56. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

Správa o riešení úloh zo súťaže konanej v školskom roku 2006/2007

48. MEDZINÁRODNÁ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA
1. STREDOEURÓPSKA MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

S pomocou spolupracovníkov spracovali
Mgr. Peter Novotný, RNDr. Karel Horák, CSc.,
doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.,
Mgr. Ján Mazák, Ivan Kováč
a členovia Úlohovej komisie MO.

ISBN 978–80–8072–085–8

Obsah

O priebehu 56. ročníka matematickej olympiády

Matematická olympiáda (MO) je najstaršia a najmasovejšia postupová intelektuálna súťaž žiakov základných a stredných škôl v SR. Túto súťaž vyhlasuje Ministerstvo školstva Slovenskej republiky (MŠ SR) v spolupráci s Jednotou slovenských matematikov a fyzikov (JSMF). V školskom roku 2006/07 sa uskutočnil už 56. ročník MO.

Súťaž riadila Slovenská komisia matematickej olympiády (SK MO) a pracovala v nasledovnom zložení:

Mim. Prof. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., F-PEDAS ŽU Žilina, predseda
RNDr. Oliver Ralík, CSc., FPV UKF Nitra, podpredseda A
RNDr. Monika Dillingerová, PhD., FMFI UK Bratislava, podpredseda Z
Prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc., FPV UKF Nitra
Ján Mazák, FMFI UK Bratislava
Doc. RNDr. Božena Mihalíková, CSc., PF UPJŠ Košice
Mgr. Peter Novotný, FMFI UK Bratislava
RNDr. Anna Pobešková, Nitra
Mgr. Martin Potočný, FMFI UK Bratislava
Doc. RNDr. Vladislav Rosa, CSc., FMFI UK Bratislava
Mgr. Milan Demko, PhD., FHPV PU Prešov, predseda KKMO PO
RNDr. Zuzana Frková, Gymn. Grösslingová Bratislava, predsedníčka KKMO BA
Doc. RNDr. Mária Lucká, CSc., PF TU Trnava, predsedníčka KKMO TT
RNDr. Tomáš Madaras, PhD., PF UPJŠ Košice, predseda KKMO KE
Doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc., F-PEDAS ŽU Žilina, predseda KKMO ZA
RNDr. Eva Oravcová, Gymn. J. G. T. Banská Bystrica, predsedníčka KKMO BB
RNDr. Soňa Pavlíková, CSc., TU Trenčín, predsedníčka KKMO TN
Prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc., FPV UKF Nitra, predseda KKMO NR
Ing. Tomáš Lučenič, IUVENTA Bratislava

*

Od 1. marca 2006, teda v priebehu 55. ročníka sa MO rozdelila na dve samostatné olympiády. Pod názvom MO zostali všetky kategórie pre základné školy, teda Z4-9 a tiež A, B, C pre stredné školy, z kategórie P vznikla nová súťaž, Olympiáda v informatike (OI). Toto bol prvý školský rok, keď MO a OI fungovali samostatne, pričom tento rok sa oddelili už aj finančne. Obe tieto súťaže budú preto vydávať samostatné ročenky, takže informácie o „kategórii P“ nájde záujemca už v novej ročenke OI. Pretože množina účastníkov MO a OI má obvykle dosť veľký neprázdny prienik, budú tieto súťaže veľmi úzko spolupracovať, pričom najväčšou prioritou bude zabezpečiť prázdny prienik termínov, teda aby žiaci sa mohli zúčastniť oboch týchto súťaží.

Navzdory rozdeleniu sa však pod skratkou MO stále skrýva najstaršia súťaž tohto typu u nás, ktorá sa v dôsledku snahy veľkého množstva našich význačných predchodcov o čo najlepšie výsledky rozrástla na striktnú viackolovú súťaž s množstvom kategórií Z4, Z5, Z6, Z7, Z8, Z9 pre základné školy a C, B, A pre stredné školy. Vznik tých kategórií bol postupný a účelom zavedenia kategórií pre stále mladších žiakov bolo podchytiť talenty v čo najmladšom veku a obmedziť tak ich únik do iných súťaží. Špičkou ľadovca v tejto oblasti je Medzinárodná matematická olympiáda (IMO), z ktorej naši žiaci pravidelne vozia medaily. V septembri 2007 sa však v Eisenstadte uskutočnil aj historický 1. ročník veľmi kvalitnej Stredoeurópskej matematickej olympiády (MEMO). Aj keď týmto súťažiam sú v tejto Ročenke venované samostatné kapitoly, spomeňme tu aspoň toľko, že na 48. IMO v Hanoji získala šestica našich žiakov štyri bronzové medaile a dve čestné uznania a šestica našich žiakov na 1. MEMO získala jednu striebornú a dve bronzové medaile. Za všetky čísla v tejto chvíli už len toľko, že šestice našich žiakov na doterajších pätnástich IMO od vzniku SR získali celkovo 68 medailí z 90 možných, z toho 3 zlaté, 25 strieborných a 40 bronzových.

Organizačná štruktúra MO sa nezmenila a podarilo sa uskutočniť všetky plánované akcie. Zásadný význam pri tejto súťaži má tvorba úloh. V tejto oblasti stále udržujeme výbornú a obojstranne prospešnú spoluprácu s českými kolegami, v dôsledku toho však máme **spoločné termíny** súťaží, čo môže viesť k termínovým kolíziám. Vďaka obojstrannej ústretovosti sme však s českými priateľmi doteraz vždy dokázali tieto kolízie vyriešiť.

K tvorbe úloh dodajme, že SK MO obvykle dostáva (poštou aj e-mailom) **len nekonštruktívnu** kritiku ohľadne kvality a (ne)vhodnosti príkladov, ale matematickej olympiáde to veľa nepomôže – úlohové komisie robia, čo vedia. Navyše, **všetky** hodnotenia sú vždy subjektívne, teda aj naše. Keby kritizujúci pripojil aj niekoľko pekných úloh, malo by to väčší efekt. **Výzvu na tvorbu úloh už uverejňujeme viac rokov** po rôznych linkách, ale bohužiaľ, výzva sa nestretáva s pochopením. Prejavíme svoj nezlomný optimizmus (veď ináč by sme pri MO neboli) a dúfame, že teraz to bude iné.

Už druhýkrát Společnost Otakara Borůvky finančne zabezpečila tréningové sústredenie IMO-družstva ČR v Uherskom Hradišti a na toto sústredenie pozvala aj IMO-družstvo SR, ktorému financovala účasť. Táto akcia nie je reciproká, a nám neostáva iné, ako úprimne naším českým kolegom znovu poďakovať za veľkorysosť.

Dúfam, že nová súťaž MEMO zvýši motiváciu najmä mladších žiakov, pretože v septembri 2008 sa uskutoční v Olomouci, o ďalší rok v Poľsku, a o dva roky neskôr bude usporiadaná na Slovensku. Keďže IMO-družstvo a MEMO-družstvo musia byť disjunktné, táto akcia znamená účasť 12 študentov v kvalitnej medzinárodnej súťaži, čím sa značne zvyšuje šanca študenta na takú súťaž sa prebojovať.

*

Celoštátne kolo MO (CK MO) usporiadala v dňoch 18.–21. 3. 2007 KK MO Bratislava, ktorej predsedníčkou je RNDr. Zuzana Frková a ktorá odviedla vynikajúcu prácu. V mene SK MO všetkým organizátorom ďakujem. Zvlášť si dovolím poďakovať RNDr. Eve Petrášovej, riaditeľke Gymnázia „Gamča“ na Grösslingovej 18 za vytvorenie výborných pracovných podmienok. Po CK MO sa uskutočnilo veľmi náročné výberové sústredenie, po ktorom vznikli reprezentačné družstvá na IMO aj MEMO. Tieto potom absolvovali v rámci prípravy na 48. IMO a 1. MEMO aj tréningové sústredenia a už tradičné súťažné trojstretnutie ČR-Poľsko-SR. Viac o týchto akciách a tiež o korešpondenčných seminároch nájde záujemca v samostatných kapitolách tejto Ročenky. Už teraz však uveďme aspoň niektoré z mnohých zaujímavých internetových stránok:

http://matematika.okamzite.eu – archív zadaní, poradí a riešení MO,
http://pppnnn.webpark.sk/mo.htm – aktuálne dokumenty, najmä pre Žilinský kraj,
http://www.iuventa.sk – stránka IUVENTY,
http://kms.sk/mo – informácie o MO na stránkach korešpondenčného seminára,
http://www.imo2007.edu.vn – stránka 48. IMO v Hanoji,
http://imo-official.org – oficiálna stránka IMO.

Poďakovanie SK MO patrí všetkým, ktorí podporili celoštátne kolo MO, pretože cenový fond z MŠ SR sa riadi staršími predpismi a nie je dôstojný súťaže tejto kvality. Boli to: Microsoft Slovakia s. r. o., OTP Banka Slovensko, a. s., Salve group SK, a. s., Siemens s. r. o., Albi. Ďakujeme firme REKON, ktorá financovala tričká pre všetkých účastníkov celoštátneho kola MO. Dovolíme si poďakovať aj firme CASIO, ktorá financovala reprezentačné tričká pre družstvo SR na IMO v Hanoji.

Ohľadne finančného zaopatrenia priebehu MO považujem za potrebné uviesť, že dotácia MŠ SR na súťaže nebola valorizovaná už 4 roky, aj keď prísľub bol ročne 11%.

K finančnému zabezpečeniu MO ešte patrí, že autorovi týchto riadkov sa podarilo získať grant APVV, ktorý pokryl nemalú časť nákladov KMS (332 500,- Sk) a tieto peniaze dostaneme asi aj v 57. ročníku MO.

Pretože Ročenka je len o celoštátnych akciách, nie je možné explicitne spomenúť všetkých, ktorí sa na práci v MO podieľajú na školách, v oblastiach a krajoch. Bez nich by to však nešlo. Dovolím si teda aspoň touto cestou im poďakovať.

Vojtech Bálint, predseda SK MO

Výsledky

Celoštátne kolo kategórie A

Víťazi

1.	Vladislav UJHÁZI	3 G P. J. Šafárika, Rožňava	5 7 5 7 7 7	38
2.	Samuel HAPÁK	3 G Grösslingová, Bratislava	7 6 7 7 0 6	33
3.	Michal SZABADOS	4 ŠpMNDaG Skalická, Bratislava	7 7 4 7 0 4	29
4.	Tomáš KOCÁK	3 G Poštová, Košice	7 7 0 6 0 0	20
	Ondrej MIKULÁŠ	4 G B. S. Timravy, Lučenec	7 2 3 7 0 1	20
6.	Tomáš RUSIN	4 G Alejová, Košice	2 7 3 0 0 5	17
	Michal SPIŠIAK	2 G Grösslingová, Bratislava	5 0 3 7 1 1	17

Ďalší úspešní riešitelia

8.	Miroslav BALÁŽ	3 G arm. g. L. Svobodu, Humenné	5 2 1 7 0 0	15
	Sándor PÁLDY	4 G Z. Kodálya, Galanta	7 7 0 0 0 1	15
	Michal SUDOLSKÝ	4 G J. G. Tajovského, B. Bystrica	3 7 1 2 0 2	15
11.	Martin MELICHERČÍK	3 G Párovská, Nitra	7 0 0 7 0 0	14
12.	Ján PEPRNÍK	4 G Veľká okružná, Žilina	5 0 0 4 0 4	13
	Filip ŠTEFAŇÁK	4 G J. G. Tajovského, B. Bystrica	7 0 1 5 0 0	13

Ostatní riešitelia

14.	Lukáš PLATINSKÝ	3 G J. Hronca, Bratislava	2 0 0 7 0 1	10
15.	Marek DERŇÁR	4 G Alejová, Košice	5 4 0 0 0 0	9
	Jakub KÖRY	3 G J. A. Raymana, Prešov	2 0 0 7 0 0	9
	Peter ONDRÚŠKA	3 SPŠ Dubnica nad Váhom	2 1 0 6 0 0	9
	Marián ŠAGÁT	3 G Školská, Považská Bystrica	0 7 0 0 0 2	9
19.	Eva BEDNÁRIKOVÁ	3 G P. de Coubertaina, Piešťany	2 2 0 0 0 0	4
	Peter HLÍSTA	4 G Veľká okružná, Žilina	1 0 0 1 0 2	4
	Miroslava ORIEŠČIKOVÁ	4 G Veľká okružná, Žilina	1 0 0 0 1 2	4
	Radka SELEČÉNIOVÁ	4 G J. G. Tajovského, B. Bystrica	2 1 0 0 0 1	4
	Lucia SIMANOVÁ	3 G Grösslingová, Bratislava	3 0 0 0 0 1	4
24.	Zuzana GAVOROVÁ	3 G J. Hronca, Bratislava	1 0 0 0 0 2	3
25.	Gabriela VOZÁRIKOVÁ	3 G Poštová, Košice	0 2 0 0 0 0	2
26.	Matúš BENKO	3 G J. A. Raymana, Prešov	1 0 0 0 0 0	1
27.	István PARASZTI	2 G H. Selyeho, Komárno	0 0 0 0 0 0	0

Úspešnosť jednotlivých úloh je zaznamenaná v tabuľke.

Počet bodov	Spolu	Číslo úlohy					
		1.	2.	3.	4.	5.	6.
7 bodov	26	7	7	1	9	1	1
6 bodov	4	0	1	0	2	0	1
5 bodov	8	5	0	1	1	0	1
4 body	5	0	1	1	1	0	2
3 body	5	2	0	3	0	0	0
2 body	16	6	4	0	1	0	5
1 bod	18	4	2	3	1	2	6
0 bodov	80	3	12	18	12	24	11
Priemer	2,04	3,56	2,56	1,04	3,22	0,33	1,56

Krajské kolá

Z príslušného kraja a v príslušnej kategórii A, B, C, P a Z9 sú uvedení všetci, resp. aspoň prvých 10 úspešných riešiteľov. Gymnáziá so zameraním na matematiku, študijný odbor 01, sú tieto:

Gymnázium Grösslingová, Bratislava,
Gymnázium Párovská, Nitra,
Gymnázium Veľká okružná, Žilina,
Gymnázium J. G. Tajovského, Banská Bystrica,
Gymnázium Alejová, Košice,
Gymnázium Poštová, Košice.

Kraj Bratislava

Kategória A

1.	Michal SZABADOS	4 ŠpMNDaG Skalická
2.	Samuel HAPÁK	3 Gymnázium Grösslingová
3.	Lucia SIMANOVÁ	3 Gymnázium Grösslingová
4.	Michal SPIŠIAK	2 Gymnázium Grösslingová
5.	Alena KOŠINÁROVÁ	3 Gymnázium Grösslingová
	Lukáš PLATINSKÝ	3 Gymnázium Jura Hronca
7.	Kristína ČEVOROVÁ	4 ŠpMNDaG Skalická
	Zuzana GAVOROVÁ	3 Gymnázium Jura Hronca
	Tomáš KOČISKÝ	3 Gymnázium Grösslingová

	Martin PODOLÁK	4 Gymnázium Grösslingová
	Mária STAROVSKÁ	3 Gymnázium Grösslingová

Kategória B

1.	Tomáš KABINA	Gymnázium Grösslingová
	Michal SPIŠIAK	Gymnázium Grösslingová
3.	Jakub UHRÍK	Gymnázium Grösslingová
4.	Veronika KOLLÁROVÁ	Gymnázium Grösslingová
5.	Emil HAAS	Gymnázium Grösslingová
6.	Michal HAJDIN	Gymnázium Jura Hronca
	Marek MARCHOT	Gymnázium Grösslingová
8.	Peter CSIBA	ŠpMNDaG Skalická
9.	Tomáš DULKA	Gymnázium Grösslingová
10.	Martin PAŽICKÝ	Gymnázium Jura Hronca

Kategória C

1.	Natália KARÁSKOVÁ	Gymnázium Grösslingová
	Jakub KONEČNÝ	Gymnázium Grösslingová
3.	Karol FIRBAS	Gymnázium Grösslingová
	Juraj HAŠÍK	Gymnázium Grösslingová
	Michal JURÁNEK	Gymnázium Grösslingová
6.	Pavol GURIČAN	Gymnázium Grösslingová
	Jozef KOVÁČ	Gymnázium Grösslingová
8.	Michaela FLORIÁNOVÁ	Gymnázium Grösslingová
9.	Matej BALOG	Gymnázium Grösslingová
	Michal HAGARA	Gymnázium Jura Hronca

Kategória Z9

1.	Pavol GURIČAN	Gymnázium Grösslingová
	Martina HLAVATÁ	Gymnázium Grösslingová
3.	Kristína ŠEŠEROVÁ	Gymnázium Grösslingová
4.	Hana MOJŽIŠOVÁ	Gymnázium Grösslingová
5.	Gabriela KOVÁČOVÁ	Gymnázium Grösslingová
	Andrej KOZÁK	Gymnázium Grösslingová
7.	Matej BALOG	Gymnázium Grösslingová
	Hassanein OSAMA	ZŠ Vazovova
9.	Anh LE TUAN	Gymnázium Grösslingová
10.	Adriana BOSÁKOVÁ	ZŠ Lachova

Kraj Nitra

Kategória A

1.	Martin MELICHERČÍK	3 Gymnázium Párovská, Nitra
2.	István PARASZTI	2 Gymnázium H. Selyeho, Komárno

Kategória B

1.	Dávid LAMI	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	Bálint PÁSZTOR	Gymnázium Šahy
	Fridrich VALACH	Gymnázium Ľ. J. Šuleka, Komárno
4.	András KABAI	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
5.	Attila HEGEDŰS	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
6.	István PARASZTI	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
7.	Matúš ABAFFY	Gymnázium Golianova, Nitra
8.	Peter HUJER	Gymnázium Párovská, Nitra
9.	Noémi CZIRFUSZ	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	Mária DVORANOVÁ	Gymnázium Šurany
	Adrián GŐGH	Gymnázium H. Selyeho, Komárno

Kategória C

1.	Ivana TONHAUSEROVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
2.	Vincent LAMI	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
3.	Zoltán FÁBIK	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	Orsolya KUSTYÁNOVÁ	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
5.	Matúš ČELLÁR	Gymnázium Párovská, Nitra
	Tibor MADARÁSZ	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
7.	Attila VAJLIK	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
8.	Lukáš ŠTEVKO	Gymnázium A. Vrábla, Levice
9.	Michaela HRUŠOVSKÁ	Gymnázium Šurany
	Marek KUTNÁR	Gymnázium Párovská, Nitra

Kategória Z9

1.	Róbert HAVLÍK	ZŠ J. Jesenského, Levice
	Roman KONKOLY	ZŠ Pri Podlužianke, Levice
3.	Lenka ČERNOVÁ	ZŠ Pribinova, Zlaté Moravce
	Elif GARAJOVÁ	ZŠ Hradná, Nové Zámky
5.	Zuzana BÓDIOVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
	Tomáš KOŠLAB	ZŠ Nám. Konkolyho-Thege, Hurbanovo

	Matyás VARGA	ZŠ s VJM, Tešedíkovo
8.	Martin HANKO	ZŠ sv. Don Bosca, Topoľčany
	Tomáš TRUNGEL	ZŠ sv. Vincenta, Levice
10.	Martin KRÁLIK	ZŠ Nábrežná, Nové Zámky
	Samuel TURÁNYI	ZŠ Benkova, Nitra

Kraj Trnava

Kategória A

1.	Sándor PÁLDY	4 Gymnázium Z. Kodálya, Galanta
2.	Martin ZRUBAN	4 Gymnázium J. Hollého, Trnava
3.	Eva BEDNÁRIKOVÁ	3 Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany
	Ondrej URBAN	4 Gymnázium A. Merici, Trnava
5.	Boris FAČKOVEC	4 Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany
6.	Tibor HORVÁTH	3 Gymnázium Á. Vámbéryho, D. Streda
7.	Tomáš BZDUŠEK	4 Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany
	Tomáš FEKETE	4 Gymnázium Á. Vámbéryho, D. Streda

Kategória B

1.	Albert HERENCSÁR	Gymnázium Z. Kodálya, Galanta
	László OLLŐS	Gymnázium Á. Vámbéryho, D. Streda
3.	Martin ŠRANK	Gymnázium A. Merici, Trnava
4.	Peter JÚNOŠ	Gymnázium L. Novomeského, Senica
5.	Kamila KIČÁKOVÁ	Gymnázium A. Merici, Trnava
	Ivana LELKESOVÁ	Gymnázium M. R. Štefánika, Šamorín
	Peter PEKAROVIČ	Gymnázium Komenského, Hlohovec

Kategória C

1.	Gábor MOLNÁR	Gymnázium I. Madácha, Šamorín
2.	Balázs PONGRÁCZ	Gymnázium Á. Vámbéryho, D. Streda
3.	Michaela DOROCÁKOVÁ	Gymnázium Sereď
	Marianna SEBŐ	Gymnázium Á. Vámbéryho, D. Streda

Kategória Z9

1.	Natália ČÍŽOVÁ	ZŠ Kátlovce
	Dominika LUKAČOVIČOVÁ	ZŠ Kátlovce
3.	Veronika ŠOKOVÁ	Gymnázium Komenského, Hlohovec

4.	Monika ČAMBÁLOVÁ	ZŠ Nám. Sl. Uč. Tovarišstva, Trnava
	Katarína GEMBEŠOVÁ	ZŠ J. Mudrocha, Senica
6.	Michal DURILA	ZŠ Koperníkova, Hlohovec
7.	Jana GALBAVÁ	ZŠ Štvrť SNP, Galanta
8.	Norbert FÜLE	Gymnázium M. R. Štefánika, Šamorín
9.	Árpád BARTALOS	ZŠ B. Bartóka, Veľký Meder
	Zsuzsanna BITTERA	ZŠ B. Bartóka, Veľký Meder
	Róbert MADARÁSZ	ZŠ Z. Kodálya, Galanta
	Denisza ORISKÓ	ZŠ Z. Kodálya, D. Streda
	Eva VRTOCHOVÁ	ZŠ J. A. Komenského, Sereď

Kraj Trenčín

Kategória A

1.	Ľubica KRAUSKOVÁ	4 Gymnázium V. B. Nedožerského, Prievidza
	Peter ONDRÚŠKA	3 SPŠ Dubnica nad Váhom
	Marián ŠAGÁT	3 Gymnázium Považská Bystrica

Kategória B

1.	Lívia BISKUPIČOVÁ	Gymnázium Považská Bystrica
	Samuel FLIMMEL	Gymnázium 1. mája, Púchov
	Michal HOJČKA	Gymnázium Partizánske
4.	Jana FIGULOVÁ	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
5.	Pavol MALO	Gymnázium 1. mája, Púchov
6.	Ľubica BELLAYOVÁ	Gymnázium Považská Bystrica

Kategória C

1.	Lenka BAČINSKÁ	Gymnázium Považská Bystrica
2.	Andrej KREJČÍR	Gymnázium V. B. Nedožerského, Prievidza
3.	Zuzana HOLOTÍKOVÁ	Gymnázium V. B. Nedožerského, Prievidza
	Michal ŠUSTR	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín

Kategória Z9

1.	Jana PODLUCKÁ	ZŠ Duklianska, Bánovce nad Bebravou
2.	Lenka KUNÍKOVÁ	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
3.	Martin MIŠÚN	ZŠ Pod hájom, Dubnica nad Váhom
4.	Andrea DIŽOVÁ	Gymnázium Partizánske

	Zuzana ŠINSKÁ	Gymnázium J. Jesenského, Bánovce n/Bebr.
6.	Veronika BOČKAYOVÁ	ZŠ Janka Kráľa, Nová Dubnica
	Jakub HOSTAČNÝ	ZŠ Rastislavova, Prievidza
8.	Matúš ZÁBOJNÍK	ZŠ Dlhé Hony, Trenčín
9.	Ján MIČUDA	Gymnázium Dubnica nad Váhom
10.	Júlia BALÁŽOVÁ	ZŠ Školská, Bánovce nad Bebravou
	Dominik FILIP	ZŠ Slov. partizánov, Považská Bystrica
	Patrik POLÁČEK	ZŠ Mládežnícka, Púchov
	Martina SIVÁKOVÁ	ZŠ Trenčianska Turná
	Marek VICIAN	ZŠ Nedožery-Brezany

Kraj Žilina

Kategória A

1.	Ján PEPRNÍK	4 Gymnázium Veľká okružná, Žilina
2.	Peter HLÍSTA	4 Gymnázium Veľká okružná, Žilina
3.	Miroslav MAJERČÍK	4 Gymnázium Sučany
	Miroslava ORIEŠČIKOVÁ	4 Gymnázium Veľká okružná, Žilina

Kategória B

1.	Martin ČERŇAN	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
2.	Dana ŠUNÍKOVÁ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
3.	Michal MAIXNER	Gymnázium Varšavská, Žilina
4.	Matej MELO	Gymnázium sv. Františka z Assisi, Žilina
5.	Vladimír HUDEC	Gymnázium Varšavská, Žilina
	Lucia KUBALOVÁ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
	Tomáš RIZMAN	Gymnázium Varšavská, Žilina
8.	Jakub HRABOVSKÝ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina

Kategória C

1.	Martin BACHRATÝ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
2.	Filip SLÁDEK	Gymnázium A. Bernoláka, Námestovo
3.	Miroslav JAGELKA	Gymnázium J. Lettricha, Martin
4.	Nikola HRDÁ	Gymnázium M. Galandu, Turčianske Teplice
5.	Roman GALOVIČ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
	Kamila ŠTYRÁKOVÁ	Gymnázium P. O. Hviezdoslava, D. Kubín
7.	Tomáš JÁNOŠÍK	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
8.	Jaroslav BARIČÁK	Gymnázium J. M. Hurbana, Čadca

	Anna BOBČÁKOVÁ	Gymnázium M. M. Hodžu, Lipt. Mikuláš
10.	Martin SKLENKA	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
	Juraj STRELEC	Gymnázium Veľká okružná, Žilina

Kategória Z9

1.	Jakub SANTER	ZŠ Suchá Hora
2.	Matej JEČMEN	Gymnázium Varšavská, Žilina
3.	Martin BEDNÁR	Cirk. ZŠ R. Zaymusa, Žilina
	Michal KEKELY	Gymnázium Varšavská, Žilina
	Alexandra POREMBOVÁ	Gymnázium Sučany
6.	Tomáš VERNÍČEK	ZŠ Komenského, Námestovo
7.	Zuzana KORENČIAKOVÁ	Gymnázium Varšavská, Žilina
8.	Marek HVOLKA	ZŠ Radoľa
	Andrej KOVÁČ	ZŠ M. Hattalu, D. Kubín
10.	Katarína BRISUDOVÁ	ZŠ A. Radlinského, D. Kubín
	Martin KAŠŠAY	Cirk. ZŠ sv. Gorazda, Námestovo
	Matej KOHÁR	ZŠ J. Matúšku, D. Kubín
	Ivana KRASULOVÁ	ZŠ Medvedzie, Tvrdošín

Kraj Banská Bystrica

Kategória A

1.	Radka SELEČÉNIOVÁ	4 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Michal SUDOLSKÝ	4 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
3.	Ondrej MIKULÁŠ	4 Gymnázium B. S.-Timravy, Lučenec
	Filip ŠTEFAŇÁK	4 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
5.	Katarína MAGYAROVÁ	4 Gymnázium B. S.-Timravy, Lučenec

Kategória B

1.	Marián NOCIAR	Gymnázium B. S.-Timravy, Lučenec
	Tomáš SZANISZLO	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
3.	Peter SLUKA	Gymnázium Ľ. Štúra, Zvolen
4.	Matej POLIAK	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
5.	Pavel KUDIVÁNI	Gymnázium A. Sládkoviča, Krupina
6.	Daniela SARVAŠOVÁ	Gymnázium B. S.-Timravy, Lučenec

Kategória C

1.	Martin UKROP	Gymnázium Ľ. Štúra, Zvolen
	Michal ZIMAN	Gymnázium B. S.-Timravy, Lučenec
3.	Marián PAULÍK	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
4.	Jozef GANDŽALA	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
5.	Marieta KENKOVOVÁ	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
6.	Jana DRUGDOVÁ	Gymnázium Ľ. Štúra, Zvolen
7.	Patrik ŽILKA	Gymnázium A. H. Škultétyho, Veľký Krtíš

Kategória Z9

1.	Zuzana ŽABKOVÁ	ZŠ Radvanská, B. Bystrica
2.	Lukáš MATÚŠKA	ZŠ Kalinovo
3.	Zuzana KORDOVÁ	ZŠ Spojová, B. Bystrica
	Andrej RYBÁR	ZŠ Nám. mládeže, Zvolen
5.	Michal ANDERLE	Gymnázium B. S.-Timravy, Lučenec
6.	Veronika MAŤÚŠOVÁ	ZŠ Radvanská, B. Bystrica
	Michal MITTER	ZŠ Kalinovo
	Richard RAČKO	ZŠ P. Jilemnického, Zvolen
	Barbora RÝSOVÁ	ZŠ Radvanská, B. Bystrica
10.	Ivan KRÁLIK	ZŠ Radvanská, B. Bystrica
	Jana LOVÁSOVÁ	ZŠ P. Jilemnického, Zvolen
	Tomáš SLISZ	ZŠ M. R. Štefánika, Žiar nad Hronom
	Jana ŠVANTNEROVÁ	ZŠ Nám. Š. Moysesa, B. Bystrica

Kraj Košice

Kategória A

1.	Tomáš RUSIN	4 Gymnázium Alejová, Košice
2.	Vladislav UJHÁZI	3 Gymnázium P. J. Šafárika, Rožňava
3.	Marek DERŇÁR	4 Gymnázium Alejová, Košice
4.	Tomáš KOCÁK	3 Gymnázium Poštová, Košice
	Gabriela VOZÁRIKOVÁ	3 Gymnázium Poštová, Košice

Kategória B

1.	Martin POLAČKO	Gymnázium Alejová, Košice
2.	Dávid VENDEL	Gymnázium Poštová, Košice
3.	Martin BALÁŽ	Gymnázium Alejová, Košice

	Peter FULLA	SPŠ strojnícka, Spišská Nová Ves
	Alexandra KUNCOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
	Ľubomír REMÁK	Gymnázium Alejová, Košice
7.	Martin ŠTOBER	Gymnázium Poštová, Košice
8.	Jakub JURSA	Gymnázium Alejová, Košice
9.	Tomáš KUZMA	Gymnázium Alejová, Košice
10.	Michaela CEHLÁROVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
	Jakub HVIZDOŠ	Gymnázium Poštová, Košice

Kategória C

1.	Ladislav BAČO	Gymnázium Poštová, Košice
2.	Zuzana COCUĽOVÁ	Gymnázium Poštová, Košice
3.	Milan JANČÁR	Gymnázium P. Horova, Michalovce
4.	Pavol ROHÁR	Gymnázium Alejová, Košice
	Róbert TÓTH	Gymnázium Alejová, Košice
6.	Marek KLUČÁR	Gymnázium Javorová, Spišská Nová Ves
	Peter SMOLÁRIK	Gymnázium Poštová, Košice
8.	Andrej ŠTINČÍK	Gymnázium Školská, Spišská Nová Ves

Kategória Z9

1.	Tomáš BABEJ	ZŠ Bruselská, Košice
	Alexander HOLÉCZY	ZŠ Bernolákova, Košice
	Dávid HVIZDOŠ	ZŠ Hroncova, Košice
	Richard KONEČNÝ	ZŠ Kežmarská, Košice
	Dominik VAĽKO	ZŠ Bruselská, Košice
6.	Ladislav HOVAN	ZŠ Krosnianska, Košice
	Anna KRUPÁR	ZŠ S. Máraiho, Košice
8.	Katarína LECHMANOVÁ	ZŠ Švermova, Michalovce
9.	Rastislav KISEĽ	Gymnázium Alejová, Košice
	Ištván SATMÁRI	Súkromná ZŠ Dneperská, Košice

Kraj Prešov

Kategória A

1.	Miroslav BALÁŽ	3 Gymnázium arm. gen. L. Svobodu, Humenné
2.	Matúš BENKO	3 Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
	Jakub KÖRY	3 Gymnázium J. A. Raymana, Prešov

Kategória B

1.	Martin ONDERKO	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
	Ján RUHALOVSKÝ	Gymnázium L. Stockela, Bardejov
3.	Matúš IVAN	Gymnázium Kukučínova, Poprad
	Jakub VAŇO	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
5.	Marcel KIKTA	Gymnázium D. Tatarku, Poprad
6.	Juraj ČURPEK	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
	Jozef JAŠŠ	Gymnázium L. Stockela, Bardejov

Kategória C

1.	Adam MIDLIK	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
2.	Zuzana ŠPIRKOVÁ	Gymnázium L. Stockela, Bardejov
3.	Emília RIGDOVÁ	Gymnázium Kukučínova, Poprad
4.	Jakub HANKOVSKÝ	Súkr. gymnázium Pod Papierňou, Bardejov
	Andrea LEŠKOVÁ	Gymnázium Lipany

Kategória Z9

1.	Jakub KOCÁK	ZŠ Kudlovská, Humenné
	Róbert MARHEFKA	ZŠ Dr. Fischera, Kežmarok
3.	Michal FECKO	ZŠ Šmeralova, Prešov
4.	Michal FILIČKO	ZŠ Bernolákova, Vranov nad Topľou
5.	Dana BOBUĽSKÁ	ZŠ sv. Cyrila a Metoda, Stará Ľubovňa
	Katarína DUJAVOVÁ	ZŠ Šrobárova, Prešov
	Katarína TARCALOVÁ	Cirk. ZŠ sv. Egídia, Bardejov
8.	Samuel STRIŠOVSKÝ	ZŠ Dr. Fischera, Kežmarok
9.	Anna KRIŠTANOVÁ	ZŠ Hanušovce nad Topľou
	Dávid REĽOVSKÝ	ZŠ Komenského, Stará Ľubovňa
	Miroslava VAŠKOVÁ	ZŠ Šmeralova, Prešov

Zadania súťažných úloh

Kategória C

C – I – 1

Určte všetky dvojice prirodzených čísel (a, b), pre ktoré platí

$$a + 5\sqrt{b} = b + 5\sqrt{a}.$$

(Jaroslav Švrček)

C – I – 2

Nájdite všetky trojuholníky, ktoré sa dajú rozrezať na lichobežníky so stranami dĺžok 1 cm, 1 cm, 1 cm a 2 cm.

(Ján Mazák)

C – I – 3

Nájdite všetky prirodzené čísla, ktorých zápis neobsahuje nulu a má nasledujúcu vlastnosť: ak v ňom vynecháme ľubovoľnú číslicu, dostaneme číslo, ktoré je deliteľom pôvodného čísla.

(Jaromír Šimša)

C – I – 4

Daný je lichobežník $ABCD$ so základňami AB a CD. Označme E stred strany AB, F stred úsečky DE a G priesečník úsečiek BD a CE. Vyjadrite obsah lichobežníka $ABCD$ pomocou jeho výšky v a dĺžky d úsečky FG za predpokladu, že body A, F, C ležia na jednej priamke.

(Ján Mazák)

C – I – 5

Zistite, pre ktoré prirodzené číslo n je podiel

$$\frac{33\,000}{(n-4)(n+1)}$$

a) čo najväčšie, b) čo najmenšie prirodzené číslo.

(Eva Řídká)

C – I – 6

Daný je ostrouhlý trojuholník ABC, v ktorom D je päta výšky z vrcholu C a V priesečník výšok. Dokážte, že $|AD| \cdot |BD| = |AB| \cdot |VD|$ práve vtedy, keď $|CD| = |AB|$.

(Jaroslav Zhouf)

C – S – 1

Určte počet všetkých štvorciferných prirodzených čísel, ktoré sú deliteľné šiestimi a v ich zápise sa vyskytujú práve dve jednotky.

(Pavel Leischner)

C – S – 2

Kružnica k so stredom S je opísaná pravidelnému šesťuholníku $ABCDEF$. Dotyčnica v bode A ku kružnici k pretína priamku SB v bode K a dotyčnica v bode B pretína priamku SC v bode L. Dokážte, že štvoruholníku $KLCB$ sa dá opísať kružnica, ktorá je zhodná s kružnicou k.

(Jaroslav Zhouf)

C – S – 3

Určte všetky dvojice (a, b) prirodzených čísel, ktorých rozdiel $a - b$ je piatou mocninou niektorého prvočísla a pre ktoré platí $a - 4\sqrt{b} = b + 4\sqrt{a}$.

(Jaroslav Švrček)

C – II – 1

V rovine sú dané dva rôzne body L, M a kružnica k. Zostrojte trojuholník ABC s čo najväčším obsahom tak, aby jeho vrchol C ležal na kružnici k, bod L bol stredom strany AC a bod M stredom strany BC.

(Pavel Leischner)

C – II – 2

Nech p, q, r sú prirodzené čísla, pre ktoré platí $p + r\sqrt{p+q} + q = 2\,007$.

a) Určte, aké hodnoty môže nadobúdať súčet $p + q + r$.
b) Určte počet všetkých usporiadaných trojíc (p, q, r) prirodzených čísel, ktoré vyhovujú danej rovnici.

(Jaroslav Švrček)

C – II – 3

Rovnoramennému lichobežníku $ABCD$ so základňami AB, CD sa dá vpísať kružnica so stredom O. Určte obsah S lichobežníka, ak sú dané dĺžky úsečiek OB a OC.

(Pavel Leischner)

C – II – 4

Určte najväčšie dvojciferné číslo k s nasledujúcou vlastnosťou: existuje prirodzené číslo N, z ktorého po škrtnutí prvej číslice zľava dostaneme číslo k-krát menšie. (Po škrtnutí číslice môže zápis čísla začínať jednou či niekoľkými nulami.) K určenému číslu k potom nájdite najmenšie vyhovujúce číslo N.

(Jaromír Šimša)

Kategória B

B – I – 1

Nájdite všetky dvojice celých čísel (a, b), ktoré sú riešením rovnice

$$a^2 + 7ab + 6b^2 + 5a + 4b + 3 = 0.$$

(Pavel Novotný)

B – I – 2

Daná je kružnica k s priemerom AB. K ľubovoľnému bodu Y kružnice k, $Y \neq A$, zostrojme na polpriamke AY bod X, pre ktorý platí $|AX| = |YB|$. Určte množinu všetkých takých bodov X.

(Pavel Leischner)

B – I – 3

Nájdite najmenšie prirodzené číslo k také, že každá k-prvková množina trojciferných po dvoch nesúdeliteľných čísel obsahuje aspoň jedno prvočíslo.

(Pavel Novotný)

B – I – 4

V ľubovoľnom trojuholníku ABC označme T ťažisko, D stred strany AC a E stred strany BC. Nájdite všetky pravouhlé trojuholníky ABC s preponou AB, pre ktoré je štvoruholník $CDTE$ dotyčnicový.

(Ján Mazák)

B – I – 5

Nájdite všetky dvojice reálnych čísel (p, q) také, že mnohočlen $x^2 + px + q$ je deliteľom mnohočlena $x^4 + px^2 + q$.

(Jozef Moravčík)

B – I – 6

Daná je úsečka AA_0 a priamka p. Zostrojte trojuholník s vrcholom A a výškou AA_0, ktorého ťažisko a stred kružnice opísanej ležia na priamke p.

(Eva Řídká)

B – S – 1

Určte všetky dvojice reálnych čísel a, b, pre ktoré je polynóm $x^4 + ax^2 + b$ deliteľný polynómom $x^2 + bx + a$.

(Jaromír Šimša)

B – S – 2

V trojuholníku ABC označme D stred strany BC, E stred strany AC a T ťažisko. Dokážte, že ak je strana BC dlhšia ako strana AC, má kružnica vpísaná trojuholníku BDT menší polomer ako kružnica vpísaná trojuholníku ATE.

(Pavel Novotný)

B – S – 3

Nájdite najmenšie prirodzené číslo n, pre ktoré je podiel $\dfrac{n^2 + 15n}{33\,000}$ prirodzené číslo.

(Jaromír Šimša)

B – II – 1

Určte reálne čísla a, b, c tak, aby polynóm $x^4 + ax^2 + bx + c$ bol deliteľný polynómom $x^2 + x + 1$ a pritom súčet $a^2 + b^2 + c^2$ bol čo najmenší.

(Jaromír Šimša)

B – II – 2

Daný je trojuholník ABC so stranou BC dĺžky 22 cm a stranou AC dĺžky 19 cm, ktorého ťažnice t_a, t_b sú navzájom kolmé. Vypočítajte dĺžku strany AB.

(Pavel Novotný)

B – II – 3

Prirodzené číslo nazveme *vlnitým*, ak pre každé tri po sebe idúce číslice a, b, c jeho dekadického zápisu platí $(a-b)(b-c)<0$. Dokážte, že z číslic $0,1,\dots,9$ je možné zostaviť viac ako 25 000 desaťciferných vlnitých čísel, z ktorých každé obsahuje všetky číslice od nuly po deviatku (číslica 0 nesmie byť na prvom mieste).

(Jaromír Šimša)

B – II – 4

Je daný ostrouhlý trojuholník ABC. Pre ľubovoľný bod L jeho strany AB označme K, M päty kolmíc z bodu L na strany AC, BC. Zistite, pre ktorú polohu bodu L je úsečka KM najkratšia.

(Jaroslav Švrček)

Kategória A

A – I – 1

V obore reálnych čísel vyriešte rovnicu

$$4x^4-12x^3-7x^2+22x+14=0,$$

keď viete, že má štyri rôzne reálne korene, pričom súčet dvoch z nich sa rovná číslu 1.

(Jaromír Šimša)

A – I – 2

Kružnica vpísaná do daného trojuholníka ABC sa dotýka strán BC, CA, AB postupne v bodoch K, L, M. Označme P priesečník osi vnútorného uhla pri vrchole C s priamkou MK. Dokážte, že priamky AP a LK sú rovnobežné.

(Peter Novotný)

A – I – 3

Ak x, y, z sú reálne čísla z intervalu $\langle -1,1\rangle$ spĺňajúce podmienku $xy+yz+zx=1$, tak platí

$$6\sqrt[3]{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}\leqq 1+(x+y+z)^2.$$

Dokážte a zistite, kedy nastáva rovnosť.

(Jaroslav Švrček)

A – I – 4

Určte, pre ktoré prirodzené čísla n sa množina $\mathsf{M}=\{1,2,\dots,n\}$ dá rozdeliť

a) na dve,
b) na tri

navzájom disjunktné podmnožiny s rovnakým počtom prvkov tak, aby každá z nich obsahovala aj aritmetický priemer všetkých svojich prvkov.

(Peter Novotný)

A – I – 5

V rovine je daná kružnica k so stredom S a bod $A \neq S$. Určte množinu stredov kružníc opísaných všetkým trojuholníkom ABC, ktorých strana BC je priemerom kružnice k.

(Jiří Dula)

A – I – 6

Určte všetky funkcie $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ také, že pre všetky celé čísla x, y platí

$$f\bigl(f(x) + y\bigr) = x + f(y + 2\,006).$$

(Petr Kaňovský)

A – S – 1

Určte všetky reálne čísla s, pre ktoré má rovnica

$$4x^4 - 20x^3 + sx^2 + 22x - 2 = 0$$

štyri rôzne reálne korene, pričom súčin dvoch z nich je rovný číslu -2.

(Jaromír Šimša)

A – S – 2

Uvažujme množinu $\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 32, 40, 80, 160\}$ a všetky jej trojprvkové podmnožiny. Rozhodnite, či je viac tých, ktoré majú súčin svojich prvkov väčší ako 2 006, alebo tých, ktoré majú súčin svojich prvkov menší ako 2 006.

(Peter Novotný)

A – S – 3

Daný je lichobežník $ABCD$ s pravým uhlom pri vrchole A a základňou AB, v ktorom platí $|AB| > |CD| \geqq |DA|$. Označme S priesečník osí jeho vnútorných uhlov pri vrcholoch A, B a T priesečník osí vnútorných uhlov pri vrcholoch C, D. Podobne označme U, V priesečníky osí vnútorných uhlov pri vrcholoch A, D, resp. B, C.

a) Dokážte, že priamky UV a AB sú rovnobežné.

b) Dokážte, že priesečník E polpriamky DT s priamkou AB a body S, T, B ležia na jednej kružnici.

(J. Švrček, P. Calábek)

A – II – 1

Zistite, aký je najmenší možný obsah trojuholníka ABC, ktorého výšky spĺňajú nerovnosti $v_a \geqq 3\,\mathrm{cm}$, $v_b \geqq 4\,\mathrm{cm}$, $v_c \geqq 5\,\mathrm{cm}$.

(Pavel Novotný)

A – II – 2

Nech a, b sú reálne čísla. Ak má rovnica

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + ax + b = 0$$

dva rôzne reálne korene také, že ich súčet sa rovná ich súčinu, tak platí $a + b > 0$ a pritom daná rovnica nemá žiadne iné reálne korene. Dokážte.

(Jaromír Šimša)

A – II – 3

Nech M je ľubovoľný vnútorný bod prepony AB pravouhlého trojuholníka ABC. Označme S, S_1, S_2 stredy kružníc opísaných postupne trojuholníkom ABC, AMC, BMC.

a) Dokážte, že body M, C, S_1, S_2 a S ležia na jednej kružnici.

b) Pre ktorú polohu bodu M má táto kružnica najmenší polomer?

(Jaroslav Švrček)

A – II – 4

Nech p, q sú dané prirodzené čísla, pričom $p < q$. Určte najmenšie prirodzené číslo m s vlastnosťou: Súčet všetkých zlomkov v základnom tvare, ktoré majú menovateľa m a ktorých hodnoty ležia v otvorenom intervale (p, q), je aspoň $56(q^2 - p^2)$.

(Vojtech Bálint)

A – III – 1

Na niektoré políčko štvorcovej šachovnice $n \times n$ ($n \geqq 2$) postavíme figúrku a potom ju posúvame striedavo „šikmo“ a „priamo“. „Šikmo“ znamená na políčko, ktoré má s predchádzajúcim spoločný práve jeden bod. „Priamo“ znamená na susedné políčko, ktoré má s predchádzajúcim spoločnú stranu. Určte všetky n, pre ktoré existuje východiskové políčko a taká postupnosť ťahov začínajúca „šikmo“, že figúrka prejde celú šachovnicu a na každom políčku sa ocitne práve raz.

(Peter Novotný)

A – III – 2

V tetivovom štvoruholníku $ABCD$ označme L, M stredy kružníc vpísaných postupne do trojuholníkov BCA, BCD. Ďalej označme R priesečník kolmíc vedených z bodov L a M postupne na priamky AC a BD. Dokážte, že trojuholník LMR je rovnoramenný.

(Pavel Leischner)

A – III – 3

Označme $\mathbb{N}$ množinu všetkých prirodzených čísel a uvažujme všetky funkcie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že pre ľubovoľné $x, y \in \mathbb{N}$ platí

$$f\bigl(xf(y)\bigr) = yf(x).$$

Určte najmenšiu možnú hodnotu $f(2\,007)$.

(Pavel Calábek)

A – III – 4

Množina M obsahuje všetky prirodzené čísla od 1 do 2 007 vrátane a má nasledujúcu vlastnosť: Ak je číslo n prvkom množiny M, ležia v M všetky členy aritmetickej postupnosti s prvým členom n a diferenciou $n + 1$. Rozhodnite, či množina M musí obsahovať všetky prirodzené čísla väčšie ako určité číslo m.

(Jaromír Šimša)

A – III – 5

Daný je ostrouhlý trojuholník ABC taký, že $|AC| \neq |BC|$. Vnútri jeho strán BC a AC uvažujme body D a E, pre ktoré je $ABDE$ tetivový štvoruholník. Priesečník jeho uhlopriečok AD a BE označme P. Dokážte, že ak sú priamky CP a AB navzájom kolmé, tak P je priesečníkom výšok trojuholníka ABC.

(Ján Mazák)

A – III – 6

Určte všetky usporiadané trojice (x, y, z) navzájom rôznych reálnych čísel, ktoré vyhovujú množinovej rovnici

$$\{x, y, z\} = \left\{ \frac{x-y}{y-z}, \frac{y-z}{z-x}, \frac{z-x}{x-y} \right\}.$$

(Jaromír Šimša)

Riešenia súťažných úloh

Kategória C

C – I – 1

Substitúciou $m = \sqrt{a}$, $n = \sqrt{b}$ prevedieme rovnicu na tvar $m^2 - n^2 - 5(m - n) = 0$, odkiaľ s pomocou vzorca pre rozdiel štvorcov dostaneme $(m-n)(m+n-5) = 0$. Takže $m - n = 0$ alebo $m + n = 5$.

V prvom prípade po spätnej substitúcii zistíme, že úlohe vyhovujú všetky dvojice prirodzených čísel a, b, pre ktoré platí $b = a$. V druhom dostávame $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 5$. Teda $1 \leqq \sqrt{a}, \sqrt{b} \leqq 4$, preto stačí postupne dosadzovať $a = 1, 2, \ldots, 16$ do vzťahu

$$b = \bigl(5 - \sqrt{a}\bigr)^2 \tag{1}$$

a zisťovať, či je prislúchajúce číslo b prirodzené.

Daná rovnica sa nemení zámenou neznámych a, b. Môžeme teda predpokladať, že $a \leqq b$, čo spolu s rovnosťou $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 5$ znamená, že $\sqrt{a} \leqq 2{,}5$. Odtiaľ $a \leqq 6{,}25$. Preto sa stačí pri dosadzovaní zaoberať len hodnotami $a = 1, 2, \ldots, 6$ a zvyšné riešenia určiť zámenou čísel a, b v nájdených dvojiciach.

Dôvtipnejší postup spočíva v umocnení zátvorky na pravej strane vzťahu (1) a následnej úprave na tvar

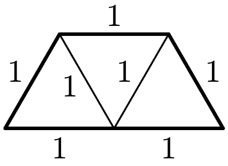
$$\frac{25 + a - b}{10} = \sqrt{a}, \tag{2}$$

z ktorého je zrejmé, že číslo a (a vzhľadom na symetriu danej rovnice aj číslo b) je druhou mocninou prirodzeného čísla. (V opačnom prípade by na ľavej strane rovnosti (2) bolo racionálne číslo, zatiaľ čo na pravej strane iracionálne.) Potom je aj ľavá strana vzťahu (2) prirodzené číslo menšie ako päť. Odtiaľ vyplýva, že rozdiel $a - b$ je nepárny násobok piatich. Pri predpoklade $a < b$ teda buď $(a, b) = (4, 9)$, alebo $(a, b) = (1, 16)$. Ďalšie dve riešenia vzniknú zámenou čísel a, b.

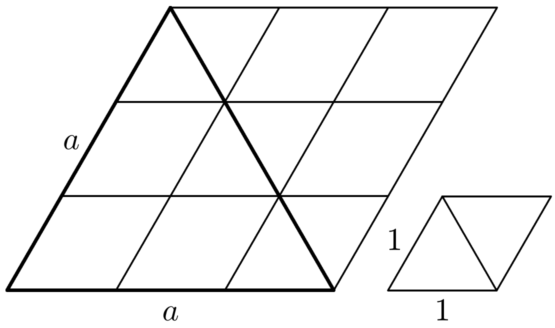
Záver. Danej rovnici vyhovujú len dvojice $(a, b) = (1, 16), (4, 9), (9, 4), (16, 1)$ a všetky dvojice (a, a), pričom a je ľubovoľné prirodzené číslo.

C – I – 2

Lichobežníky so stranami dĺžok 1 cm, 1 cm, 1 cm a 2 cm sú všetky navzájom zhodné a skladajú sa z troch rovnostranných trojuholníkov (obr. 1a). (Základne každého lichobežníka majú dve rôzne dĺžky, v našom prípade to musia byť 2 cm a 1 cm.) Budeme ich



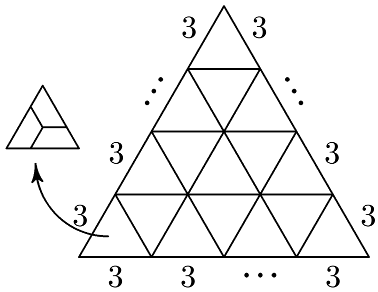
Obr. 1a



Obr. 1b

nazývať *základné lichobežníky.* Rovnostranný trojuholník s dĺžkou strany 1 cm nazveme *základný trojuholník.*

Vidíme, že každý z hľadaných trojuholníkov sa dá rozrezať na konečný počet základných trojuholníkov. Preto sú veľkosti jeho vnútorných uhlov násobkami šesťdesiatich stupňov. Vnútorné uhly každého trojuholníka sú tri a súčet ich veľkostí je 180°, má teda zmysel hľadať len rovnostranné trojuholníky. Z podmienky rozrezania na konečný počet základných trojuholníkov ďalej vyplýva, že dĺžka strany hľadaného trojuholníka vyjadrená v centimetroch je prirodzené číslo. Ak ju označíme a, dá sa náš trojuholník rozrezať práve na a^2 základných trojuholníkov. To možno odvodiť napríklad vydelením jeho obsahu $S_a = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$ a obsahu $S_1 = \frac{1}{4}\sqrt{3}$ základného trojuholníka. Všeobecnejšie platí, že dva trojuholníky, ktoré sú podobné s koeficientom k, majú obsahy v pomere k^2.



