak dostaneme v celom prvom riadku až na jeho posledné políčko číslo 365. Rovnaký postup aplikujeme v každom riadku (obr. 35). Tým dostaneme číslo 365 na všetkých políčkach okrem posledného



Obr. 35

stĺpca. Keď teraz rovnaký „riadkový" postup aplikujeme na posledný stĺpec, získame číslo 365 všade okrem posledného políčka.

Nech na poslednom políčku vzniklo uvedeným postupom číslo k. Ako sme dokázali už skôr, rozdiel $R = B - C$ nikdy nemení svoju hodnotu. Keďže na začiatku bola jeho hodnota $(27^2 + 1)/2 = 365$, musí byť rovnaká aj teraz, čiže

$$365 = B - C = (\underbrace{365 + 365 + \cdots + 365}_{\text{364-krát}} + k) - (\underbrace{365 + 365 + \cdots + 365}_{\text{364-krát}}) = k.$$

Teda na poslednom políčku muselo pri uvedenom postupe vzniknúť číslo 365 a dostali sme priamo požadovanú tabuľku.

Záver. Tabuľku, v ktorej sa všetky čísla rovnajú 365, možno dostať pre všetky párne n a pre $n = 27$.

A – III – 4

Podľa známeho vzťahu pre rozklad rozdielu dvoch tretích mocnín na súčin máme

$$27^n - n^{27} = (3^n)^3 - (n^9)^3 = (3^n - n^9)(9^n + 3^n \cdot n^9 + n^{18}).$$

Druhá zátvorka je zrejme väčšia ako 1. Stačí teda dokázať, že prvá zátvorka nie je nikdy rovná 1.

Najprv matematickou indukciou dokážeme, že pre $n \geqq 30$ je $3^n > n^9 + 1$.

1. krok. Pre $n = 30$ máme

$$3^{30} = 3^{10} \cdot (3^5)^4 > 3^{10} \cdot (2 \cdot 10^2)^4 = 3^9 \cdot 48 \cdot 10^8 > 3^9(10^9 + 1) > 30^9 + 1.$$

2. krok. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre hodnotu $n = k$, pričom $k \geqq 30$. Máme teda $3^k > k^9 + 1$. Potom

$$3^{k+1} = 3 \cdot 3^k > 3 \cdot (k^9 + 1) = 3k^9 + 3 = (\sqrt[9]{3}k)^9 + 3 > (k + 1)^9 + 3 > (k + 1)^9 + 1,$$

čiže tvrdenie platí aj pre hodnotu $n = k + 1$. Pri úprave sme okrem indukčného predpokladu použili nerovnosť $\sqrt[9]{3}k > k + 1$. Tá naozaj platí, lebo

$$1{,}1^9 = (1{,}1^3)^3 = 1{,}331^3 < 1{,}4^3 = 2{,}744 < 3,$$

a teda $\sqrt[9]{3}k > 1{,}1k > k + 1$ (keďže $k \geqq 30$).

Ostáva dokázať, že $V = 3^n - n^9 \neq 1$ aj pre $n < 30$. Nebolo by ťažké pre každé zostávajúce n hodnotu V priamo vypočítať[6]. Uvedieme však rýchlejší postup používajúc zvyšky po delení rôznymi číslami.

Ak n je nepárne, tak V je rozdielom dvoch nepárnych čísel, teda párne, a preto rôzne od 1.

Ak n je deliteľné tromi, tak $3 \mid 3^n$ a súčasne $3 \mid n^9$, čiže aj V je deliteľné tromi, a preto rôzne od 1.

Ak n dáva po delení tromi zvyšok 1, tak $3 \mid 3^n$ a n^9 dáva po delení tromi zvyšok 1. Teda $V = 3^n - n^9$ dáva zvyšok 2 a je rôzne od 1.

Ostáva preveriť čísla, ktoré sú párne a dávajú zvyšok 2 po delení tromi, t. j. čísla z množiny $\{2, 8, 14, 20, 26\}$. Pre $n = 2$ a pre $n = 8$ je zrejme $3^n - n^9 < 0$. Podobne

$$3^{14} - 14^9 = 9^7 - 14^9 < 0,$$
$$3^{20} - 20^9 = 9^{10} - 2^9 \cdot 10^9 < 10^{10} - 512 \cdot 10^9 < 0.$$

Napokon aj $3^{26} - 26^9 \neq 1$, lebo zápis čísla $3^{26} = 81^6 \cdot 9$ končí cifrou 9, zápis čísla 26^9 končí cifrou 6, teda číslo $3^{26} - 26^9$ dáva po delení desiatimi zvyšok 3 a je rôzne od 1.

A – III – 5

Pokúsme sa dokazovanú nerovnosť zapísať ako súčet niekoľkých nerovností, o ktorých vieme, že platia. Podľa AG-nerovnosti[7] pre ľubovoľné prirodzené čísla r, s platí

$$\frac{rx^k + sy^k + sz^k}{r + 2s} \geqq \sqrt[r+2s]{(x^k)^r (y^k)^s (z^k)^s} = \sqrt[r+2s]{x^{k(r-s)} (xyz)^{ks}}, \tag{1}$$

a keďže podľa zadania je $xyz = 1$, máme

$$rx^k + sy^k + sz^k \geqq (r + 2s) x^{\frac{(r-s)k}{r+2s}}. \tag{2}$$

[6] Dá sa ukázať, že pre $n \geqq 28$ je $V > 1$, pre $n = 27$ je $V = 0$, pre $2 \leqq n \leqq 26$ je $V < 0$ a pre $n = 1$ je $V = 2$.

[7] AG-nerovnosť je skrátené označenie známej nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom. Podľa nej pre ľubovoľné prirodzené číslo n a nezáporné čísla $a_1, \ldots, a_n$ platí

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}.$$

Cyklickou zámenou dostaneme podobné nerovnosti

$$sx^k + ry^k + sz^k \geqq (r+2s)y^{\frac{(r-s)k}{r+2s}} \qquad \text{a} \qquad sx^k + sy^k + rz^k \geqq (r+2s)z^{\frac{(r-s)k}{r+2s}}. \tag{3}$$

Hľadajme také prirodzené čísla r, s, aby súčtom uvedených troch nerovností bola dokazovaná nerovnosť, resp. nejaký jej násobok. Keďže na pravej strane potrebujeme dostať m-té mocniny, nutnou podmienkou je rovnosť

$$m = \frac{(r-s)k}{r+2s}. \tag{4}$$

Po sčítaní nerovností budú koeficienty na ľavej aj pravej strane rovné $r+2s$, čo nám vyhovuje (po vydelení výrazom $r+2s$ dostaneme priamo dokazovanú nerovnosť). Stačí teda splniť rovnosť (4). Tá platí napríklad pre hodnoty $m = r - s$, $k = r + 2s$, odkiaľ ľahko vyjadríme $r = \frac{1}{3}(2m+k)$, $s = \frac{1}{3}(k-m)$. Keďže však chceme, aby r, s boli prirodzené[8], zoberme hodnoty $r = 2m + k$, $s = k - m$ (keďže k, m sú prirodzené čísla a $k > m$, sú takéto r, s naozaj prirodzené). Pre ne platí

$$\frac{(r-s)k}{r+2s} = \frac{3m \cdot k}{3k} = m,$$

teda tiež spĺňajú (4). Sčítaním troch nerovností (2), (3) pre uvedené hodnoty r, s tak dostaneme

$$(r+2s)(x^k + y^k + z^k) \geqq (r+2s)(x^m + y^m + z^m),$$

Z čoho už priamo vyplýva zadaná nerovnosť.

Iné riešenie. Podľa známej nerovnosti medzi mocninovými priemermi platí

$$\sqrt[k]{\frac{x^k + y^k + z^k}{3}} \geqq \sqrt[m]{\frac{x^m + y^m + z^m}{3}},$$

Z čoho po jednoduchých ekvivalentných úpravách dostávame

$$x^k + y^k + z^k \geqq (x^m + y^m + z^m)^{\frac{k}{m}} \cdot 3^{1-\frac{k}{m}}. \tag{5}$$

Podľa AG-nerovnosti (s využitím zadaného predpokladu $xyz = 1$) platí

$$x^m + y^m + z^m \geqq 3\sqrt[3]{x^m y^m z^m} = 3,$$

a keďže $k > m$, čiže $\frac{k}{m} - 1 > 0$, tak aj

$$(x^m + y^m + z^m)^{\frac{k}{m}-1} \geqq 3^{\frac{k}{m}-1}.$$

[8] V skutočnosti to nepotrebujeme, nerovnosť (1) totiž podľa všeobecnejšie sformulovanej AG-nerovnosti platí pre ľubovoľné kladné reálne čísla r, s.

Odtiaľ

$$(x^m + y^m + z^m)^{\frac{k}{m}} \cdot 3^{1-\frac{k}{m}} \geqq x^m + y^m + z^m,$$

čo spolu s (5) dáva dokazovanú nerovnosť.

A – III – 6

Zrejme stačí zaoberať sa len trojuholníkmi, ktorých strany a, b majú rôzne dĺžky.

a) Podľa známych vyjadrení dĺžok ťažníc pomocou dĺžok strán (ktoré možno ľahko odvodiť pomocou kosínusových viet) platí

$$t_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}, \qquad t_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}. \tag{1}$$

Takže priamym dosadením dostávame

$$\frac{t_a^2 - t_b^2}{b^2 - a^2} = \frac{(2b^2 + 2c^2 - a^2) - (2a^2 + 2c^2 - b^2)}{4(b^2 - a^2)} = \frac{3b^2 - 3a^2}{4(b^2 - a^2)} = \frac{3}{4}.$$

Teda jediná možná hodnota prvého výrazu je $\frac{3}{4}$.

b) Skúmaním rôznych „degenerovaných“ prípadov najskôr uhádneme výsledok. Napríklad ak $b = 1$ a bod B sa nachádza „blízko“ stredu strany AC, tak $t_a \approx \frac{3}{4}$, $t_b \approx 0$, $a \approx \frac{1}{2}$, čiže

$$\frac{t_a - t_b}{b - a} \approx \frac{\frac{3}{4} - 0}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3}{2}.$$

Ak $b = 1$ a bod B sa nachádza „blízko“ bodu C, tak $t_a \approx 1$, $t_b \approx \frac{1}{2}$, $a \approx 0$, čiže

$$\frac{t_a - t_b}{b - a} \approx \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - 0} = \frac{1}{2}.$$

Skúsme teda dokázať, že

$$\frac{1}{2} < \frac{t_a - t_b}{b - a} < \frac{3}{2}. \tag{2}$$

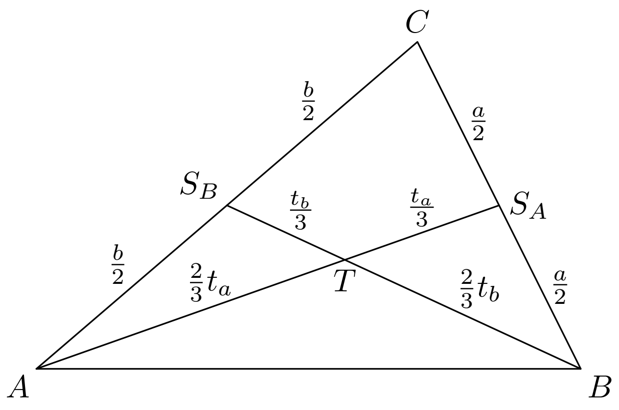
S použitím výsledku časti a) máme

$$\frac{t_a - t_b}{b - a} = \frac{t_a^2 - t_b^2}{t_a + t_b} \cdot \frac{b + a}{b^2 - a^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{a + b}{t_a + t_b}.$$

Nerovnosti (2) sú preto ekvivalentné s nerovnosťami

$$\frac{2}{3} < \frac{a + b}{t_a + t_b} < 2, \tag{3}$$

ktoré ľahko dokážeme pomocou trojuholníkových nerovností.



Obr. 36

Naozaj, ak označíme S_A, S_B postupne stredy strán BC, AC, tak z trojuholníkových nerovností v trojuholníkoch ACS_A, BCS_B máme (obr. 36)

$$b + \frac{a}{2} > t_a, \qquad a + \frac{b}{2} > t_b.$$

Odtiaľ sčítaním dostaneme $\frac{3}{2}(a+b) > t_a + t_b$, čo je ekvivalentné s prvou nerovnosťou v (3).

A ak označíme T ťažisko trojuholníka ABC, ktoré rozdeľuje každú ťažnicu v známom pomere (obr. 36), tak z trojuholníkových nerovností v trojuholníkoch ATS_B, BTS_A máme

$$\frac{2}{3}t_a + \frac{t_b}{3} > \frac{b}{2}, \qquad \frac{2}{3}t_b + \frac{t_a}{3} > \frac{a}{2}.$$

Odtiaľ sčítaním dostaneme $t_a + t_b > \frac{1}{2}(a+b)$, čo je ekvivalentné s druhou nerovnosťou v (3).

Dokázali sme teda, že platí (2). Aby sme dokončili riešenie úlohy, musíme ešte ukázať, že zadaný výraz môže nadobúdať všetky možné hodnoty z intervalu $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Na to stačí uvažovať trojuholníky so stranami dĺžok $a = 1$, $b = 2$, $c \in (1, 3)$. Potom podľa (1) máme

$$\frac{t_a - t_b}{b - a} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{8 + 2c^2 - 1} - \frac{1}{2}\sqrt{2 + 2c^2 - 4}}{2 - 1} = \frac{\sqrt{2c^2 + 7} - \sqrt{2c^2 - 2}}{2} = \\ = \frac{9/2}{\sqrt{2c^2 + 7} + \sqrt{2c^2 - 2}} \tag{4}$$

Tento výraz nadobúda pre $c = 1$ hodnotu $\frac{3}{2}$ a pre $c = 3$ hodnotu $\frac{1}{2}$. Ak ho teda chápeme ako funkciu premennej c, musí na intervale $(1, 3)$ nadobúdať všetky hodnoty z intervalu $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. To vyplýva zo spojitosti uvedenej funkcie. Z jej vyjadrenia dokonca vidíme, že je na skúmanom intervale klesajúca.

Záver. Druhý výraz môže nadobúdať ľubovoľnú hodnotu z intervalu $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

Poznámka. To, že výraz (4) nadobúda pre $c \in (1, 3)$ všetky hodnoty z intervalu $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, možno dokázať aj bez použitia vedomostí o spojitých funkciách. Stačí ukázať, že pre každé $h \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ má rovnica

$$\frac{\sqrt{2c^2+7}-\sqrt{2c^2-2}}{2}=h$$

s neznámou c riešenie v intervale $(1,3)$. Ľahko možno vyjadriť riešenie

$$c=\sqrt{1+\frac{(9-4h^2)^2}{32h^2}}.$$

Tento výraz s rastúcim h pre $h \in \langle \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle$ klesá a keďže pre hodnoty $h=\frac{1}{2}$, $h=\frac{3}{2}$ nadobúda postupne hodnoty $c=3$, $c=1$, bude pre $h \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ riešenie c vždy v intervale $(1,3)$.

Prípravné sústredenia pred IMO a MEMO

Pred medzinárodnou matematickou olympiádou (IMO) a stredoeurópskou matematickou olympiádou (MEMO) sa každoročne koná jedno výberové a jedno prípravné sústredenie pre najlepších riešiteľov celoštátneho kola MO (CK MO). Od 55. ročníka MO sa navyše každoročne koná aj spoločné prípravné sústredenie českého a slovenského IMO-družstva.

Po výberovom sústredení SK MO vyberie 6 najlepších študentov do reprezentačného družstva Slovenska pre IMO a určí jedného náhradníka. Spomedzi tých, ktorí sa nedostali na IMO a zároveň nie sú v maturitnom ročníku (t. j. majú možnosť súťažiť v MO aj nasledujúci školský rok), vyberie SK MO najlepších 6 študentov do družstva pre MEMO. Na výberovom sústredení pred IMO sa zúčastnilo 15 súťažiacich, najúspešnejších riešiteľov tretieho kola MO kategórie A. Sústredenie sa konalo v dňoch 24. – 30. 4. 2008 v Bratislave. Úlohy zadávali lektori z FMFI UK Bratislava:

Ondrej Budáč, úlohy 1 – 3,

Michal Prusák, Michal Takács, úlohy 4 – 7,

Mgr. Martin Potočný, úlohy 8 – 11,

Hana Budáčová, úlohy 12 – 15,

Mgr. Peter Novotný, úlohy 16 – 18.

Každý deň študenti riešili sériu troch či štyroch úloh pri podobných podmienkach ako na IMO. V poobedňajších hodinách sa konal spoločný rozbor úloh s lektorom. Na konci sústredenia sa získané body za jednotlivé dni sčítali a s prihliadnutím na výsledky tretieho kola MO boli vybrané šesťčlenné družstvá pre účasť na IMO a MEMO.

Výsledky sústredenia:

Michal Spišiak	44,5
Vladislav Ujházi	39
Tomáš Kocák	36
Miroslav Baláž	31,5
Albert Herencsár	29
Jakub Konečný	28,5
Filip Sládek	26
Martin Bachratý	22
Peter Csiba	22
Michal Hagara	21,5
Eduard Eiben	18
Ladislav Bačo	17,5
Tomáš Szaniszlo	13,5
Martin Melicherčík	11,5
Lenka Matejovičová	9

Poradie po zohľadnení výsledkov CKMO:

1.	*Michal Spišiak*	72,5
2.	*Vladislav Ujházi*	72
3.	*Tomáš Kocák*	63
4.	*Miroslav Baláž*	57,5
5.	*Albert Herencsár*	51
6.	*Filip Sládek*	50
7.	*Jakub Konečný*	49,5
8.	*Martin Bachratý*	46
9.	*Ladislav Bačo*	45,5
	Michal Hagara	45,5
11.	*Peter Csiba*	45
12.	*Martin Melicherčík*	40,5
13.	*Tomáš Szaniszlo*	37,5
14.	*Eduard Eiben*	37
15.	*Lenka Matejovičová*	27

Prípravné sústredenie sa konalo v dňoch 31. 5. – 6. 6. 2008 v Bratislave. Sústredenie bolo zamerané obzvlášť na prípravu reprezentačných družstiev na IMO a MEMO. Lektormi boli:

Mgr. Peter Novotný, FMFI UK Bratislava (algebra),
RNDr. Tomáš Jurík, FMFI UK Bratislava (geometria, nerovnosti),
Mgr. Ján Mazák, FMFI UK Bratislava (geometria),
Mgr. Juraj Földes, University of Minnesota, USA (kombinatorika),
Ondrej Budáč, FMFI UK Bratislava (teória čísel).

V poradí druhé spoločné sústredenie českého a slovenského družstva sa uskutočnilo v dňoch 15. – 20. 6. 2008 v ČR v Uherskom Hradišti v regionálnom vzdelávacom stredisku Eduha. Sústredenie sa uskutočnilo pod záštitou Společnosti Otakara Borůvky a bolo finančne zabezpečené z neštátnych prostriedkov. Pedagogický dozor slovenským (a na mieste aj českým) študentom robili Peter Novotný a Tomáš Jurík z FMFI UK Bratislava. Odborné prednášky viedli

doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., MÚ AV ČR, Brno (teória čísel),
RNDr. Pavel Calábek, CSc., PF UP, Olomouc (algebra),
Mgr. Martin Panák, PhD., MÚ AV ČR, Brno (kombinatorika),
RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., PF UP, Olomouc (syntetická planimetria).

Zadania súťažných úloh výberového sústredenia pred IMO

1. Body v rovine s celočíselnými súradnicami sú ofarbené troma farbami, pričom každá farba je použitá aspoň raz. Dokážte, že vieme nájsť pravouhlý trojuholník, ktorého vrcholy majú celočíselné súradnice a sú rôznych farieb.

2. Nájdite všetky štvorice k, l, m, n prirodzených čísel, ktoré spĺňajú

$$(1 + n^k)^l = 1 + n^m.$$

3. V trojuholníku ABC označme P priesečník osi uhla BAC so stranou BC a Q priesečník osi uhla ABC so stranou AC. Označme M priesečník osi uhla

BAC a kružnice opísanej trojuholníku ABC (rôzny od A) a N priesečník osi uhla ABC a kružnice opísanej ABC (rôzny od B). Ďalej na priamke AB zvoľme body D, E tak, aby D ležal na polpriamke opačnej k AB a E na polpriamke opačnej k BA a zároveň $|AD| = |AC|$ a $|BE| = |BC|$. Ďalej nech U je stred kružnice opísanej trojuholníku BEM a V je stred kružnice opísanej trojuholníku ADN. Označme X priesečník AU a BV. Ukážte, že CX je kolmá na PQ.

4. Máme daných päť reálnych čísel. Urobíme rozdiel súčtu ľubovoľných troch z nich a súčtu zvyšných dvoch. Tento rozdiel je vždy kladné číslo. Dokážte, že súčin všetkých takýchto desiatich rozdielov je nanajvýš súčin druhých mocnín týchto piatich čísel.

5. Nech b, n sú prirodzené čísla väčšie ako 1. Pre každé $k > 1$ existuje celé číslo a_k také, že $b - a_k^n$ je deliteľné číslom k. Dokážte, že b je n-tou mocninou celého čísla.

6. Daný je rovnoramenný trojuholník ABC so základňou BC. Bod M je stredom strany BC. Nech X je bod na kratšom oblúku MA kružnice opísanej trojuholníku ABM. Nech T je bod v časti roviny určenej uhlom BMA taký, že $|\angle TMX| = 90°$ a $|TX| = |BX|$. Dokážte, že $|\angle MTB| - |\angle CTM|$ nezáleží na voľbe bodu X.

7. Majme $3n$ čísel, označme ich $a_1, a_2, \dots, a_{3n}$. Po *pozoruhodnom* premiešaní budú čísla v poradí

$$a_3, a_6, \dots, a_{3n}, a_2, a_5, \dots, a_{3n-1}, a_1, a_4, \dots, a_{3n-2}.$$

Začnime s číslami $1, 2, 3, \dots, 192$. Môžeme po konečnom počte pozoruhodných premiešaní dostať čísla v poradí $192, 191, 190, \dots, 1$?

8. Uhlopriečky daného lichobežníka $ABCD$ sa pretínajú v bode P. Bod Q leží medzi rovnobežnými priamkami BC a AD tak, že $|\angle AQD| = |\angle CQB|$ a body P a Q ležia v opačných polrovinách určených priamkou CD. Dokážte, že $|\angle BQP| = |\angle DAQ|$.

9. Nech S je konečná množina bodov v rovine takých, že žiadne tri z nich neležia na jednej priamke. Pre každý konvexný mnohouholník P, ktorého vrcholy patria do S, nech $a(P)$ je počet jeho vrcholov a nech $b(P)$ je počet bodov z S ležiacich zvonku P. Dokážte, že pre každé reálne číslo x platí

$$\sum_P x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} = 1,$$

kde suma sa berie cez všetky konvexné mnohouholníky s vrcholmi v S.
Poznámka. Úsečka, bod a prázdna množina sa považujú za konvexný dvoj-, jedno- a nulauholník.

10. V trojuholníku ABC platí $|\angle ACB| < |\angle BAC| < \pi/2$ a bod D leží na strane AC tak, že $|BD| = |BA|$. Kružnica vpísaná trojuholníku ABC sa dotýka strany AB v bode K a strany AC v bode L. Bod J je stred kružnice vpísanej trojuholníku BCD. Dokážte, že priamka KL rozpoľuje úsečku AJ.

11. Uvažujme funkcie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vyhovujúce podmienke

$$f(m+n) \geqq f(m) + f(f(n)) - 1$$

pre všetky $m, n \in \mathbb{N}$. Nájdite všetky možné hodnoty $f(2007)$.

12. Nech $ABCD$ je rovnobežník, pričom žiadny z jeho vnútorných uhlov nemá veľkosť $60°$. Nájdite všetky dvojice bodov E a F také, že trojuholníky AEB a BFC sú rovnoramenné so základňami AB a BC a trojuholník DEF je rovnostranný.

13. Vo vrcholoch konvexného mnohouholníka s párnym počtom strán sedia poľovníci. Vnútri mnohouholníka mimo jeho uhlopriečok sa nachádza líška. Poľovníci naraz vystrelia smerom na líšku, ale líška sa uhne a guľky z pušiek letia ďalej a preletia cez strany mnohouholníka. Dokážte, že aspoň jednu stranu netrafí žiadna guľka.

14. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, ktoré pre všetky racionálne čísla x a y spĺňajú nerovnosť

$$|f(x) - f(y)| \leqq (x-y)^2.$$

15. Nech P je množina všetkých prvočísel. Nech M je podmnožina množiny P, ktorá má aspoň tri prvky a navyše pre každú vlastnú konečnú podmnožinu A množiny M patria všetky prvočísla z prvočíselného rozkladu čísla

$$-1 + \prod_{p \in A} p$$

do množiny M. Dokážte, že $M = P$.

16. Polynóm P nepárneho stupňa spĺňa pre každé reálne číslo x rovnosť

$$P(x^2 - 1) = P(x)^2 - 1.$$

Dokážte, že $P(x) = x$ pre každé reálne číslo x.

17. Nech X je množina 10 000 rôznych celých čísel, z ktorých žiadne nie je deliteľné číslom 47. Dokážte, že existuje jej 2008-prvková podmnožina Y taká, že číslo $a-b+c-d+e$ nie je deliteľné číslom 47 pre žiadnu päticu (nie nutne rôznych) čísel $a, b, c, d, e \in Y$.

18. Daný je trojuholník ABC. Kružnica pripísaná ku strane BC má stred J a dotýka sa strany BC v bode A_1 a priamok AC, AB postupne v bodoch B_1, C_1. Predpokladajme, že priamky A_1B_1 a AB sú navzájom kolmé a pretínajú sa v bode D. Nech E je päta kolmice spustenej z bodu C_1 na priamku DJ. Určte veľkosti uhlov BEA_1 a AEB_1.

8. Česko-poľsko-slovenské stretnutie

V rámci záverečnej prípravy pred IMO sa uskutočnilo po ôsmy krát prípravné stretnutie medzi družstvami Českej republiky, Poľska a Slovenska. Jednotlivé krajiny reprezentovali šestice študentov, ktorí si vybojovali vo svojich krajinách účasť na 49. IMO v Madride.

Súťaž sa uskutočnila 22. – 26. 6. v Poľsku v horskej dedinke Zwardoń, ktorá sa nachádza bezprostredne na slovensko-poľskej hranici v Kysuckých Beskydoch. Organizácia a priebeh súťaže zostali nezmenené z predchádzajúcich ročníkov – je prispôsobená štýlu celoštátneho kola našej MO a podmienkam IMO. Súťažiacim boli počas dvoch dní predložené dve trojice súťažných úloh, pričom za každú správnu úlohu mohli získať najviac 7 bodov, t. j. celkove 42 bodov (rovnako ako na IMO). Na každú trojicu úloh mali súťažiaci vymedzené 4,5 hodiny čistého času.

Prehľad výsledkov:

Por.	Meno	Štát	1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$
1.	Jakub Oćwieja	Poľsko	7	7	7	7	7	6	41
2.	Karol Żebrowski	Poľsko	7	7	7	7	7	5	40
3.	Szymon Majewski	Poľsko	2	7	7	7	7	7	37
4.	Jakub Konieczny	Poľsko	7	0	6	7	1	7	28
5.	Jacek Jendrej	Poľsko	0	7	7	7	1	5	27
6.	Radosław Burny	Poľsko	4	0	7	7	7	0	25
7.	Josef Tkadlec	Česká rep.	7	0	0	7	7	1	22
8.	*Michal Spišiak*	Slovensko	0	0	7	7	0	4	18
9.	*Vladislav Ujházi*	Slovensko	0	7	3	7	0	0	17
10.	Miroslav Klimoš	Česká rep.	0	7	0	7	0	2	16
11.	*Miroslav Baláž*	Slovensko	0	0	7	5	0	3	15
	Jan Matějka	Česká rep.	0	7	0	7	0	1	15
	Samuel Říha	Česká rep.	0	7	0	7	1	0	15
14.	*Tomáš Kocák*	Slovensko	2	0	1	7	1	0	11
15.	*Filip Sládek*	Slovensko	0	0	2	7	1	0	10
16.	*Albert Herencsár*	Slovensko	0	0	0	7	0	0	7
	Tomáš Hřebejk	Česká rep.	0	0	0	7	0	0	7
	Jakub Töpfer	Česká rep.	0	0	0	7	0	0	7

Štát	1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$
Česká rep.	7	21	0	42	8	4	82
Poľsko	27	28	41	42	30	30	198
Slovensko	2	7	20	40	2	7	78

Opravu riešení zabezpečila medzinárodná porota, ktorú tvorili RNDr. Karel Horák, CSc., doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc. a RNDr. Jaroslav Švrček, CSc. z Českej republiky, dr. Waldemar Pompe, dr. Jerzy Bednarczuk a Andrzej Grzesik z Poľska a doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc., Mgr. Peter Novotný a Mgr. Erika Trojáková zo Slovenska.

Poľské družstvo preukázalo výraznú prevahu a podobne ako minulý rok obsadilo v poradí prvých šesť priečok. Okrem klasickej súťaže pripravili organizátori na stredu aj súťaž trojčlenných tímov, pričom v každom bol jeden zástupca z každej krajiny. Zadané boli tri úlohy, každá v inom jazyku, a vypracovať riešenia bolo treba tiež v rôznych jazykoch.

Keďže celé podujatie sa konalo na horskej chate, popri matematickom programe účastníci stihli absolvovať viacero príjemných prechádzok (aj keď väčší výlet prekazilo rýchlo sa meniace počasie). Zabudnúť sa nedá najmä na lúky plné lesných jahôd.

V budúcom roku sa spoločné prípravné stretnutie uskutoční na Slovensku.

Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia

Úloha 1.
Určte všetky trojice (x, y, z) kladných reálnych čísel, ktoré sú riešením sústavy rovníc

$$\begin{aligned} 2x^3 &= 2y(x^2+1) - (z^2+1), \\ 2y^4 &= 3z(y^2+1) - 2(x^2+1), \\ 2z^5 &= 4x(z^2+1) - 3(y^2+1). \end{aligned}$$

(Adam Osekowski)

Úloha 2.
Daný je konvexný šesťuholník $ABCDEF$, pričom $|\measuredangle FAB| = |\measuredangle BCD| = |\measuredangle DEF|$ a $|AB| = |BC|$, $|CD| = |DE|$, $|EF| = |FA|$. Dokážte, že priamky AD, BE a CF sa pretínajú v jednom bode.

(Waldemar Pompe)

Úloha 3.
Nájdite všetky prvočísla p, pre ktoré je číslo

$$\binom{p}{1}^2 + \binom{p}{2}^2 + \cdots + \binom{p}{p-1}^2$$

deliteľné číslom p^3.

(Jarosław Wróblewski)

Úloha 4.
Dokážte, že existuje také prirodzené číslo n, že číslo $k^2 + k + n$ nemá žiadneho prvočíselného deliteľa menšieho ako 2008 pre žiadne celé číslo k.

(Jarosław Wróblewski)

Úloha 5.
Daný je pravidelný päťuholník $ABCDE$. Určte najmenšiu hodnotu výrazu

$$\frac{|PA|+|PB|}{|PC|+|PD|+|PE|},$$

pričom P je ľubovoľný bod ležiaci v rovine päťuholníka $ABCDE$.

(Waldemar Pompe)

Úloha 6.
Nájdite všetky trojice (k,m,n) prirodzených čísel majúce nasledujúcu vlastnosť: Štvorec s dĺžkou strany m sa dá rozdeliť na niekoľko pravouholníkov s rozmermi $1\times k$ a práve jeden štvorec s dĺžkou strany n.

(Jarosław Wróblewski)

Riešenia úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia

Úloha 1.
Predpokladajme, že trojica (x,y,z) kladných reálnych čísel je riešením zadanej sústavy. Rozoberieme tri prípady podľa toho, ktoré z čísel x, y, z je najmenšie. Ukáže sa, že v každom z týchto prípadov stačí uvažovať len jednu rovnicu sústavy. Viackrát použijeme známu nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom n-tice kladných reálnych čísel[9] (v našom prípade bude $n\in\{2,3,4\}$), v ktorej rovnosť platí práve vtedy, keď je všetkých n čísel rovnakých.

Prípad 1. Ak $x\geqq y$, $z\geqq y$, tak zrejme platia nerovnosti

$$2x^3+(z^2+1)\geqq 2yx^2+(z^2+1)\geqq 2yx^2+2z\geqq 2yx^2+2y=2y(x^2+1),$$

teda $2x^3\geqq 2y(x^2+1)-(z^2+1)$. Pritom rovnosť nastáva len v prípade, keď $2x^3=2yx^2$, $z^2+1=2z$ a $2z=2y$, čiže $x=y$, $z=1$ a $z=y$. Týmto podmienkam, a teda aj prvej rovnici sústavy, vyhovuje jedine trojica $x=y=z=1$. Ľahko overíme, že táto trojica spĺňa aj zvyšné dve rovnice.

Prípad 2. Ak $x\geqq z$, $y\geqq z$, dostávame

$$\begin{aligned}2y^4+2(x^2+1)&\geqq 2y^4+2\cdot 2x=(y^4+y^4+x)+3x\geqq\\&\geqq(y^4+y^2z^2+z)+3z\geqq 3\sqrt[3]{y^6z^3}+3z=3z(y^2+1),\end{aligned}$$

teda $2y^4\geqq 3z(y^2+1)-2(x^2+1)$. Rovnosť nastáva jedine v prípade, keď sú splnené podmienky $x=1$, $y^4=y^2z^2$, $x=z$ a $y^4=y^2z^2=z$. Tomu, čiže aj druhej rovnici sústavy, vyhovuje jedine trojica $x=y=z=1$.

Prípad 3. Ak $y\geqq x$, $z\geqq x$, podobne ako v predošlom prípade máme

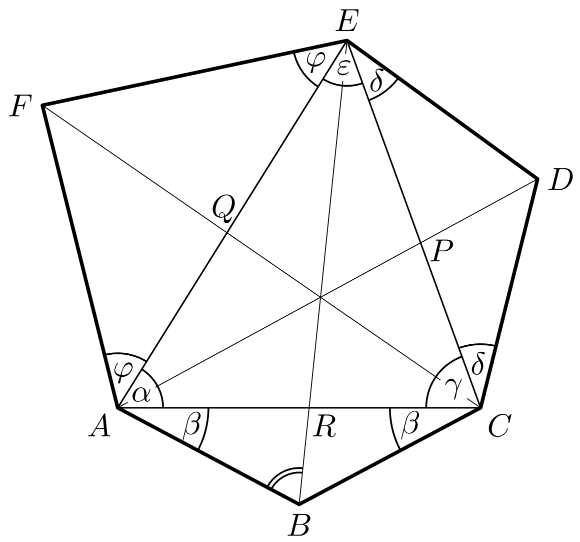
$$\begin{aligned}2z^5+3(y^2+1)&\geqq 2z^5+3\cdot 2y=(z^5+z^5+y+y)+4y\geqq\\&\geqq(z^5+z^3x^2+x+x)+4x\geqq 4\sqrt[4]{z^8x^4}+4x=4x(z^2+1),\end{aligned}$$

[9] Poz. poznámku pod čiarou na str. 75.

teda $2z^5 \geqq 4x(z^2+1) - 3(y^2+1)$. Rovnosť dostaneme iba pri dodržaní podmienok $y = 1$, $z^5 = z^3x^2$, $y = x$ a $z^5 = z^3x^2 = x$. Tretia rovnica sústavy je teda splnená jedine pre trojicu $x = y = z = 1$.

Odpoveď. Jediným riešením sústavy je trojica $(1, 1, 1)$.

Úloha 2.
Označme v trojuholníku ACE veľkosti vnútorných uhlov pri vrcholoch A, C, E postupne α, γ, ε. Trojuholníky ACB, CED, EAF sú podľa zadania rovnoramenné. Označme veľkosti ich vnútorných uhlov pri základniach postupne β, δ, φ (obr. 37). Tvrdenie dokážeme použitím Cèvovej vety. Kvôli tomu označme ešte P, Q, R priesečníky priamok AD, CF, EB postupne so stranami CE, EA, AC trojuholníka ACE.



Obr. 37

Zo sínusovej vety v trojuholníku ABR máme

$$\frac{|AR|}{\sin|\measuredangle ABE|} = \frac{|BR|}{\sin\beta}, \qquad \text{teda} \qquad |AR| = \frac{|BR| \cdot \sin|\measuredangle ABE|}{\sin\beta}. \tag{1}$$

Zo sínusovej vety v trojuholníku ABE máme

$$\frac{|AE|}{\sin|\measuredangle ABE|} = \frac{|BE|}{\sin(\alpha+\beta)}, \qquad \text{teda} \qquad \sin|\measuredangle ABE| = \frac{|AE| \cdot \sin(\alpha+\beta)}{|BE|}.$$

Dosadením do (1) dostávame

$$|AR| = \frac{|BR| \cdot |AE| \cdot \sin(\alpha+\beta)}{|BE| \cdot \sin\beta}.$$

Zrejme analogicky (zo sínusových viet v trojuholníkoch CBR a CBE) možno odvodiť

$$|CR| = \frac{|BR| \cdot |CE| \cdot \sin(\gamma+\beta)}{|BE| \cdot \sin\beta}.$$

Preto

$$\frac{|AR|}{|CR|} = \frac{|AE| \cdot \sin(\alpha + \beta)}{|CE| \cdot \sin(\gamma + \beta)}.$$

Opäť analogicky možno vyjadriť pomery

$$\frac{|CP|}{|EP|} = \frac{|CA| \cdot \sin(\gamma + \delta)}{|EA| \cdot \sin(\varepsilon + \delta)} \qquad \text{a} \qquad \frac{|EQ|}{|AQ|} = \frac{|EC| \cdot \sin(\varepsilon + \varphi)}{|AC| \cdot \sin(\alpha + \varphi)}.$$

Odtiaľ

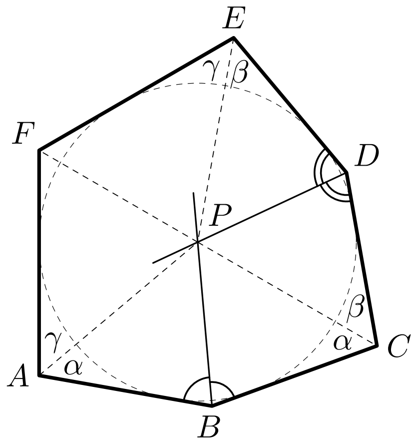
$$\frac{|AR|}{|CR|} \cdot \frac{|CP|}{|EP|} \cdot \frac{|EQ|}{|AQ|} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\gamma + \beta)} \cdot \frac{\sin(\gamma + \delta)}{\sin(\varepsilon + \delta)} \cdot \frac{\sin(\varepsilon + \varphi)}{\sin(\alpha + \varphi)}. \tag{2}$$

Avšak podľa zadania platí $\varphi + \alpha + \beta = \beta + \gamma + \delta = \delta + \varepsilon + \varphi$. Preto

$$\alpha + \beta = \varepsilon + \delta, \quad \gamma + \delta = \alpha + \varphi, \quad \varepsilon + \varphi = \gamma + \beta$$

a súčin (2) je rovný 1. Podľa Cèvovej vety sa teda priamky AD, BE a CF pretínajú v jednom bode.

Iné riešenie. Označme P priesečník osí vnútorných uhlov daného šesťuholníka pri vrcholoch B a D (obr. 38). Dokážeme, že šesťuholníku $ABCDEF$ sa dá vpísať kružnica, ktorej stredom je P. Zadané tvrdenie bude potom vyplývať z Brianchonovej vety[10].



Obr. 38

Z rovnosti $|AB| = |BC|$ vyplýva, že trojuholníky ABP a CBP sú zhodné podľa vety *sus*. Preto $|\measuredangle BAP| = |\measuredangle BCP| = \alpha$. Rovnako sú zhodné trojuholníky CDP a EDP, t. j. $|\measuredangle DCP| = |\measuredangle DEP| = \beta$.

Z uvedených zhodností navyše máme $|AP| = |CP| = |EP|$, odkiaľ spolu so zadanou rovnosťou $|AF| = |EF|$ dostávame podľa vety *sss* zhodnosť trojuholníkov AFP a EFP. Preto os vnútorného uhla pri vrchole F prechádza cez bod P a $|\measuredangle FAP| = |\measuredangle FEP| = \gamma$.

[10] Uvedená veta hovorí, že ak sa strany šesťuholníka $ABCDEF$ dotýkajú jednej kužeľosečky, tak priamky AD, BE a CF sa pretínajú v jednom bode.

Rovnosti $|\measuredangle FAB| = |\measuredangle BCD| = |\measuredangle DEF|$ sú ekvivalentné s rovnosťami $\gamma + \alpha = \alpha + {} + \beta = \beta + \gamma$, z ktorých triviálne vyplýva $\alpha = \beta = \gamma$. Preto aj osi vnútorných uhlov pri vrcholoch A, C a E prechádzajú cez bod P a šesťuholníku $ABCDEF$ sa dá vpísať kružnica so stredom P.

Úloha 3.

Nech $M = \{1, 2, \dots, p-1\}$ je množina všetkých nenulových zvyškov po delení p. Pre každé $k \in M$ je kombinačné číslo

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$$

deliteľné prvočíslom p, lebo všetky činitele súčinu $k!(p-k)!$ v menovateli sú menšie ako p (a teda nesúdeliteľné s p), zatiaľ čo čitateľ $p!$ zrejme prvočíslom p deliteľný je. Každý zo sčítancov súčtu v zadaní je teda deliteľný číslom p^2 a našou úlohou je zistiť, pre ktoré prvočísla p je súčet

$$S = \frac{1}{p^2}\binom{p}{1}^2 + \frac{1}{p^2}\binom{p}{2}^2 + \dots + \frac{1}{p^2}\binom{p}{p-1}^2 \tag{1}$$

deliteľný p.

Pre každé $k \in M$ skúmajme, aký dáva prirodzené číslo

$$a_k = \frac{1}{p^2}\binom{p}{k}^2 = \left(\frac{(p-1)!}{k!(p-k)!}\right)^2 \tag{2}$$

zvyšok po delení p. Keďže pre každé $i = k, k+1, p-1$ máme $p - i \equiv -i \pmod{p}$, tak

$$\begin{aligned}(p-k)! &= (p-k)\,(p-(k+1))\dots(p-(p-1)) \equiv \\ &\equiv (-1)^{p-k}k(k+1)\dots(p-1) \pmod{p}\end{aligned}$$

Z toho úpravou vzťahu (2) dostávame

$$\begin{aligned}((p-1)!)^2 &= a_k(k!(p-k)!)^2 \equiv a_k(k!(-1)^{p-k}k(k+1)\dots(p-1))^2 = \\ &= a_k \cdot k^2((p-1)!)^2 \pmod{p}.\end{aligned}$$

Túto kongruenciu môžeme vydeliť výrazom $((p-1)!)^2$, ktorý je nesúdeliteľný s p. Teda

$$1 \equiv a_k \cdot k^2 \pmod{p}. \tag{3}$$

Ako vieme, ku každému zvyšku $k \in M$ existuje práve jeden zvyšok $z_k \in M$ taký, že $z_k \cdot k \equiv 1 \pmod{p}$; ak navyše $k, l \in M$ sú rôzne, tak aj z_k, z_l sú rôzne[11]. Teda množina

[11] Existencia zvyšku z_k vyplýva z existencie celých čísel a, b takých, že $ak + bp = 1$. Jednoznačnosť je zrejmá: ak $1 \equiv z_k \cdot k \equiv z'_k \cdot k \pmod{p}$, tak vydelením k máme $z_k \equiv z'_k \pmod{p}$. Rôznosť triviálne vyplýva z jednoznačnosti a z vlastnosti $z_{z_k} = k$: ak $z_k = z_l$, tak $k = z_{z_k} = z_{z_l} = l$.

$M' = \{z_1, z_2, \dots, z_{p-1}\}$ má rovnako veľa prvkov ako množina M, a keďže $M' \subset M$, nutne $M' = M$.

Z definície prvku z_k dostávame $1 = 1^2 \equiv (z_k \cdot k)^2 = z_k^2 \cdot k^2 \pmod p$. Spolu s (3) potom $a_k \cdot k^2 \equiv z_k^2 \cdot k^2 \pmod p$ a po vydelení k^2 máme $a_k \equiv z_k^2 \pmod p$. Pre zvyšok súčtu (1) teda platí

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1} \equiv z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_{p-1}^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + (p-1)^2 = \\ = \tfrac{1}{6}p(p-1)(2p-1) \pmod p$$

(využili sme dokázanú množinovú rovnosť $\{z_1, z_2, \dots, z_{p-1}\} = \{1, 2, \dots, p-1\}$ a známy vzorec pre súčet druhých mocnín). Ľahko možno priamym dosadením overiť, že výraz $\frac{1}{6}p(p-1)(2p-1)$ pre $p = 2, 3$ nie je násobkom p. Naopak, každé prvočíslo $p \geqq 5$ je nesúdeliteľné s číslom 6, čiže p je deliteľom čísla $p \cdot \frac{1}{6}(p-1)(2p-1)$.

Odpoveď. Zadaný súčet je deliteľný číslom p^3 pre všetky prvočísla väčšie ako 5.

Úloha 4.
Nech p je dané prvočíslo. Skúmajme, aký zvyšok po delení p môže dávať číslo k^2+k. Na to stačí za k dosadiť čísla 0, 1, ..., $p-1$, ďalej sa už budú zvyšky periodicky opakovať. Pre $p = 2, 3, 5, 7$ dostaneme zvyšky uvedené v tabuľke.

$p \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
2	0	0					
3	0	2	0				
5	0	2	1	2	0		
7	0	2	6	5	6	2	0

Vidíme, že v postupnosti zvyškov sa niektorý zvyšok neobjaví. Napríklad pre $p = 2$ nedáva $k^2 + k$ nikdy zvyšok 1, pre $p = 3$ nedostaneme zvyšok 1, pre $p = 5$ zvyšok 3 ani 4, atď. Aby sme to dokázali pre všeobecné p, stačí overiť, že niektorý zvyšok sa v postupnosti objaví aspoň dvakrát. Počet rôznych zvyškov je totiž p a dĺžka postupnosti je tiež p, teda akonáhle sa v postupnosti nejaký zvyšok zopakuje, nebude už v nej dosť miesta pre všetky rôzne zvyšky.

Opakujúcim sa zvyškom je napríklad 0, platí totiž

$$0^2 + 0 \equiv 0 \pmod p \qquad \text{aj} \qquad (p-1)^2 + (p-1) = p^2 - p \equiv 0 \pmod p,$$

čiže zvyšok 0 dostaneme pre $k = 0$ aj pre $k = p - 1$.

Nech $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ je množina všetkých prvočísel menších ako 2008. Pre každé $j = 1, 2, \dots, m$ označme r_{p_j} ľubovoľný zo zvyškov po delení prvočíslom p_j, pre ktorý $k^2 + k \not\equiv r_{p_j} \pmod{p_j}$ pre všetky celé čísla k (už sme dokázali, že taký zvyšok existuje). Aby sme vyhoveli zadaniu, stačí zvoliť n, ktoré spĺňa

$$\begin{aligned} n &\equiv -r_{p_1} \pmod{p_1}, \\ n &\equiv -r_{p_2} \pmod{p_2}, \\ &\vdots \\ n &\equiv -r_{p_m} \pmod{p_m}, \end{aligned}$$

potom totiž $k^2 + k + n \equiv k^2 + k - r_{p_j} \not\equiv 0 \pmod{p_j}$ pre všetky $j = 1, 2, \dots, m$. Existencia požadovaného n už priamo vyplýva z čínskej zvyškovej vety[12], keďže prvočísla $p_1, p_2, \dots, p_m$ sú navzájom nesúdeliteľné.

Úloha 5.

Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že pravidelný päťuholník $ABCDE$ má dĺžku strany 1. Potom každá z jeho uhlopriečok má dĺžku[13]

$$u = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Použitím Ptolemaiovej nerovnosti[14] pre štvoruholníky $APBE$, $APBD$, $APBC$ (obr. 39), resp. príslušné štvorice bodov, pokiaľ body v uvedenom poradí netvoria štvoruholníky, dostávame

$$\begin{aligned} |PA| \cdot u + |PB| \cdot 1 &\geqq 1 \cdot |PE|, \\ |PA| \cdot u + |PB| \cdot u &\geqq 1 \cdot |PD|, \\ |PA| \cdot 1 + |PB| \cdot u &\geqq 1 \cdot |PC|. \end{aligned} \tag{1}$$

Sčítaním týchto nerovností už získame priamo dolné ohraničenie pre výraz zo zadania:

$$(|PA| + |PB|) \cdot (2u + 1) \geqq |PC| + |PD| + |PE|,$$

odkiaľ

$$\frac{|PA| + |PB|}{|PC| + |PD| + |PE|} \geqq \frac{1}{2u + 1}. \tag{2}$$

---

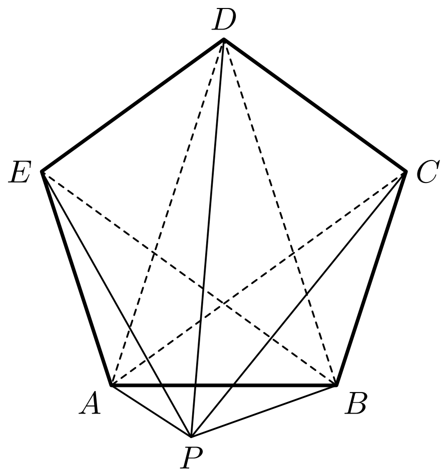
[12] Podľa nej, ak $q_1, \dots, q_m$ sú navzájom nesúdeliteľné čísla a $a_1, \dots, a_m$ sú ľubovoľné celé čísla, tak existuje celé číslo x spĺňajúce

$$x \equiv a_1 \pmod{q_1}, \quad x \equiv a_2 \pmod{q_2}, \quad \dots, \quad x \equiv a_m \pmod{q_m}.$$

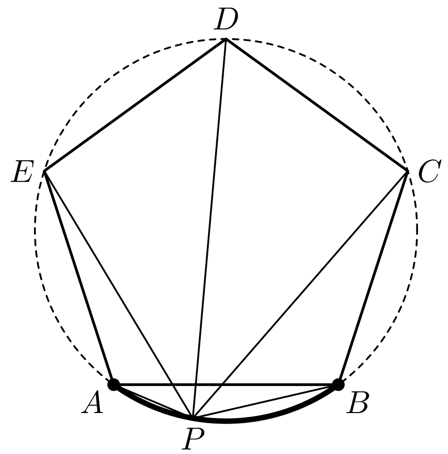
Túto vetu možno jednoducho dokázať priamou konštrukciou x: Prvú kongruenciu spĺňa $x = kq_1 + a_1$ pre ľubovoľné celé k. Ak za k dosadíme postupne $0, 1, \dots, q_2 - 1$, pre x dostaneme q_2 rôznych zvyškov po delení q_2, jeden z nich $k'q_1 + a_1$ teda bude rovný a_2. Čiže aby sme splnili aj druhú kongruenciu, stačí zvoliť $x = (k' + lq_2)q_1 + a_1$ pre ľubovoľné celé l. Za l dosadíme postupne $0, 1, \dots, q_3 - 1$, dostaneme q_3 rôznych zvyškov po delení q_3, jeden z nich bude rovný a_3, atď.

[13] Dĺžku uhlopriečky u pravidelného päťuholníka $ABCDE$ so stranou dĺžky 1 možno jednoducho vypočítať napríklad z podobnosti rovnoramenných trojuholníkov CAB a DEX, kde X je priesečník uhlopriečok AD a EC. Totiž $ABCX$ je kosoštvorec a teda $|EX| = u - 1$, čiže $(u - 1) : 1 = 1 : u$.

[14] Ak X, Y, Z, W sú ľubovoľné štyri body v rovine, tak podľa Ptolemaiovej nerovnosti platí $|XY| \cdot |ZW| + |YZ| \cdot |WX| \geqq |XZ| \cdot |YW|$, pričom rovnosť podľa Ptolemaiovej vety platí práve vtedy, keď body X, Y, Z, W ležia (v tomto poradí) na jednej kružnici. Ak $XYZW$ je štvoruholník, tak Ptolemaiova nerovnosť (resp. veta) hovorí, že súčet súčinov dĺžok protiľahlých strán nie je menší ako súčin dĺžok uhlopriečok, pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď štvoruholník $XYZW$ je tetivový.



Obr. 39



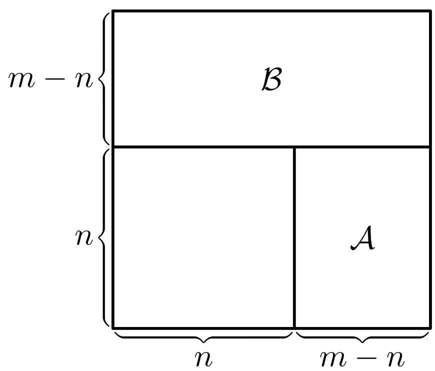
Obr. 40

Pritom rovnosť vo všetkých nerovnostiach v (1), čiže aj v (2), platí práve vtedy, keď sú štvoruholníky $APBE$, $APBD$, $APBC$ tetivové (pripúšťa sa aj možnosť $P = A$, resp. $P = B$), t. j. keď bod P leží na kratšom oblúku AB kružnice opísanej päťuholníku $ABCDE$ (obr. 40). Najmenšia možná hodnota zadaného výrazu je preto

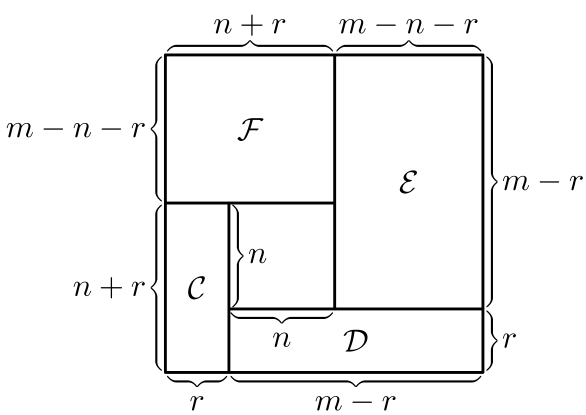
$$\frac{1}{2u+1} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1} = \frac{1}{\sqrt{5}+2} = \sqrt{5} - 2.$$

Úloha 6.

Zrejme každý pravouholník, ktorého dĺžka aspoň jednej strany je násobkom k, sa dá rozdeliť na pravouholníky rozmerov $1 \times k$. Pokúsme sa teda rozdeliť štvorec $m \times m$ na jeden štvorec $n \times n$ a niekoľko pravouholníkov s uvedenou vlastnosťou. Samozrejme, zmysel má zaoberať sa iba prípadom $m \geqq n$.



Obr. 41a



Obr. 41b

Ak $k \mid m-n$, môžeme štvorec $m \times m$ rozdeliť tak, ako je znázornené na obr. 41a, oba pravouholníky $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ totiž majú jednu stranu dĺžky $m-n$, ktorá je násobkom k.

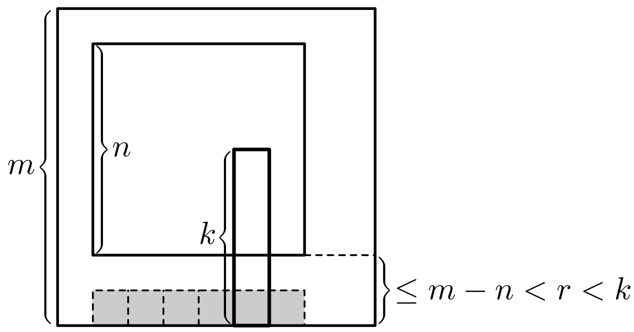
Ak $k \mid m+n$ a $n+r \leqq m$, pričom r je zvyšok, ktorý dáva číslo m po delení k, dá sa štvorec $m \times m$ rozdeliť tak, ako na obr. 41b. Pravouholníky $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ majú jednu stranu dĺžky $m-r$, ktorá je násobkom k. Podmienka $k \mid m+n$ zabezpečuje, že násobkom k je aj číslo $n+r$, t. j. dĺžka jednej zo strán v pravouholníkoch $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$. Vďaka nerovnosti $n+r \leqq m$ majú pravouholníky $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ stranu nezápornej dĺžky $m-n-r$, uvedené rozdelenie teda naozaj je možné (strany dĺžky 0 sú povolené, v takom prípade jednoducho na pokrytie degenerovaného pravouholníka rozmerov $0 \times l$ nepotrebujeme žiadny pravouholník $1 \times k$).

Takže aby trojica (k, m, n), pričom $m \geqq n$, vyhovovala zadaniu, stačí, aby bola splnená aspoň jedna z podmienok

(a) $k \mid m-n$;

(b) $k \mid m+n$ a súčasne $n+r \leqq m$, kde r je zvyšok, ktorý dáva číslo m po delení k.

Ukážeme, že tieto podmienky sú zároveň nutné. Najskôr dokážeme, že ak pre trojicu (k, m, n), pričom $m > n$, existuje vyhovujúce rozdelenie, tak $n+r \leqq m$ (to pri $m > n$ triviálne platí, aj keď je splnená podmienka (a), nemusíme teda rozlišovať dva prípady). Predpokladajme sporom, že máme vyhovujúce rozdelenie a pritom $n+r > m$. Bez ujmy na všeobecnosti nech štvorec $n \times n$ sa nedotýka spodnej strany štvorca $m \times m$ (obr. 42). Keďže $m-n < r < k$, všetky jednotkové štvorčeky dotýkajúce sa priemetu štvorca $n \times n$ na spodnú stranu štvorca $m \times m$ (na obr. 42 znázornené sivou farbou) musia byť pokryté „ležiacimi“ pravouholníkmi $1 \times k$ (t. j. takými, ktoré majú dlhšiu stranu rovnobežnú so spodnou stranou štvorca $m \times m$); „stojace“ pravouholníky $1 \times k$ ich nemôžu pokrývať, lebo by mali spoločný prienik so štvorcom $n \times n$.



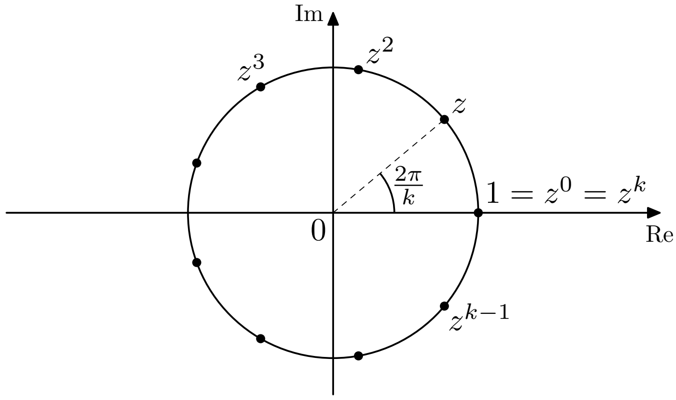
Obr. 42

Nech p je počet „ležiacich“ pravouholníkov $1 \times k$ pokrývajúcich spomenutých n sivých jednotkových štvorčekov. Keďže tieto pravouholníky pokrývajú len štvorčeky pri spodnej strane štvorca $m \times m$ a zároveň pokrývajú minimálne n sivých jednotkových štvorčekov, platia nerovnosti $n \leqq pk \leqq m$. Spojením s nerovnosťou $n+r > m$ dostávame

$$m-r < pk \leqq m,$$

čo je v spore s tým, že r je zvyšok, ktorý dáva m po delení k (medzi číslami $m-r$ a m nemôže ležať žiadny násobok čísla k).

Ostáva dokázať, že $k \mid m-n$ alebo $k \mid m+n$. Hlavná myšlienka bude nasledovná. Do každého jednotkového štvorčeka napíšeme jedno číslo. Pritom celé očíslovanie urobíme tak, aby v každom pravouholníku $1\times k$ bol súčet čísel rovný 0. To znamená, že v každom vyhovujúcom rozdelení bude musieť byť súčet všetkých čísel vo štvorci $m \times m$ rovnaký ako súčet čísel v menšom štvorci $n \times n$. Porovnaním oboch súčtov stanovíme nutné podmienky pre k, m a n.

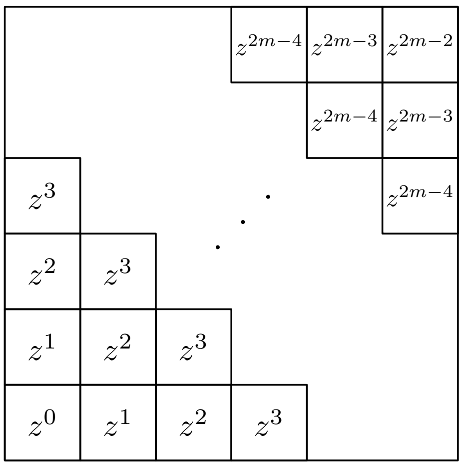


Obr. 43

Výhodné bude očíslovanie pomocou komplexných čísel. Nech $z = \cos\frac{2\pi}{k} + i\sin\frac{2\pi}{k}$. Teda z je k-ta komplexná odmocnina z čísla 1 s najmenším uhlom (obr. 43). Pritom

$$z^0 + z^1 + \cdots + z^{k-1} = \frac{z^k - 1}{z-1} = \frac{0}{z-1} = 0. \tag{1}$$

Očíslujme štvorčeky tak, ako je naznačené na obr. 44, t. j. ak štvorec $m\times m$ je umiestnený do prvého kvadrantu súradnicovej sústavy s vrcholom v počiatku, tak do štvorčeka, ktorého ľavý dolný vrchol má súradnice (x, y), napíšeme číslo z^{x+y}.



Obr. 44

Uvažujme ľubovoľný pravouholník $1 \times k$. Nech v jeho štvorčeku s najmenšou x-ovou (ak sa jedná o „ležiaci“ pravouholník), resp. najmenšou y-ovou (ak je to „stojaci“

pravouholník) je napísané číslo z^t. Potom súčet všetkých čísel v ňom napísaných je (s využitím (1))

$$z^t + z^{t+1} + \cdots + z^{t+k-1} = z^t(z^0 + z^1 + \cdots + z^{k-1}) = 0,$$

teda očíslovanie spĺňa požadovanú podmienku.

Súčet čísel v ľubovoľnom štvorci $n \times n$, ktorého ľavý dolný štvorček má číslo z^t, je rovný (sčitujúc po jednotlivých riadkoch)

$$\begin{aligned}&(z^t + \cdots + z^{t+n-1}) + (z^{t+1} + \cdots + z^{t+n}) + \cdots + (z^{t+n-1} + \cdots + z^{t+2n-2}) = \\ &= (z^t + z^{t+1} + \cdots + z^{t+n-1})(z^0 + z^1 + \cdots + z^{n-1}) = \\ &= z^t(z^0 + z^1 + \cdots + z^{n-1})^2 = z^t \left(\frac{z^n - 1}{z - 1}\right)^2.\end{aligned}$$

Tento vzťah môžeme použiť aj na výpočet súčtu v celom štvorci $m \times m$. Ten má v ľavom dolnom štvorčeku číslo $z^0 = 1$, takže súčet čísel v ňom je $(z^m - 1)^2/(z - 1)^2$.

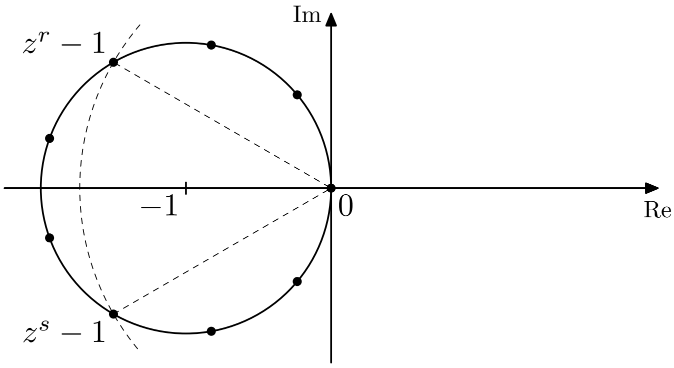
Ak teda máme vyhovujúce rozdelenie, pričom v ľavom dolnom štvorčeku štvorca $n \times n$ je napísané číslo z^t, musí platiť

$$z^t \left(\frac{z^n - 1}{z - 1}\right)^2 = \left(\frac{z^m - 1}{z - 1}\right)^2.$$

Aby sa dve komplexné čísla rovnali, musia sa rovnať aj ich absolútne hodnoty. Dôsledkovými úpravami predošlej rovnosti (využijúc zrejmý vzťah $|z| = 1$) tak postupne dostávame

$$\begin{aligned}\left|z^t \left(\frac{z^n - 1}{z - 1}\right)^2\right| &= \left|\left(\frac{z^m - 1}{z - 1}\right)^2\right|, \\ |z|^t \frac{|z^n - 1|^2}{|z - 1|^2} &= \frac{|z^m - 1|^2}{|z - 1|^2}, \\ |z^n - 1|^2 &= |z^m - 1|^2, \\ |z^n - 1| &= |z^m - 1|.\end{aligned}$$

Nech r, s sú zvyšky, ktoré dávajú m, n po delení k. Keďže $z^k = 1$, zrejme $z^m = z^r$ a $z^n = z^s$. Pre ktoré čísla $r, s \in \{0, 1, \ldots, k - 1\}$ majú komplexné čísla $z^r - 1$, $z^s - 1$ rovnakú absolútnu hodnotu? Prvou možnosťou samozrejme je, že $r = s$. V takom prípade dávajú m a n rovnaký zvyšok po delení k, teda $k \mid m - n$. Zaoberajme sa ďalej len prípadom $r \neq s$. Čísla z^r, z^s ležia v komplexnej rovine na jednotkovej kružnici so stredom v 0 (obr. 43), takže $z^r - 1$, $z^s - 1$ ležia na jednotkovej kružnici so stredom v -1. Aby mali dve rôzne čísla na tejto kružnici rovnakú absolútnu hodnotu, musia byť rovnako vzdialené od 0, čo zrejme nastáva jedine v prípade, keď $z^r - 1$, $z^s - 1$ sú navzájom komplexne združené, t. j. keď $r + s = k$ (obr. 45). V tomto prípade teda $k \mid m + n$.



Obr. 45

49. Medzinárodná matematická olympiáda

V dňoch 10. – 22. 7. 2008 sa v Španielsku uskutočnil 49. ročník Medzinárodnej matematickej olympiády (IMO). Tejto populárnej intelektuálnej súťaže sa zúčastnil rekordný počet 535 žiakov z 97 štátov.

Zloženie slovenskej delegácie bolo nasledovné:

Mim. prof. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., Žilinská univerzita, vedúci družstva SR,
RNDr. Tomáš Jurík, FMFI UK Bratislava, pedagogický vedúci,
Mgr. Peter Novotný, FMFI UK Bratislava, pozorovateľ.

Slovensko reprezentovali

Miroslav Baláž, Gymnázium arm. gen. L. Svobodu, Humenné, 4. ročník,
Albert Herencsár, Gymnázium Z. Kodálya, Galanta, 3. ročník,
Tomáš Kocák, Gymnázium Poštová, Košice, 4. ročník,
Filip Sládek, Gymnázium A. Bernoláka, Námestovo, 2. ročník,
Michal Spišiak, Gymnázium Grösslingová, Bratislava, 3. ročník,
Vladislav Ujházi, Gymnázium P. J. Šafárika, Rožňava, 4. ročník.

Obr. 46
(Zľava: T. Jurík, A. Herencsár, T. Kocák, M. Baláž, M. Spišiak, F. Sládek, V. Ujházi, P. Novotný, V. Bálint.)

Výsledky družstva SR sú uvedené v tabuľke.

Meno	1	2	3	4	5	6	Súčet	Cena
Miroslav Baláž	2	0	0	4	0	0	6	
Albert Herencsár	5	0	0	4	0	0	9	
Tomáš Kocák	7	1	0	4	1	0	13	HM
Filip Sládek	7	1	0	7	0	0	15	bronz
Michal Spišiak	7	2	0	7	1	0	17	bronz
Vladislav Ujházi	5	4	0	7	0	0	16	bronz

Obr. 47
(Zľava: V. Ujházi, F. Sládek a M. Spišiak s bronzovými medailami.)

V súťaži jednotlivcov skončili na prvých troch miestach s plným počtom 42 bodov dvaja Číňania Xiaosheng Mu a Dongyi Wei, ku ktorým sa pridal Alex Zhai (USA – aj keď podľa mena je to možno rusko-čínska kombinácia). O maximálny počet 42 bodov banálnou chybou v jednom príklade prišiel Maďar László Miklós Lovász, ktorý s 39 bodmi, ale samozrejme so zlatou medailou, skončil na 4. mieste. Poznamenajme, že jeho otec Laci Lovász, ktorý je dnes prezidentom celosvetovej organizácie matematikov International Mathematical Union (IMU), získal v rokoch 1963 – 1966 na IMO najprv jednu striebornú a potom tri zlaté medaile, takže jablko nepadlo ďaleko od stromu. (V tých istých rokoch a také isté medaile získal aj József Pelikán, terajší prezident IMO Advisory Board.) Len pre poučenie žiakov upresnime tú banálnu chybu. Úloha mala dve časti a mladý Lovász sa v druhej časti zaoberal niečím úplne iným ako bolo treba; pritom mu stačilo poznamenať, že vec požadovanú v druhej časti dokázal už v prvej časti. Takže vrabca už držal v hrsti, ale nevedel, že ho tam má.

Por.	Štát	Z	S	B	∑	Por.	Štát	Z	S	B	∑
1.	Čína	5	1	0	217	50.	Bosna a Hercegovina	0	0	3	68
2.	Rusko	6	0	0	199		Slovinsko	0	0	2	68
3.	USA	4	2	0	190		Švajčiarsko	0	1	1	68
4.	Južná Kórea	4	2	0	188	53.	Švédsko	0	1	0	67
5.	Irán	1	5	0	181	54.	Dánsko	0	2	0	66
6.	Thajsko	2	3	1	175	55.	Kostarika	0	0	2	65
7.	Severná Kórea	2	4	0	173		Malajzia	0	1	0	65
8.	Turecko	3	1	2	170	57.	Rakúsko	0	0	1	63
9.	Tchaj-wan	2	4	0	168	58.	Nórsko	1	0	0	62
10.	Maďarsko	2	3	1	165	59.	Belgicko	0	1	1	61
11.	Japonsko	2	3	1	163		Macedónsko	0	0	2	61
12.	Vietnam	2	2	2	159	61.	Luxembursko (5)	0	0	2	60
13.	Poľsko	2	3	1	157		Tadžikistan	0	0	1	60
14.	Bulharsko	2	1	3	154	63.	Lotyšsko	0	1	0	58
15.	Ukrajina	2	2	2	153		Macao	0	0	2	58
16.	Brazília	0	5	1	152		Maroko	0	0	1	58
17.	Peru	1	3	2	141	66.	Arménsko	0	0	0	56
	Rumunsko	0	4	2	141	67.	Portugalsko	0	0	2	55
19.	Austrália	0	5	1	140	68.	Albánsko	0	0	1	53
20.	Nemecko	1	2	3	139	69.	Chile (3)	0	1	1	49
	Srbsko	1	3	0	139	70.	Írsko	0	0	0	45
22.	Kanada	0	2	4	135	71.	Cyprus	0	0	1	42
23.	Veľká Británia	0	4	2	133		Nový Zéland	0	0	0	42
24.	Taliansko	0	3	3	132	73.	Estónsko	0	0	1	41
25.	Kazachstan	1	2	3	128	74.	Fínsko	0	0	1	40
26.	Bielorusko	0	3	2	125	75.	Bangladéš (4)	0	0	0	33
27.	Izrael	1	1	2	120	76.	Island (5)	0	0	1	31
28.	Hongkong	0	3	1	107		Salvádor (4)	0	0	0	31
29.	Mongolsko	0	2	1	106	78.	Srí Lanka	0	0	0	29
30.	Francúzsko	0	1	4	104	79.	Kirgizstan (5)	0	0	0	28
31.	India	0	0	5	103		Trinidad a Tobago	0	0	1	28
32.	Singapur	0	1	3	98	81.	Kuba (1)	0	1	0	27
33.	Holandsko	0	2	2	94	82.	Ekvádor	0	0	0	26
	Uzbekistan	0	0	4	94	83.	Kambodža	0	0	0	25
35.	Litva	0	1	2	92	84.	Čierna Hora (3)	0	0	0	24
36.	Indonézia	0	1	2	88		Paraguaj (4)	0	0	1	24
37.	Mexiko	0	1	1	87	86.	Filipíny (3)	0	0	1	23
38.	Chorvátsko	0	0	3	86	87.	Uruguaj (5)	0	0	0	22
39.	Argentína	0	1	3	85	88.	Tunisko (4)	0	0	0	20
	Česká republika	0	1	1	85	89.	Honduras (2)	0	0	0	17
	Grécko	0	0	2	85	90.	Guatemala (4)	0	0	1	16
42.	Gruzínsko	0	0	5	84		Lichtenštajnsko (2)	0	0	0	16
43.	Španielsko	0	0	3	82		Venezuela (2)	0	0	0	16
44.	Južná Afrika	0	1	0	79	93.	Portoriko (3)	0	0	0	9
45.	Kolumbia	0	2	0	77	94.	Saudská Arábia	0	0	0	8
46.	Slovensko	0	0	3	76	95.	Bolívia (5)	0	0	0	5
	Turkmenistan	0	0	4	76		Spojené arabské emiráty (4)	0	0	0	5
48.	Azerbajdžan	0	0	3	74	97.	Kuvajt (5)	0	0	0	3
	Moldavsko	0	1	0	74						

Súťaž družstiev je neoficiálna. V súčte bodov sme skončili síce v prvej polovičke, ale na nie práve najlepšom 46. mieste so 76 bodmi. Mali sme štyroch nováčikov a na výsledku sa to prejavilo. Za nami sú napríklad 48. Moldavsko (74 bodov; po iné roky veľmi silné), 50. Slovinsko, Švajčiarsko, Bosna a Hercegovina (68 bodov), 53. Švédsko (67 bodov), 54. Dánsko (66 bodov), 57. Rakúsko (63 bodov), 58. Nórsko (62 bodov), 59. Belgicko (61 bodov), a ešte ďalších 12 európskych krajín. Na čelo poradia sa vrátila Čína (217 bodov z 252 možných), potom Rusko (199 b.), USA (190 b.), ... Tradične veľmi silné rumunské družstvo dosiahlo svoj historicky najslabší výsledok (18. miesto), Peru práve naopak – výborné 17. miesto. Práve výsledok Peru ukazuje, že treba dobre vyriešiť obe tzv. ľahké úlohy (č. 1 a č. 4) a ak sa k tomu pridá dobre vyriešená aj jedna z tzv. stredne ťažkých úloh (č. 2 a č. 5), tak výsledok družstva je veľmi dobrý. Na toto sa v príprave sústreďujeme aj my, ale príklady musia nakoniec počítať žiaci. Platí totiž, že naučiť žiakov spoľahlivo riešiť ťažké úlohy (č. 3 a č. 6 na IMO) sa v podstate nedá – k tomu potrebuje mať žiak **mimoriadne nadanie**. Okrem tabuľky, ktorú tu nájdete (čísla v zátvorke sú uvedené za krajinami, ktoré mali na IMO menší počet účastníkov), možno pre získanie podrobnejších informácií odporučiť adresu *http://www.imo-2008.es* alebo aj *http://imo-official.org.*

Aj keď Pakistan bol pozvaný zúčastniť sa IMO, jeho súťažiaci nedostali vstupné víza napriek enormnej snahe ministerky školstva Španielska, ktorá sa to však dozvedela príliš neskoro. Až na tento veľmi nepríjemný incident – a až na mimoriadne horúce počasie v Madride práve počas IMO – samozrejme Španieli zvládli organizáciu IMO vynikajúco. Na záverečnom ceremoniáli na univerzite v Leganes na predmestí Madridu bol – samozrejme okrem ministra školstva a starostky Madridu – aj korunný princ Filip spolu s manželkou Letiziou, a osobne odovzdávali medaile.