Obr. 2

Iné odvodenie počtu základných trojuholníkov v rovnostrannom trojuholníku so stranou a centimetrov vyplýva z doplnenia trojuholníka na kosoštvorec podľa obr. 1b, kde bolo zvolené $a = 3$. Kosoštvorec je zložený z dvoch rovnostranných trojuholníkov so stranou dĺžky a centimetrov. Dá sa teda rozrezať na a^2 kosoštvorcov (jeden je zobrazený v pravej dolnej časti obr. 1b), z ktorých každý je zložený z dvoch základných trojuholníkov a ktorým tiež budeme hovoriť základné. Odtiaľ vyplýva, že rovnostranný trojuholník obsahuje rovnaký počet základných trojuholníkov, ako jemu prislúchajúci kosoštvorec obsahuje základných kosoštvorcov.

Zistili sme, že každý z hľadaných trojuholníkov je rovnostranný so stranou dĺžky a centimetrov ($a \in \mathbb{N}$) a že je zložený z a^2 základných trojuholníkov. Keďže každý základný lichobežník obsahuje práve tri základné trojuholníky, musí byť číslo a^2, a teda aj číslo a, deliteľné tromi. Z obr. 2 potom vyplýva, že každý rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky $3n$ centimetrov, pričom $n = 1, 2, \dots$, sa dá rozrezať na základné lichobežníky.

Záver. Podmienkam úlohy vyhovujú len rovnostranné trojuholníky s dĺžkou strany $3n$ centimetrov, pričom n je prirodzené číslo.

C – I – 3

Hľadané číslo n obsahuje aspoň dve cifry. Zapíšme ho v tvare $n = 10a + b$, pričom a je číslo, ktoré vznikne škrtnutím poslednej cifry b čísla n. Podľa zadania $a \mid 10a + b$. Odtiaľ $a \mid b$. Nakoľko vieme, že $b \neq 0$, musí byť a jednociferné číslo, takže n je dvojciferné s nenulovými ciframi a, b, pričom $b = ka$, $k \in \mathbb{N}$.

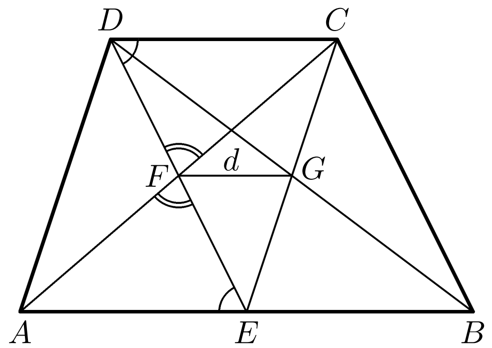
Ak škrtneme cifru a v čísle n, zostane číslo b, ktoré musí deliť pôvodné číslo $n = 10a + b$, z čoho postupne dostávame $b \mid 10a$, $ka \mid 10a$, $k \mid 10$ a odtiaľ $k \in \{1, 2, 5\}$. Dosadením do $b = ka$ dostaneme tri možné prípady $b = a$, $b = 2a$ a $b = 5a$ a v každom z nich ľahko určíme vyhovujúce dvojice cifier a, b. Tak zistíme, ako musia hľadané čísla $n = 10a + b$ vyzerať.

Záver. Riešením úlohy sú čísla 11, 12, 15, 22, 24, 33, 36, 44, 48, 55, 66, 77, 88 a 99. Skúškou sa presvedčíme, že všetky vyhovujú podmienkam úlohy.

C – I – 4

Podľa zadania sú uhly EFD a AFC priame, takže (obr. 3)

$$|\sphericalangle CDF| = |\sphericalangle AEF| \quad \text{(striedavé uhly)},$$
$$|\sphericalangle CFD| = |\sphericalangle AFE| \quad \text{(vrcholové uhly)}.$$



Obr. 3

Navyše bod F rozpoľuje úsečku DE, preto $|DF| = |EF|$ a trojuholníky CDF a AEF sú zhodné podľa vety *usu*. Odtiaľ vyplýva, že $|CD| = |AE|$, čo spolu s rovnosťou $|AE| = |EB|$ vedie k záveru, že EB a DC sú dve zhodné a rovnobežné úsečky. To znamená, že štvoruholník $EBCD$ je rovnobežník. Priesečník G jeho uhlopriečok preto rozpoľuje každú z nich. Body F a G sú stredy strán AC, EC trojuholníka AEC, takže úsečka FG

je jeho strednou priečkou a $|AE| = 2|FG|$. Preto

$$|AB| = 2|AE| = 4d \quad \text{a} \quad |CD| = |AE| = 2d.$$

Obsah lichobežníka $ABCD$ je $S = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|)v = 3dv$.

C – I – 5

Platí $33\,000 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11$ a $(n+1) - (n-4) = 5$. Keďže pre každé prirodzené n je hodnota $n+1$ kladná, daný podiel je kladný len vtedy, keď je kladná aj hodnota $n-4$, odtiaľ $n \geqq 5$.

a) Pre každé prirodzené $n \geqq 5$ platí $n-4 \geqq 1$ a $n+1 \geqq 6$, preto je najväčšia hodnota daného podielu rovná $33\,000 : (1 \cdot 6) = 5\,500$ a dostaneme ju pre $n = 5$.

b) Pri hľadaní najmenšieho podielu označme a, b čísla $n+1$, $n-4$ v poradí, ktoré ešte spresníme. Predpokladajme najskôr, že rozklad čísla ab na súčin prvočiniteľov obsahuje prvočísla 11 a 5. Potom sú a, b po sebe idúce násobky piatich a práve jedno z nich, dajme tomu a, je násobkom čísla 55.

Uvažujme najskôr $a = 55$. Z dvoch možných hodnôt $b = 50$ a $b = 60$ vyberieme tú väčšiu (aby sme dostali menšiu hodnotu skúmaného podielu). Hodnote $b = 60$ z rovnosti $n+1 = 60$ (alebo z rovnosti $n-4 = 55$) prislúcha $n = 59$ a skúmaný podiel je potom rovný číslu 10.

Pre $a = 110$ (resp. $a = 165$) nie je číslo 33 000 deliteľné žiadnym zo susedných násobkov piatich, teda číslami 105 a 115 (resp. 160 a 170).

Pre ďalšie (väčšie) násobky a čísla 55 dostávame $ab \geqq 215 \cdot 220 > 33\,000$.

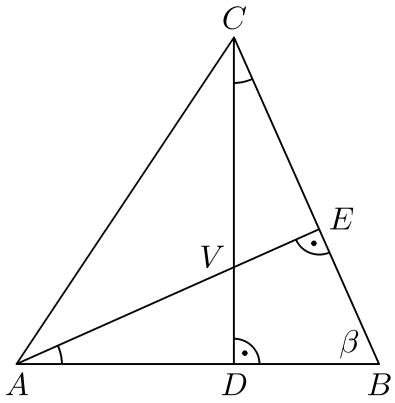
Ak rozklad čísla ab na súčin prvočiniteľov neobsahuje prvočíslo 11 alebo prvočíslo 5, je skúmaný podiel (ak je celočíselný) deliteľný číslom 11 resp. číslom 125, takže je to číslo väčšie ako hodnota 10, ktorú sme našli skôr.

Záver. Najväčšia hodnota daného podielu je 5 500 pre $n = 5$ a najmenšia je 10 pre $n = 59$.

C – I – 6

Pri označení podľa obr. 4 dostaneme

$$|\sphericalangle ADV| = |\sphericalangle CDB| = 90^\circ,$$
$$|\sphericalangle VAD| = |\sphericalangle BAE| = 90^\circ - \beta = |\sphericalangle BCD|.$$



Obr. 4

Trojuholníky ADV a CDB sú teda podobné podľa vety *uu*. Z tejto podobnosti vyplýva

$$\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|VD|}{|BD|}$$

a odtiaľ $|AD|\cdot|BD| = |CD|\cdot|VD|$. Zdôraznime, že táto rovnosť platí pre každý ostrouhlý trojuholník ABC. Vzťah $|AD| \cdot |BD| = |AB| \cdot |VD|$ zo zadania úlohy teda platí práve vtedy, keď $|CD| = |AB|$.

C – S – 1

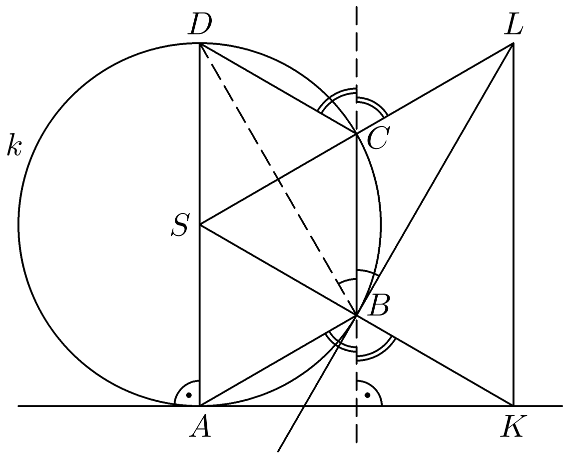
Aby číslo bolo deliteľné šiestimi, musí byť párne a mať ciferný súčet deliteľný tromi. Označme teda b číslicu na mieste jednotiek (tá musí byť párna, $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$) a a tú číslicu, ktorá je spolu s číslicami 1, 1 ($a \neq 1$) na prvých troch miestach štvorciferného čísla, ktoré spĺňa požiadavky úlohy.

Aby bol súčet číslic $a + 1 + 1 + b$ takého čísla deliteľný tromi, musí číslo $a + b$ dávať po delení tromi zvyšok 1. Pre $b \in \{0, 6\}$ tak máme pre a možnosti $a \in \{4, 7\}$ ($a \neq 1$), pre $b \in \{2, 8\}$ máme $a \in \{2, 5, 8\}$ a konečne pre $b = 4$ máme $a \in \{0, 3, 6, 9\}$. Pre každé zvolené b a zodpovedajúce $a \neq 0$ sú zrejme tri možnosti, ako číslice 1, 1 a a na prvých troch miestach usporiadať, to je spolu $(2\cdot 2+2\cdot 3+3)\cdot 3 = 39$ možností, pre $a = 0$ (keď $b = 4$) potom sú len dve možnosti (číslica nula nemôže byť prvá číslica štvorciferného čísla).

Celkom existuje 41 štvorciferných prirodzených čísel, ktoré spĺňajú podmienky úlohy.

C – S – 2

Dotyčnica ku kružnici k v bode A je kolmá na priemer AD, a teda aj na stranu BC daného šesťuholníka (obr. 5). Zároveň priamky SB a AB zvierajú s BC šesťdesiatstupňový uhol, takže sú súmerne združené podľa osi BC. Bod K je preto súmerne združený s bodom A podľa osi BC.



Obr. 5

Podobne dotyčnica BL je kolmá na BS, takže zviera s priamkou BC uhol $30°$ rovnako ako priamka BD. Priamka BL je teda súmerne združená s priamkou BD podľa osi BC. Aj priamky SC a CD sú súmerne združené podľa osi BC, takže bod L je podľa tejto osi súmerne združený s bodom D.

Dostali sme tak, že štvoruholník $KLCB$ je súmerne združený s lichobežníkom $ADCB$, ktorému je opísaná kružnica k. Vrcholy štvoruholníka $KLCB$ preto ležia na kružnici súmerne združenej s kružnicou k podľa osi BC. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

C – S – 3

Z rovnosti $a - 4\sqrt{b} = b + 4\sqrt{a}$ vyplýva rovnosť $a - b = 4\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$. Keďže

$$a - b = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right),$$

dostávame po vydelení kladným číslom $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ rovnosť

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = 4, \tag{1}$$

čiže

$$\sqrt{a} = \sqrt{b} + 4. \tag{2}$$

Jej umocnením vyjde $a = b + 16 + 8\sqrt{b}$. Keďže číslo $r = 8\sqrt{b}$ musí byť celé, je $\sqrt{b}$ racionálna odmocnina prirodzeného čísla, takže $b = n^2$ pre vhodné prirodzené číslo n. Z rovnosti (2) tak máme $a = (n+4)^2$ a $a - b = (n+4)^2 - n^2 = 2^3(n+2)$. Číslo $a - b$ je teda piatou mocninou prvočísla len vtedy, keď $n + 2 = 2^2$, čiže $n = 2$.

Jedinou vyhovujúcou dvojicou (a, b) je dvojica $(36, 4)$.

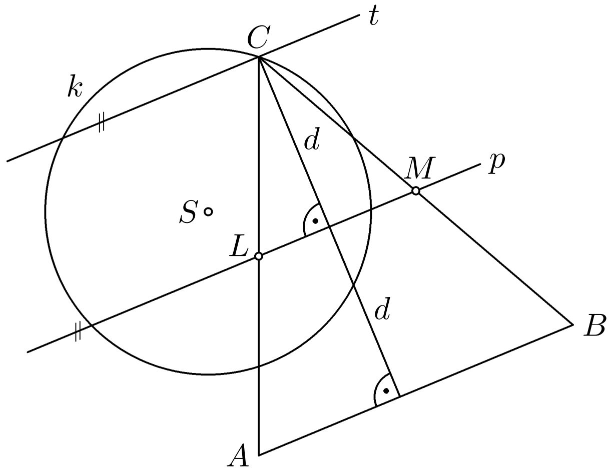
Poznámka. Keď si po odvodení vzťahu (1) uvedomíme, že v zátvorke na pravej strane rovnosti $a - b = 4(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ je kladné racionálne, a teda prirodzené číslo, vidíme, že musí platiť $a - b = 2^5$. Pre odmocniny $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ tak dostaneme sústavu dvoch rovníc

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 8,$$
$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = 4,$$

ktorých sčítaním vyjde $\sqrt{a} = 6$ a odčítaním $\sqrt{b} = 2$.

C – II – 1

Pri *rozbore* uvažujme ľubovoľný trojuholník ABC s vrcholom C na kružnici k, ktorého strany AC, BC majú stredy postupne v bodoch L, M (obr. 6). Keďže LM je strednou priečkou takého trojuholníka, je jeho obsah rovný štvornásobku obsahu trojuholníka LMC. Tento trojuholník má pevnú stranu LM, takže jeho obsah je najväčší práve vtedy, keď je najväčšia jeho výška z vrcholu C, teda vzdialenosť d bodu C od priamky p určenej bodmi L, M.



Obr. 6

Dodajme, že namiesto porovnania obsahov trojuholníkov ABC a LMC dôjdeme k rovnakej podmienke aj takto: trojuholník ABC má stranu AB pevnej dĺžky $c = 2|LM|$ a výšku $v_c = 2d$. Preto je jeho obsah $\frac{1}{2}cv_c$ rovný $2|LM| \cdot d$, takže je najväčší možný, keď je taká vzdialenosť d.

Pre ktorý bod $C \in k$ je vzdialenosť d najväčšia? Veďme bodom C priamku t rovnobežnú s priamkou p. Ak je vzdialenosť d najväčšia možná, musí celá kružnica k ležať v rovnakej polrovine s hraničnou priamkou t ako priamka p (voľbou bodu $C \in k$ vnútri opačnej polroviny by sme vzdialenosť d zväčšili). Priamka t je preto nutne dotyčnicou kružnice k (rovnobežnou s danou priamkou p) a bod C je jej dotykovým bodom.

Odtiaľ už vyplýva *konštrukcia*: bod C určíme ako ten z dvoch priesečníkov kružnice k s kolmicou na priamku p vedenou stredom S kružnice k, ktorý má od priamky p väčšiu vzdialenosť (ak ju majú oba priesečníky rovnakú, vyberieme ktorýkoľvek z nich). Body A, B potom zostrojíme ako obrazy bodu C v súmernosti podľa stredu L, resp. M.

Diskusia. Dotyčnice kružnice k rovnobežné s priamkou LM majú od tejto priamky dve *rôzne* vzdialenosti práve vtedy, keď stred S kružnice k na priamke LM *neleží*; vtedy má úloha jediné riešenie. V opačnom prípade, keď stred S na priamke LM leží, má úloha dve riešenia.

C – II – 2

a) Ak spĺňajú prirodzené čísla p, q, r danú rovnicu, dostaneme z nej vyjadrenie

$$\sqrt{p+q} = \frac{2\,007 - p - q}{r},$$

takže číslo $\sqrt{p+q}$ je racionálne, a teda celé (odmocnina z prirodzeného čísla je totiž buď číslo celé, alebo číslo iracionálne). Preto z rovností

$$2\,007 = p + r\sqrt{p+q} + q(p+q) + r\sqrt{p+q} = \sqrt{p+q}\left(\sqrt{p+q} + r\right)$$

dostávame rozklad čísla 2 007 na dva celočíselné činitele $\sqrt{p+q}$ a $\sqrt{p+q}+r$, pre ktoré zrejme platí

$$1 < \sqrt{p+q} < \sqrt{p+q} + r.$$

Z rozkladu na prvočísla $2\,007 = 3^2 \cdot 223$ vidíme, že sú možné iba dva prípady, ktoré prehľadne zapíšeme do schémy:

$\sqrt{p+q}$	$\sqrt{p+q}+r$		$p+q$	r		$p+q+r$
3	669	$\iff$	9	666	$\implies$	675
9	223		81	214		295

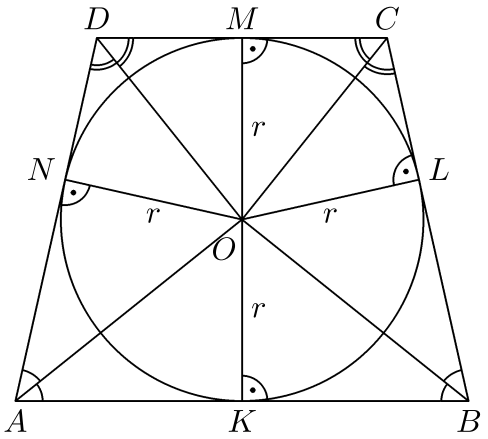
Možné hodnoty súčtu $p+q+r$ sú teda iba dve čísla: 675 a 295. (Konkrétne trojice (p,q,r), ktoré to dokazujú, nebudeme uvádzať, pretože priamo určíme v časti b) ich počet.)

b) Rovnosť $p+q+r = 675$ nastane práve vtedy, keď bude trojica (p,q,r) spĺňať podmienky $p+q = 9$ a $r = 666$; takých trojíc je práve toľko, ako dvojíc (p,q), pre ktoré $p+q = 9$, teda 8.

Rovnosť $p+q+r = 295$ nastane práve vtedy, keď bude trojica (p,q,r) spĺňať podmienky $p+q = 81$ a $r = 214$; takých trojíc je práve toľko, ako dvojíc (p,q), pre ktoré $p+q = 81$, teda 80.

C – II – 3

Označme postupne K, L, M, N body dotyku vpísanej kružnice so stranami AB, BC, CD, DA (obr. 7). Keďže $ABCD$ je rovnoramenný lichobežník, jeho vnútorné uhly pri vrcholoch A, B, C, D majú postupne veľkosti α, α, $180° - \alpha$ a $180° - \alpha$. Úsečky OA, OB,



Obr. 7

OC, OD ležiace na osiach týchto uhlov preto spolu so štyrmi navzájom zhodnými úsečkami OK, OL, OM, ON rozdeľujú celý lichobežník na osem pravouhlých trojuholníkov, ktoré sa zhodujú v jednej odvesne a majú ostré vnútorné uhly $\frac{1}{2}\alpha$ a $90° - \frac{1}{2}\alpha$. Týchto osem trojuholníkov možno preto rozdeliť na dve štvorice zhodných trojuholníkov: jednu z nich tvoria trojuholníky OAK, OAN, OBK, OBL a druhú trojuholníky OCL, OCM, ODM a ODN. Odtiaľ vyplýva, že obsah S lichobežníka $ABCD$ je rovný štvornásobku súčtu obsahov trojuholníkov OBL a OCL, teda štvornásobku obsahu trojuholníka OBC. Podľa vnútorných uhlov pri vrcholoch B a C vidíme, že trojuholník OBC je pravouhlý s odvesnami OB a OC, takže má obsah $\frac{1}{2}|OB| \cdot |OC|$ a hľadaný celkový obsah S je $S = 2|OB| \cdot |OC|$.

Poznámka. Malá obmena časti predchádzajúceho postupu: ak je O stred kružnice vpísanej dotyčnicovému štvoruholníku $ABCD$, je ľahké ukázať, že jeho obsah je rovný dvojnásobku súčtu obsahov trojuholníkov OAB a OCD rovnako ako trojuholníkov OBC a ODA. Ostatné dva trojuholníky sú pri našom rovnoramennom lichobežníku $ABCD$ zhodné.

Iné riešenie. Pre výšku v a strany a, b, c, d lichobežníka $ABCD$ s vpísanou kružnicou $k(O, r)$ platia rovnosti $v = 2r$ a $a+c = b+d$. Z prvej z nich vyplýva, že stred O leží na strednej priečke lichobežníka, ktorej dĺžka $\frac{1}{2}(a+c)$ je podľa druhej rovnosti rovná $\frac{1}{2}(b + d)$. V našom prípade však platí $b = d$, takže stredná priečka je zhodná s oboma ramenami a bod O je jej stredom, lebo rovnoramenný lichobežník je osovo súmerný. Spolu dostávame, že bod O leží na kružnici zostrojenej nad priemerom BC, a preto je OBC pravouhlý trojuholník s obsahom $\frac{1}{2}|OB| \cdot |OC|$. Jeho výška na preponu BC je však polomerom r vpísanej kružnice k, takže obsah trojuholníka OBC je tiež rovný $\frac{1}{2}b \cdot r$. Porovnaním oboch vyjadrení dostaneme rovnosť $|OB| \cdot |OC| = b \cdot r$. Pre hľadaný obsah S nášho lichobežníka preto platí

$$S = \frac{a+c}{2} \cdot v = b \cdot 2r = 2 \cdot |OB| \cdot |OC|.$$

C – II – 4

Ľubovoľné m-ciferné prirodzené číslo N s prvou číslicou c má vyjadrenie $N = c\cdot 10^m + x$, pričom x je práve to číslo, ktoré dostaneme z čísla N po škrtnutí prvej číslice c. Podľa zadania má platiť $N = c\cdot 10^m + x = kx$, čiže $c\cdot 10^m = (k-1)x$. Číslo $k-1$ teda musí byť deliteľom čísla $c\cdot 10^m$, ktoré má však iba jednociferné prvočinitele: prvočísla 2, 5 a prvočinitele z rozkladu číslice c. Budeme preto postupne testovať na prvočinitele čísla $k-1$ pre najväčšie dvojciferné k:

- $k = 99$: $k-1 = 98 = 2\cdot 7^2$ nevyhovuje, lebo $7^2 \nmid c\cdot 10^m$.
- $k = 98$: $k-1 = 97$ nevyhovuje, lebo 97 je dvojciferné prvočíslo.
- $k = 97$: $k-1 = 96 = 2^5\cdot 3$ vyhovuje, lebo napríklad $2^5\cdot 3 \mid c\cdot 10^m$ pre $c = 3$ a $m = 5$; aby sme dostali menšie N, môžeme však zvoliť menšie $m = 4$ a $c = 3\cdot 2 = 6$ (iné c pre $m = 4$ nevyhovuje). Pre $m \leqq 3$ už vzťah $2^5\cdot 3 \mid c\cdot 10^m$ neplatí pre žiadnu nenulovú číslicu c.

Hľadané najväčšie dvojciferné k je teda 97. Podľa predchádzajúcej diskusie určíme najmenšie vyhovujúce N, ktorému prislúcha $m = 4$, $c = 6$ a $x = 6\cdot 10^4 : 96 = 625$, takže $N = 6\cdot 10^4 + 625 = 60\,625$.

Odpoveď. Hľadané k je rovné 97 a najmenšie vyhovujúce N je 60 625.

Kategória B

B – I – 1

Rovnicu riešime ako kvadratickú s neznámou a a parametrom b. Jej diskriminant je

$$D = (7b+5)^2 - 4(6b^2+4b+3) = 25b^2 + 54b + 13$$

a korene

$$a_{1,2} = \frac{-7b-5 \pm \sqrt{D}}{2}.$$

Ak sú a aj b celé čísla, musí byť aj $\sqrt{D} = \pm(2a+7b+5)$ celé číslo. Môžeme teda písať

$$D = 25b^2 + 54b + 13 = c^2,$$

pričom c je celé nezáporné. Rovnicu

$$25b^2 + 54b + 13 - c^2 = 0$$

opäť riešime ako kvadratickú. Jej korene sú

$$b_{1,2} = \frac{-27 \pm \sqrt{27^2 - 25 \cdot 13 + 25c^2}}{25}.$$

Ak sú b a c celé čísla, musí byť $\sqrt{404 + 25c^2}$ druhou mocninou nejakého celého nezáporného čísla d. Pre celé nezáporné čísla c, d teda platí $d^2 - 25c^2 = 404$, čiže

$$(d+5c)(d-5c) = 404.$$

Rozdiel $(d+5c)-(d-5c) = 10c$ je párny, takže čísla $d+5c$ a $d-5c$ majú rovnakú paritu. Navyše $d+5c \geqq d-5c$ a $d+5c \geqq 0$, takže z rozkladov čísla 404 na súčin dvoch celých čísel vyhovuje jediný, a to

$$d + 5c = 202, \quad d - 5c = 2.$$

Odtiaľ $d = 102$, $c = 20$. Z koreňov

$$b_{1,2} = \frac{-27 \pm d}{25}$$

je celým číslom iba $b = 3$. Potom

$$a_{1,2} = \frac{-7b-5 \pm c}{2},$$

teda $a_1 = -3$ a $a_2 = -23$.

Danej rovnici vyhovujú dve dvojice čísel (a, b), a to $(-3, 3)$ a $(-23, 3)$.

Iné riešenie. Trojčlen $a^2+7ab+6b^2$ sa dá rozložiť na súčin $(a+b)(a+6b)$. Pokúsme sa na súčin rozložiť aj výraz $a^2+7ab+6b^2+5a+4b+c$, pričom c je vhodná konštanta. Rozklad bude mať tvar

$$a^2 + 7ab + 6b^2 + 5a + 4b + c = (a + b + x)(a + 6b + y).$$

Po roznásobení pravej strany a porovnaní koeficientov pri a a b dostaneme

$$x + y = 5, \quad 6x + y = 4,$$

čiže

$$x = -\frac{1}{5}, \quad y = \frac{26}{5}$$

a nakoniec

$$c = xy = -\frac{26}{25}.$$

Danú rovnicu teda môžeme postupne upraviť na tvar

$$\begin{aligned} a^2 + 7ab + 6b^2 + 5a + 4b - \frac{26}{25} &= -3 - \frac{26}{25}, \\ \left(a + b - \frac{1}{5}\right)\left(a + 6b + \frac{26}{5}\right) &= -\frac{101}{25}, \\ (5a + 5b - 1)(5a + 30b + 26) &= -101. \end{aligned}$$

Keďže $5a + 5b - 1 \equiv -1 \pmod 5$, $5a + 30b + 26 \equiv 1 \pmod 5$, vyhovujú zo štyroch vyjadrení čísla -101 v tvare súčinu dvoch celých čísel len dve nasledovné:

$5a + 5b - 1 = -1$, $5a + 30b + 26 = 101$, a teda $a = -3$, $b = 3$;

$5a + 5b - 1 = -101$, $5a + 30b + 26 = 1$, a teda $a = -23$, $b = 3$.

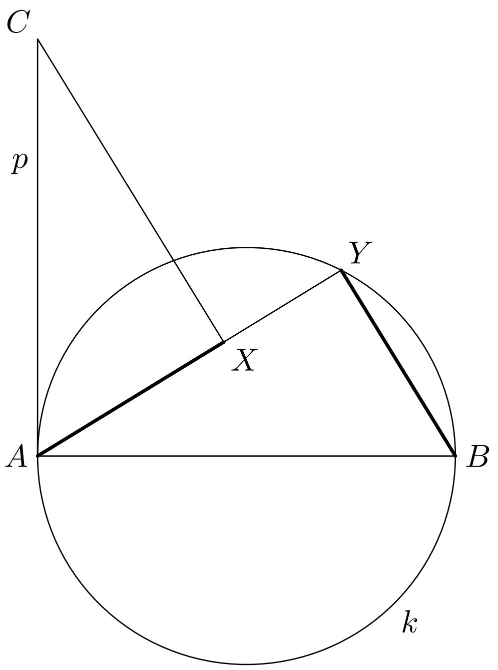
B – I – 2

Keď $Y = B$, potom $X = A$.

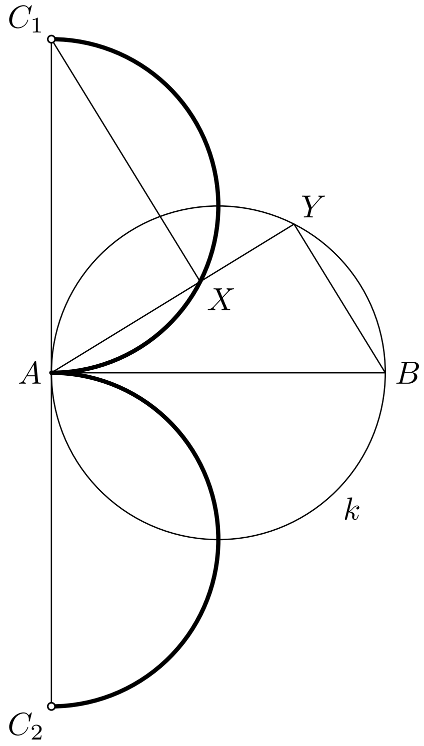
Nech $Y \neq B$. Nech p je priamka prechádzajúca bodom A kolmá na AB a C ten bod priamky p ležiaci v tej istej polrovine určenej priamkou AB ako bod Y, pre ktorý platí $|AC| = |AB|$ (obr. 8). Podľa zadania platí $|AX| = |BY|$. Uhol AYB je podľa Tálesovej vety pravý, preto $|\sphericalangle ABY| = 90° - |\sphericalangle YAB| = |\sphericalangle CAX|$. Trojuholníky ABY a CAX sú teda zhodné podľa vety *sus*. Odtiaľ vyplýva, že $|\sphericalangle CXA| = |\sphericalangle AYB| = 90°$. Bod X teda leží na Tálesovej polkružnici nad priemerom AC.

Nech naopak X je ľubovoľný vnútorný bod tejto polkružnice a Y priesečník priamky AX s kružnicou k ($Y \neq A$). Trojuholníky CAX a ABY sú zhodné podľa vety *usu*, a preto $|AX| = |BY|$. Bod X teda patrí do hľadanej množiny.

Hľadanou množinou všetkých bodov X je zjednotenie dvoch polkružníc nad priemermi AC_1 a AC_2 ležiacich v tej istej polrovine ako bod B; C_1 a C_2 sú body ležiace



Obr. 8



Obr. 9

na kolmici vedenej bodom A na priamku AB, pričom $|AC_1| = |AC_2| = |AB|$ (obr. 9). Bod A do hľadanej množiny patrí, body C_1 a C_2 nie.

B – I – 3

Na konštrukciu množiny po dvoch nesúdeliteľných trojciferných zložených čísel s veľkým počtom prvkov môžeme využiť to, že mocniny dvoch rôznych prvočísel sú nesúdeliteľné. Množina

$$\{2^7, 3^5, 5^3, 7^3, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2, 29^2, 31^2\}$$

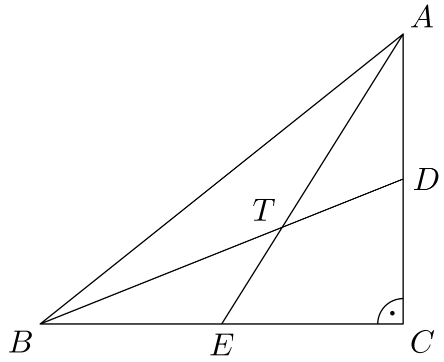
obsahuje 11 po dvoch nesúdeliteľných trojciferných čísel a nie je v nej žiadne prvočíslo.

Dokážeme, že každá aspoň dvanásťprvková množina po dvoch nesúdeliteľných trojciferných čísel obsahuje prvočíslo. Keďže $37^2 > 1000$, je každé zložené trojciferné číslo deliteľné aspoň jedným prvočíslom menším ako 37. Preto sa dá množina všetkých zložených trojciferných čísel rozdeliť na 11 podmnožín A_2, A_3, A_5, A_7, A_{11}, A_{13}, A_{17}, A_{19}, A_{23}, A_{29}, A_{31}, pričom A_i obsahuje tie čísla, ktorých najmenším prvočiniteľom je číslo i. Každé dve rôzne čísla z tej istej množiny A_i sú súdeliteľné. Nech množina B trojciferných po dvoch nesúdeliteľných čísel má aspoň 12 prvkov. Keby v B boli iba zložené čísla, podľa Dirichletovho princípu by B obsahovala dve čísla z tej istej množiny A_i; tieto čísla by ale boli súdeliteľné. Preto množina B musí obsahovať aspoň jedno prvočíslo.

Hľadané najmenšie číslo k je teda 12.

B – I – 4

Konvexný štvoruholník je dotyčnicový práve vtedy, keď súčty dĺžok jeho protiľahlých strán sú rovnaké.



Obr. 10

V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou AB označme $a = |BC|$, $b = |AC|$ (obr. 10). Podľa Pytagorovej vety platí

$$|BD| = \sqrt{|BC|^2 + |CD|^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}, \quad |AE| = \sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Keďže ťažisko trojuholníka delí ťažnicu v pomere $1 : 2$, máme

$$|TD| = \frac{1}{3}|BD| = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}, \quad |TE| = \frac{1}{3}|AE| = \frac{1}{3}\sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Štvoruholník $CDTE$ je dotyčnicový práve vtedy, keď $|CD| + |TE| = |EC| + |TD|$, teda

$$\frac{b}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Ak $a = b$, potom rovnosť platí.
Ak $a > b$, potom $a^2 + \frac{1}{4}b^2 > b^2 + \frac{1}{4}a^2$, a teda

$$\frac{b}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} < \frac{a}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Podobne, ak $a < b$, potom

$$\frac{b}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} > \frac{a}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Štvoruholník $CDTE$ je teda dotyčnicový práve vtedy, keď je trojuholník ABC rovnoramenný.

Iné riešenie. Z rovnosti

$$\frac{b}{2}+\frac{1}{3}\sqrt{b^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a}{2}+\frac{1}{3}\sqrt{a^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

postupne vyplýva

$$\begin{aligned}
3b+\sqrt{4b^2+a^2}&=3a+\sqrt{4a^2+b^2},\\
3b-3a&=\sqrt{4a^2+b^2}-\sqrt{4b^2+a^2},\\
9b^2-18ab+9a^2&=5a^2+5b^2-2\sqrt{4a^4+17a^2b^2+4b^4},\\
2a^2-9ab+2b^2&=-\sqrt{4a^4+17a^2b^2+4b^4},\\
4a^4+81a^2b^2+4b^4-36a^3b-36ab^3+8a^2b^2&=4a^4+17a^2b^2+4b^4,\\
72a^2b^2-36a^3b-36ab^3&=0,\\
-36ab(a-b)^2&=0,\\
a&=b.
\end{aligned}$$

Naopak, z rovnosti $a=b$ vyplýva

$$\frac{b}{2}+\frac{1}{3}\sqrt{b^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a}{2}+\frac{1}{3}\sqrt{a^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Štvoruholník $CDTE$ je teda dotyčnicový práve vtedy, keď je trojuholník ABC rovnoramenný.

B – I – 5

Delením polynómu x^4+px^2+q polynómom x^2+px+q zistíme, že platí

$$x^4+px^2+q=(x^2+px+q)(x^2-px+p^2+p-q)+(2pq-p^3-p^2)x+q-p^2q-pq+q^2.$$

Polynóm x^2+px+q je deliteľom polynómu x^4+px^2+q práve vtedy, keď je zvyšok $(2pq-p^3-p^2)x+q-p^2q-pq+q^2$ nulový polynóm, teda práve vtedy, ak súčasne platia rovnosti $2pq-p^3-p^2=0$ a $q-p^2q-pq+q^2=0$. Tieto upravíme na tvar

$$p(2q-p^2-p)=0, \quad \text{a} \quad q(1-p^2-p+q)=0.$$

Ak $p=0$, potom $q=0$ alebo $q=-1$.
Ak $q=0$, potom $p=0$ alebo $p=-1$.
Ak $p\neq 0$ a $q\neq 0$, potom musí platiť $2q-p^2-p=0$ a $1-p^2-p+q=0$. Z druhej rovnice vyjadríme $q=p^2+p-1$. Po dosadení do prvej rovnice máme $2p^2+2p-2-$ $-p^2-p=0$ a odtiaľ $p=1$, $q=1$ alebo $p=-2$, $q=1$.

Vyhovuje teda päť dvojíc (p, q), a to $(0, 0)$, $(0, -1)$, $(-1, 0)$, $(1, 1)$, $(-2, 1)$.

Iné riešenie. Polynóm $x^2 + px + q$ je deliteľom polynómu $x^4 + px^2 + q$ práve vtedy, keď existujú také reálne čísla a, b, že

$$x^4 + px^2 + q = (x^2 + px + q)(x^2 + ax + b) = \\ = x^4 + (a + p)x^3 + (b + ap + q)x^2 + (bp + aq)x + bq.$$

Porovnaním koeficientov dostaneme podmienky

$$a + p = 0, \tag{1}$$

$$b + ap + q = p, \tag{2}$$

$$bp + aq = 0, \tag{3}$$

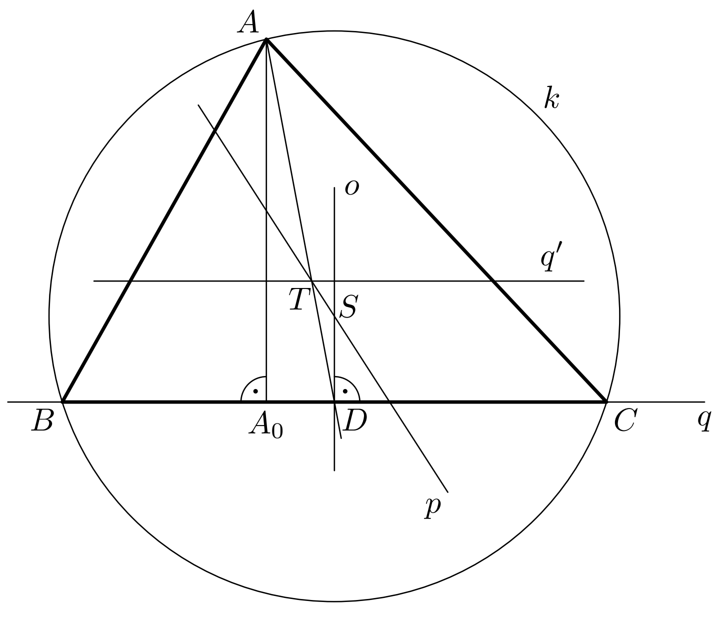
$$bq = q. \tag{4}$$

Ak $q = 0$, potom podľa (3) $p = 0$ alebo $b = 0$. Dosadením $b = 0$ do (2) s využitím (1) dostaneme $-p^2 = p$, a teda okrem $p = 0$ vyhovuje aj $p = -1$.

Ak $q \neq 0$, vyplýva zo (4) $b = 1$. Vzťahy (3) a (1) potom dávajú $p - pq = 0$, teda $p = 0$ alebo $q = 1$. V prvom prípade musí byť podľa (2) $q = -1$, v druhom $1 - p^2 + 1 = p$ a odtiaľ $p = 1$ alebo $p = -2$.

B – I – 6

Strana BC hľadaného trojuholníka leží na priamke q, ktorá prechádza bodom A_0 a je kolmá na výšku AA_0. Na tejto priamke leží aj stred D strany BC. Ťažisko T je obrazom bodu D v rovnoľahlosti so stredom A a koeficientom $\frac{2}{3}$, leží preto na priamke q', ktorá je obrazom priamky q v uvedenej rovnoľahlosti. Stred S opísanej kružnice leží na osi o strany BC, čiže na priamke, ktorá prechádza bodom D a je rovnobežná s výškou AA_0 (obr. 11).



Obr. 11

Konštrukcia. Bodom A_0 vedieme priamku q kolmú na úsečku AA_0. Zostrojíme obraz q' priamky q v rovnoľahlosti so stredom A a koeficientom $\frac{2}{3}$. Označíme T priesečník priamky q' s priamkou p a D priesečník priamky AT s priamkou q. Bodom D vedieme rovnobežku o s AA_0 a jej priesečník s priamkou p označíme S. Priesečníky kružnice k so stredom S a polomerom $|SA|$ s priamkou q sú vrcholy B a C hľadaného trojuholníka.

Dôkaz správnosti. Úsečka AA_0 je kolmá na stranu BC, je to teda výška trojuholníka ABC. Bod S ležiaci na priamke p je stredom kružnice opísanej trojuholníku ABC. Zo zhodnosti trojuholníkov BDS a CDS (veta *Ssu*) vyplýva, že D je stred strany BC. Preto je AD ťažnica a T ťažisko trojuholníka ABC (platí totiž $|AT| = \frac{2}{3}|AD|$).

Diskusia. Ak priamka p nie je rovnobežná s úsečkou AA_0 ani nie je na ňu kolmá, sú body T a S jednoznačne určené. V tom prípade má úloha práve jedno riešenie (až na označenie bodov B a C), pokiaľ kružnica k pretína priamku q v dvoch rôznych bodoch; ak kružnica k nepretína priamku p v dvoch rôznych bodoch, nemá úloha riešenie.

Ak je úsečka AA_0 časťou priamky p, nie je bod S jednoznačne určený; vyhovujú všetky rovnoramenné trojuholníky so základňou BC, ktorá má stred v bode A_0. Ak je úsečka AA_0 rovnobežná s priamkou p, ale neleží na nej, nemá úloha riešenie.

Ak je priamka p kolmá na úsečku AA_0, má úloha riešenie len vtedy, keď sú priamky q' a p totožné. To nastane vtedy, keď priamka p pretína úsečku AA_0 v bode V, pre ktorý platí $|AV| = 2|A_0V|$. V takom prípade môžeme bod T zvoliť na p kdekoľvek a úloha má nekonečne veľa riešení.

B – S – 1

Delením polynómu $x^4 + ax^2 + b$ polynómom $x^2 + bx + a$ zistíme, že

$$x^4 + ax^2 + b = (x^2 + bx + a)(x^2 - bx + b^2) + (ab - b^3)x + (b - ab^2).$$

Polynóm $x^4 + ax^2 + b$ je deliteľný polynómom $x^2 + bx + a$ práve vtedy, keď je zvyšok $(ab - b^3)x + (b - ab^2)$ nulový polynóm, teda $ab - b^3 = b(a - b^2) = 0$ a súčasne $b - ab^2 = b(1 - ab) = 0$. Ak $b = 0$, sú obe podmienky splnené. Pre $b \neq 0$ musí platiť $a - b^2 = 0$ a $1 - ab = 0$. Odtiaľ $a = b^2$, $1 - b^3 = 0$, a teda $a = b = 1$.

Záver. Polynóm $x^4 + ax^2 + b$ je deliteľný polynómom $x^2 + bx + a$ práve vtedy, keď $b = 0$ (a a je ľubovoľné) alebo $a = b = 1$.

Iné riešenie. Polynóm $x^4 + ax^2 + b$ je deliteľný polynómom $x^2 + bx + a$ práve vtedy, keď existujú také reálne čísla p, q, že $x^4 + ax^2 + b = (x^2 + bx + a)(x^2 + px + q)$. Roznásobením a porovnaním koeficientov dostaneme sústavu rovníc

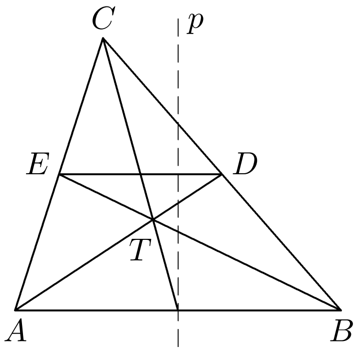
$$p + b = 0, \quad q + bp + a = a, \quad ap + bq = 0, \quad aq = b.$$

Z prvej rovnice vyjadríme $p = -b$ a z druhej $q = -bp = b^2$, dosadením do tretej a štvrtej máme $-ab + b^3 = 0$, $ab^2 = b$. Riešenie dokončíme rovnako ako v prvom riešení.

B – S – 2

Polomer kružnice vpísanej trojuholníku je podielom jeho obsahu a polovice obvodu.

Trojuholníky ADE a BDE majú zrejme rovnaký obsah, pretože majú spoločnú stranu DE a zhodnú výšku na ňu (AB a DE sú rovnobežné). Rovnaký obsah teda majú aj trojuholníky ATE a BDT, pretože obsahy oboch trojuholníkov sa od obsahu spomenutých trojuholníkov líšia práve o obsah „spoločného“ trojuholníka DET (obr. 12).



Obr. 12

Označme p os úsečky AB. Ak je strana BC dlhšia ako strana AC, leží bod C v tej istej polrovine s hraničnou priamkou p ako bod A. Preto v tejto polrovine leží aj ťažisko T. Jeho vzdialenosť od bodu A je teda menšia ako vzdialenosť od bodu B. To znamená, že dĺžka t_a ťažnice AD je menšia ako dĺžka t_b ťažnice BE. Trojuholník ATE má obvod $o_1 = \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}t_b + \frac{2}{3}t_a$, trojuholník BDT má obvod $o_2 = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}t_a + \frac{2}{3}t_b$. Z nerovností $b < a$ a $t_a < t_b$ preto vyplýva

$$o_2 - o_1 = \frac{1}{2}(a-b) + \frac{1}{3}(t_b - t_a) > 0,$$

čiže $o_1 < o_2$.

Trojuholníky AET a BDT majú rovnaký obsah a prvý z nich má menší obvod, preto má kružnica vpísaná trojuholníku AET väčší polomer ako kružnica vpísaná trojuholníku BDT.

B – S – 3

Číslo $n^2 + 15n = n(n+15)$ má byť deliteľné číslom $33\,000 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 11$. Keby nebolo n deliteľné tromi, nebolo by tromi deliteľné ani číslo $n + 15$, čiže ani súčin $n(n + 15)$. Z rovnakého dôvodu musí byť n deliteľné piatimi, a teda aj pätnástimi. Píšme preto $n = 15k$. Aby bolo číslo $n(n + 15) = 15^2k(k + 1)$ deliteľné číslom $8 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 11$, musí byť súčin $k(k + 1)$ dvoch po sebe idúcich prirodzených čísel deliteľný ôsmimi, piatimi a jedenástimi. Jeden z činiteľov k, $k+1$ musí byť deliteľný aspoň dvoma z týchto troch čísel, takže musí byť deliteľný niektorým z čísel 40, 55, 88. Najmenším takým číslom je 40. Jedenástimi ale nie je deliteľné ani číslo 40 ani žiaden z jeho susedov 39, 41. Ďalším kandidátom je číslo 55, súčin čísel 5 a 11. O jednotku väčšie číslo 56 je zase deliteľné ôsmimi. Preto súčin $55 \cdot 56$ je deliteľný ôsmimi, piatimi aj jedenástimi; máme teda $k = 55$. Hľadané najmenšie číslo je $n = 15k = 825$.

B – II – 1

Delením polynómu $x^4 + ax^2 + bx + c$ polynómom $x^2 + x + 1$ zistíme, že platí

$$x^4 + ax^2 + bx + c = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + a) + (b - a + 1)x + (c - a).$$

Polynóm $x^4 + ax^2 + bx + c$ je deliteľný polynómom $x^2 + x + 1$ práve vtedy, keď je zvyšok pri delení nulový polynóm, teda $b - a + 1 = 0$ a súčasne $c - a = 0$; odtiaľ $b = a - 1$, $c = a$. Potom

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + (a - 1)^2 + a^2 = 3a^2 - 2a + 1 = 3\left(a - \tfrac{1}{3}\right)^2 + \tfrac{2}{3}.$$

Tento výraz má najmenšiu hodnotu pre $a = \frac{1}{3}$; ľahko dopočítame $b = a - 1 = -\frac{2}{3}$, $c = a = \frac{1}{3}$.

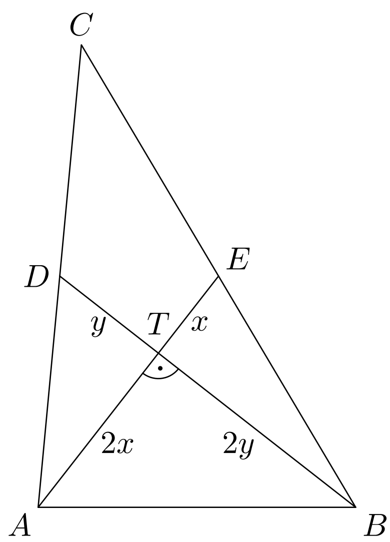
Iné riešenie. Polynóm $x^4 + ax^2 + bx + c$ je deliteľný polynómom $x^2 + x + 1$ práve vtedy, keď existujú reálne čísla p, q, pre ktoré

$$x^4 + ax^2 + bx + c = (x^2 + x + 1)(x^2 + px + q).$$

Roznásobením pravej strany a porovnaním koeficientov dostaneme štyri rovnice $p+1 = 0$, $q + p + 1 = a$, $q + p = b$, $q = c$. Z nich vyjadríme $p = -1$, $q = a$, $c = a$, $b = a - 1$ a pokračujeme ako v prvom riešení.

B – II – 2

Označme D stred strany AC, E stred strany BC a T ťažisko trojuholníka ABC



Obr. 13

(obr. 13). Ak ďalej označíme $3x$ a $3y$ dĺžky ťažníc t_a a t_b, máme $|AT| = 2x, |ET| = x, |BT| = 2y, |DT| = y$. Podľa Pytagorovej vety pre trojuholníky ATD, BET, ABT platí

$$(2x)^2 + y^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

$$x^2 + (2y)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

$$(2x)^2 + (2y)^2 = c^2.$$

Sčítaním prvých dvoch rovníc dostaneme $5(x^2+y^2) = \frac{1}{4}(a^2+b^2)$ a po dosadení do tretej rovnice máme $c^2 = 4(x^2+y^2) = \frac{1}{5}(a^2+b^2)$. Numericky potom $c^2 = \frac{1}{5}(22^2+19^2) = 169$, a teda $c = 13\,\mathrm{cm}$.

B – II – 3

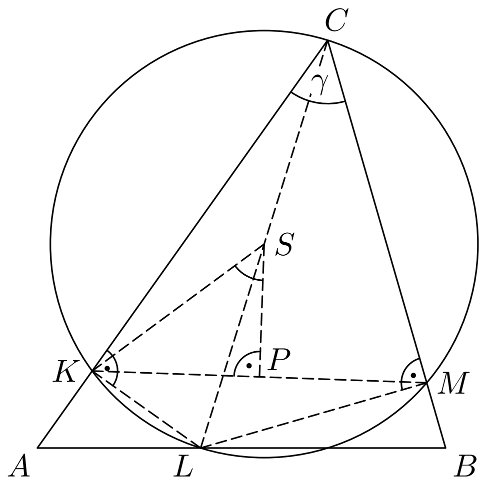
Číslice 0, 1, 2, 3 a 4 nazvime malé (skrátene m), číslice 5, 6, 7, 8 a 9 veľké (skrátene v). Pravidelným striedaním malých a veľkých číslic vznikne vždy vlnité číslo.

Čísel tvaru *vmvmvmvmvm* je $(5!)^2$, čísel tvaru *mvmvmvmvmv* je $4\cdot 4!\cdot 5!$ (na prvom mieste nesmie byť 0). Tých vlnitých čísel, ktoré vzniknú pravidelným striedaním malých a veľkých číslic, je teda $5!\cdot 5! + 4\cdot 4!\cdot 5! = 9\cdot 24\cdot 120 = 25\,920 > 25\,000$.

Poznámka. Všetkých desaťciferných vlnitých čísel s rôznymi číslicami je 93 106.

B – II – 4

Keďže sú uhly LKC a LMC pravé, ležia body K a M na Tálesovej kružnici nad priemerom CL (obr. 14). Podľa vety o obvodovom uhle prislúcha tetive KM stredový



Obr. 14

uhol veľkosti 2γ, a preto $|KM| = |CL|\sin\gamma$ (v pravouhlom trojuholníku KPS, kde

P je stred úsečky KM a S stred úsečky CL, je totiž $|KS| = \frac{1}{2}|CL|, |\sphericalangle KSP| = \gamma$). Úsečka KM je teda najkratšia práve vtedy, keď je najkratšia úsečka CL; to nastáva práve vtedy, keď L je päta kolmice z bodu C na stranu AB.