Dovolím si aj touto cestou v mene SK MO poďakovať firme REKON, ktorá našej výprave financovala reprezentačné tričká a primátorovi mesta Žilina Ing. Ivanovi Harmanovi za poskytnutie upomienkových darčekov pre vedúcich zúčastnených tímov. Ďakujem tiež pracovníčkam Oddelenia služieb medzinárodnej spolupráce MŠ SR Eme Jenisovej a Želmíre Fischerovej za promptné vybavenie všetkých formalít súvisiacich s vycestovaním našej výpravy.

Usporiadateľom jubilejnej 50. IMO budú Brémy, ďalej boli schválené Kazachstan (2010), Holandsko (2011) a Argentína (2012).

Vojtech Bálint

IMO pohľadom súťažiacich

Keď sme sa pred cestou štyria účastníci z najvzdialenejších končín Slovenska stretli na internátoch v Bratislave, vydýchli sme si, lebo sme vedeli, že väčšiu časť času stráveného cestovaním máme za sebou. Čakali nás totiž už iba dve hodiny v autobuse a tri v lietadle. Na druhý deň už začal stúpať adrenalín a plní očakávania, nespokojní, nervózni a zároveň šťastní sme si užívali Schwechat, let ponad Alpy, aby sme dorazili na letisko hlavného mesta Španielska, kde sa mal uskutočniť vrchol tohoročnej sezóny. Prvým cieľom bolo nájsť medzi oranžovými tričkami tú správnu guide-ku. Nakoniec si tá drobná, usmiata slečna našla nás a my sme sa pomaly osmelili použiť angličtinu a do konca pobytu sme s ňou prekecali nejednu dlhú chvíľu.

Po ubytovaní na internátoch, ktoré sa podobali viac na hotely, sme dostali jeden deň na aklimatizáciu, počas ktorej sme sa museli vysporiadať nie len s horúčavou, ale aj s pocitom zodpovednosti, strachom, nervozitou a všetkým psychickým napätím. Hoci sa nás organizátori snažili rozptýliť otváracím ceremoniálom, ktorý bol, treba povedať, skutočne úžasný a skvele pripravený (videli sme cirkusové kúsky, ale aj kus umenia), nervozita extrémne vyústila do toho, že Mišo Spišiak si zavolal Tomáša Juríka, aby ho popýtal, či by ho nenaučil *celú* geometriu. Všetci sme sa nahrnuli k nemu a večerný program bol zariadený.

A tak nastal deň súťaže. Bolo to pre mňa úplne niečo nové. Atmosféra, celá organizácia a vedomie, že celý rok sme bojovali kvôli tomuto, ma (a myslím, že aj ostatných) správne nažhavili. Čoho som sa fakt najviac obával bola geometria a nerovnosti. Viete si asi predstaviť, čo sa odohrávalo vo mne, keď som prvý deň uvidel zadania. Taktiež bol pre mňa veľký zážitok, keď sme vyšli von a zbadali množstvo fotografov a novinárov, čo som dovtedy videl iba v telke. Po tých deviatich hodinách, ktoré prebehli nezvyčajne rýchlo, sme si, vedomí, že už nič nezmeníme, vyčistili hlavu od zbytočných starostí a venovali sa užívaniu si nasledujúcich dní.

Kým našim vedúcim sa začali dni tvrdej roboty a prípravy na zápas s koordinátormi o každý náš bod, pri ktorom prezreli aj prázdny papier, či na ňom nie je nejaká spásonosná myšlienka, my sme sa úplne oddali dovolenkovej nálade. Odhaľovanie zákutí Madridu, prevážanie sa metrom, prechádzky po nekonečných parkoch, spoznávanie kráľovskej histórie celého okolia, exkurzia do Toleda, prehliadka svetoznámej galérie El Prado, predstavenie klasickej španielskej hudby, „medzištátne“ futbalové zápasy; to je len časť toho, čo pre nás pripravili organizátori. Pomedzi to všetko sme mali možnosť ochutnať španielsku kuchyňu, pod ktorou sa len tak prehýbali švédske stoly. Samozrejme, že sme využili príležitosť nadviazať kontakty s účastníkmi z iných krajín a potrénovať našu angličtinu. Jediné, čo nám prekážalo, boli neskutočne dlhé a pomalé presuny, za ktoré mohol nejeden „freno“.

Ako dni plynuli, jeden deň sa zjavili papiere s bodmi. Keďže sme nepoznali bodové limity pre medaily, čo sa niektorých z nás priamo dotýkalo, a šírili sa rôzne fámy, nevedeli sme sa dočkať výsledkov na internete. Keď sa objavili, všetko z nás opadlo. V pohode sme si vychutnali záverečný ceremoniál, ktorého sa priamo zúčastnili aj španielsky princ a princezná. Najzábavnejšia bola výslovnosť španielskych moderátorov, ktorí sa museli popasovať s najrozličnejšími menami. Potichu sme závideli trom absolútnym víťazom a všetci sme si uvedomili, že ešte máme čo vylepšovať.

Nakoniec nás čakalo iba lúčenie, let na rodné Slovensko a sme radi, že sme sa v zdraví vrátili. Uvedomili sme si to hlavne vtedy, keď sme sa o mesiac dopočuli, že na tom istom madridskom letisku vybuchlo pri štarte nejaké lietadlo tej istej leteckej spoločnosti, ktorou sme leteli. A napriek tomu, že ja osobne som bol pred cestou sklamaný, že IMO je tento rok tak blízko, v Európe, teraz som šťastný, že som mohol navštíviť túto krajinu, z ktorej nám všetkým zostali úžasné spomienky.

Filip Sládek

Zadania úloh IMO

Úloha 1.
V ostrouhlom trojuholníku ABC označme H priesečník jeho výšok. Kružnica so stredom v strede strany BC prechádzajúca bodom H pretína priamku BC v bodoch A_1 a A_2. Podobne kružnica so stredom v strede strany CA predchádzajúca bodom H pretína priamku CA v bodoch B_1 a B_2 a kružnica so stredom v strede strany AB predchádzajúca bodom H pretína priamku AB v bodoch C_1 a C_2. Dokážte, že body A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 ležia na jednej kružnici.

(Rusko)

Úloha 2.
a) Dokážte, že

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geqq 1$$

pre všetky reálne čísla x, y, z rôzne od 1 spĺňajúce $xyz=1$.
b) Dokážte, že v uvedenej nerovnosti platí rovnosť pre nekonečne veľa trojíc racionálnych čísel x, y, z rôznych od 1 spĺňajúcich $xyz=1$.

(Rakúsko)

Úloha 3.
Dokážte, že existuje nekonečne veľa kladných celých čísel n takých, že n^2+1 má prvočíselného deliteľa väčšieho ako $2n+\sqrt{2n}$.

(Litva)

Úloha 4.
Nájdite všetky funkcie $f\colon(0,\infty)\to(0,\infty)$ (t. j. funkcie z kladných reálnych čísel do kladných reálnych čísel) také, že

$$\frac{f^2(w)+f^2(x)}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

pre všetky kladné reálne čísla w, x, y, z spĺňajúce $wx=yz$.

(Južná Kórea)

Úloha 5.
Nech n a k sú kladné celé čísla, kde $k\geqq n$ a $k-n$ je párne číslo. Daných je $2n$ lámp označených $1, 2, \ldots, 2n$, pričom každá z nich môže byť buď *zapnutá* alebo *vypnutá*. Na začiatku sú všetky lampy vypnuté. Uvažujeme postupnosti *krokov*: v každom kroku jednu z lámp prepneme (zo zapnutej na vypnutú alebo z vypnutej na zapnutú).

Nech N je počet takých postupností pozostávajúcich z k krokov, ktoré vedú do stavu, že všetky lampy od 1 po n sú zapnuté a všetky lampy od $n+1$ po $2n$ sú vypnuté.

Nech M je počet takých postupností pozostávajúcich z k krokov, ktoré vedú do stavu, že všetky lampy od 1 po n sú zapnuté a všetky lampy od $n+1$ po $2n$ sú vypnuté, pričom žiadna z lámp od $n+1$ po $2n$ nebola nikdy zapnutá.

Určte podiel N/M.

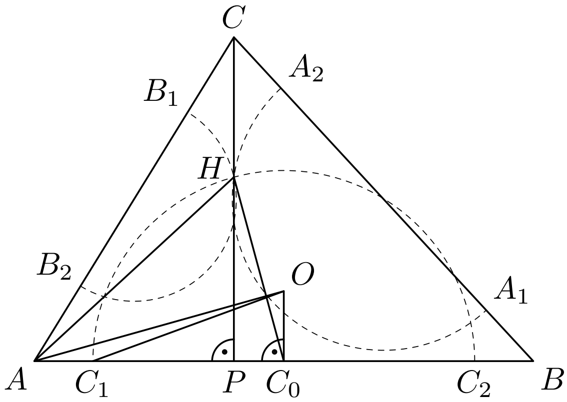
(Francúzsko)

Úloha 6.
Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník, pričom $|BA| \neq |BC|$. Označme postupne ω_1 a ω_2 kružnice vpísané do trojuholníkov ABC a ADC. Predpokladajme, že existuje kružnica ω dotýkajúca sa polpriamky BA za bodom A a polpriamky BC za bodom C, ktorá sa dotýka aj priamok AD a CD. Dokážte, že spoločné vonkajšie dotyčnice kružníc ω_1 a ω_2 sa pretínajú na kružnici ω.

(Rusko)

Riešenia úloh IMO

Úloha 1.
Osi úsečiek A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sú zároveň osami strán BC, CA, AB, takže sa pretínajú v bode O, ktorý je stredom kružnice opísanej trojuholníku ABC. Preto je O jediný bod, ktorý môže byť stredom požadovanej kružnice. Označme strany a uhly v trojuholníku štandardným spôsobom. Ďalej nech $r = |OA|$ je veľkosť polomeru opísanej kružnice, C_0 je stred strany AB a P päta výšky z vrcholu C (obr. 48). Dokážeme, že všetkých šesť bodov zo zadania má od bodu O rovnakú vzdialenosť. Použitím Pytagorovej vety vo viacerých trojuholníkoch najprv vyjadríme dĺžku úsečky OC_1 pomocou iných dĺžok v trojuholníku.



Obr. 48

Z pravouhlých trojuholníkov OC_1C_0, C_0HP,[15] OAC_0, HAP máme

$$|OC_1|^2 = |C_1C_0|^2 + |OC_0|^2, \tag{1}$$
$$|HC_0|^2 = |HP|^2 + |PC_0|^2, \tag{2}$$
$$|OC_0|^2 = r^2 - (\tfrac{1}{2}c)^2, \tag{3}$$
$$|HP|^2 = |AH|^2 - |AP|^2. \tag{4}$$

[15] Ak $P = C_0$, tak C_0HP nie je trojuholník, ale rovnosť (2) aj tak triviálne platí.

Keďže podľa zadania $|C_1C_0| = |HC_0|$, dosadením (2), (3) do (1) a následným dosadením (4) dostávame

$$|OC_1|^2 = |HP|^2 + |PC_0|^2 + r^2 - (\tfrac{1}{2}c)^2 = |AH|^2 - |AP|^2 + |PC_0|^2 + r^2 - \tfrac{1}{4}c^2.$$

Bez ohľadu na to, či bod P leží na úsečke AC_0, alebo na úsečke C_0B, platí

$$|PC_0|^2 = \left|\tfrac{1}{2}c - |AP|\right|^2 = \left(\tfrac{1}{2}c - |AP|\right)^2 = \tfrac{1}{4}c^2 - c|AP| + |AP|^2.$$

Dosadením do predošlého vyjadrenia dostaneme

$$|OC_1|^2 = |AH|^2 - |AP|^2 + \left(\tfrac{1}{4}c^2 - c|AP| + |AP|^2\right) + r^2 - \tfrac{1}{4}c^2 = |AH|^2 + r^2 - c|AP|.$$

Napokon, z pravouhlého trojuholníka CAP máme $|AP| = b\cos\alpha$, takže

$$|OC_1|^2 = |AH|^2 + r^2 - cb\cos\alpha.$$

Zrejme zopakovaním totožného postupu (len vymeníme úlohu vrcholov B a C) možno vyjadriť

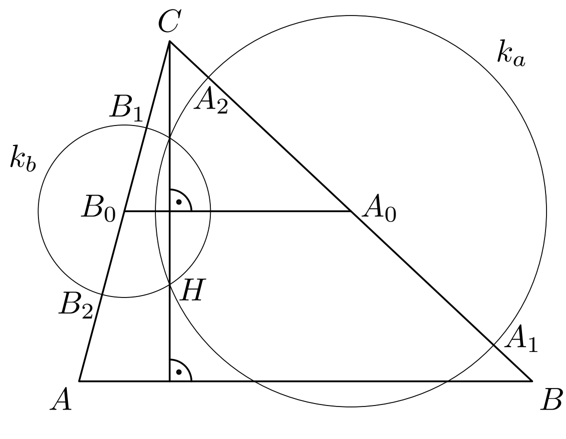
$$|OB_2|^2 = |AH|^2 + r^2 - bc\cos\alpha,$$

takže $|OC_1| = |OB_2|$. Analogicky odvodíme aj rovnosti $|OA_1| = |OC_2|$ a $|OB_1| = |OA_2|$. Spolu s triviálnymi rovnosťami $|OA_1| = |OA_2|$, $|OB_1| = |OB_2|$, $|OC_1| = |OC_2|$ dostávame

$$|OA_1| = |OA_2| = |OB_1| = |OB_2| = |OC_1| = |OC_2|,$$

teda body A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 ležia na jednej kružnici so stredom O.

Iné riešenie. Označme stredy strán BC, CA, AB postupne A_0, B_0, C_0 a kružnice spomínané v zadaní so stredmi v týchto bodoch postupne k_a, k_b, k_c. Úsečka A_0B_0 je spojnicou stredov kružníc k_a, k_b. Zároveň je ako stredná priečka trojuholníka ABC rovnobežná so stranou AB a kolmá na priamku CH obsahujúcu výšku na stranu AB. Priamka CH je preto chordálou[16] kružníc k_a, k_b (obr. 49).



Obr. 49

[16] Chordála dvoch kružníc je množina bodov, ktoré majú k obom kružniciam rovnakú mocnosť. Je kolmá na spojnicu stredov kružníc a prechádza spoločnými bodmi oboch kružníc, pokiaľ sa tieto pretínajú alebo dotýkajú.

Keďže bod C leží na chordále kružníc k_a, k_b, má ku obom kružniciam rovnakú mocnosť, čiže $|CA_1|\cdot|CA_2| = |CB_1|\cdot|CB_2|$. Z tejto rovnosti a zo známeho „obráteného“ tvrdenia o mocnosti bodu ku kružnici už priamo vyplýva, že body A_1, A_2, B_1, B_2 ležia na jednej kružnici k, bez ohľadu na to, či bod C leží vnútri oboch priemerov A_1A_2, B_1B_2, alebo mimo nich. (Nie je možné, aby ležal vnútri jedného priemeru a mimo druhého, keďže C leží na chordále oboch kružníc. Pri ostrouhlom trojuholníku ABC navyše možno ľahko ukázať, že body A_1, A_2, resp. B_1, B_2 ležia vnútri strán BC, CA, takže C leží určite mimo oboch priemerov A_1A_2, B_1B_2).

Stred kružnice k pritom musí byť priesečníkom osí úsečiek A_1A_2, B_1B_2, t. j. stred O opísanej kružnice. Odtiaľ máme $|OA_1| = |OA_2| = |OB_1| = |OB_2|$. Zrejme analogicky (argumentáciou o chordále BH kružníc k_a, k_c) dostaneme $|OA_1| = |OA_2| = |OC_1| = |OC_2|$, odkiaľ dostaneme rovnaký záver ako pri prvom riešení.

Úloha 2.

a) Zaveďme substitúciu

$$\frac{x}{x-1} = a, \quad \frac{y}{y-1} = b, \quad \frac{z}{z-1} = c, \quad \text{t. j.} \quad x = \frac{a}{a-1}, \quad y = \frac{b}{b-1}, \quad z = \frac{c}{c-1}.$$

Chceme dokázať nerovnosť $a^2+b^2+c^2 \geqq 1$ pre ľubovoľné reálne čísla $a, b, c \neq 1$ spĺňajúce rovnosť

$$\frac{a}{a-1} \cdot \frac{b}{b-1} \cdot \frac{c}{c-1} = 1 \tag{1}$$

pochádzajúcu z podmienky $xyz = 1$. Ekvivalentnými úpravami z (1) dostávame

$$\begin{aligned} abc &= (a-1)(b-1)(c-1), \\ ab + bc + ca &= a + b + c - 1, \\ (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2) &= 2(a+b+c-1), \\ (a+b+c)^2 - 2(a+b+c) &= a^2+b^2+c^2-2, \\ (a+b+c-1)^2 &= a^2+b^2+c^2-1. \end{aligned} \tag{2}$$

Ľavá strana poslednej rovnosti je vždy nezáporná, teda naozaj platí $a^2 + b^2 + c^2 \geqq 1$.

b) Aby sme našli trojice racionálnych čísel $x, y, z \neq 1$ spĺňajúce $xyz = 1$, pre ktoré platí v zadanej nerovnosti rovnosť, stačí nájsť trojice racionálnych čísel $a, b, c \neq 1$ spĺňajúce rovnosti (1) a $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ a použiť uvedenú substitúciu (zachovávajúcu racionálnosť) na výpočet x, y, z. Pritom prvú z rovností sme ekvivalentne upravili na tvar (2). Hľadáme teda v obore racionálnych čísel nekonečne veľa riešení sústavy

$$\begin{aligned} (a+b+c-1)^2 &= a^2+b^2+c^2-1, \\ a^2+b^2+c^2 &= 1, \end{aligned}$$

ktorá je zrejme ekvivalentná so sústavou

$$a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c = 1.$$

Vyjadrením $c = 1 - a - b$ a dosadením do rovnice $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ dostávame jedinú rovnicu $a^2 + b^2 + ab - a - b = 0$, ktorú možno v premennej b prepísať ako kvadratickú rovnicu

$$b^2 + (a-1)b + a(a-1) = 0 \tag{3}$$

s diskriminantom

$$D = (a-1)^2 - 4a(a-1) = (1-a)(1+3a).$$

Aby sme dostali racionálnu trojicu (a, b, c), stačí zobrať racionálne číslo a také, že súčin $(1-a)(1+3a)$ bude druhou mocninou racionálneho čísla. Potom totiž budú racionálnymi aj čísla

$$b = \frac{1 - a \pm \sqrt{(1-a)(1+3a)}}{2} \qquad \text{a} \qquad c = 1 - a - b. \tag{4}$$

Hľadajme a v tvare podielu celých čísel k/m. Potom

$$1 - a = \frac{m-k}{m}, \qquad 1 + 3a = \frac{m+3k}{m}.$$

Vhodnou voľbou teda bude napríklad $m = k^2 - k + 1$, kde k je ľubovoľné celé číslo. Potom zrejme $m \neq 0$, $m - k = (k-1)^2$, $m + 3k = (k+1)^2$, čiže $D = (k^2-1)^2/m^2$. Dosadením do (4) (zvolíme napríklad väčší z dvoch koreňov kvadratickej rovnice (3)) dostaneme

$$b = \frac{m - k + k^2 - 1}{2m} = \frac{m + (m-2)}{2m} = \frac{m-1}{m}, \qquad c = 1 - \frac{k}{m} - \frac{m-1}{m} = \frac{1-k}{m}.$$

Pre rôzne hodnoty k takto zrejme dostaneme nekonečne veľa rôznych racionálnych trojíc (a, b, c), pričom podmienka $a, b, c \neq 1$ vylučuje iba hodnoty $k = 0$ a $k = 1$. Ak by sme sa vrátili k pôvodným premenným x, y, z, po jednoduchej úprave by sme dostali trojice

$$x = -\frac{k}{(k-1)^2}, \qquad y = k - k^2, \qquad z = \frac{k-1}{k^2},$$

avšak dôkaz je úplný aj bez tohto vyjadrenia.

Úloha 3.
Nech N je ľubovoľné prirodzené číslo a p je prvočíselný deliteľ čísla $N^2 + 1$. Označme z zvyšok, ktorý dáva N po delení prvočíslom p (zrejme $0 < z < p$). Potom máme

$$z^2 \equiv N^2 \equiv -1 \pmod{p} \qquad \text{a tiež} \qquad (p-z)^2 \equiv z^2 \equiv -1 \pmod{p}.$$

Zoberme za n menšie z dvojice čísel z, $p - z$. Platí $0 < n \leqq p/2$ a zároveň $p \mid n^2 + 1$. Navyše

$$(p - 2n)^2 \equiv 4n^2 \equiv -4 \pmod{p},$$

a keďže $(p-2n)^2 > 0$, dostávame $(p-2n)^2 \geqq p-4$. Podľa doterajšieho $p-2n \geqq 0$, ak je teda $p \geqq 5$, po odmocnení a úprave máme

$$p - 2n \geqq \sqrt{p-4},$$
$$p \geqq 2n + \sqrt{p-4}. \tag{1}$$

Ak $p > 20$, tak $\sqrt{p-4} > 4$ a z (1) vyplýva $p > 2n+4$. Potom $p-4 > 2n$, čiže $\sqrt{p-4} > \sqrt{2n}$ a dosadením do (1) dostávame požadovanú nerovnosť $p > 2n + \sqrt{2n}$.

Ukázali sme, že pre každé prvočíslo $p > 20$, ku ktorému existuje také číslo N, že $p \mid N^2+1$ (teda pre každé prvočíslo, ku ktorému je -1 kvadratickým zvyškom) existuje číslo n s požadovanou vlastnosťou. Ak by bolo takých n len konečne veľa, muselo by existovať iba konečne veľa opísaných prvočísel, platí totiž $p \mid n^2+1$, t. j. $p \leqq n^2 + {}+ 1$. Avšak prvočísel s kvadratickým zvyškom -1 je nekonečne veľa. Dôkazom tohto známeho tvrdenia ukončíme riešenie úlohy.

Nech M je ľubovoľné prirodzené číslo. Potom ľubovoľné prvočíslo p, ktoré je deliteľom čísla $(M!)^2+1$, má medzi kvadratickými zvyškami zvyšok -1. Zároveň $p > M$, lebo zrejme žiadne z čísel $2, 3, \ldots, M$ nie je deliteľom čísla $(M!)^2+1$. Ku každému M teda existuje prvočíslo $p > M$ s požadovanou vlastnosťou. Takých prvočísel je preto nekonečne veľa.

Úloha 4.
Predpokladajme, že funkcia f vyhovuje zadaniu. Budeme za w, x, y, z dosadzovať rôzne štvorice kladných čísel spĺňajúce $wx = yz$ a stanovovať tak podmienky, ktoré musí f spĺňať, a ktoré budeme ďalej používať.

Po dosadení $w = x = y = z = 1$ máme $f^2(1)/f(1) = 1$, teda $f(1) = 1$. Zoberme ľubovoľné $t > 0$ a dosaďme $w = t$, $x = 1$, $y = z = \sqrt{t}$. S využitím $f(1) = 1$ postupnými úpravami dostávame

$$\frac{f^2(t)+1}{2f(t)} = \frac{t^2+1}{2t},$$
$$tf^2(t) + t = t^2 f(t) + f(t),$$
$$tf(t)\bigl(f(t)-t\bigr) = f(t) - t,$$
$$\bigl(f(t)-t\bigr)\bigl(tf(t)-1\bigr) = 0.$$

Takže pre každé $t > 0$ platí buď $f(t) = t$, alebo $f(t) = 1/t$. Priamym dosadením do zadania možno ľahko overiť, že obe funkcie

$$f(t) = t \quad \text{pre všetky } t > 0 \qquad \text{a} \qquad f(t) = \frac{1}{t} \quad \text{pre všetky } t > 0 \tag{1}$$

vyhovujú (prvá funkcia vyhovuje očividne, pri druhej treba previesť triviálnu úpravu a použiť podmienku $wx = yz$). Ukážeme, že žiadna iná funkcia podmienky zadania nespĺňa, t. j. že f nemôže pre niektoré $t \neq 1$ nadobúdať hodnotu t a pre nejaké iné hodnotu $1/t$.

Predpokladajme, že f nie je ani jedna z funkcií zapísaných v (1). Teda pre nejaké $a, b > 0$ platí $f(a) \neq a$ a $f(b) \neq 1/b$. Podľa odvodených podmienok potom nutne $f(a) = 1/a$, $f(b) = b$. Dosadením $w = a$, $x = b$, $y = z = \sqrt{ab}$ do zadanej rovnosti a úpravou dostávame

$$\frac{\frac{1}{a^2} + b^2}{2f(ab)} = \frac{a^2 + b^2}{2ab},$$

$$f(ab) = \frac{ab(a^{-2} + b^2)}{a^2 + b^2}. \tag{2}$$

Vieme, že $f(ab) = ab$ alebo $f(ab) = 1/ab$. Ak $f(ab) = ab$, podľa (2) máme $a^{-2} + b^2 = a^2 + b^2$, odkiaľ $a = 1$. Avšak $f(1) = 1$, čo je v spore s predpokladom $f(a) \neq a$. Podobne ak $f(ab) = 1/ab$, z (2) máme

$$a^2b^2(a^{-2} + b^2) = a^2 + b^2, \qquad \text{čiže} \qquad b^2 + a^2b^4 = a^2 + b^2,$$

odkiaľ $b^4 = 1$, t. j. $b = 1$, čo je v spore s predpokladom $f(b) \neq 1/b$.

Dve funkcie zapísané v (1) sú teda jediné vyhovujúce.

Úloha 5.
Postupnosti, ktoré vedú do stavu opísaného v zadaní (lampy od 1 po n zapnuté, lampy od $n + 1$ po $2n$ vypnuté), nazvime *vyhovujúce*. Vyhovujúce postupnosti, v ktorých navyše ani raz nezapneme žiadnu z lámp od $n+1$ po $2n$, nazvime *špeciálne*. Máme teda N vyhovujúcich postupností, z ktorých je M špeciálnych.

V každej vyhovujúcej postupnosti je každá z lámp $1, \dots, n$ na konci zapnutá, takže bola prepnutá nepárny počet krát. Naopak, každá z lámp $n + 1, \dots, 2n$ je na konci vypnutá, takže bola prepnutá párny počet krát.

Zrejme $M > 0$, t. j. existuje aspoň jedna špeciálna postupnosť (stačí raz zapnúť každú z lámp od 1 po n a potom zvoliť jednu z nich a prepnúť ju $(k - n)$-krát, čo je podľa zadania párne číslo).

Nech $\mathcal{P}$ je ľubovoľná špeciálna postupnosť. Zvoľme ktorúkoľvek lampu l, kde $1 \leqq l \leqq n$. Označme k_l celkový počet prepnutí lampy l (ako sme spomenuli skôr, k_l je nepárne). Vyberme spomedzi nich ľubovoľnú podmnožinu obsahujúcu párne veľa prepnutí a nahraďme ich prepnutím lampy $n + l$. To môžeme urobiť 2^{k_l-1} spôsobmi, keďže každá k_l-prvková množina má 2^{k_l-1} podmnožín s párnou mohutnosťou[17].

Uvedené zmeny prepnutí môžeme urobiť nezávisle s každou lampou pre $l = 1, \dots, n$. Keďže $k_1 + \dots + k_n = k$, celkový počet rôznych postupností, ktoré dostaneme, je

$$2^{k_1-1} \cdot 2^{k_1-1} \cdot \ldots \cdot 2^{k_n-1} = 2^{k-n}.$$

[17] Tento známy fakt možno odvodiť jednoduchou kombinatorickou úvahou: Keď vytvárame podmnožinu s párnou mohutnosťou, pri každom spomedzi k_l prvkov sa môžeme rozhodnúť, či do podmnožiny bude alebo nebude patriť, len pri poslednom prvku na výber nemáme – musíme alebo nesmieme ho do podmnožiny pridať, aby sme dodržali paritu. Celkový počet podmnožín je teda

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{(k_l-1)\text{-krát}} \cdot 1 = 2^{k_l-1}.$$

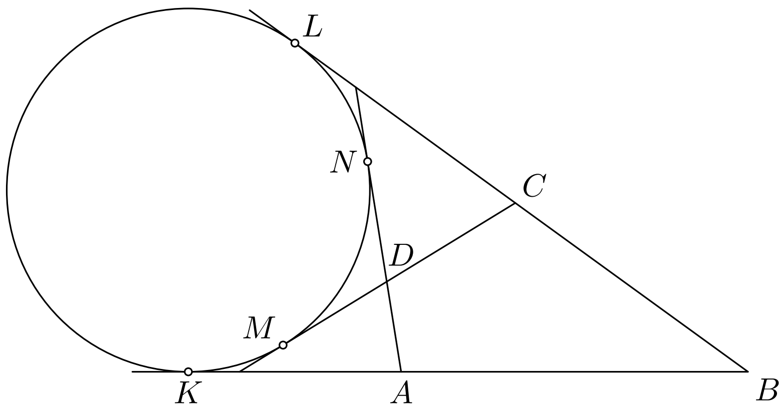
V každej vytvorenej postupnosti je každá z lámp od $n+1$ do $2n$ prepnutá párny počet krát a každá z lámp od 1 do n nepárny počet krát, jedná sa preto o vyhovujúcu postupnosť. Z každej špeciálnej postupnosti $\mathcal{P}$ vieme takto vytvoriť 2^{k-n} vyhovujúcich postupností.

Zrejme každú vyhovujúcu postupnosť $\mathcal{Q}$ možno vytvoriť opísaným spôsobom. Stačí každé prepnutie lampy $l > n$ nachádzajúce sa v $\mathcal{Q}$ nahradiť prepnutím lampy $l - n$. Vo výslednej postupnosti $\mathcal{P}$ nebudú lampy od $n+1$ do $2n$ prepnuté ani raz. Keďže v $\mathcal{Q}$ bola každá lampa $l > n$ prepnutá párny počet krát, každá lampa $l \leqq n$ bude v $\mathcal{P}$ prepnutá nepárny počet krát, t. j. postupnosť $\mathcal{P}$ bude špeciálna. Ak teraz obrátime postup a vrátime príslušné prepnutia naspäť na lampy od $n+1$ do $2n$, dostaneme postupnosť $\mathcal{Q}$. Pritom obrátený postup zmeny $\mathcal{P}$ na $\mathcal{Q}$ prebieha presne tak, ako sme opísali v predošlých odsekoch.

Našli sme zobrazenie z množiny vyhovujúcich postupností do množiny špeciálnych postupností, pričom vzor každej špeciálnej postupnosti pri tomto zobrazení obsahuje 2^{k-n} vyhovujúcich postupností. Preto $N/M = 2^{k-n}$.

Úloha 6.
Pri riešení použijeme dve pomocné lemy, ktoré najprv sformulujeme a dokážeme.

Lema 1. Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník. Ak existuje kružnica, ktorá sa dotýka polpriamky BA za bodom A, polpriamky BC za bodom C a priamok AD a CD, tak $|AB| + |AD| = |CB| + |CD|$.



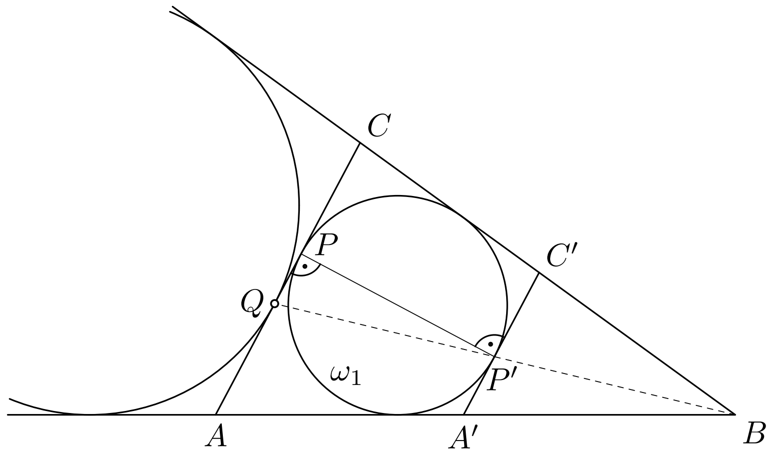
Obr. 50

Dôkaz. Označme dotykové body kružnice a priamok AB, BC, CD, DA postupne K, L, M, N (obr. 50). Máme

$$|AB| + |AD| = (|BK| - |AK|) + (|AN| - |DN|),$$
$$|CB| + |CD| = (|BL| - |CL|) + (|CM| - |DM|).$$

Zrejme $|BK| = |BL|$, $|DN| = |DM|$, $|AK| = |AN|$ a $|CL| = |CM|$ (vzdialenosti bodu od príslušných dotykových bodov na kružnici sú rovnaké). Odtiaľ už priamo dostávame $|AB| + |AD| = |CB| + |CD|$.

Lema 2. V danom trojuholníku ABC označme P bod, v ktorom sa vpísaná kružnica ω_1 dotýka strany AC. Nech PP' je priemer vpísanej kružnice a Q je priesečník priamky BP' so stranou AC. Potom Q je bodom dotyku strany AC a kružnice pripísanej k strane AC.



Obr. 51

Dôkaz. Priesečníky dotyčnice k ω_1 vedenej bodom P' so stranami BA, BC označme postupne A', C' (obr. 51). Kružnica ω_1 je pripísanou kružnicou ku strane $A'C'$ trojuholníka $A'BC'$ a dotýka sa strany $A'C'$ v bode P'. Keďže $A'C' \parallel AC$, v rovnoľahlosti so stredom B a koeficientom $|BQ|/|BP'|$ sa trojuholník $A'BC'$ zobrazí na trojuholník ABC, kružnica ω_1 na kružnicu pripísanú k strane AC trojuholníka ABC a bod P' (ktorý je bodom dotyku ω_1 a strany $A'C'$) na bod Q (ktorý preto musí byť bodom dotyku pripísanej kružnice a strany AC).

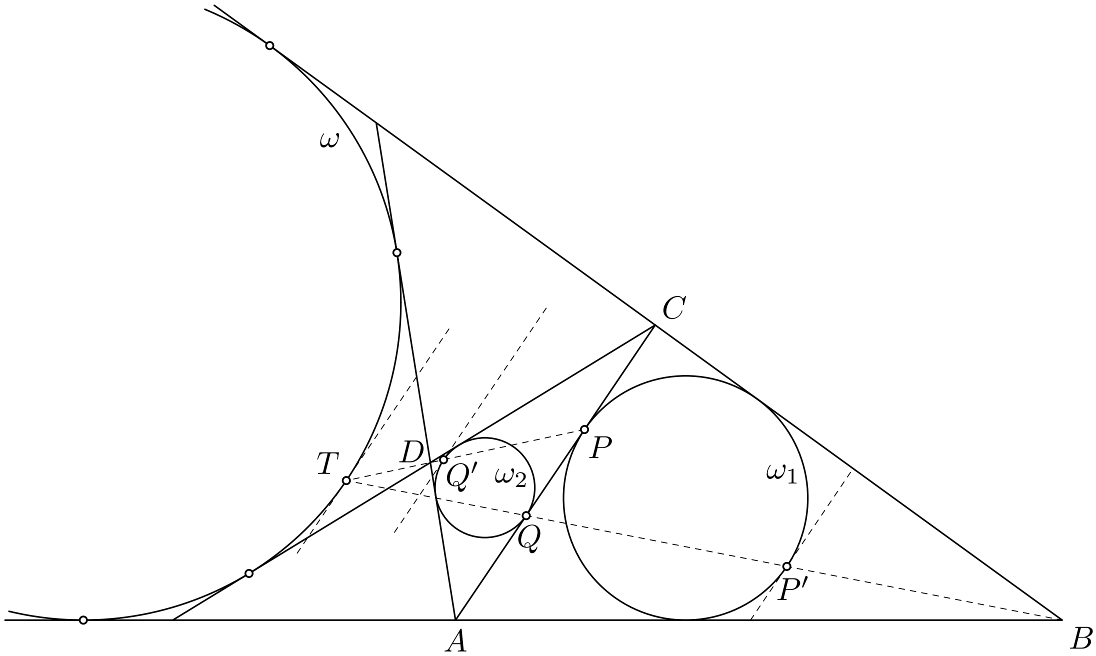
Pripomeňme ešte známy fakt, že ak sa v trojuholníku ABC dotýka vpísaná kružnica strany AC v bode P a pripísaná kružnica k tejto strane sa jej dotýka v bode Q, tak $|AP| = |CQ|$.