Kategória A

A – I – 1

Označme hľadané korene x_1, x_2, x_3, x_4 tak, aby platilo $x_1 + x_2 = 1$. Potom

$$4x^4 - 12x^3 - 7x^2 + 22x + 14 = 4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$

Porovnaním koeficientov pri zodpovedajúcich mocninách x dostaneme známe Viètove vzťahy

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \tag{1}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -\frac{7}{4}, \tag{2}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{11}{2}, \tag{3}$$

$$x_1x_2x_3x_4 = \frac{7}{2}. \tag{4}$$

Keďže $x_1 + x_2 = 1$, z (1) vyplýva $x_3 + x_4 = 2$. Rovnice (2) a (3) prepíšeme na tvar

$$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_1x_2 + x_3x_4 = -\frac{7}{4},$$
$$(x_1 + x_2)x_3x_4 + (x_3 + x_4)x_1x_2 = -\frac{11}{2},$$

čo po dosadení hodnôt $x_1 + x_2 = 1$ a $x_3 + x_4 = 2$ dáva

$$x_1x_2 + x_3x_4 = -\frac{15}{4},$$
$$2x_1x_2 + x_3x_4 = -\frac{11}{2}.$$

Z tejto sústavy dvoch lineárnych rovníc už ľahko dostaneme

$$x_1x_2 = -\frac{7}{4}, \qquad x_3x_4 = -2.$$

Všimnime si, že pre tieto hodnoty súčinov x_1x_2 a x_3x_4 je splnená aj rovnica (4), ktorú sme zatiaľ nevyužili. Z podmienok $x_1 + x_2 = 1$, $x_1x_2 = -\frac{7}{4}$ vyplýva, že x_1 a x_2 sú korene kvadratickej rovnice

$$x^2 - x - \frac{7}{4} = 0, \qquad \text{teda} \quad x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{2}.$$

Podobne z podmienok $x_3 + x_4 = 2$ a $x_3x_4 = -2$ dostaneme

$$x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{3}.$$

Skúšku nájdených koreňov netreba robiť, pretože je splnená, ako sme zdôraznili, celá sústava rovníc (1) až (4).

Záver. Daná rovnica má korene $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$, $\frac{1}{2} - \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{3}$, $1 - \sqrt{3}$.

Iné riešenie. Z podmienok úlohy vyplýva, že ľavá strana rovnice je súčinom mnohočlenov

$$x^2 - x + p \qquad \text{a} \qquad 4x^2 + qx + r,$$

pričom p, q a r sú reálne čísla. Po ich vynásobení a porovnaní koeficientov pri zodpovedajúcich mocninách x dostaneme sústavu štyroch rovníc o troch neznámych

$$\begin{aligned} r - 4 &= -12, \\ 4p + q - r &= -7, \\ pr - q &= 22, \\ pq &= 14. \end{aligned}$$

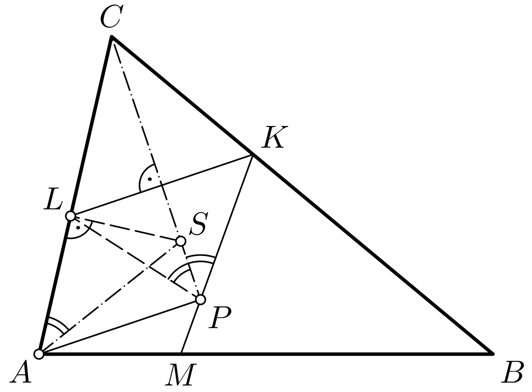
Prvé tri rovnice majú jediné riešenie $r = -8$, $p = -\frac{7}{4}$ a $q = -8$, ktoré vyhovuje aj štvrtej rovnici. Platí teda rozklad

$$4x^4 - 12x^3 - 7x^2 + 22x + 14 = \left(x^2 - x - \tfrac{7}{4}\right)(4x^2 - 8x - 8).$$

Rovnica $x^2 - x - \frac{7}{4} = 0$ má korene $\frac{1}{2} \pm \sqrt{2}$, rovnica $4x^2 - 8x - 8 = 0$ má korene $1 \pm \sqrt{3}$.

A – I – 2

Označme k kružnicu vpísanú do trojuholníka ABC a S jej stred. Veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC označme zvyčajným spôsobom α, β, γ. Keďže body K, L sú súmerne združené podľa osi vnútorného uhla pri vrchole C, sú priamky KL a CP na seba kolmé a $|\sphericalangle LPC| = |\sphericalangle KPC|$ (obr. 15).



Obr. 15

Keď vyjadríme veľkosti vnútorných uhlov pri základniach KM a LK v rovnoramenných trojuholníkoch KMB a LKC, dostaneme $|\sphericalangle MKB| = 90^\circ - \beta/2$, $|\sphericalangle LKC| = 90^\circ - \gamma/2$. Z priamosti uhla BKC tak vyplýva $|\sphericalangle MKL| = 90^\circ - \alpha/2$. Analogicky vyjde $|\sphericalangle KLM| = 90^\circ - \beta/2$, $|\sphericalangle LMK| = 90^\circ - \gamma/2$.

Keďže $|\sphericalangle KPC| + \gamma/2 = |\sphericalangle BKP| = 90^\circ - \beta/2$, dostaneme pre veľkosť súmerne združených uhlov LPC a KPC rovnosť

$$|\sphericalangle LPC| = |\sphericalangle KPC| = 90^\circ - \frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Kružnica k vpísaná do trojuholníka ABC je súčasne kružnicou opísanou trojuholníku KLM, ktorý je – ako sme zistili výpočtom jeho uhlov – ostrouhlý. Jej stred S je preto vnútorným bodom tohto trojuholníka, a teda aj vnútorným bodom úsečky CP. Keďže

$$|\sphericalangle LPC| = |\sphericalangle LPS| = |\sphericalangle LAS| = \frac{\alpha}{2},$$

$APSL$ je tetivový štvoruholník. Vzhľadom na to, že uhol ALS je pravý, je aj uhol APS pravý (priamky AP a CP sú na seba kolmé). Preto sú priamky KL a AP rovnobežné, čo bolo treba dokázať.

Poznámka. Keďže kružnica k je opísaná trojuholníku KLM, môžeme jeho vnútorné uhly ľahko vyjadriť z príslušných stredových uhlov: $|\sphericalangle KSL| = 180^\circ - \gamma$, takže $|\sphericalangle KML| = 90^\circ - \gamma/2$, atď.

A – I – 3

Pre ľubovoľné reálne čísla $x, y, z \in \langle -1, 1\rangle$ platí $1 - x^2 \geqq 0$, $1 - y^2 \geqq 0$, $1 - z^2 \geqq 0$. Použitím nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom pre trojicu nezáporných reálnych čísel $1 - x^2$, $1 - y^2$, $1 - z^2$ tak dostaneme

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)} &\leqq \frac{(1-x^2)+(1-y^2)+(1-z^2)}{3} = \\ &= \frac{3-(x^2+y^2+z^2)}{3},\end{aligned}$$

takže

$$6\sqrt[3]{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)} \leqq 6 - 2(x^2+y^2+z^2). \tag{1}$$

Ak reálne čísla $x, y, z \in \langle -1, 1\rangle$ vyhovujú podmienke $xy + yz + zx = 1$, ukážeme, že spĺňajú aj nerovnosť

$$6 - 2(x^2+y^2+z^2) \leqq 1 + (x+y+z)^2. \tag{2}$$

Pravú stranu tejto nerovnosti upravíme na tvar

$$1 + x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 3 + (x^2 + y^2 + z^2),$$

čo po dosadení do (2) vedie k ekvivalentnej nerovnosti

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqq 1.$$

Jej platnosť overíme ľahko. Stačí totiž dokázať, že pre reálne čísla x, y, z, ktoré vyhovujú podmienkam úlohy, platí nerovnosť

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqq xy + yz + zx,$$

čo je však ekvivalentné s nerovnosťou

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geqq 0,$$

ktorá platí pre všetky reálne čísla x, y, z.

Záver. Nerovnosť, ktorú sme mali dokázať, vyplýva z dokázaných nerovností (1) a (2). Rovnosť v nej pritom nastane práve vtedy, keď nastane súčasne v oboch spomenutých nerovnostiach. To nastane práve vtedy, keď $x = y = z$, čo vzhľadom na podmienku $xy + yz + zx = 1$ dáva iba dve možnosti $x = y = z = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$, pre ktoré v dokázanej nerovnosti platí rovnosť.

A – I – 4

a) Označme A a B hľadané podmnožiny. Keďže obe majú rovnaký počet prvkov, je počet prvkov množiny M nutne párny. Teda $n = 2k$, pričom k je vhodné prirodzené číslo.

Pre $n = 4$ neexistuje rozklad množiny $\mathsf{M} = \{1, 2, 3, 4\}$ na dve podmnožiny daných vlastností, pretože aritmetický priemer ľubovoľných dvoch rôznych čísel z množiny M sa nemôže rovnať žiadnemu z týchto čísel. Zostrojme vyhovujúci rozklad množiny M pre niekoľko prvých párnych čísel n (aritmetický priemer prvkov podmnožín vyznačíme tučne).

$n = 2$:	$\mathsf{A} = \{\mathbf{1}\}$	$\mathsf{B} = \{\mathbf{2}\}$
$n = 4$:	rozklad neexistuje	
$n = 6$:	$\mathsf{A} = \{1, \mathbf{2}, 3\}$	$\mathsf{B} = \{4, \mathbf{5}, 6\}$
$n = 8$:	$\mathsf{A} = \{2, 3, \mathbf{4}, 7\}$	$\mathsf{B} = \{1, \mathbf{5}, 6, 8\}$
$n = 10$:	$\mathsf{A} = \{1, 2, \mathbf{3}, 4, 5\}$	$\mathsf{B} = \{6, 7, \mathbf{8}, 9, 10\}$
$n = 12$:	$\mathsf{A} = \{1, 2, 3, \mathbf{4}, 6, 8\}$	$\mathsf{B} = \{5, 7, \mathbf{9}, 10, 11, 12\}$

Teraz ukážeme, že hľadaný rozklad množiny M existuje pre ľubovoľné $n = 2k$ také, že $k \neq 2$.

Pre nepárne čísla k vyhovuje napríklad rozklad množiny M na podmnožiny

$$\mathsf{A} = \{1, 2, \dots, k\}, \qquad \mathsf{B} = \{k+1, k+2, \dots, 2k\}.$$

Súčet všetkých prvkov množiny A je $\frac{1}{2}k(k+1)$, ich aritmetický priemer je $\frac{1}{2}(k+1)$, čo je prirodzené číslo. Keďže $1 \leqq \frac{1}{2}(k+1) \leqq k$, aritmetický priemer všetkých prvkov množiny A je prvkom množiny A. Podobne aritmetický priemer $\frac{1}{2}(3k+1)$ všetkých prvkov množiny B je prvkom množiny B.

Pre $k = 4$ sme existenciu rozkladu ukázali v tabuľke, pre párne čísla $k \geqq 6$ vyhovuje napríklad rozklad množiny M na podmnožiny

$$\mathsf{A} = \{1, 2, \ldots, k-2, k, \tfrac{1}{2}(3k-2)\}, \qquad \mathsf{B} = \mathsf{M} \setminus \mathsf{A}.$$

Platí $k < \frac{1}{2}(3k-2) \leqq 2k$ a $\frac{1}{2}(3k-2)$ je prirodzené číslo. Množina A teda obsahuje k prirodzených čísel z množiny M. Súčet všetkých prvkov množiny A je

$$1 + 2 + \ldots + (k-2) + k + \tfrac{1}{2}(3k-2) = \tfrac{1}{2}(k-2)(k-1) + k + \tfrac{1}{2}(3k-2)\tfrac{1}{2}k(k+2).$$

Ich aritmetický priemer je $\frac{1}{2}(k+2)$, čo je prirodzené číslo. Keďže $1 \leqq \frac{1}{2}(k+2) \leqq k - 2$, aritmetický priemer všetkých prvkov množiny A je prvkom množiny A. Podobne ukážeme, že aritmetický priemer $\frac{3}{2}k$ všetkých prvkov množiny B je prvkom množiny B.

Poznámka. Pre párne k nevyhovuje napríklad rozklad množiny M na podmnožiny

$$\mathsf{A} = \{1, 2, \ldots, k-1, \tfrac{3}{2}k\}, \qquad \mathsf{B} = \mathsf{M} \setminus \mathsf{A},$$

pretože priemer $\frac{3}{2}k$ všetkých prvkov množiny B je prvkom množiny A.

b) Označme A, B a C hľadané podmnožiny množiny M. Keďže všetky majú rovnaký počet prvkov, je číslo n nutne deliteľné tromi, má teda tvar $n = 3k$, pričom k je vhodné prirodzené číslo. Pre súčet s všetkých prvkov množiny M platí $s = \frac{1}{2}3k(3k+1)$. Súčet troch aritmetických priemerov všetkých prvkov jednotlivých množín A, B a C je potom rovný s/k, teda $\frac{3}{2}(3k+1)$. Tento súčet musí byť podľa podmienok úlohy prirodzené číslo, preto je k nutne nepárne.

Pre čísla $n = 3k$, pričom k je nepárne, ukážeme, že zadaniu vyhovuje napríklad rozklad množiny M na podmnožiny

$$\mathsf{A} = \{1, 2, \ldots, k\}, \quad \mathsf{B} = \{k+1, k+2, \ldots, 2k\} \quad \text{a} \quad \mathsf{C} = \{2k+1, 2k+2, \ldots, 3k\}.$$

Súčet všetkých prvkov A je $\frac{1}{2}k(k+1)$, ich aritmetický priemer je $\frac{1}{2}(k+1)$, čo je prirodzené číslo. Keďže $1 \leqq \frac{1}{2}(k+1) \leqq k$, aritmetický priemer všetkých prvkov množiny A je prvkom množiny A. Podobne ukážeme, že aritmetický priemer $\frac{1}{2}(3k+1)$ všetkých prvkov množiny B je prvkom množiny B a aritmetický priemer $\frac{1}{2}(5k+1)$ všetkých prvkov množiny C je prvkom množiny C.

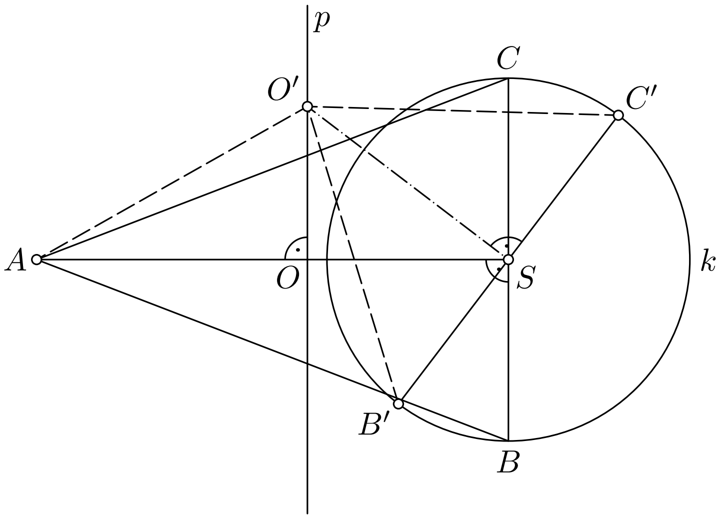
Záver. Podmienkam úlohy v prípade a) vyhovujú všetky párne čísla n rôzne od 4, v prípade b) všetky nepárne čísla n deliteľné tromi.

A – I – 5

Polomer danej kružnice k označme r. Ak bod A leží na kružnici k, je bod S stredom každej kružnice opísanej niektorému z uvažovaných trojuholníkov ABC a hľadanou množinou je jednobodová množina $\{S\}$. Ďalej rozlíšime dva prípady:

a) Nech $|AS| > r$. Uvažujme najskôr rovnoramenný trojuholník ABC so základňou BC, ktorý vyhovuje podmienkam úlohy. Stred O kružnice jemu opísanej je vnútorným bodom úsečky AS a pritom platí $|AO| = |BO| = |CO|$.

Teraz ukážeme, že hľadanou množinou O stredov kružníc opísaných všetkým trojuholníkom ABC, ktoré vyhovujú podmienkam úlohy, je priamka p, ktorá je kolmá na AS a prechádza bodom O (obr. 16).



Obr. 16

Uvažujme ľubovoľný trojuholník $AB'C'$, pričom $B'C'$ je priemer kružnice k, a označme O' priesečník osi jeho strany $B'C'$ s priamkou p, takže $|O'B'| = |O'C'|$ (bod O' leží na osi $B'C'$). Podľa Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku $C'O'S$ platí

$$|O'B'| = |O'C'| = \sqrt{|O'S|^2 + r^2} = \sqrt{|OO'|^2 + |OS|^2 + r^2}.$$

Pre veľkosť úsečky $O'A$ pritom máme

$$|O'A| = \sqrt{|AO|^2 + |OO'|^2} = \sqrt{|BO|^2 + |OO'|^2}\sqrt{|OS|^2 + r^2 + |OO'|^2}.$$

Odtiaľ $|O'A| = |O'B'| = |O'C'|$, čiže bod O' je stredom kružnice opísanej trojuholníku $AB'C'$ a podľa konštrukcie leží na priamke p.

Naopak, pre ľubovoľný bod O' priamky p možno zostrojiť priemer $B'C'$ kružnice k, ktorý je kolmý na priamku $O'S$. Z predchádzajúcich úvah vyplýva, že $|O'A| = |O'B'| = |O'C'|$, takže sme našli trojuholník $AB'C'$ s požadovanými vlastnosťami, ktorého opísaná kružnica má stred O'.

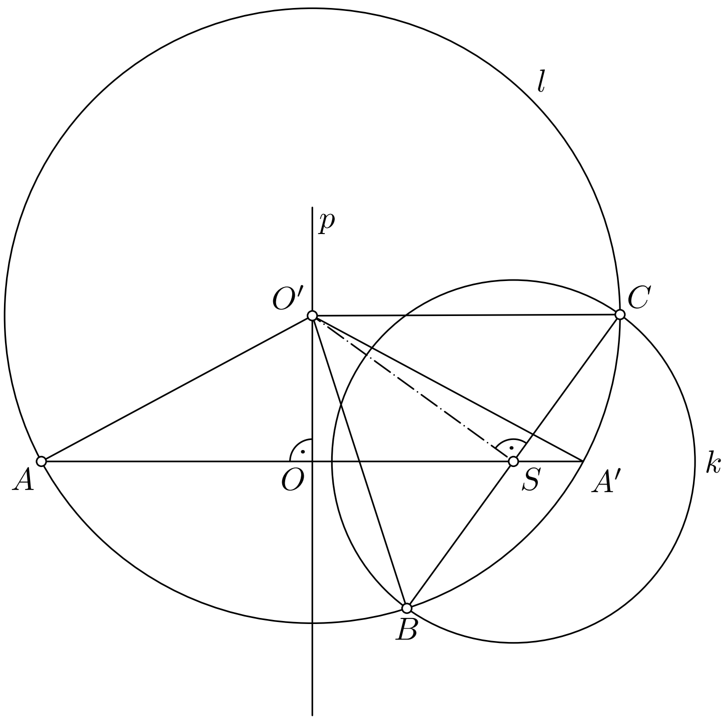
b) Nech $|AS| < r$. V tomto prípade možno postupovať analogicky. Stred O je teraz vnútorným bodom polpriamky opačnej k polpriamke SA. Dostaneme pritom rovnaký výsledok ako v prípade a).

Záver. Ak bod A nie je bodom kružnice k, hľadanou množinou O je priamka p, ktorá je kolmá na AS a súčasne prechádza stredom O kružnice opísanej rovnoramennému trojuholníku ABC so základňou BC, ktorá je priemerom kružnice k kolmým na AS. Ak A je bodom kružnice k, tak $\mathsf{O} = \{S\}$.

Iné riešenie. Pre daný bod A, ktorý neleží na kružnici k, uvažujme trojuholník ABC s danými vlastnosťami. Označme l kružnicu opísanú trojuholníku ABC (obr. 17). Keďže bod S je stredom spoločnej tetivy BC kružníc k a l, pretne kružnica l polpriamku opačnú k polpriamke SA vo vnútornom bode, ktorý označíme A'. Pre mocnosť $m_l(S)$ bodu S ku kružnici l pritom platí

$$m_l(S) = -|BS| \cdot |CS| = -r^2 = -|AS| \cdot |A'S|, \tag{1}$$

pričom r je polomer kružnice k. Odtiaľ vyplýva, že vzdialenosť $|A'S|$, a teda aj poloha bodu A' na polpriamke opačnej k SA, sú jednoznačne určené polohou bodu A. Pre všetky trojuholníky ABC vyhovujúce podmienkam úlohy je teda AA' pevná úsečka. Kružnice opísané všetkým uvažovaným trojuholníkom ABC preto majú spoločnú tetivu AA', takže ich stredy ležia na osi p úsečky AA'. V prípade, že ABC je rovnoramenný trojuholník so základňou BC, je úsečka AA' priemerom kružnice l a jej stred O je súčasne stredom úsečky AA'. Priamka p prechádza týmto bodom O kolmo na priamku AS.



Obr. 17

Naopak, ku každému bodu O' priamky p nájdeme trojuholník ABC s požadovanými vlastnosťami, ktorý má stred opísanej kružnice v bode O'. Stačí zostrojiť priemer BC kružnice k, ktorý je kolmý na priamku $O'S$. Pre pevne uvažované body A, A' a S sme tak zostrojili body B, C, pre ktoré platí vzťah (1). To znamená, že body A, B, C a A' ležia na jednej kružnici l. Vzhľadom na to, že bod O' je priesečníkom osí tetív AA' a BC tejto kružnice, ktoré nie sú rovnobežné, je bod O' stredom kružnice l, teda stredom kružnice opísanej trojuholníku ABC.

A – I – 6

Nech f je ľubovoľná funkcia s požadovanými vlastnosťami. Najskôr ukážeme, že je prostá. Predpokladajme, že existujú dve celé čísla x_1 a x_2, pre ktoré $f(x_1) = f(x_2)$. Potom pre všetky celé čísla y platí

$$x_1 + f(y + 2006) = f\big(f(x_1) + y\big) = f\big(f(x_2) + y\big)x_2 + f(y + 2006).$$

Preto $x_1 = x_2$, funkcia f je teda prostá.

Voľbou $x = 0$ v danej rovnici dostaneme

$$f\big(f(0) + y\big) = f(y + 2006),$$

odkiaľ vzhľadom na to, že funkcia f je prostá, vyplýva $f(0) + y = y + 2006$, čiže $f(0) = 2006$.

Ak daný vzťah platí pre všetky celé čísla x, y, platí aj pre $y = 0$. Takže

$$f\big(f(x)\big) = x + f(2006).$$

Položme v tejto rovnosti $x = z$, pričom z je ľubovoľné celé číslo, pripočítajme potom k obom stranám y a aplikujme na ne funkciu f. Dostaneme

$$f\big(y + z + f(2006)\big) = f\big(f(f(z)) + y\big) = f(z) + f(y + 2006),$$

pričom sme využili rovnosť zo zadania pre $x = f(z)$. Ak v odvodenom vzťahu zameníme dvojicu (y, z) dvojicou $(y + 1, z - 1)$, dostaneme

$$f\big(y + z + f(2006)\big) = f\big((y + 1) + (z - 1) + f(2006)\big) = f(z - 1) + f(y + 2007).$$

Preto pre ľubovoľné celé čísla y a z platí

$$f(z) + f(y + 2006) = f(z - 1) + f(y + 2007),$$

čiže

$$f(z) - f(z - 1) = f(y + 2007) - f(y + 2006).$$

Položme teraz v poslednej rovnosti $y = 0$ a označme $d = f(2007) - f(2006)$, čo je nutne celé číslo. Z predchádzajúceho vzťahu vyplýva, že pre každé celé číslo z platí

$$f(z) - f(z - 1) = d. \tag{1}$$

Vzťah (1) hovorí, že pre celé nezáporné čísla z tvoria hodnoty $f(z)$ aritmetickú postupnosť s diferenciou d, takže $f(z) = f(0) + dz$.

Ostatný vzťah platí aj pre záporné čísla z, čo možno z (1) ľahko odvodiť matematickou indukciou. Keďže $f(0) = 2006$, pre všetky celé čísla z nutne platí

$$f(z) = 2006 + dz. \tag{2}$$

Teraz zistíme, ktoré funkcie tvaru (2) vyhovujú zadaniu úlohy. Pre všetky celé čísla x a y musí platiť

$$2006 + d(2006 + dx + y) = f\bigl(2006 + dx + y\bigr) = f\bigl(f(x) + y\bigr) = x + f(y + 2006) = \\ = x + 2006 + d(y + 2006).$$

Oba krajné výrazy sa rovnajú práve vtedy, keď pre všetky celé čísla x platí

$$d^2 x = x.$$

Odtiaľ $d = 1$ alebo $d = -1$.

Záver. Danej úlohe vyhovujú iba dve funkcie, a to

$$f_1(x) = 2006 - x \qquad \text{a} \qquad f_2(x) = 2006 + x.$$

A – S – 1

Predpokladajme, že číslo s vyhovuje zadaniu úlohy a označme korene x_1, x_2, x_3, x_4 danej rovnice tak, aby platilo

$$x_1 x_2 = -2. \tag{1}$$

Z rozkladu na koreňové činitele

$$4x^4 - 20x^3 + sx^2 + 22x - 2 = 4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

po roznásobení a porovnaní koeficientov pri rovnakých mocninách x dostaneme Viètove vzťahy

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \tag{2}$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{s}{4}, \tag{3}$$
$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{11}{2}, \tag{4}$$
$$x_1x_2x_3x_4 = -\frac{1}{2}. \tag{5}$$

Z rovností (1) a (5) ihneď vyplýva

$$x_3 x_4 = \frac{1}{4}.$$

Z rovnosti (4) upravenej na tvar

$$(x_1 + x_2)x_3x_4 + (x_3 + x_4)x_1x_2 = -\frac{11}{2}$$

po dosadení hodnôt x_1x_2 a x_3x_4 vychádza rovnica

$$\frac{1}{4}(x_1 + x_2) - 2(x_3 + x_4) = -\frac{11}{2},$$

ktorá spolu s rovnicou (2) tvorí sústavu dvoch lineárnych rovníc pre neznáme súčty $x_1 + x_2$ a $x_3 + x_4$. Jednoduchým výpočtom zistíme, že riešením tejto sústavy je dvojica hodnôt

$$x_1 + x_2 = 2 \quad \text{a} \quad x_3 + x_4 = 3.$$

Ak dosadíme všetko, čo sme už zistili, do rovnosti (3) upravenej na tvar

$$x_1x_2 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_3x_4 = \frac{s}{4},$$

zistíme, že nutne $s = 17$.

Teraz musíme urobiť skúšku: z rovností

$$x_1 + x_2 = 2 \quad \text{a} \quad x_1x_2 = -2$$

vyplýva, že čísla $x_{1,2}$ sú korene kvadratickej rovnice

$$x^2 - 2x - 2 = 0, \quad \text{teda} \quad x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}; \tag{6}$$

z rovností

$$x_3 + x_4 = 3 \quad \text{a} \quad x_3x_4 = \frac{1}{4}$$

zase vyplýva, že čísla $x_{3,4}$ sú korene kvadratickej rovnice

$$x^2 - 3x + \frac{1}{4} = 0, \quad \text{teda} \quad x_{3,4} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{2}. \tag{7}$$

Vidíme, že $x_{1,2,3,4}$ sú skutočne štyri navzájom rôzne reálne čísla, ktoré spĺňajú sústavu rovníc (2)–(5) pre hodnotu $s = 17$, takže to sú korene rovnice zo zadania. Zdôraznime, že úlohou nebolo tieto korene vypočítať. Nestačilo by však len overiť, že každá z kvadratických rovníc v (6) a (7) má dva rôzne reálne korene (to nastane práve vtedy, keď ich diskriminanty sú kladné čísla), okrem toho by bolo nutné ešte ukázať, že tieto dve rovnice nemajú spoločný koreň.

Hľadané číslo s je jediné a má hodnotu $s = 17$.

Iné riešenie. Označme $x_{1,2}$ tie korene danej rovnice, pre ktoré má platiť $x_1x_2 = -2$. Mnohočlen z ľavej strany rovnice je deliteľný mnohočlenom $(x - x_1)(x - x_2)$, teda mnohočlenom tvaru $x^2 + px - 2$ (kde $p = -x_1 - x_2$), existuje teda rozklad

$$4x^4 - 20x^3 + sx^2 + 22x - 2 = (x^2 + px - 2)(4x^2 + qx + r).$$

Roznásobením a porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách x dostaneme sústavu

$$-20 = 4p + q, \;\; s = -8 + pq + r, \;\; 22 = -2q + pr, \;\; -2 = -2r.$$

Zo štvrtej rovnice máme $r = 1$, po dosadení do tretej $22 = -2q + p$, čo spolu s prvou rovnicou dáva $p = -2$ a $q = -12$. Zo zvyšnej (druhej) rovnice potom určíme hodnotu $s = 17$. Vieme, že pre ňu má mnohočlen zo zadanej rovnice rozklad

$$4x^4 - 20x^3 + 17x^2 + 22x - 2 = (x^2 - 2x - 2)(4x^2 - 12x + 1),$$

ostáva urobiť skúšku (rovnako ako pri prvom postupe).

A – S – 2

Uvažovaná množina je množinou práve *všetkých (prirodzených) deliteľov* čísla $160 = 2^5 \cdot 5$. Jej prvky môžeme združiť do dvojíc tak, aby súčin čísel v každej dvojici bol rovný číslu 160:

$$1 \cdot 160 = 2 \cdot 80 = 4 \cdot 40 = 5 \cdot 32 = 8 \cdot 20 = 10 \cdot 16.$$

To znamená, že ak $A = \{a, b, c\}$ je trojica navzájom rôznych deliteľov čísla 160, je aj $A' = \{160/a, 160/b, 160/c\}$ trojica navzájom rôznych deliteľov čísla 160.

Súčin abc prvkov trojice A sa dá vyjadriť v tvare

$$2^k 5^l, \quad \text{pričom } k \in \{0, 1, 2, \dots, 14\}, \ l \in \{0, 1, 2, 3\} \tag{1}$$

(číslo 160 má len dva delitele, ktoré sú násobkom 2^5, preto sa v rozklade súčinu abc nemôže objaviť 2^{15}). Nie je ťažké zistiť, že najväčšie prirodzené číslo tvaru (1), ktoré je menšie ako 2 006, je číslo $2\,000 = 2^4 \cdot 5^3$ a najmenšie prirodzené číslo, ktoré je tvaru (1) a je väčšie ako 2 006, je číslo $2\,048 = 2^{11}$ (samotné číslo 2 006 tvaru (1) nie je). Pritom $2\,000 \cdot 2\,048 = 160^3$.

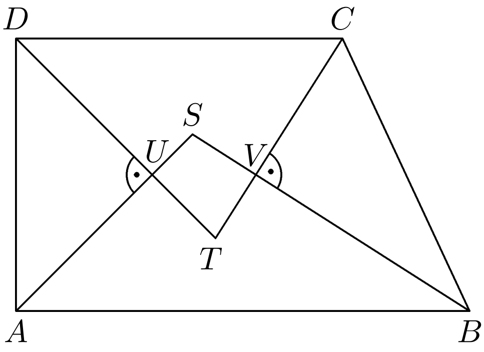
Ak je teda súčin prvkov trojice A menší ako 2 006, je nutne $abc \leqq 2\,000$ a súčin $160^3/(abc)$ prvkov zodpovedajúcej trojice A' je najmenej $160^3/2\,000 = 2\,048$. Naopak, ak je súčin prvkov trojice A väčší ako číslo 2 006, je $abc \geqq 2\,048$ a súčin prvkov trojice A' je najviac $160^3/2\,048 = 2\,000$. Inými slovami *trojprvkových podmnožín so súčinom prvkov menším ako* 2 006 *je práve toľko ako trojprvkových podmnožín so súčinom prvkov väčším ako* 2 006.

A – S – 3

Bod U ako priesečník osí vnútorných uhlov pri vrcholoch A a D daného lichobežníka má rovnakú vzdialenosť od strán AB, AD a zároveň aj od strán AD, DC. To znamená, že má rovnakú vzdialenosť od oboch základní AB, CD lichobežníka $ABCD$. Podobne aj bod V, ktorý je priesečníkom osí uhlov pri vrcholoch B a C, má od oboch základní rovnakú vzdialenosť. Priamky UV a AB sú teda rovnobežné. Tým je vyriešená časť a).

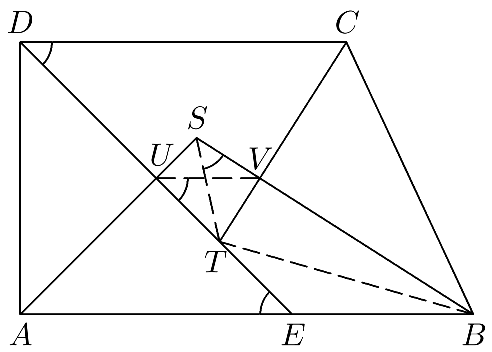
Keďže súčet vnútorných uhlov ako pri vrcholoch A a D, tak pri vrcholoch B a C je $180°$, je súčet vnútorných uhlov trojuholníka ADU pri strane AD rovný $90°$ rovnako ako súčet vnútorných uhlov trojuholníka BCV pri strane BC. To znamená, že oba uvedené trojuholníky sú pravouhlé (s pravým uhlom pri vrchole U, resp. V, obr. 18).

Štvoruholník $UTVS$ je teda tetivový (z predpokladu úlohy $|AB| > |CD| \geqq |DA|$ vyplýva, že polpriamky AU a CV sa nepretínajú, body S a T preto ležia v opačných polrovinách určených priamkou UV a body U, T, V, S ležia na kružnici v uvedenom poradí).

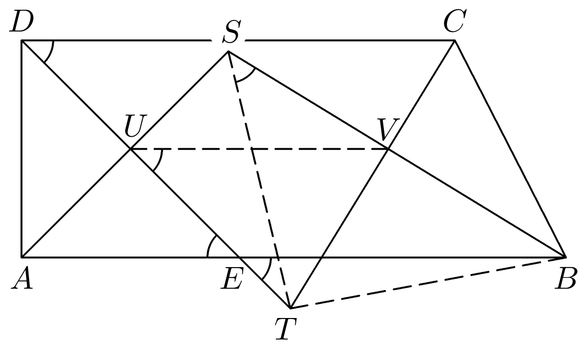


Obr. 18

Ako už vieme, priamky UV, AB a CD sú rovnobežné, teda $|\sphericalangle VUT| = |\sphericalangle CDT| = 45°$. Z rovnosti obvodových uhlov nad stranou TV tetivového štvoruholníka $UTVS$ tak vyplýva $|\sphericalangle VST| = |\sphericalangle VUT| = 45°$. To je zároveň aj veľkosť obvodového uhla TSB prislúchajúceho tetive TB kružnice opísanej trojuholníku STB (obr. 19). Ostáva ukázať, že na rovnakej kružnici leží aj bod E. To je zrejmé, pokiaľ $E = T$. V opačnom prípade stačí zistiť, že veľkosť uhla TEB je $180° - 45°$ alebo $45°$ podľa toho, či priamka BT body S, E oddeľuje alebo nie, čo okamžite vyplýva z toho, že priamka DT zviera so základňou AB uhol $45°$ (obr. 19 a 20). Tým je vyriešená časť b).



Obr. 19



Obr. 20

A – II – 1

Označme a, b, c veľkosti strán trojuholníka ABC. Pre jeho výšku v_b platí nerovnosť

$$c \geqq v_b,$$

pretože v_b je dĺžka najkratšej úsečky spájajúcej vrchol B s bodom priamky AC. Pre obsah S trojuholníka ABC tak platí

$$S = \frac{cv_c}{2} \geqq \frac{v_b v_c}{2} \geqq 10\,\mathrm{cm}^2.$$

Ak existuje trojuholník ABC vyhovujúci podmienkam úlohy, ktorého obsah je práve $10\,\mathrm{cm}^2$, potom v oboch nerovnostiach $S = \frac{1}{2}cv_c \geqq \frac{1}{2}v_b v_c \geqq 10\,\mathrm{cm}^2$ nastáva rovnosť. Vychádza teda $c = v_b = 4\,\mathrm{cm}$ a súčasne $v_c = 5\,\mathrm{cm}$. Z prvej rovnosti vyplýva, že taký trojuholník musí byť pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole A. Pre dĺžku jeho odvesny AC teda platí $b = v_c = 5\,\mathrm{cm}$ a dĺžka a jeho prepony BC je rovná $\sqrt{41}\,\mathrm{cm}$. Zo vzorca $S = \frac{1}{2}av_a$ pre jeho výšku v_a vyplýva

$$v_a = \frac{2S}{a} = \frac{20}{\sqrt{41}}\,\mathrm{cm} > 3\,\mathrm{cm}.$$

Pravouhlý trojuholník ABC s odvesnami $b = 5\,\mathrm{cm}$ a $c = 4\,\mathrm{cm}$ teda vyhovuje podmienkam úlohy.

Najmenší možný obsah trojuholníka ABC, ktorého výšky vyhovujú podmienkam úlohy, je $10\,\mathrm{cm}^2$.

A – II – 2

Predpokladajme, že rovnica

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + ax + b = 0 \tag{1}$$

má dva rôzne reálne korene x_1 a x_2, pre ktoré platí $x_1 + x_2 = x_1 x_2 = p$. Potom polynóm na jej ľavej strane je deliteľný polynómom $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - px + p$ a má rozklad

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + ax + b = (x^2 - px + p)(x^2 + rx + s),$$

pričom r a s sú reálne čísla. Roznásobením výrazu na pravej strane poslednej rovnosti a porovnaním koeficientov pri jednotlivých mocninách x polynómov na oboch stranách dostaneme

$$-4 = -p + r, \tag{2}$$
$$4 = p + s - pr, \tag{3}$$
$$a = -ps + pr, \tag{4}$$
$$b = ps. \tag{5}$$

Zo vzťahu (2) vyplýva

$$r = p - 4. \tag{6}$$

Dosadením za r do vzťahu (3) dostaneme

$$s = 4 - p + p(p - 4) = (p - 4)(p - 1). \tag{7}$$

Keďže kvadratická rovnica $x^2 - px + p = 0$ má dva rôzne reálne korene x_1 a x_2, je jej diskriminant kladné číslo, takže

$$p^2 - 4p > 0. \tag{8}$$

Keď sčítame rovnice (4) a (5) a dosadíme za r podľa (6), vyjde podľa predchádzajúceho vzťahu

$$a + b = pr = p(p-4) = p^2 - 4p > 0,$$

čo sme chceli dokázať.

Pre diskriminant D rovnice

$$x^2 + rx + s = 0$$

podľa vzťahov (6), (7) a (8) platí

$$D = r^2 - 4s = (p-4)^2 - 4(p-4)(p-1) = -3p(p-4) = -3(p^2 - 4p) < 0.$$

Rovnica teda nemá reálne korene. Daná rovnice (1) preto nemá iné reálne korene ako x_1 a x_2.

A – II – 3

Označme postupne α a β veľkosti vnútorných uhlov pri vrcholoch A a B uvažovaného pravouhlého trojuholníka ABC.

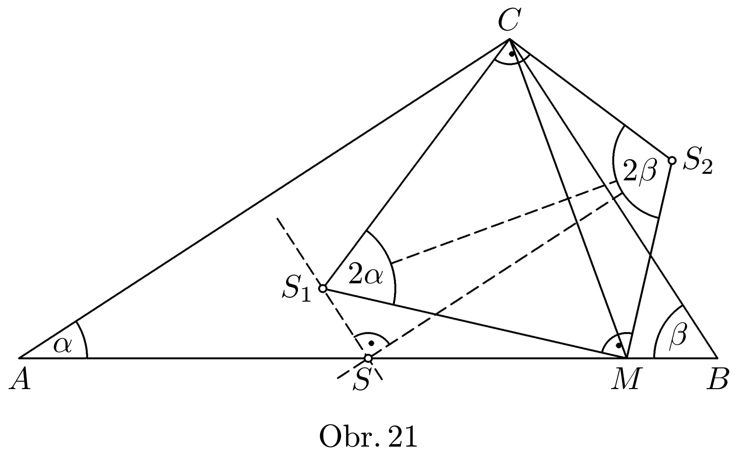
a) Zo vzťahu medzi obvodovým a stredovým uhlom pre spoločnú tetivu CM kružníc k_1 a k_2 opísaných postupne trojuholníkom AMC a BMC vyplýva (obr. 21)

$$|\sphericalangle MS_1C| + |\sphericalangle MS_2C| = 2\alpha + 2\beta = 180^\circ.$$

Štvoruholník CS_1MS_2 je teda tetivový. Keďže body M a C sú súmerne združené podľa osi úsečky CM, na ktorej súčasne leží úsečka S_1S_2, platí ďalej

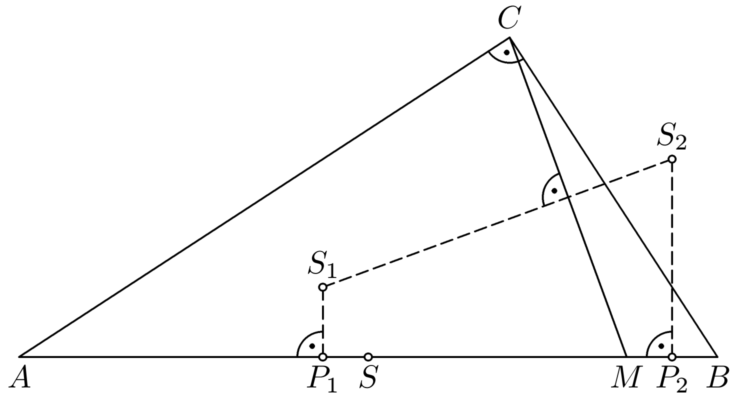
$$|\sphericalangle S_1MS_2| = |\sphericalangle S_1CS_2| = 90^\circ.$$

Kružnica opísaná štvoruholníku CS_1MS_2 je teda Tálesovou kružnicou zostrojenou nad priemerom S_1S_2. Body S a S_1 však ležia súčasne na osi odvesny AC, podobne body S a S_2 ležia na osi odvesny BC uvažovaného trojuholníka. Takže $|\sphericalangle S_1SS_2| = 90^\circ$ a bod S leží tiež na Tálesovej kružnici opísanej štvoruholníku CS_1MS_2. (Ak $M = S$, platí toto tvrdenie triviálne.) Tým je dokázaná časť a).



Obr. 21

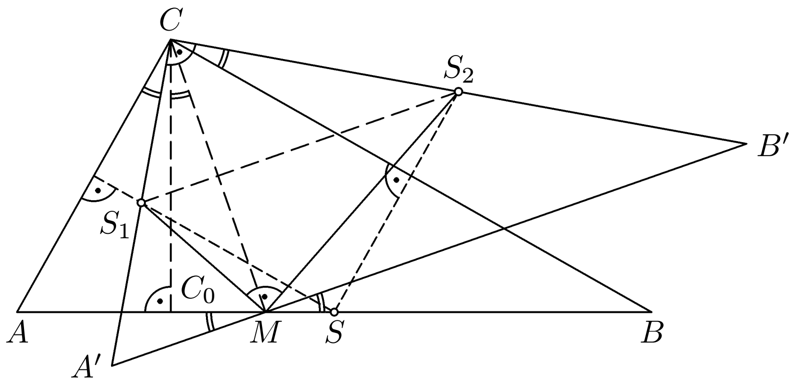
b) Označme P_1 a P_2 postupne stredy úsečiek AM a BM (obr. 22). Platí $|S_1S_2| \geqq |P_1P_2| = \frac{1}{2}|AB|$. Kružnica opísaná štvoruholníku CS_1MS_2 má preto najmenší



Obr. 22

priemer $\frac{1}{2}|AB|$ práve vtedy, keď $S_1S_2 \parallel AB$, čo vzhľadom na kolmosť úsečky CM a jej osi S_1S_2 nastane práve vtedy, keď M je pätou výšky z vrcholu C v trojuholníku ABC. (Polomer r tejto kružnice má potom veľkosť $r = \frac{1}{4}|AB|$.)

Iné riešenie. Označme C_0 pätu výšky z vrcholu C a uvažujme podobné zobrazenie zložené z otočenia o uhol $\varphi = |\sphericalangle C_0CM|$ a rovnoľahlosti so stredom C, ktoré zobrazí bod C_0 na bod M. Daný trojuholník ABC sa tak zobrazí na trojuholník $A'B'C$ (obr. 23) s výškou CM. Keďže $|\sphericalangle AMA'| = |\sphericalangle ACA'| = \varphi$, ležia body A, A', M a C na kružnici



Obr. 23

s priemerom $A'C$ opísanej trojuholníku AMC. Podobne stred S_2 strany $B'C$ je stredom kružnice opísanej trojuholníku BMC. Keďže S_1S_2 je stredná priečka pravouhlého trojuholníka $A'CB'$, ležia body M a C na Tálesovej kružnici s priemerom S_1S_2. Na tejto kružnici leží aj stred S prepony AB pravouhlého trojuholníka ABC, pretože SS_1 je os strany AC a SS_2 os strany BC, takže aj trojuholník S_1S_2S je pravouhlý.

Tým je dokázaná časť a). Časť b) vyriešime rovnako ako v predchádzajúcom riešení.

A – II – 4

Ukážeme, že najmenšie m je 113 (nezávisle na hodnotách p, q). Zrejme $m > 1$. Pre ľubovoľné prirodzené čísla $c < d$ a $m > 1$ označme $S_m(c,d)$ súčet všetkých zlomkov v základnom tvare, ktoré ležia v otvorenom intervale (c,d) a ktorých menovateľ je m. Potom platí nerovnosť

$$S_m(c,c+1) \leqq \left(c+\frac{1}{m}\right)+\left(c+\frac{2}{m}\right)+\ldots+\left(c+\frac{m-1}{m}\right)=(m-1)c+\frac{m-1}{2},$$

v ktorej rovnosť nastane práve vtedy, keď všetky čísla $1,2,\ldots,m-1$ sú nesúdeliteľné s m, t. j. práve vtedy, keď m je prvočíslo.

Pre dané prirodzené čísla p, q a $m > 1$ platí

$$\begin{aligned}S_m(p,q) &= S_m(p,p+1)+S_m(p+1,p+2)+\ldots+S_m(q-1,q) \leqq \\ &\leqq \left((m-1)p+\frac{m-1}{2}\right)+\left((m-1)(p+1)+\frac{m-1}{2}\right)+\ldots \\ &\quad+\left((m-1)(q-1)+\frac{m-1}{2}\right)= \\ &=(m-1)\frac{(q-p)(p+q-1)}{2}+(m-1)\frac{q-p}{2}= \\ &=(m-1)\frac{q-p}{2}(p+q-1+1)=\frac{(m-1)(q^2-p^2)}{2},\end{aligned}$$

teda

$$S_m(p,q) \leqq \frac{(m-1)(q^2-p^2)}{2}. \tag{1}$$

Rovnosť vo vzťahu (1) pritom nastane práve vtedy, keď m je prvočíslo. Podľa zadania však platí

$$S_m(p,q) \geqq 56(q^2-p^2).$$

Zo vzťahu (1) vidíme, že nutne platí $\frac{1}{2}(m-1) \geqq 56$, t. j. $m \geqq 113$. Vzhľadom na to, že číslo 113 je prvočíslo, je najmenšie hľadané číslo $m = 113$.

Iné riešenie. Súčet všetkých zlomkov, ktoré majú menovateľa m, nie sú celé čísla a ležia v intervale (p,q), môžeme tiež určiť ako rozdiel súčtu všetkých zlomkov s menovateľom m ležiacich v uzavretom intervale $\langle p,q\rangle$ a súčtu všetkých prirodzených čísel z tohto intervalu. Pre uvažovaný rozdiel d potom platí

$$d=\sum_{j=pm}^{qm}\frac{j}{m}-\sum_{j=p}^{q}j.$$

Menšenec aj menšiteľ v uvažovanom rozdiele sa dajú vyjadriť ako súčty členov aritmetických postupností. Pre súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti (a_i) využijeme známy vzťah

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \tfrac{1}{2}n(a_1 + a_n).$$

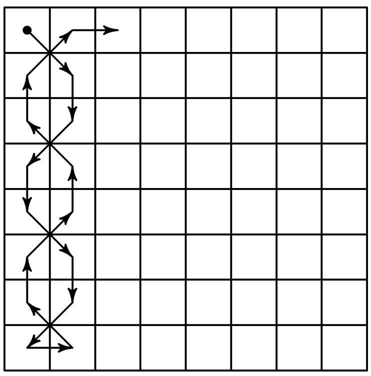
Pre hľadaný rozdiel d tak platí

$$\begin{aligned} d &= \tfrac{1}{2}(p+q)\bigl((q-p)m+1\bigr) - \tfrac{1}{2}(p+q)(q-p+1) = \\ &= \tfrac{1}{2}(p+q)\bigl[\bigl((q-p)m+1\bigr) - (q-p+1)\bigr]\tfrac{1}{2}(m-1)(q^2-p^2). \end{aligned}$$

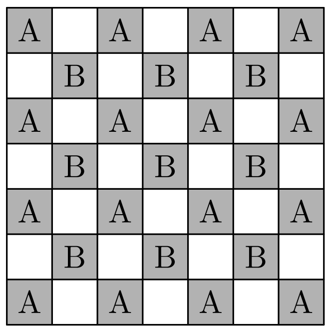
Ďalej budeme postupovať rovnako ako v predchádzajúcom spôsobe riešenia.

A – III – 1

Najskôr ukážeme, že úloha má riešenie pre ľubovoľné párne n. Ak postavíme figúrku napr. na ktorékoľvek rohové políčko šachovnice $n \times n$, prejdeme celú šachovnicu po susedných blokoch typu $2 \times n$ spôsobom naznačeným na obr. 24 pre $n = 8$. Postupnosti ťahov tu zodpovedá postupnosť na seba nadväzujúcich orientovaných úsečiek. Celkom analogicky možno postupovať pre každé párne n.



Obr. 24



Obr. 25

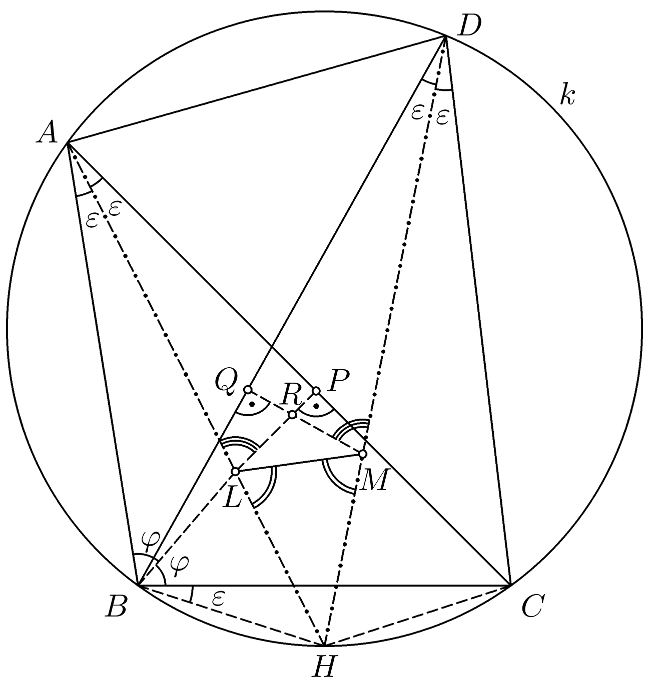
Teraz ukážeme, že pre žiadne nepárne $n \geqq 3$ nemožno šachovnicu prejsť požadovaným spôsobom. Dôkaz urobíme sporom. Pripusťme, že pre určité nepárne n na šachovnici $n \times \times n$ existuje postupnosť ťahov vyhovujúca podmienkam úlohy. Všetky políčka ofarbíme podobne ako bežnú šachovnicu 8×8, a to tak, že rohové políčka budú čierne (podobne ako na obr. 25 pre $n = 7$). Ďalej všetky čierne políčka označíme písmenami A a B tak, aby žiadne dve čierne políčka majúce spoločný práve jeden bod (vrchol) neboli označené rovnakým písmenom. Ak budú rohové (čierne) políčka označené napr. písmenom A, bude zrejme počet políčok A o n väčší ako počet políčok B.

Políčka šachovnice, ktoré figúrka požadovaným spôsobom prejde, označme postupne $1, 2, 3, \ldots, n^2$ a k-ty ťah zápisom $k \mapsto k+1$. Ak je políčko s číslom 1 čierne, sú čierne práve políčka s číslami $1, 2, 5, 6, 9, 10, \ldots$; pritom každý (šikmý) ťah $1 \mapsto 2$, $5 \mapsto 6$, $9 \mapsto 10$, ... spája čierne políčka označené rôznymi písmenami, takže sa celkové počty políčok A a B líšia najviac o 1, čo odporuje zistenému rozdielu. K rovnakému sporu dôjdeme aj v prípade, keď je políčko s číslom 1 biele, takže čierne sú práve políčka s číslami $3, 4, 7, 8, 11, 12, \ldots$ spojená (šikmými) ťahmi $3 \mapsto 4$, $7 \mapsto 8$, $11 \mapsto 12$, ...

Tým je úloha vyriešená, riešením sú všetky párne $n \geqq 2$.

A – III – 2

Priesečník osí vnútorných uhlov pri vrcholoch A, D v trojuholníkoch BCA, BCD označme H (obr. 26). Ako je známe, bod H je stredom príslušného oblúka BC kružnice k



Obr. 26

opísanej štvoruholníku $ABCD$ (oblúka, ktorý neobsahuje vrcholy A a D). Označme $\varepsilon = |\sphericalangle BAH| = |\sphericalangle CAH| = |\sphericalangle BDH| = |\sphericalangle CDH| = |\sphericalangle CBH|$ a $\varphi = |\sphericalangle ABL| = |\sphericalangle CBL|$. Potom platí

$$|\sphericalangle BLH| = |\sphericalangle BAL| + |\sphericalangle ABL| = \varepsilon + \varphi = |\sphericalangle LBH|.$$

Trojuholník HLB je teda rovnoramenný so základňou LB, takže $|HB| = |HL|$. Analogicky aj $|HC| = |HM|$. A pretože $|HB| = |HC|$, dostávame $|HL| = |HM|$. Takže trojuholník HML je rovnoramenný a $|\sphericalangle HLM| = |\sphericalangle HML|$.