Vráťme sa k pôvodnému zadaniu. Nech ω_1 sa dotýka uhlopriečky AC v bode P a ω_2 v bode Q. Podľa známych vzorcov pre dĺžky úsekov medzi vrcholmi trojuholníka a dotykovými bodmi strán a vpísanej kružnice dostávame

$$|AP| = \tfrac{1}{2}(|AC| + |AB| - |BC|), \qquad |CQ| = \tfrac{1}{2}(|AC| + |CD| - |AD|).$$

Keďže z prvej lemy vyplýva $|AB| - |BC| = |CD| - |AD|$, dostávame $|AP| = |CQ|$. Preto Q je zároveň bodom dotyku kružnice pripísanej k strane AC trojuholníka ABC. Analogicky P je bodom dotyku kružnice pripísanej k strane AC trojuholníka ADC. Navyše $P \neq Q$, lebo $|AB| \neq |BC|$.

Nech PP', QQ' sú priemery kružníc ω_1, ω_2 kolmé na uhlopriečku AC (obr. 52). Podľa druhej lemy ležia body B, P', Q na jednej priamke. Takisto ležia na jednej priamke body D, Q', P.



Obr. 52

Uvažujme priemer kružnice ω, ktorý je kolmý na AC. Nech T je ten jeho krajný bod, ktorý je bližšie k AC. V rovnoľahlosti so stredom B a koeficientom $|BT|/|BP'|$ sa ω_1 zobrazí na ω, preto body B, P', T ležia na jednej priamke. Podobne sa v rovnoľahlosti so stredom D a koeficientom $-|DT|/|DQ'|$ zobrazí ω_2 na ω a na jednej priamke ležia body D, Q', T.

Takže bod T je priesečníkom priamok $P'Q$ a PQ'. Keďže $PP' \parallel QQ'$, kružnice ω_1, ω_2 s priemermi PP', QQ' sú rovnoľahlé so stredom T. Pritom koeficient tejto rovnoľahlosti je očividne kladný (lebo T neleží na spoločnej vnútornej dotyčnici AC oboch kružníc), teda T je zároveň priesečníkom vonkajších dotyčníc kružníc ω_1, ω_2, čo sme chceli dokázať.

2. Stredoeurópska matematická olympiáda

2. ročník Stredoeurópskej matematickej olympiády sa konal v Olomouci od 4. 9. do 10. 9. 2008. Súťaž prebiehala v priestoroch Prírodovedeckej fakulty Univerzity Palackého. Zúčastnilo sa jej 52 žiakov stredných škôl z deviatich krajín. Každá krajina mohla vyslať najviac 6 súťažiach. Slovensko reprezentovali

Ladislav Bačo, Gymnázium Poštová, Košice, 2. ročník,
Martin Bachratý, Gymnázium Veľká okružná, Žilina, 2. ročník,
Peter Csiba, ŠPMNDaG, Bratislava, 3. ročník,
Michal Hagara, Gymnázium J. Hronca, Bratislava, 2. ročník,
Jakub Konečný, Gymnázium Grösslingová, Bratislava, 2. ročník,
Tomáš Szaniszlo, Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica, 3. ročník.

Pedagogickou vedúcou družstva bola Mgr. Erika Trojáková, doktorandka FMFI UK Bratislava, vedúcim výpravy SR bol doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc. zo Žilinskej univerzity.

4. 9. večer a 5. 9. s prestávkami celý deň zasadala porota. Keďže diskusia o výbere úloh prebehla na internete už v auguste, v Olomouci bolo už potrebné len dohodnúť sa na presnej formulácii anglického zadania úloh a na spôsobe hodnotenia.

Vlastná súťaž prebehla v sobotu 6. 9. (súťaž jednotlivcov) a v nedeľu 7. 9. (súťaž družstiev). V popoludňajších a večerných hodinách sme opravovali a koordinovali. Záverečné zasadnutie poroty bolo 8. 9. Tam sme rozhodli o pridelení medailí. Slávnostné vyhlásenie výsledkov bolo 9. 9. večer za prítomnosti rektora UP a zástupkyne českého ministerstva školstva. Slovenskí žiaci mali smolu. Dvaja ostali bod pod hranicou na striebornú medailu a traja bod pod hranicou na bronzovú. Podľa súčtu bodov boli na štvrtom mieste – hneď za trojicou Maďarsko, Poľsko, Nemecko, ktorá bola o triedu lepšia ako zvyšné družstvá. Myslím si, že tento súčet viac hovorí o kvalite jednotlivých družstiev ako tímová súťaž, ktorá je ovplyvnená hlavne vynikajúcimi jednotlivcami. Preto považujem vystúpenie našich žiakov za úspešné, napriek tomu, že medailí bolo málo.

Výsledky družstva SR v súťaži jednotlivcov sú uvedené v prvej tabuľke.

Meno	1	2	3	4	Súčet	Cena
Ladislav Bačo	8	0	0	7	15	HM
Martin Bachratý	8	2	0	5	15	HM
Peter Csiba	8	7	0	8	23	bronz
Michal Hagara	8	7	0	8	23	bronz
Jakub Konečný	5	8	0	1	14	HM
Tomáš Szaniszlo	8	7	0	0	15	HM

Prehľad výsledkov všetkých krajín v súťaži jednotlivcov je v druhej tabuľke. Krajiny sú v nej zoradené podľa súčtu bodov celého družstva, podobne ako pri neoficiálnom poradí krajín na IMO (čísla v zátvorke sú uvedené za krajinami, ktoré mali na MEMO menší počet účastníkov).

Por.	Štát	Z	S	B	$\sum$	Por.	Štát	Z	S	B	$\sum$
1.	Maďarsko	3	3	0	171	6.	Rakúsko	0	0	3	86
2.	Poľsko	1	4	1	170	7.	Česká republika	0	1	1	73
3.	Nemecko	1	3	1	134	8.	Chorvátsko	0	0	3	69
4.	Slovensko	0	0	2	105	9.	Slovinsko (4)	0	0	0	25
5.	Švajčiarsko	0	0	3	89						

Výsledky súťaže družstiev sú uvedené v tretej tabuľke.

Por.	Štát	5	6	7	8	$\sum$
1.	Maďarsko	8	8	8	8	32
	Nemecko	8	8	8	8	32
	Poľsko	8	8	8	8	32
4.	Rakúsko	8	2	8	8	26
5.	Slovensko	6	3	8	8	25
6.	Švajčiarsko	5	3	8	8	24
7.	Česká rep.	8	6	0	8	22
8.	Chorvátsko	3	2	8	8	21
9.	Slovinsko	3	2	4	0	9

Organizátori pripravili aj bohatý sprievodný program. Súťažiaci boli v piatok na Svatom Kopečku, v pondelok sme boli všetci na prehliadke zámku so záhradami v Kroměříži a v utorok sme navštívili jaskyňu v Javoříčku a hrad Bouzov.

Tretí ročník MEMO sa bude konať v Poľsku.

Pavel Novotný

Zadania úloh MEMO

Súťaž jednotlivcov

Úloha 1.
Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť celých kladných čísel s nasledovnou vlastnosťou: pre každú štvoricu indexov (i, j, k, l), kde $1 \leqq i < j \leqq k < l$ a $i + l = j + k$, platí nerovnosť $a_i + a_l > a_j + a_k$. Určte najmenšiu možnú hodnotu čísla a_{2008}.

(Rakúsko)

Úloha 2.
Uvažujme šachovnicu $n \times n$, kde $n > 1$. Koľkými spôsobmi môžeme vybrať $2n - 2$ políčok tejto šachovnice tak, aby spojnica stredov žiadnych dvoch vybraných políčok nebola rovnobežná so žiadnou diagonálou šachovnice?

(Švajčiarsko)

Úloha 3.
Nech ABC je rovnoramenný trojuholník s ramenami AC a BC. Kružnica vpísaná tomuto trojuholníku sa dotýka strany AB v bode D a strany BC v bode E. Priamka rôzna od AE prechádza bodom A a pretína vpísanú kružnicu v bodoch F a G. Priamky EF a EG pretínajú priamku AB v bodoch K a L. Dokážte, že platí rovnosť $|DK| = |DL|$.

(Maďarsko)

Úloha 4.
Nájdite všetky také celé čísla k, že čísla $4n + 1$ a $kn + 1$ sú nesúdeliteľné pre každé celé číslo n.

(Maďarsko)

Súťaž družstiev

Úloha 5.
Nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pre ktoré platí

$$xf(x + xy) = xf(x) + f(x^2)f(y)$$

pre všetky reálne čísla x, y.

(Švajčiarsko)

Úloha 6.
Na tabuli je napísaných n celých kladných čísel, pričom $n \geqq 2$. V jednom kroku vyberieme dve z napísaných čísel a každé z nich nahradíme ich súčtom. Určte všetky hodnoty n, pre ktoré môžeme z akejkoľvek začiatočnej n-tice prirodzených čísel po konečnom počte krokov dostať n-ticu rovnakých čísel.

(Slovensko)

Úloha 7.
Nech ABC je ostrouhlý trojuholník. Bod E leží v opačnej polrovine s hraničnou

priamkou AC ako bod B a D je vnútorný bod úsečky AE. Nech $|\measuredangle ADB| = |\measuredangle CDE|$, $|\measuredangle BAD| = |\measuredangle ECD|$ a $|\measuredangle ACB| = |\measuredangle EBA|$. Dokážte, že body B, C a E sú kolineárne.

(Slovinsko)

Úloha 8.
Nech súčet všetkých kladných deliteľov celého kladného čísla n je mocninou čísla 2. Dokážte, že aj počet týchto deliteľov je mocninou čísla 2.

(Česká rep.)

Riešenia úloh MEMO

Úloha 1.
(Podľa *Jaromíra Šimšu, Česká republika.*) Pre každé $n \geqq 1$ a štvoricu indexov $(n, n + 1, n + 1, n + 2)$ podľa zadania platí

$$a_{n+2} - a_{n+1} \geqq (a_{n+1} - a_n) + 1.$$

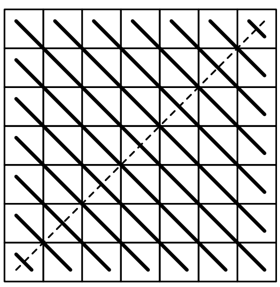
Keďže $a_2 - a_1 \geqq 1$, jednoduchým dôkazom matematickou indukciou dostávame $a_{n+1} - a_n \geqq n$ pre $n \geqq 1$. Takže $a_{n+1} \geqq n + a_n$. Z toho s využitím $a_1 \geqq 1$ opäť triviálnou matematickou indukciou odvodíme nerovnosť

$$a_n \geqq \frac{1}{2}(n^2 - n + 2).$$

Pritom postupnosť $a_n = \frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$ spĺňa podmienky zadania. Nerovnosť $a_i + a_l > a_j + a_k$ je totiž pre ňu (pri rovnosti $i + l = j + k$) ekvivalentná s nerovnosťou $i^2 + l^2 > j^2 + k^2$, ktorá po substitúcii $i = d - y$, $l = d + y$, $j = d - x$, $k = d + x$ (kde $0 \leqq x < y$) prejde na zrejmú nerovnosť $2d^2 + 2y^2 > 2d^2 + 2x^2$.

Záver. Najmenšia možná hodnota čísla a_{2008} je $\frac{1}{2}(2008^2 - 2008 + 2) = 2\,015\,029$.

Úloha 2.
Množinu k políčok uložených od jedného okraja šachovnice po druhý v smere niektorej uhlopriečky (pričom $1 \leqq k \leqq n$) nazývajme k-diagonála. Počet disjunktných diagonál v jednom smere je $2n - 1$ (obr. 53), medzi $2n - 2$ zvolenými políčkami však nemôžu byť naraz obe políčka na 1-diagonálach (keďže tie sú obe súčasťou n-diagonály majúcej druhý smer). Preto na každej k-diagonále pre $k > 1$ musí byť zvolené práve jedno políčko a práve dve políčka musia byť zvolené v rohoch (nie však protiľahlých).



Obr. 53

Uvažujme množinu P všetkých takých dvojíc (z, v), že z je zvolené políčko a v je *voľné* (čiže nezvolené) políčko na rovnakej diagonále ako z. Na šachovnici je práve $n^2 - 2n + 2$ voľných políčok, pričom dve z nich sú rohové. Každé zo zvyšných $n^2 - 2n$ voľných políčok v leží na dvoch k-diagonálach pre $k > 1$, existujú k nemu preto práve dve políčka z také, že $(z, v) \in P$. Celkový počet p dvojíc v množine P je teda

$$p = 2(n^2 - 2n) + 2 = 2n^2 - 4n + 2, \tag{1}$$

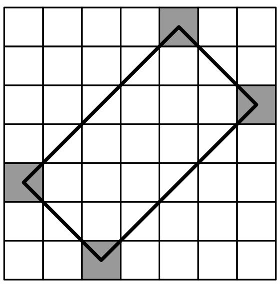
pričom $+2$ je príspevok dvoch voľných rohových políčok (každé z nich má jediné príslušné zvolené políčko v protiľahlom rohu).

Ak zvolené políčko z leží na prieniku k_1-diagonály a k_2-diagonály pre $k_1, k_2 > 1$, tak počet počet voľných políčok v takých, že $(z, v) \in P$, je rovný $k_1 + k_2 - 2$. To isté platí aj pre rohové políčka, pre ktoré $\{k_1, k_2\} = \{1, n\}$. Zrejme pre každé zvolené políčko z platí $k_1 + k_2 \geqq n + 1$, pričom rovnosť platí práve vtedy, keď sa políčko nachádza na okraji šachovnice. Takže počet takých voľných políčok v, že $(z, v) \in P$, je aspoň $n - 1$. Odtiaľ

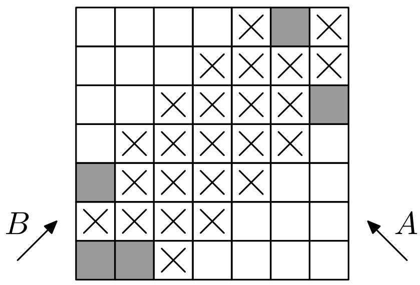
$$p \geqq (2n - 2)(n - 1) = 2n^2 - 4n + 2.$$

Podľa (1) vieme, že v predošlej nerovnosti platí rovnosť, preto všetky zvolené políčka musia ležať na okraji šachovnice.

Ak zvolíme ľubovoľné políčka (napríklad aj žiadne) z prvého riadka šachovnice, zvyšné okrajové políčka (ležiace mimo prvého riadka), ktoré musíme zvoliť, sú jednoznačne určené. Pre rohové políčka je to zrejmé, pre ostatné políčka stačí pre každé $k = 2, 3, \ldots, n - 1$ uvažovať obdĺžnik tvorený dvoma k-diagonálami v jednom smere a $(n + 1 - k)$-diagonálami v druhom smere (v každom takom obdĺžniku musia byť medzi zvolenými políčkami dva protiľahlé rohy, obr. 54). Celkový počet rôznych výberov políčok je teda rovnaký, ako počet rôznych podmnožín n-prvkovej množiny (tvorenej políčkami prvého riadka), čiže 2^n.



Obr. 54



Obr. 55

Iné riešenie. (Podľa *Bernda Mulanskeho*, *Nemecko*.) Dva rôzne smery diagonál označme A a B. Z úvodu prvého riešenia vieme, že na každej k-diagonále pre $k > 1$ je zvolené práve jedno políčko a práve dve políčka sú zvolené v neprotiľahlých rohoch. Každý vyhovujúci výber políčok môžeme vytvoriť nasledujúcim postupom pozostávajúcim z n krokov:

▷ Krok 1: Zvolíme políčko na jednej z dvoch 1-diagonál smeru A.

▷ Krok k ($2 \leqq k \leqq n-1$): Zvolíme dve políčka, každé na jednej z dvoch k-diagonál smeru A.

▷ Krok n: Zvolíme políčko na n-diagonále smeru A.

Zrejme pre každé $m = 1, 2, \ldots, n-1$ po urobení m krokov (takých, že žiadne dve zvolené políčka nie sú na rovnakej diagonále smeru B) sa na každej spomedzi $2m-1$ najdlhších k-diagonál smeru B (t. j. $k \geqq n+1-m$) nachádza zvolené políčko (obr. 55). Ak $m < n-1$, v nasledujúcom kroku $m+1$ musia byť obe políčka zvolené na kraji oboch $(m+1)$-diagonál smeru A (ostatné políčka týchto dvoch diagonál ležia na už „obsadených“ diagonálach smeru B), čo možno urobiť práve dvoma spôsobmi. Podobne je to v prípade $m+1 = n$. Máme teda dve možnosti v každom z n krokov a celkový počet rôznych vyhovujúcich výberov je 2^n.

Iné riešenie. (Podľa *Pavla Novotného*, *Slovensko.*) Ofarbime políčka šachovnice ako zvyčajne, pričom ľavý horný roh bude čierny. Z podobnej úvahy ako v úvode prvého riešenia vyplýva, že musíme zvoliť $n-1$ bielych a $n-1$ čiernych políčok. Počet p_n všetkých vyhovujúcich výberov $2n-2$ políčok na šachovnici $n \times n$ sa rovná súčinu $b_n \cdot c_n$, pričom b_n a c_n sú počty vyhovujúcich výberov $n-1$ bielych, resp. čiernych políčok. Zrejme $b_2 = b_3 = 2$, $c_2 = 2$ a $c_3 = 4$. Ľahko možno ukázať, že pre každé $n \geqq 4$ platí $b_n = 2b_{n-2}$,[18] $c_n = 2b_{n-1}$,[19] takže $p_n = b_n c_n = 4b_{n-2}b_{n-1} = 2c_{n-1}b_{n-1} = 2p_{n-1}$, odkiaľ už triviálne vyplýva $p_n = 2^n$.

Úloha 3.

Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $|AF| < |AG|$. Rozoberme najprv situáciu, keď G je na kratšom oblúku DE.

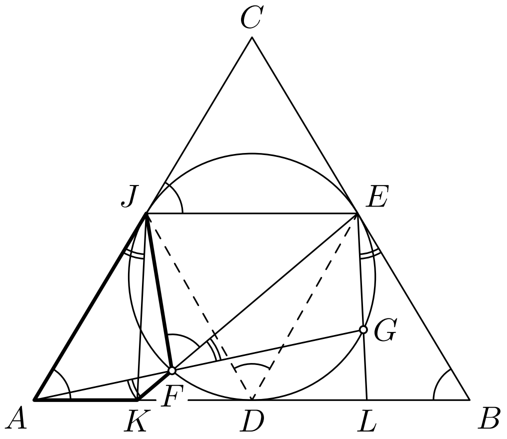
Označme J dotykový bod vpísanej kružnice so stranou AC. Z vlastností súhlasných, úsekového a obvodových uhlov máme $|\measuredangle CAB| = |\measuredangle CJE| = |\measuredangle JDE| = |\measuredangle JFE|$ (obr. 56), takže $AJFK$ je tetivový štvoruholník. Preto z obvodových, vrcholových a úsekového uhla dostávame $|\measuredangle AJK| = |\measuredangle AFK| = |\measuredangle EFG| = |\measuredangle LEB|$, teda trojuholníky AJK a BEL sú zhodné. Keďže K a L sú vnútorné body úsečky AB, z rovnosti $|AK| = |BL|$ vyplýva $|DK| = |DL|$.

Ak G leží na dlhšom oblúku DE (medzi bodmi E a J), tak K, A, B, L ležia v tomto poradí na priamke a tetivovým štvoruholníkom je $AKJF$. Ostatné argumenty sú rovnaké ako v predošlom prípade.

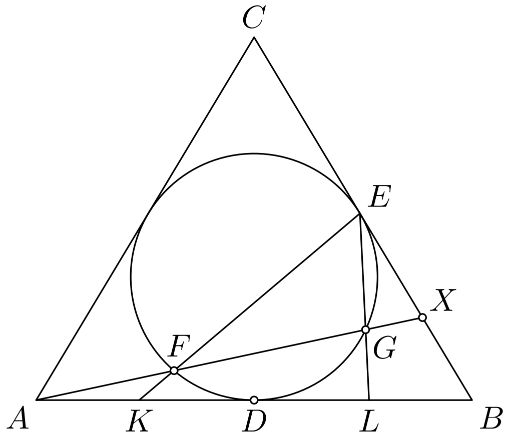
---

[18] Odstránime dve biele 2-diagonály v jednom smere a dve biele $(n-1)$-diagonály v druhom smere; zvyšné biele políčka vytvárajú rovnaké diagonály ako biele políčka šachovnice $(n-2) \times (n-2)$.

[19] Odstránime jednu čiernu n-diagonálu; zvyšné čierne políčka vytvárajú rovnaké diagonály ako biele políčka šachovnice $(n-1) \times (n-1)$.



Obr. 56



Obr. 57

Iné riešenie. (Podľa *Tomáša Pavlíka*, *Česká republika.*) Označme X priesečník priamky AF so stranou BC (obr. 57). Z mocnosti bodu X ku vpísanej kružnici platí $|XE|^2 = |XF| \cdot |XG|$, čiže

$$\frac{|XG|}{|XE|} = \frac{|XE|}{|XF|}. \tag{1}$$

Podľa Menelaovej vety pre trojuholník ABX a priamky EG a EF máme

$$\frac{|AL|}{|LB|} \cdot \frac{|BE|}{|EX|} \cdot \frac{|XG|}{|GA|} = 1 \quad \text{a} \quad \frac{|AK|}{|KB|} \cdot \frac{|BE|}{|EX|} \cdot \frac{|XF|}{|FA|} = 1.$$

Použitím (1) môžeme tieto dve rovnosti prepísať na

$$\frac{|XE|}{|XF|} \cdot \frac{|AL| \cdot |BE|}{|LB| \cdot |GA|} = 1 \quad \text{a} \quad \frac{|XE|}{|XF|} \cdot \frac{|KB| \cdot |FA|}{|AK| \cdot |BE|} = 1.$$

Odtiaľ postupne

$$\frac{|AL| \cdot |BE|}{|LB| \cdot |GA|} = \frac{|KB| \cdot |FA|}{|AK| \cdot |BE|},$$

$$\frac{|AK| \cdot |AL| \cdot |BE|^2}{|KB| \cdot |LB| \cdot |FA| \cdot |GA|} = 1. \tag{2}$$

Z mocnosti bodu A ku vpísanej kružnici platí $|AF| \cdot |AG| = |AD|^2$, odkiaľ spolu so zrejmými rovnosťami $|AD| = |BD| = |BE|$ máme $|AF| \cdot |AG| = |BE|^2$. Spojením s (2) dostávame

$$|AK| \cdot |AL| = |KB| \cdot |LB|.$$

V závislosti od polohy bodu G ležia body K a L buď oba vnútri, alebo mimo úsečky AB. Podľa toho pre niektoré znamienko plus alebo mínus platí

$$|AK| \cdot (|AB| \pm |BL|) = |AK| \cdot |AL| = |KB| \cdot |LB| = (|AB| \pm |AK|) \cdot |BL|.$$

V oboch prípadoch po úprave $|AK| = |BL|$, čo je ekvivalentné s rovnosťou $|DK| = |DL|$.

Úloha 4.

Keďže číslo $4n+1$ je nepárne, z rovnosti $k-4 = k(4n+1) - 4(kn+1)$ vidíme, že $4n+1$ a $kn+1$ sú nesúdeliteľné, ak $k-4$ nemá žiadneho nepárneho deliteľa $p > 1$, t. j. keď $k - 4 = \pm 2^m$ pre nejaké nezáporné celé číslo m.

Na druhej strane, ak $k-4$ má nepárneho deliteľa $p > 1$, ľahko nájdeme násobok p tvaru $4n+1$ (je ním napríklad číslo p^2 alebo jednoducho jedno z dvojice čísel p, $3p$). Pre každé číslo $4n+1$, ktoré je násobkom p, z rovnosti uvedenej na začiatku riešenia vyplýva $p \mid kn+1$, teda $4n+1$ a $kn+1$ nie sú nesúdeliteľné.

Odpoveď. Hľadanými číslami sú $k = 4 \pm 2^m$, pričom $m = 0, 1, 2, \ldots$

Úloha 5.

Dosadením $x = y = 0$ do zadanej rovnosti

$$xf(x+xy) = xf(x) + f(x^2)f(y)$$

dostaneme $f(0) = 0$. Po dosadení $y = -1$ do zadanej rovnosti tak máme

$$xf(x) + f(x^2)f(-1) = 0. \tag{1}$$

Rozoberme postupne prípady $f(-1) = 0$ a $f(-1) \neq 0$.

Prípad $f(-1) = 0$. Z (1) potom vyplýva $f(x) = 0$ pre všetky $x \neq 0$. Keďže už vieme, že aj $f(0) = 0$, dostávame konštantnú nulovú funkciu $f(x) = 0$, ktorá očividne vyhovuje.

Prípad $f(-1) \neq 0$. Dosadením $x = -1$ do (1) dostávame $f(1) = 1$. S využitím toho po dosadení $x = 1$ do (1) máme $f(-1) = -1$ a teda (1) môžeme prepísať na

$$xf(x) = f(x^2). \tag{2}$$

Dosaďme teraz do zadanej rovnosti $y = x - 1$. Odtiaľ

$$xf(x^2) = xf(x) + f(x^2)f(x-1). \tag{3}$$

Sčítaním (2) a (3) získame po úprave rovnosť

$$f(x^2)(f(x-1) - (x-1)) = 0. \tag{4}$$

Predpokladajme, že $f(a) = 0$ pre nejaké $a \neq 0$. Potom podľa (2) máme $f(a^2) = 0$ a teda po dosadení $x = a$ do zadanej rovnosti dostaneme $af(a+ay) = 0$, čiže $f(a+ay) = 0$. Keďže y môže byť ľubovoľné, nutne aj $f(-1) = 0$, čo nesúhlasí s prípadom, ktorý rozoberáme. Preto pre každé $x \neq 0$ platí $f(x) \neq 0$ a takisto aj $f(x^2) \neq 0$. Z (4) potom $f(x-1) = x-1$ pre každé $x \neq 0$, takže $f(x) = x$ pre každé $x \neq -1$. Keďže z predošlého vieme, že aj $f(-1) = -1$, dostávame funkciu $f(x) = x$, ktorá tiež očividne vyhovuje.

Záver. Hľadanými funkciami sú $f(x) = 0$ a $f(x) = x$.

Úloha 6.
Ak začneme s n-ticou $(2, 2, 1, 1, \dots, 1)$, pričom $n \geqq 3$, v každej n-tici, ktorú z nej po ľubovoľnom počte krokov dostaneme, bude počet členov nadobúdajúcich maximálnu hodnotu *párny*. Preto nevyhovuje žiadna nepárna hodnota $n \geqq 3$.

Matematickou indukciou dokážeme, že každé párne $n \geqq 2$ vyhovuje. Pre $n = 2$ je to zrejmé. Ak $n \geqq 4$ je párne, podľa indukčného predpokladu vieme ľubovoľnú n-ticu po konečnom počte krokov zmeniť na $(a, a, \dots, a, b, b)$. Ak $a \neq b$, opakovane urobíme niektorú z nasledujúcich sérií krokov, ktoré vždy vedú na n-ticu tvaru

$$(\underbrace{a, \dots, a}_{k}, \underbrace{b, \dots, b}_{n-k})$$

(v nej k môže mať inú hodnotu ako počiatočné $k = n-2$, stále však bude *párne*):

$$\begin{aligned}
\text{séria } \alpha\text{:} \quad & (\underbrace{a, \dots, a}_{k}, \underbrace{b, \dots, b}_{n-k}) \to (\underbrace{2a, \dots, 2a}_{k}, \underbrace{b, \dots, b}_{n-k}),\\
\text{séria } \beta\text{:} \quad & (\underbrace{a, \dots, a}_{k}, \underbrace{b, \dots, b}_{n-k}) \to (\underbrace{a, \dots, a}_{k}, \underbrace{2b, \dots, 2b}_{n-k}),\\
\text{séria } \gamma_1 \text{ (ak } k \leqq n-k\text{):} \quad & (\underbrace{a, \dots, a}_{k}, \underbrace{b, \dots, b}_{n-k}) \to (\underbrace{a+b, \dots, a+b}_{2k}, \underbrace{b, \dots, b}_{n-2k}),\\
\text{séria } \gamma_2 \text{ (ak } k \geqq n-k\text{):} \quad & (\underbrace{a, \dots, a}_{k}, \underbrace{b, \dots, b}_{n-k}) \to (\underbrace{a, \dots, a}_{2k-n}, \underbrace{a+b, \dots, a+b}_{2(n-k)}).
\end{aligned}$$

Kvôli ďalším úvahám zaveďme označenie $c = 2^{P(c)}N(c)$ pre ľubovoľné prirodzené číslo c, pričom $P(c) \geqq 0$ a $N(c)$ je nepárne. Na n-ticu

$$(\underbrace{a, \dots, a}_{k}, \underbrace{b, \dots, b}_{n-k})$$

pričom $a \neq b$, použijeme
- ▷ sériu α, ak $P(a) < P(b)$,
- ▷ sériu β, ak $P(a) > P(b)$,
- ▷ sériu γ_1 alebo γ_2, ak $P(a) = P(b)$ (a teda $N(a) \neq N(b)$).

Pri použití sérií α a β sa čísla $N(a)$, $N(b)$ nemenia, zatiaľ čo pri použití γ_1 a γ_2 sa zmení práve jedno z nich, konkrétne

$$N(b) \to \frac{N(a)+N(b)}{2^m}, \quad \text{alebo} \quad N(b) \to \frac{N(a)+N(b)}{2^m},$$

pričom $m = P(N(a) + N(b)) \geqq 1$ a teda

$$\frac{N(a)+N(b)}{2^m} \leqq \frac{N(a)+N(b)}{2} < \max(N(a), N(b))$$

(pripomíname, že $N(a) \neq N(b)$). Z uvedeného vyplýva, že hodnota $\max(N(a), N(b))$ nikdy nerastie, teda po konečnom počte krokov musí byť konštantná. Od toho momentu musíme mať stále buď $N(a) \geqq N(b)$, alebo $N(a) \leqq N(b)$. To vylučuje z ďalšieho použitia buď sériu γ_1, alebo sériu γ_2. Všetky ďalšie zmeny parametra k sú potom buď $k \to 2k$, alebo $(n-k) \to 2(n-k)$. Keďže toto možno zopakovať iba r-krát, kde $2^r \leqq n$, na konci musíme dostať n-ticu $(a, \dots, a, b, \dots, b)$, ktorú (ak $a \neq b$) už môžeme meniť len sériami α a β. Použitím série α alebo β práve $|P(a) - P(b)|$-krát dostaneme n-ticu $(a', \dots, a', b', \dots, b')$, v ktorej $P(a') = P(b')$. Keďže použitie γ_1, γ_2 sme už vylúčili, nutne $a' = b'$, čím je indukčný krok ukončený.

Iné riešenie. (Podľa *nemeckého družstva*, upravené.) Dokážeme *bez* matematickej indukcie vzhľadom na n, že vyhovuje každé párne $n = 2k$. Najskôr v začiatočnej $2k$-tici $(a_1, \dots, a_{2k})$ nahradíme každú dvojicu (a_{2i-1}, a_{2i}) (pre $i = 1, \dots, k$) dvojicou $(a_{2i-1} + a_{2i}, a_{2i-1} + a_{2i})$. Odteraz budeme mať na $(2i-1)$-tej a $2i$-tej pozícii vždy rovnaké čísla. Preto kvôli prehľadnosti budeme pracovať s k-ticami $(x, y, z, \dots)$ namiesto $2k$-tic $(x, x, y, y, z, z, \dots)$. S k-ticami môžeme robiť nasledujúce zmeny:

- ▷ zvolíme dve čísla x, y a nahradíme každé z nich ich súčtom (to zodpovedá dvom krokom $(\dots, x, x, \dots, y, y, \dots) \to (\dots, x+y, x, \dots, x+y, y, \dots) \to (\dots, x+y, x+y, \dots, x+y, x+y, \dots)$ vykonaných na $2k$-tici);
- ▷ zvolíme jedno číslo x a vynásobíme ho dvoma (to zodpovedá jednému kroku $(\dots, x, x, \dots) \to (\dots, x+x, x+x, \dots)$);
- ▷ predelíme všetky čísla dvoma (to samozrejme nič neovplyvní; formálne si môžeme pamätať, koľkokrát sme delenie dvoma vykonali a na konci môžeme všetky čísla vynásobiť príslušnou mocninou dvoch).

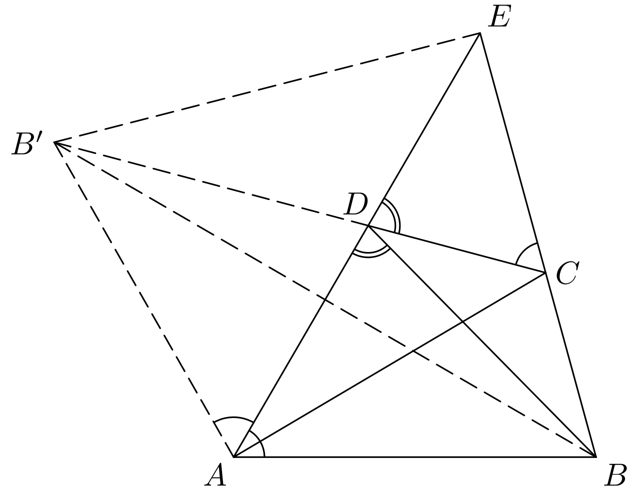
Naším cieľom je dostať k rovnakých čísel. Získame ich opakovaním nasledovného algoritmu:

1. Kým existujú aspoň dve nepárne čísla, nájdeme najmenšie a najväčšie nepárne číslo a nahradíme každé z nich ich (párnym) súčtom.
2. Ak po skončení prvého kroku je v k-tici jedno nepárne číslo, vynásobíme ho dvoma.
3. Vydelíme všetky čísla dvoma.

Zrejme po každom vykonaní celého algoritmu sa najväčšie číslo spomedzi všetkých k čísel buď zmenší, alebo nezmení. Keďže toto maximum je stále prirodzeným číslom, po konečnom počte opakovaní algoritmu musí nadobudnúť hodnotu M, ktorá sa už nebude meniť. Od tohto momentu sledujme počet čísel majúcich hodnotu M v našej k-tici. Tento počet označme N.

Zrejme M je nepárne (inak by sa v treťom kroku algoritmu zmenšilo). Ak $N < k$, tak v k-tici existuje aspoň jedno číslo m menšie ako M. Ak m je nepárne, po vykonaní algoritmu sa N zmenší. Keďže N sa nemôže nikdy zväčšiť, po konečnom počte krokov už musí ostať konštantné a všetky čísla v k-tici menšie ako M musia byť párne. Ale každé párne m sa po vykonaní algoritmu vydelí dvoma a po niekoľkých vykonaniach algoritmu sa nutne objaví nepárne číslo menšie ako M. Preto v k-tici neexistujú čísla menšie ako M, čo sme chceli dokázať.

Úloha 7.
Podmienka $|\measuredangle ADB| = |\measuredangle CDE|$ nabáda zobraziť bod B v osovej súmernosti podľa priamky AE do bodu B' (obr. 58). Potom ležia body C, D a B' na jednej priamke a $|\measuredangle EAB'| = |\measuredangle EAB| = |\measuredangle ECD| = |\measuredangle ECB'|$, takže $B'ACE$ je tetivový štvoruholník. Odtiaľ $|\measuredangle ECA| = 180^\circ - |\measuredangle EB'A| = 180^\circ - |\measuredangle EBA| = 180^\circ - |\measuredangle ACB|$, čiže $|\measuredangle ECA| + |\measuredangle ACB| = 180^\circ$ a teda body B, C, E ležia na jednej priamke.



Obr. 58

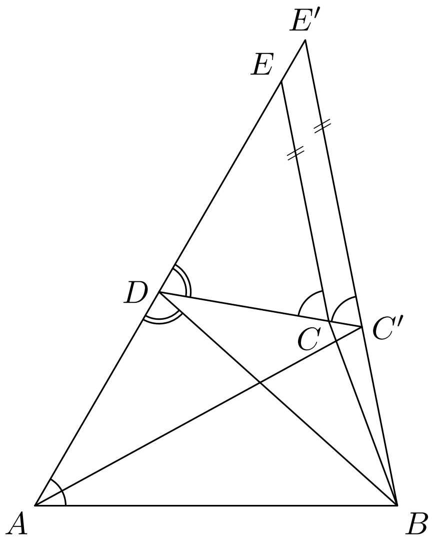
Poznámky. Rovnako dobre môžeme zobraziť C v osovej súmernosti podľa AE do C' ležiaceho na jednej priamke s B, D. Tetivový je potom štvoruholník $ABEC'$ a ďalej $|\measuredangle ECA| = |\measuredangle EC'A| = 180^\circ - |\measuredangle EBA| = 180^\circ - |\measuredangle ACB|$, t. j. opäť $|\measuredangle ECA| + |\measuredangle ACB| = 180^\circ$.