Označme ešte P kolmý priemet bodu L na priamku AC a Q kolmý priemet bodu M na priamku BD (uvažovaný bod R je tak priesečníkom priamok LP a MQ). Keďže pravouhlé trojuholníky APL a DQM sa zhodujú v uhloch pri vrcholoch A a D, sú zhodné aj uhly PLA a QMD pri vrcholoch L a M. Odtiaľ a z rovnosti $|\sphericalangle HLM| = |\sphericalangle HML|$ tak vyplýva rovnosť $|\sphericalangle PLM| = |\sphericalangle QML|$. To znamená, že trojuholník LMR je rovnoramenný, ako sme mali dokázať.

A – III – 3

Uvažujme ľubovoľnú funkciu f s požadovanými vlastnosťami. Najskôr ukážeme, že je prostá. Ak $f(y_1) = f(y_2)$, tak pre všetky prirodzené čísla x platí

$$y_1 f(x) = f\left(xf(y_1)\right) = f\left(xf(y_2)\right) = y_2 f(x),$$

a nakoľko $f(x)$ je prirodzené číslo, vyplýva odtiaľ $y_1 = y_2$, čo znamená, že funkcia f je prostá.

Voľbou $x = 1$ v danej rovnici dostaneme $f\left(f(y)\right) = yf(1)$, čo pre $y = 1$ dáva $f\left(f(1)\right) = f(1)$. Keďže f je prostá, vyplýva odtiaľ

$$f(1) = 1, \tag{1}$$

takže pre všetky prirodzené čísla y navyše platí

$$f\left(f(y)\right) = y. \tag{2}$$

Z práve odvodeného vzťahu zároveň vyplýva, že oborom hodnôt funkcie f je celá množina $\mathbb{N}$. Môžeme teda pre ľubovoľné prirodzené číslo z nájsť y, pre ktoré $y = f(z)$ a zároveň $f(y) = z$, takže podľa vzťahu zo zadania potom platí

$$f(xz) = f\left(x(f(y)\right) = yf(x) = f(z)f(x).$$

Odtiaľ možno matematickou indukciou ľahko odvodiť, že pre všetky prirodzené čísla n, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí

$$f(x_1 x_2 \ldots x_n) = f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n). \tag{3}$$

Ukážeme, že obraz $f(p)$ ľubovoľného prvočísla p je tiež prvočíslo. Predpokladajme, že $f(p) = ab$, pričom a, b sú prirodzené čísla rôzne od 1. Podľa (2) a (3) platí

$$p = f\left(f(p)\right) = f(ab) = f(a)f(b).$$

Keďže funkcia f je prostá a $f(1) = 1$, platí $f(a) > 1$, $f(b) > 1$, čo je v rozpore s predpokladom, že p je prvočíslo.

Keďže $2\,007 = 3^2 \cdot 223$ je rozklad čísla $2\,007$ na prvočísla, dostaneme podľa (3)

$$f(2\,007) = f^2(3)f(223),$$

pričom obe čísla $f(3)$ a $f(223)$ sú prvočísla. Ak $f(3) = 2$, potom podľa (2) platí $f(2) = 3$ a najmenšia možná hodnota $f(223)$ je 5, takže $f(2\,007) \geqq 20$. Pokiaľ $f(3) = 3$, najmenšia možná hodnota $f(223)$ je 2 a platí $f(2\,007) \geqq 18$. Ľahko vidíme, že pre každú inú voľbu hodnôt $f(3)$ a $f(223)$ platí $f(2\,007) \geqq 18$.

Ukážeme, že existuje funkcia vyhovujúca zadaniu, pre ktorú platí $f(2\,007) = 18$. Definujme funkciu f nasledovným spôsobom: Pre ľubovoľné prirodzené číslo x, ktoré zapíšeme ako $x = 2^k \cdot 223^m \cdot q$, pričom k a m sú celé nezáporné čísla a q je prirodzené číslo nesúdeliteľné s číslami 2 a 223, zadáme hodnotu $f(x)$ vzťahom

$$f(2^k \cdot 223^m \cdot q) = 2^m \cdot 223^k \cdot q.$$

Potom $f(2\,007) = f(223 \cdot 3^2) = 2 \cdot 3^2 = 18$. Overíme, že táto funkcia f má požadovanú vlastnosť. Nech $x = 2^{k_1} \cdot 223^{m_1} \cdot q_1$ a $y = 2^{k_2} \cdot 223^{m_2} \cdot q_2$ sú ľubovoľné prirodzené čísla zapísané vyššie uvedeným spôsobom. Potom

$$\begin{aligned} f\left(xf(y)\right) &= f\left(2^{k_1} \cdot 223^{m_1} \cdot q_1 \cdot f(2^{k_2} \cdot 223^{m_2} \cdot q_2)\right) = f(2^{k_1+m_2} \cdot 223^{m_1+k_2} \cdot q_1 \cdot q_2) = \\ &= 2^{k_2+m_1} \cdot 223^{m_2+k_1} \cdot q_1 \cdot q_2 \end{aligned}$$

a súčasne

$$yf(x) = 2^{k_2} \cdot 223^{m_2} \cdot q_2 \cdot f(2^{k_1} \cdot 223^{m_1} \cdot q_1) = 2^{k_2+m_1} \cdot 223^{m_2+k_1} \cdot q_1 \cdot q_2.$$

Najmenšia možná hodnota čísla $f(2\,007)$ je 18.

Poznámka. Z vyššie uvedeného riešenia vyplýva, že každá funkcia f, ktorá vyhovuje danej funkcionálnej rovnici, je určená nejakou bijekciou φ množiny prvočísel na seba, ktorá pre každé prvočíslo p spĺňa rovnosť $\varphi\left(\varphi(p)\right) = p$, a to predpisom

$$\begin{aligned} f(1) &= 1, \\ f(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}) &= \varphi(p_1)^{k_1} \varphi(p_2)^{k_2} \dots \varphi(p_m)^{k_m}, \end{aligned}$$

pričom p_i sú navzájom rôzne prvočísla a k_i nezáporné celé čísla. Každá bijekcia φ uvedenej vlastnosti rozkladá množinu prvočísel na zjednotenie jednoprvkových a dvojprvkových navzájom disjunktných množín takých, že pre každú z nich tvaru $\{p\}$ platí $\varphi(p) = p$ a pre každú z nich tvaru $\{p_1, p_2\}$ platí $\varphi(p_1) = p_2$, $\varphi(p_2) = p_1$. Naopak každý taký rozklad určuje vyhovujúcu bijekciu φ.

A – III – 4

Ukážeme, že uvedený záver všeobecne neplatí. Ako protipríklad zvolíme množinu

$$\mathsf{M} = \mathbb{N} \setminus \{a;\ a+1 \text{ je prvočíslo väčšie ako } 2\,008\},$$

ktorá zrejme obsahuje všetky čísla od 1 do 2 007. Pritom aritmetická postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s prvým členom $a_1 = n \in \mathsf{M}$ a diferenciou $d = n+1$ má všeobecný člen tvaru

$$a_k = a_1 + (k-1)d = n + (k-1)(n+1) = (n+1)k - 1,$$

odkiaľ vyplýva, že číslo $a_k + 1 = (n+1)k$ nie je prvočíslo pre žiadny index $k > 1$, takže a_k leží v M pre každý index k (či už $a_k \leqq 2\,007$, alebo $a_k \geqq 2\,008$). Nakoľko prvočísel je nekonečne veľa, je nekonečne veľa aj prirodzených čísel, ktoré v zvolenej množine M neležia.

Iné riešenie. Každá vyhovujúca množina M musí obsahovať všetky členy prvých 2 007 aritmetických postupností s prvým členom $n \leqq 2\,007$ a diferenciou $n+1$:

$$A_1 = (1, 3, 5, \dots),\ A_2 = (2, 5, 8, \dots),\ \dots,\ A_{2\,007} = (2\,007, 4\,015, 6\,023, \dots).$$

Zrejme množina hodnôt $\mathsf{A}_k = \{k, 2k+1, 3k+2, \dots\}$ postupnosti A_k je pre každé k tvorená všetkými prirodzenými číslami tvaru $i(k+1)+k$ s celým nezáporným i.

Vysvetlíme, prečo

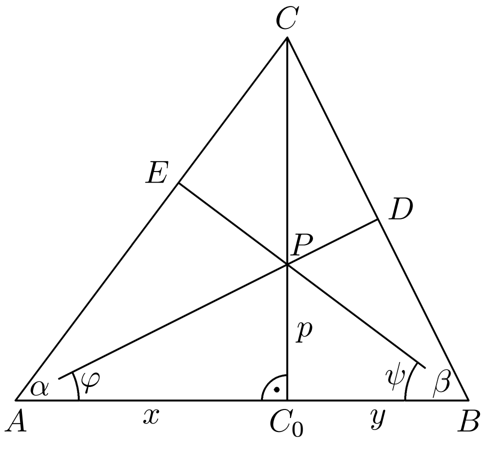
$$\mathsf{M} = \mathsf{A}_1 \cup \mathsf{A}_2 \cup \ldots \cup \mathsf{A}_{2\,007}$$

je najmenšia množina s požadovanou vlastnosťou. Ukážeme totiž, že ak $n \in \mathsf{A}_k$ pre niektoré čísla n a k, tak $\mathsf{A}_n \subseteq \mathsf{A}_k$. Nech teda $n \in \mathsf{A}_k$ a $m \in \mathsf{A}_n$. Potom $n = i(k+1)+k$ a $m = j(n+1)+n$ pre vhodné celé nezáporné i a j, odkiaľ $m = j(i+1)(k+1) + i(k+ + 1) + k = (ji+j+i)(k+1)+k$, čo znamená, že $m \in \mathsf{A}_k$.

Existuje však nekonečne veľa prirodzených čísel, ktorá v zostrojenej „minimálnej“ vyhovujúcej množine M neležia; sú to napríklad všetky násobky čísla 2 008!.

A – III – 5

Označme $\varphi = |\sphericalangle BAD|$ a $\psi = |\sphericalangle ABE|$ (obr. 27). Z rovnosti obvodových uhlov $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle ADB|$ v tetivovom štvoruholníku $ABDE$ tak pri zvyčajnom označení



Obr. 27

uhlov v trojuholníku ABC vyplýva

$$\alpha + \psi = \beta + \varphi. \tag{1}$$

Označme C_0 pätu výšky z vrcholu C, v_c veľkosť výšky CC_0 a x, y, p veľkosti príslušných úsekov AC_0, BC_0, PC_0 (obr. 27), takže

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{p}{x}, \qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{p}{y},$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_c}{x}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{v_c}{y}. \tag{2}$$

Ak bod P nie je priesečník výšok (t. j. uhol $\alpha+\psi$ nie je pravý), môžeme podľa (1) písať

$$\operatorname{tg}(\alpha+\psi) = \operatorname{tg}(\beta+\varphi),$$

čo podľa známeho vzťahu pre tangens súčtu po dosadení z (2) dáva (využívame rovnosť $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\varphi$, ktorá z (2) tiež vyplýva)

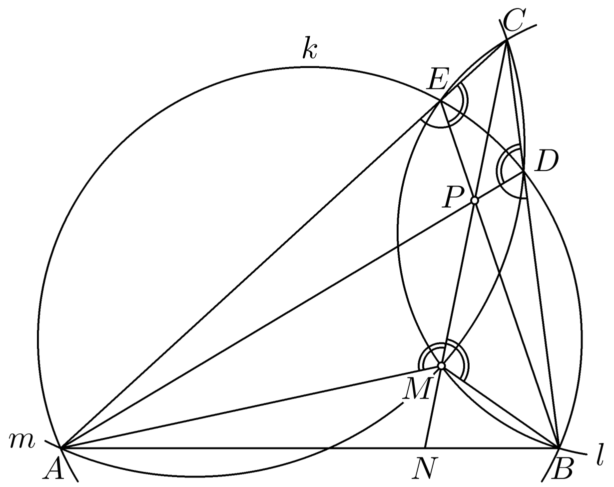
$$\frac{v_c}{x} + \frac{p}{y} = \frac{v_c}{y} + \frac{p}{x},$$

čiže

$$(p - v_c)(x - y) = 0.$$

Keďže vzhľadom na dané predpoklady $p < v_c$ a $x \neq y$, nemôže ostatná rovnosť platiť. Takže $\alpha + \psi = 90°$ a bod P je priesečníkom výšok, čo sme chceli dokázať.

Iné riešenie. Označme k kružnicu opísanú tetivovému štvoruholníku $ABDE$ a uvažujme ešte kružnice l a m opísané trojuholníkom BEC a ADC (obr. 28). Tetiva BE kružnice l pretína tetivu AD kružnice m v bode P, kružnice l, m teda majú okrem bodu C ešte ďalší priesečník, ktorý označíme M. Z uvedenej konštrukcie vplýva, že bod P leží vnútri každej z troch uvažovaných kružníc a má k nim rovnakú mocnosť (je to ich *potenčný* bod), preto bod P leží vnútri úsečky CM.



Obr. 28

Z rovnosti obvodových uhlov nad tetivou BC kružnice l vyplýva $|\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle BEC| = 180° - |\sphericalangle AEB|$ a analogicky $|\sphericalangle AMC| = |\sphericalangle ADC| = 180° - |\sphericalangle ADB|$, čo vzhľadom na rovnosť obvodových uhlov $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle ADB|$ nad tetivou AB kružnice k znamená, že

$$|\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle AMC|.$$

Označme N pätu výšky z vrcholu C trojuholníka ABC. Ak $M \neq N$, znamená ostatná rovnosť, že pravouhlé trojuholníky BNM a ANM sú zhodné, čo však odporuje predpokladu $|AC| \neq |BC|$. Preto $M = N$, $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle AMC| = 90°$ a bod P je priesečníkom výšok trojuholníka ABC, čo sme chceli dokázať.

A – III – 6

Ak sú x, y, z tri navzájom rôzne reálne čísla, tak hodnoty

$$u = \frac{x-y}{y-z}, \quad v = \frac{y-z}{z-x}, \quad w = \frac{z-x}{x-y} \tag{1}$$

sú zrejme čísla rôzne od 0 a -1 a ich súčin je rovný 1. Rovnakú vlastnosť teda musia mať aj hodnoty x, y, z z každej hľadanej trojice. Budeme preto neustále predpokladať, že

$$x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}, \quad x \neq y \neq z \neq x, \quad xyz = 1. \tag{2}$$

Keďže daná množinová rovnica je pre usporiadané trojice (x, y, z), (z, x, y) a (y, z, x) rovnaká, budeme okrem (2) predpokladať, že $x > \max\{y, z\}$, a rozoberieme dva prípady podľa toho, či $y > z$, alebo $z > y$. Zaveďme ešte označenie intervalov $I_1 = (0, \infty)$, $I_2 = (-1, 0)$, $I_3 = (-\infty, -1)$.

Prípad $x > y > z$. Pre zlomky (1) zrejme platí $u \in I_1$, $v \in I_2$ a $w \in I_3$, takže $u > v > w$. Daná množinová rovnica preto môže byť splnená jedine tak, že $u = x$, $v = y$ a $w = z$. Po dosadení zlomkov (1) a jednoduchej úprave dôjdeme k rovniciam

$$xy + y = yz + z = zx + x, \quad \text{pričom } x \in I_1,\ y \in I_2,\ z \in I_3. \tag{3}$$

Podľa podmienky $xyz = 1$ z (2) môžeme do rovnice $xy + y = zx + x$ za člen zx dosadiť $1/y$ a rovnicu ďalej upraviť:

$$xy + y = \frac{1}{y} + x \Rightarrow x(y-1) = \frac{1-y^2}{y} \Rightarrow x = -\frac{1+y}{y} \Rightarrow y = -\frac{1}{1+x}.$$

(Využili sme to, že vzhľadom na $y \in I_2$ platí $y \neq 1$.) Z ostatného vzťahu vyplýva, že hodnota prvého výrazu v sústave (3) je rovná -1, takže z rovnosti druhého výrazu číslu -1 máme

$$z = -\frac{1}{1+y} = -\frac{1}{1 - \dfrac{1}{1+x}} = -\frac{1+x}{x},$$

potom však aj tretí výraz v (3) je rovný -1. Preto každé riešenie našej úlohy (v skúmanom prípade, keď $x > y > z$) má tvar

$$(x, y, z) = \left(t, -\frac{1}{1+t}, -\frac{1+t}{t}\right), \tag{4}$$

pričom $t \in I_1$ je ľubovoľné (pretože platí (3), skúška nie je nutná). Z uvedeného postupu tiež vyplýva, že voľbou $t \in I_2$ (resp. $t \in I_3$) vo vzťahu (4) dostaneme všetky riešenia našej úlohy s vlastnosťou $z > x > y$ (resp. $y > z > x$), takže pri výpise všetkých riešení v záverečnej odpovedi nie je nutné uvádzať cyklické permutácie trojíc zo vzťahu (4).

Prípad $x > z > y$. Pre zlomky (1) teraz platí $u \in I_3$, $v \in I_1$ a $w \in I_2$, takže $v > w > u$. Daná množinová rovnica je teda splnená práve vtedy, keď $u = y$, $v = x$ a $w = z$. Po dosadení zlomkov z (1) dôjdeme k sústave

$$x - y = y(y - z), \quad y - z = x(z - x), \quad z - x = z(x - y). \tag{5}$$

Sčítaním týchto troch rovníc dostaneme

$$0 = y(y - z) + x(z - x) + z(x - y) = (y - x)(x + y - 2z),$$

odkiaľ vzhľadom na $x \neq y$ vyplýva $z = \frac{1}{2}(x + y)$. Po dosadení späť do(5) ľahko zistíme (opäť vzhľadom na $x \neq y$), že vyhovuje iba $x = 1$, $y = -2$ a $z = -\frac{1}{2}$. Rovnakou trojicou čísel je tvorené (jediné) riešenie úlohy s vlastnosťou $y > x > z$ aj (jediné) riešenie, pre ktoré $z > y > x$.

Odpoveď. Riešením úlohy sú všetky usporiadané trojice (4), pričom $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, a tri trojice (x, y, z) tvaru

$$\left(1, -2, -\tfrac{1}{2}\right), \ \left(-\tfrac{1}{2}, 1, -2\right), \ \left(-2, -\tfrac{1}{2}, 1\right).$$

Poznámka. Ak vypíšeme všetkých šesť možných sústav prislúchajúcich danej množinovej rovnici, dostaneme okrem sústav (3) a (5) ešte sústavy

$$\begin{aligned}
x - y &= z(y - z), & y - z &= y(z - x), & z - x &= x(x - y);\\
x - y &= x(y - z), & y - z &= z(z - x), & z - x &= y(x - y);\\
x - y &= y(y - z), & y - z &= z(z - x), & z - x &= x(x - y);\\
x - y &= z(y - z), & y - z &= x(z - x), & z - x &= y(x - y).
\end{aligned}$$

Prvé dve vzniknú zo sústavy (5) cyklickou zámenou premenných, takže ich možno riešiť rovnakým postupom ako (5). Sčítaním všetkých troch rovníc v každej z dvoch zostávajúcich sústav dostaneme tú istú rovnicu

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx, \qquad \text{resp.} \qquad (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0,$$

ktorá má jediné riešenie $x = y = z$, čo nie sú navzájom rôzne čísla.

Iné riešenie. Ak sú x, y, z tri navzájom rôzne reálne čísla, tak hodnoty

$$u = \frac{x - y}{y - z}, \quad v = \frac{y - z}{z - x}, \quad w = \frac{z - x}{x - y} \tag{1}$$

sú zrejme rôzne od čísel 0 a -1 a platia medzi nimi vzťahy

$$v = f(u), \quad w = f(v) \quad \text{a} \quad u = f(w), \tag{2}$$

pričom f je lineárna lomená funkcia daná predpisom $f(t) = -\dfrac{1}{1+t}$. Presvedčíme sa o tom priamym výpočtom:

$$f(u) = -\frac{1}{1+u} = -\frac{1}{1+\dfrac{x-y}{y-z}} = -\frac{y-z}{(x-y)+(y-z)} = \frac{y-z}{z-x} = v;$$

z dôvodu cyklickosti platia aj zostávajúce dva vzťahy v (2).

Uvedený poznatok znamená, že každé riešenie úlohy je pre vhodné $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ buď usporiadaná trojica tvaru

$$(x, y, z) = (t, f(t), f(f(t))) = \left(t, -\frac{1}{1+t}, -\frac{1+t}{t}\right), \tag{3}$$

alebo usporiadaná trojica tvaru

$$(x, y, z) = (t, f(f(t)), f(t)) = \left(t, -\frac{1+t}{t}, -\frac{1}{1+t}\right). \tag{4}$$

Ostáva urobiť skúšku: ľahko sa presvedčíme, že zatiaľ čo trojica tvaru (3) je riešením pre každé $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, trojica tvaru (4) vyhovuje iba pre $t = 1$, $t = -2$ a $t = -\frac{1}{2}$ a sú to cyklické permutácie týchto troch hodnôt.

Prípravné sústredenia pred IMO a MEMO

Pred medzinárodnou matematickou olympiádou (IMO) sa každoročne koná jedno výberové a jedno prípravné sústredenie pre najlepších riešiteľov celoštátneho kola kategórie A (CK MO). Od 55. ročníka MO sa navyše každoročne koná aj spoločné prípravné sústredenie českého a slovenského IMO-družstva.

Po výberovom sústredení SK MO vyberie 6 najlepších študentov do reprezentačného družstva Slovenska a určí jedného náhradníka. V 56. ročníku sa na výberovom sústredení po prvý krát bojovalo nielen o postup na IMO, ale aj na Stredoeurópsku matematickú olympiádu (MEMO), na ktorú cestuje najlepších 6 študentov, ktorí sa nedostali na IMO a zároveň nie sú v maturitnom ročníku (t. j. majú možnosť súťažiť v MO aj nasledujúci školský rok).

Vzhľadom na novú súťaž MEMO bolo na výberové sústredenie pozvaných viac študentov ako po minulé roky – najúspešnejší riešitelia CK MO boli doplnení štvoricou mladších riešiteľov (tiež účastníkov CK MO). Sústredenia, ktoré sa konalo v dňoch 10. – 16. 4. 2007 v Bratislave, sa tak zúčastnilo až 15 súťažiacich. Úlohy zadávali lektori z FMFI UK Bratislava:

RNDr. Tomáš Jurík, úlohy 1 – 3,
Ján Mazák, úlohy 4 – 6,
Mgr. Peter Novotný, úlohy 7 – 10,
Michal Takács, úlohy 11 – 12,
Jakub Závodný, úlohy 13 – 14,
Ondrej Budáč, úlohy 15 – 17.

Každý deň študenti riešili sériu troch či štyroch úloh pri podobných podmienkach ako na IMO. V poobedňajších hodinách sa konal spoločný rozbor úloh s lektorom. Na konci sústredenia sa získané body za jednotlivé dni sčítali a s prihliadnutím na výsledky celoštátneho kola MO boli vybrané šesťčlenné družstvá pre účasť na IMO a MEMO. Keďže na šiestom mieste sa umiestnili dvaja študenti s rovnakým počtom bodov, podľa pravidiel SK MO bol na IMO vybraný mladší z nich, t. j. Michal Spišiak (študent 2. ročníka). Tomáš Kocák (3. ročník) bol náhradníkom a zároveň členom MEMO-družstva.

Výsledky sústredenia:

Hapák Samuel	58,5
Szabados Michal	51,5
Rusin Tomáš	35
Ujházi Vladislav	33
Spišiak Michal	31
Štefaňák Filip	31
Mikuláš Ondrej	29,5
Baláž Miroslav	29
Kocák Tomáš	28
Páldy Alexander	28
Melicherčík Martin	20
Ondrúška Peter	18,5
Šagát Marián	14
Köry Jakub	12,5
Platinský Lukáš	6

Poradie po zohľadnení výsledkov CK MO:

1.	*Hapák Samuel*	91,5
2.	*Szabados Michal*	80,5
3.	*Ujházi Vladislav*	71
4.	*Rusin Tomáš*	52
5.	*Mikuláš Ondrej*	49,5
6.	*Spišiak Michal*	48
	Kocák Tomáš	48
8.	*Štefaňák Filip*	44
	Baláž Miroslav	44
10.	*Páldy Alexander*	43
11.	*Melicherčík Martin*	34
12.	*Ondrúška Peter*	27,5
13.	*Šagát Marián*	23
14.	*Köry Jakub*	21,5
15.	*Platinský Lukáš*	16

Prípravné sústredenie sa konalo v dňoch 27. 5. – 1. 6. 2007 v Bratislave. Sústredenie bolo zamerané na prípravu reprezentačných družstiev na IMO a MEMO. Lektormi boli študenti a doktorandi FMFI UK Bratislava:

Mgr. Peter Novotný (invarianty, teória čísel),
RNDr. Tomáš Jurík (geometria, Dirichletov princíp),
Ján Mazák (geometria, teória čísel, kombinatorika),
Ondrej Budáč (algebra).

V poradí druhé spoločné sústredenie českého a slovenského družstva sa uskutočnilo v dňoch 17. – 22. 6. 2007 v ČR v Uherskom Hradišti v regionálnom vzdelávacom stredisku Eduha. Sústredenie sa uskutočnilo pod záštitou Společnosti Otakara Borůvky a bolo finančne zabezpečené z neštátnych prostriedkov. Pedagogický dozor slovenským (a na mieste aj českým) študentom robili Ján Mazák a Mgr. Peter Novotný z FMFI UK Bratislava. Odborné prednášky viedli

doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., MÚ AV ČR, Brno (teória čísel a polynómy nad $\mathbb{Z}$),
RNDr. Pavel Calábek, CSc., PF UP, Olomouc (funkcionálne rovnice),
RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., PF UP, Olomouc (syntetická planimetria),
Mgr. Martin Panák, PhD., MÚ AV ČR, Brno (nerovnosti a polynómy nad $\mathbb{R}$).

Zadania súťažných úloh výberového sústredenia pred IMO a MEMO

1. Označme A_n počet permutácií $a_1, a_2, \dots, a_n$ čísel $1, 2, \dots, n$ takých, že pre všetky $k = 1, 2, \dots, n$ je $|a_k - k|$ rovné 0, 1 alebo 2. Dokážte, že pre $n \geqq 6$ platí

$$A_n = 2A_{n-1} + 2A_{n-3} - A_{n-5}.$$

2. Dokážte, že ak a, b, c, d sú kladné reálne čísla spĺňajúce nerovnosť

$$\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)^2 > 3\left(a^4 + b^4 + c^4 + d^4\right),$$

tak ľubovoľná trojica z čísel a, b, c, d môže byť dĺžkami strán trojuholníka.

3. Trojuholník ABC je vpísaný do kružnice Ω. Nech M_1, M_2, M_3 sú postupne stredy strán BC, CA, AB a T_1, T_2, T_3 sú stredy oblúkov BC, CA, AB na kružnici Ω, ktoré neobsahujú protiľahlý vrchol. Pre $i = 1, 2, 3$ nech ω_i je kružnica s priemerom M_iT_i a p_i je spoločná vonkajšia dotyčnica kružníc ω_j, ω_k ($\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$) taká, že ω_i leží na opačnej strane priamky p_i ako ω_j a ω_k. Dokážte, že priamky p_1, p_2, p_3 vytvárajú trojuholník podobný s trojuholníkom ABC a nájdite pomer podobnosti.

4. Vnútri strany BC ostrouhlého trojuholníka ABC leží bod D. Body P a Q sú stredmi kružníc opísaných trojuholníkom ABD a ACD. Dokážte, že existuje bod M rôzny od bodu A taký, že ním prechádzajú všetky kružnice opísané všetkým možným trojuholníkom APQ (trojuholník ABC je pevný a bod D sa pohybuje po strane BC).

5. Prirodzené číslo N sa dá napísať v tvare $a^2 + b^2 + c^2$, kde a, b, c sú celé čísla deliteľné tromi. Dokážte, že sa dá napísať aj v tvare $x^2 + y^2 + z^2$, kde x, y, z sú celé čísla, z ktorých žiadne nie je deliteľné tromi.

6. V tabuľke 300×300 je N políčok zafarbených čiernou farbou, ostatné sú biele. Žiadne tri čierne políčka netvoria roh (t. j. útvar ⊞, ľubovoľne otočený). Keď však zafarbíme ľubovoľné biele políčko načierno, táto podmienka prestane platiť. Nájdite minimálnu hodnotu N.

7. Postupnosť reálnych čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots$ je definovaná predpisom

$$a_{n+1} = \lfloor a_n \rfloor \cdot \langle a_n \rangle \qquad \text{pre } n \geqq 1,$$

pričom a_1 je ľubovoľné reálne číslo. Výraz $\lfloor a_n \rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré neprevyšuje a_n. Výraz $\langle a_n \rangle$ je určený predpisom $\langle a_n \rangle = a_n - \lfloor a_n \rfloor$. Dokážte, že počnúc od určitej hodnoty pre každé n platí $a_n = a_{n+2}$.

8. Daný je konvexný päťuholník $ABCDE$, pričom

$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle DAE| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle ADE|.$$

Uhlopriečky BD a CE sa pretínajú v bode P. Dokážte, že priamka AP prechádza stredom strany CD.

9. Dané je racionálne číslo x z intervalu $(0, 1)$. Nech y je také číslo z intervalu $(0, 1)$, ktorého n-tá cifra za desatinnou čiarkou sa rovná 2^n-tej cifre za desatinnou čiarkou čísla x. Dokážte, že aj y je racionálne.

10. Na ulici je v rade za sebou n lámp $L_1, \ldots, L_n$, pričom $n \geqq 2$. Každá z nich buď svieti, alebo je zhasnutá. Každú sekundu naraz upravíme stav všetkých lámp podľa nasledujúcich pravidiel:
- ak lampa L_i a s ňou susediace lampy sú v rovnakom stave, tak L_i bude po úprave zhasnutá;
- inak bude L_i po úprave svietiť.

Na začiatku prvá lampa svieti a všetky ostatné sú zhasnuté.

a) Dokážte, že existuje nekonečne veľa prirodzených čísel n, pre ktoré budú po istom čase všetky lampy naraz zhasnuté.
b) Dokážte, že existuje nekonečne veľa prirodzených čísel n, pre ktoré nebudú nikdy všetky lampy naraz zhasnuté.

11. Nech ABC je rovnoramenný trojuholník a D je stred jeho základne BC. Označme ďalej M stred AD a N pätu výšky z bodu D na priamku BM. Dokážte, že uhol ANC je pravý.

12. Nech $d(n)$ označuje počet kladných deliteľov čísla n. Nájdite všetky prirodzené n také, že $n = d(n)^4$.

13. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y.$$

14. Párny počet poslancov rokuje za okrúhlym stolom. Po krátkej prestávke si znova posadajú, inak ako predtým. Ukážte, že existujú dvaja poslanci, medzi ktorými sedí rovnaký počet poslancov ako pred prestávkou.

15. Dokážte, že mnohouholník s obsahom väčším ako n sa dá vložiť do roviny tak, že zakryje aspoň $n + 1$ mrežových bodov.

16. Dokážte, že súčin piatich po sebe idúcich prirodzených čísel nemôže byť štvorec.

17. Označme c najväčší reálny koreň rovnice $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$. Dokážte, že číslo $\lfloor c^{1988} \rfloor$ je deliteľné číslom 17.

7. česko-poľsko-slovenské stretnutie

V rámci záverečnej prípravy pred IMO sa uskutočnilo po siedmy krát prípravné stretnutie medzi družstvami Českej republiky, Poľska a Slovenska. Jednotlivé krajiny reprezentovali takmer kompletné šestice študentov, ktorí si vybojovali vo svojich krajinách účasť na 48. IMO vo Vietname (niektorých reprezentantov zastupovali náhradníci, napríklad v slovenskom družstve Samuela Hapáka zastupoval Tomáš Kocák).

Súťaž sa uskutočnila 24. – 27. 6. 2007 v Bílovci v Českej republike na pôde gymnázia M. Kopernika. Organizácia a priebeh súťaže je prispôsobená štýlu celoštátneho kola našej MO a podmienkam IMO. Súťažiacim boli počas dvoch dní predložené dve trojice súťažných úloh, pričom za každú správnu úlohu mohli získať najviac 7 bodov (rovnako ako na IMO). Na každú trojicu úloh mali súťažiaci vymedzené 4,5 hodiny čistého času.

Prehľad výsledkov:

Por.	Meno	Štát	1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$
1.	Gawron Maciej	Poľsko	7	7	7	7	3	0	31
2.	Żebrowski Karol	Poľsko	7	7	5	7	3	0	29
3.	Zaremba Wojciech	Poľsko	6	7	4	1	7	1	26
4.	Jendrej Jacek	Poľsko	7	7	2	7	1	0	24
5.	Dobel Piotr	Poľsko	3	3	4	6	5	0	21
6.	Kobos Tomasz	Poľsko	7	7	5	0	1	0	20
7.	Klimoš Miroslav	Česká rep.	7	2	2	7	1	0	19
	Rolínek Michal	Česká rep.	7	2	2	7	1	0	19
9.	Konečný Zbyněk	Česká rep.	7	1	2	7	1	0	18
10.	*Mikuláš Ondrej*	Slovensko	0	7	2	7	1	0	17
	Szabados Michal	Slovensko	6	7	3	0	1	0	17
12.	*Ujházi Vladislav*	Slovensko	0	7	4	1	1	0	13
13.	*Rusin Tomáš*	Slovensko	2	2	5	1	1	0	11
14.	*Kocák Tomáš*	Slovensko	0	7	2	0	1	0	10
	Slavíková Lenka	Česká rep.	4	0	2	2	2	0	10
16.	Šormová Hana	Česká rep.	3	0	2	0	3	0	8
17.	*Spišiak Michal*	Slovensko	1	1	2	2	1	0	7
18.	Řihák Jiří	Česká rep.	0	0	2	1	0	0	3

Štát	1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$
Česká rep.	28	5	12	24	8	0	77
Poľsko	37	38	27	28	20	1	151
Slovensko	9	31	18	11	6	0	75

Opravu riešení zabezpečila medzinárodná porota, ktorú tvorili RNDr. Karel Horák, CSc., doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc. a RNDr. Jaroslav Švrček, CSc. z Českej republiky, dr. Jerzy Bednarczuk, Marcin Pilipczuk a dr. Jarosław Wróblewski z Poľska, a Mgr. Peter Novotný a Erika Trojáková zo Slovenska.

Aj po minulé roky zvyklo mať poľské družstvo prevahu, avšak tento rok vo výslednom poradí nepustili medzi seba žiadnych iných súťažiacich a obsadili prvých šesť priečok. Ich lepšia pripravenosť oproti nášmu a českému družstvu sa neskôr ukázala aj na výsledkoch IMO, i keď nie až tak výrazne ako na tomto stretnutí.

Mimo matematického programu si stihli účastníci zahrať futbal na školskom ihrisku a pekná bola aj prechádzka prírodou k miestnej vodnej nádrži.

V budúcom roku sa spoločné prípravné stretnutie uskutoční v Poľsku.

Zadania úloh česko-slovensko-poľského stretnutia

Úloha 1.
Nájdite všetky mnohočleny P s reálnymi koeficientmi, pre ktoré rovnosť

$$P(x^2) = P(x) \cdot P(x+2)$$

platí pre ľubovoľné reálne číslo x.

(Pavel Calábek)

Úloha 2.
Nech $a_1 = a_2 = 1$ a $a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$ pre každé $k \in \mathbb{N}$ (Fibonacciho postupnosť čísel). Dokážte, že pre každé prirodzené číslo m existuje taký index k, pre ktorý je číslo $a_k^4 - a_k - 2$ deliteľné číslom m.

(Ján Mazák)

Úloha 3.
Nech k je kružnica opísaná takému konvexnému štvoruholníku $ABCD$, že polpriamky DA a CB sa pretínajú v bode E, pre ktorý platí $|CD|^2 = |AD| \cdot |ED|$. Označme F ($F \neq A$) priesečník kružnice k s priamkou predchádzajúcou bodom A a kolmou na ED. Dokážte, že potom platí: Úsečky AD a CF sú zhodné práve vtedy, keď stred kružnice l opísanej trojuholníku ABE leží na priamke ED.

(Jaroslav Švrček)

Úloha 4.
Dokážte, že pre každé reálne číslo $p \geqq 1$ možno z množiny reálnych čísel x spĺňajúcich nerovnosti

$$p < x < \left(2 + \sqrt{p + \frac{1}{4}}\right)^2$$

vybrať štyri navzájom rôzne prirodzené čísla a, b, c, d, pre ktoré platí rovnosť $ab = cd$.

(Jaromír Šimša)

Úloha 5.
Zistite, pre ktoré

$$n \in \{3\,900, 3\,901, 3\,902, 3\,903, 3\,904, 3\,905, 3\,906, 3\,907, 3\,908, 3\,909\}$$

možno množinu $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ rozdeliť na disjunktné trojice tak, aby v každej trojici sa jedno číslo rovnalo súčtu ostatných dvoch čísel.

(Peter Novotný)

Úloha 6.
Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník. Kružnica prechádzajúca bodmi A a D má vonkajší dotyk s kružnicou predchádzajúcou bodmi B a C vo vnútornom bode P uvažovaného štvoruholníka. Predpokladajme, že

$$|\sphericalangle PAB| + |\sphericalangle PDC| \leqq 90^\circ \quad \text{a} \quad |\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle PCD| \leqq 90^\circ.$$

Dokážte, že potom platí $|AB| + |CD| \geqq |BC| + |AD|$.

(Waldemar Pompe)

Riešenia úloh česko-slovensko-poľského stretnutia

Úloha 1.
Konštantný mnohočlen $P(x) = c$ vyhovuje práve vtedy, keď $c = c^2$, mnohočleny $P(x) = 0$ a $P(x) = 1$ sú teda riešením úlohy.

Ukážme teraz, že jediný vyhovujúci mnohočlen P kladného stupňa n je tvaru $P(x) = (x-1)^n$. Uvedený mnohočlen je vzhľadom na identitu $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ zrejme riešením pre každé $n \geqq 1$.

Ak je ax^n $(a \neq 0)$ vedúci člen mnohočlena $P(x)$ kladného stupňa n, je ax^{2n} vedúci člen mnohočlena $P(x^2)$ a a^2x^{2n} vedúci člen mnohočlena $P(x)P(x+2)$. Pokiaľ P vyhovuje danej rovnosti, dostávame porovnaním príslušných členov $a = a^2$, teda $a = 1$. Preto možno mnohočlen P zapísať v tvare $P(x) = (x-1)^n + Q(x)$, kde Q je buď nulový mnohočlen, alebo je Q nenulový mnohočlen stupňa k, pričom $0 \leqq k < n$. Porovnaním mnohočlenov

$$\begin{aligned} P(x^2) &= (x^2-1)^n + Q(x^2), \\ P(x)P(x+2) &= [(x-1)^n + Q(x)][(x+1)^n + Q(x+2)] \end{aligned}$$

dostaneme (po roznásobení a zrušení mocniny $(x^2-1)^n$ na oboch stranách) rovnosť

$$Q(x^2) = (x-1)^n Q(x+2) + (x+1)^n Q(x).$$

Vidíme, že nulový mnohočlen Q vzťah spĺňa. Pre nenulový mnohočlen Q stupňa $k < n$ je však $Q(x^2)$ mnohočlen stupňa $2k$, zatiaľ čo na pravej strane odvodeného vzťahu je mnohočlen stupňa $n+k$ (jeho vedúci člen je $2bx^{n+k}$, ak bx^k je vedúci člen mnohočlena $Q(x)$). Keďže $2k < n+k$, nemôže uvedená rovnosť platiť.

Odpoveď. Úlohe vyhovujú konštantné mnohočleny $P(x) = 0$ a $P(x) = 1$ a pre každé prirodzené n mnohočlen $P(x) = (x-1)^n$.

Iné riešenie. Rovnako ako pri prvom postupe nájdeme riešenia $P(x) = 0$ a $P(x) = 1$. Ďalej sa zaoberajme len nekonštantnými mnohočlenmi. Predpokladajme, že mnohočlen P kladného stupňa n vyhovuje zadaniu. Keďže zadaná rovnosť platí pre všetky reálne čísla x, sú na oboch stranách rovnosti totožné mnohočleny, a teda zadaná rovnosť platí aj pre všetky komplexné čísla x. Nech z je ľubovoľný (komplexný) koreň polynómu P.

Po dosadení $x = z$ do zadanej rovnosti dostaneme $P(z^2) = 0$, teda aj z^2 je koreňom P. Zopakovaním tejto úvahy dostávame, že koreňmi mnohočlena P sú všetky členy postupnosti

$$z, z^2, z^4, z^8, \dots \tag{1}$$

Keďže P má len konečne veľa (najviac n) rôznych komplexných koreňov, musia sa v postupnosti (1) hodnoty od určitého člena začať opakovať, t. j. $z^k = z^m$ pre nejaké $k < m$. Odtiaľ buď $z = 0$, alebo $z^{m-k} = 1$. Každý nenulový koreň má teda absolútnu hodnotu 1.

Po dosadení $x = z-2$ do zadanej rovnosti dostaneme $P((z-2)^2) = 0$, teda aj $(z-2)^2$ je koreňom. Ak $z = 0$, dostávame, že číslo 4 je koreňom, čo je v rozpore s predošlým poznatkom. Takže všetky korene sú nenulové. Nutne teda $|(z-2)^2| = 1$, čiže $|z-2| = 1$. Jediné komplexné číslo s vlastnosťou $|z| = |z-2| = 1$ je $z = 1$. Takže P môže mať jedine koreň 1, čiže $P(x) = a(x-1)^n$. Dosadením do zadanej rovnosti ľahko odvodíme $a = 1$ a overíme, že $P(x) = (x-1)^n$ je riešením pre každé prirodzené n.

Úloha 2.

Všetky kongruencie a zvyškové triedy v riešení uvažujeme modulo m. Žiadanú kongruenciu $a_k^4 - a_k - 2 \equiv 0$ získame ako dôsledok jednoduchšej kongruencie $a_k \equiv -1$.

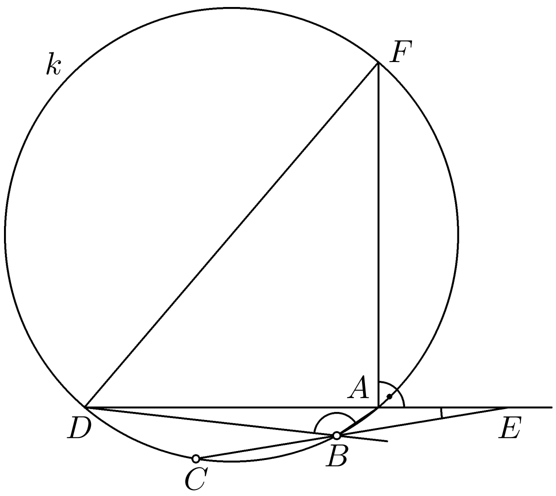
Postupnosť zvyškových tried čísel a_k má nasledujúcu vlastnosť: zvyškové triedy ľubovoľných dvoch po sebe idúcich členov a_k, a_{k+1} jednoznačne určujú zvyškové triedy ako všetkých nasledujúcich členov a_i $(i > k+1)$, tak všetkých predchádzajúcich členov a_i $(i < k)$. Odtiaľ zvyčajným postupom, založeným na tom, že všetkých usporiadaných dvojíc zvyškových tried je m^2, teda konečný počet, dostávame, že postupnosť zvyškových tried čísel a_i je periodická, a to hneď od svojho *prvého* člena. Existuje teda číslo $p > 0$ (závislé od daného m) také, že $a_i \equiv a_{i+p}$ pre každý index i. Ak $m \neq 1$ (pre $m = 1$ je tvrdenie úlohy triviálne), zrejme $p > 1$. Keďže $a_1 \equiv a_2 \equiv 1$, platí aj $a_{p+1} \equiv a_{p+2} \equiv 1$, odkiaľ $a_p \equiv 0$ a $a_{p-1} \equiv -1$, takže môžeme zobrať $k = p-1$ a dôkaz je ukončený.

Úloha 3.

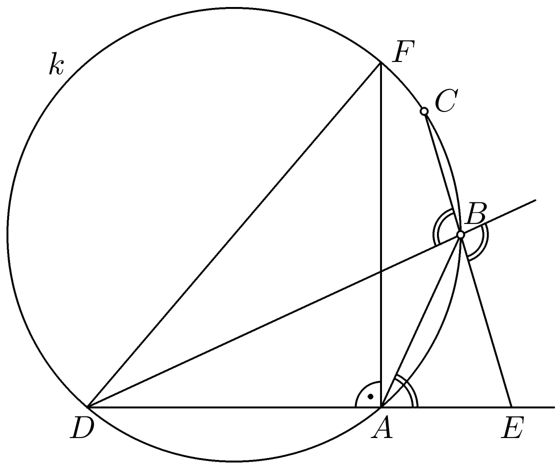
Zrejme DF je priemerom kružnice k. Najskôr ukážeme, že za daných podmienok nemôže bod C ležať v polrovine DFA.

Ak body B, C ležia na časti DA oblúka DAF (obr. 29), sú zrejme uhly DCB a DBA tupé, preto $|DC| < |DB| < |DA| < |DE|$, takže rovnosť $|CD|^2 = |AD| \cdot |ED|$ nemôže platiť. Pre body B, C na časti AF oblúka DAF (obr. 30) je uhol BAE ostrý a pre uhol DBE platí $|\sphericalangle DBE| = 180° - |\sphericalangle DBC| \leqq 90°$. Takže prípadný ďalší priesečník B' polpriamky DB s kružnicou l nemôže ležať za bodom B. Preto $|DC| > |DB| \geqq |DB'|$. Rovnosť $|CD|^2 = |AD| \cdot |ED|$ teda nemôže platiť, pretože $|AD| \cdot |ED| = |DB| \cdot |DB'|$ vyjadruje mocnosť bodu D ku kružnici l.

Ak bod C neleží v polrovine DFA, platí $|FC| = |DA|$ práve vtedy, keď $DAFC$ je pravouholník, t. j. práve vtedy, keď CA je priemer kružnice k. To je ekvivalentné tomu, že uhol CBA je pravý, a to je ekvivalentné tomu, že trojuholník AEB je pravouhlý



Obr. 29



Obr. 30

s pravým uhlom pri vrchole B, čiže stred kružnice opísanej trojuholníku AEB je stredom úsečky AE.

Úloha 4.
Čísla $a = (k-1)k$, $b = (k+1)k$, $c = (k-1)(k+1)$, $d = k^2$ zrejme spĺňajú rovnosť $ab = cd$ a nerovnosti $a < c < d < b$ pre každé $k > 1$. Nech teda k je najmenšie prirodzené číslo, pre ktoré platí $p < a$, čiže $p < (k-1)k$ (pri zadanom p). Ukážme, že pre také k potom platí $b = (k+1)k \leqq p + 4 + 2\sqrt{4p+1}$, čo je zrejme číslo o $\frac{1}{4}$ menšie ako horné ohraničenie intervalu zo zadania, takže tým bude riešenie úlohy úplné.

Podľa výberu čísla k platí $p \geqq (k-2)(k-1)$. Riešením tejto kvadratickej nerovnice dostaneme odhad

$$k \leqq \frac{3}{2} + \sqrt{p + \frac{1}{4}},$$

z ktorého už vyplýva

$$\begin{aligned} b = (k+1)k &\leqq \left(\frac{5}{2} + \sqrt{p + \frac{1}{4}}\right) \cdot \left(\frac{3}{2} + \sqrt{p + \frac{1}{4}}\right) = \\ &= \frac{15}{4} + 4\sqrt{p + \frac{1}{4}} + \left(p + \frac{1}{4}\right) = p + 4 + 2\sqrt{4p+1}. \end{aligned}$$

Úloha 5.
Z možnosti rozdelenia na disjunktné trojice vyplýva $3 \mid n$. V každej trojici $\{a, b, a+b\}$ je súčet $2(a+b)$, teda párne číslo, preto musí byť párny aj súčet všetkých čísel od 1 do n, súčin $n(n+1)$ musí teda byť deliteľný štyrmi. Celkom máme, že číslo n musí byť tvaru $12k$ alebo $12k+3$, čomu z daných čísel vyhovujú iba $n = 3\,900$ a $n = 3\,903$.

V ďalšom odseku popíšeme konštrukciu, ako z vyhovujúceho rozkladu pre dané $n = k$ vytvoriť vyhovujúce rozklady pre $n = 4k$ a $n = 4k+3$. To nám zaručí, že rozklady pre

$n = 3\,900$ aj $n = 3\,903$ existujú, a to vďaka zostupnej postupnosti

$$3\,900 \to 975 \to 243 \to 60 \to 15 \to 3$$

(namiesto $3\,900$ možno začať aj číslom $3\,903$) a vďaka triviálnemu rozkladu pre $n = 3$ (z ktorého postupne zostrojíme rozklady pre $n = 15$, $n = 60$ atď. až pre $n = 3\,900$ resp. $n = 3\,903$).

Z vyhovujúceho rozkladu množiny $\{1, 2, \dots, k\}$ najskôr vyrobíme vyhovujúci rozklad množiny prvých k párnych čísel $\{2, 4, \dots, 2k\}$ (tak, že všetky čísla vo všetkých trojiciach pôvodného rozkladu vynásobíme dvoma). V prípade $n = 4k$ potom zvyšné čísla

$$\{1, 3, 5, \dots, 2k-1, 2k+1, 2k+2, \dots, 4k-1, 4k\}$$

rozdelíme na k trojíc $\{2j-1, 3k-j+1, 3k+j\}$, pričom $j = 1, 2, \dots, k$. Vidno ich v stĺpcoch tabuľky

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & \dots & 2k-3 & 2k-1 \\ 3k & 3k-1 & 3k-2 & \dots & 2k+2 & 2k+1 \\ 3k+1 & 3k+2 & 3k+3 & \dots & 4k-1 & 4k \end{pmatrix}.$$

V prípade $n = 4k+3$ zvyšné čísla

$$\{1, 3, 5, \dots, 2k-1, 2k+1, 2k+2, \dots, 4k+2, 4k+3\}$$

rozdelíme na $k+1$ trojíc $\{2j-1, 3k+3-j, 3k+j+2\}$, pričom $j = 1, 2, \dots, k+1$, tvorených stĺpcami tabuľky

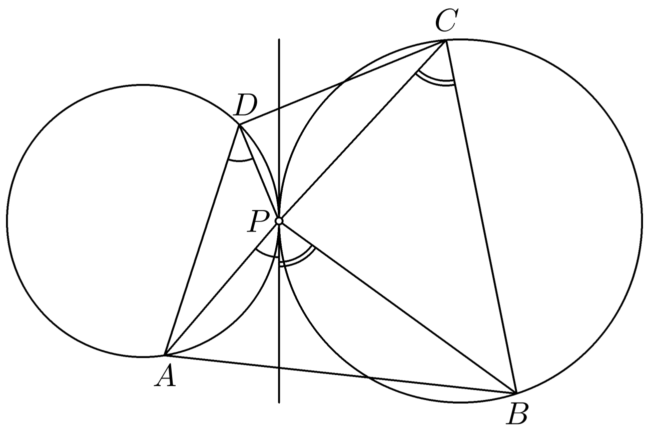
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & \dots & 2k-1 & 2k+1 \\ 3k+2 & 3k+1 & 3k & \dots & 2k+3 & 2k+2 \\ 3k+3 & 3k+4 & 3k+5 & \dots & 4k+2 & 4k+3 \end{pmatrix}.$$

Tým je dôkaz toho, že čísla $n = 3\,900$ a $n = 3\,903$ vyhovujú, ukončený.

Úloha 6.

Z vety o obvodových a úsekových uhloch vyplýva, že ak P je spoločný bod spomenutých kružníc, tak je zároveň aj bodom dotyku práve vtedy (obr. 31), keď

$$|\sphericalangle ADP| + |\sphericalangle BCP| = |\sphericalangle APB|. \tag{1}$$



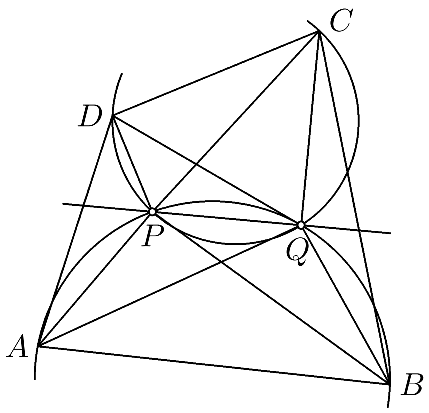
Obr. 31

Uvažujme teraz kružnice opísané trojuholníkom ABP a CDP a predpokladajme, že sa pretínajú ešte v ďalšom bode Q ($Q \neq P$).

Keďže bod A leží zvonka kružnice opísanej trojuholníku BCP, platí $|\sphericalangle BCP| + |\sphericalangle BAP| < 180°$. Preto aj bod C leží zvonka kružnice opísanej trojuholníku ABP. Analogicky leží aj bod D zvonka tejto kružnice. Odtiaľ vyplýva, že body P a Q ležia na rovnakom oblúku CD kružnice opísanej trojuholníku CDP.

Analogicky body P a Q ležia na rovnakom oblúku AB kružnice opísanej trojuholníku ABP. Bod Q teda leží buď vnútri uhla BPC, alebo vnútri uhla APD. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že bod Q leží vnútri uhla BPC (obr. 32). V tom prípade podľa predpokladu úlohy platí

$$|\sphericalangle AQD| = |\sphericalangle PQA| + |\sphericalangle PQD| = |\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle PCD| \leqq 90°. \tag{2}$$



Obr. 32

V tetivových štvoruholníkoch $APQB$ a $DPQC$ sú podľa predpokladu úlohy uhly pri vrcholoch A a D ostré, takže príslušné protiľahlé uhly pri vrchole Q sú tupé. Odtiaľ vyplýva, že bod Q leží nielen vnútri uhla BPC, ale dokonca vnútri trojuholníka BPC, čiže aj vnútri štvoruholníka $ABCD$.

Z vlastností uhlov oboch spomenutých tetivových štvoruholníkov teraz vyplýva

$$|\sphericalangle BQC| = |\sphericalangle PAB| + |\sphericalangle PDC|,$$

takže podľa predpokladu úlohy

$$|\sphericalangle BQC| \leqq 90°. \tag{3}$$

Keďže navyše $|\sphericalangle PCQ| = |\sphericalangle PDQ|$, dostávame podľa (1)

$$\begin{aligned} |\sphericalangle ADQ| + |\sphericalangle BCQ| &= |\sphericalangle ADP| + |\sphericalangle PDQ| + |\sphericalangle BCP| - |\sphericalangle PCQ| = \\ &= |\sphericalangle ADP| + |\sphericalangle BCP| = |\sphericalangle APB|. \end{aligned}$$

A keďže aj $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle AQB|$, vychádza

$$|\sphericalangle ADQ| + |\sphericalangle BCQ| = |\sphericalangle AQB|.$$

To však znamená, ako už vieme z úvodnej úvahy, že kružnice opísané trojuholníkom BCQ a DAQ sa dotýkajú v bode Q, čo odporuje nášmu počiatočnému predpokladu, že $Q \neq P$. Nezostáva teda iná možnosť ako tá, že obe kružnice opísané trojuholníkom ABP a CDP majú spoločný jediný bod P, pre ktorý podľa nerovností (2) a (3) navyše platí, že uhly APD a BPC nie sú tupé.

Uvažujme teraz polkruhy zostrojené nad stranami BC a DA „dovnútra“ štvoruholníka $ABCD$. Keďže uhly APD a BPC nie sú tupé, leží každý z oboch polkruhov celý vnútri zodpovedajúceho kruhu prislúchajúceho kružnici opísanej trojuholníku BQC, resp. AQD. A keďže sa obe kružnice zvonka dotýkajú, majú aj oba polkruhy zostrojené nad stranami BC a DA najviac jeden spoločný bod. Ak označíme M a N stredy strán BC a DA, vyplýva z toho nerovnosť $|MN| \geqq \frac{1}{2}(|BC| + |DA|)$.

Na druhej strane zrejme platí $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD})$, takže $|MN| \leqq \frac{1}{2}(|AB| + |CD|)$. Odtiaľ vychádza dokazovaná nerovnosť $|AB| + |CD| \geqq |BC| + |DA|$.

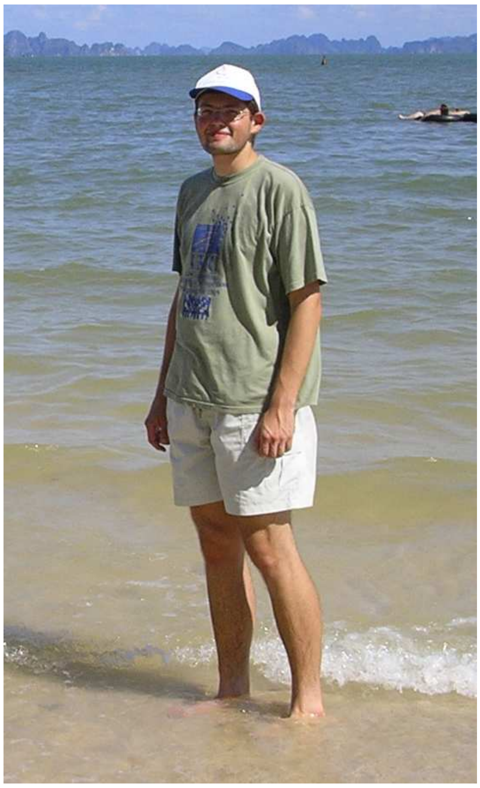
48. Medzinárodná matematická olympiáda

V dňoch 19. – 31. júla 2007 sa vo Vietname uskutočnil 48. ročník Medzinárodnej matematickej olympiády (IMO). Tejto populárnej intelektuálnej súťaže sa zúčastnil rekordný počet 520 žiakov z 93 štátov. Slovensko reprezentovali

Samuel Hapák, Gymnázium Grösslingová, Bratislava, 3. ročník,
Ondrej Mikuláš, Gymnázium B. S. Timravy, Lučenec, 4. ročník,
Tomáš Rusin, Gymnázium Alejová, Košice, 4. ročník,
Michal Szabados, ŠpMNDaG Skalická, Bratislava, 4. ročník,
Michal Spišiak, Gymnázium Grösslingová, Bratislava, 2. ročník,
Vladislav Ujházi, Gymnázium P. J. Šafárika, Rožňava, 3. ročník.

Delegáciu SR viedol doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc. (obr. 33 vľavo), predseda Slovenskej komisie MO (vedúci katedry KMAHI na fakulte PEDAS ŽU v Žiline), pedagogický vedúci bol Mgr. Ján Mazák (obr. 34), študent FMFI UK Bratislava a mimoriadne účinne pri oprave úloh pomohol v úlohe Observera aj Mgr. Peter Novotný (obr. 33 vpravo), doktorand na FMFI UK Bratislava.

Obr. 33



Obr. 34

Výsledky družstva SR sú uvedené v tabuľke. Štyria z našich získali bronzovú medailu a dvaja diplom Honorable Mention.

Meno	1	2	3	4	5	6	Súčet	Cena
Samuel Hapák	7	1	0	7	0	0	15	bronz
Ondrej Mikuláš	6	0	0	6	2	0	14	bronz
Tomáš Rusin	3	7	0	6	1	0	17	bronz
Michal Spišiak	7	1	0	0	2	0	10	HM
Michal Szabados	6	7	0	7	0	0	20	bronz
Vladislav Ujházi	0	1	0	7	2	0	10	HM

Obr. 35
(Zľava: V. Ujházi, T. Rusin, O. Mikuláš, S. Hapák, M. Szabados, M. Spišiak.)

IMO je dvojdňová súťaž. Každý z dvoch súťažných dní majú žiaci vyriešiť trojicu úloh a majú na to celkom 4,5 hodiny. Dve úlohy musia byť *ľahké*, dve *stredné* a dve *ťažké*. V šestici úloh musia byť zastúpené nasledovné štyri oblasti stredoškolskej matematiky: algebra, kombinatorika, geometria a teória čísel, pričom obvykle dva príklady sú z geometrie.

Príklady pre IMO môže organizátorom súťaže poslať v podstate ktokoľvek (obvykle do apríla). Organizátori potom zostavia skrátený zoznam (*shortlist*), ktorý obsahuje

6 – 10 príkladov z každej z tých oblastí, pričom sa snažia, aby boli zastúpené všetky tri stupne obťažnosti, aby bolo z čoho vyberať. Zostavenie shortlistu je zodpovedná práca a robia ju ľudia, ktorí majú s príkladmi IMO veľa skúseností. Samozrejme, úloha, ktorá nie je originálna alebo „pekná“, sa rýchlo vyradí, ale nikto nemôže poznať všetky úlohy…

Mali sme veľmi neskúsené družstvo – na IMO bol predtým len Samo Hapák. Okrem značnej únavy z dlhého cestovania asi práve neskúsenosť spôsobila, že nie všetci naši žiaci dosiahli na medailu. Náš najmladší účastník Miško Spišiak mal výpadok pri úlohe č. 4 (tzv. ľahká geometria) a Vlado Ujházi – víťaz celoštátneho kola MO – pri úlohe č. 1 (tzv. ľahká algebra). Ak by vydolovali zo svojich hláv vedomosti, ktoré tam nesporne majú, tak by medailu mali. A v neoficiálnej súťaži družstiev – o ktorej bude reč ďalej – by nás to posunulo asi o 10 miest vyššie. Obaja však majú možnosť k cennému diplomu Honorable Mention pridať na budúci rok v Madride aj medailu – samozrejme, ak si vybojujú v tom IMO-družstve účasť. Úloha č. 6 sa po súťaži ukázala ako príliš ťažká, pretože z možných $520 \times 7 = 3640$ bodov získali žiaci len $5 \times 7 + 2 \times 2 + 40 \times \times 1 = 79$ bodov, teda 2,17%.

Absolútnym víťazom s 37 bodmi sa stal Konstantin Matvejev (Rusko), druhé a tretie miesto si rozdelili s 36 bodmi Caili Shen (Čína) a Peter Scholze (Nemecko). Ako som spomenul, mali sme veľmi neskúsené družstvo, takže štyri bronzové medaile a dve čestné uznania sú pre našich žiakov primeraným výsledkom. Na tomto mieste sa však žiada dodať, že Samo Hapák sa zúčastnil medzinárodnej fyzikálnej olympiády (IPhO) v Iráne tesne pred IMO, takže musel odtiaľ pred slávnostným vyhlásením výsledkov odcestovať do Bratislavy, aby stihol spoločný odlet žiakov na IMO do Hanoja. Samozrejme, nemohol si tak vychutnať prebranie bronzovej medaily, ktorú získal. Situáciu som už dávno pred týmito súťažami navrhol riešiť prirodzeným spôsobom, ktorý napovedá geografia: Samo bude na IPhO až do konca, lebo z Iránu sa dá dostať do Hanoja oveľa rýchlejšie, ako z Bratislavy. Cesta Irán – Hanoj bola však drahšia, ako cesta Irán – Bratislava – Taipei (tento je od Hanoja ešte o takmer tri hodiny letu ďalej na východ) – Hanoj, takže Samo prišiel do Hanoja nielen vnútorne nespokojný s tým, že si nemohol vychutnať zaslúžený úspech na IPhO, ale určite aj unavený. Som presvedčený, že jeho výkon na IMO by bol oveľa lepší. V každom prípade úprimne ďakujem RNDr. Ľubovi Muchovi, pedagogickému vedúcemu IPhO-družstva za to, že bol ochotný z Iránu so Samom Hapákom odcestovať o deň skôr domov.

IMO je súťaž jednotlivcov, ale býva zvykom sledovať aj *neoficiálne* poradie družstiev, ktoré sa po mnohých rokoch zmenilo: 1. Rusko (184 bodov z 252 možných), 2. Čína (181 bodov), 3. – 4. Vietnam a Južná Kórea (168 bodov), 4. USA (155 bodov).

My sme skončili s 86 bodmi na 37. – 38. mieste, pričom zo štátov Európskej únie nás predbehlo len 6 krajín. Za nami sú 39. Slovinsko (85 bodov), 40. ČR (82 bodov), 41. Švédsko (81 bodov), 42. Rakúsko (80 bodov), 43. – 44. Nórsko a Francúzsko (79 bodov), 45. Belgicko (78 bodov), … a ešte napr. Argentína, Nový Zéland, Izrael, Holandsko, Estónsko, Švajčiarsko, Lotyšsko, Fínsko, Portugalsko, Írsko, Dánsko, Španielsko, … Okrem tabuľky, ktorú tu nájdete, možno pre získanie podrobnejších informácií odporučiť adresu *http://www.imo2007.edu.vn* alebo aj *http://imo-official.org.*

Por.	Štát	Z	S	B	$\sum$	Por.	Štát	Z	S	B	$\sum$
1.	Rusko	5	1	0	184	48.	Arménsko	0	1	1	73
2.	Čína	4	2	0	181		Macao	0	1	1	73
3.	Južná Kórea	2	4	0	168	50.	Izrael	0	0	3	71
	Vietnam	3	3	0	168		Nový Zéland	0	0	3	71
5.	USA	2	3	1	155	52.	Azerbajdžan	0	0	3	69
6.	Japonsko	2	4	0	154		Bosna a Hercegovina	0	1	0	69
	Ukrajina	3	1	2	154		Indonézia	0	1	0	69
8.	Severná Kórea	1	4	0	151	55.	Macedónsko	0	0	3	68
9.	Bulharsko	2	3	1	149	56.	Holandsko	0	0	1	65
	Taiwan	2	3	1	149	57.	Estónsko	0	0	1	64
11.	Rumunsko	1	4	1	146	58.	Albánsko	0	0	1	59
12.	Hongkong	0	5	1	143		Švajčiarsko	0	0	1	59
	Irán	1	3	2	143	60.	Lotyšsko	0	0	0	58
14.	Thajsko	1	3	2	133	61.	Fínsko	0	1	0	55
15.	Nemecko	1	3	1	132	62.	Portugalsko	0	0	1	52
16.	Maďarsko	0	5	0	129	63.	Írsko	0	0	1	51
17.	Turecko	1	2	2	124		Turkmenistan	0	0	0	51
18.	Poľsko	1	2	2	122	65.	Dánsko	0	0	1	50
19.	Bielorusko	1	1	4	119	66.	Španielsko	0	0	2	48
20.	Moldavsko	0	3	2	118	67.	Kirgizstan (5)	0	0	1	43
21.	Taliansko	1	1	3	116	68.	Južná Afrika	0	0	0	42
22.	Austrália	0	1	4	110	69.	Cyprus	0	0	0	41
23.	Srbsko	1	0	4	107	70.	Trinidad a Tobago	0	0	0	39
24.	Brazília	0	2	3	106	71.	Tadžikistan	0	0	1	37
25.	India	0	3	0	103	72.	Kostarika (5)	0	0	1	36
26.	Gruzínsko	1	1	1	102	73.	Island	0	0	0	35
27.	Kanada	0	1	3	98	74.	Ekvádor	0	0	1	34
28.	Kazachstan	0	1	3	95		Luxembursko (3)	0	0	1	34
	Veľká Británia	1	0	3	95		Malajzia	0	0	1	34
30.	Kolumbia	0	1	3	93		Salvádor (4)	0	0	0	34
31.	Litva	1	0	2	92	78.	Pakistan	0	0	1	32
32.	Peru	0	1	2	91		Paraguaj (4)	0	0	0	32
33.	Grécko	0	1	3	89	80.	Bangladéš (5)	0	0	0	31
34.	Mongolsko	0	2	1	88	81.	Maroko	0	0	0	28
	Uzbekistan	0	1	3	88	82.	Kambodža (4)	0	0	0	26
36.	Singapur	0	0	5	87	83.	Srí Lanka	0	0	0	25
37.	Mexiko	0	0	4	86	84.	Filipíny	0	0	0	21
	Slovensko	0	0	4	86	85.	Nigéria	0	0	0	20
39.	Slovinsko	0	0	5	85	86.	Čierna Hora (3)	0	0	0	17
40.	Česká republika	0	0	5	82	87.	Kuba (1)	0	0	1	16
41.	Švédsko	0	0	4	81	88.	Lichtenštajnsko (2)	0	0	1	14
42.	Rakúsko	0	1	3	80		Venezuela (3)	0	0	0	14
43.	Francúzsko	1	0	2	79	90.	Portoriko (3)	0	0	0	7
	Nórsko	0	1	1	79	91.	Saudská Arábia	0	0	0	5
45.	Belgicko	0	0	3	78	92.	Chile (4)	0	0	0	4
46.	Chorvátsko	0	0	2	76	93.	Bolívia (2)	0	0	0	2
47.	Argentína	0	1	1	75						

Dovolím si aj touto cestou v mene SK MO poďakovať firme CASIO, ktorá našej výprave už tretí rok darovala olympijské tričká.

Určite stojí za zmienku, že IMO je organizačne mimoriadne náročná, obrovská akcia a Vietnamci ju zvládli na vynikajúcej technickej aj spoločenskej úrovni. Na otvorení IMO bol predseda vlády spolu s ministrom školstva, na záverečnom ceremoniáli bol prezident, podpredseda vlády a samozrejme aj minister školstva. Všetky miesta, kde sa čo len raz vyskytli účastníci IMO, boli vyzdobené veľkým množstvom plagátov a pútačov. Tieto nás vítali dokonca aj na jednom prekrásnom malom ostrovčeku, na ktorý sme sa boli v zátoke Ha Long Bay loďou pozrieť.

Pre zaujímavosť uveďme rámcový program pobytu a stručný priebeh rokovania:

- 17. 7. cesta vlakom do Bratislavy, vybavenie nutnej agendy
- 18. 7. cesta autobusom do Viedne, 9:30 odlet cez Abu Dhabi a Taipei do Hanoja
- 19. 7. príchod na letisko Noi Bai v Hanoji, odtiaľ autobusom do Ha Long Bay, tam ubytovanie, večer samostatná práca členov Jury na príkladoch
- 20. 7. samostatná práca členov Jury na príkladoch, potom zasadnutie Jury
- 21. 7. výber príkladov (dve zasadnutia Jury medzi 9:00 a 21:00)
- 22. 7. výber príkladov, definitívna textácia, preklady a ich kontrola (tri zasadnutia Jury medzi 9:00 a 23:00); v tento deň bol po mnohých protestoch zrušený zákaz vychádzania z hotela
- 23. 7. zasadnutie Jury o bodovaní príkladov
- 24. 7. zasadnutie Jury 9:00 o bodovaní príkladov; podvečer slávnostné otvorenie 48. IMO v Hanoji
- 25. 7. zasadnutie Jury od 8:30 – odpovede na otázky študentov (1. súťažný deň); potom výlet loďou do zálivu; 22:45 – 3:30 príprava na koordináciu (čítanie vypracovania prvých 6×3 úloh našich žiakov)
- 26. 7. ráno zasadnutie Jury – odpovede na otázky študentov (2. súťažný deň); príprava na koordináciu – čítanie vypracovania 6×3 úloh z prvého a neskôr (v čase 22:30 – 3:15) čítanie 6×3 úloh z druhého dňa
- 27. 7. koordinácia úloh v poradí č. 5, 4, 3, 6 a príprava na koordináciu na ďalší deň
- 28. 7. koordinácia úloh č. 2 a 1; neskoro večer zasadnutie Jury – schválenie definitívnych výsledkov 48. IMO a spoločné zasadnutie Jury a IMO Advisory Board
- 29. 7. odchod z Ha Long Bay autobusmi, ubytovanie v Hanoji, prehliadka mesta
- 30. 7. prehliadka Van Phuc, popoludní záverečný ceremoniál, večer krátky banket
- 31. 7. budíček o 6:00, 8:20 odchod na letisko v Hanoji, odlet 10:35, a cez Taipei a Abu Dhabi do Viedne s príletom 1. augusta o 7:30, odtiaľ autobus do Bratislavy a potom autobus do Žiliny. Takže cesta od budíčka v Hanoji až po Žilinu trvala 36 hodín.

Usporiadateľmi ďalších IMO budú postupne Španielsko (2008), Nemecko (2009), Kazachstan (2010) a Holandsko (2011).

Vojtech Bálint

IMO pohľadom súťažiacich

Začalo to dosť nepríjemne. Už o piatej ráno sme museli vyraziť z Bratislavy, aby sme stihli takmer celodenný let s prestupom na Taiwane. Po príchode do Hanoja (hlavné mesto Vietnamu) nás čakalo srdečné prijatie nie len od organizátorov tejto súťaže, ale aj od takmer neznesiteľnej horúčavy, ktorá nás sprevádzala celý nasledujúci týždeň.

Každá krajina mala prideleného „guida“ (sprievodcu), ktorý sa o jej účastníkov staral počas celého pobytu. My sme schytali síce nie veľmi vysokú, ale o to sympatickejšiu Thou. Zo začiatku s nami viedla monológ, no po čase sme sa osmelili a celý večer sme sa s ňou rozprávali o krajine, o nej, o nás, atď. Vedeli ste, že vo Vietname je povinná mesačná vojenská služba aj pre ženy?

Ubytovaní sme boli v luxusnom hoteli na posteliach, ktoré boli síce dosť krátke (Vietnamci sú dosť nízki), ale za to asi o polovicu širšie ako tie naše. Po monumentálnom otváracom ceremoniáli sme išli na hotel poriadne si oddýchnuť pred prvým súťažným dňom. Po 4 a pol hodinách rátania sme už nepodnikali nič špeciálne, plne sme sa sústredili na ďalší deň, čakalo nás to isté.

Po skončení „rátacej“ časti nám poriadne odľahlo a mohli sme si plnými dúškami užiť zvyšok pobytu. Thoa zobrala celé slovenské družstvo okrem mňa na neoficiálnu exkurziu po hlavnom meste. Totižto sami sme nemohli vychádzať mimo hotel, pretože v uliciach mesta je extrémne nebezpečná dopravná situácia. Bohužiaľ, ja som s nimi nemohol ísť, pretože mi prišlo zle z miestnej stravy, ktorá bola predsa len dosť odlišná od tej našej. Na oplátku mi ostatní doniesli vodu z miestneho jazera. Povedali mi, že to je kivi-džús, pretože to tak naozaj vyzeralo. Ja chudák som chcel ochutnať, ale našťastie sa im podarilo vytrhnúť mi fľašku od úst.

Nasledujúce tri dni nás čakali úžasné exkurzie. Navštívili sme mnohé kultúrne, ale aj prírodné pamiatky. Zaujímavý bol aj náš presun medzi týmito miestami. Predstavte si kolónu vyše dvadsiatich ružových autobusov s policajným autom na čele. Mnohí miestni len otvárali ústa, pretože niečo také ešte nevideli. Všade nás vítali s úsmevom na tvári, Vietnamci vedia byť naozaj veľmi srdeční a vďační. Po exkurziách nás čakal záverečný ceremoniál, po ktorom niektorí z nás začali zbierať suveníry alebo vymieňať kontakty. Oplatilo sa to, doniesli sme si domov asi 1 a pol kila zahraničných mincí. Večer pred odchodom sme dopisovali posledné pohľadnice a balili veci, čakala nás cesta domov. Thoa si pri lúčení aj poplakala, naozaj, prežili sme s ňou strašne pekné chvíľky a kopu zábavy. Po prílete sme ešte napísali jednu pohľadnicu Thoi a obratom poslali späť. Potom sme prišli domov a hádajte, čo sme urobili ako prvé, ľahli sme si do postelí a spali.

Ondrej Mikuláš

Olympiáda v Hanoji bola udalosťou, na ktorú nikdy nezabudnem. S pribúdajúcim časom sa síce vytrácajú podrobnosti o tom, v akom poradí sa veci odohrali, zabúdajú sa negatívne dojmy a sklamania z najprv neznámeho a cudzieho prostredia. To, čo zostalo, je pocit nezabudnuteľnej atmosféry a skromnej veľkoleposti hosťujúcej krajiny – Vietnamskej socialistickej republiky.

Na začiatok mi nedá nespomenúť perfektne zvládnutú logistiku a prepravu do Hanoja, ktorú nám zabezpečilo Ministerstvo školstva SR. Na svojej ceste sme mali možnosť letmo zažiť Viedeň, Abu Dhabi, Taipei, a konečne Hanoj, Mesto na Veľkej rieke. Prvou vecou, ktorá tuzemca šokovala, bola neskutočne výrazná a náhla klimatická zmena. Po vystúpení z lietadla nás zasiahla horúčava štyridsiatich stupňov Celzia, suchý a prašný vzduch. Po absolvovaní colnej a vízovej kontroly sme sa dostali do rúk uvítacieho výboru s belasými vlajkami a následne sa nás ujala naša sprievodkyňa – študentka zahraničného obchodu Thoa Tran Thi Mai. Nízka žena s veselou mimikou a zvedavými čiernymi očami. Ubytovanie prebehlo hladko a pocit nájsť sa v trojhviezdičkovom hoteli La Tanh s perfektným vybavením, servisom, nevyčerpateľným množstvom pitnej a úžitkovej vody a bezvadnou klimatizáciou sa rovnal znovuzrodeniu. Pocit zadosťučinenia vystriedal pocit zvedavosti a s Thoou sme strávili pekný večer pri pestrej ponuke jedál a diskutovali sme o aspektoch života vo Vietname, o ľuďoch, o krajine, o budúcnosti a márne sme sa snažili rozlíšiť medzi štyrmi rôznymi zvukovými podobami hlásky „A“, a teda naučiť sa základné frázy na prežitie.

Na druhý deň nás Thoa zobrala von. Spoznali sme chudobné časti Hanoja, životnú rutinu jeho bežných obyvateľov, problémy dopravy, ruchu a každodenného obstarávania svojho priehrštia ryže. Ochutnali sme vietnamskú zmrzlinu, všelijaké špeciality a prehrabávali sa v množstvách lacných a umelecky krásnych suvenírov. Otvárací ceremoniál popoludní bol demonštráciou srdečnosti, pohostinnosti a bohatej vietnamskej tradície a z krásnych choreografických a hudobných predstavení mi dnes zostal už len pocit skutočného splynutia s vietnamskou kultúrou. Dojem bol o to krajší, že sme boli prijatí v Národnom kultúrnom centre, oficiálnom reprezentatívnom stredisku mesta Hanoj. Večer ma prekvapil monzún, ktorý zniesol na mesto teplý upokojujúci dáždik a krásne červené blesky niekde nad morom.

Z nasledujúcich dvoch dní – súťažných dní – si veľa nepamätám. Bol to môj prvý zahraničný zážitok a taktiež prvá súťaž v medzinárodnom meradle. Pod vplyvom klimatického šoku, osobných ťažkostí a zaiste aj náročných úloh som ich prežíval v napätí a súťaživej atmosfére, pričom som sa zoznámil s ďalšími súťažiacimi a mohol porovnať naše, európske myslenie s jeho analógiami vo svete. Priznám sa, po odovzdaní riešení problémov (a ich fragmentov) v druhý súťažný deň mi odpadol veľký kameň zo srdca a (súdiac aj o ostatných kolegoch) podvolili sme sa už ľahšej, pokojnejšej turistickej nálade. Po uplynutí povinného informačného embarga sa k nám prihlásil jeden veľmi milý Vietnamec so zanedbanou, ale distingvovanou češtinou. Bol to splnomocnenec Ministerstva školstva, kultúry a športu a k bývalému Československu ho viazali jeho študentské časy. Pod jeho ochranou sme požívali skutočne vynikajúcu starostlivosť zo strany personálu, vojenskej eskorty ako aj organizátorov. Ďalšie prekvapenie nám prichystal šéf-čašník, ktorý začal spisovať požiadavky na akékoľvek jedlá. Po chvíľke krkolomnej anglickej komunikácie sme si spomenuli na *scrambled eggs*, a na ďalší deň nás čakali hrušky, hrozno, lekvár a množstvo ďalších potravín, ktoré pohladia na duši i na žalúdku.

Tri dni exkurzií ubehli neuveriteľným tempom. Hoci, stojac v dopravných zápchach, sme občas mali dlhú chvíľu, možno aj závrate z masy ľudí navôkol, naše destinácie skutočne stáli za to. Plavba loďou pomedzi bralá zálivu Ha Long, návšteva najväčšej pobrežnej jaskyne na indonézskom polostrove, fabrika na keramiku, biosférická rezervácia plná inteligentných a zvedavých primátov ale aj náhodné zastavenie uprostred tak ťažko skúšanej agrárnej zeme Vietnamu. Popritom sme zopakovali naše túlanie sa po hlavnom meste, tentoraz v noci. Vzniklo množstvo pozoruhodných fotiek a záberov, ktoré nám toto mesto budú navždy pripomínať. Originálnym zážitkom je taktiež konzumácia žmýkanej šťavy z cukrovej trstiny a nekončiace sa hry s vejárom a tradičnými ryžovými klobúkmi. Proste atmosféra, ktorá sa dá zažiť len tam, v správnom čase a na správnom mieste.

Záverečný ceremoniál sa niesol v znamení víťazov, ktorými boli tak medailisti (medzi inými aj štyria slovenskí), všetci zúčastnení, ako aj Vietnamská republika a jej funkčné orgány. Na podujatí sa zúčastnili najvyššie politické autority (prezident, generálny tajomník, predseda vlády, primátor mesta, guvernér dištriktu, predstavitelia ministerstiev, akademických a vedeckých organizácií a mnoho ďalších). Nasledovalo symbolické odovzdanie olympijskej vlajky reprezentantom Španielska, krásne flamenco, srdečné blahopriania a želania, a potom poloformálny rozlúčkový banket. Po dlhej noci v kruhu známych sme nanešťastie museli včasráno toto krásne miesto opustiť, a v lietadle sme sa usilovne pustili do počítania domáceho kola kategórie A, aby sme mohli zažiť o rok princa Felipeho s princeznou Letíciou osobne – ale o tom hádam nabudúce.

Vladislav Ujházi

Zadania úloh IMO

Úloha 1.
Dané sú reálne čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$. Pre každé i $(1 \leqq i \leqq n)$ definujme

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leqq j \leqq i\} - \min\{a_j : i \leqq j \leqq n\}.$$

Nech

$$d = \max\{d_i : 1 \leqq i \leqq n\}.$$

(a) Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla $x_1 \leqq x_2 \leqq \dots \leqq x_n$ platí nerovnosť

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leqq i \leqq n\} \geqq \frac{d}{2}. \qquad (*)$$

(b) Ukážte, že existujú také reálne čísla $x_1 \leqq x_2 \leqq \dots \leqq x_n$, že v $(*)$ nastane rovnosť.

(Nový Zéland)

Úloha 2.
Uvažujme päť takých bodov A, B, C, D, E, že $ABCD$ je rovnobežník a štvoruholník $BCED$ je tetivový. Priamka l prechádza bodom A, pričom pretína úsečku DC v jej vnútornom bode F a priamku BC v bode G. Predpokladajme, že $|EF| = |EG| = |EC|$. Dokážte, že priamka l je osou uhla DAB.

(Luxembursko)

Úloha 3.
Niektorí účastníci matematickej súťaže sú priatelia. Priateľstvo je vzájomné. Skupinu súťažiacich nazveme *klika*, ak každí dvaja z nich sú priatelia. (Špeciálne, ľubovoľná skupina pozostávajúca z menej ako dvoch súťažiacich je klika.) Počet členov kliky nazveme jej *rozmerom*.

Vieme, že najväčší rozmer kliky pozostávajúcej z účastníkov súťaže je párne číslo. Dokážte, že všetkých súťažiacich možno rozsadiť do dvoch miestností tak, aby najväčší rozmer kliky v jednej miestnosti sa rovnal najväčšiemu rozmeru kliky v druhej miestnosti.

(Rusko)

Úloha 4.
Os uhla BCA trojuholníka ABC pretína jeho opísanú kružnicu v bode R rôznom od bodu C, os strany BC v bode P a os strany AC v bode Q. Stred strany BC označme K a stred strany AC označme L. Dokážte, že obsahy trojuholníkov RPK a RQL sa rovnajú.

(Česká rep.)

Úloha 5.
Kladné celé čísla a, b sú také, že číslo $(4a^2 - 1)^2$ je deliteľné $4ab - 1$. Dokážte, že $a = b$.

(Veľká Británia)

Úloha 6.
Nech n je kladné celé číslo. Uvažujme množinu

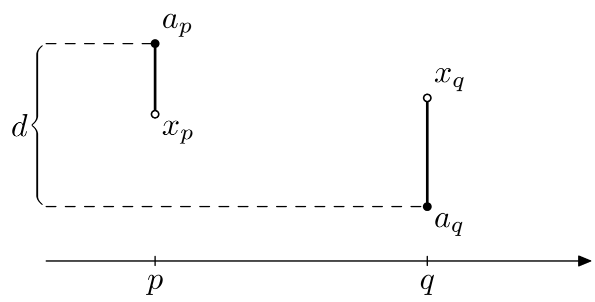
$$S = \{(x, y, z) \ : \ x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, \ x + y + z > 0\}$$

pozostávajúcu z $(n+1)^3 - 1$ bodov trojrozmerného priestoru. Určte najmenší možný počet rovín, ktorých zjednotenie obsahuje všetky body z S, ale neobsahuje bod $(0, 0, 0)$.

(Holandsko)

Riešenia úloh IMO

Úloha 1.
(a) Každé z čísel $d_1, d_2, \dots, d_n$, a teda aj najväčšie z nich d, je definované ako rozdiel niektorých dvoch členov postupnosti $a_1, a_2, \dots, a_n$. Existujú teda indexy p, q také, že $d = a_p - a_q$, pričom navyše $p \leqq q$. (Tieto indexy nemusia byť určené jednoznačne.)



Obr. 36

Nech $x_1 \leqq x_2 \leqq \dots \leqq x_n$ sú ľubovoľné reálne čísla. Na dôkaz časti (a) stačí pracovať s hodnotami x_p, x_q (obr. 36). Máme totiž $x_q \geqq x_p$, a teda

$$(a_p - x_p) + (x_q - a_q) = (a_p - a_q) + (x_q - x_p) \geqq a_p - a_q = d.$$

Preto platí aspoň jedna z nerovností $a_p - x_p \geqq \frac{d}{2}$, $x_q - a_q \geqq \frac{d}{2}$, odkiaľ dostávame

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leqq i \leqq n\} \geqq \max\{|x_p - a_p|, |x_q - a_q|\} \geqq \max\{a_p - x_p, x_q - a_q\} \geqq \frac{d}{2}.$$

(b) Položme

$$x_1 = a_1 - \frac{d}{2} \qquad \text{a} \qquad x_k = \max\left\{x_{k-1}, a_k - \frac{d}{2}\right\} \quad \text{pre } 2 \leqq k \leqq n.$$

Zrejme platí $x_1 \leqq x_2 \leqq \dots \leqq x_n$. Ukážeme, že pre takto zvolené hodnoty x_i nastane v $(*)$ vždy rovnosť. Stačí ukázať, že pre každé $i = 1, 2, \dots, n$ platí $|x_i - a_i| \leqq \frac{d}{2}$ (rovnosť potom platí vďaka výsledku z časti (a), alebo aj bez toho, keďže $|x_1 - a_1| = \frac{d}{2}$).

Priamo z definície hodnoty x_i máme $x_i - a_i \geqq -\frac{d}{2}$. Ešte dokážeme, že $x_i - a_i \leqq \frac{d}{2}$. Nech $j \leqq i$ je najmenší index, pre ktorý $x_i = x_j$. Ak $j = 1$, tak $x_j = a_j - \frac{d}{2}$; ak $j \geqq 2$, tak $x_{j-1} < x_j$, čiže tiež $x_j = a_j - \frac{d}{2}$. Máme teda

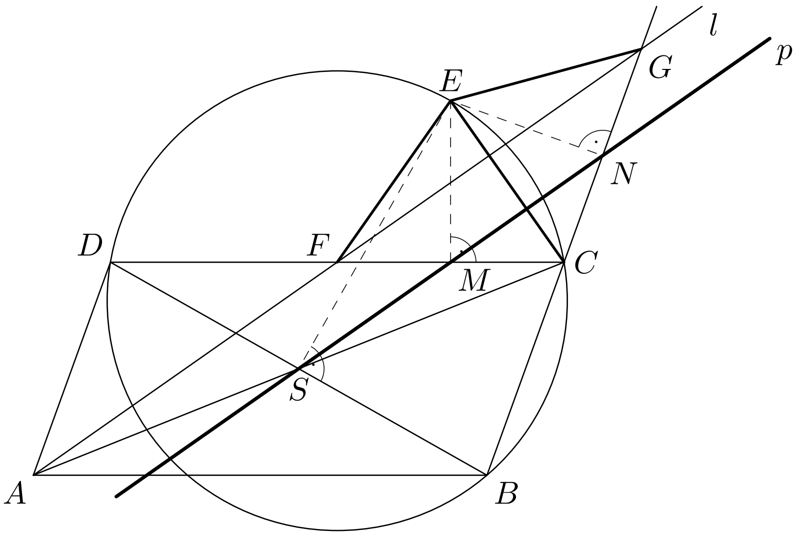
$$x_i = x_j = a_j - \frac{d}{2}.$$

Z definície hodnoty d samozrejme vyplýva $a_j - a_i \leqq d$. Spolu dostávame

$$x_i - a_i = a_j - \frac{d}{2} - a_i \leqq d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}.$$

Ukázali sme, že pre každé $i = 1, 2, \dots, n$ platí $-\frac{d}{2} \leqq x_i - a_i \leqq \frac{d}{2}$, teda naozaj $|x_i - a_i| \leqq \frac{d}{2}$.

Úloha 2.
Označme postupne S, M, N stredy úsečiek CA, CF, CG. Zrejme tieto tri body ležia na jednej priamke, ktorá je obrazom priamky l v rovnoľahlosti so stredom C a koeficientom $\frac{1}{2}$. Označme ju p. Úsečky EM, EN sú výškami rovnoramenných trojuholníkov EFC, ECG, sú teda kolmé postupne na priamky CD, BC. Takže priamka p je Simsonovou priamkou[1] pre bod E a trojuholník BCD.

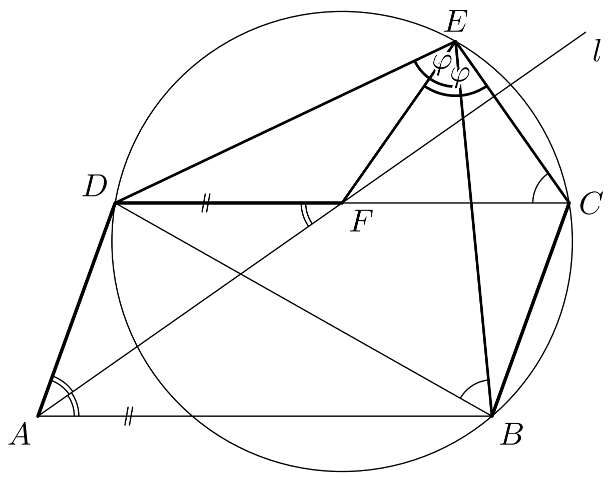


Obr. 37

Uhlopriečky v rovnobežníku sa rozpoľujú, preto bod S je stredom úsečky BD, a keďže leží na Simsonovej priamke p, musí byť zároveň pätou kolmice spustenej z bodu E na stranu BD (obr. 37). Bod E je teda nutne stredom oblúka BD kružnice opísanej tetivovému štvoruholníku $BCED$ a platí $|ED| = |EB|$.

[1] Veta o Simsonovej priamke hovorí, že päty kolmíc spustených z ľubovoľného bodu Q opísanej kružnice daného trojuholníka XYZ na strany tohto trojuholníka ležia na jednej priamke; uvedená priamka sa nazýva Simsonova priamka pre bod Q a trojuholník XYZ.

Z obvodových uhlov nad tetivou ED máme $|\sphericalangle DBE| = |\sphericalangle DCE|$. Takže rovnoramenné trojuholníky DBE, FCE sú podobné (ich ramená EB, EC zvierajú so základňami DB, FC rovnaké uhly, obr. 38) a môžeme označiť $|\sphericalangle DEB| = |\sphericalangle FEC| = \varphi$. V otočení okolo bodu E o uhol φ sa D sa zobrazí na B a F na C, preto $|DF| = |BC|$.



Obr. 38

Zároveň však $|BC| = |AD|$, odkiaľ vyplýva, že trojuholník AFD je rovnoramenný. Z toho s využitím zhodnosti striedavých uhlov dostávame

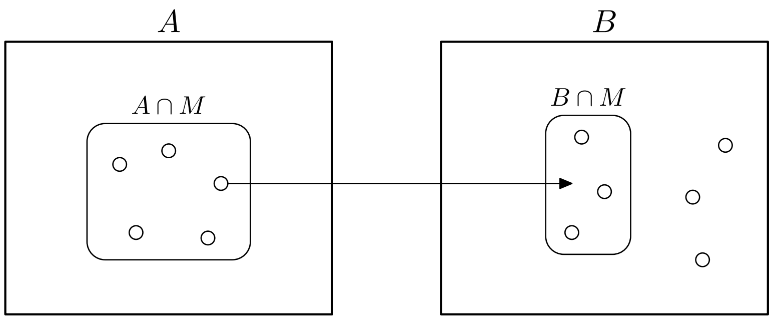
$$|\sphericalangle DAF| = |\sphericalangle DFA| = |\sphericalangle FAB|,$$

teda priamka l je naozaj osou uhla DAB.

Úloha 3.
Uvedieme algoritmus rozdelenia účastníkov do miestností. Dve miestnosti, do ktorých budeme účastníkov rozdeľovať, označme A a B. Začneme s určitým rozdelením a budeme ho postupne upravovať posielaním účastníkov z jednej miestnosti do druhej. Počas algoritmu budeme označovať A, B množiny účastníkov, ktorí sú práve v daných miestnostiach a $c(A)$, $c(B)$ veľkosti najväčších klík v príslušných miestnostiach.

1. krok. Nech $2m$ je rozmer najväčšej kliky a M je jedna z klík s týmto rozmerom, t. j. $|M| = 2m$. Všetkých členov z M dajme do miestnosti A a všetkých ostatných do miestnosti B. Zrejme platí $c(A) = |M| \geqq c(B)$.

2. krok. Kým platí $c(A) > c(B)$, posielame účastníkov po jednom z A do B (obr. 39). (Ak $c(A) > c(B)$, miestnosť A určite nie je prázdna.)



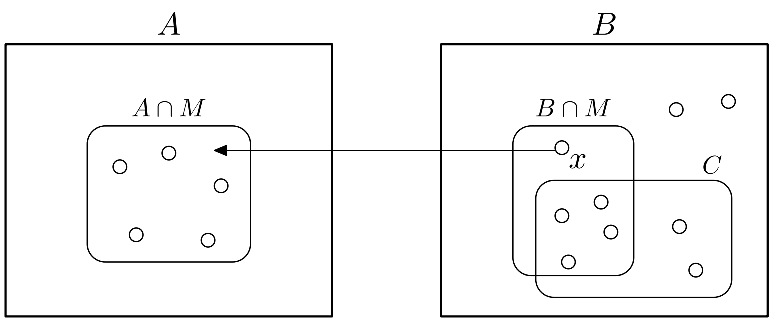
Obr. 39

Po každej zmene sa takto $c(A)$ zmenší o 1 a $c(B)$ zväčší nanajvýš o 1. Takže na konci budeme mať $c(A) \leqq c(B) \leqq c(A) + 1$. Zrejme bude platiť aj $c(A) = |A| \geqq m$, inak by totiž bolo v B aspoň $m+1$ členov z M a v A nanajvýš $m-1$ členov z M, teda by bolo $c(B) - c(A) \geqq (m+1) - (m-1) = 2$.

3. krok. Nech $k = c(A)$. Ak $c(B) = k$, ukončíme rozdeľovanie.

Ak sme dosiahli $c(A) = c(B) = k$, našli sme požadované rozdelenie. Vo všetkých ostatných prípadoch máme $c(B) = k + 1$. Vieme tiež, že $k = |A| = |A \cap M| \geqq m$ a $|B \cap M| \leqq m$.

4. krok. Ak existuje účastník $x \in B \cap M$ a klika $C \subset B$ taká, že $|C| = k+1$ a $x \notin C$, tak pošleme x do miestnosti A a ukončíme rozdeľovanie (obr. 40).

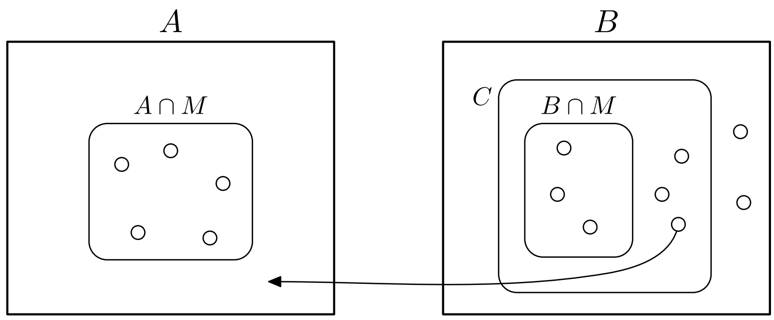


Obr. 40

Po poslaní x späť do A budeme v A mať $k+1$ členov z M, teda $c(A) = k+1$. Keďže $x \notin C$, $c(B) = |C|$ sa nezmenší, t. j. budeme mať $c(A) = c(B) = k + 1$.

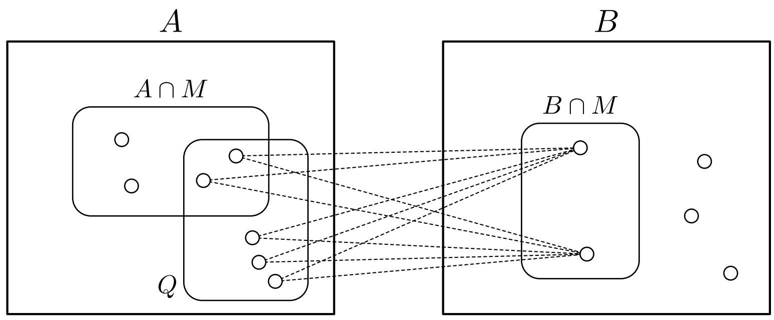
Ak účastník x spĺňajúci uvedené podmienky neexistuje, tak v miestnosti B každá klika s rozmerom $k + 1$ obsahuje ako podmnožinu celý prienik $B \cap M$.

5. krok. Kým platí $c(B) = k + 1$, zvolíme niektorú kliku $C \subset B$ s rozmerom $k + 1$ a pošleme jedného člena z $C \setminus M$ do miestnosti A (obr. 41). (Keďže $|C| = k + 1 > m \geqq$ $\geqq |B \cap M|$, množina $C \setminus M$ nemôže byť prázdna.)



Obr. 41

Zakaždým, keď pošleme jedného účastníka z B do A, zmenší sa $c(B)$ nanajvýš o 1. Na konci tohto kroku teda budeme mať $c(B) = k$. V miestnosti A máme kliku $A \cap M$ veľkosti $|A \cap M| = k$, čiže $c(A) \geqq k$. Dokážeme, že v A nie je klika s väčším rozmerom. Nech $Q \subset A$ je ľubovoľná klika. Ukážeme, že $|Q| \leqq k$. V miestnosti A, a špeciálne aj



Obr. 42

v množine Q, môžu byť dva typy účastníkov:

- Členovia M; keďže M je klika, sú to priatelia so všetkými členmi z $B \cap M$.
- Účastníci, ktorých sme do A poslali v 5. kroku; každý z nich bol v klike, ktorá obsahovala $B \cap M$, teda aj títo sú priatelia so všetkými členmi z $B \cap M$.

Takže všetci členovia Q sú priateľmi so všetkými členmi z $B \cap M$ (obr. 42). Množiny Q a $B \cap M$ sú kliky, takže aj $Q \cup (B \cap M)$ je klika. Keďže M je klika s najväčším rozmerom, máme

$$|M| \geqq |Q \cup (B \cap M)| = |Q| + |B \cap M| = |Q| + |M| - |A \cap M|,$$

odkiaľ $|Q| \leqq |A \cap M| = k$.

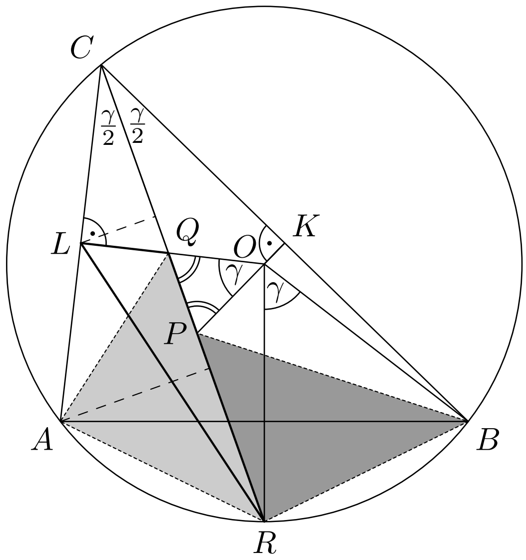
Po 5. kroku teda dostaneme $c(A) = c(B) = k$.

Úloha 4.

Ak $|AC| = |BC|$, trojuholník ABC je rovnoramenný, trojuholníky RPK, RQL sú súmerne združené podľa osi CR a zadané tvrdenie je triviálne. Ďalej bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $|AC| < |BC|$. Označme O stred kružnice opísanej trojuholníku ABC a γ veľkosť uhla ACB. Z pravouhlých trojuholníkov CLQ a CKP máme

$$|\sphericalangle OQP| = |\sphericalangle LQC| = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}, \qquad |\sphericalangle OPQ| = |\sphericalangle KPC| = 90^\circ - \frac{\gamma}{2},$$

teda uhly OQP, OPQ majú rovnakú veľkosť. Takže trojuholník OQP je rovnoramenný a ľahko dopočítame, že veľkosť jeho tretieho uhla, ktorý zvierajú zhodné ramená OQ, OP, je γ (obr. 43).



Obr. 43

Z vlastnosti stredového a obvodového uhla dostávame

$$|\sphericalangle AOR| = 2|\sphericalangle ACR| = \gamma, \qquad |\sphericalangle ROB| = 2|\sphericalangle RCB| = \gamma.$$

Navyše samozrejme $|AO| = |RO| = |BO|$. Uvažujme otočenie okolo bodu O o uhol γ. Z uvedeného vyplýva, že v tomto otočení sa Q zobrazí na P, A na R a R na B. Takže trojuholníky QAR, PRB sú zhodné a majú aj rovnaké obsahy.

Trojuholníky RQL, RQA majú spoločnú stranu RQ, pomer ich obsahov je teda rovný pomeru dĺžok ich výšok na stranu RQ. Keďže L je stred strany CA, tento pomer je zrejme $1 : 2$. Podobný vzťah dostaneme pre trojuholníky RPK, RPB. Spolu dostávame

$$S_{RQL} = \tfrac{1}{2} S_{RQA} = \tfrac{1}{2} S_{RPB} = S_{RPK}.$$

Úloha 5.

Dvojicu (a, b) prirodzených čísel nazveme *zlá*, ak $4ab - 1 \mid (4a^2 - 1)^2$. Inak povedané, ak (a, b) je zlá dvojica, tak existuje také prirodzené číslo k, že $k(4ab - 1) = (4a^2 - 1)^2$. Po jednoduchej úprave dostaneme

$$4a(bk - 4a^3 + 2a) - 1 = k.$$

Označme $c = bk - 4a^3 + 2a$. Zrejme c je celé, a vzhľadom na rovnosť $k + 1 = 4ac$ musí byť aj kladné. A keďže $k = 4ac - 1$ je deliteľom čísla $(4a^2 - 1)^2$, dvojica (a, c) je zlá. Navyše ak $a < b$, tak $4a^2 - 1 < 4ab - 1$, čiže aj $(4a^2 - 1)^2 < (4ab - 1)(4a^2 - 1)$, a preto

$$4ac - 1 = k = \frac{(4a^2 - 1)^2}{4ab - 1} < 4a^2 - 1.$$

Odtiaľ máme $c < a$. Ku každej zlej dvojici (a, b) s vlastnosťou $a < b$ teda existuje zlá dvojica (a, c) s vlastnosťou $c < a$.

Ak chápeme výraz $4ab-1$ ako lineárny dvojčlen v premennej a, postupným vydelením mnohočlena $(4a^2-1)^2 = 16a^4 - 8a^2 + 1$ uvedeným dvojčlenom (a prenásobením číslom $16b^4$, aby sme sa vyhli zlomkom) dostaneme

$$16b^4(4a^2-1)^2 = (4ab-1)(64a^3b^3 + 16a^2b^2 - 32ab^3 + 4ab - 8b^2 + 1) + (4b^2-1)^2.$$

Z tejto identity priamo vyplýva, že ak $4ab - 1 \mid (4a^2-1)^2$, tak aj $4ab - 1 \mid (4b^2-1)^2$. Teda ak (a, b) je zlá dvojica, tak aj (b, a) je zlá dvojica.

Predpokladajme že existuje nejaká zlá dvojica rôznych čísel. Potom existuje aj dvojica (a, b) s vlastnosťou $a \neq b$, v ktorej a je najmenšie možné.

Ak $a < b$, podľa prvého odseku existuje $c < a$ také, že dvojica (a, c) je zlá, a podľa druhého odseku je potom aj dvojica (c, a) zlá, čo je v spore s minimálnosťou a.

Ak $a > b$, tak podľa druhého odseku je aj dvojica (b, a) zlá a podľa prvého odseku existuje $c < b < a$ také, že dvojica (b, c) je zlá. Potom podľa druhého odseku je aj dvojica (c, b) zlá, čo je opäť v spore s minimálnosťou a.

Záver. Pre každú zlú dvojicu (a, b) platí $a = b$.

Úloha 6.

Najmenší možný počet rovín je $3n$. Ľahko nájdeme $3n$ rovín, ktoré spĺňajú zadané podmienky. Môžeme napríklad zobrať roviny s rovnicami $x = i$, $y = i$, $z = i$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Iným vyhovujúcim príkladom sú roviny s rovnicami $x + y + z = k$ pre $k = 1, 2, \ldots 3n$. Ukážeme, že menej ako $3n$ rovín nestačí. Dokážeme najskôr pomocné tvrdenie.

Lema. Nech $P(x_1, \ldots, x_k)$ je nenulový polynóm k premenných. Ak $P(x_1, \ldots, x_k) = 0$ pre ľubovoľné $x_1, \ldots, x_k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ také, že $x_1 + \cdots + x_k > 0$ a $P(0, \ldots, 0) \neq 0$, tak $\deg P \geqq kn$. (Pod $\deg P$ rozumieme *stupeň* polynómu P, t. j. exponent najvyššej mocniny x vo výraze $P(x, \ldots, x)$.)