Kvôli dokázanej kolineárnosti bodov B, C, E z podmienky $|\measuredangle ACB| = |\measuredangle EBA|$ vyplýva $|AB| = |AC|$, zatiaľ čo z podmienky $|\measuredangle BAD| = |\measuredangle ECD|$ vyplýva, že štvoruholník $ABCD$ je tetivový. To naznačuje, ako možno úlohu riešiť iným spôsobom. Predtým ešte poznamenajme, že rozloženie bodov opísané v zadaní *môže* nastať a všetky také rozloženia sú tohto typu: ABC je rovnoramenný trojuholník, pričom $|AB| = |AC|$, body B, C, E ležia na jednej priamke (C medzi B a E) a AE pretína kružnicu opísanú trojuholníku ABC v bode D.

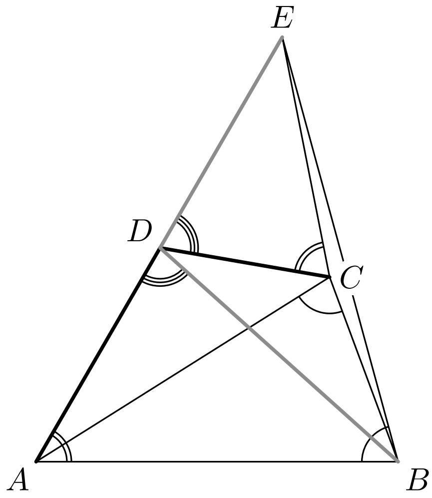
Iné riešenie. Predpokladajme, že B, C, E nie sú kolineárne. Priamka prechádzajúca cez B rovnobežná s CE pretína priamky CD a AD postupne v bodoch C' a E'. Keďže $|\measuredangle E'C'D| = |\measuredangle ECD| = |\measuredangle BAD|$, štvoruholník $ABC'D$ je tetivový (obr. 59). Označme $\mathcal{K}$ jemu opísanú kružnicu. Máme $|\measuredangle AC'B| = |\measuredangle ADB| = |\measuredangle CDE| = |\measuredangle C'DE| = |\measuredangle ABC'|$, t. j. $|\measuredangle AC'B| = |\measuredangle ABC'|$ (teda ABC' je rovnoramenný trojuholník).

Predpokladajme, že C leží vnútri úsečky $C'D$. Potom C leží vnútri $\mathcal{K}$ (v rovnakej polrovine určenej priamkou AB ako bod C'), preto $|\measuredangle ACB| > |\measuredangle AC'B| = |\measuredangle ABC'| = |\measuredangle ABE'| > |\measuredangle ABE|$ (lebo E leží medzi A a E'), čo je v spore s $|\measuredangle ACB| = |\measuredangle EBA|$.

Podobne ak C neleží na úsečke $C'D$, tak C leží zvonka $\mathcal{K}$ (v rovnakej polrovine určenej priamkou AB ako bod C'), preto $|\measuredangle ACB| < |\measuredangle AC'B| = |\measuredangle ABC'| = |\measuredangle ABE'| < |\measuredangle ABE|$ (lebo E' leží medzi A a E), čo je opäť v spore s $|\measuredangle ACB| = |\measuredangle EBA|$.



Obr. 59



Obr. 60

Iné riešenie. (Podľa *Karla Horáka, Česká republika.*) Z daných rovností veľkostí uhlov vyplýva, že trojuholníky ABD a CED sú podobné (obr. 60). Z toho okamžite dostávame, že aj trojuholníky ACD a BED sú podobné (podľa *sus*; rovnako veľký uhol pri spoločnom vrchole D a úmerné strany). Z rovnosti uhlov BED a ACD potom vyplýva, že súčet veľkostí troch uhlov BCA, ACD a DCE je rovný súčtu veľkostí uhlov v trojuholníku ABE, teda E, C a B sú kolineárne.

Úloha 8.
Nech prvočíselný rozklad čísla n je $n = p_1^{s_1}p_2^{s_2}\dots p_k^{s_k}$, pričom $p_1, \dots, p_k$ sú rôzne prvočísla a $s_i \geqq 1$ pre každé i. Predpokladajme, že súčet všetkých kladných deliteľov čísla n, ktorý možno vypočítať ako

$$(1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{s_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \dots + p_2^{s_2})\dots(1 + p_k + p_k^2 + \dots + p_k^{s_k}),$$

je mocninou dvoch. Potom každý z činiteľov

$$f_i = 1 + p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{s_i}$$

musí byť tiež mocninou dvoch väčšou ako 1 a teda p_i aj s_i sú nepárne. Ak $s_i > 1$, tak

$$f_i = (1 + p_i)(1 + p_i^2 + p_i^4 + \dots + p_i^{s_i-1}).$$

Keďže f_i nemá žiadneho nepárneho deliteľa väčšieho ako 1, nepárne celé číslo $s_i - 1$ (o ktorom predpokladáme, že je kladné) musí byť tvaru $4k + 2$ a preto vieme urobiť ďalší rozklad

$$f_i = (1 + p_i)(1 + p_i^2)(1 + p_i^4 + p_i^8 + \dots + p_i^{s_i-3}).$$

Obe čísla $1+p_i$ a $1+p_i^2$ sú mocniny dvoch, teda $1+p_i \mid 1+p_i^2$, čo je v spore s rovnosťou $1+p_i^2=(1+p_i)(p_i-1)+2$ (keďže zrejme $1+p_i \nmid 2$). Preto pre každé i platí $s_i=1$ a počet deliteľov čísla n je rovný 2^k.

Poznámka. Uvedené riešenie možno ukončiť aj bez pozorovania, že $1+p_i$ a $1+p_i^2$ nemôžu byť súčasne mocniny dvoch. Opakovaním postupných rozkladov na súčin dostaneme

$$f_i=(1+p_i)\bigl(1+p_i^2\bigr)\bigl(1+p_i^4\bigr)\dots\bigl(1+p_i^{2^{t_i}}\bigr),$$

takže $s_i=2^{t_i+1}-1$ pre nejaké $t_i \geqq 0$ a pre každé i a teda počet deliteľov čísla n je rovný $2^{k+t_1+t_2+\dots+t_k}$. (Z uvedeného riešenia akurát navyše vieme, že $t_i=0$ pre každé i.)

Korešpondenčný seminár SK MO

Korešpondenčný seminár Slovenskej komisie Matematickej olympiády (KS SK MO) vznikol pred vyše 30 rokmi ako jeden z prvých matematických korešpondenčných seminárov (vtedy ešte ako československý seminár) preto, aby bolo umožnené venovať individuálnu starostlivosť aj tým študentom, ktorí nenavštevovali triedy so zameraním na matematiku. Úlohy tohto seminára svojou náročnosťou prevyšujú akúkoľvek inú matematickú súťaž na Slovensku pre stredoškolákov, seminár je preto dôležitou súčasťou prípravy aj na medzinárodnú matematickú olympiádu.

Počas svojej existencie prešiel seminár viacerými zmenami. Po jednoročnej prestávke v 52. ročníku MO jeho organizovanie prebrali vedúci korešpondenčného seminára KMS. Odvtedy je KS SK MO jeho kategóriou GAMA a KMS je oficiálnym seminárom SK MO.

KS SK MO má každý rok šesť sérií – tri zimné prebiehajúce od septembra do decembra a tri letné prebiehajúce od februára do mája. V každej sérii je zadaných 5 úloh.

Celkové poradie KS SK MO 2007/2008

1. *Miroslav Majerčík*, 4. ročník, Bilingválne gymnázium, Sučany, 169 bodov
2. *Vladislav Ujházi*, 4. ročník, Gymnázium P. J. Šafárika, Rožňava, 161 bodov
3. *Tomáš Kocák*, 4. ročník, Gymnázium Poštová, Košice, 145 bodov
4. *Peter Fulla*, 3. ročník, SPŠ strojnícka, Spišská Nová Ves, 112 bodov
5. *Jakub Konečný*, 2. ročník, Gymnázium Grösslingová, Bratislava, 93 bodov

Uvádzame všetky príklady tohto ročníka súťaže spolu s riešeniami, často študentskými. Príklady boli vyberané najmä z národných olympiád či iných súťaží.

Zadania súťažných úloh KS SK MO

Prvá séria

1.1 Rasťo má na záhrade ešte stále vyrytú šachovnicu s 2007×2007 políčkami. So sestrou Slávkou si povedali, že si zmerajú sily. Presne v strede šachovnice sa nachádza obrovský kameň, ktorý najprv Rasťo posunie o jedno políčko (rovnobežne so stranami šachovnice). Slávka ho potom bude musieť posunúť o dve políčka, Rasťo o štyri políčka, Slávka o osem políčok – v k-tom ťahu ho vždy budú musieť posunúť o 2^{k-1} políčok. Ten, kto je na ťahu, prehráva, ak už nemôže posunúť kameň. Nájdite víťaznú stratégiu pre Slávku alebo pre Rasťa.

(*Rusko, 2005*)

1.2 Vyber si vlastné dobrodružstvo! Na plný počet bodov stačí vyriešiť jednu z nasledujúcich úloh.
a) V 99 škatuliach sa nachádzajú nejaké jablká a nejaké pomaranče. Dokážte, že môžeme vybrať 50 škatúľ tak, že obsahujú aspoň polovicu všetkých jabĺk a aspoň polovicu všetkých pomarančov.
b) V 100 škatuliach sa nachádzajú nejaké jablká a nejaké pomaranče. Dokážte, že môžeme vybrať 34 škatúľ tak, že obsahujú aspoň tretinu všetkých jabĺk a aspoň tretinu všetkých pomarančov.
c) V 100 škatuliach sa nachádzajú nejaké jablká, nejaké pomaranče a nejaké banány. Dokážte, že môžeme vybrať 51 škatúľ tak, že obsahujú aspoň polovicu všetkých jabĺk, aspoň polovicu všetkých pomarančov a aspoň polovicu všetkých banánov.

(Rusko 2005)

1.3 Nech ABC je trojuholník a I stred kružnice doň vpísanej. Os vnútorného uhla ABC pretne priamku AC v bode P. Dokážte, že ak $|AP| + |AB| = |BC|$, tak je trojuholník API rovnoramenný.

(Brazília, 2006)

1.4 Dokážte, že pre kladné reálne čísla a, b, c platí

$$\frac{a^2+b^2}{c^2+ab} + \frac{b^2+c^2}{a^2+bc} + \frac{c^2+a^2}{b^2+ca} \geqq 3.$$

(*India, 2004*)

1.5 Tri rovnaké odmerky sú do troch štvrtín naplnené rôznymi kvapalinami. Zistite, či je možné konečným počtom prelievaní dosiahnuť, aby aspoň v jednej odmerke vznikla zmes, ktorá obsahuje rovnaké množstvo každej kvapaliny. Kvapaliny možno prelievať, nie však vylievať. Pri prelievaní z odmerky A do odmerky B

môžeme preliať *ľubovoľný* objem kvapaliny, ktorý nie je väčší ako objem voľného miesta v odmerke B.

(BKMS, 1981)

Druhá séria

2.1 Čísla $x_1, x_2 \dots, x_n$ z intervalu $\langle 0,1\rangle$ spĺňajú vzťah $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m + r$, kde m je celé číslo a $r \in \langle 0,1)$. Dokážte, že $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leqq m + r^2$.

(Poľsko, 1988)

2.2 Pre prirodzené čísla x a y platí $3x^2 + x = 4y^2 + y$.

a) Dokážte, že $x - y$ je druhou mocninou prirodzeného čísla.
b) Dokážte, že zadaná rovnica má nekonečne veľa riešení.
c) Nájdite všetky riešenia tejto rovnice.

(Francúzsko, 2005)

2.3 Nájdite prirodzené číslo n také, že číslo a) $n^2 - 1$, b) $n^2 - 4$ má presne 10 deliteľov.

(Slovinsko)

2.4 Daný je trojuholník ABC so stredom vpísanej kružnice I. Osi vnútorných uhlov pri vrcholoch A a C pretínajú kružnicu opísanú trojuholníku ABC v bodoch A_0 a C_0 a úsečky BC a BA po rade v bodoch A_1 a C_1. Predpokladajme, že sa priamky A_1C_1 a A_0C_0 pretínajú v bode P. Dokážte, že priamka PI je rovnobežná s priamkou AC.

(Rusko, 2006)

2.5 Šachovnica 3000×3000 je rozdelená na dominové doštičky (teda obdĺžniky veľkosti 1×2). Dokážte, že vieme dominové doštičky ofarbiť tromi farbami tak, aby doštičiek jednotlivých farieb bolo rovnako veľa a aby žiadna doštička nemala viac ako dvoch susedov takej farby, akú má sama.

(Rusko, 2006)

Tretia séria

3.1 Daná je priamka p a body A, B nepatriace priamke, ktoré ležia v jednej polrovine vzhľadom na priamku p. Nájdite na tejto priamke všetky body M s nasledujúcou vlastnosťou: Uhol, ktorý zviera priamka p s úsečkou AM, je dvakrát väčší ako uhol, ktorý zviera priamka p s úsečkou BM.

3.2 Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre ľubovoľné reálne čísla x, y platí

$$f(x^3) + f(y^3) = x^2 f(x) + y f(y^2).$$

(*Ukrajina, 2006*)

3.3 V štvorci 1×1 sa zrazu objavilo konečne veľa úsečiek, ktoré majú súčet dĺžok 18. Každá z nich je rovnobežná s jednou zo strán štvorca a rozdeľujú ho na niekoľko častí. Miško si myslí, že obsah každej tejto časti je menší ako 0,01. Môže mať pravdu?

(BKMS, 1997)

3.4 Nech $\varphi(n,m)$ (kde $m\neq 1$) je počet prirodzených čísel menších alebo rovných n, ktoré sú nesúdeliteľné s m. Nájdite všetky prirodzené m, ktoré spĺňajú

$$\frac{\varphi(n,m)}{n} \geqq \frac{\varphi(m,m)}{m}$$

pre všetky prirodzené n.

(návrhy na IMO, 1992)

3.5 a) Nájdite najväčšie možné (alebo dokážte, že neexistuje) reálne číslo p také, že pre každé prirodzené číslo n a reálne čísla $x_1, x_2 \dots, x_n$ platí nerovnosť

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geqq p(x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n).$$

b) Majme pevne zvolené prirodzené číslo n. Nájdite najväčšie možné (alebo dokážte, že neexistuje) reálne číslo p také, že pre všetky reálne čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ platí nerovnosť

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geqq p(x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n).$$

(*Poľsko, 2003*)

Štvrtá séria

4.1 Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník taký, že $|\measuredangle DAC| = |\measuredangle BDC| = 36^\circ$, $|\measuredangle CBD| = 18^\circ$ a $|\measuredangle BAC| = 72^\circ$. Uhlopriečky tohto štvoruholníka sa pretínajú v bode P. Zistite veľkosť uhla APD.

(JBMO, 2007)

4.2 Kružnica rozdelená na n oblúkov bodmi postupne pomenovanými $1, 2, 3, \dots, n$ reprezentuje hraciu arénu pre dvoch hráčov, ktorí sa striedajú v ťahoch. V jednom ťahu si hráč vyberie dva zatiaľ voľné body (také, ktoré ešte nie sú koncom žiadnej úsečky) s rovnakou paritou a spojí ich úsečkou. Môže ale spojiť iba také body, aby novovzniknutá úsečka nepretínala žiadnu z predchádzajúcich úsečiek. Prehrá ten hráč, ktorý už nemôže spraviť ťah. Ak obaja hráči používajú optimálnu stratégiu, ktorý z nich vyhrá?

(Moldavsko, 2004)

4.3 Špeciálne egyptské číslo je také prirodzené číslo, ktoré sa dá napísať ako súčet nie nutne rôznych prirodzených čísel so súčtom prevrátených hodnôt rovným 1. Napríklad $32 = 2 + 3 + 9 + 18$ a zároveň $1/2 + 1/3 + 1/9 + 1/18 = 1$.

a) Dokážte, že existuje číslo N také, že všetky od neho väčšie prirodzené čísla sú špeciálne egyptské čísla.
b) Nájdite všetky prirodzené čísla, ktoré nie sú špeciálne egyptské.

(návrhy na IMO, 1992)

4.4 Trojuholník ABC má strany dĺžky a, b a c. Trojuholník $A'B'C'$ má strany dĺžky $a + b/2$, $b + c/2$ a $c + a/2$. Dokážte, že obsah trojuholníka $A'B'C'$ je aspoň 9/4 obsahu trojuholníka ABC.

4.5 Nájdi všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktoré pre každé reálne x, y spĺňajú vzťah

$$f(x + y) = f(x)f(y)f(xy).$$

PIATA SÉRIA

5.1 Rozhodnite, či existuje funkcia $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taká, že pre všetky $n \geqq 2$ platí

$$f(f(n - 1)) = f(n + 1) - f(n).$$

(*Bielorusko, 2000*)

5.2 Uvažujme mnohouholník s celočíselnými stranami taký, že každé dve jeho susedné strany sú na seba kolmé (nemusí byť konvexný). Dokážte, že ak ho vieme pokryť neprekrývajúcimi sa dominovými kockami veľkosti 2×1 umiestnenými rovnobežne s jeho stranami, tak aspoň jedna z jeho strán má párnu dĺžku.

(Mexiko, 1999)

5.3 Dokážte, že z ľubovoľnej množiny deviatich celých čísel vieme vždy vybrať rôzne čísla a, b, c a d tak, že číslo $a + b - c - d$ je deliteľné dvadsiatimi. Zistite, či to platí aj pre ľubovoľnú osemprvkovú množinu celých čísel.

5.4 Dokážte, že existuje také číslo M, že pre každé prirodzené $m > M$ existujú $a, b, c \in \mathbb{N}$, pre ktoré platí

$$m^3 < a < b < c < (m + 1)^3$$

a zároveň číslo abc je treťou mocninou prirodzeného čísla.

5.5 V ostrouhlom trojuholníku ABC máme vnútorný bod P. Priamka BP pretína AC v bode E, priamka CP pretína AB v bode F a priamka AP pretína EF v bode D. Označme K pätu kolmice z bodu D na BC. Ukážte, že KD je os uhla EKF.

Šiesta séria

6.1 Máme množinu desiatich rôznych reálnych čísel takú, že pre každé dva jej rôzne prvky je ich súčin alebo ich súčet racionálne číslo. Dokážte, že druhá mocnina každého čísla z našej množiny je racionálne číslo.

(Rusko, 2005)

6.2 Nájdite všetky prvočísla p také, že $p^2 - p + 1$ je treťou mocninou prirodzeného čísla.

(BMO, 2005)

6.3 Zo stredu štvorca vyrazil svetelný lúč, odrážal sa od strán štvorca, nikdy pritom nevrazil do rohu a po čase sa opäť vrátil do stredu štvorca, a to po prvý raz. Dokážte, že sa lúč odrazil od strán štvorca nepárny počet krát.

(Poľsko, 1996)

6.4 Nech $p > 5$ je prvočíslo. Nech A je množina všetkých postupností $(a_1, \dots, a_{p+1})$ takých, že $a_i \in \mathbb{N}$ a $1 \leqq a_i \leqq i + 1$ pre $i = 1, 2, \dots, p + 1$. Množina $X \subset A$ sa nazýva *roztopašná*, ak každé dve rôzne postupnosti z X sa líšia aspoň na troch miestach. Aký najväčší počet prvkov môže mať roztopašná množina X?

(ZIMO, 2008)

6.5 Každá podmnožina množiny prirodzených čísel $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ má iný súčet prvkov. Aký najmenší môže byť výraz (v závislosti od n) $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$?

Riešenia súťažných úloh KS SK MO

Prvá séria

1.1

Slovným spojením „ťah k“ (k je prirodzené číslo) budeme v riešení myslieť ťah o k políčok. Začneme tým, že si vypíšeme, ktoré ťahy robí Rasťo a ktoré Slávka. Rasťo robí ťahy 1, 4, 16, 64, 256, 1024, … a Slávka ťahy 2, 8, 32, 512, 2048, … Je zrejmé, že všetky ťahy o 512 alebo o menej políčok nie je problém spraviť. Na druhej strane, ťah 2048 a väčšie sa už určite nedajú spraviť, lebo šachovnica je na ne veľmi malá. Ostáva nám teda už len zistiť, či si Rasťo vie zaručiť rozumnou hrou to, že bude môcť spraviť ťah 1024. Ak áno, tak vyhrá, lebo Slávka už svoj ťah 2048 nemôže spraviť.

Rasťo môže spraviť svoj ťah 1024 okrem prípadov, keď sa pred jeho ťahom kameň nachádza v štvorci rozmerov 41×41 umiestnenom v strede šachovnice. Takže v momente, keď robí Slávka svoj ťah 512 a vie potiahnuť do tohto stredového štvorca, tak si vie zaručiť výhru. Z akých miest tam vie Slávka potiahnuť? Sú to štyri štvorce veľkosti 41×41 vzdialené stredmi o 512 políčok do všetkých štyroch smerov od stredu šachovnice. Čiže ak do nich Rasťo svojim ťahom 256 nepotiahne, Slávka nebude vedieť potiahnuť do stredového štvorca a Rasťo bude vedieť spraviť ťah 1024 a vyhrá. A Rasťo naozaj vie z každého políčka urobiť ťah 256 tak, že neskončí v žiadnom zo štyroch štvorcov. Môžeme si všimnúť, že ťah 256 je dostatočne malý a okolo spomínaných štvorcov je dosť miesta, preto nikdy nemá blokované ani dva smery naraz, nieto ešte všetky štyri.

Rasťo má preto víťaznú stratégiu. Stačí mu začať rozmýšľať vo svojom ťahu 256 a nepotiahnuť na „zakázané políčka“, z ktorých by Slávka vedela následne potiahnuť do stredového štvorca 41×41.

1.2

Uvedieme iba riešenie časti a).

Na začiatku zoraďme všetkých 99 krabíc podľa množstva pomarančov. Označme takto zoradené krabice postupne $k_1, k_2, \ldots, k_{99}$. Počet jabĺk v krabici k_i označme j_i a počet pomarančov p_i. Podľa nášho usporiadania platí $p_1 \geqq p_2 \geqq \ldots \geqq p_{99}$. Krabicu k_1 odsuňme do rohu miestnosti. Pozrime sa na krabice k_2 až k_{99}. Našim cieľom je rozdeliť týchto 98 krabíc na dve kopy tak, aby sme pridaním krabice, ktorá leží v rohu, dostali požadovaný stav.

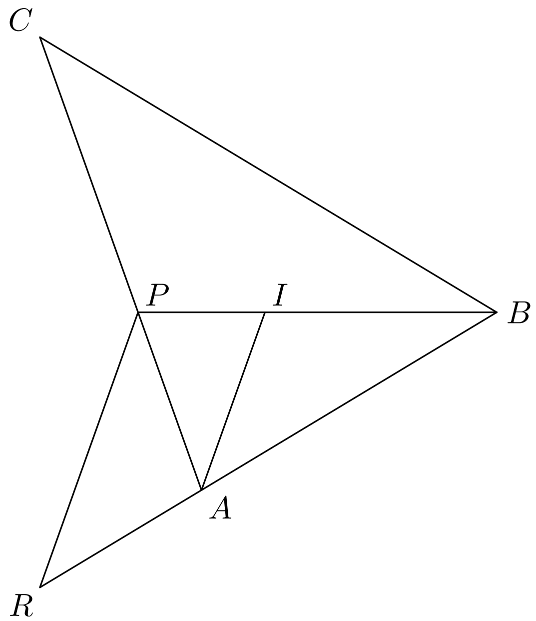
Zoberme krabice k_2 a k_3. Vyberme do prvej kopy tú z nich, ktorá má viac jabĺk, vyzerá to ako dobrá stratégia, aby prvá kopa bola hľadaná kopa. Vo všeobecnosti môžeme povedať, že z krabíc k_{2i} a k_{2i+1} do prvej kopy vyberieme tú s indexom $2i$, ak $j_{2i} > j_{2i+1}$, inak vyberieme tú s indexom $2i + 1$ (pre i od jedna po 49). Do druhej kopy dáme tie, ktoré sme nedali do prvej. Tvrdíme, že prvá kopa po pridaní krabice k_1 obsahuje aspoň polovicu jabĺk a aspoň polovicu pomarančov.

Najprv overíme, že v prvej kope s krabicou k_1 (ďalej len prvej kope) je aspoň polovica jabĺk. Totiž ak sme z každej dvojice vybrali tú krabicu, ktorá obsahovala viac jabĺk, tak v prvej kope bude aspoň toľko jabĺk ako v druhej. Ak navyše pridáme krabicu k_1, môžeme počet jabĺk v prvej kope už len zvýšiť.

Nakoniec ostáva ukázať, že v prvej kope máme aspoň polovicu pomarančov. Keďže sme vyberali stále jednu z krabíc k_{2i} a k_{2i+1}, vieme, že počet pomarančov v krabici vybranej v „nultom" kole (keď sme vybrali k_1) je väčší alebo rovnaký ako počet pomarančov v krabici *ne*vybranej v prvom kole. (Pod nevybraním rozumieme vybranie do druhej kopy.) Podobne počet pomarančov v krabici vybranej v prvom kole je väčší alebo rovnaký ako počet pomarančov v krabici *ne*vybranej v druhom kole a tak ďalej. Vo všeobecnosti pomaranče vybrané v i-tom kole počtom prevyšujú pomaranče nevybrané v $(i+1)$-om kole a nakoniec k vybraným pridáme nezáporný počet pomarančov vybraných v poslednom kole. Ľahko nahliadneme, že do prvej kopy sme vybrali aspoň polovicu pomarančov.

1.3

Tvrdenie zo zadania trochu zosilníme. Budeme dokazovať, že trojuholník API je rovnoramenný so základňou PI práve vtedy, keď platí $|BC| = |BA| + |AP|$. Ľahko vieme určiť veľkosti uhlov pri osiach uhlov v trojuholníku (obr. 61). Z toho dostaneme, že $|AP| = |AI|$ práve vtedy, keď $\alpha = 2\gamma$.



Obr. 61

Podmienka zo zadania hovorí čosi o súčte dĺžok dvoch úsečiek, ktoré majú spoločný krajný bod. Najlepšie sa s takým súčtom pracuje, ak úsečky ležia na priamke. Vezmime preto na polpriamke BA bod R taký, že $|AP| = |AR|$. Potom vzťah zo zadania zaručuje, že

$$|BC| = |BA| + |AP| = |BA| + |AR| = |BR|.$$

Takže trojuholník CBR je rovnoramenný a priamka BP je v ňom osou uhla. Toto môžeme aj obrátiť: ak je trojuholník CBR rovnoramenný, tak platí vzťah zo zadania. Takže nám ostáva dokázať, že trojuholník CBR je rovnoramenný práve vtedy, keď $\alpha = 2\gamma$ (poz. predošlý odsek). Túto poslednú podmienku najlepšie geometricky interpretujeme tak, že nájdeme dva uhly s veľkosťami α a 2γ, resp. $\alpha/2$ a γ; tieto uhly sú rovnaké práve vtedy, keď platí naša podmienka.

Trojuholník PAR je rovnoramenný, preto uhly APR aj ARP majú veľkosť $\alpha/2$.[20] Uhol BRP má teda veľkosť $\alpha/2$. Chceme dokázať, že trojuholník CBR je rovnoramenný práve vtedy, keď uhly BRP a BCP majú rovnakú veľkosť. To však hneď vyplýva z toho, že BP je osou uhla CBR.

Iné riešenie. (Podľa *Josefa Tkadleca.*) Konštrukcia bodu R v predošlom riešení bola štandardná (bežne používaný trik). Na trochu inej myšlienke je založené nasledujúce riešenie.

Najprv pripomenieme známy fakt. Majme v kružnici dve tetivy. Tieto dve tetivy majú rovnakú dĺžku práve vtedy, keď im zodpovedajúce obvodové uhly majú rovnakú veľkosť. Z tohto okrem iného vyplýva, že os uhla ACB pretína oblúk AB kružnice opísanej trojuholníku ABC v jeho strede (ten z oblúkov AB, ktorý neobsahuje bod C).

V zadanej situácii nech S je stred toho oblúka AC kružnice opísanej trojuholníku ABC, ktorý neprechádza bodom B. Ďalej nech Q je obraz bodu A v osovej súmernosti podľa osi uhla ABC. Podmienka $|BC| = |PA| + |AB|$ je ekvivalentná s tým, že $|PQ| = |QC|$. Štvoruholník $PQCS$ je tetivový, lebo úsečku PQ vidno z bodov C a S pod rovnakým uhlom veľkosti γ (uhol QSB je zo symetrie rovnaký ako ASB). V kružnici opísanej štvoruholníku $PQCS$ máme dve rovnako dlhé tetivy PQ a QC, teda aj im zodpovedajúce obvodové uhly musia byť rovnaké. Takže uhol PSC má veľkosť γ. Preto $180^\circ = |\measuredangle CSA| + |\measuredangle CBA| = 3\gamma + \beta$, čiže $\alpha = 2\gamma$. A táto rovnosť uhlov je ekvivalentná s tým, že uhly API a AIP sú rovnaké.

1.4

(Podľa *Josefa Tkadleca.*) Ak zväčšíme menovatele zlomkov, ľavá strana sa zmenší. Pokiaľ o takto upravenej ľavej strane stále vieme dokázať, že je aspoň 3, máme úlohu vyriešenú. Skúsime teda tie menovatele zhora odhadnúť tak, aby sa výrazy zjednodušili. Zrejme $ab \leqq (a^2 + b^2)/2$, preto stačí dokázať nerovnosť

$$2\left(\frac{a^2+b^2}{2c^2+a^2+b^2} + \frac{b^2+c^2}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{c^2+a^2}{2b^2+c^2+a^2}\right) \geqq 3. \tag{1}$$

Táto nerovnosť sa dá substitúciou $x = a^2$, $y = b^2$, $z = c^2$ zjednodušiť. Pozrieme sa však na substitúciu ešte lepšiu, a to takú, ktorá zjednoduší čo najviac menovatele. Nech teda $x = 2a^2 + b^2 + c^2$, $y = a^2 + 2b^2 + c^2$, $z = a^2 + b^2 + 2c^2$, potom nerovnosť (1) má po úprave tvar

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) \geqq 6$$

a je jasné, že platí (každá zátvorka je aspoň 2).

---

[20] Všimnime si, že z toho vyplýva rovnobežnosť priamok PR a IA.

Iné riešenie. (Podľa *Matúša Benka.*). Na ľavej strane zadanej nerovnosti je súčet, a súčty sa dobre zdola odhadujú pomocou AG-nerovnosti. Vyskúšame, pretože čitatele zlomkov vyzerajú byť v súčte či súčine väčšie ako menovatele.[21]

Ostáva dokázať nerovnosť

$$(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) \geqq (a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab). \tag{2}$$

Po roznásobení dostaneme na každej strane osem členov, nejaké sa vykrátia a ostane

$$a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2+a^2b^4+b^2c^4+c^2a^4 \geqq a^4bc+ab^4c+abc^4+a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3.$$

Skúsime ostatnú nerovnosť rozdeliť na dve časti a upraviť na štvorce. Sčítaním nerovností

$$a^2b^2(a^2+b^2)+b^2c^2(b^2+c^2)+c^2a^2(c^2+a^2) \geqq a^2b^2(2ab)+b^2c^2(2bc)+c^2a^2(2ca),$$
$$a^4(b^2+c^2)+b^4(c^2+a^2)+c^4(a^2+b^2) \geqq a^4(2bc)+b^4(2ca)+c^4(2ab)$$

dostaneme, čo chceme (nerovnosť ekvivalentnú s (2)).

Iné riešenie. Cauchyho nerovnosť hovorí, že

$$(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2) \geqq (x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2.$$

Preto sa táto nerovnosť tiež dá použiť na dolný odhad súčtu. Navyše máme veľkú voľnosť pri voľbe čísel x_i a y_i. V našom prípade skúsime zvoliť $n=3$ a $x_1^2=(a^2+b^2)/(c^2+ab)$ (analogicky x_2, x_3). Aby sme nedostali vo výraze x_1y_1 (na pravej strane Cauchyho nerovnosti) odmocniny, treba zvoliť dobré y_1, nám sa hodí $y_1=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+ab)}$. Analogicky zvolíme y_2, y_3. Označme si ľavú stranu zadanej nerovnosti L. Z Cauchyho nerovnosti pri popísaných voľbách dostaneme

$$L\cdot\big((a^2+b^2)(c^2+ab)+(b^2+c^2)(a^2+bc)+(c^2+a^2)(b^2+ca)\big) \geqq$$
$$\geqq (a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2)^2.$$

Ostáva dokázať, že

$$\frac{(a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2)^2}{(a^2+b^2)(c^2+ab)+(b^2+c^2)(a^2+bc)+(c^2+a^2)(b^2+ca)} \geqq 3.$$

To už ponecháme na čitateľa, podstatný krok (odstránenie menovateľa pomocou Cauchyho nerovnosti) sme predviedli.

---

[21] Podobne ako v nerovnosti $a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$ je to väčšinou tak, že strana, ktorá obsahuje „viac zmiešané" členy, je menšia. Presnejšie zachytávajú túto ideu Muirheadova nerovnosť a nerovnosť usporiadania (v angličtine rearrangement inequality). Viac sa o nich možno dozvedieť napríklad na internete.

1.5

Najprv si dohodneme značenie, aby sa nám lepšie pracovalo. Stav každej odmerky (povezdme, že sú litrové) v ľubovoľnom okamihu vieme reprezentovať usporiadanou trojicou kladných reálnych čísel (a, b, c), ktoré vyjadrujú objemy jednotlivých zložiek. Pre a, b, c máme zrejmú podmienky $a+b+c \leqq 1$ (aby sa to zmestilo do odmerky). Takúto trojicu môžeme považovať za trojrozmerný vektor a označiť si ju jedným písmenkom, napríklad $\vec{p}$. Stav odmeriek nám teda charakterizujú tri vektory (pre každú odmerku jeden) $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ a $\vec{p}_3$.

Ako vektormi popíšeme prelievanie? Ak chceme z $\vec{p}_1$ preliať nejakú časť do $\vec{p}_2$, tak jednoducho obsah odmerky, teda vektor $\vec{p}_1$, rozdelíme na dve časti: $\lambda\vec{p}_1$ a $(1-\lambda)\vec{p}_1$ pre nejaké λ z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Prvú časť necháme v prvej odmerke a druhú prelejeme do druhej. Namiesto trojice $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, $\vec{p}_3$ budeme mať $\lambda\vec{p}_1$, $\vec{p}_2 + (1-\lambda)\vec{p}_1$, $\vec{p}_3$. Musíme ale dávať pozor na to, aby sa to do druhej odmerky zmestilo, teda aby súčet jej zložiek bol aj po preliatí nanajvýš 1. Ešte dôležitejšie (ako sa neskôr ukáže) je, že λ nemôže byť 0, teda že nemôžeme úplne vyprázdniť žiadnu odmerku (premyslite si, prečo).

Na čo nám to celé bolo dobré? Minimálne sa vieme o danom probléme rýchlo a presne vyjadrovať a pracujeme s vektormi, o ktorých už čo to vieme. Kľúčovým krokom je všimnúť si, ako naše vektory vyzerajú na začiatku, a ako by vyzerali, keby sme po nejakom čase dostali v nejakej odmerke zmes, v ktorej by sa z každej kvapaliny nachádzalo rovnako veľa. Na začiatku máme vektory $\vec{p}_1 = (\frac{3}{4}, 0, 0)$, $\vec{p}_2 = (0, \frac{3}{4}, 0)$ a $\vec{p}_3 = (0, 0, \frac{3}{4})$, čiže majú smery osí x, y a z. Na konci chceme mať napr. $\vec{p}_1 = (a, a, a)$. Potom $\vec{p}_2 + \vec{p}_3 = (\frac{3}{4} - a, \frac{3}{4} - a, \frac{3}{4} - a)$. Z toho ľahko dostaneme $(\frac{3}{4} - a)\vec{p}_1 - a\vec{p}_2 - a\vec{p}_3 = 0$, čo znamená, že vektory $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, $\vec{p}_3$ sú lineárne závislé[22] (ležia v jednej rovine). A toho sa môžeme chytiť. Na začiatku máme tri lineárne nezávislé vektory a dokážeme, že prelievaním sa z nich nemôžu stať lineárne závislé vektory.