Lemu dokážeme matematickou indukciou vzhľadom na k. Pre $k = 1$ jej platnosť zabezpečí známe tvrdenie. Podľa neho, ak má nenulový polynóm jednej premennej n koreňov (v našom prípade by koreňmi boli čísla $1, 2, \ldots, n$), tak má stupeň aspoň n.

Predpokladajme, že lema platí pre $k = m$. Dokážeme, že potom platí aj pre $k = m+1$. Kvôli prehľadnosti označme $y = x_{m+1}$. Keď chápeme P ako polynóm v premennej y, môžeme ho vydeliť polynómom $Q(y) = y(y-1)\cdots(y-n)$. Pri delení dostaneme ako zvyšok polynóm R. Presnejšie,

$$P(x_1, \ldots, x_m, y) = Q(y) \cdot S(x_1, \ldots, x_m, y) + R(x_1, \ldots, x_m, y),$$

kde $\deg_y R \leqq n$ (t. j. stupeň zvyšku R, keď ho chápeme ako polynóm v jednej premennej y, je menší ako stupeň polynómu Q). Keďže $Q(y) = 0$ pre $y = 0, 1, \ldots, n$, máme $R(x_1, \ldots, x_m, y) = P(x_1, \ldots, x_m, y)$ pre ľubovoľné $x_1, \ldots, x_m, y \in \{0, 1, \ldots, n\}$, čiže R spĺňa podmienky lemy. Zrejme $\deg R \leqq \deg P$, stačí teda dokázať, že $\deg R \geqq (m+1)n$.

Rozpíšme R podľa mocnín y:

$$R(x_1,\dots,x_m,y)=R_n(x_1,\dots,x_m)y^n+R_{n-1}(x_1,\dots,x_m)y^{n-1}+\dots+R_0(x_1,\dots,x_m).$$

Ukážeme, že na polynóm $R_n(x_1,\dots,x_m)$ môžeme použiť indukčný predpoklad.

Uvažujme polynóm $T(y)=R(0,\dots,0,y)$ stupňa nanajvýš n. Tento polynóm má n koreňov $y=1,2,\dots,n$. Na druhej strane, $T(y)$ nie je konštantný nulový polynóm, lebo $T(0)\neq 0$. Teda $\deg T=n$ a jeho vedúci koeficient $R_n(0,\dots,0)$ je nenulový.

Ak zoberieme ľubovoľné čísla $a_1,\dots,a_m\in\{0,1,\dots,n\}$, pričom $a_1+\dots+a_m>0$, a dosadíme $x_i=a_i$ do $R(x_1,\dots,x_m,y)$, dostaneme polynóm v premennej y. Tento polynóm je nulový vo všetkých bodoch $y=0,1,\dots,n$ (t. j. má aspoň $n+1$ koreňov) a má stupeň nanajvýš n. Preto musí byť nulový, čiže $R_i(a_1,\dots,a_m)=0$ pre všetky $i=0,1,\dots,n$. Špeciálne máme $R_n(a_1,\dots,a_m)=0$.

Polynóm $R_n(x_1,\dots,x_m)$ teda spĺňa predpoklady lemy a podľa indukčného predpokladu dostávame $\deg R_n\geqq mn$, odkiaľ

$$\deg P\geqq\deg R\geqq\deg R_n+n\geqq(m+1)n.$$

Teraz už ľahko dokončíme riešenie. Predpokladajme, že máme N rovín pokrývajúcich všetky body z S, ale neobsahujúcich bod $(0,0,0)$. Nech všeobecné rovnice týchto rovín sú $a_ix+b_iy+c_iz+d_i=0$ (pre $i=1,2,\dots,N$). Uvažujme polynóm

$$P(x,y,z)=(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)\cdot(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)\cdot\ldots\cdot(a_Nx+b_Ny+c_Nz+d_N),$$

ktorého stupeň je zrejme N. Tento polynóm spĺňa $P(x_0,y_0,z_0)=0$ pre ľubovoľné $(x_0,y_0,z_0)\in S$ a $P(0,0,0)\neq 0$. Podľa dokázanej lemy teda $N=\deg P\geqq 3n$.

1. Stredoeurópska matematická olympiáda

V dňoch 20. – 26. 9. 2007 sa v Rakúsku v meste Eisenstadt v srdci Burgenlandu uskutočnil prvý ročník Stredoeurópskej matematickej olympiády (MEMO). Zúčastnilo sa ho 40 žiakov stredných škôl zo siedmich krajín. Každá krajina mohla vyslať najviac 6 súťažiach. Slovensko reprezentovali

Miroslav Baláž, Gymnázium arm. gen. L. Svobodu, Humenné, 4. ročník,
Tomáš Kocák, Gymnázium Poštová, Košice, 4. ročník,
Jakub Köry, Gymnázium J. A. Raymana, Prešov, 4. ročník,
Martin Melicherčík, Gymnázium Párovská, Nitra, 4. ročník,
Peter Ondrúška, SPŠ Dubnica nad Váhom, 4. ročník,
Marián Šagát, Gymnázium Školská, Považská Bystrica, 4. ročník.

Vedúcim slovenského družstva bol Mgr. Peter Novotný (vedecký asistent na FMFI UK Bratislava), zástupcu vedúceho a pedagogický dozor vykonával Mgr. Ján Mazák (doktorand na FMFI UK Bratislava).

Jedným z dôvodov vzniku novej súťaže (ktorá vznikla rozšírením rakúsko-poľskej matematickej súťaže) bolo umožniť účasť na medzinárodnom podujatí mladším študentom, ktorí sa neprebojovali do družstva na IMO, ale v domácej súťaži preukázali svoj talent. V nasledujúcom ročníku tak budú mať výborné skúsenosti, ktoré budú môcť zužitkovať aj na IMO (v prípade, že sa im podarí do IMO-družstva prebojovať).

Samotná súťaž sa konala cez víkend na miestnom gymnáziu a mala dve časti: súťaž jednotlivcov a súťaž družstiev. Súťaž jednotlivcov prebiehala v sobotu 22. 9. v dopoludňajších hodinách. Každý zo súťažiacich riešil samostatne počas piatich hodín štyri úlohy, ktoré pokrývali rovnaké témy ako na IMO (algebra, kombinatorika, geometria, teória čísel). Za každú úlohu bolo možné získať maximálne 8 bodov. Súťaž družstiev sa uskutočnila v nedeľu za rovnakých podmienok s jediným rozdielom: žiaci z každej krajiny pracovali na riešeniach štvorice úloh spoločne (každá krajina v inej miestnosti) a odovzdávali ku každej úlohe len jedno riešenie.

V súťaži jednotlivcov sme získali tri medaily (jednu striebornú, dve bronzové). Výsledky družstva SR sú uvedené v prvej tabuľke.

Meno	1	2	3	4	Súčet	Cena
Miroslav Baláž	1	0	8	6	15	striebro
Tomáš Kocák	0	8	1	1	10	bronz
Jakub Köry	0	0	0	5	5	
Martin Melicherčík	1	0	1	7	9	bronz
Peter Ondrúška	0	3	1	0	4	
Marián Šagát	1	0	0	0	1	

Na MEMO sa zúčastňujú iba stredoeurópske krajiny. Oproti IMO tak majú súťažiaci drobnú „nevýhodu“ – chýbajú účastníci z krajín s malou tradíciou a skúsenosťami, ktorí zväčša nemajú ambície získať medailu. Stredoeurópske krajiny sú veľmi vyrovnané a tak získať medailu bolo (a v budúcich ročníkoch bude) ťažšie ako na IMO. Zisk jednej striebornej a dvoch bronzových medailí preto môžeme považovať za pekný úspech.

Prehľad výsledkov všetkých krajín v súťaži jednotlivcov je v druhej tabuľke. Krajiny sú v nej zoradené podľa súčtu bodov celého družstva, podobne ako pri neoficiálnom poradí krajín na IMO (číslo 4 v zátvorke pri Slovinsku označuje počet súťažiacich z tejto krajiny, ktorá ako jediná nevyužila možnosť vyslať na MEMO celú šesticu súťažiacich).

Por.	Štát	Z	S	B	$\sum$	Por.	Štát	Z	S	B	$\sum$
1.	Poľsko	2	4	0	114	5.	Česká republika	0	0	2	33
2.	Rakúsko	0	1	3	62	6.	Švajčiarsko	0	1	0	30
3.	Chorvátsko	0	1	3	47	7.	Slovinsko (4)	0	0	2	24
4.	Slovensko	0	1	2	44						

V súťaži družstiev sme skončili na štvrtom mieste s rovnakým počtom bodov ako tretia Česká republika (rozhodovalo až doplňujúce kritérium, t. j. väčší počet úloh vyriešených na 8, 7, 6, ... bodov). Výsledky súťaže družstiev sú uvedené v tretej tabuľke.

Por.	Štát	5.	6.	7.	8.	$\sum$
1.	Poľsko	8	7	8	8	31
2.	Chorvátsko	8	6	8	3	25
3.	Česká rep.	3	8	8	2	21
4.	Slovensko	3	7	8	3	21
5.	Rakúsko	6	4	8	3	21
6.	Švajčiarsko	3	3	8	5	19
7.	Slovinsko	3	6	6	3	18

Najviac sa darilo skúsenému družstvu z Poľska, ktoré v jednotlivcoch získalo obe zlaté a štyri strieborné medaily (z celkovo ôsmich) a takisto obsadili prvú priečku v súťaži družstiev. K podrobným výsledkom sa možno dostať napríklad cez internetovú stránku *http://kms.sk/memo*.

Po súťažných dňoch pripravili organizátori pre študentov dve exkurzie (Neusiedlerské jazero, Viedeň). Počas týchto dní mali študenti možnosť zoznámiť sa s ostatnými družstvami, a keďže celkový počet účastníkov nebol taký veľký ako na IMO a aj jazykové rozdiely boli menšie, atmosféra celého podujatia bola veľmi družná.

Druhý ročník MEMO sa bude konať v Českej republike v Olomouci. Tretí ročník by mal byť v Poľsku a na Slovensku by sa mal konať štvrtý ročník v roku 2010.

Peter Novotný

Zadania úloh MEMO

Súťaž jednotlivcov:

Úloha 1.
Nech a, b, c, d sú kladné reálne čísla, pričom $a+b+c+d=4$. Dokážte, že

$$a^2bc+b^2cd+c^2da+d^2ab \leqq 4.$$

(Švajčiarsko)

Úloha 2.
Množina loptičiek obsahuje n loptičiek, ktoré sú označené číslami $1, 2, 3, \dots, n$. Daných je $k > 1$ takých množín. Chceme zafarbiť všetky loptičky dvoma farbami, čiernou a bielou, a to tak, aby

(i) loptičky označené rovnakým číslom mali rovnakú farbu,

(ii) každá množina $k+1$ loptičiek označených (nie nutne rôznymi) číslami $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$, ktoré spĺňajú podmienku $a_1+a_2+\ldots+a_k=a_{k+1}$, obsahovala z každej farby aspoň jednu loptičku.

V závislosti od k nájdite najväčšie možné číslo n, pre ktoré existuje takéto zafarbenie.

(Slovinsko)

Úloha 3.
Nech k je kružnica a k_1, k_2, k_3, k_4 sú štyri menšie kružnice so stredmi O_1, O_2, O_3, O_4 ležiacimi na k. Pre $i=1,2,3,4$ a $k_5=k_1$ sa kružnice k_i a k_{i+1} pretínajú v bodoch A_i a B_i tak, že A_i leží na k. Body O_1, A_1, O_2, A_2, O_3, A_3, O_4, A_4 ležia v tomto poradí na k a sú navzájom rôzne. Dokážte, že $B_1B_2B_3B_4$ je pravouholník.

(Švajčiarsko)

Úloha 4.
Určte všetky dvojice (x, y) kladných celých čísel spĺňajúcich rovnosť

$$x!+y!=x^y.$$

(Česká rep.)

Súťaž družstiev:

Úloha 5.
Nech a, b, c, d sú ľubovoľné reálne čísla z uzavretého intervalu $\left\langle \frac{1}{2}, 2\right\rangle$ spĺňajúce $abcd=1$. Nájdite maximálnu hodnotu výrazu

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{d}\right)\left(d+\frac{1}{a}\right).$$

(Česká rep.)

Úloha 6.
Pre ľubovoľnú množinu P piatich bodov v rovine vo všeobecnej polohe označíme $a(P)$ počet ostrouhlých trojuholníkov s vrcholmi v P (body sú vo všeobecnej polohe, ak sú navzájom rôzne a žiadne tri z nich neležia na jednej priamke). Určte najväčšiu možnú hodnotu $a(P)$.

(Švajčiarsko)

Úloha 7.
Nech $s(T)$ označuje súčet dĺžok hrán štvorstena T. Uvažujme štvorsteny s vlastnosťou, že dĺžky ich šiestich hrán sú navzájom rôzne kladné celé čísla, pričom jedno je 2 a jedno je 3. Nazvime ich MEMO-štvorstenmi.

a) Nájdite všetky kladné celé čísla n, pre ktoré existuje MEMO-štvorsten T taký, že $s(T)=n$.

b) Koľko existuje navzájom nezhodných MEMO-štvorstenov T takých, že $s(T) = 2007$?

Dva štvorsteny sú nezhodné, ak jeden nemôže byť zobrazený na druhý pomocou súmerností podľa rovín, posunutí a otočení.
(Nie je potrebné dokázať, že štvorsteny uvažované v riešení sú nedegenerované, t. j. že majú nenulový objem.)

(Rakúsko)

Úloha 8.
Určte všetky kladné celé čísla k s nasledujúcou vlastnosťou: existuje celé číslo a také, že $(a+k)^3-a^3$ je násobkom čísla 2007.

(Rakúsko)

Riešenia úloh MEMO

Úloha 1.
Nech p, q, r, s sú (kladné) čísla a, b, c, d v takom poradí, že $p \geqq q \geqq r \geqq s$. Potom zrejme platí

$$pqr \geqq pqs \geqq prs \geqq qrs.$$

Podľa nerovnosti usporiadania[2] teda máme

$$a\cdot abc + b\cdot bcd + c\cdot cda + d\cdot dab \leqq p\cdot pqr + q\cdot pqs + r\cdot prs + s\cdot qrs = (pq+rs)(pr+qs).$$

Pre ľubovoľné reálne čísla A, B platí $AB \leqq \frac{1}{4}(A+B)^2$ (to dostaneme okamžite úpravou zrejmej nerovnosti $0 \leqq \frac{1}{4}(A-B)^2$). Použitím tejto nerovnosti najprv pre $A = pq + rs$,

[2] Ak sú $a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n$ a $b_1 \leqq b_2 \leqq \ldots \leqq b_n$ dve n-tice reálnych čísel a $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, resp. $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ich ľubovoľné permutácie, tak pre súčet $S = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ platí $S_{\min} \leqq S \leqq S_{\max}$, kde $S_{\min} = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_n$ a $S_{\max} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$. Táto známa nerovnosť (dokázať sa dá ľahko matematickou indukciou) sa nazýva *nerovnosť usporiadania*, často sa pre ňu používa anglický názov *rearrangement inequality*.

$B = pr + qs$ a neskôr pre $A = p + s$, $B = q + r$ postupne dostávame

$$(pq + rs)(pr + qs) \leqq \frac{1}{4}(pq + rs + pr + qs)^2 = \frac{1}{4}((p + s)(q + r))^2 \leqq$$
$$\leqq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}(p + q + r + s)^2\right)^2 = \frac{1}{64}(a + b + c + d)^4 = 4.$$

Tým je zadaná nerovnosť dokázaná.

Úloha 2.
Uvažujme pevné k a predpokladajme, že máme vyhovujúce zafarbenie pre maximálne možné n. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že loptičky s číslom 1 sú biele. Rozoberme dva možné prípady, aké môžu byť loptičky s číslom 2.

Prípad 1. Nech loptičky s číslom 2 sú čierne. Podľa podmienky (ii) musia byť loptičky s číslom $1 + 1 + \cdots + 1 = k$ čierne a loptičky s číslom $2 + 2 + \cdots + 2 = 2k$ biele. Keďže

$$(k + 1) + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{(k-1)\text{-krát}} = 2k$$

a loptičky s číslami 1 a $2k$ sú biele, loptičky s číslom $k + 1$ musia byť čierne. Z rovností

$$\underbrace{1 + \cdots + 1}_{(k-1)\text{-krát}} + 2k = \underbrace{2 + \cdots + 2}_{(k-1)\text{-krát}} + (k + 1) = 3k - 1$$

vyplýva, že loptičky s číslom $3k - 1$ nemôžu byť ani biele (medzi loptičkami s číslami 1, $2k$ a $3k - 1$ by nebola zastúpená čierna farba), ani čierne (medzi loptičkami s číslami 2, $k + 1$ a $3k - 1$ by nebola zastúpená biela farba). V tomto prípade teda nutne $n \leqq 3k - 2$.

Prípad 2. Nech loptičky s číslom 2 sú biele. Z rovností

$$\begin{aligned}
1 + 1 + \cdots + 1 + 1 + 1 &= k,\\
1 + 1 + \cdots + 1 + 1 + 2 &= k + 1,\\
1 + 1 + \cdots + 1 + 2 + 2 &= k + 2,\\
&\ \vdots\\
1 + 2 + \cdots + 2 + 2 + 2 &= 2k - 1,\\
2 + 2 + \cdots + 2 + 2 + 2 &= 2k
\end{aligned}$$

vyplýva, že loptičky s číslami $k, k + 1, \ldots, 2k$ sú čierne. Potom loptičky s číslom $k + k + \cdots + k = k^2$ musia byť biele. Z rovností

$$\underbrace{1 + \cdots + 1}_{(k-1)\text{-krát}} + k^2 = k + \underbrace{(k - 1) + \cdots + (k - 1)}_{(k-1)\text{-krát}} + (k + 1) = k^2 + k - 1$$

vyplýva, že loptičky s číslom k^2+k-1 nemôžu byť ani biele (medzi loptičkami s číslami 1, k^2 a k^2+k-1 by nebola zastúpená čierna farba), ani čierne (medzi loptičkami s číslami $k-1$, $k+1$ a k^2+k-1 by nebola zastúpená biela farba). V tomto prípade teda nutne $n \leqq k^2+k-2$.

Pre každé $k \geqq 2$ platí $k^2+k-2 \geqq 3k-2$ (túto nerovnosť možno upraviť na tvar $k(k-2) \geqq 0$), takže v oboch prípadoch $n \leqq k^2+k-2$. Stačí už len ukázať príklad vyhovujúceho zafarbenia pre $n = k^2+k-2$.

Budeme postupovať nasledovne. Loptičky s číslami $1, 2, \ldots, k-1$ zafarbíme bielou, loptičky s číslami $k, k+1, \ldots, k^2-1$ čiernou a loptičky s číslami $k^2, k^2+1, \ldots, k^2+k-2$ opäť bielou farbou. Súčet čísel na k čiernych loptičkách je aspoň $k+\cdots+k = k^2 > > k^2-1$, takže čierne loptičky pravidlo (*ii*) neporušia. Ak zoberieme k bielych loptičiek, ktorých čísla sú nanajvýš $k-1$, tak súčet čísel na týchto loptičkách bude najviac

$$\underbrace{(k-1)+\cdots+(k-1)}_{k\text{-krát}} = k^2-k < k^2$$

a najmenej $1+\cdots+1 = k$, teda súčet bude číslo nachádzajúce sa len na čiernych loptičkách. A ak aspoň jedna z k bielych loptičiek bude mať číslo aspoň k^2, tak súčet čísel na loptičkách bude aspoň

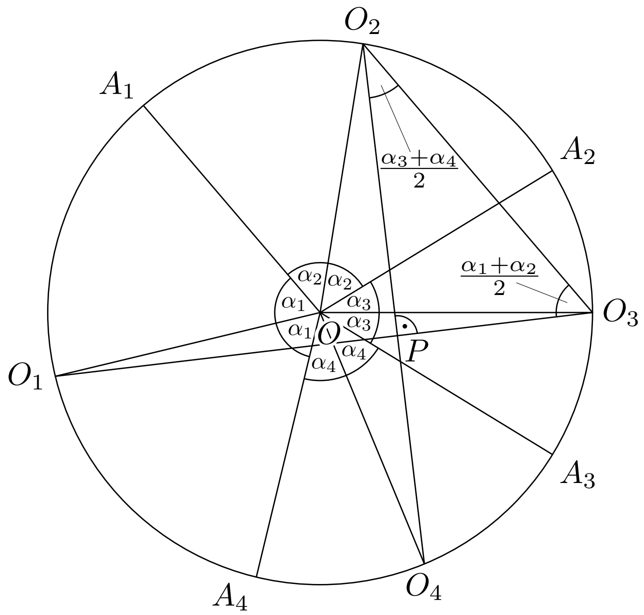
$$k^2 + \underbrace{1+\cdots+1}_{(k-1)\text{-krát}} = k^2+k-1 > n.$$

Ani biele loptičky preto pravidlo (*ii*) neporušia a uvedené zafarbenie vyhovuje.

Úloha 3.
Nech O je stred kružnice k a P je priesečník tetív O_1O_3 a O_2O_4. Pre $i = 1, 2, 3, 4$ a $A_4 = A_0$ označme $\alpha_i = |\sphericalangle O_iOA_i| = |\sphericalangle O_iOA_{i-1}|$. Zrejme $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = 180^\circ$ (obr. 44). Z vlastností obvodových a stredových uhlov máme

$$|\sphericalangle PO_3O_2| = \frac{1}{2}|\sphericalangle O_1OO_2| = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}, \quad |\sphericalangle PO_2O_3| = \frac{1}{2}|\sphericalangle O_4OO_3| = \frac{\alpha_3+\alpha_4}{2}.$$

Z trojuholníka PO_2O_3 potom ľahko dopočítame $|\sphericalangle O_2PO_3| = 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+ + \alpha_4) = 90^\circ$. Teda tetivy O_1O_3 a O_2O_4 sú navzájom kolmé.



Obr. 44

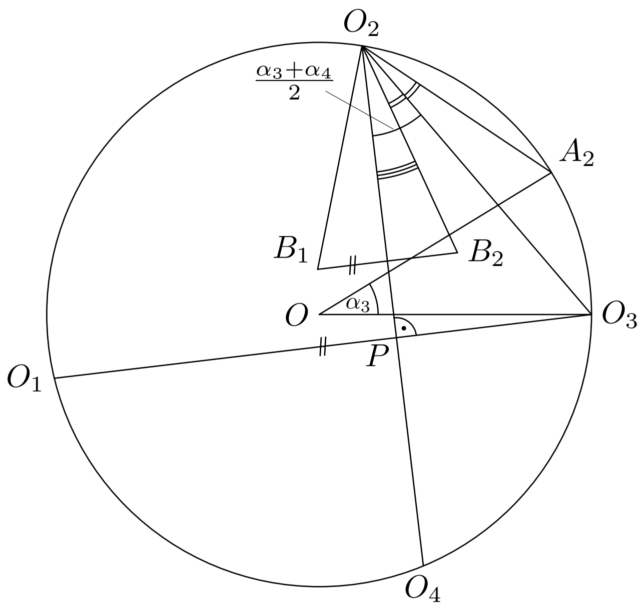
Dokážeme, že $B_1B_2 \parallel O_1O_3$. Keďže $|O_2B_1| = |O_2B_2|$, stačí ukázať, že uhly $O_4O_2B_1$, $O_4O_2B_2$ majú rovnakú veľkosť (potom sú B_1, B_2 súmerne združené podľa priamky O_2O_4, teda $B_1B_2 \perp O_2O_4$ a $B_1B_2 \parallel O_1O_3$). Keďže B_2 je obrazom bodu A_2 v osovej súmernosti podľa priamky O_2O_3 a uhol $O_3O_2A_2$ je obvodovým uhlom k stredovému uhlu O_3OA_2, máme (obr. 45)

$$|\sphericalangle O_3O_2B_2| = |\sphericalangle O_3O_2A_2| = \frac{1}{2}|\sphericalangle O_3OA_2| = \frac{\alpha_3}{2}.$$

Preto

$$|\sphericalangle O_4O_2B_2| = |\sphericalangle PO_2O_3| - |\sphericalangle O_3O_2B_2| = \frac{\alpha_3+\alpha_4}{2} - \frac{\alpha_3}{2} = \frac{\alpha_4}{2}.$$

Vzhľadom na symetrickosť zadania možno rovnakým spôsobom ukázať, že $|\sphericalangle O_4O_2B_1| = \frac{\alpha_4}{2}$. Teda naozaj $|\sphericalangle O_4O_2B_1| = |\sphericalangle O_4O_2B_2|$ a $B_1B_2 \parallel O_1O_3$. Opäť vzhľadom na symetrickosť vieme rovnako ukázať, že $B_2B_3 \parallel O_2O_4$, $B_3B_4 \parallel O_1O_3$ a $B_4B_1 \parallel O_2O_4$. Z toho už priamo vyplýva, že $B_1B_2B_3B_4$ je pravouholník.



Obr. 45

Úloha 4.
Predpokladajme, že prirodzené čísla x, y spĺňajú zadanú rovnosť. Potom $x^y = x! + y! \geqq 2$, teda $x \geqq 2$.

Uvažujme najprv prípad $x = 2$. Z rovnosti $2 + y! = 2^y$ vyplýva, že $y!$ je párne, preto $y \geqq 2$. Odtiaľ $2 + y! = 2^y \equiv 0 \pmod 4$, takže $y! \equiv 2 \pmod 4$. To je zrejme možné jedine pre $y \in \{2, 3\}$. Keďže $2! + 2! = 2^2$ a $2! + 3! = 2^3$, dostávame dve riešenia $(2, 2)$ a $(2, 3)$.

Predpokladajme teraz, že $x \geqq 3$. V takom prípade je číslo $x - 1$ deliteľom $x!$, nie je však deliteľom x^y, lebo $\mathrm{nsd}(x, x-1) = 1$. Z toho vyplýva, že $x-1$ nedelí ani $x^y - x! = y!$, čiže $y \leqq x - 2$. Môžeme teda písať

$$x^y = x! + y! = y!(\underbrace{(y+1) \cdot (y+1) \cdot \ldots \cdot x + 1}_{=k}).$$

Činiteľ k je očividne nesúdeliteľný s x (a teda aj s každou mocninou x) a zároveň z uvedenej rovnosti vyplýva, že je deliteľom čísla x^y. Preto nutne $k = 1$, čo je samozrejme nemožné.

Zadanú rovnosť spĺňajú iba dvojice $(2, 2)$ a $(2, 3)$.

Úloha 5.
Označme daný výraz V. S využitím podmienky $abcd = 1$ dostaneme postupnými

úpravami

$$\begin{aligned}
V &= \left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{d}\right)\left(d+\frac{1}{a}\right) = \\
&= \frac{(ab+1)(bc+1)(cd+1)(da+1)}{abcd} = \frac{(2+ab+cd)(2+ad+bc)}{abcd} = \\
&= 4+2\cdot\frac{ab+cd+ad+bc}{abcd} + \frac{a^2bd+b^2ac+c^2bd+d^2ac}{abcd} = \\
&= 4+2\cdot\frac{(a+c)(b+d)}{\sqrt{abcd}} + \frac{bd(a^2+c^2)+ac(b^2+d^2)}{abcd} = \\
&= 4+2\cdot\left(\sqrt{\frac{a}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)\left(\sqrt{\frac{b}{d}}+\sqrt{\frac{d}{b}}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{d}+\frac{d}{b}\right) = \\
&= 4+2\cdot f\left(\sqrt{\frac{a}{c}}\right) f\left(\sqrt{\frac{b}{d}}\right)+f\left(\frac{a}{c}\right)+f\left(\frac{b}{d}\right),
\end{aligned}$$

kde f je funkcia určená predpisom $f(x) = x + 1/x$. Nerovnosť $x + 1/x > y + 1/y$ je pre kladné x, y ekvivalentná s nerovnosťou

$$\frac{(x-y)(xy-1)}{xy} > 0,$$

a teda uvedená funkcia je na intervale $\langle 1, \infty)$ rastúca a na intervale $(0, 1\rangle$ klesajúca. Keďže $\frac{1}{2} \leqq a, b, c, d \leqq 2$, zrejme platia nerovnosti

$$\frac{1}{4} \leqq \frac{a}{c} \leqq 4, \qquad \frac{1}{4} \leqq \frac{b}{d} \leqq 4, \qquad \frac{1}{2} \leqq \sqrt{\frac{a}{c}} \leqq 2, \qquad \frac{1}{2} \leqq \sqrt{\frac{b}{d}} \leqq 2. \tag{1}$$

Navyše $f(\frac{1}{4}) = f(4) = \frac{17}{4}$ a $f(\frac{1}{2}) = f(2) = \frac{5}{2}$. Z nerovností (1) a z rastúcosti, resp. klesajúcosti funkcie f na spomínaných intervaloch preto vyplýva

$$V \leqq 4 + 2\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2}+\frac{17}{4}+\frac{17}{4} = 25.$$

Pritom rovnosť platí práve vtedy, keď $a/c, b/d \in \{\frac{1}{4}, 4\}$, t. j. pre štvorice $(2, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)$, $(\frac{1}{2}, 2, 2, \frac{1}{2})$ a $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, 2)$, ktoré „našťastie“ spĺňajú aj podmienku $abcd = 1$.

Odpoveď. Maximálna hodnota uvedeného výrazu je 25.

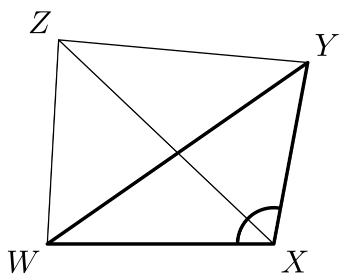
Poznámka. Z uvedeného postupu vyplýva, že minimálna hodnota výrazu V je $4 + 2 \cdot f(1) \cdot f(1) + f(1) + f(1) = 16$ a nadobúda sa pre štvorice (a, b, c, d) spĺňajúce okrem podmienky $abcd = 1$ aj rovnosti $a/c = b/d = 1$, t. j. pre štvorice $(t, 1/t, t, 1/t)$, pričom $\frac{1}{2} \leqq t \leqq 2$.

Úloha 6.

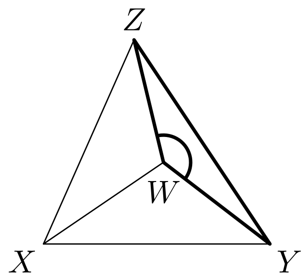
Kvôli stručnosti nazývajme *škaredými* tie trojuholníky, ktoré nie sú ostrouhlé (t. j. sú pravouhlé alebo tupouhlé). Najskôr ukážeme, že aspoň jeden zo štyroch trojuholníkov určených danými štyrmi bodmi vo všeobecnej polohe je škaredý.

Ak sú uvedené štyri body vrcholmi konvexného štvoruholníka $WXYZ$, aspoň jeden z jeho vnútorných uhlov má veľkosť aspoň 90° (lebo súčet štyroch vnútorných uhlov v ľubovoľnom štvoruholníku je 360°). Ak je to napríklad uhol pri vrchole X, tak trojuholník WXY je škaredý (obr. 46a).

Ak uvedené štyri body nie sú vrcholmi konvexného štvoruholníka, tak jeden z nich (označme ho W) leží vnútri trojuholníka XYZ tvoreného zvyšnými tromi bodmi. Potom niektorý z uhlov XWY, YWZ, ZWX má veľkosť aspoň 120° (lebo ich súčet je 360°) a trojuholník s týmto uhlom je škaredý (obr. 46b).

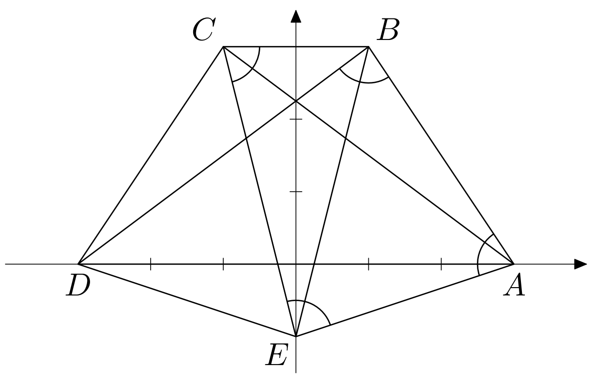


Obr. 46a



Obr. 46b

Uvažujme teraz ľubovoľnú päticu bodov A, B, C, D, E. Aspoň jeden z trojuholníkov určených bodmi A, B, C, D je škaredý. Bez ujmy na všeobecnosti nech je to ABC. Potom aspoň jeden z trojuholníkov určených bodmi B, C, D, E je škaredý a trojuholník ABC s ním má spoločný aspoň jeden vrchol; bez ujmy na všeobecnosti nech je to vrchol B. Aspoň jeden z trojuholníkov určených bodmi A, C, D, E je škaredý a navyše to nie je žiadny z doteraz objavených škaredých trojuholníkov (lebo nemá vrchol B). Teda ľubovoľná množina P piatich bodov tvorí aspoň tri škaredé trojuholníky a $a(P) \leqq 7$ (zrejme päť bodov vo všeobecnej polohe tvorí práve 10 trojuholníkov).



Obr. 47

Stačí už len nájsť[3] príklad množiny P, pre ktorú $a(P) = 7$. Zoberme v karteziánskej

[3] Pred hľadaním je užitočné uvedomiť si, ako pre dané dva body X, Y vyzerá množina takých bodov Z, že trojuholník XYZ je ostrouhlý.

súradnicovej sústave päticu bodov

$$A = (3,0), \quad B = (1,3), \quad C = (-1,3), \quad D = (-3,0), \quad E = (0,-1).$$

Ostré nie sú iba uhly ABC, BCD a DEA. Aby sme dokázali, že všetky ostatné sú ostré, stačí dokázať ostrosť uhlov ABD, BCE, CEA a EAB (obr. 47); všetky ostatné uhly sú buď menšie (lebo sú ich časťami), alebo rovnaké (vďaka symetrii). Uhol BCE je ostrý, lebo je vnútorným uhlom pri základni v rovnoramennom trojuholníku BCE. Pre ostatné tri uhly stačí podľa kosínusovej vety[4] dokázať nerovnosti

$$\begin{aligned}
|AB|^2 + |BD|^2 &> |AD|^2, \\
|CE|^2 + |EA|^2 &> |CA|^2, \\
|EA|^2 + |AB|^2 &> |EB|^2.
\end{aligned}$$

Jednoduchým výpočtom dostávame

$$\begin{aligned}
|AB|^2 + |BD|^2 &= (2^2 + 3^2) + (4^2 + 3^2) = 38 > 36 = 6^2 = |AD|^2, \\
|CE|^2 + |EA|^2 &= (4^2 + 1^2) + (1^2 + 3^2) = 27 > 25 = 4^2 + 3^2 = |CA|^2, \\
|EA|^2 + |AB|^2 &= (1^2 + 3^2) + (2^2 + 3^2) = 23 > 17 = 4^2 + 1^2 = |EB|^2.
\end{aligned}$$

Úloha 7.
Sú dva prípady, ako môžu byť v MEMO-štvorstene umiestnené hrany dĺžok 2 a 3.

Prípad 1. Nech hrany dĺžok 2 a 3 vychádzajú z jedného vrcholu A; označme tieto hrany postupne AB a AC. Aby boli splnené trojuholníkové nerovnosti v trojuholníku ABC a súčasne podmienky zo zadania, musí mať hrana BC dĺžku 4. Označme D štvrtý vrchol skúmaného MEMO-štvorstena. Nech hrana AD má (celočíselnú) dĺžku a. Potom hrana BD môže mať iba dĺžku $a+1$ alebo $a-1$ (aby boli splnené trojuholníkové nerovnosti v trojuholníku ABD). Rozoberme obe možnosti.

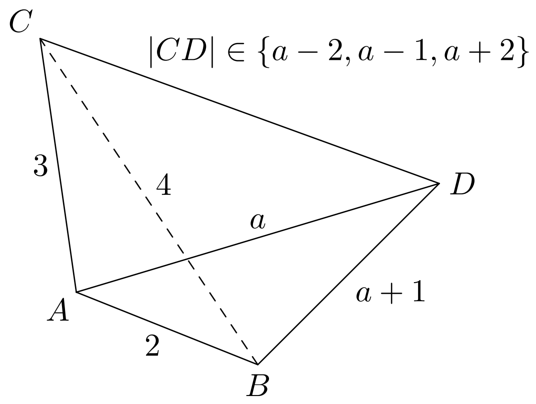
Ak $|BD| = a+1$, musí platiť $a-3 < |CD| < a+3$ (aby boli splnené trojuholníkové nerovnosti v trojuholníku ADC). Kvôli rôznosti dĺžok všetkých šiestich hrán tak máme $|CD| \in \{a-2, a-1, a+2\}$ (obr. 48a). Ľahko overíme, že pre každú z týchto troch hodnôt (pri zrejmej podmienke $a \geqq 5$) sú splnené všetky trojuholníkové nerovnosti vo všetkých štyroch stenách štvorstena. Vypočítajme, aká môže byť hodnota $s(T)$.

- ▷ $|CD| = a-2$, $s(T) = 2+3+4+a+(a+1)+(a-2) = 3a+8$, nutná a postačujúca podmienka, aby mali všetky hrany rôzne dĺžky, je $a \geqq 7$.
- ▷ $|CD| = a-1$, $s(T) = 2+3+4+a+(a+1)+(a-1) = 3a+9$, $a \geqq 6$.
- ▷ $|CD| = a+2$, $s(T) = 2+3+4+a+(a+1)+(a+2) = 3a+12$, $a \geqq 5$.

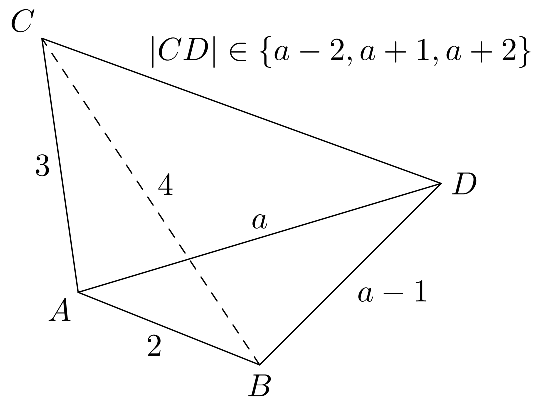
Ak $|BD| = a-1$, rovnako musí platiť $a-3 < |CD| < a+3$ a kvôli rôznosti dĺžok všetkých hrán dostávame $|CD| \in \{a-2, a+1, a+2\}$ (obr. 48b). Opäť jednoducho overíme platnosť všetkých trojuholníkových nerovností (pri zrejmej podmienke $a \geqq 6$) a vypočítame možné hodnoty $s(T)$.

[4] Alebo podľa Pytagorovej vety a jednoduchej úvahy.

▷ $|CD| = a - 2$, $s(T) = 2 + 3 + 4 + a + (a - 1) + (a - 2) = 3a + 6$, $a \geqq 7$.
▷ $|CD| = a + 1$, $s(T) = 2 + 3 + 4 + a + (a - 1) + (a + 1) = 3a + 9$, $a \geqq 6$.
▷ $|CD| = a + 2$, $s(T) = 2 + 3 + 4 + a + (a - 1) + (a + 2) = 3a + 10$, $a \geqq 6$.



Obr. 48a



Obr. 48b

V prvom prípade teda máme šesť rôznych typov MEMO-štvorstenov. Pri prvom type nadobúda $s(T)$ hodnoty

$$\{3a + 8; a \geqq 7\} = \{29, 32, 35, 38, \dots\},$$

pri druhom, treťom, štvrtom a piatom type hodnoty

$$\{3a + 9; a \geqq 6\} = \{3a + 12; a \geqq 5\} = \{3a + 6; a \geqq 7\} = \{27, 30, 33, 36, \dots\}$$

a pri šiestom type hodnoty

$$\{3a + 10; a \geqq 6\} = \{28, 31, 34, 37, \dots\}.$$

Zjednotením uvedených množín dostávame, že MEMO-štvorsten T spĺňajúci $s(T) = n$ existuje pre každé $n \geqq 27$.

Prípad 2. Nech hrany dĺžok 2 a 3 nemajú žiadny spoločný bod; označme AB hranu s dĺžkou 2 a CD hranu s dĺžkou 3. Aby boli splnené trojuholníkové nerovnosti v trojuholníku ABC, musia sa dĺžky hrán AC, BC líšiť o 1 (podľa zadania nemôžu byť rovnaké). Bez ujmy na všeobecnosti nech $|AC| = a$ a $|BC| = a + 1$ (označenie vrcholov A, B totiž môžeme „vymeniť“).

Aby boli splnené trojuholníkové nerovnosti v trojuholníku ACD, nutne $a - 3 < < |AD| < a + 3$ a kvôli rôznosti dĺžok hrán máme

$$|AD| \in \{a - 2, a - 1, a + 2\}.$$

Podobným spôsobom (uvažujúc trojuholník BCD) dostávame $a - 2 < |BD| < a + 4$, t. j.

$$|BD| \in \{a - 1, a + 2, a + 3\}.$$

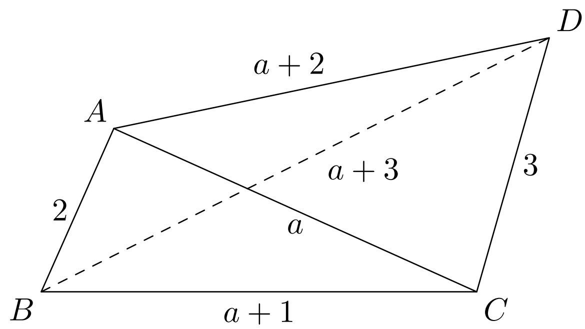
Navyše kvôli trojuholníkovej nerovnosti v trojuholníku ABD sa dĺžky $|AD|$ a $|BD|$ musia líšiť práve o 1. Do úvahy teda prichádzajú iba dve možnosti: buď $|AD| = a - 2$ a $|BD| = a - 1$, alebo $|AD| = a + 2$ a $|BD| = a + 3$.

▷ Ak $|AD| = a-2$ a $|BD| = a-1$, tak $s(T) = 2+3+a+(a+1)+(a-2)+(a-1) = 4a+3$, pričom kvôli rôznosti hrán nutne $a \geqq 6$.

▷ Ak $|AD| = a+2$ a $|BD| = a+3$, tak $s(T) = 2+3+a+(a+1)+(a+2)+(a+3) = 4a+11$, pričom $a \geqq 4$.

Ľahko skontrolujeme, že pri oboch možnostiach sú splnené všetky trojuholníkové nerovnosti. V skutočnosti sú štvorsteny, ktoré dostaneme pri prvej možnosti, zhodné so štvorstenmi z druhej možnosti (stačí vymeniť označenie vrcholov C, D a „posunúť“ hodnotu a o 2). V druhom prípade preto máme iba jeden typ štvorstenov: $|AB| = 2$, $|CD| = 3$, $|AC| = a$, $|BC| = a+1$, $|AD| = a+2$ a $|BD| = a+3$, pričom $a \geqq 4$ (obr. 49). Hodnota $s(T)$ je v tomto prípade prvkom množiny

$$\{4a + 11; a \geqq 4\} = \{27, 31, 35, 39, \ldots\}.$$



Obr. 49

Na základe predošlej analýzy jednoducho vyriešime obe časti úlohy.

a) Keďže v druhom prípade sme nezískali žiadne nové hodnoty pre $s(T)$, platí odpoveď získaná v prvom prípade: MEMO-štvorsten T spĺňajúci $s(T) = n$ existuje práve vtedy, keď $n \geqq 27$.

b) Číslo 2007 vieme zapísať v tvaroch

$$2007 = 3 \cdot 666 + 9 = 3 \cdot 665 + 12 = 3 \cdot 667 + 6 = 4 \cdot 499 + 11.$$

MEMO-štvorsten T spĺňajúci $s(T) = 2007$ teda vieme vytvoriť podľa druhého, tretieho, štvrtého a piateho typu v prvom prípade aj podľa jediného typu v druhom prípade. Spolu je to 5 rôznych MEMO-štvorstenov (z uvedenej analýzy je zrejmé, že sú navzájom nezhodné, o čom sa možno ľahko presvedčiť aj vypísaním ich konkrétnych dĺžok hrán).

Úloha 8.

Číslo $(a + k)^3 - a^3$ je násobkom čísla $2007 = 9 \cdot 223$ práve vtedy, keď je násobkom 9 aj násobkom 223. Keďže

$$(a + k)^3 - a^3 = 3(a^2k + ak^2) + k^3,$$

nutnou podmienkou na to, aby uvedené číslo bolo násobkom deviatich (a teda aj troch) je, aby k^3 bolo deliteľné tromi. To platí len pre k, ktoré sú sami násobkom troch. Preto každé hľadané k možno zapísať v tvare $k = 3m$ pre nejaké prirodzené číslo m. Naopak, ak $k = 3m$, tak

$$(a+k)^3 - a^3 = (a+3m)^3 - a^3 = 9(a^2m + 3am^2 + 3m^3),$$

čiže uvedené číslo je deliteľné deviatimi.

Takže našou úlohou je určiť prirodzené čísla m, pre ktoré existuje celé číslo a také, že číslo $(a+3m)^3 - a^3$ je násobkom 223. Uvedenú podmienku spĺňa každé prirodzené m. Stačí položiť napríklad $a = 38m$. Potom

$$(a+3m)^3 - a^3 = (41m)^3 - (38m)^3 = 14\,049m^3 = 9 \cdot 7 \cdot 223m^3.$$

Odpoveď. Zadanú vlastnosť majú všetky prirodzené čísla k, ktoré sú násobkom troch.

Poznámka. K hodnote $a = 38m$ sa dá dopracovať skúšaním. Existuje však aj iná možnosť. Úlohu totiž možno ekvivalentne preformulovať v reči kongruencií: *Určte tie zvyškové triedy m, ku ktorým existuje zvyšková trieda a taká, že*

$$(a+3m)^3 \equiv a^3 \pmod{223}. \tag{1}$$

Ak danú podmienku spĺňa nejaký zvyšok m, spĺňa ju aj každý jeho násobok mt, lebo vynásobením kongruencie (1) zvyškom t^3 dostaneme

$$(at+3mt)^3 \equiv (at)^3 \pmod{223}.$$

Keďže 223 je prvočíslo, stačí nájsť jeden nenulový zvyšok m, ktorý spĺňa (1) pre nejaký zvyšok a. Každý iný zvyšok sa dá napísať ako jeho vhodný násobok[5]. Stačí teda úlohu vyriešiť napr. pre hodnotu $m = 1$, t. j. nájsť také a, že

$$(a+3)^3 \equiv a^3 \pmod{223}. \tag{2}$$

Predpokladajme, že zvyšok a spĺňa (2). Potom $a \neq 0$ a teda $3 \equiv ra \pmod{223}$ pre vhodné r. Po vydelení kongruencie (2) zvyškom a^3 (zrejme $\operatorname{nsd}(a^3, 223) = 1$) dostaneme

$$(1+r)^3 \equiv 1 \pmod{223}. \tag{3}$$

Zvyšok r spĺňajúci (3) už nájdeme ľahko. Podľa malej Fermatovej vety totiž $z^{222} \equiv 1 \pmod{223}$ pre každý nenulový zvyšok z. Zároveň $z^{222} = (z^{74})^3$. Preto zvolíme $r \equiv z^{74} - 1 \pmod{223}$. Nenulové r tak dostaneme napr. pre $z = 3$, ale aj pre mnohé iné hodnoty[6]. Konkrétne $r \equiv 3^{74} - 1 \equiv 182 \pmod{223}$ a odtiaľ $a \equiv 38 \pmod{223}$ (lebo $182 \cdot 38 \equiv 3 \pmod{223}$).

[5] Inak povedané, pre nenulový zvyšok m obsahuje množina $\{m, 2m, \dots, 222m\}$ všetky nenulové zvyšky modulo 223.

[6] Treba zobrať také z, že množina $\{1, z, z^2, \dots, z^{222}\}$ obsahuje všetky nenulové zvyšky, t. j. každý nenulový zvyšok práve raz. Tým je zabezpečené $z^{74} \not\equiv 1 \pmod{223}$. Také z vždy existuje, čo je známy, i keď nie triviálny fakt z teórie čísel.

Korešpondenčný seminár SK MO

Korešpondenčný seminár Slovenskej komisie Matematickej olympiády (KS SK MO) vznikol pred vyše 30 rokmi ako jeden z prvých matematických korešpondenčných seminárov (vtedy ešte ako československý seminár) preto, aby bolo umožnené venovať individuálnu starostlivosť aj tým študentom, ktorí nenavštevovali triedy so zameraním na matematiku. Úlohy tohto seminára svojou náročnosťou prevyšujú akúkoľvek inú matematickú súťaž na Slovensku pre stredoškolákov, seminár je preto dôležitou súčasťou prípravy aj na medzinárodnú matematickú olympiádu.

Počas svojej existencie prešiel seminár viacerými zmenami. Po jednoročnej prestávke v 52. ročníku MO jeho organizovanie prebrali vedúci korešpondenčného seminára KMS. Odvtedy je KS SK MO jeho kategóriou GAMA a KMS je oficiálnym seminárom SK MO.

KS SK MO má každý rok šesť sérií – tri zimné prebiehajúce od septembra do decembra a tri letné prebiehajúce od februára do mája. V každej sérii je zadaných 5 úloh.

Celkové poradie KS SK MO 2006/2007

1. *Michal Szabados*, 4. ročník, ŠpMNDaG Skalická, Bratislava, 163 bodov
2. *Tomáš Bzdušek*, 4. ročník, Gymnázium P. de Coubertaina, Piešťany, 95 bodov
3. *Samuel Hapák*, 3. ročník, Gymnázium Grösslingová, Bratislava, 85 bodov
3. *Tomáš Kocák*, 3. ročník, Gymnázium Poštová, Košice, 60 bodov
3. *Miroslav Baláž*, 3. ročník, Gymnázium arm. gen. L. Svobodu, Humenné, 59 bodov

Uvádzame všetky príklady tohto ročníka súťaže spolu s riešeniami, často študentskými. Príklady boli vyberané najmä z národných olympiád či iných súťaží.

Zadania súťažných úloh KS SK MO

Prvá séria

1.1 Numizmatik Kristián Príslovka má 241 mincí s celkovou hodnotou 360 toliarov. (Hodnota každej mince v toliaroch je prirodzené číslo.) Môže si byť Kristián Príslovka istý, že vie svoje mince rozdeliť na tri kôpky s rovnakou hodnotou?

(Ukrajina, 2005)

1.2 Na ostrove žije n domorodcov. Jedného dňa náčelník rozhodol, že všetci (vrátane neho) si urobia a budú nosiť náhrdelník zložený z 0 alebo viac jednofarebných kamienkov. Dvaja domorodci majú mať aspoň jeden kamienok rovnakej farby práve vtedy, keď sú priatelia.

a) Dokážte, že domorodci môžu splniť náčelníkov rozkaz.

b) Aký je minimálny počet farieb kamienkov potrebný na to, aby sa dal splniť náčelníkov rozkaz bez ohľadu na priateľské vzťahy na ostrove?

(Bielorusko, 2001)

1.3 Daný je ostrouhlý trojuholník ABC so stredom opísanej kružnice O. Nech T je stred kružnice opísanej trojuholníku AOC. Bod M je stredom strany AC. Body D a E ležia po rade na priamkach AB a CB tak, že uhly MDB a MEB sú rovnako veľké ako uhol ABC. Dokážte, že priamky BT a DE sú na seba kolmé.

1.4 Priamka prechádzajúca ťažiskom T trojuholníka ABC pretína stranu AB v bode P a stranu CA v bode Q. Dokážte, že

$$4 \cdot |PB| \cdot |QC| \leqq |PA| \cdot |QA|.$$

(Španielsko, 1998)

1.5 Prirodzené čísla x, y väčšie ako 1 spĺňajú vzťah $2x^2 - 1 = y^{15}$. Dokážte, že x je deliteľné piatimi.

(Rusko, 2005)

Druhá séria

2.1 Daný je ostrouhlý trojuholník ABC s priesečníkom výšok V. Kružnica s priemerom AV pretína kružnicu opísanú trojuholníku ABC v bodoch A a K.

Priamka KV pretína úsečku BC v bode M. Dokážte, že M je stredom úsečky BC.

(Poľsko, 2004)

2.2 V rovine je daná kružnica $k(S, r)$ a bod A rôzny od bodu S. Zostrojte na polpriamke SA bod B taký, že $|SA| \cdot |SB| = r^2$. Pri konštrukcii môžete použiť iba kružidlo. Popíšte vašu konštrukciu pre každú polohu bodu A.

2.3 Nech n je prirodzené číslo a $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2n+1}$ sú kladné reálne čísla. Dokážte, že platí

$$(a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + a_{2n+1})^{1/n} \geqq a_1^{1/n} - a_2^{1/n} + a_3^{1/n} - \cdots + a_{2n+1}^{1/n}.$$

(BMO, 1998)

2.4 V krajine je niekoľko miest a medzi nimi obojsmerné letecké linky (medzi každými dvoma mestami nanajvýš jedna). Medzi každými dvoma mestami sa dá letecky prepraviť tak, že využijeme nanajvýš d liniek. Najkratšia okružná cesta, ktorá sa dá podniknúť, prechádza cez práve $2d + 1$ miest. Dokážte, že z každého mesta v krajine vychádza rovnaký počet liniek.