Dokážeme to sporom. Nech sa po niekoľkých krokoch podarilo dostať lineárne závislé vektory. To znamená, že v nejakom kroku sme mali vektory $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$, ktoré boli lineárne nezávislé a po preliatí (bez ujmy na všeobecnosti prelievajme z prvej do druhej odmerky) už vektory $\lambda\vec{p}_1$, $\vec{p}_2 + (1-\lambda)\vec{p}_1$, $\vec{p}_3$ boli lineárne závislé a teda existujú reálne čísla a_1, a_2, a_3 (nie všetky nulové), pričom

$$a_1\lambda + a_2(\vec{p}_2 + (1-\lambda)\vec{p}_1) + a_3\vec{p}_3 = (0, 0, 0).$$

To však jednoduchou úpravou prevedieme na

$$(a_1\lambda + a_2(1-\lambda))\vec{p}_1 + a_2\vec{p}_2 + a_3\vec{p}_3 = (0, 0, 0).$$

Ak by $a_2 = a_3 = 0$, potom $a_1\lambda + a_2(1-\lambda) = a_1\lambda \neq 0$ a teda nie všetky koeficienty pri vektoroch môžu byť nulové a preto aj vektory $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, $\vec{p}_3$ sú lineárne závislé, čo je spor s predpokladom. Preto sa nemôže stať, že by vznikla zmes, kde bude všetkých zložiek rovnako veľa.

---

[22] Tri vektory $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$ a $\vec{q}_3$ z trojrozmerného priestoru sú lineárne závislé, ak existujú reálne čísla a_1, a_2 a a_3 (nie všetky nulové) také, že $a_1\vec{q}_1 + a_2\vec{q}_2 + a_3\vec{q}_3 = (0, 0, 0)$. Ak nie sú lineárne závislé, hovoríme, že sú lineárne nezávislé.

Poznámka. Treba si všimnúť, že najpodstatnejšie je to, že nemôžeme žiadnu odmerku úplne vyprázdniť. Kvôli tomu vektory ostávajú lineárne nezávislé a nevieme dosiahnuť žiadaný cieľ. To, že odmerky majú obmedzenú kapacitu, sme žiadnym iným spôsobom nevyužívali.

Druhá séria

2.1

Bolo by pekné, keby sme vedeli (pre dané n, m, r) nájsť nejakú význačnú n-ticu $x_1, x_2, \dots, x_n$ takú, že ak tvrdenie platí pre túto n-ticu, tak zrejme bude platiť pre všetky. Tú môžeme hľadať tak, aby súčet $x_1 + \dots + x_n$ zostal nezmenený a súčet druhých mocnín bol čo najväčší. (Potom ukážeme, že význačná n-tica má súčet druhých mocnín väčší alebo rovnaký ako ostatné n-tice a menší alebo rovný $m + r^2$.) Najprv sa skúsme zamyslieť, ako by naša n-tica mohla vyzerať. Zamyslime sa nad tým, pre ktoré $a \in \langle 0, 1 \rangle$ platí rovnosť $a = a^2$. Zjavne len pre $a = 0$ alebo $a = 1$, v iných prípadoch platí $a > a^2$. Preto by bolo užitočné, keby sme v našej n-tici mali m jednotiek, jedno číslo rovné r a ostatné nuly, pretože vtedy by v nerovnosti zo zadania nastala rovnosť, teda $x_1^2 + x_2^2 + {} + \dots + x_n^2 \leqq m + r^2$. Pre tento konkrétny prípad sme to vyriešili, ako ale dostaneme všetky ostatné n-tice vyhovujúce vzťahu $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m + r$?

V tejto situácii bude vhodné využiť slová *Michala Hagaru* a pozrieť sa na čísla $x_1, \dots, x_n$ ako na n krabíc, do ktorých sa zmestí najviac 1 (napr. kilo jabĺk). Naša význačná n-tica teda zodpovedá krabiciam, ktoré sú všetky buď úplne plné, alebo úplne prázdne, až na jednu krabicu, v ktorej je r kíl ($r \in \langle 0, 1))$ jabĺk. Z ľubovoľného rozloženia jabĺk v krabici, ktoré má dokopy $m + r$ kíl, sa k tomuto rozloženiu vieme dostať jednoduchým spôsobom. Vezmeme nejaké dve krabice. Premiestnime jablká z ľahšej do ťažšej tak, aby buď bola jedna prázdna alebo druhá plná. V reči čísel zmeníme čísla x_i, x_j ($x_i > x_j$) na $x_i + c, x_j - c$ tak, aby buď $x_i + c = 1$ alebo $x_j - c = 0$. Teraz môžu nastať dve možnosti: buď sme dvojicu x_i, x_j nahradili dvojicou 1, $x_j + x_i - 1$ alebo $x_j + x_i$, 0 – podľa toho, ktorá z týchto nových dvojíc vyhovuje zadaniu – teda obe čísla sú z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. (Overte, že vždy aspoň jedna dvojica vyhovuje zadaniu.) Tento postup opakujeme, až kým nedostaneme požadovaný tvar.

Zatiaľ vieme ako sa z ľubovoľnej n-tice $x_1, \dots, x_n$ dostaneme do tvaru

$$1, \dots, 1, 0, \dots, 0, r,$$

kde číslo 1 vystupuje m-krát, číslo r raz a ostatné sú nuly. Pomôže nám to? Náš postup sa dá rozdeliť na niekoľko krokov, pričom v každom kroku meníme len dve čísla (v predchádzajúcom odseku označené x_i, x_j). V súčte sa zmenia len tieto dva členy, celkový súčet sa však nezmení. Čo platí o súčte druhých mocnín? Znova sa zmenia len dva členy, platí však $(x_i + c)^2 + (x_j - c)^2 \geqq x_i^2 + x_j^2$, pretože c je kladné a

$$\begin{aligned} x_i &\geqq x_j, \\ 2c(x_i - x_j) &\geqq 0, \\ 2c^2 + 2c(x_i - x_j) &\geqq 0, \\ x_i^2 + 2x_ic + c^2 + x_j^2 - 2x_jc + c^2 &\geqq x_i^2 + x_j^2, \\ (x_i + c)^2 + (x_j - c)^2 &\geqq x_i^2 + x_j^2. \end{aligned}$$

To už sme skoro na konci, vieme totiž, že po každom kroku nášho postupu sa súčet druhých mocnín zväčší alebo ostane rovnaký. Na konci dostaneme n-ticu, ktorej súčet druhých mocnín je presne $m + r^2$. Preto nutne musí platiť $x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqq m + r^2$.

Iné riešenie. Popíšme v krátkosti možný postup pomocou matematickej indukcie. Prvý krok, overenie platnosti tvrdenia pre $n = 1$, je jednoduchý. Pripomeňme len, že treba zvlášť rozobrať prípad $x_1 = 1$.

V druhom kroku matematickej indukcie treba dokázať platnosť tvrdenia pre $n = n_0 + 1$ za predpokladu, že tvrdenie platí pre $n = n_0$. Dôkaz sa dá rozdeliť na dve časti. Buď platí $x_1 + \cdots + x_{n_0+1} = m + (r + x_{n_0+1})$, alebo $x_1 + \cdots + x_{n_0+1} = (m+1) + (r + x_{n_0+1} - 1)$.

V prvom prípade nahradíme z indukčného predpokladu súčet $x_1^2 + \cdots + x_{n_0}^2$ väčšou hodnotou $m + r^2$ (uvedomte si, prečo to môžeme spraviť) a dostávame

$$\begin{aligned} m + r^2 + x_{n_0+1}^2 &\leqq m + r^2 + 2rx_{n_0+1} + x_{n_0+1}^2, \\ 0 &\leqq 2rx_{n_0+1}, \end{aligned}$$

čo zjavne vyplýva z toho, že $r, x_{n_0+1} \in \langle 0, 1\rangle$. V druhom prípade využijeme indukčný predpoklad rovnako, tentokrát však dostávame

$$\begin{aligned} m + r^2 + x_{n_0+1}^2 &\leqq m + 1 + r^2 + x_{n_0+1}^2 + 1 + 2rx_{n_0+1} - 2r - 2x_{n_0+1}, \\ 0 &\leqq 2 + 2rx_{n_0+1} - 2r - 2x_{n_0+1}, \\ 0 &\leqq 2(r - 1)(x_{n_0+1} - 1), \end{aligned}$$

čo znova platí. Týmto môžeme uzavrieť dôkaz matematickou indukciou.

2.2

a) Upravme zadanú rovnicu $3x^2 + x = 4y^2 + y$ na „rozumnejší“ ekvivalentný tvar

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3y^2 + x - y &= y^2, \\ (x - y)(3x + 3y + 1) &= y^2. \end{aligned}$$

Teraz zoberme prvočíslo p, ktoré delí rozdiel $x - y$. Potom delí aj pravú stranu rovnice, teda $p \mid y^2$. Avšak y^2 môžu deliť len také prvočísla, ktoré delia aj y. Z toho dostávame, že $p \mid y$ a potom aj $p \mid x$ vďaka tomu, že $p \mid x - y$. Potom ale p nemôže deliť $3x + 3y + 1$, lebo by muselo deliť aj 1.

Pozrime sa na pravú stranu – ak $p \mid y$, znamená to, že p vystupuje v prvočíselnom rozklade y v nejakej mocnine, povedzme p^k. Potom ale bude p vystupovať v prvočíselnom rozklade y^2 v dvakrát väčšej mocnine, čiže p^{2k}. Dostávame, že $p^{2k} \mid y^2$ a zároveň $p^{2k+1} \nmid y^2$. Z toho už vyplýva, že $x - y$ je druhá mocnina, čo chceme dokázať. Totiž $x-y$ musí byť deliteľné p^{2k}, pretože $3x+3y+1$ určite nie je deliteľné ani len p. Rovnako platí, že $x - y$ nie je deliteľné p^{2k+1}.

Samozrejme, toto nebola jediná možná úprava. Trochu trikovejšia (ale pre ďalšie použitie veľmi vhodná) je úprava na tvar

$$(x-y)(12x-12y+1) = (4y-3x)^2.$$

Overte sami, že je to naozaj ekvivalentné pôvodnej rovnici.

Ukážeme ešte jedno riešenie prvej časti, ktoré nám pomôže v časti b). Položme $z = x - y$, teda $x = y + z$. To, čo potrebujeme dokázať, je, že z je druhá mocnina prirodzeného čísla (premyslite si, prečo musí platiť $z > 0$). Dosaďme teraz vyjadrenie x do pôvodnej rovnice:

$$(y+z)^2 + (y+z) = 4y^2 + y,$$

z čoho po úpravách dostávame kvadratickú rovnicu

$$y^2 - 6yz - (3z^2 + z) = 0, \quad \text{teda} \quad y = \frac{6z \pm \sqrt{36z^2 + 4(3z^2+z)}}{2} = 3z \pm \sqrt{12z^2 + z}.$$

Aby bolo y prirodzené, musí byť výraz pod odmocninou druhou mocninou prirodzeného čísla (ak je $z > 0$, tak aj $12z^2 + z > 0$). Tento výraz sa však dá rozložiť na $12z^2 + z = z(12z+1)$, teda na súčin dvoch nesúdeliteľných čísel. No a podobne ako sme v prvom riešení ukázali, ak máme súčin dvoch nesúdeliteľných čísel, ktorý má byť druhou mocninou (prirodzeného čísla), musia byť oba činitele druhými mocninami. Špeciálne $z = x - y$ je druhou mocninou prirodzeného čísla, čo sme chceli.

b) Využijeme to, čo sme vyššie ukázali. Ak $z = x - y$, tak z aj $12z + 1$ musia byť druhé mocniny prirodzených čísel a navyše $y = 3z \pm \sqrt{z(12z+1)}$. Keďže $\sqrt{z(12z+1)} > \sqrt{9z^2} = 3z$ (vďaka $z > 0$) a my chceme, aby y bolo prirodzené, vyhovuje iba $y = 3z + \sqrt{z(12z+1)}$. Položme $z = p^2$ a $12z + 1 = q^2$, kde p, q sú prirodzené. Dosadením z prvého vyjadrenia do druhého dostávame, že musí platiť

$$q^2 - 12p^2 = 1. \tag{1}$$

Potrebujeme teraz ukázať, že táto rovnica má nekonečne veľa prirodzených riešení (p, q). Ak sa nám to podarí, bude existovať nekonečne veľa vyhovujúcich z (z vyjadrení $z = p^2$ a $12z + 1 = q^2$) a nekonečne veľa vyhovujúcich y (z vyjadrenia $y = 3z + \sqrt{12z^2 + z}$). Vďaka vyjadreniu $z = x - y$ bude mať potom rovnica zo zadania nekonečne veľa riešení.

Jedno riešenie rovnice (1) nájdeme ľahko, napríklad $p = 2$ a $q = 7$, označme ho $(p_1, q_1) = (2, 7)$. Ak máme ukázať, že nejaká rovnica má nekonečne veľa riešení, hodí sa nám nejaký predpis, pomocou ktorého vyjadríme ďalšie riešenie z predchádzajúceho.

Vytvoríme tak postupnosť riešení (p_n, q_n), $n = 1, 2, \dots$ Hľadaný predpis skúsime nájsť v tvare

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= A \cdot p_n + B \cdot q_n, \\ q_{n+1} &= C \cdot p_n + D \cdot q_n, \end{aligned} \qquad n = 1, 2, \dots \tag{2}$$

pričom chceme nájsť koeficienty A, B, C, D. Ak sa nám to podarí, dokázali sme, čo sme chceli.

Každé riešenie (p_n, q_n) má spĺňať rovnosť (1), preto budeme koeficienty voliť tak, aby platilo $q_{n+1}^2 - 12p_{n+1}^2 = q_n^2 - 12p_n^2$, z čoho po dosadení do (2) a zopár úpravách máme

$$\begin{aligned} (Cp_n + Dq_n)^2 - 12(Ap_n + Bq_n)^2 &= q_n^2 - 12p_n^2, \\ (C^2 - 12A^2)p_n^2 + (D^2 - 12B^2)q_n^2 + (2CD - 24AB)p_n q_n &= q_n^2 - 12p_n^2, \end{aligned}$$

čo má platiť pre každé n. Štandardným porovnaním koeficientov na oboch stranách dostávame, že pre A, B, C, D musí platiť

$$\begin{aligned} C^2 &= 12A^2 - 12, \\ D^2 &= 12B^2 + 1, \\ CD &= 12AB. \end{aligned}$$

Skúsme „tipnúť“ nejaké riešenie tejto sústavy. Najmenšie prirodzené čísla spĺňajúce druhú rovnicu sú $B = 2$, $D = 7$. Dosaďme ich do tretej, dostaneme $7C = 24A$. Najmenšie prirodzené riešenia tejto rovnice sú $A = 7$ a $C = 24$. Ľahko overíme, že vyhovujú aj prvej rovnici (24^2 je naozaj $12 \cdot 7^2 - 12$). Našli sme teda jedno riešenie $(A, B, C, D) = (7, 2, 24, 7)$, dosadíme ho teraz do (2):

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= 7p_n + 2q_n, \\ q_{n+1} &= 24p_n + 7q_n, \end{aligned} \qquad n = 1, 2, \dots$$

Môžeme vyskúšať zrátať prvých pár členov. Dostávame dvojice $(2, 7)$, $(28, 97)$, $(390, 1351)$, … Ľahko sa presvedčíme o tom, že sú to riešenia rovnice (1). Vygenerujeme takto nekonečne veľa rôznych riešení, lebo postupnosť (p_n, q_n) je evidentne rastúca. To, že sú to naozaj riešenia, je jasné z postupu hľadania A, B, C, D a formálne sa to dá dokázať matematickou indukciou.

Vďaka tomu, že $z = p^2$, $12z + 1 = q^2$ resp. $y = 3z + \sqrt{12z^2 + z}$ a vďaka rastúcosti p_n vieme potom generovať aj nekonečne veľa riešení pôvodnej rovnice $3x^2 + x = 4y^2 + y$. Dostávame tak riešenia $(x, y) = (30, 26)$, $(5852, 5068)$ atď.

c) Poďme teraz nájsť všetky riešenia rovnice (1). V tejto časti si môžeme pomôcť vedomosťami o Pellových rovniciach[23]. Sú to rovnice tvaru $x^2 - my^2 = 1$.

[23] Záujemcom o ich štúdium odporúčame prečítať si knižku *ŠMM 49 – Řetězové zlomky*, prípadne si pozrieť `http://en.wikipedia.org/wiki/Pell's_equation`.

Rovnica (1) je Pellova rovnica, a keďže m nie je druhá mocnina, vieme nájsť *všetky* jej riešenia v tvare

$$p = \frac{\left(q_1 + \sqrt{12}p_1\right)^n - \left(q_1 - \sqrt{12}p_1\right)^n}{2\sqrt{12}}, \qquad q = \frac{\left(q_1 + \sqrt{12}p_1\right)^n + \left(q_1 - \sqrt{12}p_1\right)^n}{2}.$$

Pritom (p_1, q_1) je jej najmenšie prirodzené riešenie, v našom prípade $(p_1, q_1) = (2, 7)$. Vyskúšajte si vyrátať a overiť (p_n, q_n) napríklad pre $n = 2$.

Teraz stačí už len spätne dosadiť postupne do vzťahov $z = p^2$ a $y = 3z + \sqrt{12z^2 + z}$, napokon vďaka $x = y + z$ vieme vypočítať x ako $4z + \sqrt{12z^2 + z}$. Vyjadrime najprv z ako

$$z = \left(\frac{\left(7 + 2\sqrt{12}\right)^n - \left(7 - 2\sqrt{12}\right)^n}{2\sqrt{12}}\right)^2 = \frac{\left(7 + 2\sqrt{12}\right)^{2n} - 2 + \left(7 - 2\sqrt{12}\right)^{2n}}{48}$$

pre všetky prirodzené n. Využili sme pritom, že $(7 + 2\sqrt{12})(7 - 2\sqrt{12}) = 49 - 48 = 1$. Vďaka tomu, čo sme povedali vyššie, vyhovujú rovnici $3x^2 + x = 4y^2 + y$ všetky dvojice (x, y) prirodzených čísel v tvare $(x, y) = (4z + \sqrt{12z^2 + z}, 3z + \sqrt{12z^2 + z})$.

Poznámka. Spôsobom ako v časti b) vieme skoro o každej rovnici v tvare $x^2 - my^2 = 1$, kde m, k sú prirodzené, dokázať, že má nekonečne veľa riešení. Nejde to iba v prípade, že m je druhá mocnina, povedzme l^2. Vtedy vieme rozložiť $x^2 - l^2y^2 = (x - ly)(x + ly)$. Rozmyslite si, ako by sa takáto rovnica riešila ďalej.

2.3

a) Na začiatku zopakujme zopár známych faktov, ktoré sa pri riešení úlohy zídu. Nech t je prirodzené číslo s prvočíselným rozkladom $t = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, kde $p_1, \dots, p_k$ sú rôzne prvočísla a $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sú kladné celočíselné exponenty. Takýto zápis je jednoznačný až na poradie činiteľov a je ním určený aj počet rôznych prirodzených deliteľov čísla t. Každý takýto deliteľ totiž môže vo svojom rozklade obsahovať iba prvočísla $p_1, \dots, p_k$ a každé z nich nanajvýš v takej mocnine, v akej sa vyskytuje v rozklade t. Preto t má presne $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$ rôznych deliteľov.

My chceme v oboch prípadoch nájsť číslo s desiatimi deliteľmi. Podľa predošlého odseku také číslo môže vzniknúť dvomi spôsobmi: buď ako deviata mocnina prvočísla (teda $t = p_1^9$) alebo ako súčin dvoch rôznych prvočísel, jedného v prvej mocnine a druhého vo štvrtej (teda $t = p_1 p_2^4$).

Pozrime sa najprv na prvú úlohu. Chceme nájsť prirodzené číslo n také, aby číslo $n^2 - 1$ (označme ho t) bolo tvaru p_1^9 alebo $p_1 p_2^4$. Najprv ukážeme, že také t v tvare p_1^9 neexistuje, takže týmto smerom nemá zmysel hľadať. Keďže $n^2 - 1 = (n + 1)(n - 1)$, museli by byť čísla $n + 1$ aj $n - 1$ mocninou p_1. Rozdiel týchto čísel je 2, čiže by muselo platiť $p_1^{9-k} - p_1^k = 2$ pre $k \in \{0, \dots, 4\}$. Úpravou dostávame $p_1^k(p_1^{9-2k} - 1) = 2$ a túto rovnosť zjavne nie je možné splniť.

Ostáva možnosť hľadať t v tvare $p_1 p_2^4$. Tu budeme úspešnejší, stačí vyskúšať zopár malých prvočísel a hneď objavíme riešenie $p_1 = 3$, $p_2 = 2$ a $n = 7$.

b) Chceme nájsť číslo $t = n^2 - 4$ tak, aby opäť malo tvar p_1^9 alebo $p_1p_2^4$. Tentoraz t možno rozložiť na súčin $(n-2)(n+2)$ a pre prípad $t = p_1^9$ rovnakou úvahou ako v prvej úlohe dostávame rovnicu $p_1^k(p_1^{9-2k} - 1) = 4$ pre $k \in \{0, \dots, 4\}$. Tejto rovnici opäť nevyhovuje žiadne prvočíslo p_1.

Zostal už iba prípad $t = p_1p_2^4$. Keďže $(n+2)-(n-2) = 4$, pre najväčší spoločný deliteľ týchto dvoch čísel musí platiť $\mathrm{nsd}(n+2, n-2) \in \{1, 2, 4\}$. Ak by niektoré z čísel $n-2$ a $n+2$ bolo deliteľné štyrmi, potom by jedno z nich muselo byť deliteľné ôsmimi a to by znamenalo, že prvočíslo 2 sa v t nachádza aspoň v piatej mocnine. Na druhej strane, ak by obe tieto čísla boli deliteľné dvomi, ale štyrmi nie, prvočíslo 2 by sa v t nachádzalo presne v druhej mocnine, čo opäť nevyhovuje. Preto môžeme dve z uvedených možností vylúčiť a zostane iba $\mathrm{nsd}(n+2, n-2) = 1$. Keďže $t = p_1p_2^4$, musí platiť, že jedno z čísel $n+2$, $n-2$ má hodnotu p_1 a druhé p_2^4. Ak $n - 2 = p_1$, dostávame $p_1 = p_2^4 - 4 = (p_2^2 + 2)(p_2^2 - 2)$, v opačnom prípade $p_1 = p_2^4 + 4 = (p_2^2 - 2p_2 + 2)(p_2^2 + 2p_2 + 2)$ a keďže kvôli parite $p_2 \geqq 3$, v oboch prípadoch sa dostávame do sporu s predpokladom, že p_1 je prvočíslo. Preto úloha b) nemá riešenie.

2.4

Riešenie tejto úlohy sa dá poskladať z niekoľkých faktov, ktoré tu uvedieme. Na čitateľa necháváme, aby každý z týchto faktov dokázal a usporiadal ich tak, aby vzniklo kompletné riešenie úlohy (nie je nutné využiť všetky fakty).

Nech bod P leží na priamke C_0A_0 tak, aby priamka PI bola rovnobežná s AC.

1. Body C_0 a A_0 sú stredmi oblúkov AB a CB.
2. Kružnica opísaná trojuholníku C_0A_0I má rovnaký polomer ako kružnica opísaná trojuholníku ABC a dotýka sa priamky PI. (Dôkaz cez uhly.)
3. Priamka PB je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku ABC.
4. Trojuholník PBI je rovnoramenný.

Označme K a L priesečníky priamky PI s kružnicou opísanou trojuholníku ABC. Nech M a N sú priesečníky kružnice opísanej trojuholníku C_0A_0I s priamkou C_1A_1.

5. Štvoruholník $KLMN$ je tetivový. (Dôkaz cez mocnosť bodu P k vhodným kružniciam.)
6. Bod P je má rovnakú mocnosť ku kružniciam opísaným trojuholníkom ABC, C_0A_0I a KLM, inak povedané, je spoločným priesečníkom chordál.

Poznámka. Úloha sa dá riešiť aj bez použitia mocnosti bodu ku kružnici.

2.5

(Podľa *Michala Hagaru.*) Úlohu budeme riešiť v dvoch krokoch. Najprv popíšeme postup, ako priradíme farby doštičkám pre ľubovoľné rozloženie, a potom dokážeme, že to ofarbenie vyhovuje stanoveným podmienkam.

Označme farby číslami 0, 1 a 2. Na šachovnici očíslujme riadky aj stĺpce zaradom od 1 po 3 000, teda ľubovoľné políčko šachovnice vieme popísať ako usporiadanú dvojicu (a, b) $(1 \leqq a, b \leqq 3\,000$, a je číslo riadku, b je číslo stĺpca). Teraz popíšeme, ako priradíme farbu ľubovoľnej doštičke. Sú dva typy doštičiek, horizontálne a vertikálne. Horizontálna pokrýva dve políčka (a, b) a $(a, b+1)$ a zafarbíme ju farbou, ktorú dostane ako zvyšok čísla $a + b$ po delení troma. Vertikálnu doštičku pokrývajúcu (a, b) a $(a + 1, b)$ tiež zafarbíme farbou, ktorá je zvyškom $a + b$ po delení troma. Toto farbenie si vieme predstaviť aj nasledovne. Najprv ofarbíme samotné políčka šachovnice tak, že políčku (a, b) priradíme farbu určenú zvyškom $a + b$ po delení troma. Potom každá dominová doštička dostane takú farbu, akú zakrýva jej časť, ktorá má menší súčet súradníc, teda je „viac vľavo“ alebo „viac hore“ ako tá druhá.

Teraz potrebujeme overiť dve veci. To, že každá doštička susedí s najviac dvoma kockami takej farby ako ona sama, možno overiť ľahko. Stačí na to jeden obrázok, kde uvidíme, že ak si tam nejakú doštičku umiestnime, tak sa jej naozaj môžu dotýkať najviac dve rovnakej farby ako ona. Posledné, čo musíme overiť, je, že každú farbu sme použili rovnako veľa krát. Označme p_0, p_1 a p_2 počty doštičiek jednotlivých farieb. Keďže každá doštička farby $i \in \{0, 1, 2\}$ zakryje políčka farby i a $i+1$ (farba 3 je totožná s farbou 0), vieme, že p_0+p_2 vyjadruje, koľko políčok farby nula zakryjú dokopy všetky doštičky, atď. Na šachovnici je z každej farby rovnako veľa políčok. Preto musí platiť

$$p_0 + p_2 = p_1 + p_0 = p_2 + p_1,$$
$$p_0 + p_1 + p_2 = \frac{3\,000^2}{2}.$$

Riešením tejto sústavy je $p_0 = p_1 = p_2 = 3\,000^2/6$, a tým je úloha vyriešená.

Iné riešenie. (Podľa *Miroslava Majerčíka.*) Druhé riešenie, možno ešte jednoduchšie ako prvé, využíva iné ofarbenie. Ofarbime šachovnicu nasledovne: Políčku so súradnicami (a, b) priradíme farbu určenú zvyškom čísla a po delení troma, ak $a+b$ je párne. Ak je $a + b$ nepárne, dané políčko necháme nezafarbené. Rozmiestnené doštičky ofarbíme podľa toho, akú má farbu políčko, ktoré zakrývajú (každá zakrýva práve jedno ofarbené a jedno neofarbené). Sami dokážte, že toto ofarbenie vyhovuje zadaniu.

Tretia séria

3.1

Pred samotným riešením treba spomenúť, že uhol medzi úsečkou a priamkou sa meria presne ako medzi priamkou (na ktorej leží tá úsečka) a priamkou – a to je vždy ten menší z nich.

Keď nakreslíme zopár obrázkov, zistíme, že máme veľa možností, ako môžu byť body A a B usporiadané. Pre rôzne takéto usporiadania vyjde zrejme aj iný počet riešení, preto si ich skúsime vhodne kategorizovať. Výborné rozdelenie je takéto: vzniknuté uhly buď majú prienik, alebo nemajú. Uvažujeme prienik okrem spoločného bodu M – ten vždy musia mať.

Tie, čo nemajú prienik, majú spoločnú vlastnosť, že bod M sa nachádza medzi kolmými priemetmi bodov A a B na priamku p. (Tieto priemety nazvime A_0 a B_0.) Druhá kategória riešení má bod M na priamke p buď vpravo, alebo naľavo od bodov A_0 a B_0.

Pozrime sa najprv na prvú kategóriu riešení a nakreslime nejaký obrázok, pre ktorý sa dá nájsť nejaký bod M vyhovujúci zadaniu. Čo tam vidíme? Keď ho nakreslíme správne (aj s bodom A' osovo súmerným s bodom A) tak vidíme, že priamka BM je osou uhla zovretého medzi úsečkou $A'M$ a priamkou p. To znamená, že kolmicou z bodu A' na túto os uhla dostaneme na priamke p bod C, ktorý je veľmi dôležitý. Trojuholník $A'CM$ je totiž rovnoramenný, ba navyše aj trojuholník $A'CB$ je rovnoramenný – oba sú zostrojené nad základňou $A'C$. Toto je fakt, ktorý nám umožní zostrojiť M – nájdeme A', nájdeme C, nájdeme stred $A'C$ a tento stred spojíme s B. Táto spojnica pretne priamku p v bode M. A teraz sa pozrime na „háčiky“: jeden je v nájdení bodu C. Tie totiž môžu byť dva, pretože C hľadáme ako priesečník kružnice z bodu B s polomerom BA'. Zvyšok postupu je úplne jednoznačný, teoreticky nám teda vyjdú dva body M. Trik je v tom, že keď použijeme „sedliacky“ rozum, tak zistíme, že môže vyjsť maximálne jeden bod M v tejto kategórii (t. j. medzi bodmi A_0, B_0). Ak máme totiž nejaký bod M vyhovujúci podmienkam zadania a pohneme s ním na priamke smerom k bodu A_0, tak uhol s AM stúpa a uhol s BM klesá a teda nemôže znova nastať situácia, že uhol p s AM bude dvojnásobok toho druhého. Druhý háčik je v tom, že sme začali obrázkom, kde M existoval a teda našli sme len *nutnú* podmienku pre existenciu M. Takýto bod medzi A_0 a B_0 vôbec nemusí existovať a to z dôvodu, že bod C vôbec nemusí vzniknúť, alebo M nevyjde na priamke p medzi A_0 a B_0. V týchto prípadoch môžeme konštatovať, že je poloha p, A, B nepriaznivá a riešenie neexistuje.

Teraz druhá kategória riešení. Zasa začneme obrázkom, kde taký bod M existuje a pozorujeme. Nemusíme ani chodiť do opačnej polroviny, ktorá obsahuje body A, B, aby sme si všimli, že BM je osou uhla medzi p a AM. (Je tu istá analógia s predchádzajúcou kategóriou.) Kolmica z bodu A na túto os uhla pretne priamku v bode, ktorý označíme opäť C. Trojuholník ACM je rovnoramenný a taktiež je rovnoramenný aj trojuholník ACB. Bod C vieme teda zostrojiť ako priesečník kružnice z B s priemerom AB a priamky p. Potom nájdeme stred úsečky AC a ten spojíme s B. Táto priamka pretne p v bode M. Ostáva previesť diskusiu. Začali sme obrázkom, kde bod M existoval a potom sme zdôvodnili, ako sa dá nájsť. Našli sme teda nutnú podmienku jeho existencie a teda tento postup nemusí vždy určiť bod, ktorý vyhovuje. Týmto postupom však vyjdú maximálne dva body, ktoré sú kandidátmi na M – podľa počtu priesečníkov kružnice s priamkou. Ak aj vyjdú dva priesečníky, tak nejaký M môže stále spadnúť medzi A_0 a B_0, čím už nespadá do tejto kategórie a preto ho nemôžme prijať do „košíka“ s riešeniami tejto úlohy. V tejto kategórii však dve riešenia vyjsť môžu – vhodný obrázok iste za chvíľu nájdete.

3.2

Máme nájsť všetky také funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktoré pre ľubovoľné reálne čísla x, y spĺňajú

$$f(x^3) + f(y^3) = x^2 f(x) + y f(y^2). \tag{1}$$

Vyskúšajme za x a y dosadiť nejaké konkrétne čísla, najlepšie nejaké jednoduché, ako 0, 1, -1. Ak dosadíme $x = y = 0$, zisťujeme, že platí $f(0) + f(0) = 0$ a teda $f(0) = 0$. Dosadenia s 1 a -1 už presne neurčia inú funkčnú hodnotu.

Ďalej skúsme nahradiť v našej rovnici konkrétnym číslom len jedno z x, y. Napríklad ak položíme $x=0$, dostávame $f(0)+f(y^3)=0+yf(y^2)$, teda pre každé reálne y platí $f(y^3)=yf(y^2)$. To vyzerá celkom užitočne. Ak dosadíme $y=0$ a x necháme ľubovoľné, dostaneme $f(x^3)=x^2f(x)$. Čo sme o funkcii f zistili? Pre každú funkciu, ktorá spĺňa (1), musí pre každé reálne x platiť

$$f(x^3)=xf(x^2)=x^2f(x). \tag{2}$$

Podmienka $f(0)=0$ sa nestratila, vyplýva z práve napísanej rovnice pre $x=0$. Uvedomme si, že ak funkcia f spĺňa (2), potom spĺňa aj (1). Tým sme ukázali ekvivalenciu podmienok (1) a (2).

Ďalej do (2) dosadíme x a $-x$ ($x\neq 0$). Dostávame

$$\begin{aligned} xf(x^2)&=x^2f(x),\\ -xf((-x)^2)&=(-x)^2f(-x). \end{aligned}$$

Porovnaním týchto rovníc dostaneme $f(x)=-f(-x)$. To platí pre každé x a teda funkcia f je nepárna.

Ľahko si možno všimnúť, že zadaniu vyhovujú všetky funkcie tvaru $f(x)=kx$, kde k je ľubovoľná reálna konštanta. Existujú však aj iné vyhovujúce funkcie. Pokúsme sa ich nájsť.

Poďme na to nasledovne. Majme kladné reálne číslo a a nech $f(a)=b$. Čo všetko vieme potom zistiť o hodnotách f v iných bodoch? Pomocou $f(x^3)=x^2f(x)$ a $f(x^2)=$ $=xf(x)$ (dosadením $x=a$, $x=a^{1/2}$, či $x=a^{1/3}$) ľahko vyrátame $f(a^2)=ab$, $f(a^3)=a^2b$, $f(a^{1/2})=a^{-1/2}b$ a $f(a^{1/3})=a^{-2/3}b$. Keď poznáme tieto hodnoty, vieme zistiť aj $f(a^4)=a^3b$, $f(a^6)=a^5b$, $f(a^{1/6})=a^{-5/6}b,\dots$ Teda ak poznáme f v bode a a číslo c dostaneme z a len umocňovaním na 2, 3, 1/2 a 1/3, tak poznáme aj hodnotu f v bode c. Presnejšie, chceme dokázať, že z $f(a)=b$ vieme zistiť hodnotu vo všetkých bodoch tvaru $a^{2^m3^n}$, kde m, n sú celé čísla. Dokonca sa zdá, že platí $f(a^{2^m3^n})=$ $=ba^{2^m3^n-1}$. Ako to formálne dokážeme? Skúsme indukciu vzhľadom na $|m|+|n|$. Pre $|m|+|n|=0$, teda $m=n=0$, je to zrejmé. Majme prirodzené k také, že pre všetky dvojice celých m a n, pre ktoré $|m|+|n|<k$, platí $f(a^{2^m3^n})=ba^{2^m3^n-1}$. Nech m a n sú celé čísla, pričom $|m|+|n|=k$. Rozoberieme tri prípady. Najprv nech m je kladné. Potom využitím (2) pre $x=a^{2^{m-1}3^n}$ dostávame

$$\begin{aligned} a^{2^{m-1}3^n}f((a^{2^{m-1}3^n})^2)&=(a^{2^{m-1}3^n})^2f(a^{2^{m-1}3^n}),\\ f(a^{2^m3^n})&=a^{2^{m-1}3^n}ba^{2^{m-1}3^n-1},\\ f(a^{2^m3^n})&=ba^{2^m3^n-1}, \end{aligned}$$

pričom sme využili indukčný predpoklad pre $m-1$ a n ($|m-1|+|n|=k-1<k$). Ak je m záporné, postupujeme rovnako, ale dosadzujeme $x=a^{2^{m+1}3^n}$. Zostáva prípad $m=0$, čiže $|n|=k$. Tu naše tvrdenie dokážeme využitím $f(x^3)=x^2f(x)$ (a indukčného predpokladu) pre $x=a^{3^{n-1}}$ ak $n=k$ a $x=a^{3^{n+1}}$ ak $n=-k$. Tým sme dôkaz indukciou dokončili.

Zhrňme to. Podarilo sa nám dokázať, že pre ľubovoľné celé čísla m a n platí

$$f(a^{2^m3^n}) = ba^{2^m3^n-1} = \frac{b}{a}a^{2^m3^n}.$$

Z nepárnosti ďalej dostávame

$$f(-a^{2^m3^n}) = -ba^{2^m3^n-1} = \frac{b}{a}(-a^{2^m3^n}).$$

Teda akonáhle určíme hodnotu f v bode a ($f(a) = b$), určíme aj hodnoty v množine $M_a = \{\pm|a|^{2^m3^n} : m, n \in \mathbb{Z}\}$. (Rozmyslite si, že to platí pre kladné, záporné aj nulové a.) Na množine M_a sa f musí správať lineárne, teda pre $x \in M_a$ platí $f(x) = xb/a$. Kľúčom k úplnému riešeniu je uvedomiť si, že žiadne iné hodnoty už predpoklad $f(a) = b$ neovplyvní. Ukážeme, že množiny tvaru M_a tvoria *rozklad* množiny reálnych čísel, čiže ak s, t sú dve reálne čísla, tak množiny M_s a M_t sú buď disjunktné, alebo totožné. Dôkaz je dosť technický, stačí si uvedomiť, že ak nejaké reálne číslo z patrí do oboch množín, tak potom $M_s = M_z$ a $M_z = M_t$.

Teraz pre každú množinu M_a určíme lineárny koeficient k_a taký, že $f(x) = k_a x$ pre $x \in M_a$. Musíme to spraviť tak, že ak $M_a = M_b$, tak $k_a = k_b$. Tým sme určili f vo všetkých bodoch ako $f(x) = k_x x$. Riešenie (1) či (2) musí mať takýto tvar. Ukážeme, že to stačí. S takto definovanou funkciou máme $f(x^3) = k_{x^3}x^3$, $xf(x^2) = k_{x^2}x^3$ a $x^2f(x) = k_x x^3$. Tieto tri hodnoty sa však rovnajú, lebo ľahko ukážeme, že $M_x = M_{x^2} = M_{x^3}$, z čoho už vyplýva $k_{x^3} = k_{x^2} = k_x$. Našli sme všetky vyhovujúce funkcie a pokúsili sa podať ich čo najpresnejšiu charakterizáciu.

3.3

Úvodná idea býva pekne pravidelne štvorec nakrájať deviatimi vodorovnými a deviatimi zvislými rezmi. Podávaná porcia takto činí sto kusov po 0,01. Miškove tvrdenie asi tesne neplatí.

Spomeňme najprv vhodné postrehy. Všimnime si, že úsečky neležiace na už nakreslenej uzavretej čiare („končeky") sú zbytočné. Takže preformulujeme zadanie na „... *súčet dĺžok najviac* 18" a predpokladáme, že už sme z porcií vyhádzali končeky. Celé sa to rozpadne na n pravouholníkov. Označme S_i ich obsahy a O_i ich obvody. Predpokladajme, že $S_i < 0{,}01$, alebo ekvivalentne $10S_i < \sqrt{S_i}$. Dĺžka úsečiek, ktoré ostali, je v obvodoch zarátaná dvakrát (z každej strany) plus obvod celého štvorca (z jednej strany). Preto $\sum_{i=1}^{n} O_i \leqq 40$. Okrem toho $\sum_{i=1}^{n} S_i = 1$.

Toto by už malo evokovať známu väzbu medzi obsahom a obvodom: Zo všetkých pravouholníkov s daným obsahom má najmenší obvod štvorec (získame tým nerovnosť $4\sqrt{S_i} \leqq O_i$). Presvedčte sa, že je to ekvivalentné s tvrdením: Zo všetkých pravouholníkov s daným obvodom má najväčší obsah štvorec.

Keď už máme predstavu, čo urobíme, dohodnime sa, že konvexným obalom útvaru S nazveme najmenší konvexný útvar $C(S)$, ktorý obsahuje S. (Akoby ste okolo S navliekli gumičku.)

V reťazi dôkazu chýba len kľúčové ohnivko – maximálnosť obsahu štvorca. Najprv ukážme, že taký pravouholník P musí byť konvexný. Urobíme to algoritmom, ktorý transformuje útvar P na P' s rovnakým obvodom, ale väčším obsahom. Uvažujme $C(P)$, je to mnohouholník a jeho vrcholy sú aj vrcholmi P. Ak by každá dvojica susedných vrcholov $C(P)$ bola susednou v P, oba útvary by boli identické. My ale predpokladáme, že P je nekonvexný. Preto existujú susedia X, Y v $C(P)$ nesusediaci v P. Tí rozdelia O_P na „obvodové“ výseky XY a YX. Hľadaný algoritmus znie napríklad takto: Výsek XY ponechať a výsek YX otočiť stredovo súmerne podľa stredu úsečky XY. Obvod sa zachová a pretože stredová súmernosť nemení neorientovaný smer priamky, dostávame pravouholník. Pritom jeho obvod sa nikde nekríži (výseky sa sami o sebe nekrížili ani predtým. Pokiaľ by sa pretli navzájom, musel by priesečník ležať na priamke XY, z čoho ľahko máme, že by sa pretínali už skôr). Obsah sa zrejme zväčšil, lebo P' obsahuje P v jednej polrovine ohraničenej priamkou XY a rozkladá sa aj v opačnej (vrcholy X, Y v P nesusedili). Maximálny obsah má teda obdĺžnik alebo štvorec. Majme štvorec s obvodom $4a$. Ľubovoľný obdĺžnik s rovnakým obvodom má strany $a-\varphi$ a $a+\varphi$, takže obsah je len $a^2 - \varphi^2 < a^2$. Teraz už len dáme nerovnosti dokopy:

$$40 \cdot 1 = \sum_{i=1}^{n} 4 \cdot 10 S_i < \sum_{i=1}^{n} 4\sqrt{S_i} \leqq \sum_{i=1}^{n} O_i \leqq 40.$$

Teda $40 < 40$, máme spor.

3.4

Najskôr trošku zjednodušme označenie a položme $\varphi(m) = \varphi(m, m)$. Skúsený riešiteľ v tomto rozozná významnú Eulerovu funkciu. Pre naše potreby však jej znalosť nie je nevyhnutná a úplne nám vystačí jej nasledovná vlastnosť.

(1): Ak m je deliteľné prvočíslom p, tak $\varphi(m) \leqq m - m/p$, pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď m je mocninou p.

Dôkaz tohto tvrdenia je celkom jednoduchý. Uvažujme ľubovoľné prirodzené číslo m deliteľné prvočíslom p. Nech $P = \{p, 2p, 3p, \dots , m\}$, čiže množina prirodzených čísel menších alebo rovných m deliteľných p. Všetky tieto čísla sú súdeliteľné s m, preto $\varphi(m) \leqq m - |P| = m - m/p$. Ak m je mocninou p, tak P obsahuje všetky čísla súdeliteľné s m, a preto v (1) nastáva rovnosť. Naopak, ak m je deliteľné nejakým prvočíslom q rôznym od p, tak q je súdeliteľné s m a $q \notin P$, teda nerovnosť v (1) je ostrá.

Teraz sa už pustíme do riešenia samotného problému. Neformálne vyjadruje $\varphi(n, m)/n$ akúsi hustotu čísel nesúdeliteľných s m v rozmedzí $1, \dots , n$. Ak chceme túto hodnotu minimalizovať, mali by sme zobrať čo najviac čísel súdeliteľných s m a useknúť to za posledným z nich. Takisto je jasné, že rozmiestnenie čísel nesúdeliteľných s m sa opakuje s periódou m, preto sa stačí zamerať na $n \leqq m$. Skúsme teda zobrať napríklad najväčšie $n < m$ súdeliteľné s m a uvidíme, či nám to niečo dá. Teda $n = m - p$, kde p je najmenšie prvočíslo deliace m. (Uvažujme teraz len zložené m.) Potom $\varphi(n, m) = \varphi(m) - p + 1$, pretože všetky čísla medzi n a m sú podľa predpokladu s m nesúdeliteľné.

Požadujeme

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(n,m)}{n} &\geqq \frac{\varphi(m,m)}{m},\\
\frac{\varphi(m)-p+1}{m-p} &\geqq \frac{\varphi(m)}{m},\\
m(\varphi(m)-p+1) &\geqq (m-p)\varphi(m),\\
p\varphi(m) &\geqq mp-m,\\
\varphi(m) &\geqq m-\frac{m}{p}.
\end{aligned}$$

Porovnaním tohto výsledku s (1) môžeme usúdiť, že m musí byť mocninou p. Naopak, ak p je prvočíslo a $m=p^\alpha$, tak čísla súdeliteľné s m sú práve tie, ktoré sú deliteľné p, a tých je v rozmedzí $1,\dots,n$ presne $\lfloor n/p\rfloor$. Preto $\varphi(n,m)=n-\lfloor n/p\rfloor$. Máme

$$\frac{\varphi(n,m)}{n}=\frac{n-\lfloor\frac{n}{p}\rfloor}{n}\geqq\frac{n-\frac{n}{p}}{n}=\frac{m-\frac{m}{p}}{m}=\frac{\varphi(m)}{m}.$$

Zistili sme, že riešením sú všetky m, ktoré sú mocninami prvočísel.

Poznámka. Pre Eulerovu funkciu φ platí

$$\varphi(m)=m\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right),$$

kde $m=\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}$ je kanonický rozklad m na prvočísla. Vlastnosť (1) odtiaľ vyplýva automaticky.

3.5

a) Tvar členov zadanej nerovnosti už na prvý pohľad pripomína rozvoj výrazov tvaru $(x_i+x_{i+1})^2$, preto nie je problém upraviť pre $p=1$ nerovnosť ekvivalentnými úpravami na súčet štvorcov:

$$\begin{aligned}
x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2 &\geqq x_1x_2+\dots+x_{n-1}x_n,\\
x_1^2-x_1x_2+x_2^2-x_2x_3+\dots-x_{n-1}x_n+x_n^2 &\geqq 0,\\
\frac{x_1^2}{2}+\frac{(x_1-x_2)^2}{2}+\frac{(x_2-x_3)^2}{2}+\dots+\frac{(x_{n-1}-x_n)^2}{2}+\frac{x_n^2}{2} &\geqq 0.
\end{aligned}$$

Teda pre $p=1$ je nerovnosť vždy splnená. Otázka však je, či by nemohlo existovať aj nejaké väčšie p, ktoré by malo túto vlastnosť. Odpoveď je, že nemohlo, a dokážeme to sporom. Nech $p=1+d$, kde d je kladné reálne číslo. Dosaďme do nerovnosti za všetky x_i hodnotu 1:

$$\begin{aligned}
x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2 &\geqq (1+d)(x_1x_2+x_2x_3+\dots+x_{n-1}x_n),\\
n\cdot 1 &\geqq (1+d)((n-1)\cdot 1),\\
1 &\geqq d(n-1),\\
\frac{1}{d}+1 &\geqq n.
\end{aligned}$$

Keďže n môže byť ľubovoľne veľké, posledná nerovnosť určite nebude vždy splnená, čo je spor.

b) Najskôr vyriešme špeciálny prípad $n = 1$, pre ktorý má zadaná nerovnosť tvar

$$x_1^2 \geqq p \cdot 0.$$

Toto zrejme platí pre ľubovoľné p, preto najväčšie možné p neexistuje.

Ďalej už stačí uvažovať len pevne dané $n \geqq 2$. Ak si pozorne prečítame dôkaz časti a) tejto úlohy, určite si všimneme, že na ľavej strane ostal nevyužitý výraz $x_1^2/2 + x_n^2/2$. Pomocou neho by sa nám mohlo podariť upraviť nerovnosť na súčet štvorcov aj pre niektoré $p > 1$, v ideálnom prípade na tvar

$$(a_1x_1 - b_1x_2)^2 + (a_2x_2 - b_2x_3)^2 + \cdots + (a_{n-1}x_{n-1} - b_{n-1}x_n)^2 \geqq 0.$$

To sa samozrejme nedá vždy, my sa však pokúsime zistiť, či to pre nejaké $p > 1$ predsa len nepôjde. Keďže tento tvar chceme dostať úpravou pôvodnej nerovnosti, získame roznásobením vzťahy

$$2a_ib_i = p, \quad b_i^2 + a_{i+1}^2 = 1, \quad a_1^2 = 1, \quad b_{n-1}^2 = 1.$$

Vyjadrime teraz b_i pomocou a_i a a_{i+1} rekurentne pomocou predchádzajúcich a_i:

$$\begin{aligned} b_i &= \frac{p}{2a_i}, \\ a_{i+1}^2 &= 1 - b_i^2 = 1 - \frac{p^2}{4a_i^2}, \\ \frac{2a_{i+1}^2}{p} &= \frac{2}{p} - \frac{p}{2a_i^2}, \\ c_{i+1} &= \frac{2}{p} - \frac{1}{c_i}, \\ \frac{1}{c_i} + c_{i+1} &= \frac{2}{p}. \end{aligned}$$

V predposlednom kroku sme zaviedli substitúciu $2a_i^2/p = c_i$. Ak ešte dodefinujeme $a_n^2 = 1 - b_{n-1}^2$ a pomocou neho aj c_n, dostávame z $a_1^2 = 1$ a $b_{n-1}^2 = 1$ počiatočné a koncové podmienky $c_1 = 2/p$ a $c_n = 0$. Pomocou nájdeného rekurentného vzťahu by sme teraz už mali byť schopní vyjadriť c_n pomocou c_1 a z toho, že c_n poznáme, vyrátať p. Nebude to však vôbec také ľahké, pretože naša rekurencia má síce jednoduchý, ale dosť nepríjemný tvar. Oveľa lepšie by sa riešilo niečo, kde by sa neznáme nachádzali len v čitateli a najlepšie všetky len ako lineárne členy. To sa dá dosiahnuť ďalšou substitúciou:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_i} + c_{i+1} &= \frac{2}{p}, \\ 1 + c_ic_{i+1} &= \frac{2c_i}{p}, \\ \pi_{i+1} - \frac{2\pi_i}{p} + \pi_{i-1} &= 0, \end{aligned}$$

kde $\pi_k = \prod_{i=1}^{k} c_i$ a špeciálne $\pi_0 = 1$. Na riešenie takejto lineárnej rekurencie už existuje známy postup, stačí nájsť korene λ_1, λ_2 polynómu $x^2 - \frac{2}{p}x + 1$ a riešením rekurencie potom bude každý výraz tvaru $\pi_k = \alpha\lambda_1^k + \beta\lambda_2^k$:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\frac{2}{p} \pm \sqrt{\frac{4}{p^2} - 4}}{2} = \frac{1}{p} \pm \sqrt{\frac{1}{p^2} - 1}.$$

Ak vezmeme do úvahy, že poznáme hodnoty $\pi_0 = 1$ a $\pi_1 = 2/p$, vieme jednoznačne určiť aj koeficienty α, β. Keďže nás zaujímajú hlavne $p > 1$, môžeme si hneď všimnúť, že oba korene sú komplexné čísla – to nás však nemá prečo zastaviť. Väčším problémom je skôr to, že aby sme našli c_n, budeme musieť vypočítať λ_1^n a λ_2^n, čo bude v tom tvare, v akom máme $\lambda_{1,2}$ vyjadrené, dosť nepraktické. Tu prichádza užitočný trik, ktorý sa často používa aj v iných úlohách. Všimnime si, že $1/p \in (0,1)$ a že pod odmocninou by sme dostali štvorec, ak by sme použili vhodnú goniometrickú substitúciu. Zvoľme $\varphi \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ také, že $\cos\varphi = 1/p$:

$$\lambda_{1,2} = \cos\varphi \pm \sqrt{\cos^2\varphi - 1} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi.$$

Takto vyjadrené $\lambda_{1,2}$ vieme ľahko umocňovať pomocou Moivreovho vzorca $(\cos\varphi \pm \pm\, i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) \pm i\sin(n\varphi)$. Z rovností

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \alpha\lambda_1^0 + \beta\lambda_2^0,\\ \pi_1 &= \alpha\lambda_1^1 + \beta\lambda_2^1\end{aligned}$$

už vieme priamočiaro dopočítať α a β a dostávame pre π_k vyjadrenie

$$\begin{aligned}
\pi_k &= \frac{\sin\varphi - i\cos\varphi}{2\sin\varphi}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^k + \frac{\sin\varphi + i\cos\varphi}{2\sin\varphi}(\cos\varphi - i\sin\varphi)^k,\\
\pi_k &= \frac{(\sin\varphi - i\cos\varphi)(\cos(k\varphi) + i\sin(k\varphi)) + (\sin\varphi + i\cos\varphi)(\cos(k\varphi) - i\sin(k\varphi))}{2\sin\varphi},\\
\pi_k &= \frac{2\sin\varphi\cos(k\varphi) + 2\sin(k\varphi)\cos\varphi}{2\sin\varphi},\\
\pi_k &= \frac{\sin((k+1)\varphi)}{\sin\varphi},\\
c_k &= \frac{\pi_k}{\pi_{k-1}} = \frac{\sin((k+1)\varphi)}{\sin(k\varphi)}.
\end{aligned}$$

V rámci skúšky správnosti by sme mali skontrolovať, či sme nikde nedelili nulou – musí platiť $\sin(k\varphi) \neq 0$ pre všetky $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Na záver nás zaujíma, kedy $c_n = 0$. To je práve vtedy, keď $\sin((n+1)\varphi) = 0$, z čoho už máme jednoznačne určené $\varphi = \pi/(n+1)$ a $p = 1/\cos(\pi/(n+1))$.

Dokázali sme teda, že pre $p = 1/\cos(\pi/(n+1))$ môžeme členy nerovnosti dať na jednu stranu a upraviť ich na súčet štvorcov, teda nerovnosť bude splnená. Je to však už najväčšie možné také p? Dokážeme to opäť sporom. Nech $p = 1/\cos(\pi/(n+1)) + d$, kde $d > 0$. Nerovnosť môžeme upraviť na tvar

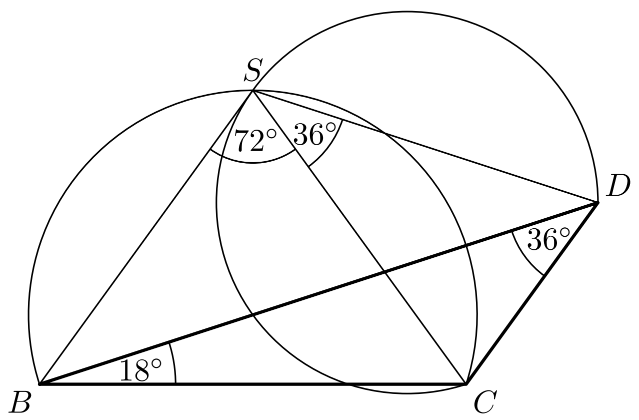
$$(a_1x_1 - b_1x_2)^2 + (a_2x_2 - b_2x_3)^2 + \cdots + (a_{n-1}x_{n-1} - b_{n-1}x_n)^2 \geqq d(x_1x_2 + \cdots + x_{n-1}x_n).$$

Položme $x_1 = 1$ a $x_{i+1} = a_ix_i/b_i$ pre ostatné členy. Ľavá strana tak bude nulová a keďže a_i, b_i sú všetky kladné, tak aj x_i budú kladné a teda pravá strana nerovnosti bude kladná. Nerovnosť nie je splnená, čo je spor.

Štvrtá séria

4.1

(Podľa *Hany Šormovej.*) Vezmime trojuholník BCD, v ktorom zo zadania poznáme $|\measuredangle BDC| = 36°$ a $|\measuredangle CBD| = 18°$. Opíšeme tomuto trojuholníku kružnicu, jej stred označíme S. Z vety o obvodovom a stredovom uhle vyplýva (obr. 62), že $|\measuredangle BSC| = 2|\measuredangle BDC| = 72°$ a $|\measuredangle CSD| = 2|\measuredangle CBD| = 36°$. (Sú to stredové uhly prislúchajúce tetivám BC a CD.)

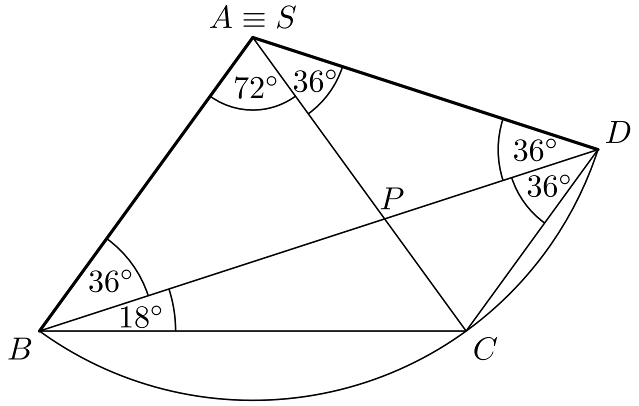


Obr. 62

Všimnime si, že podľa zadania platí $|\measuredangle BSC| = |\measuredangle BAC|$ aj $|\measuredangle CSD| = |\measuredangle CAD|$. Je to prinajmenšom podozrivé, skúsime dokázať, že body S a A sú *totožné*. Keďže je štvoruholník $ABCD$ konvexný, body A, D, S ležia v tej istej polrovine určenej priamkou BC. Podobne body A, B, S ležia v tej istej polrovine vzhľadom na CD. Skonštruujme teraz známym spôsobom

- množinu bodov, z ktorých vidno úsečku BC pod uhlom 72°,
- množinu bodov, z ktorých vidno úsečku CD pod uhlom 36°,

pričom skonštruujeme iba tie časti množín, ktoré ležia v spomínaných polrovinách. (Tie druhé osovo súmerné časti by boli zbytočné.) Koľko je takých bodov, že ležia na oboch skonštruovaných oblúkoch? Zrejme sú najviac dva a jeden z nich je bod C. Ale na oboch oblúkoch musia ležať aj body A a S, z čoho dostávame, že sú naozaj totožné.



Obr. 63

Inak povedané, bod A je stredom kružnice opísanej trojuholníku BCD (obr. 63). Vďaka tomu platí $|AB| = |AC|$, a preto je trojuholník ABD rovnoramenný. Dopočítaním veľkosti uhlov pri základni dostávame

$$|\measuredangle DBA| = |\measuredangle BDA| = \frac{180° - 72° - 36°}{2} = 36°.$$

Teraz už v trojuholníku APD poznáme veľkosti všetkých uhlov až na hľadaný uhol APD, ktorého veľkosť dopočítame ako $180° - |\measuredangle BDA| - |\measuredangle CAD| = 180° - 36° - 72° = 108°$. Ešte môžeme pre istotu skúsiť dopočítať veľkosti ostatných uhlov v štvoruholníku, aby bolo jasné, či takýto štvoruholník $ABCD$ vôbec existuje.

4.2

Zrejme nezáleží na tom, akými číslami očíslujeme body na kružnici, dôležitá je len ich parita. Taktiež nezáleží na presnej polohe bodov, iba na ich vzájomnom poradí. Keď ich poposúvame bez narušenia ich poradia, tak to nijako neovplyvní to, ktoré ich spojnice sa pretínajú. Odteraz preto budeme vždy predpokladať, že sú na kružnici rozmiestnené rovnomerne.

Na začiatku hry sa párne a nepárne body pravidelne striedajú, jedinou výnimkou sú susedné body 1 a N pre nepárne N. Ukážeme, ako túto pravidelnosť využiť. Zoberme nejakú pozíciu s párnym počtom bodov (nie nutne pravidelnú), v ktorej ešte nie sú žiadne úsečky. Ku každému bodu potom vieme jednoznačne priradiť jemu protiľahlý bod. Povieme, že táto pozícia je symetrická, ak každé dva protiľahlé body majú rovnakú paritu. Naopak, pozícia je antisymetrická, ak každé dva protiľahlé body majú rôznu paritu. Teda zobrazením bodov v stredovej súmernosti cez stred kružnice sa symetrická pozícia zobrazí sama na seba, zatiaľ čo antisymetrická sa zobrazí na sebe opačnú pozíciu. Budeme predpokladať, že ťaháme prví, súper ide druhý.

Každá symetrická pozícia je vyhrávajúca. Stačí spojiť ľubovoľné dva protiľahlé body. Týmto sa hra rozpadne na dve súmerné polovice. Odteraz môžeme jednoducho opakovať po súperovi. Keďže žiadna ďalšia úsečka nemôže pretínať prvú, tak každé dva spojené body budú patriť do tej istej polovice. Ak súper spojí nejaké dva body rovnakej parity v jednej polovici, my spojíme im protiľahlé v druhej polovici. (Tieto majú tiež rovnakú paritu kvôli symetrii.) Po každom našom kroku bude celková herná situácia stredovo súmerná, preto ak súper môže urobiť ťah v jednej polovici, my môžeme urobiť rovnaký ťah v druhej. To znamená, že takto nemôžeme nikdy prehrať. A keďže hra skončí po konečnom počte krokov, tak takto určite vyhráme.

Každá antisymetrická pozícia je prehrávajúca. Tentokrát môže súper opakovať po nás. Predpokladajme, že na začiatku nášho ťahu sú doteraz nakreslené úsečky rozmiestnené stredovo súmerne. Buď nemáme žiadny možný ťah a prehrávame, alebo môžeme spojiť nejaké dva body A a B. Tieto body určite nie sú protiľahlé, lebo každé dva protiľahlé body majú podľa predpokladu rôznu paritu. To znamená, že ich spojnica AB neprechádza stredom kružnice. Pozrime sa na im protiľahlé body A' a B'. Keďže A a B mali rovnakú paritu, tak A' a B' majú tiež rovnakú paritu. Úsečka $A'B'$ je obrazom úsečky AB v stredovej súmernosti cez stred kružnice a AB týmto stredom neprechádza, preto $A'B'$ nepretína AB. Takisto $A'B'$ nepretína žiadnu z predošlých úsečiek, lebo ani AB nepretína žiadnu z nich a pred našim ťahom bola situácia stredovo súmerná. To znamená, že súper môže podľa pravidiel spojiť A' a B' a tým súmernosť obnoviť. Takto si zaručí, že bude môcť vždy potiahnuť, a vyhrá.

Už sme skoro na konci. Stačí si uvedomiť, že počiatočné pozície pre N tvaru $4k$ sú symetrické a pre N tvaru $4k+2$ antisymetrické. Ostáva už len vyšetriť nepárne N.

Nech $N = 4k+1$. Pre $N = 1$ máme prehrávajúcu pozíciu. Pre väčšie N spojme body N a $N-2$, ktoré sú oba nepárne. Žiadny z bodov $N-2$, $N-1$ a N sa už nebude dať použiť, môžeme ich kľudne vymazať bez ovplyvnenia budúcich ťahov. Súperovi ostanú body $1, 2, \cdots, N-3$, ktoré tvoria prehrávajúcu pozíciu. Vyhráme my.

Pri $N = 4k+3$ spojme body $2k+1$ a $2k+3$, oba nepárne. Podobne ako v predošlom prípade, body $2k+1$, $2k+2$ a $2k+3$ môžeme teraz vymazať bez ovplyvnenia budúcich ťahov. Ostáva nám $4k$ bodov, pozor však, ich parita sa nestrieda tak ako pre $N = 4k$. V skutočnosti je výsledná pozícia antisymetrická, a teda prehrávajúca. Opäť vyhráme my.

Záver. Prvý hráč vyhrá práve vtedy, keď $N > 1$ a N nie je tvaru $4k+2$.

4.3

Najprv ukážeme jeden poučný princíp na riešenie mnohých diofantických rovníc. Majme kladné racionálne číslo q, prirodzené číslo m a hľadáme prirodzené riešenia rovnice

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_m} = q.$$

Všeobecný postup je nasledovný. Ak by všetky zlomky $1/a_i$ pre $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ boli menšie ako q/m, tak rovnosť určite nenastáva. Čiže aspoň pre jedno i platí $1/a_i \geqq q/m$. Vzhľadom na symetrickosť rovnice nech $i = m$. Toto nám však povie, že $a_m \leqq m/q$, teda $a_m \in \{1, 2, \ldots, \lfloor m/q \rfloor\}$. To je však konečný počet možností a tak vieme rovnicu riešiť nasledovne. Pre každé $a_m \in \{1, 2, \ldots, \lfloor m/q \rfloor\}$ vyriešime rovnicu s neznámymi $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ tvaru

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{m-1}} = q - \frac{1}{a_m}.$$

To je opäť rovnica tvaru, aký sme mali na začiatku, ale má o jednu neznámu menej. Keď sme vyberali $i = m$, mohli sme dokonca povedať, že a_m bude najmenšie zo všetkých čísel a_i a tak pri riešení tejto „podúlohy" s konkrétnym a_m môžeme predpokladať, že $a_i \geqq a_m$ pre všetky $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$. Takto sa úloha bude vetviť, ale v každej vetve časom dôjdeme až na rovnicu o jednej neznámej tvaru

$$\frac{1}{a_1} = q - \frac{1}{a_m} - \frac{1}{a_{m-1}} - \dots - \frac{1}{a_2}.$$

Tá má zrejme riešenie práve vtedy, ak pravá strana je prevrátená hodnota nejakého prirodzeného čísla, čo veľmi ľahko skontrolujeme. Riešenia pôvodnej rovnice tvoria všetky permutácie riešení, ktoré týmto algoritmom dostaneme.

Príklad. Nech $m = 3$ a $q = \frac{3}{2}$, hľadáme prirodzené riešenia rovnice

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{3}{2}.$$

Nech a_3 je najmenšie z čísel a_1, a_2, a_3. Potom môže byť najviac $m/q = 2$. Rozoberieme dva prípady:

Nech $a_3 = 1$. Potom riešime rovnicu

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{1} = \frac{1}{2}.$$

Nech a_2 nie je väčšie ako a_1. Potom môže byť najviac $2/\frac{1}{2} = 4$. Rozoberieme prípady $a_2 = 1, 2, 3, 4$ a zistíme, kedy vieme dorátať prirodzené a_1. Vyjde to práve pre $a_2 = 3$ a $a_2 = 4$, čím dostaneme riešenia $(6, 3, 1)$ a $(4, 4, 1)$.

Nech $a_3 = 2$. Teraz musí platiť $a_1, a_2 \geqq 2$. Navyše a_2 môže byť najviac $\frac{2}{1} = 2$, čiže $a_2 = 2$ a z toho máme rovno $a_1 = 2$, čiže aj $(2, 2, 2)$ je riešenie.

Vyzbrojení takýmto aparátom sa hravo môžeme pustiť do danej úlohy. Skúmajme najprv len také m-tice prirodzených čísel $a_1, a_2, \dots, a_m$, ktorých súčet obrátených hodnôt je 1. Pre konkrétne m je takých m-tíc len konečne veľa (vyplýva to z postupu, ktorý sme si popísali), takže nerobí problém nájsť všetky pre malé m. Nech teraz máme špeciálne egyptské číslo n (ďalej len ŠEČ) také, že $n = a_1 + a_2 + \dots + a_m$. Použitím Cauchyho nerovnosti (alebo nerovnosti medzi harmonickým a aritmetickým priemerom) dostaneme

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_m}\right) \geqq m^2,$$

čo po nahradení prvej zátvorky číslom n a druhej jednotkou dáva $n \geqq m^2$. Preto ak preveríme napríklad $m = 1, 2, 3, 4$, tak určite dostaneme všetky ŠEČ do 25 a tie čísla čo nedostaneme nebudú ŠEČ. Takto zistíme, že ŠEČ do 25 sú

$$1,\ 4,\ 9,\ 10,\ 11,\ 16,\ 17,\ 18,\ 20,\ 22,\ 24,\ 25.$$

Vidíme, že ani také veľké číslo ako 23 nie je ŠEČ. Zdá sa však, že všetky väčšie už sú. To začína byť celkom dobrý základ pre nejaký indukčný dôkaz, že všetky ďalšie čísla (počnúc 24) sú ŠEČ. Ale ako spraviť druhý indukčný krok? Majme nejaké ŠEČ $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$. Potom $2n = 2a_1 + 2a_2 + \cdots + 2a_m$ a

$$\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \cdots + \frac{1}{2a_m} = \frac{1}{2}.$$

Pričítaním $\frac{1}{2}$ k obom stranám dostávame

$$\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \cdots + \frac{1}{2a_m} + \frac{1}{2} = 1.$$

Teda $2n + 2 = 2a_1 + 2a_2 + \cdots + 2a_m + 2$ je ŠEČ. Analogicky dostaneme pre $2n + 9 = 2a_1 + 2a_2 + \cdots + 2a_m + 3 + 6$, že

$$\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \cdots + \frac{1}{2a_m} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1.$$

Teraz stačí, ak ukážeme, že čísla $24, 25, 26, \ldots, 56$ sú ŠEČ a môžeme to pre zvyšné dokázať indukciou. Formálne: Nech $24, 25, 26, \ldots, k$ sú ŠEČ pričom $k \geqq 56$. Potom ak k je párne, tak $(k-2)/2 \geqq 24$ je ŠEČ a teda aj k je ŠEČ. Ak k je nepárne, potom $(k-9)/2 \geqq 24$ je ŠEČ, teda aj k je ŠEČ.

Tým sme dokončili obe časti, teda vieme presne ktoré čísla sú ŠEČ a ktoré nie.

4.4

Strany trojuholníka $A'B'C'$ označme a', b', c' ($a' = a + b/2$, $b' = b + c/2$, $c' = c + a/2$). Ďalej nech

$$s = \frac{a+b+c}{2}, \qquad s' = \frac{a'+b'+c'}{2} = \frac{3}{4}(a+b+c).$$

Vyjadrime obsahy trojuholníkov ABC a $A'B'C'$ pomocou Herónovho vzorca. Obsah trojuholníka ABC je

$$S_{ABC} = \sqrt{\frac{(a+b+c)}{2}\frac{(-a+b+c)}{2}\frac{(a-b+c)}{2}\frac{(a+b-c)}{2}}.$$

Podobne pre obsah trojuholníka $A'B'C'$ platí

$$S_{A'B'C'} = \sqrt{\frac{3}{4}(a+b+c)\frac{(3a+c-b)}{4}\frac{(3b+a-c)}{4}\frac{(3b+a-c)}{4}}.$$

Vpísaná kružnica trojuholníka ABC rozdelí jeho strany na úseky, ktoré označme x, y, z. Platí $a = y + z$, $b = x + z$ a $c = x + y$. Pre obsah trojuholníka ABC dostávame

$$S_{ABC} = \sqrt{(x+y+z)xyz}.$$

Pre obsah trojuholníka $A'B'C'$ máme

$$S_{A'B'C'} = \sqrt{\frac{3(x+y+z)}{2}\frac{(2y+z)}{2}\frac{(2z+x)}{2}\frac{(2x+y)}{2}}.$$

Chceme dokázať nerovnosť

$$\sqrt{\frac{3(x+y+z)}{2}\frac{(2y+z)}{2}\frac{(2z+x)}{2}\frac{(2x+y)}{2}} \geqq \frac{9}{4}\sqrt{(x+y+z)xyz}.$$

Po umocnení a jednoduchých úpravách z nej dostaneme ekvivalentnú nerovnosť

$$(2y+z)(2z+x)(2x+y) \geqq 27xyz.$$

Stačí už len roznásobiť a upraviť na

$$2zy^2 + 2yx^2 + 2xz^2 + xy^2 + yz^2 + zx^2 \geqq 9xyz.$$

Toto tvrdenie sa už dá dostať priamo z AG nerovnosti:

$$\begin{aligned} 2zy^2 + 2yx^2 + 2xz^2 &= 6\left(\frac{zy^2 + yx^2 + xz^2}{3}\right) \geqq 6\sqrt[3]{(zy^2)(yx^2)(xz^2)} = 6xyz, \\ xy^2 + yz^2 + zx^2 &= 3\left(\frac{xy^2 + yz^2 + zx^2}{3}\right) \geqq 3\sqrt[3]{(xy^2)(yz^2)(zx^2)} = 3xyz. \end{aligned}$$

Tým sme nerovnosť pre trojuholníky dokázali.

4.5

Ako to už s funkcionálnymi rovnicami býva často zvykom, aj táto má len triviálne (dokonca konštantné) riešenia. Dokázať však, že toto sú naozaj všetky, už také jednoduché nie je. Ako začať? Skúsme najprv vyšetriť, kedy môže naša funkcia nadobúdať nulové hodnoty. Týmto sa neskôr vyhneme možným problémom s delením. Predpokladajme, že existuje $a \in \mathbb{R}$ také, že $f(a) = 0$. Dosadením $y = a$ do zadanej rovnice dostaneme

$$f(x+a) = f(x)f(a)f(xa) = 0 \qquad \text{pre všetky } x \in \mathbb{R},$$

z čoho ihneď usudzujeme, že $f(t) = 0$ pre všetky t, čo je jedno z riešení našej rovnice.

Odteraz môžeme predpokladať, že f nikde nenadobúda hodnotu 0. Teraz prichádza na rad kľúčový trik v riešení, a tým je vyjadriť $f(2+x)$ dvoma rôznymi spôsobmi:

$$\begin{aligned} f(2+x) &= f(1+(1+x)) = f(1)f(1+x)f(1+x) = f(1)f(1+x)^2 = \\ &= f(1)\big(f(1)f(x)f(x)\big)^2 = f(1)^3 f(x)^4, \\ f(2+x) &= f(2)f(x)f(2x) = f(1+1)f(x)f(x+x) = \\ &= \big(f(1)f(1)f(1)\big)f(x)\big(f(x)f(x)f(x^2)\big) = f(1)^3 f(x)^3 f(x^2). \end{aligned}$$

Porovnaním týchto výrazov dostávame $f(x) = f(x^2)$ pre všetky x. Z tohto vyplýva, že f je nevyhnutne párna funkcia, pretože $f(-x) = f((-x)^2) = f(x^2) = f(x)$. Na záver položme $y = -x$ do pôvodnej rovnice:

$$\begin{aligned} f(x-x) &= f(x)f(-x)f(-x^2), \\ f(0) &= f(x)f(x)f(x^2), \\ f(0) &= f(x)^3, \\ \sqrt[3]{f(0)} &= f(x), \end{aligned}$$

čiže f je konštantná funkcia. Poľahky overíme, že $f(x) = c$ je riešením práve vtedy, keď c je -1, 0 alebo 1.