(Amer. Math. Monthly, 1968)

2.5 Daný je stredovo súmerný mnohouholník $\mathcal{M}$. Dokážte, že existuje rovnobežník $\mathcal{R}$ taký, že stredy jeho strán ležia na obvode mnohouholníka $\mathcal{M}$ a pritom $\mathcal{M}$ je podmnožinou rovnobežníka $\mathcal{R}$.

(Poľsko, 1988)

TRETIA SÉRIA

3.1 Nájdite všetky kladné celé čísla n, pre ktoré existuje trojica kladných celých čísel x, y, z spĺňajúcich rovnosť

$$x^3 + y^3 + z^3 = nx^2y^2z^2.$$

(Čína, 1987)

3.2 V jednom rade stojí 2005 guľôčok. Každá z nich má čiernu alebo bielu farbu. Pre každú guľôčku zistíme súčet počtu bielych guľôčok nachádzajúcich sa napravo od nej a počtu čiernych guľôčok nachádzajúcich sa naľavo od nej. Dostaneme tak 2005 súčtov. Medzi týmito súčtami sa práve jedno číslo vyskytuje nepárny počet krát. Zistite, aké hodnoty môže nadobúdať toto číslo. Nezabudnite zdôvodniť, prečo nemôže nadobúdať iné hodnoty.

(Estónsko, 2005)

3.3 *Opakovane bola zadaná úloha 1.3.*

3.4 Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, ktoré pre všetky kladné reálne čísla x, y spĺňajú vzťah
$$f(xf(y)) = f(xy) + x.$$

(Petr Kaňovský)

3.5 *Opakovane bola zadaná úloha 1.5.*

Štvrtá séria

4.1 Nech M je vnútorný bod trojuholníka ABC taký, že $|\sphericalangle AMC| = 90°$, $|\sphericalangle AMB| = 150°$ a $|\sphericalangle BMC| = 120°$. Označme P, Q, R stredy kružníc opísaných trojuholníkom AMC, AMB a BMC. Dokážte, že obsah trojuholníka ABC je menší než obsah trojuholníka PQR.

(Južná Afrika, 1997)

4.2 Na nekonečnom bielom štvorčekovom papieri je konečný počet štvorčekov zafarbených čiernou farbou. Každý čierny štvorček má párny počet bielych štvorčekov, ktoré s ním susedia stranou. Dokážte, že vieme každý biely štvorček vyfarbiť zelenou alebo červenou farbou tak, že každý čierny štvorček bude mať rovnaký počet zelených a červených susedov susediacich s ním celou stranou.

(Rusko, 2005)

4.3 Nech p, q sú navzájom rôzne prvočísla. Zistite, či existuje funkcia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taká, že $f(x)^p$ aj $f(x)^q$ sú polynómy a pritom f nie je polynóm.

(IMC, 2005)

4.4 Vo vrcholoch obdĺžnika sú štyri mestá. Chceme postaviť cestnú sieť tak, aby sa z každého mesta dalo dostať do každého a pri tom aby táto sieť mala minimálnu dĺžku (t. j. súčet dĺžok jednotlivých úsekov). Ako to máme spraviť?

(Poľsko, 1988)

4.5 Máme pred sebou rad vriec ťahajúci sa na obe strany do nekonečna. V týchto vreciach je nejako rozmiestnený konečný počet zemiakov. Môžeme robiť dve operácie:

(1) Nech A, B, C sú v tomto poradí (zľava doprava) tri susedné vrecia. Zoberieme po jednom zemiaku z vriec A a B a pridáme jeden zemiak do vreca C.

(2) Nech A, B, C, D sú v tomto poradí (zľava doprava) štyri susedné vrecia. Zoberieme dva zemiaky z vreca C a pridáme po jednom zemiaku do vriec A a D.

Dokážte, že po istom počte krokov sa nutne dostaneme do situácie, v ktorej už nemôžeme použiť ani jednu operáciu. Zistite, či výsledná situácia závisí od operácií, ktoré sme použili v jednotlivých krokoch.

(Rusko, 1997)

PIATA SÉRIA

5.1 Čísla $1, 2, \ldots, n$ sú v tomto poradí napísané na obvode kruhu. V jednom kroku môžeme dve susedné čísla a, b nahradiť číslami $(a+b)/2$, $(a+b)/2$. Je možné dosiahnuť po konečnom počte krokov, aby všetky napísané čísla boli rovnaké?

(Bielorusko, 1998)

5.2 Daný je tetivový štvoruholník $ABCD$ s priesečníkom uhlopriečok P. Označme E, F po rade päty kolmíc z bodu P na priamky AB, CD. Dokážte, že os úsečky EF rozpoľuje úsečky BC a DA.

(Nemecko, 2003)

5.3 Rozhodnite, či existuje útvar U, ktorý sa dá pokryť 25 kruhmi s priemerom 2, ale nedá sa pokryť 100 kruhmi s priemerom 1. Úlohu riešte pre nasledovné útvary U:

a) pravouholník,

b) mnohouholník.

(Poľsko, 1988)

5.4 Nech $n \geqq 3$ a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú dané kladné reálne čísla. Označme $x_{n+1} = x_1$ a $x_{n+2} = x_2$. Dokážte, že platí

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geqq \frac{n}{2} \qquad \text{alebo} \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+2}}{x_i + x_{i+1}} \geqq \frac{n}{2}.$$

(Poľsko, 2002)

5.5 Riešime rovnicu $a^3 + b^5 + c^7 + d^{11} = e^{13}$ v kladných celých číslach.

a) Dokážte, že táto rovnica má aspoň jedno riešenie.

b) Zistite, či má táto rovnica konečne veľa riešení.

(NDR, 1987)

ŠIESTA SÉRIA

6.1 Daná je kružnica k so stredom S a dva jej vonkajšie body A, B. (Body A, B, S neležia na jednej priamke.) Zostrojte kružnicu k', ktorá prechádza bodmi A, B a rozdeľuje kružnicu k na dva rovnako dlhé oblúky.

(Pi Mu Epsilon Journal, 1951)

6.2 Nech x, y, z sú kladné reálne čísla spĺňajúce vzťah

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 2.$$

Dokážte, že $8xyz \leqq 1$.

(Rumunsko, 2006)

6.3 Nech p, q sú dve rôzne nesúdeliteľné prirodzené čísla. Množinu všetkých kladných celých čísel rozdelíme na tri podmnožiny také, že pre každé celé číslo z každá z týchto podmnožín obsahuje práve jedno z čísel z, $z+p$, $z+q$. Dokážte, že takéto rozdelenie existuje práve vtedy, keď číslo $p+q$ je deliteľné tromi.

(Nemecko, 2003)

6.4 Daný je trojuholník ABC taký, že $|AB| \neq |AC|$. Označme v ňom stred vpísanej kružnice I, stred opísanej kružnice O a dotykový bod vpísanej kružnice so stranou BC nech je D. Predpokladajme, že priamky IO a AD sú na seba kolmé. Dokážte, že priamka AD je obrazom ťažnice na stranu BC v osovej súmernosti podľa osi vnútorného uhla BAC.

(Crux Mathematicorum, 1997)

6.5 Majme postupnosť zadanú rekurentne predpisom

$$\begin{aligned} x_0 &= 5, \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{x_n} \qquad \text{pre } n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Nájdite x_{1000} s presnosťou na jedno desatinné miesto.

(Švédsko, 2004)

Riešenia súťažných úloh KS SK MO

Prvá séria

1.1

Kristián Príslovka si môže byť istý. Pri dôkaze budeme potrebovať odpoveď na nasledujúce dve otázky: Akú najväčšiu hodnotu môže mať niektorá z mincí? Aké je minimálne množstvo jednotoliarových mincí?

Odpoveď na prvú otázku je 120. Ak by sme mali mincu, ktorá by mala väčšiu hodnotu, zvyšných 240 mincí by k súčtu prispelo hodnotou aspoň 240, a preto by sme spolu mali mince v hodnote viac ako 360, čo je v spore so zadaním.

Intuitívne sa zdá, že najmenej jednotoliarových mincí bude práve vtedy, keď ostatné mince budú dvojtoliarové (čiže čo najmenšie). V takom prípade nám vyjde 122 jednotoliarových mincí. Naozaj je to minimálny počet. Ak by sme ich chceli mať k, pričom $k < 122$, tak by spolu so zvyšnými $241 - k$ mincami, z ktorých každá má hodnotu aspoň 2, dávali súčet aspoň $k + 2 \cdot (241 - k) = 482 - k$, čo je pre $k < 122$ viac ako 360, a teda znovu dostávame spor so zadaním.

Ukážeme dva spôsoby rozdelenia mincí na tri kôpky s rovnakou hodnotou.

V prvom prípade budeme kôpky tvoriť nasledovne. Na prvú dáme 120 jednotoliarových mincí. Ostatné mince dáme najskôr všetky na druhú kôpku. Potom budeme prekladať po jednej minci z druhej kôpky na tretiu až do momentu, keď by preloženie mince (ktorej hodnotu označme x) spôsobilo, že hodnota mincí v tretej kôpke bude aspoň 120. Ak by to bolo presne 120, tak mincu s hodnotou x preložíme na tretiu kôpku a máme správne rozdelenie. Ak by to bolo viac, odoberieme mincu v hodnote x z druhej kôpky. Hodnota druhej aj tretej kôpky tak bude zrejme menšia ako 120. Odobratú mincu dáme na prvú kôpku, z ktorej vezmeme x jednotoliarových mincí (to všetko môžeme spraviť, lebo každá minca má hodnotu menšiu alebo rovnú ako 120 a na prvej kôpke máme 120 jednotoliaroviek) a tie už podľa potreby rozdelíme medzi druhú a tretiu kôpku, aby hodnota každej bola 120.

Druhý spôsob je zaujímavý v tom, že dokazuje zároveň silnejšie tvrdenie. Kristián vie rozdeliť 241 mincí v hodnote 360 dokonca tak, že na jednej kôpke budú len jednotoliarovky. Začnime tým, že prvých 120 jednotiek dáme na prvú kôpku. Ostalo nám 121 mincí v hodnote 240 toliarov. Teraz použijeme trik, ktorý je veľmi užitočné poznať, lebo sa dá často použiť. Označme hodnoty zvyšných mincí postupne $a_1, a_2, \dots, a_{121}$. Ďalej označme $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, …, $s_{121} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{121}$. Súčet hodnôt mincí medzi i-tou a j-tou mincou vrátane je $a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j = s_j - s_{i-1}$.

Máme 121 súčtov, pre ktoré platí $0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_{121} = 240$ a zároveň podľa Dirichletovho princípu existujú aspoň dva súčty, ktoré dávajú rovnaký zvyšok po delení číslom 120. Keďže sú rôzne a v rozpätí menšom ako 240, ich rozdiel je presne 120. Označme tieto súčty s_z a s_k ($s_z < s_k$). Zoberieme teraz mince s hodnotami $a_{z+1}, a_{z+2}, \dots, a_k$. Súčet ich hodnôt je $s_k - s_z = 120$, a preto ich môžeme dať na druhú kôpku. Na tretiu dáme zvyšné mince (ktorých hodnota je samozrejme tiež 120 toliarov).

1.2

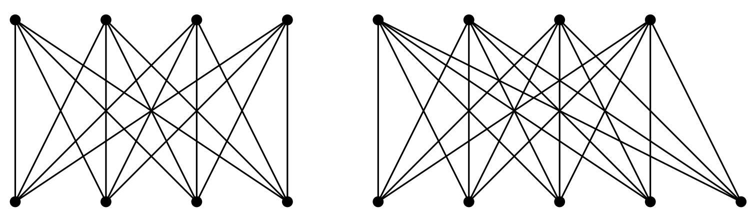
Situáciu znázorníme na papieri tak, že nakreslíme obrázok s n bodmi (tzv. *vrcholmi*), ktoré predstavujú domorodcov, a spojíme úsečkami (tzv. *hranami*) práve tých domorodcov, ktorí sa priatelia. Uvedenému obrázku sa zvykne hovoriť *graf*. Takéto znázornenie budeme používať vo zvyšku riešenia.

a) Prvá časť úlohy je veľmi jednoduchá. Domorodci môžu skutočne vždy splniť náčelníkov rozkaz. Stačí, ak si každí dvaja domorodci, ktorí sa priatelia, navlečú na náhrdelník kamienok rovnakej farby, ale taký, aký už žiadni iní domorodci nemajú. Takto budú mať dvaja domorodci, čo sa priatelia, vždy aspoň jeden rovnaký kamienok, ale dvaja, ktorí sa nepriatelia, rovnaké kamienky mať nebudú.

b) Skôr ako sa pustíme do riešenia druhej časti úlohy, skúsme sformulovať zadanie v reči grafov. V úlohe vystupujú náhrdelníky s farebnými kamienkami. Najjednoduchším spôsobom, ako to zaznačiť do obrázka, je ofarbiť každý vrchol všetkými tými farbami, ktoré má príslušný domorodec na svojom náhrdelníku. (Jeden vrchol teda bude ofarbený aj viacerými farbami.) Aby ofarbenie vyhovovalo náčelníkovmu rozkazu, musia byť každé dva vrcholy, ktoré sú spojené hranou, ofarbené aspoň jednou spoločnou farbou, ale vrcholy, medzi ktorými hrana nie je, žiadne dve rovnaké farby mať nemôžu.

Všimnime si, že podobne ako vrcholy sa dajú ofarbiť aj hrany. Každú hranu grafu ofarbíme všetkými tými farbami, ktoré majú jej koncové vrcholy spoločné. Takto sa môže stať, že niektoré hrany budú ofarbené aj viacerými farbami. Dôležité však je, že každá hrana musí byť ofarbená aspoň jednou farbou, keďže každí dvaja domorodci spojení hranou musia mať aspoň jeden kamienok spoločnej farby.

Budeme ofarbovať vrcholy a hrany grafu tak, ako sme naznačili. Keď chvíľu kreslíme rôzne grafy a ofarbujeme ich čo najmenším počtom farieb, podarí sa nám nájsť rozostavenia ako na obr. 50.



$n = 8$ $n = 9$

Obr. 50

Všetci domorodci sú tu rozdelení na dve veľké skupiny, v rámci ktorých nie je nikto s nikým priateľom, ale každý domorodec z jednej skupiny sa priatelí s každým domorodcom z druhej skupiny[7]. Nazvime tieto skupiny „sekty“ – pre párne n sú obe sekty rovnako veľké, pre nepárne n je v jednej z nich o jedného domorodca viac[8].

Skúsme zistiť, aký najmenší počet farieb na ofarbenie grafu s dvoma sektami bude stačiť. Môže sa stať, že niektoré dve hrany budú ofarbené tou istou farbou, napríklad oranžovou? Ak by boli, znamenalo by to, že aj ich koncové vrcholy sú ofarbené oranžovou farbou. Tieto koncové vrcholy sú aspoň tri (jeden koncový vrchol môžu mať obe oranžové hrany spoločný). Sekty na ostrove sú však iba dve, preto aspoň dva z oranžových vrcholov musia byť v tej istej sekte. To je však spor, pretože v rámci sekty sa žiadne dva vrcholy nepriatelia.

Z toho vyplýva, že všetky hrany musia byť ofarbené rôznymi farbami. Počet hrán je $\frac{1}{4}n^2$ pre párne, resp. $\frac{1}{4}(n^2-1)$ pre nepárne n. Každá hrana má inú farbu, čo znamená, že aj farieb budeme potrebovať aspoň toľko, ako hrán.

Zaujímavé na tomto konkrétnom príklade je, že počet farieb, ktorý sme dostali, nám bude stačiť aj pre ľubovoľný iný graf s n vrcholmi. Použijeme matematickú indukciu vzhľadom na počet vrcholov grafu. Pre nepárne n dokážeme, že pomocou $\frac{1}{4}(n^2-1)$ farieb vieme požadovaným spôsobom ofarbiť ľubovoľný graf s n vrcholmi. Dôkaz pre párne n je takmer rovnaký a pozorný čitateľ by ho mal po prečítaní uvedeného riešenia zvládnuť urobiť sám.

1. krok. Nech $n=1$. Chceme dokázať, že graf s jedným vrcholom vieme ofarbiť 0 farbami. Keďže v grafe s jediným vrcholom nemôžu byť žiadne hrany, nula farieb nám skutočne bude stačiť.

2. krok. Nech sa ľubovoľný graf s $n=2k+1$ vrcholmi dá ofarbiť použitím najviac $\frac{1}{4}(n^2-1)$ farieb. Uvažujme ľubovoľný graf s $n+2$ vrcholmi. Dokážeme, že na jeho ofarbenie stačí $\frac{1}{4}((n+2)^2-1)$ farieb.

Pokiaľ graf neobsahuje žiadne hrany, netreba ani jednu farbu a teda $\frac{1}{4}((n+2)^2-1)$ farieb bude určite stačiť. Ak graf nejaké hrany obsahuje, vezmime ľubovoľné dva vrcholy spojené hranou. Predstavme si na chvíľu, že sme tieto dva vrcholy z grafu vygumovali spolu so všetkými hranami, ktoré z nich vychádzajú. Ostal nám graf s n vrcholmi, ktorý vieme (podľa indukčného predpokladu) ofarbiť najviac $\frac{1}{4}(n^2-1)$ rôznymi farbami.

Primyslime si vygumované vrcholy naspäť. Zatiaľ nie sú ofarbené žiadnou farbou, čo evidentne nie je dobre, pretože ich spája jedna spoločná hrana. Tiež je možné, že z nich vychádzajú ďalšie hrany do zvyšnej časti grafu, a tie zatiaľ nie sú ofarbené. Z oboch vrcholov môže vychádzať do už ofarbenej časti grafu najviac po n hrán, plus jedna spoločná hrana ich ešte spája. Najjednoduchším riešením by bolo ofarbiť každú z týchto (najviac) $2n+1$ hrán rôznou farbou – to je však príliš veľa, „nevyšiel“ by nám indukčný krok.

Treba si preto všimnúť, že nepotrebujeme ofarbiť každú hranu rôznou farbou. Ak totiž majú oba vygumované vrcholy spoločného priateľa, môžeme jemu a obom vy-

---

[7] Takýto graf sa nazýva *úplný bipartitný graf* – bipartitný preto, lebo vrcholy sú rozdelené na dve skupiny, pričom hrany vedú iba z jednej skupiny do druhej, nikdy nie do tej istej; úplný preto, lebo z popísaných „bipartitných“ hrán sa v ňom nachádza každá možná.

[8] V bipartitnom grafe vo všeobecnosti nemusia byť sekty rovnako veľké, s takými len pracujeme v tomto riešení

gumovaným dať kamienok tej istej farby, čiže ofarbiť dve hrany jednou farbou. Inak povedané, každému vrcholu v už ofarbenom grafe pridáme jednu novú farbu. Túto novú farbu dáme zároveň buď jednému, druhému, obom alebo ani jednému z dvoch vygumovaných vrcholov podľa toho, s ktorými z nich sa priatelí a s ktorými nie. Tým vyrobíme len n nových farieb, pričom sa nám podarí ofarbiť nimi všetky hrany idúce z už predtým ofarbenej časti do vygumovaných vrcholov. Nakoniec ešte budeme potrebovať jednu ďalšiu farbu na ofarbenie hrany spájajúcej dva vygumované vrcholy (ktorú treba len v prípade, že títo dvaja nemali žiadneho spoločného priateľa – ale aj to sa môže stať).

Spolu teda na ofarbenie grafu s $n+2$ vrcholmi potrebujeme nanajvýš

$$\frac{n^2-1}{4}+n+1=\frac{n^2+4n+3}{4}=\frac{(n+2)^2-1}{4}$$

farieb. Tým je indukčný krok ukončený.

Odpoveď. Minimálny počet farieb je $\frac{1}{4}(n^2-1)$ pre nepárne a $\frac{1}{4}n^2$ pre párne n.

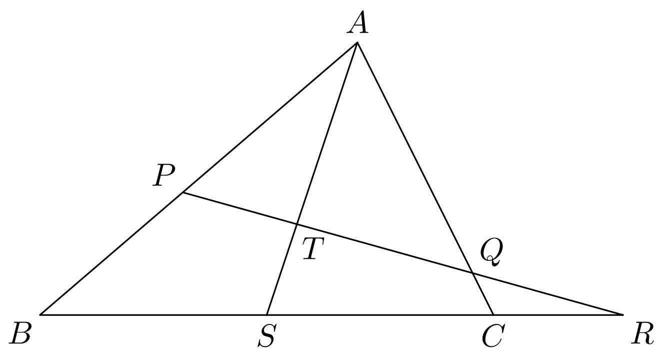
1.3

Riešenie je uvedené pri úlohe 3.3.

1.4

Tvrdenie sa dalo dokázať viacerými rôznymi spôsobmi, napríklad analyticky, vhodným viacnásobným využitím sínusovej vety (tak to dokázal *Tomáš Kocák*) alebo cez obsahy trojuholníkov. Uvedieme riešenie využívajúce Menelaovu vetu.

Nech $V=|QA|/|QC|\cdot|PA|/|PB|$. Chceme dokázať, že V je aspoň 4. Ešte treba ošetriť špeciálne prípady, keď $|QC|=0$ alebo $|PB|=0$ (to znamená, že PQ je ťažnicou na jednu zo strán b, c). Vtedy však dokazované tvrdenie triviálne platí. Ďalej budeme predpokladať, že PQ nie je ťažnicou ani na jednu zo strán b, c. Ak je priamka PQ rovnobežná s priamkou BC, ľahko možno ukázať, že v dokazovanom tvrdení nastáva rovnosť. Ďalej budeme predpokladať, že priamka PQ nie je rovnobežná s priamkou BC.



Obr. 51

Označme S stred strany BC. Vieme, že $|AT| : |TS| = 2 : 1$. Skúsme využiť tento pomer. Nech R je priesečník priamok PQ a BC (obr. 51). Z Menelaovej vety pre trojuholník ABS a priamku PT dostávame

$$\frac{|RB|}{|RS|} \cdot \frac{|TS|}{|TA|} \cdot \frac{|PA|}{|PB|} = 1.$$

Odtiaľ $|PA|/|PB| = 2 \cdot |RS|/|RB|$. Podobne z Menelaovej vety pre trojuholník ACS a priamku QT dostávame

$$\frac{|RC|}{|RS|} \cdot \frac{|TS|}{|TA|} \cdot \frac{|QA|}{|QC|} = 1,$$

čiže $|QA|/|QC| = 2 \cdot |RS|/|RC|$. Takže

$$V = \frac{4 \cdot |RS|^2}{|RB| \cdot |RC|}.$$

Už len stačí využiť, že $|SB| = |SC|$ a bod R leží mimo úsečky BC. Preto

$$|RB| \cdot |RC| = (|RS| + |SB|) \cdot (|RS| - |SB|) = |RS|^2 - |SB|^2.$$

Napokon

$$V = \frac{4 \cdot |RS|^2}{|RB| \cdot |RC|} = \frac{4 \cdot |RS|^2}{|RS|^2 - |SB|^2} > 4.$$

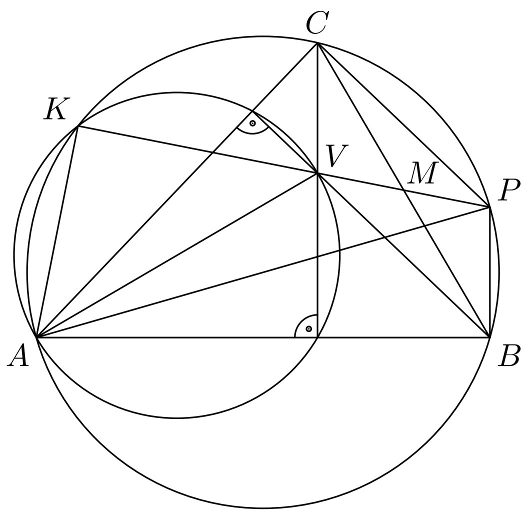
1.5

Riešenie je uvedené pri úlohe 3.5.

DRUHÁ SÉRIA

2.1

Označme P priesečník priamky KV a kružnice opísanej trojuholníku ABC rôzny od K. Všimnime si, že bod K leží na Tálesovej kružnici nad priemerom AV, preto

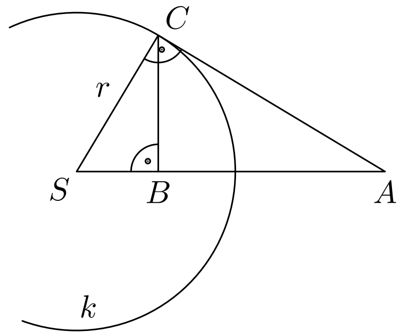


Obr. 52

uhol AKV je pravý. Platí $|\sphericalangle AKP| = |\sphericalangle AKV| = 90°$, a keďže bod K patrí kružnici opísanej trojuholníku ABC, úsečka AP musí byť jej priemerom. Bod B leží na Tálesovej kružnici nad priemerom AP, teda $|\sphericalangle ABP| = 90°$. Inak povedané, úsečka PB je kolmá na stranu AB. Podobne úsečka CV je kolmá na stranu AB, keďže CV je časťou výšky na stranu AB. Takže $PB \parallel CV$. Rovnakým spôsobom možno odvodiť $PC \parallel BV$. Dostávame tak, že $CVBP$ je rovnobežník. Odtiaľ už triviálne vyplýva dokazované tvrdenie, keďže uhlopriečky v ľubovoľnom rovnobežníku sa rozpoľujú (obr. 52).

2.2

Našou úlohou je nájsť taký bod, aby platila zadaná rovnosť. Konštrukcia je však sťažená o to, že môžeme používať len kružidlo. Skúsme na úvod vyskúšať, ako by konštrukcia vyzerala s kružidlom a pravítkom. Aspoň zistíme, kde vlastne bod B leží. Z podmienok v zadaní vyplýva, že bod B je jediný bod na polpriamke SA, pre ktorý platí $|SB| = r^2/|SA|$.



Obr. 53

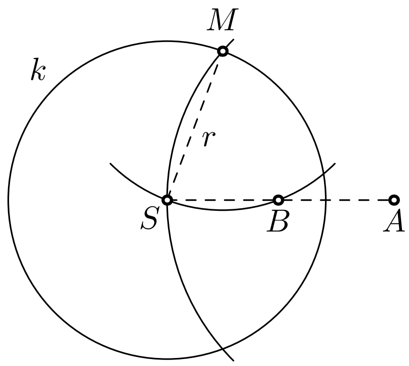
Ak bod A leží na kružnici k, priamo zo zadania vyplýva, že bod B je totožný s bodom A a úloha je vyriešená. Pozrime sa na bod A ležiaci zvonka kružnice k, t. j. zaoberajme sa prípadom, keď $|SA| > r$. Zo zadaného vzťahu potom vyplýva $|SB| < r$, preto bod B leží vnútri kružnice k. Vzťah podobný vzťahu $|SA| \cdot |SB| = r^2$ sa podobá vzťahu v Euklidovej vete pre pravouhlý trojuholník. V našom prípade by to bola Euklidova veta o odvesne s dĺžkou r. Keďže $|SA| > r > |SB|$, je preponou trojuholníka úsečka SA a bod B je pätou výšky. Už vieme, ako dostaneme tretí vrchol nášho trojuholníka: leží na Tálesovej kružnici nad priemerom SA a tiež na kružnici k, pretože jeho vzdialenosť od bodu S je r. Keď zostrojíme tento bod, stačí z neho spraviť kolmicu na priamku SA a dostaneme hľadaný bod B ako pätu kolmice (obr. 53). Situáciu s bodom A ležiacim vnútri kružnice možno vyriešiť obrátením uvedeného postupu.

Vráťme sa k pôvodnej úlohe. Máme k dispozícii iba kružidlo. Začíname s kružnicou k, jej stredom S a bodom A. Konštrukcia z predošlého odseku zlyhá hneď na začiatku. Aby fungovala, potrebujeme Tálesovu kružnicu s priemerom SA. A tú zostrojiť iba kružidlom nevieme, pretože zatiaľ nevieme spraviť stred úsečky. Jednou možnosťou je skúšať zostrojiť iba kružidlom stred danej úsečky (dá sa to). My skúsime niečo iné.

Keď sa pozrieme hlbšie na podstatu Euklidovej vety, zistíme, že je to vlastne „podobnosť“. Vzťah zo zadania prepíšeme na rovnosť pomerov

$$\frac{|SB|}{r} = \frac{r}{|SA|}.$$

Nájdeme podobné trojuholníky, v ktorých sú tieto pomery pomermi dĺžok dvoch strán. Úsečku s dĺžkou $|SA|$ už na obrázku máme, k nej do trojuholníka treba tretí vrchol M. Jedna strana tohto trojuholníka má mať dĺžku r, preto zvolíme M na kružnici k. Teraz je v trojuholníku MSA pomer $r/|SA|$ pomerom dvoch strán zvierajúcich uhol MSA. Druhý trojuholník podobný s trojuholníkom MSA musí mať uhol rovnakej veľkosti, položme ho teda tak, aby mali uhol MSA spoločný. Z rovnosti pomerov vyplýva, že druhým trojuholníkom bude trojuholník BSM.



Obr. 54

Za bod M potrebujeme zvoliť bod, ktorý vieme zostrojiť. Hneď sa ponúka priesečník kružnice $l(A, |SA|)$ s kružnicou k (obr. 54). V tom prípade je trojuholník MSA rovnoramenný so základňou MS. Preto aj trojuholník BSM bude rovnoramenný so základňou BS. A preto vieme zostrojiť bod B; leží na kružnici $m(M, |MS|)$ a kružnici s ňou súmernou podľa priamky SA (pri tejto konštrukcii nepotrebujeme predpoklad $|SA| > r$).

Uvedená úvaha o podobnosti trojuholníkov slúži ako dôkaz toho, že sme naozaj zostrojili bod B, ktorý spĺňa vzťah $|SA| \cdot |SB| = r^2$. Symetria podľa priamky SA zase zaručuje, že takto zostrojený bod B leží na polpriamke SA. Zo vzťahu $|SB| = r^2/|SA|$ vyplýva, že hľadaný bod je jediný.

Všetko by bolo v poriadku, keby naša konštrukcia fungovala pre každú možnú polohu bodu A. Potrebujeme však, aby kružnica $\ell(A, |SA|)$ mala dva priesečníky s kružnicou k. To nenastane pre $|SA| \leqq r/2$. V takom prípade môžeme postupovať napríklad nasledovne.

K danej úsečke vieme nájsť úsečku s dvojnásobnou dĺžkou (postupujeme ako pri konštrukcii pravidelného šesťuholníka). Zopakovaním tejto konštrukcie vieme k bodu A nájsť bod A' na polpriamke SA taký, že $|SA'| = n \cdot |SA|$. Pre dostatočne veľké prirodzené číslo n už bude $|SA'| > r/2$, preto použijeme uvedenú konštrukciu a zostrojíme bod B'

spĺňajúci vzťah $|SB'| \cdot |SA'| = r^2$. Preň platí

$$|SB'| = \frac{r^2}{|SA'|} = \frac{r^2}{n \cdot |SA|} = \frac{|SB|}{n}.$$

Takže na zostrojenie bodu B treba úsečku SB' zväčšiť n-krát, čo urobíme rovnakým spôsobom, akým ako sme zväčšili úsečku SA na SA'.

2.3

Na začiatku treba vyskúšať špeciálne „malé“ prípady, aby sme nazreli do štruktúry nerovnosti a zžili sa s problémom. Navyše tak často zistíme, kedy nastáva rovnosť (a budeme na to brať ohľad pri odhadoch, ktoré budeme používať).

Pre $n = 1$ dostávame na oboch stranách $a_1 - a_2 + a_3$ a teda vždy platí rovnosť. Zaujímavejšie je to pre $n = 2$. Pri predpokladoch $0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ chceme dokázať nerovnosť

$$\sqrt{a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5} \geqq \sqrt{a_1} - \sqrt{a_2} + \sqrt{a_3} - \sqrt{a_4} + \sqrt{a_5}.$$

Prirodzene by sme sa chceli zbaviť odmocnín. Skôr či neskôr však dôjdeme k tomu, že len umocňovaním sa to nedá, a tak zavedieme substitúciu $x_i = \sqrt{a_i}$ pre $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Dostávame tak nový problém. Pre $0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$ chceme dokázať (po umocnení na druhú) nerovnosť

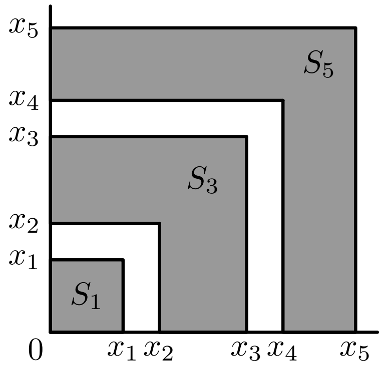
$$x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + x_5^2 \geqq (x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5)^2.$$

Niečo takéto ľahko dokážeme napríklad vhodným preskupením členov (tak, aby sme využili nerovnosti pre x_i). Jeden z možných spôsobov je urobiť úpravu

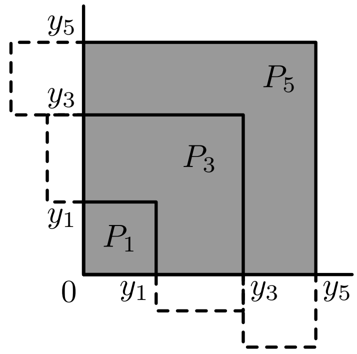
$$\begin{aligned} &x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + x_5^2 - (x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5)^2 = \\ &= 2(x_5 - x_4)(x_4 - x_3) + 2(x_5 - x_4)(x_2 - x_1) + 2(x_3 - x_2)(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Pravá strana je určite kladná. Tým je vyriešený prípad $n = 2$. Môžeme sa pokúsiť substitúciu a preusporiadanie použiť vo všeobecnosti, ale vyzerá to ako ťažká cesta, najmä kvôli mnohým členom, ktoré nám vzniknú na pravej strane po umocnení na n-tú. Zostaňme pri $n = 2$ a skúsme nájsť všeobecnejšiu myšlienku.

V substituovanej nerovnosti máme samé štvorce (je homogénna, stupňa 2). Tu nám môže prísť na um geometrická interpretácia (vôbec nie nezvyčajný postup pri dokazovaní nerovností). Označme $y_1 = x_1$, $y_3 = x_1 - x_2 + x_3$ a $y_5 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5$ a nakreslime dva obrázky. Ľavá strana nerovnosti je striedavé sčitovanie a odčítavanie nejakých obsahov štvorcov. Umiestnime ich tak, aby boli rovnako orientované a s jedným spoločným vrcholom. Obsah vyfarbenej časti na obr. 55a, ktorá sa skladá z troch častí s obsahmi S_1, S_3, S_5, predstavuje veľkosť ľavej strany nerovnosti ($S_1 = x_1^2$, $S_2 = x_3^2 - x_2^2$ a $S_3 = x_5^2 - x_4^2$). Veľkosť pravej strany nerovnosti zasa vyjadruje vyfarbený štvorec na obr. 55b (so stranou veľkosti y_5).



Obr. 55a



Obr. 55b

Už si stačí len uvedomiť súvis oboch obrázkov. Dokreslime do obr. 55b štvorce so stranami y_1, y_3. Vznikne tak štvorec a dve obrátené „L-ká“ (ich obsahy označme postupne P_1, P_3, P_5), ktoré vyzerajú porovnateľne s obsahmi S_1, S_3, S_5. Sú totiž rovnako hrubé: $x_1 = y_1$, $x_3 - x_2 = y_3 - y_1$ a $x_5 - x_4 = y_5 - y_3$. Jasne vidíme, že L-ká sú na obr. 55b na seba „natlačenejšie“ a teda obsah vyfarbenej časti na obr. 55a je aspoň toľko ako obsah vyfarbeného štvorca na obr. 55b. Skúsme to zapísať formálne. Chceme dokázať $S_1 \geqq P_1$, $S_3 \geqq P_3$ a $S_5 \geqq P_5$, čo znamená dokázať nerovnosti

$$\begin{aligned} S_1 = x_1^2 &\geqq y_1^2 = P_1, \\ S_3 = x_3^2 - x_2^2 &\geqq y_3^2 - y_1^2 = P_3, \\ S_5 = x_5^2 - x_4^2 &\geqq y_5^2 - y_3^2 = P_5. \end{aligned}$$

Prvá platí triviálne a druhú (resp. tretiu) možno vydeliť kladným číslom $y_3 - y_1 = x_3 - x_2$ (resp. $y_5 - y_3 = x_5 - x_4$), čím dostaneme

$$\begin{aligned} x_3^2 - x_2^2 \geqq y_3^2 - y_1^2 \quad &\Leftrightarrow \quad x_3 + x_2 \geqq y_3 + y_1 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x_2 &\geqq x_1, \\ x_5^2 - x_4^2 \geqq y_5^2 - y_3^2 \quad &\Leftrightarrow \quad x_5 + x_4 \geqq y_5 + y_3 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x_4 + 2x_2 &\geqq 2x_3 + 2x_1. \end{aligned}$$

Kvôli usporiadaniu x_i všetky tri nerovnosti platia. Ich sčítaním dostávame požadovanú nerovnosť, čiže $S_1 + S_3 + S_5 \geqq P_1 + P_3 + P_5$.

Pre $n = 2$ sme úlohu vyriešili cez obsahy štvorcov. Prečo by to nemalo pre $n = 3$ vyjsť cez objemy kociek? Nechceme tým povedať, že pre n to budeme riešiť ako n-rozmernú geometrickú nerovnosť, ale len objasniť princíp, ako to zapíšeme a dokážeme. To však teraz pôjde ľahko.

Máme $2n + 1$ čísel $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{2n+1}$. Substituujeme $x_i = \sqrt[n]{a_i}$ pre $i \in \{1, 2, \dots, 2n+1\}$, nerovnosť umocníme na n-tú a máme dokázať, že pri predpoklade $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2n+1}$ platí

$$x_1^n - x_2^n + x_3^n - x_4^n + \dots + x_{2n+1}^n \geqq (x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots + x_{2n+1})^n.$$

Tak ako predtým označíme

$$y_{2k+1} = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots + x_{2k+1}$$

pre $k \in \{0,1,2,\dots,n\}$ a budeme porovnávať „n-rozmerné L-ká“, čiže chceme ukázať

$$\begin{aligned} S_1 = x_1^n &\geqq {y_1}^n = P_1, \\ S_3 = x_3^n - x_2^n &\geqq {y_3}^n - {y_1}^n = P_3, \\ S_5 = x_5^n - x_4^n &\geqq {y_5}^n - {y_3}^n = P_5, \\ &\vdots \\ S_{2n+1} = x_{2n+1}^n - x_{2n}^n &\geqq y_{2n+1}^n - y_{2n-1}^n = P_{2n+1}. \end{aligned}$$

Vidíme, že súčtom týchto nerovností dostaneme požadovanú nerovnosť. Prvá samozrejme platí. Ostatné sú tvaru

$$x_{2k+1}^n - x_{2k}^n \geqq y_{2k+1}^n - y_{2k-1}^n$$

pre $k \in \{1,2,\dots,n\}$. Pre každé také k ľahko dostaneme

$$\begin{aligned} y_{2k+1} - y_{2k-1} &= (x_1 - x_2 + x_3 - \dots + x_{2k+1}) - (x_1 - x_2 + x_3 - \dots + x_{2k-1}) = \\ &= x_{2k+1} - x_{2k}, \end{aligned}$$

ale zároveň aj

$$\begin{aligned} x_{2k} - y_{2k-1} &= x_{2k} - (x_1 - x_2 + x_3 - \dots + x_{2k-1}) = \\ &= (x_{2k} - x_{2k-1}) + (x_{2k-1} - x_{2k-2}) + \dots + (x_2 - x_1) > 0. \end{aligned}$$

Pre zjednodušenie zápisu označme $y_{2k-1} = a$, $x_{2k} = b$ (teda $a < b$) a navyše nech $z = x_{2k+1} - x_{2k} > 0$. Už sme ukázali, že $y_{2k+1} - y_{2k-1} = x_{2k+1} - x_{2k} = z$. Takže dokazovaná nerovnosť sa zjednoduší na tvar

$$(b+z)^n - b^n \geqq (a+z)^n - a^n$$

a tu nám postačí aj binomická veta a porovnanie členov po dvoch. Totižto posledná nerovnosť je ekvivalentná s nerovnosťou

$$\binom{n}{1}(b^{n-1} - a^{n-1})z + \binom{n}{2}(b^{n-2} - a^{n-2})z^2 + \dots + \binom{n}{n-1}(b-a)z^{n-1} \geqq 0,$$

ktorá platí, lebo $b^m - a^m > 0$ pre všetky prirodzené m. Tým sme úlohu vyriešili. Naozaj, sčítaním uvedených $n+1$ nerovností dostávame

$$x_1^n + \sum_{k=1}^{n} \left(x_{2k+1}^n - x_{2k}^n\right) \geqq y_1^n + \sum_{k=1}^{n} \left(y_{2k+1}^n - y_{2k-1}^n\right),$$

pričom členy na pravej strane sa poodčitujú a zostane len

$$x_1^n - x_2^n + x_3^n - x_4^n + \dots + x_{2n+1}^n \geqq y_{2n+1}^n = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots + x_{2n+1})^n,$$

čo sme chceli dokázať.

Iné riešenie. Uvedieme len náznak. Dôležité je uvedomiť si, že ak $a_{2k-1} = a_{2k}$ pre $k = 1, 2, \dots, n$ (aj keď v zadaní je to zakázané), tak nastáva rovnosť. Tak možno dospieť k riešeniu s rovnakou podstatou, ktoré používa techniku *mixing variables.* Nech

$$V(a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}) = \sqrt[n]{a_1 - a_2 + \dots + a_{2n+1}} - (\sqrt[n]{a_1} - \sqrt[n]{a_2} + \dots + \sqrt[n]{a_{2n+1}}).$$

Ďalej označme $b_{2k+1} = a_1 - a_2 + a_3 - \dots + a_{2k+1}$ pre $k = 0, 1, \dots, n$ (teda aj $b_1 = a_1$). Potom platia nerovnosti

$$\begin{aligned} V(a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}) &\geqq V(a_1, b_1, b_3, a_4, a_5, \dots, a_{2n+1}) \geqq \\ &\geqq V(a_1, b_1, b_3, b_3, b_5, a_6, a_7, \dots, a_{2n+1}) \geqq \\ &\vdots \\ &\geqq V(a_1, b_1, b_3, b_3, b_5, \dots, b_{2n-1}, b_{2n+1}) = 0. \end{aligned}$$

Pritom každú z týchto nerovností ľahko dokážeme a spolu tvoria presne to, čo chceme.

Iné riešenie. Opäť uvedieme len hlavnú myšlienku. Pri úvahách pre malé n a dosadzovaní konkrétnych hodnôt za čísla a_i si môžeme všimnúť, že to, že sú tam n-té odmocniny a to, že prvkov máme $2n+1$, skoro vôbec nesúvisí. Jemnou úpravou prvého riešenia dostaneme dôkaz všeobecnejšieho tvrdenia: Pre $m, n \in \mathbb{N}$ a $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{2n+1}$ platí[9]

$$\sqrt[m]{a_1 - a_2 + a_3 - \dots + a_{2n+1}} \geqq \sqrt[m]{a_1} - \sqrt[m]{a_2} + \sqrt[m]{a_3} - \dots + \sqrt[m]{a_{2n+1}}.$$

Výhodou tohto zovšeobecnenia je, že ho môžeme dokázať matematickou indukciou podľa n, zatiaľ čo pôvodné tvrdenie tak dokážeme len veľmi ťažko. Pritom táto indukcia je oveľa jednoduchšia ako prvé uvedené riešenie.

2.4

V riešení budeme používať viacero pojmov z teórie grafov. Mestá nech sú vrcholmi a linky hranami grafu, ktorý označme G. Medzi každými dvoma vrcholmi grafu G existuje cesta dĺžky[10] najviac d a najkratšia *kružnica* (t. j. cesta začínajúca a končiaca v tom istom vrchole) má dĺžku $2d+1$. Vezmime teda nejaký vrchol v, od ktorého existuje vrchol vzdialený d; na spomínanej kružnici taký musí ležať. Vyberme pre každý vrchol grafu najkratšiu cestu z neho do v (ak takých existuje viac, vezmime jednu ľubovoľnú) a ofarbime červenou tie hrany grafu G, ktoré ležia na niektorej z vybraných ciest.

[9] Platí dokonca všeobecnejšia nerovnosť

$$f(a_1 - a_2 + a_3 - \dots + a_{2n+1}) \geqq f(a_1) - f(a_2) + f(a_3) - \dots + f(a_{2n+1}),$$

kde f je konkávna funkcia na obore kladných reálnych čísel.

[10] Pod *cestou* rozumieme postupnosť nadväzujúcich hrán a jej *dĺžkou* je počet hrán.

Modrou ofarbime všetky ostatné hrany. Pozrime sa teraz na červený *podgraf.* Z toho, ako sme ofarbovali, vyplýva, že to bude *kostra* pôvodného grafu, teda nebude obsahovať kružnicu.

Pre jednoduchšie vyjadrovanie budeme pre $k \in \{0, \dots, d\}$ označovať P_k množinu všetkých vrcholov grafu G, ktorých najkratšia cesta spájajúca ich s vrcholom v je dlhá práve k. Teda $P_0 = \{v\}$ a ak si spomínanú červenú kostru nakreslíme s vrcholom v hore a červenými hranami vedúcimi vždy o jedno „poschodie" nižšie, bude k-te poschodie tvorené práve vrcholmi množiny P_k. Ďalej sa dohodnime, že pre ľubovoľný vrchol u grafu G bude V_u označovať množinu vrcholov, do ktorých sa dá dostať z u len po červených hranách, navyše tak, aby sme neprechádzali cez *koreň* v. Intuitívne teda každá množina V_u predstavuje jednu *vetvu* červeného *stromu* – tú, v ktorej leží vrchol u.

Najprv si uvedomme, že vrchol v sme vybrali tak, aby od neho existoval nejaký vrchol vzdialený d, preto všetky množiny $P_0, P_1, \dots, P_d$ sú neprázdne. Teraz poďme preskúmať, kde všade môžu ležať modré hrany. Určite nemôžu spájať dva vrcholy z tej istej vetvy. Takéto dva vrcholy majú totiž v tejto vetve nejakého spoločného *predka*, s ktorým sú oba spojené červenou cestou. Obe červené cesty sú dlhé najviac $d-1$, a tak by spolu s uvažovanou modrou hranou tvorili kružnicu kratšiu ako $2d + 1$, čo by bol spor so zadaním. Modrá hrana tiež nemôže vychádzať zo žiadneho vrcholu, ktorý je na inom poschodí ako P_d. Ak by to tak bolo, táto hrana by opäť spolu s červenými cestami z oboch jej vrcholov do v tvorila kratšiu kružnicu, ako pripúšťa zadanie.

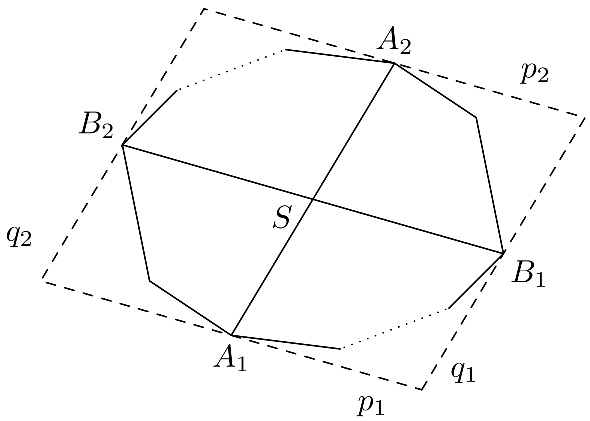
Vieme, že existuje červená cesta, ktorá zostupuje až do poschodia P_d, označme ju C. Potom platí, že aj každá iná vetva (dokonca všetky jej *výhonky*) zostupuje až do poschodia P_d. Inými slovami, z každého vrcholu, ktorý nepatrí do P_d, vychádza červená hrana smerom do nižšieho poschodia. Ak by to tak nebolo, potom by vzdialenosť tohto vrcholu od niektorého z vrcholov na C podľa už dokázaného bola väčšia ako d, pretože najkratšia cesta musí viesť cez v alebo cez P_d (iné prepojenia medzi vetvami nie sú).

Nech stupeň vrcholu v je s, teda máme s rôznych vetiev. (Celý čas predpokladáme, že $s \geqq 2$; prípad $s \leqq 1$ možno ľahko rozobrať osobitne.) Zamyslime sa teraz nad tým, aký je stupeň vrcholov v poschodí P_d. Zoberme jeden konkrétny taký vrchol. Musí z neho viesť hrana do každej zo zvyšných vetiev: ak by neviedla do žiadneho vrcholu z nejakej vetvy V, potom by jeho vzdialenosť od najvrchnejšieho vrcholu V (v poschodí P_1) bola $d + 1$, čo je priveľa. Zároveň nesmú zo žiadneho vrcholu v poschodí P_d viesť dve hrany do tej istej vetvy, pretože by (spolu s časťou tejto vetvy) vytvorili kružnicu kratšiu ako $2d + 1$. Teda z každého vrcholu v poschodí P_d vychádza $s - 1$ modrých hrán do ostatných vetiev a jedna červená smerom hore, preto stupeň každého vrcholu v P_d je s.

Uvažujme teraz ľubovoľnú červenú hranu. Označme vrcholy, ktoré spája, x a y. Z doteraz dokázaných tvrdení vyplýva, že v grafe G existuje kružnica dĺžky $2d + 1$, do ktorej patrí aj naša hrana xy. Nájdeme ju napríklad tak, že ten z vrcholov x, y, ktorý je bližšie ku koreňu v, s ním spojíme, druhý spojíme s ľubovoľným *listom* v jeho *podstrome* a následne tieto dva konce prepojíme cestou dĺžky d vedúcou niektorou zo zvyšných vetiev. Označme K túto kružnicu a z ten jej vrchol, ktorý je od x aj y najvzdialenejší. Keďže K má nepárnu dĺžku, je z jednoznačne určený. Vrcholy x aj y sú od z vzdialené d, keby boli bližšie, bolo by možné kružnicu K skrátiť. To znamená, že vrchol z spĺňa podmienku, ktorú sme na začiatku kládli na koreň v. Preto môžeme zopakovať celú úvahu, tentoraz so z ako s koreňom. Vrcholy x aj y budú v hĺbke d a teda budú mať rovnaký stupeň. Na začiatku úvahy sme však vybrali ľubovoľnú červenú hranu, takže každé dva vrcholy spojené červenou hranou sú rovnakého stupňa. Červené hrany však tvoria kostru grafu G. Takže úloha je vyriešená.

2.5

(Podľa *Martina Podoláka*.) Po nakreslení niekoľkých obrázkov si uvedomíme, že stačí uvažovať konvexné mnohouholníky $\mathcal{M}$. Rovnobežník $\mathcal{R}$ budeme hľadať taký, že stredy jeho strán budú ležať vo vrcholoch mnohouholníka $\mathcal{M}$ (to je tiež jasné z obrázkov).



Obr. 56

Označme S stred súmernosti mnohouholníka $\mathcal{M}$. Predpokladajme, že sme pre $\mathcal{M}$ zostrojili rovnobežník $\mathcal{R}$ spĺňajúci podmienky zo zadania. Nech stredy jeho strán sú vo vrcholoch A_1, A_2, B_1, B_2 (obr. 56). Žiaden bod mnohouholníka $\mathcal{M}$ neleží mimo pásu určeného priamkami p_1, p_2 rovnobežnými s priamkou B_1B_2. Keď máme danú úsečku B_1B_2, tak priamky p_1, p_2 tvoria množinu bodov X takých, že trojuholník B_1B_2X má obsah S (pre pevné kladné reálne číslo S). Body X v spomínanom páse určujú trojuholník B_1B_2X s obsahom menším ako S, body X mimo pásu zase trojuholník s obsahom väčším ako S. Keďže žiaden vrchol mnohouholníka $\mathcal{M}$ neleží mimo spomínaného pásu, je A_1 takým vrcholom mnohouholníka $\mathcal{M}$, že obsah trojuholníka $B_1B_2A_1$ je maximálny.

Analogickú úvahu vieme spraviť pre pás určený priamkami q_1, q_2. Preto obsah trojuholníka $A_1A_2B_2$ je maximálny spomedzi obsahov trojuholníkov A_1A_2X, kde X je vrchol mnohouholníka $\mathcal{M}$. Z tohto už vieme, ako nájsť rovnobežník $\mathcal{R}$ pre daný mnohouholník $\mathcal{M}$.

Nech SA_1B_1 je trojuholník, ktorého obsah je najväčší spomedzi obsahov trojuholníkov SXY, kde X, Y sú vrcholy mnohouholníka $\mathcal{M}$ (ak máme viacero možností pre voľbu A_1, B_1, vezmeme hociktoré). Nech A_2, B_2 sú obrazy bodov A_1, B_1 v stredovej súmernosti so stredom S. Rovnobežník $\mathcal{R}$, ktorého stredy strán sú body A_1, B_1, A_2, B_2, spĺňa všetky požadované podmienky. Vyplýva to z uvedených úvah.