PIATA SÉRIA

5.1

Poďme skúsiť nájsť nejakú funkciu $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ktorá by vyhovovala podmienke zo zadania. Keďže

$$f(f(n-1)) = f(n+1) - f(n) \tag{1}$$

pre $n \geqq 2$ a funkčná hodnota $f(f(n-1))$ je väčšia ako nula, dostávame, že $f(n+1) - f(n) > 0$. Takže pre $n \geqq 2$ je f rastúca, pretože vtedy platí $f(n+1) > f(n)$.

Skúsme teraz zdola odhadnúť funkčnú hodnotu $f(n)$ pre $n \geqq 2$ (o $f(1)$ sa nebudeme starať, pretože tam nemáme zaručenú rastúcosť f). Zrejme $f(2) \geqq 1$, pretože f je funkcia do prirodzených čísel. Vďaka rastúcosti je $f(3)$ väčšie ako $f(2) \geqq 1$, takže $f(3) \geqq 2$. Induktívne vieme postupovať ďalej postupom

$$f(n) > f(n-1) > \dots > f(2) \geqq 1 \quad \Longrightarrow \quad f(n) \geqq n-1. \tag{2}$$

Dolný odhad $f(n) \geqq n-1$ pre $n \geqq 2$ by sme mali, skúsme pre zmenu odhadovať zhora. Vieme, že určite je $f(n) > 0$. Odtiaľ a z rovnice (1) dostávame, že pre $k \geqq 2$ platí $f(f(k-1)) < f(k+1)$, pretože od $f(k+1)$ odčítavame kladnú hodnotu $f(k)$. Teraz môžeme opäť použiť rastúcosť funkcie f a „vykrátiť" predchádzajúcu nerovnosť na $f(k-1) < k+1$ (rozmyslite si, prečo to tak môžeme urobiť). Máme už aj nejaký horný odhad, ak navyše zameníme $(k-1)$ za n, dostávame $f(n) < n+2$ pre všetky prirodzené n. To nám spolu s (2) dáva

$$n+2 > f(n) \geqq n-1 \qquad \text{pre } n \geqq 2.$$

Keď sme už rozbehnutí v odhadovaní, odhadneme ešte rozdiel $f(n+1) - f(n)$ zhora pre $n \geqq 2$. Z horného odhadu pre $f(n+1)$ a z dolného odhadu pre $f(n)$ máme

$$f(n+1) - f(n) < (n+3) - (n-1) = 4.$$

Teraz sa už len stačí pozorne pozrieť na (1). Pre $n \geqq 7$ je pravá strana menšia ako 4, kým ľavá strana je (podľa dolného odhadu pre $f(n)$) určite aspoň 4, lebo $f(f(n-1)) \geqq f(n-1) - 1 \geqq (n-2) - 1 = n-3 \geqq 4$ pre $n \geqq 7$. No a to je spor. Funkcia $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ spĺňajúca podmienku zo zadania neexistuje.

5.2

Stačí dokázať, že ak bude mať mnohouholník všetky strany nepárnej dĺžky, nebude sa dať pokryť dominovými kockami. Uvažujme takýto mnohouholník a rozdeľme ho na štvorčeky veľkosti 1×1. Tie vyfarbime striedavo čiernou a bielou farbou tak, aby žiadne dva hranou susediace štvorčeky nemali rovnakú farbu. (Rovnako, ako políčka na šachovnici.) Aby sa dal mnohouholník pokryť dominovými kockami, musí obsahovať rovnako veľa čiernych a bielych políčok, pretože každá dominová kocka umiestnená rovnobežne s jeho stranami zaberie práve jedno čierne a jedno biele políčko. Toto platí dokonca aj v prípade, že dominová kocka nebude presne zarovnaná s našou štvorčekovou sieťou, ale posunutá o nejakú neceločíselnú vzdialenosť – bude sa síce prekrývať s viac ako dvoma štvorčekmi, ale celkový obsah prekrytej bielej časti bude rovnaký, ako obsah prekrytej čiernej časti, a to presne jedna.

Našim cieľom teraz bude ukázať, že čiernych a bielych políčok nemôže byť rovnako veľa. Pozrime sa bližšie na vrcholy nášho mnohouholníka. Konvexnými vrcholmi budeme nazývať tie vrcholy, pri ktorých je vnútorný uhol $90°$, a nekonvexnými tie, pri ktorých je vnútorný uhol mnohouholníka rovný $270°$. Všimnime si, že políčka pri konvexných vrcholoch sú všetky rovnakej farby – nech je to bez ujmy na všeobecnosti čierna – a pri nekonvexných vrcholoch sú vždy dve čierne a jedno biele políčko. Je to tak preto, lebo všetky strany nášho mnohouholníka sú nepárnej dĺžky, a teda ak aspoň jeden konvexný vrchol má pri sebe čierne políčko, musia aj susedné vrcholy mať jedno čierne políčko ak sú konvexné, resp. dve čierne políčka ak sú nekonvexné. To isté platí aj pre vrcholy susediace s týmito susednými vrcholmi, a tak ďalej, až pre všetky vrcholy mnohouholníka.

Uvažujme teraz mrežové body vo vnútri a na obvode mnohouholníka. (Mrežové body sú body, kde sa pretínajú vodorovné a zvislé čiary štvorčekovej siete, t. j. vrcholy čiernych a bielych štvorčekov. Napríklad každý vrchol mnohouholníka by mal byť zároveň mrežovým bodom.) Nech v je počet mrežových bodov vnútri mnohouholníka, k počet konvexných vrcholov, n počet nekonvexných vrcholov a o počet ostatných mrežových bodov na obvode mnohouholníka. Každý vnútorný mrežový bod susedí s dvoma bielymi a dvoma čiernymi štvorčekmi, konvexný vrchol s jedným čiernym a žiadnymi bielymi štvorčekmi, nekonvexný vrchol s dvoma čiernymi a jedným bielym štvorčekom a ostatné obvodové mrežové body susedia vždy s jedným bielym a jedným čiernym štvorčekom. Pre celkový počet štvorčekov máme

$$\text{počet bielych štvorčekov} = 2v + n + o,$$
$$\text{počet čiernych štvorčekov} = 2v + k + 2n + o.$$

Takýmto spôsobom sme ale veľa štvorčekov započítali viackrát. Každý štvorček sme započítali presne štyrikrát – raz za každý jeho vrchol. Stačí horeuvedené počty vydeliť štyrmi a dostaneme správny výsledok. Čiernych políčok bude o $(k + n)/4 =$ $=$ (počet vrcholov)/4 viac ako bielych, čím je dôkaz ukončený. Mimochodom, z nášho výsledku tiež vyplýva, že počet vrcholov v pravouhlom mnohouholníku s nepárnymi dĺžkami strán je vždy deliteľný štyrmi.

5.3

Ak medzi tými deviatimi číslami existujú dve disjunktné dvojice $\{a, c\}$ a $\{b, d\}$ (spolu štyri rôzne čísla) také, že v každej dvojici majú obe čísla rovnaký zvyšok po delení dvadsiatimi, tak $a + b - c - d = (a - c) + (b - d)$ je deliteľné dvadsiatimi. Ak také dve dvojice neexistujú, znamená to, že medzi tými deviatimi číslami sa opakuje najviac jeden zvyšok po delení dvadsiatimi a opakuje sa najviac trikrát. Teda tých deväť čísel obsahuje aspoň sedem rôznych zvyškov reprezentovaných siedmimi rôznymi číslami z deväťprvkovej množiny. Spomedzi týchto sedem čísel vieme vybrať $\binom{7}{2} = 21$ dvojíc, teda podľa Dirichletovho princípu nejaké dve rôzne dvojice $\{a, b\}$ a $\{c, d\}$ (tu slovo „rôzne“ znamená $\{a, b\} \neq \{c, d\}$, ale nemusí platiť $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$) také, že $a + b$ a $c + d$ majú rovnaké zvyšky po delení dvadsiatimi. Ak by tieto dvojice mali neprázdny prienik, teda bez ujmy na všeobecnosti $a = c$, potom b a d majú nutne rovnaký zvyšok po delení dvadsiatimi, preto $b = d$, čiže dvojice $\{a, b\}$ a $\{c, d\}$ sa rovnajú, čo je spor. Preto musia byť disjunktné: $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$. Teraz však štvorica a, b, c, d dáva riešenie. Rozobrali sme všetky možnosti a prvú časť máme za sebou.

Čo sa pokazí ak by sme ten istý postup chceli aplikovať na osemprvkovú množinu? Nefungoval by nám Dirichletov princíp, lebo $\binom{6}{2} = 15 < 20$. Tak skúsime nájsť protipríklad. Budeme mať sedem rôznych zvyškov po delení dvadsiatimi, pričom jeden, povedzme 0, sa zopakuje trikrát. Začneme číslami 0, 20, 40. Po chvíľke hrania sa a skúšania zvyšné čísla hravo doplníme, napr. 1, 2, 4, 7 a 12. Na úplné riešenie však musíme ukázať, že z množiny $\{0, 20, 40, 1, 2, 4, 7, 12\}$ naozaj nejde vybrať štvoricu a, b, c, d, akú by sme chceli. Rozoberieme niekoľko možností:

- Ak by medzi číslami a, b, c, d boli 0, 20 aj 40, určite by $a + b - c - d$ nebolo deliteľné dvadsiatimi (práve kvôli tomu štvrtému číslu).
- Ak by dve z čísel a, b, c, d boli deliteľné dvadsiatimi a dve nie, tak by to znamenalo, že buď súčet, alebo rozdiel dvoch rôznych čísel z množiny $\{1, 2, 4, 7, 12\}$ je deliteľný dvadsiatimi. Rozdiel hneď vylúčime a dostávame len súčty 3, 5, 6, 8, 9, 11, 13, 14, 16, 19.
- Ak každé z čísel a, b, c, d má rôzny zvyšok po delení dvadsiatimi, tak to by znamenalo, že dve disjunktné dvojice čísel z množiny $\{0, 1, 2, 4, 7, 12\}$ majú rovnaký súčet modulo 20 (tu 0 reprezentuje jedno číslo z $\{0, 20, 40\}$). Dvojice ale dávajú 15 rôznych súčtov 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 19.

Rozobrali sme všetky možnosti a ukázali sme, že pre množinu $\{0, 20, 40, 1, 2, 4, 7, 12\}$ hľadané a, b, c, d neexistujú.

5.4

Budeme využívať poznatok, že druhé mocniny rastú pomalšie ako tretie mocniny prirodzených čísel a preto pre dosť veľké m budú medzi číslami m^3 a $(m + 1)^3$ aspoň dve druhé mocniny k^2 a l^2, $k < l$. Ak sa nám toto podarí dokázať, potom stačí zvoliť $a = k^2$, $b = kl$ a $c = l^2$. Zrejme

$$m^3 < a < b < c < (m + 1)^3$$

a $abc = (kl)^3$, čo sme chceli. Už len dokázať, že pre dosť veľké m existujú dve rôzne druhé mocniny medzi m^3 a $(m + 1)^3$. Na to nám stačí ukázať, že rozdiel odmocnín $(m + 1)^3$ a m^3 je väčší ako 2, čiže

$$(m + 1)^{3/2} - m^{3/2} > 2.$$

Pre $m \geqq 5$ to dokážeme odhadom

$$(m+1)^{3/2} - m^{3/2} = (m+1)\sqrt{m+1} - m\sqrt{m} \geqq (m+1)\sqrt{m} - m\sqrt{m} = \sqrt{m} > 2.$$

Z toho vieme, že pre $m \geqq 5$ existujú dve rôzne prirodzené čísla k, l také, že

$$m^{3/2} < k < l < (m+1)^{3/2} \quad \text{čiže} \quad m^3 < k^2 < l^2 < (m+1)^3.$$

Tým sme dokázali sme, že môžeme zvoliť $M = 4$.

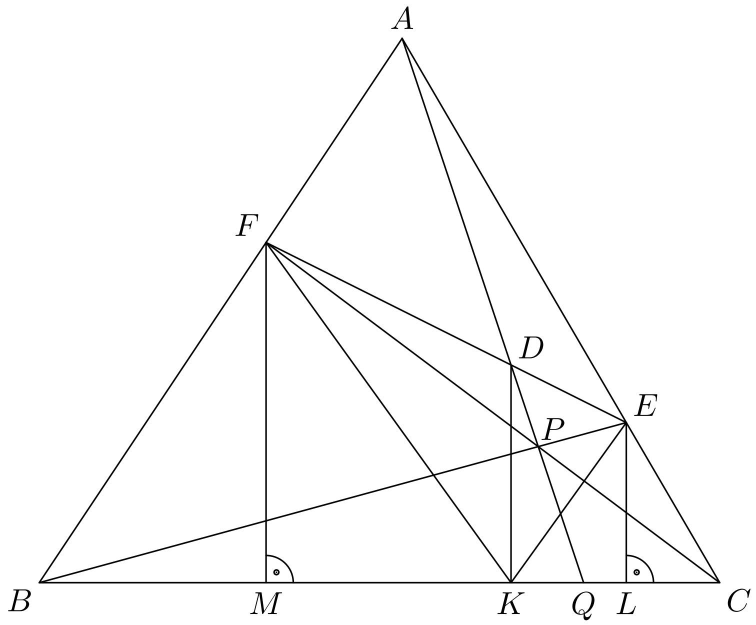
Iné riešenie. Skúsime a, b, c vyjadriť ako nejaké jednoduché funkcie premennej m. Aby sedeli nerovnosti, patrilo by sa, aby to boli nejaké polynómy tretieho stupňa premennej m. Po nejakom skúšaní ľahko objavíme trojicu

$$\begin{aligned} a &= (m-1)^2(m+3), \\ b &= (m-1)m(m+3), \\ c &= m^2(m+3). \end{aligned}$$

Súčin $abc = ((m-1)m(m+3))^3$ je tretia mocnina a podmienka $m^3 < a < b < c < (m+1)^3$ platí (ako sami určite zvládnete ukázať) pre $m \geqq 5$, teda opäť stačí zvoliť $M = 4$.

5.5

Päty kolmíc z bodov F a E na stranu BC označme M a L (obr. 64). Taktiež budeme potrebovať prienik priamok AP a AC, ktorý označme Q. Chceme dokázať, že KD je os uhla EKF. Stačí ukázať, že veľkosti $|\measuredangle BKF| = \alpha$ a $|\measuredangle CKE| = \beta$ sú rovnako veľké, čo je ekvivalentné s podmienkou $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$. Teraz bude našou stratégiou ukázať platnosť



Obr. 64

tohto tvrdenia pomocou toho, že budeme postupne vyjadrovať iným spôsobom všetko, čo budeme vedieť vyjadriť, a nakoniec to nečakane vyjde. Z trojuholníkov FMK a ELK máme

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|FM|}{|MK|}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{|EL|}{|KL|}.$$

Ďalej z trojuholníka BFM vieme vyjadriť $|FM| = |BF| \sin|\measuredangle ABC|$. Podobne z trojuholníka ELC dostaneme $|EL| = |EC| \sin|\measuredangle ACB|$.

Keďže body K, L a M sú kolmé priemety bodov D, E a F, tak medzi nimi ostali zachované pomery vzdialeností, teda

$$\frac{|KM|}{|KL|} = \frac{|FD|}{|DE|}.$$

Takže zatiaľ sme zistili,že

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{|BF| \sin|\measuredangle ABC|}{|EC| \sin|\measuredangle ACB|} \cdot \frac{|DE|}{|FD|}. \tag{1}$$

Z Čevovej vety vieme o úsekoch BQ, QC, EC, EA, AF a BF, že sú v pomeroch

$$\frac{|BQ|}{|QC|} = \frac{z}{y}, \quad \frac{|CE|}{|AE|} = \frac{x}{z}, \quad \frac{|AF|}{|BF|} = \frac{y}{x}.$$

Potom pre dĺžky úsečiek BF a EC máme vyjadrenia

$$\frac{|BF|}{|AB|} = \frac{x}{x+y} \quad \Longrightarrow \quad |BF| = \frac{x}{x+y}|AB|,$$
$$\frac{|EC|}{|AC|} = \frac{x}{x+z} \quad \Longrightarrow \quad |EC| = \frac{x}{x+z}|AC|.$$

Po dosadení do vzťahu (1) dostaneme

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{x+z}{x+y} \cdot \frac{|AB| \sin|\measuredangle ABC|}{|AC| \sin|\measuredangle ACB|} \cdot \frac{|DE|}{|FD|}. \tag{2}$$

Zo vzťahov pre obsah trojuholníka ABC vidíme, že $|AC| \cdot |BC| \cdot \sin|\measuredangle ACB| = |AB| \cdot |BC| \cdot \sin|\measuredangle ABC|$, preto sa vzťah (2) zjednoduší na

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{x+z}{x+y} \cdot \frac{|DE|}{|FD|}. \tag{3}$$

Toto vyzerá oveľa jednoduchšie ako na začiatku. Už to len doklepnúť. Chvíľu sa budeme zabávať s obsahmi. Vieme, že

$$\frac{|DE|}{|FD|} = \frac{S_{AED}}{S_{AFD}} = \frac{S_{PED}}{S_{PFD}} = \frac{S_{PEA}}{S_{PFA}}.$$

Ďalej z trojuholníka APB vyplýva

$$\frac{S_{PFA}}{S_{PFB}} = \frac{|AF|}{|BF|} = \frac{y}{x},$$
$$S_{PFA} = S_{PBA} \cdot \frac{y}{x+y}.$$

Analogicky dostaneme pre obsah trojuholníka PEA vzťah

$$S_{PEA} = S_{PCA} \cdot \frac{z}{x+z}.$$

Vzťah (3) vieme potom prepísať na vzťah

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{z}{y} \cdot \frac{S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle PBA}}. \tag{4}$$

Už len nejako „prepojiť" obsahy trojuholníkov ABP a ACP:

$$\frac{y}{z} = \frac{S_{ACQ}}{S_{ABQ}} = \frac{S_{PCQ}}{S_{PBQ}} = \frac{S_{ACQ} - S_{PCQ}}{S_{ABQ} - S_{PBQ}} = \frac{S_{ACP}}{S_{ABP}}.$$

Takže vidíme, že daný vzťah (4) platí. Tým sme úlohu vyriešili.

Siesta séria

6.1

Úlohu dokážeme sporom, nech teda niektoré z čísel nie je druhou odmocninou racionálneho čísla. Vieme, že sčítaním, odčítaním, násobením alebo *nenulovým* delením racionálnych čísel dostávame zasa racionálne čísla (hovoríme o *uzavretosti* množiny racionálnych čísel vzhľadom na dané operácie). Skúsme to využiť. Môžeme tu mať nenulové racionálne číslo? Z uzavretosti racionálnych čísel by všetkých desať bolo racionálnych a tým skôr by tvrdenie platilo, takže nie. Dvojice s racionálnym súčtom spojme modrou čiarou a ostatné s racionálnym súčinom červenou.

Aspoň deväť čísel je nenulových. Potom aspoň päť má rovnaké znamienko. Bez ujmy na všeobecnosti nech je to znamienko kladné. (Všetko len preto, aby sme neskôr nedelili nulou.) Zamerajme sa na tých päť čísel. Môžeme mať trojuholník s jednou modrou stranou? Potom by $((ab) + (ca))/(b + c) = a$ bolo racionálne (delíme kladným číslom), opäť záporná odpoveď. A čo modrý trojuholník? Zasa by $0{,}5 \cdot ((a+b) - (b+c) + (c+a)) = a$ bolo racionálne, do tretice nie. Pre červený trojuholník dostávame $(ab)(ca)/(bc) = a^2$ racionálne (delíme kladným číslom), cyklicky aj b^2, c^2 sú racionálne.

Ak máme červené čiary uv, vw a $u \neq w$, tak aj čiara uw je červená. Táto vlastnosť je veľmi silná, hovorí totiž, že ak sa vieme po červených čiarach dostať z čísla do čísla, tak sú obe spojené červenou čiarou. Znamená to, že dostaneme niekoľko skupín, v každej skupine sú medzi číslami len červené čiary a medzi nimi sú len modré čiary.

Znamená to, že dostaneme niekoľko skupín čísel oddelených modrou, pričom v skupine je každá čiara červená. Už vieme, že môžu existovať najviac dve také červené skupiny. Takže musí existovať červená skupina s aspoň troma číslami (červený trojuholník) a štvorce týchto čísiel (označme dve čísla ako $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$) budú racionálne.

Vráťme sa späť ku všetkým číslam. Ak a^2, ab sú racionálne, tak aj $(ab)(ab)/(a^2) = b^2$ bude racionálne. Preto každé číslo spojené červenou s červenou skupinou má racionálny štvorec. Existuje teda x spojené modrou s $\sqrt{p}$ aj $\sqrt{q}$, čiže $x + \sqrt{p}$, $x + \sqrt{q}$ sú racionálne. Máme $(x+\sqrt{p})-(x+\sqrt{q}) = \sqrt{p}-\sqrt{q}$. (Racionálne.) Potom $(p-q)/(\sqrt{p}-\sqrt{q}) = \sqrt{p}+\sqrt{q}$ je racionálne (delíme nenulovým číslom), výsledne $0{,}5 \cdot ((\sqrt{p} + \sqrt{q}) + (\sqrt{p} - \sqrt{q})) = \sqrt{p}$ je tiež racionálne. Máme teda medzi desiatimi číslami nejaké racionálne, čo je spor.

6.2

Chceme nájsť všetky prvočísla p také, že

$$p^2 - p + 1 = n^3$$

pre nejaké prirodzené n. To, že v rovnosti vystupujú prvočísla, by nás mohlo priviesť na nápad upraviť rovnosť na súčin viacerých členov:

$$\begin{aligned} p^2 - p + 1 &= n^3, \\ p^2 - p &= n^3 - 1, \\ p(p-1) &= (n-1)(n^2+n+1). \end{aligned}$$

Výhodou tohto nového tvaru je, že ľavá strana je násobkom prvočísla p, z čoho možno vyvodiť, že aj pravá strana musí byť násobkom p. Keďže p je prvočíslo, musí byť aspoň jedna zo zátvoriek na pravej strane deliteľná p. Ďalším krokom je uvedomiť si, že zo zátvoriek na pravej strane je tá druhá vždy väčšia. Dokázať sa to dá napríklad takto:

$$\begin{aligned} n^2 &\geqq 0, \\ n^2 + n + 1 &\geqq n + 1 > n - 1, \\ (n^2 + n + 1) &> (n - 1). \end{aligned}$$

Pomocou tohto výsledku už môžeme sporom dokázať, že p delí $n^2 + n + 1$. Keby to tak totiž nebolo, muselo by p deliť $n - 1$ a teda by platilo

$$n - 1 = pq,$$

kde q je nejaké celé číslo. Keďže n má byť prirodzené, ľavá strana musí byť aspoň nula, preto aj $q \geqq 0$. Dá sa ľahko overiť, že v prípade $q = 0$ dostávame výsledok $n = 1$ a $p = 0$ alebo $p = 1$, z čoho však ani jedno nie je prvočíslo. Ostáva možnosť $q \geqq 1$:

$$\begin{gathered} p \leqq pq = (n-1), \\ (p-1) < p \leqq (n-1) < (n^2+n+1), \\ p(p-1) < (n-1)(n^2+n+1), \end{gathered}$$

kde posledná nerovnosť je súčinom prvých dvoch – nerovnosti sme mohli násobiť, pretože obe strany v oboch nerovnostiach sú kladné. To je spor, čím sme dokázali, že p delí $n^2 + n + 1$. Môžeme teda písať

$$(n^2 + n + 1) = pk,$$
$$\frac{(n^2 + n + 1)}{k} = p,$$

kde k je kladné celé číslo, keďže ľavá strana rovnosti je určite kladná. Dosadením do pôvodnej rovnosti máme

$$\begin{aligned} p(p-1) = (n-1)(n^2+n+1) &= (n-1)pk, \\ (p-1) &= (n-1)k, \\ p &= (n-1)k+1, \\ \frac{(n^2+n+1)}{k} = p &= (n-1)k+1, \\ (n^2+n+1) &= (n-1)k^2+k. \end{aligned}$$

Zaujímavou možnosťou je pozrieť sa na zvyšok oboch strán po delení $n - 1$, my však zvolíme trochu priamočiarejší postup a budeme túto rovnosť riešiť ako kvadratickú rovnicu. Otázkou je, či budeme rovnicu riešiť pre neznámu k alebo pre neznámu n. Správny postup je samozrejme vyskúšať obe možnosti – ukáže sa, že výhodnejšie je zvoliť si za neznámu n. Dostávame

$$n^2 + n(1-k^2) + (k^2 - k + 1) = 0,$$
$$n = \frac{(k^2-1) \pm \sqrt{(1-k^2)^2 - 4(k^2-k+1)}}{2}.$$

Aby sme dostali celočíselné riešenie, musí byť diskriminant

$$D = (1-k^2)^2 - 4(k^2-k+1) = k^4 - 6k^2 + 4k - 3 = (k^2-3)^2 + 4k - 12$$

štvorcom. Vidíme, že D je „takmer“ štvorcom, líši sa len o málo od $(k^2 - 3)^2$. Pokúsime sa dokázať, že pre $k > 3$ bude platiť

$$(k^2-3)^2 < D < (k^2-2)^2.$$

Ľavá nerovnosť vyplýva z toho, že pre $k > 3$ je $4k - 12 > 0$. Pravú nerovnosť dokážeme úpravou na štvorec:

$$\begin{aligned} -5 < 0 &\leqq 2(k-1)^2, \\ -5 &< 2k^2 - 4k + 2, \\ 4k - 12 &< 2k^2 - 5, \\ (k^2-3)^2 + 4k - 12 &< (k^2-3)^2 + 2k^2 - 5, \\ D &< k^4 - 4k^2 + 4, \\ D &< (k^2-2)^2. \end{aligned}$$

Keďže $(k^2-3)^2$ a $(k^2-2)^2$ sú po sebe idúce štvorce, nie je medzi nimi žiadny ďalší štvorec celého čísla a teda ani D nemôže byť štvorcom pre $k>3$. Keďže k je prirodzené číslo, ostali nám už len tri možnosti. Iba jedna z nich nám po dosadení dá riešenie úlohy, a to $k=3$, $n=7$, $p=19$.

6.3

Najprv iba naznačíme prvý možný postup riešenia. Spočíva v tom, že namiesto toho, aby sme kreslili lomenú čiaru – trajektóriu nášho lúča, si nakreslíme štvorcovú sieť, vyznačíme si na nej dva stredy štvorčekov a spojíme ich rovnou úsečkou. Namiesto odrazu zvyšok cesty lúča preklopíme okolo strany do ktorej narazil a tak pokračujeme ďalej. Počet odrazov teraz reprezentuje počet priesečníkov našej úsečky s priamkami vytvárajúcimi mrežovú sieť. Sami si určite ľahko rozoberiete, aká môže byť ich parita, akonáhle neprechádza cez žiadny mrežový bod.

Druhé riešenie popíšeme podrobnejšie. Pre ľubovoľnú priamu časť trajektórie lúča zaveďme parameter α, ktorý bude veľkosť orientovaného uhla medzi x-ovou osou a smerom lúča (orientácia napr. proti smeru hodinových ručičiek), ale berme ho modulo π. Zrejme keď lúč narazí do steny, zmení sa jeho parameter z α na $\pi-\alpha$. Ak začneme s parametrom $\alpha=\frac{1}{2}\pi$, tak sa dostaneme do stredu na jeden odraz, teda nepárny počet. Ak nie, budú sa striedať rôzne hodnoty α a $\pi-\alpha$. Preto ak začneme zo stredu s parametrom α a do stredu sa vrátime s parametrom $\pi-\alpha$, tak sme mali nepárny počet odrazov. Stačí dokázať, že do stredu sa nemôžeme dostať s rovnakým parametrom, s akým sme začínali. Inými slovami, nech sa stala jedna z týchto dvoch nepriaznivých situácií:

- Vrátili sme sa presne po tej polpriamke, po akej sme na začiatku lúč vystrelili. To by ale znamenalo, že presne v strede cesty sa lúč musel obrátiť naopak, čo sa pri $\alpha\neq\pi/2$ nedá.
- Vrátili sme sa po tej istej priamke, po akej sme na začiatku lúč vystrelili, ale z opačnej strany (a medzitým nebol lúč nikdy v strede). Predstavme si, že by sme oboma smermi, ktoré majú parameter α, vystrelili lúč naraz. Išli by stredovo súmerne vzhľadom na stred štvorca a v polovici cesty by sa museli stretnúť. Ale to by sa mohli iba v strede štvorca, čo je spor.

Tým sme dokázali, že počet odrazov je naozaj nepárny.

6.4

(Podľa *Miroslava Majerčíka.*) V postupnosti $(a_1,a_2,\dots,a_{p+1})$ máme na výber prvých $p-1$ miest $2\cdot3\cdot4\cdots p=p!$ možností, lebo $a_1\in\{1,2\}$, $a_2\in\{1,2,3\}$, …, $a_{p-1}\in$ $\in\{1,2,3,\dots,p\}$. Ak by $|X|>p!$, určite by v X existovali dve postupnosti s rovnakými prvými $p-1$ členmi, čiže by sa líšili na najviac dvoch miestach a X by nebola roztopašná. Ukážeme, že existuje roztopašná množina X s práve $p!$ prvkami.

Zoberme si všetkých $p!$ možných kombinácií prvých $p-1$ prvkov postupností, vo všeobecnosti $(a_1,a_2,\dots,a_{p-1})$. Ku každej definujeme a_p tak, aby $a_1+a_2+\cdots+a_p$ bolo deliteľné p a a_{p+1} tak, aby $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+pa_p+(p+1)a_{p+1}$ bolo deliteľné p.

Majme dve takéto rôzne postupnosti $(a_1,a_2,\dots,a_{p+1})$ a $(b_1,b_2,\dots,b_{p+1})$. Ukážeme, že sa líšia aspoň na troch miestach. Rozoberieme tri prípady:

Ak sa na prvých $p-1$ miestach líšia aspoň trikrát, tak je to v poriadku.

Ak sa na prvých $p-1$ miestach líšia práve dvakrát, povedzme $a_i \neq b_i$ a $a_j \neq \neq b_j$, potom (rovnosti medzi členmi postupností odteraz berieme modulo p; potom na dokázanie nerovnosti nejakých dvoch členov stačí dokázať ich nerovnosť po delení p)

$$a_p - b_p = (a_i - b_i) + (a_j - b_j),$$
$$a_{p+1} - b_{p+1} = i(a_i - b_i) + j(a_j - b_j).$$

Ak by oba tieto rozdiely boli rovné 0, potom by aj

$$a_{p+1} - b_{p+1} - i(a_p - b_p) = (j-i)(a_j - b_j) = 0,$$

čo ale nemôže byť, lebo $j-i$ ani $a_j - b_j$ nie je deliteľné p a p je prvočíslo. Preto buď $a_p \neq b_p$, alebo $a_{p+1} \neq b_{p+1}$, a teda postupnosti a a b sa musia líšiť aspoň na troch miestach.

Ak sa na prvých $p-1$ miestach líšia práve raz, teda $a_i \neq b_i$, potom zrejme

$$a_p - b_p = a_i - b_i \neq 0,$$
$$a_{p+1} - b_{p+1} = i(a_i - b_i) \neq 0.$$

Opäť sa postupnosti musia líšiť aspoň na troch miestach.

Dokázali sme, že takto definovaná množina X s $p!$ prvkami je roztopašná.

6.5

Naznačíme iba postup, akým sa dá úloha vyriešiť, detaily nechávame na čitateľa.

Majme čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ a pozrime sa na výraz

$$\sum (\pm x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n)^2,$$

pričom sčitujeme cez všetkých 2^n možných kombinácií znamienok $+$ alebo $-$. Vnútro žiadnych dvoch zátvoriek v súčte nemôže byť rovnaké (tým by sme došli k sporu s tými rôznymi súčtami) a navyše majú všetky rovnakú paritu. Samozrejme, žiadna zátvorka nemôže byť ani nulová.

Aký najmenší môže byť súčet druhých mocnín 2^n rôznych čísel s rovnakou paritou, medzi ktorými nie je 0? Sami si ľahko dokážete, že je to

$$\sum_{m=-2^{n-1}-1}^{2^{n-1}} (2m-1)^2 = 2(1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2^n - 1)^2) = \frac{2^{3n} - 2^n}{3}.$$

Na druhej strane si uvedomme, ako vyzerá $\sum (\pm x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n)^2$ po roznásobení. Všetky členy tvaru $x_i x_j$ (pre $i \neq j$) zmiznú (práve vďaka striedaniu znamienok) a teda

$$\sum (\pm x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n)^2 = 2^n (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2).$$

Dokopy už vieme, že

$$2^n(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \geqq \frac{2^{3n} - 2^n}{3},$$
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geqq \frac{4^n - 1}{4 - 1}.$$

Máme dolný odhad na súčet druhých mocnín čísel x_i. Množina $\{1, 2, 4, 8, \ldots, 2^{n-1}\}$ zrejme spĺňa podmienku o rôznych súčtoch (jednoznačný zápis v dvojkovej sústave) a navyše

$$1^2 + 2^2 + 4^2 + \cdots + (2^{n-1})^2 = \frac{4^n - 1}{4 - 1}.$$

Dokázali sme odhad a našli prípad, kedy sa krajná hodnota nadobúda.

Iné korešpondenčné semináre

Okrem matematickej olympiády sú pre študentov základných aj stredných škôl počas školského roka organizované aj iné matematické súťaže. Patria medzi ne predovšetkým korešpondenčné semináre. Tieto súťaže sa v detailoch istotne líšia, avšak základné črty majú spoločné. Počas školského roka prebiehajú dve časti (letná a zimná), ktoré pozostávajú zväčša z troch sérií úloh rozosielaných riešiteľom do škôl alebo domov. Riešenia súťažiaci vypracovávajú rovnakou formou ako v MO a v určenom termíne ich odosielajú na adresu príslušného seminára, odkiaľ sa po niekoľkých dňoch až týždňoch vrátia opravené spolu so vzorovými riešeniami a výsledkovou listinou. Mladší a menej skúsení riešitelia zväčša nemusia riešiť tie najzložitejšie príklady, aby aj oni mali šancu ovplyvniť poradie na prvých miestach. Na konci oboch častí súťaže sú približne tridsiati najúspešnejší riešitelia pozývaní na týždňové sústredenie, účasť na ktorom býva často najsilnejšou motiváciou na riešenie úloh. Nie je ale možné nespomenúť, že takýto pravidelný tréning sa odráža aj na výsledkoch dosahovaných v MO, a že drvivá väčšina reprezentantov Slovenska na IMO sa aktívne zapájala do viacerých z týchto seminárov.

Nižšie uvedené korešpondenčné semináre (KS) sú určené študentom stredných škôl, svojím záberom pokrývajú územie celého Slovenska a často majú aj riešiteľov z Českej republiky. Je však možné, že vo svojom okolí nájdete aj menšie súťaže podobného druhu.

Korešpondenčný matematický seminár — KMS

KMS vznikol v roku 2002 spojením Bratislavského a Stredoslovenského korešpondenčného matematického seminára (BKMS a SKMS), ktoré ešte v 51. ročníku MO prebiehali samostatne. Organizovaný je študentmi FMFI UK v Bratislave.

KMS má tri kategórie. Začínajúcim a mladším riešiteľom je určená kategória ALFA, pre skúsenejších je kategória BETA. Rozdelenie do kategórií umožňuje bojovať o miesta na sústredení aj neskúseným študentom, ktorí by v príliš silnej konkurencii strácali motiváciu. Kategória GAMA je seminár SK MO a je mu venovaná predchádzajúca kapitola.

KMS

OATČ KAGDM FMFI UK

Mlynská dolina

842 48 Bratislava

e-mail: kms@kms.sk

URL: http://kms.sk

Súťaž talentovaných riešiteľov obľubujúcich matematiku — STROM

Korešpondenčný seminár STROM je pokračovateľom najstaršieho korešpondenčného seminára v bývalom Československu. Je organizovaný z PF UPJŠ v Košiciach skupinou nadšencov, väčšinou bývalých riešiteľov seminára a študentov UPJŠ. V posledných rokoch sa na organizovaní seminára okrem košickej skupiny podieľajú aj študenti FMFI UK pochádzajúci z východného Slovenska. Riešiteľskú základňu má prevažne na východnom Slovensku.

STROM
PF UPJŠ
Jesenná 5
041 54 Košice

e-mail: strom@strom.sk
URL: http://www.strom.sk

Ak ste sa rozhodli do niektorého zo seminárov zapojiť, najrozumnejšie je požiadať o zaslanie úloh prvej série začiatkom septembra alebo začiatkom januára, prípadne si zadania a pravidlá nájsť na internete.

Päťdesiatysiedmy ročník
matematickej olympiády
na stredných školách

Mgr. Peter Novotný, PhD. – RNDr. Karel Horák, CSc.
doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.
Mgr. Ján Mazák – Bc. Ivan Kováč
Úlohová komisia MO

Recenzent:	doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.
Jazyková úprava:	neprešlo jazykovou úpravou
Grafická úprava:	Mgr. Peter Novotný, PhD., RNDr. Karel Horák, CSc., sadzba programom $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX
Autor fotografií:	Mgr. Peter Novotný, PhD.
Náklad:	500 ks
Rozsah:	173 strán
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava
Rok vydania:	2009

ISBN: 978–80–8072–096–4

Vydané s finančnou podporou Ministerstva školstva SR.
Nepredajné.