Tretia séria

3.1

Po chvíli skúšania objavíme dve trojice spĺňajúce zadanú rovnosť: $x = y = z = 1$ pre $n = 3$ a $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ pre $n = 1$ (samozrejme, v druhom prípade vyhovujú všetky trojice, ktoré dostaneme zmenou poradia čísel 1, 2, 3). Ďalšie trojice sa nám však nedarí nájsť ani po dlhom skúšaní, vyzerá to tak, že už iné nie sú.

Zaoberajme sa tým, čo musí vyhovujúca trojica x, y, z spĺňať. Inými slovami, predpokladajme, že prirodzené čísla x, y, z spĺňajú zadanú rovnosť pre nejaké prirodzené číslo n. Je zrejmé, že potom

$$x^3 + y^3 + z^3 \geqq x^2 y^2 z^2. \tag{1}$$

Keďže na pravej strane je súčin troch druhých mocnín a na ľavej súčet troch tretích mocnín, dá sa očakávať, že táto nerovnosť bude pre „veľké" hodnoty x, y, z splnená len v prípade, keď jedna z premenných bude o dosť „väčšia" ako zvyšné dve (pre „zhruba" rovnaké hodnoty totiž výraz napravo bude rásť ako šiesta mocnina, resp. ako štvrtá, ak je jedno z čísel „malé" a zvyšné dve sú „veľké"). Táto úvaha nám priamo nepomôže, avšak prezrádza, že dôležité je usporiadanie čísel x, y, z. Bez ujmy na všeobecnosti teda predpokladajme, že $x \geqq y \geqq z$. Nerovnosť (1) potom môžeme rozšíriť na tvar

$$3x^3 = x^3 + x^3 + x^3 \geqq x^3 + y^3 + z^3 \geqq x^2 y^2 z^2 \geqq x^2 y^2 \cdot 1, \qquad \text{čiže} \qquad 3x \geqq y^2 \tag{2}$$

(použili sme fakt, že $z \geqq 1$ a predelili sme nerovnosť kladným výrazom x^2).

Ešte musíme nejako využiť podmienku, že x, y, z sú prirodzené. Pravá strana zadanej rovnosti je deliteľná výrazom x^2. Preto aj ľavá strana ním musí byť deliteľná, odkiaľ vyplýva, že $x^2 \mid y^3 + z^3$ (premyslite si, prečo). Dostávame tak nerovnosť

$$x^2 \leqq y^3 + z^3 \leqq y^3 + y^3 = 2y^3, \qquad \text{čiže} \qquad \frac{x^2}{2} \leqq y^3. \tag{3}$$

Teraz už stačí dať nerovnosti (2), (3) dokopy. Keďže všetky uvažované výrazy sú kladné, môžeme prvú z nich umocniť na tretiu a druhú umocniť na druhú. Spojením dostaneme

$$27x^3 \geqq y^6 \geqq \frac{x^4}{4}, \qquad \text{čiže (po vydelení } \tfrac{1}{4}x^3) \qquad 27 \cdot 4 \geqq x.$$

Najväčšie z trojice čísel je teda nanajvýš 108 a už len stačí vyskúšať konečne veľa možností.

Keďže tých možností je pomerne veľa, skúsme doterajšie nerovnosti vylepšiť (zatiaľ sme boli zbytočne príliš „veľkorysí" a robili sme len veľmi hrubé odhady). Nasledujúca časť riešenia bude najmä podľa *Kataríny Turekovej* a *Michala Szabadosa.*

Nerovnosť (2) možno zapísať v tvare

$$3x^3 \geqq x^3 + y^3 + z^3 = nx^2 y^2 z^2, \qquad \text{čiže} \qquad 3x \geqq ny^2 z^2$$

a po umocnení $9x^2 \geqq n^2y^4z^4$ (stále sú všetky výrazy kladné, takže si to môžeme dovoliť). S využitím tohto vieme nerovnosť (3) rozšíriť na

$$\frac{n^2y^4z^4}{9} \leqq x^2 \leqq 2y^3, \qquad \text{čiže (po vydelení } \tfrac{1}{9}y^3) \qquad n^2yz^4 \leqq 18. \tag{4}$$

Z toho je jasné, že $z = 1$ (inak $n^2yz^4 \geqq z^5 \geqq 32 > 18$, stále totiž predpokladáme, že $y \geqq z$) a $n \leqq 4$ (inak $n^2yz^4 \geqq n^2 \geqq 25 > 18$). Ostáva teda overiť len niekoľko málo prípadov, akú hodnotu môže n nadobúdať.

Možnosti $n = 3$ a $n = 1$ prípustné sú, ako sme uviedli na začiatku (zadanie nevyžaduje nájsť všetky trojice spĺňajúce danú rovnosť, takže viac sa týmito prípadmi zaoberať nemusíme, nie je však ťažké ukázať, že okrem tých spomenutých už iné trojice neexistujú).

Ak $n = 4$, nerovnosť (4) má tvar $4^2 \cdot y \cdot 1^4 \leqq 18$, t. j. nutne $y = 1$. Podľa (3) potom $x^2 \leqq 2 \cdot 1^3 = 2$ a nutne $x = 1$. Avšak pre $x = y = z = 1$ máme $n = 3$. Takže pre $n = 4$ zadaná rovnosť nie je nikdy splnená.

Ak $n = 2$, nerovnosť (4) má tvar $2^2 \cdot y \cdot 1^4 \leqq 18$, takže $y \leqq 4$. Už skôr sme odvodili, že $x^2 \mid y^3 + z^3$. V tomto prípade preto $x^2 \mid y^3 + 1$. Pre $y = 4$ dostávame $x^2 \mid 65$, čo je nie možné pre žiadne $x \geqq y$. Pre $y = 3$ máme $x^2 \mid 28$, čo opäť nedáva žiadnu možnosť pre $x \geqq y$. Pre $y = 2$ máme $x^2 \mid 9$, teda jediná možnosť pre $x \geqq y$ je $x = 3$. Trojica $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$ však dáva $n = 1$. Konečne pre $y = 1$ máme $x^2 \mid 2$, odkiaľ $x = 1$ a opäť $n \neq 2$.

Odpoveď. Jediné kladné celé čísla n spĺňajúce podmienku zo zadania sú 1 a 3.

3.2

Očíslujme guľôčky zľava doprava číslami od 1 do 2005 a pre n-tú z nich označme s_n súčet počtu bielych guľôčok napravo a počtu čiernych guľôčok naľavo od nej. Pozrime sa teraz bližšie na dve susedné guľôčky na miestach n a $n+1$. Ak sú obidve čierne, tak napravo od seba majú obe rovnako veľa bielych guľôčok a guľôčka s poradovým číslom $n+1$ má naľavo o jednu čiernu guľôčku viac ako n-tá, preto $s_{n+1} = s_n + 1$. Podobne, ak sú obe biele, tak $s_{n+1} = s_n - 1$. Napokon, ak sú rôznych farieb, tak buď má n-tá napravo o jednu bielu guľôčku viac a naľavo o jednu čiernu menej ako guľôčka s číslom $n + 1$ (to nastane, ak prvá z nich je čierna a druhá biela) alebo sú tieto počty pre obe guľôčky rovnaké (pre opačné poradie farieb). Tak či tak, v oboch týchto prípadoch máme $s_{n+1} = s_n$. A to okrem iného znamená, že susedné súčty sa nikdy nelíšia o viac ako o 1.

Začnime teraz prechádzať guľôčky zľava doprava a sledujme, ako súvisí farba n-tej guľôčky s tým, koľkokrát sme už videli jej súčet s_n. Nech S je nejaký súčet vyskytujúci sa v našej postupnosti aspoň dvakrát a nech m a n sú dve po sebe idúce miesta jeho výskytu (čiže $s_m = s_n = S$ a medzi pozíciami m a n sa už S nenachádza). Ukážeme, že m-tá a n-tá guľôčka majú rôzne farby. Ak $n = m + 1$, tak máme dve susedné pozície s rovnakým súčtom, preto sa farby guľôčok na týchto miestach musia líšiť. Predpokladajme teraz, že $n > m + 1$. Čísla $s_{m+1}, \dots , s_{n-1}$ sú všetky rôzne od S

a susedné sa líšia najviac o jedna, preto sú buď všetky väčšie ako S alebo sú všetky menšie. Čiže buď $s_{m+1} = s_m + 1$ a $s_{n-1} = s_n + 1$ a potom m-tá guľôčka musí byť čierna a n-tá biela, alebo $s_{m+1} = s_m - 1$ a $s_{n-1} = s_n - 1$ a farby sú v opačnom poradí. Vidíme teda, že s každým ďalším výskytom súčtu S sa zmení farba prislúchajúcej guľôčky.

Aká farba je však na mieste prvého výskytu? Označme B a C celkové počty bielych a čiernych guľôčok v rade. Aby sme nemuseli rozoberať rôzne prípady podľa farby prvej a poslednej guľôčky v rade, tak situáciu trochu zjednodušíme. Pridajme na začiatok radu fiktívnu bielu guľôčku a na jeho koniec fiktívnu čiernu guľôčku[11]. To nám nijako nezmení súčty $s_1 \dots s_{2005}$. Ak dodefinujeme s_0 a s_{2006}, tak dostaneme $s_0 = B$ a $s_{2006} = C$. Pri prechode radom zľava doprava začíname na súčte B, preto keď prvýkrát zbadáme súčet väčší ako B, tak sme k nemu museli prísť zdola, čo môže nastať len pre čiernu guľôčku. Podobne súčty menšie ako B (a zrejme aj samotné B) začínajú bielymi guľôčkami. No a rovnakým spôsobom môžeme ukázať, že súčty väčšie ako C končia bielymi a súčty menšie alebo rovné C čiernymi guľôčkami.

Predpokladajme, že $B < C$. Potom súčty S ($B < S \leqq C$) začínajú aj končia čiernymi guľôčkami, preto sa musia v postupnosti vyskytovať nepárne veľa krát. Naopak, ostatné súčty začínajú a končia guľôčkami rôznych farieb a medzi súčtami sa nachádzajú párny počet ráz. Nesmieme však zabudnúť odpočítať jeden výskyt súčtov B a C spôsobený fiktívnymi guľôčkami. Dostaneme, že nepárne veľa krát sa vyskytujú práve tie súčty S, pre ktoré je $B \leqq S < C$. Takýto súčet je ale podľa zadania iba jeden, preto nutne $B = C - 1$ a $S = 1002$. Prípad $B > C$ možno vyšetriť podobne.

Ešte sme neukázali, že situácia, keď jediný súčet vyskytujúci sa nepárny počet krát je 1002, môže naozaj nastať. Uvažujme preto rad 1002 bielych a 1003 čiernych guľôčok rozostavených na striedačku (začínajúci aj končiaci čiernou guľôčkou). V každej susednej dvojici majú guľôčky navzájom rôzne farby, preto sú všetky súčty rovnaké a rovné $s_1 = 1002$. Medzi súčtami sa teda vyskytuje jediné číslo 1002 a to je tam 2005-krát.

Iné riešenie. V predchádzajúcom riešení sme nijako nezasahovali do toho, ako sú guľôčky v rade zoradené. Čo keby sme ich však skúsili vhodne poprehadzovať? Zoberme dve susedné guľôčky rôznych farieb. Už vieme, že obe musia mať rovnaký súčet, označme ho S. Ak tieto guľôčky navzájom vymeníme, tak oba súčty klesnú alebo stúpnu o jedna, podľa toho, či je prvá guľôčka čierna a druhá biela, alebo naopak. Počet výskytov súčtu S teda klesne o dva, zatiaľ čo jeden zo súčtov $S-1$, $S+1$ sa bude v postupnosti nachádzať o dva razy viac. To znamená, že parita počtu ich výskytov sa vôbec nezmení. Takýmito výmenami môžeme preusporiadať guľôčky do stavu, v ktorom máme na začiatku radu všetky čierne guľôčky a ďalej všetky biele guľôčky. Odtiaľto je už úlohu doriešiť jednoduché.

3.3

Po nakreslení niekoľkých obrázkov možno spozorovať niekoľko faktov:

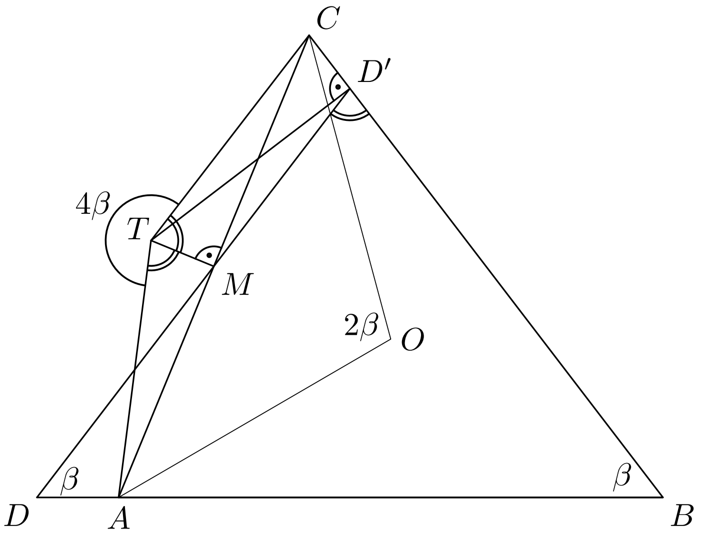
(1) Celá situácia je určená trojuholníkom ABC, nemáme žiadne ďalšie voliteľné parametre.

[11] Používanie takýchto neutrálnych okrajových prvkov (tzv. *sentinelov*) je bežné najmä v programovaní. V riešeniach väčšinou nehrajú kľúčovú rolu, dokážu však zjednodušiť ošetrovanie špeciálnych prípadov.

(2) Polohu skoro všetkých bodov určujeme pomocou veľkosti uhla ABC. Preto ak budeme určovať veľkosť nejakého uhla, skúsime ju vyjadriť pomocou $|\sphericalangle ABC| = = \beta$.

(3) Bod O slúži len na určenie polohy bodu T.

Pozrieme sa na pozorovanie (3) v duchu pozorovania (2). Uhol AOC má veľkosť 2β, preto uhol ATC neobsahujúci bod B má veľkosť 4β. Ako vidíme, treba rozobrať možné polohy bodu T. Budeme zaoberať situáciou, keď bod T leží v polrovine opačnej k ACB (prípad, keď T leží v polrovine ACB, možno vyriešiť podobne). Potom uhly ATM aj CTM majú veľkosť $180° - 2\beta$ (to je kladné číslo, keďže trojuholník ABC je ostrouhlý). Bod T leží na osi strany AC a jeho presná poloha je určená spomínanými uhlami.



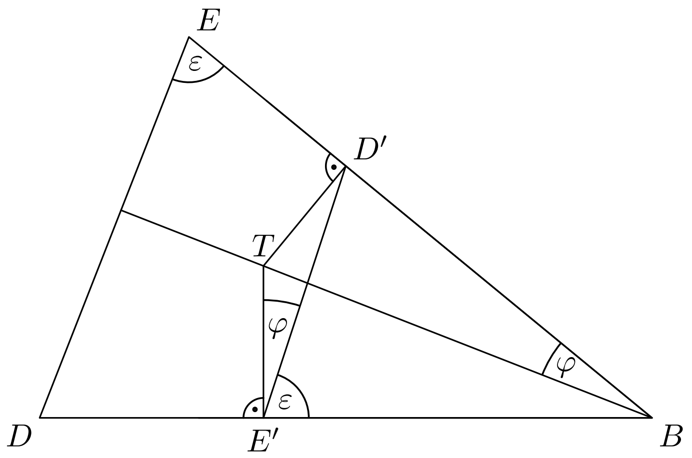
Obr. 57

Pozrime sa na bod D. Uhly MDB a CBD majú rovnakú veľkosť. Sú však umiestnené tak, že nevytvoria tetivový štvoruholník. Môžeme vytvoriť rovnoramenný trojuholník, keď úsečku DM predĺžime tak, aby preťala priamku BC v bode D'. Potom uhol $BD'D$ má veľkosť $180° - 2\beta$. Taký uhol sme získali aj pri určovaní polohy bodu T. Zo zhodnosti uhlov CTM, $BD'D$ vyplýva, že body C, M, T, D' ležia na jednej kružnici (obr. 57), i keď zdôvodnenie tohto faktu môže byť rôzne v závislosti od poradia bodov B, C, D' na priamke BC. Uhol CMT je pravý, preto aj uhol $CD'T$ je pravý (to zrejme platí aj v špeciálnom prípade, keď $C = D'$).

Analogickú úvahu vieme spraviť aj pre bod E: ak E' je priesečník priamok EM a BA, tak uhol $BE'E$ má veľkosť $180° - 2\beta$ a uhol $AE'T$ je pravý. Takže body D', E' ležia na Tálesovej kružnici nad priemerom BT.

Uhly $DE'E$ a $DD'E$ majú rovnakú veľkosť a body E', D' ležia v rovnakej polrovine určenej priamkou DE, preto body D, E', D', E ležia v tomto poradí na kružnici.

O situácii sme zistili nemálo, zbavili sme sa bodov O, A, C aj M. Zistíme, či o zvyšných bodoch vieme dosť na to, aby sme dokázali, že BT a DE sú na seba kolmé. Nakreslíme obr. 58, ktorý obsahuje iba body B, T, D, E, D', E'.



Obr. 58

Označme veľkosti uhlov TBE, BED postupne φ, ε. Nasledujúce tvrdenia si treba rozmyslieť pre obe situácie, ktoré môžu nastať: bod E' leží na úsečke BD alebo mimo nej. Štvoruholník $DE'D'E$ je tetivový a preto uhol $BE'D'$ má veľkosť ε. Štvoruholník $BE'TD'$ je tetivový, preto uhol $D'E'T$ má veľkosť φ. Takže

$$|\sphericalangle BT, DE| = \varphi + \varepsilon = |\sphericalangle BE'D'| + |\sphericalangle D'E'T| = |\sphericalangle BE'T| = 90^\circ.$$

Poznámka. Ak poznáme kružnicovú inverziu, nemusíme uhly na záver počítať. Keď vieme, že body D, E', D', E ležia na kružnici, tak mocnosť bodu B k tejto kružnici je $|BD| \cdot |BE'| = |BD'| \cdot |BE| = r^2$ (pre nejaké číslo r). Spravíme preto inverziu so stredom B a polomerom r. V tejto inverzii sa priamka BT zobrazí na seba a priamka DE sa zobrazí na kružnicu prechádzajúcu bodmi D', E' a B, teda na kružnicu opísanú štvoruholníku $BD'TE'$. Priamka BT je na túto kružnicu kolmá[12] (prechádza jej stredom) a inverzia zachováva veľkosti uhly.

3.4

Keby sme mohli položiť $y = 0$, dostali by sme $f(xa) = a + x$, kde $a = f(0)$. Z čoho by hneď vyšlo riešenie. Avšak v definičnom obore funkcie f nula nie je.

Po dosadení $x = 1$ dostaneme rovnosť $f(f(y)) = f(y)+1$. Označme $w = f(y)$. Potom $f(w) = w + 1$ a máme riešenie. Problém je v tom, že posledný vzťah platí len pre čísla w z oboru hodnôt funkcie f, a to nemusí byť celé $\mathbb{R}^+$. (Naozaj nebude, ako uvidíme ďalej.)

Dosadením $y = 1/x$ dostaneme

$$f(xf(1/x)) = f(1) + x.$$

Táto rovnosť nám môže pomôcť. Je v nej totiž konštanta $f(1)$ a ničím neobmedzované x. Pravá strana rovnosti môže nadobúdať všetky hodnoty ostro väčšie ako $f(1)$. Keďže

[12] Uhol priamky a kružnice je definovaný ako uhol, ktorý zviera priamka s dotyčnicou ku kružnici zostrojenou v priesečníku danej priamky a kružnice.

naľavo máme iba jeden člen $f(xf(1/x))$, musí funkcia f nadobúdať všetky hodnoty väčšie ako $f(1)$. Preto do oboru hodnôt patrí interval $(f(1),\infty)$. Keď zoberieme do úvahy predošlý poznatok, dostaneme, že pre všetky $w\in(f(1),\infty)$ platí $f(w)=w+1$.

Čo však s číslami menšími alebo rovnými $f(1)$? Keď máme ľubovoľné $y>0$, vieme zvoliť x také, aby výrazy $xf(y)$ a xy boli oba väčšie ako $f(1)$. Potom môžeme podľa predchádzajúceho urobiť úpravy

$$\begin{aligned} f(xf(y)) &= f(xy)+x,\\ xf(y)+1 &= xy+1+x,\\ xf(y) &= x(y+1),\\ f(y) &= y+1. \end{aligned}$$

Poslednú úpravu sme mohli spraviť, pretože $x>0$. Máme teda jediné možné riešenie, a to funkciu spĺňajúcu $f(x)=x+1$ pre všetky $x\in\mathbb{R}^+$. Skúškou správnosti ľahko zistíme, že toto riešenie naozaj vyhovuje.

Iné riešenie. Zvoľme $x=f(z)$. Postupne dostávame, že pre ľubovoľné $y,z\in\mathbb{R}^+$ platí

$$\begin{aligned} f(f(z)f(y)) &= f(f(z)y)+f(z), &&\\ f(f(z)f(y)) &= f(zy)+y+f(z) && \text{(využili sme pôvodnú rovnosť)},\\ f(f(y)f(z)) &= f(yz)+z+f(y) && \text{(symetricky sme zamenili } y \text{ a } z\text{)},\\ f(zy)+y+f(z) &= f(zy)+z+f(y) && \text{(spojili sme predošlé dve rovnosti)},\\ f(z)-z &= f(y)-y. && \end{aligned}$$

Posledná rovnosť hovorí, že výraz $f(x)-x$ nezávisí od hodnoty x, t. j. $f(x)=x+c$ pre nejakú konštantu c. Dosadením do pôvodnej rovnosti už ľahko určíme hodnotu c.

3.5

Všimnime si, že y musí byť nepárne. Pre zjednodušenie označme $z=y^3$. Úpravou dostávame

$$\begin{aligned} 2x^2 &= z^5+1,\\ 2x^2 &= (z+1)(z^4-z^3+z^2-z+1). \end{aligned} \tag{1}$$

Nájdime pomocou Euklidovho algoritmu najväčší spoločný deliteľ činiteľov na pravej strane.

$$\begin{aligned} (z+1,z^4-z^3+z^2-z+1) &= (z+1,-2z^3+z^2-z+1) = (z+1,3z^2-z+1) =\\ &= (z+1,-4z+1) = (z+1,5). \end{aligned}$$

To znamená, že hľadaný najväčší spoločný deliteľ je buď 5 alebo 1. Predpokladajme najskôr, že je to 1, teda že sú zátvorky na pravej strane rovnosti (1) nesúdeliteľné. Ich súčin je dvojnásobkom štvorca, pravá zátvorka je nepárna a nesúdeliteľná s prvou, preto musí byť sama štvorcom. Všimnime si však, že pre $z > 1$ platí

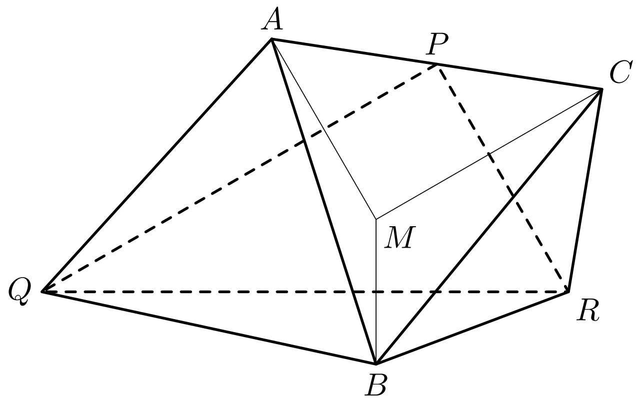
$$\left(z^2 - \frac{z}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 < (z^4 - z^3 + z^2 - z + 1) < \left(z^2 - \frac{z}{2} + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Číslo v strede je medzi dvoma po sebe idúcimi štvorcami celých čísel (z je nepárne), ono samo preto štvorcom byť nemôže a dostávame spor. Najväčší spoločný deliteľ $z+1$ a $z^4-z^3+z^2-z+1$ je teda 5, pravá strana (čiže aj ľavá) je deliteľná číslom 25, a nutne $5 \mid x$.

Štvrtá séria

4.1

Trojuholník AMC je pravouhlý, preto stred P jeho opísanej kružnice leží v strede strany AC. Tupé vnútorné uhly trojuholníkov ABM a BCM zasa zabezpečujú, že body Q a R budú ležať mimo trojuholníka ABC (obr. 59).



Obr. 59

V kružnici opísanej trojuholníku ABM je veľkosť obvodového uhla nad tetivou AB rovná $180° - |\sphericalangle AMB| = 30°$. Veľkosť stredového uhla AQB bude dvojnásobok, čiže $60°$. Trojuholník AQB má dve strany rovnakej dĺžky ($|AQ| = |BQ|$, oba sú to polomery opísanej kružnice) a uhol medzi nimi je $60°$, AQB je teda rovnostranný trojuholník.

Pozrime sa aj na rovnoramenný trojuholník BRC. Veľkosť obvodového uhla nad BC je $180° - |\sphericalangle BMC| = 60°$, čiže uhol pri vrchole R je $|\sphericalangle BRC| = 2 \cdot 60° = 120°$.

Čo vieme o bodoch P, Q a R? Ako stredy opísaných kružníc ležia na osiach strán príslušných trojuholníkov. Konkrétne, obidva body P a Q ležia na osi strany AM, čiže priamka PQ je osou strany AM. Z toho hneď vyplýva, že trojuholníky PAQ a QMP sú zhodné a majú rovnaký obsah. Rovnako QR je osou úsečky BM a RP je osou úsečky CM, preto obsah trojuholníka QBR sa rovná obsahu trojuholníka RMQ a obsah trojuholníka RCP je rovnaký ako obsah trojuholníka PMR. Dohromady sme tak vyjadrili obsah trojuholníka PQR. Ten sa rovná súčtu obsahov troch trojuholníkov okolo neho, alebo, inak povedané, obsah trojuholníka PQR je presne polovicou obsahu päťuholníka $AQBRC$.

Treba ešte vypočítať obsah trojuholníka ABC. Presne ho vedieť nepotrebujeme – stačí, keď dokážeme, že je menší ako obsah trojuholníka PQR, čiže menší, ako polovica obsahu celého veľkého päťuholníka. Označme $|AB| = c$ a $|BC| = a$. Obsah rovnostranného trojuholníka AQB so známou dĺžkou strany vypočítať vieme. Obsah trojuholníka BRC možno tiež vyjadriť jednoducho; keby sme totiž nad stranou BC zostrojili rovnostranný trojuholník, bod R by bol jeho ťažiskom a teda obsah trojuholníka BRC je práve tretina obsahu rovnostranného trojuholníka so stranou a. Obsah trojuholníka ABC presne zistiť nevieme. Keby bol pri vrchole B pravý uhol, obsah by bol $ac/2$. Avšak pri vrchole B pravý uhol byť nemôže, inak by bod M musel ležať niekde mimo alebo na obvode trojuholníka ABC. Uhol pri B je preto rôzny od pravého – čo znamená, že obsah trojuholníka ABC je určite menší ako $ac/2$. (Ľahko to možno nahliadnuť napríklad so známeho vzorca na výpočet obsahu trojuholníka $S = \frac{1}{2}ac\sin\beta$.) Spolu dostávame

$$S_{AQB} = \frac{\sqrt{3}c^2}{4}, \qquad S_{BRC} = \frac{\sqrt{3}a^2}{12}, \qquad S_{ABC} < \frac{ac}{2}.$$

Dokazovanú nerovnosť postupne upravíme na

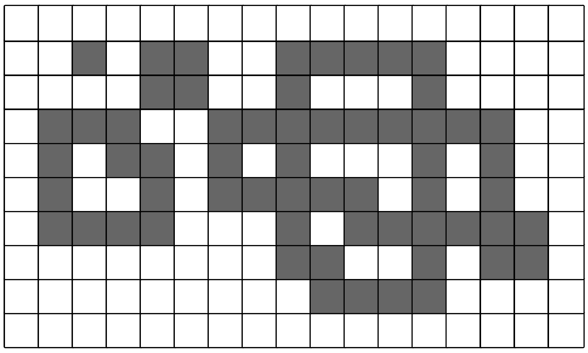
$$\begin{aligned} S_{ABC} &< \frac{S_{AQBRC}}{2}, \\ S_{ABC} &< \frac{S_{AQB} + S_{BRC} + S_{ABC}}{2}, \\ \frac{S_{ABC}}{2} &< \frac{S_{AQB} + S_{BRC}}{2}. \end{aligned}$$

Poslednú nerovnosť už dokážeme ľahko (využijeme, že štvorec reálneho čísla je vždy nezáporný):

$$\frac{S_{ABC}}{2} < \frac{ac}{4} \leqq \frac{ac}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt[4]{3}c}{2} - \frac{\sqrt[4]{3}\sqrt{3}a}{6}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}c^2}{8} + \frac{\sqrt{3}a^2}{24} = \frac{S_{AQB} + S_{BRC}}{2}.$$

4.2

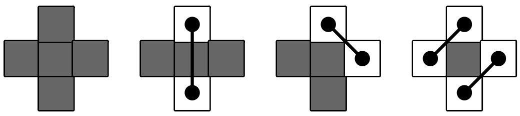
Každý štvorček má práve štyroch susedov. Párny počet bielych susedov znamená, že štvorček susedí so žiadnym, s dvoma alebo so štyrmi bielymi štvorčekmi (ekvivalentne: so štyrmi, s dvoma alebo so žiadnym čiernym štvorčekom). Ako môžu byť čierne štvorčeky rozostavené? Hocikde môžeme kresliť osamotené čierne štvorčeky. Ľahko zistíme, že aj „slučky“, čiže nejaké zacyklené postupnosti stranami sa dotýkajúcich čiernych štvorčekov, vyhovujú. Tieto slučky sa však môžu nejakým spôsobom tiež spájať a tak vznikajú naozaj komplikované obrazce ako na obr. 60.



Obr. 60

Ďalej to treba skúšať pre konkrétne jednoduché aj zložité prípady. Vhodne ofarbujeme biele štvorčeky zelenou a červenou. Pritom sa snažíme objaviť nejaké súvislosti, všeobecné postupy, skúsiť sformalizovať postup, ako ofarbujeme. Až keď vieme presne popísať postup, dá sa o ňom dokázať, že vedie k správnemu ofarbeniu. Ukážeme si dva z možných postupov.

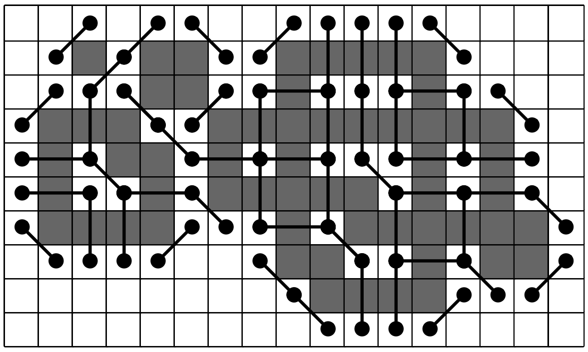
Medzi bielymi susedmi čiernych políčok sú isté vzťahy. Napríklad ak máme čierne políčko susediace s práve dvoma bielymi políčkami, tak tieto musia mať po ofarbení rôznu farbu. Takéto vzťahy medzi štvorčekmi sa veľmi dobre znázorňujú pomocou grafov.



Obr. 61

Vrcholmi grafu budú všetky biele štvorčeky, ktoré susedia s aspoň jedným čiernym. Hrany medzi nimi budú znázorňovať vlastnosť „tieto dva štvorčeky musia mať rôznu farbu“. Pre rôzne rozpoloženia susedov čiernych políčok tie hrany môžeme zvoliť tak, ako na obr. 61. V poslednom type to môžeme spraviť aj inak, ale ukáže sa, že takto (dve šikmé hrany) je to najvýhodnejšie.

Ak sa nám podarí vrcholy takto zostrojeného grafu ofarbiť dvoma farbami tak, aby žiadne dva susedné vrcholy nemali rovnakú farbu, potom rovnako môžeme ofarbiť aj štvorčeky a zjavne máme vyhovujúce ofarbenie. Konštrukciu grafu si možno ozrejmiť z obr. 62.

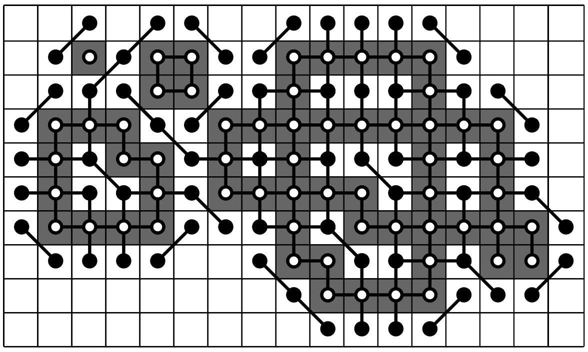


Obr. 62

Previedli sme úlohu na ofarbenie grafu dvoma farbami. Čo nám takéto ofarbovanie môže prekaziť? Sú to *cykly* (v grafovej terminológii nazývané *kružnice*) nepárnej dĺžky. V cykle sa musia pri dobrom ofarbení farby dookola striedať, no pre nepárny cyklus to zrejme nejde. Chceme zodpovedať dve na otázky: (1) či vieme požadovaným spôsobom zafarbiť ľubovoľný graf neobsahujúci cykly nepárnej dĺžky a (2) či náš graf je naozaj vždy bez takýchto cyklov.

(1) Nech v našom grafe neexistuje cyklus nepárnej dĺžky. Vrcholy budeme ofarbovať nasledovne. Na začiatku zoberieme nejaký neofarbený vrchol a zafarbíme ho zelenou. V druhom kroku ofarbíme všetkých jeho nezafarbených susedov červenou, v treťom nezafarbených susedov tých červených zelenou a takto pokračujeme, kým nezafarbíme všetky vrcholy. Ak takto vzniknuté ofarbenie bude vyhovujúce (susediace vrcholy majú rôzne farby), tak je všetko v poriadku. Iná situácia nemôže nastať, čo dokážeme sporom. Predpokladajme, že dva susedné vrcholy majú rovnakú farbu. Zoberme prvý krok, v ktorom sa to „pokazilo“, nech je to k-ty krok. Tá chyba musela nastať tak, že nejaké dva vrcholy zafarbené v k-tom kroku (rovnakou farbou) sú susediace. Potom ale vedú cesty dĺžky $k-1$ z počiatočného zeleného vrcholu ku obom vrcholom a medzi nimi je hrana. Keby tie cesty nemali spoločnú hranu, tak hneď máme cyklus nepárnej dĺžky, teda spor. A aj ak obe cesty nejaké spoločné hrany majú, nič to nemení na tom, že niekde sa tam cyklus nepárnej dĺžky nájde. Preto neexistencia cyklu nepárnej dĺžky implikuje dobrú ofarbiteľnosť dvoma farbami.

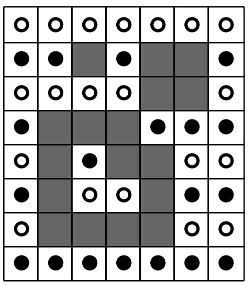
(2) Ostáva ukázať, že v nami zostrojenom grafe nie je cyklus nepárnej dĺžky. Je jasné, že výsledný graf je *rovinný*, t. j. hrany sa nekrižujú mimo vrcholov. Zaveďme súradnicovú sústavu pre štvorčeky (teda polohu štvorčeka bude vyjadrovať usporiadaná dvojica celých čísel). V grafe máme dva druhy hrán. Tie rovnobežné s hranami štvorca, ktoré spájajú štvorčeky so súradnicami (a, b) a $(a, b+2)$ (resp. $(a+2, b)$) a tie šikmé, ktoré spájajú (a, b) s $(a+1, b+1)$ (resp. s $(a+1, b-1)$). Zoberme ľubovoľný cyklus v našom grafe. Keď po ňom prechádzame dookola, šikmá hrana zmení paritu oboch súradníc, preto šikmých hrán musí byť v cykle párny počet (aby sme sa dostali do toho vrcholu, v ktorom sme začali). Stačí už len ukázať, že aj ostatných je párny počet. Na to zostrojíme „čierny“ graf, ktorý bude vyjadrovať susednosť čiernych políčok. Vrcholy v čiernom grafe budú čierne políčka a hrany budú vyjadrovať to, že spolu dané dva štvorčeky susedia. Bude to vyzerať ako na obr. 63.



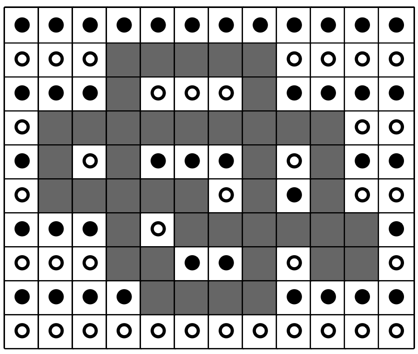
Obr. 63

Majme opäť ľubovoľný cyklus v pôvodnom grafe. Všimnime si jeho hrany, ktoré sú rovnobežné s mriežkou. Každá taká hrana pretína čierny graf práve raz a to v nejakom jeho bode. Šikmé hrany nemajú s čiernym grafom nič spoločné. Rozdeľme vrcholy čierneho grafu na dve skupiny. Na tie, ktoré ležia vnútri toho cyklu (túto množinu označme V_1) a tie, ktoré ležia na cykle alebo mimo neho (označme ich V_2). Takto celkom prirodzene cyklus rozdelil vrcholy čierneho grafu na dve disjunktné množiny. Nás zaujíma parita počtu vrcholov čierneho grafu, ktoré ležia na obvode cyklu. Počet tých vrcholov je zrejme taký istý, ako počet všetkých hrán, ktoré spájajú vrcholy z V_1 a V_2. Vo všeobecnosti však platí, že v párnom grafe (t. j. takom, že z každého vrcholu vychádza párny počet hrán) platí, že ak jeho vrcholy rozdelíme na dve množiny, tak medzi nimi je párny počet hrán (rozmyslite si prečo). Tým je tvrdenie dokázané.

Iné riešenie. Nájdeme dostatočne dobrý popis, ako štvorčeky farbiť vo všeobecnosti. Teórii grafov sa však opäť nevyhneme. Ak máme len izolované čierne štvorčeky, ľahko rovinu ofarbíme napríklad striedaním zelených a červených riadkov. Čo však so slučkami? S jednoduchými slučkami (bez takých čiernych políčok, ktoré susedia so štyrmi



Obr. 64



Obr. 65

čiernymi) sa dá ofarbiť rovnako striedaním zelených a červených riadkov, akurát farby vo vnútri slučiek vymeníme (ako na obr. 64). Zdôvodniť, prečo to „funguje“, nie je ťažké. Horšie je to pre zložitejšie slučky, tam treba farby vymieňať ešte aj vo vnútri (obr. 65).

Tieto poznatky sa dajú sformalizovať do nasledujúceho postupu. Opäť zaveďme súradnicovú sústavu a čierny graf z prvého riešenia. Farbu políčka bude ovplyvňovať riadok, v ktorom leží (keďže farby sa snažíme striedať po riadkoch) a to, v akých cykloch leží. Spravme to nasledovne. Vieme, že čierny graf je párny (z každého vrcholu vychádza párny počet hrán). Celý čierny graf rozložíme na cykly, ktoré spolu obsahujú všetky hrany čierneho grafu, ale žiadnu nie viackrát. Ako to spraviť? Všímajme si len neizolované čierne vrcholy. Zoberme ľubovoľný vrchol čierneho grafu a vydajme sa po hranách „na cestu“ tak, aby sme sa nevracali (po každej hrane ideme nanajvýš raz). Keďže z každého vrcholu idú aspoň dve hrany, tak sa to dá. Časom narazíme na nejaký vrchol, v ktorom sme už boli, čím vlastne vytvoríme nejaký cyklus. Odobratím hrán tohto cyklu opäť dostaneme párny graf s menej hranami. Opakovaním tohto postupu odstraňujeme postupne hrany cyklov, až minieme všetky hrany. Preto existujú disjunktné cykly $C_1, C_2, \dots, C_k$ také, že ich zjednotením je celý čierny graf.

Je jasné, že každý z našich cyklov rozdelí rovinu na dve časti: vonkajšiu a vnútornú (cyklus je uzavretá krivka v rovine, konkrétne obvod mnohouholníka). Každé biele políčko teda leží buď vnútri cyklu, alebo vonku; na hranici cyklu sú len čierne políčka. Preto môžeme spraviť nasledujúcu vec.

Bielemu políčku (a, b) priradíme číslo $a + P(a, b)$, kde $P(a, b)$ vyjadruje počet cyklov z $C_1, C_2, \dots, C_k$, v ktorých vnútri leží štvorček (a, b). Teraz jednoducho stačí priradiť farbu podľa parity $a + P(a, b)$. Stačí ukázať, že pri všetkých typoch rozmiestnenia susedov čierneho políčka sú jeho susedia dobre ofarbení. Pre ilustráciu to spravíme pre dva prípady.

Prípad 1. Nech (a, b), $(a+1, b)$, $(a, b+1)$ sú čierne, $(a-1, b)$ a $(a, b-1)$ biele. Potom nám ide o paritu čísel $a - 1 + P(a-1, b)$ a $a + P(a, b-1)$. Políčka $(a-1, b)$ a $(a, b-1)$ však susedia rohom, preto nemôže existovať cyklus taký, že jedno z nich leží vnútri neho a druhé vonku. Preto $P(a-1, b) = P(a, b-1)$. Čiže čísla, ktorých paritu skúmame, sa líšia len o 1. Inak povedané, bieli susedia (a, b) majú rôzne farby.

Prípad 2. Nech (a, b), $(a+1, b)$, $(a-1, b)$ sú čierne, $(a, b+1)$ a $(a, b-1)$ biele. Ide nám o paritu čísel $a + P(a, b+1)$ a $a + P(a, b-1)$. Vieme, že cez tie čierne vrcholy prechádza práve jeden z cyklov. Jeden z vrcholov $(a, b+1)$ a $(a, b-1)$ v ňom zjavne leží a druhý nie. Každý ďalší cyklus buď obsahuje oba, alebo ani jeden z tých bodov. Preto sa $a + P(a, b+1)$ a $a + P(a, b-1)$ líšia len o 1 a opäť máme, čo sme chceli.

4.3

Nech p, q sú rôzne prvočísla a nech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je taká funkcia, že $f(x)^p$ a $f(x)^q$ sú polynómy. Ukážeme, že potom aj f je polynóm.

Označme $P(x) = f(x)^p$ a $Q(x) = f(x)^q$. Tieto polynómy môžeme vyjadriť v tvare

$$P(x) = r(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\cdots(x-a_m)^{\alpha_m},$$
$$Q(x) = s(x-b_1)^{\beta_1}(x-b_2)^{\beta_2}\cdots(x-b_n)^{\beta_n},$$

kde $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ sú korene $P(x)$ a $Q(x)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots \beta_n \in \mathbb{N}$ sú exponenty prislúchajúce týmto koreňom a $\alpha_i \neq \alpha_j$, $\beta_i \neq \beta_j$ pre všetky $i \neq j$. Keďže f je funkcia z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, je aj P z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, preto jeho najvyšší koeficient r je reálne číslo. Analogicky $s \in \mathbb{R}$. Vieme, že $(P(x))^q = (f(x))^{pq} = (Q(x))^p$, takže

$$r^q(x-a_1)^{\alpha_1 q}(x-a_2)^{\alpha_2 q}\cdots(x-a_m)^{\alpha_m q} = s^p(x-b_1)^{\beta_1 p}(x-b_2)^{\beta_2 p}\cdots(x-b_n)^{\beta_n p}.$$

Z tejto rovnosti polynómov vyplýva niekoľko čiastkových rovností. Zjavne $r^q = s^p$, $m = n$ a $\{a_1, \dots, a_m\} = \{b_1, \dots, b_n\}$, teda množiny koreňov $P(x)$ a $Q(x)$ sa rovnajú, rozdiel je iba v násobnosti koreňov. Nech bez ujmy na všeobecnosti $a_i = b_i$, potom dostávame $\alpha_i q = \beta_i p$ pre všetky $i \in \{1, \dots, n\}$. Keďže p a q sú nesúdeliteľné, nutne $p \mid \alpha_i$ a $q \mid \beta_i$.

Všimnime si teraz, že aspoň jedno z čísel p, q je nepárne. Bez ujmy na všeobecnosti nech je to p. Potom je funkcia f v každom bode $x \in \mathbb{R}$ jednoznačne určená hodnotou $P(x)$. Oborom hodnôt f je totiž podľa zadania množina $\mathbb{R}$ a nepárne odmocniny sú nad $\mathbb{R}$ jednoznačne určené. Funkcia f musí byť tvaru

$$f(x) = r^{1/p}(x - a_1)^{\alpha_1/p}(x - a_2)^{\alpha_2/p} \cdots (x - a_m)^{\alpha_m/p},$$

pretože spĺňa rovnosť $(f(x))^p = P(x)$. Navyše z predošlých úvah vyplýva jednoznačnosť tohto riešenia. Keďže $p \mid \alpha_i$, funkcia f je polynóm.

Iné riešenie. Namiesto komplexných čísel využijeme, že polynómy sa dajú deliť so zvyškom. Preto pre ne fungujú niektoré veci tak, ako pre celé čísla, napríklad vieme nájsť najväčšieho spoločného deliteľa dvoch polynómov.

Čísla p, q sú nesúdeliteľné, preto existujú celé čísla a, b také, že $ap + bq = 1$. Podľa zadania existujú polynómy $P(x)$ a $Q(x)$ také, že $f(x)^p = P(x)$, $f(x)^q = Q(x)$. Potom máme

$$f(x) = f(x)^{ap+bq} = f(x)^{ap} \cdot f(x)^{bq} = P(x)^a Q(x)^b.$$

Keby čísla a, b boli obe nezáporné, sme hotoví, to však takmer nikdy nie je pravda. Aj tak však z toho vieme, že naša funkcia sa dá zapísať v tvare

$$f(x) = \frac{R(x)}{S(x)},$$

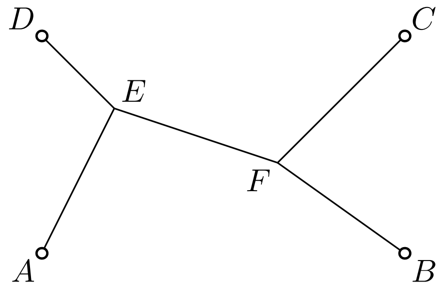
kde $R(x)$ a $S(x)$ sú nesúdeliteľné polynómy s reálnymi koeficientmi. Potom

$$P(x) = f(x)^p = \frac{R(x)^p}{S(x)^p}, \qquad \text{čiže} \qquad P(x) \cdot S(x)^p = R(x)^p.$$

Ľavá strana je deliteľná polynómom $S(x)$, preto aj pravá musí byť. Lenže $R(x)$ a $S(x)$ sú nesúdeliteľné. Toto môže nastať len vtedy, keď je polynóm $S(x)$ konštantný a teda $f(x) = R(x)/S(x)$ je polynóm.

4.4

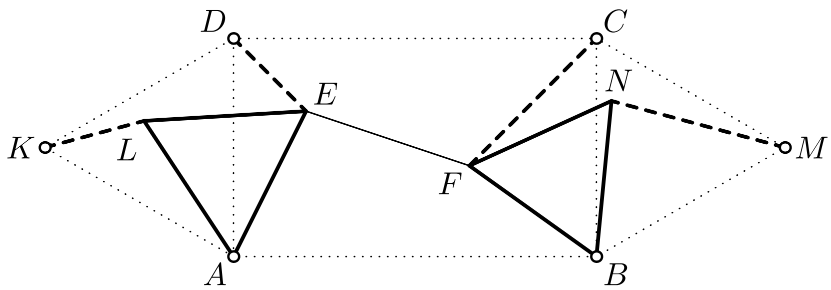
Po chvíľke kreslenia rôznych cestných sietí usúdime, že hľadaná sieť s minimálnou dĺžkou vyzerá asi ako na obr. 66. Je jasné, že sa musí skladať z úsečiek, keďže úsečka je najkratšou spojnicou dvoch bodov. Pripúšťame aj to, že niektoré z bodov budú totožné, napríklad body E a F, či A a E. Celá cestná sieť leží vnútri obdĺžnika: keby nejaký bod bol mimo, namiesto neho použijeme k nemu najbližší bod obdĺžnika; takouto konštrukciou by sa dĺžka siete skrátila.



Obr. 66

Siete s tromi a viac križovatkami uvažovať netreba. Prečo? Majme nejakú sieť s minimálnou dĺžkou. Vezmime jednu cestu z A do B takú, že nepretína sama seba (taká cesta musí existovať, cestná sieť je súvislá). Bod C buď už leží na tejto ceste, alebo je na ňu nejako pripojený. Pripojený môže byť len v jednom bode jednou cestou, inak by sme dostali v cestnej sieti okruh, a ten v sieti minimálnej dĺžky byť nemôže. Na spomínané cesty musí byť pripojený bod D, pribudne jedna ďalšia križovatka. (Niektoré úseky cestnej siete môžu mať nulovú dĺžku, čo zodpovedá tomu, že križovatka splýva s inou križovatkou alebo niektorým vrcholom obdĺžnika).

Uvažujme otočenie okolo bodu A o $60°$ proti smeru hodinových ručičiek. V ňom sa bod D zobrazí do bodu K a bod E do bodu L. Trojuholníky ADK a AEL sú rovnostranné. Trojuholník ALK je zhodný s trojuholníkom AED, preto $|KL| = |DE|$.



Obr. 67

Ďalej uvažujme otočenie okolo bodu B o $60°$ v smere hodinových ručičiek. Bod C sa zobrazí do bodu M a bod F do bodu N. Podobne ako v predchádzajúcom prípade sú trojuholníky BCM a BFN rovnostranné a trojuholníky BFC a BNM zhodné. Celkovo je teda súčet dĺžok úsekov našej cestnej siete rovný

$$|DE| + |AE| + |EF| + |BF| + |CF| = |KL| + |LE| + |EF| + |FN| + |NM|,$$

čo je vždy aspoň dĺžka úsečky KM.

Rovnosť nastane vtedy, keď ležia úseky KL, LE, EF, FN, NM na priamke (obr. 67), t. j. práve vtedy, keď trojuholníky AED a BFC sú rovnoramenné s uhlami 120° pri vrcholoch E a F.

Ostáva uvážiť, či robíme takéto trojuholníky nad dlhšími, alebo nad kratšími stranami obdĺžnika $ABCD$. Ak $|AB| > |BC|$, tak $|KM| = |AB| + |BC|\sqrt{3} < |BC| + |AB|\sqrt{3}$. Uvedené trojuholníky teda zostrojíme nad kratšími stranami obdĺžnika. Vtedy je taktiež zaručené, že oba trojuholníky AED a BFC nemajú spoločný bod.

4.5

Ako prvé by sme si mali všimnúť, že medzi danými operáciami je jeden zásadný rozdiel. Vykonaním (1) sa počet zemiakov o jedna zníži, zatiaľ čo použitím (2) sa ich počet nemení. Z toho môžeme hneď usúdiť, že operáciu (1) môžeme použiť iba konečne veľa krát. Pre prvú časť úlohy teda stačí ukázať, že nie je možné donekonečna opakovať operáciu (2) bez toho, aby sme niekedy nevykonali operáciu (1). Inak povedané, po istom počte operácií (2) sa nutne dostaneme do situácie, v ktorej už nemôžeme (2) použiť. V prvej časti úlohy preto budeme predpokladať, že používame iba operáciu (2).

Pre zjednodušenie vyjadrovania očíslujme vrecia zľava doprava celými číslami od $-\infty$ do ∞ (zatiaľ nezáleží na tom, kde presne sa nachádza nula) a označme celkový počet zemiakov n (ten teraz ostáva konštantný počas celého procesu). Najprv ukážeme, že všetky zemiaky ostávajú v ohraničenej oblasti radu vriec. Presnejšie, existuje d_n také, že ak sa na začiatku zemiaky vyskytujú len vo vreciach $\{a, \dots, b\}$, tak po ľubovoľnom počte krokov budú vždy len vo vreciach $\{a - d_n, \dots, b + d_n\}$. Toto zrejme platí pre malé počty zemiakov: môžeme zobrať napríklad $d_1 = 0$ a $d_2 = 2$. Ďalej pokračujeme indukciou. Predpokladajme, že sme našli $d_1, \dots, d_{n-1}$ a pozrime sa na nejaké počiatočné rozostavenie n zemiakov. Označme a, resp. b číslo „najľavejšieho“, resp. „najpravejšieho“ vreca obsahujúceho aspoň jeden zemiak v tomto rozostavení. Vždy, keď odoberieme zemiak z nejakého vreca, pridáme po jednom zemiaku do vriec napravo aj naľavo od neho (nie nutne do susedných vriec), preto budeme mať vždy aspoň jeden zemiak v oboch intervaloch $(-\infty, a\rangle$ a $\langle b, \infty)$. To však znamená, že presunutím zemiaku do vzdialenosti d od pozícií $\{a, \dots, b\}$ zväčšíme vzdialenosť medzi najpravejším a najľavejším zemiakom tiež aspoň na d. Zemiakov je však stále rovnako veľa, preto ich rozťahovaním sa musia zväčšovať medzery medzi susednými zemiakmi. Konkrétne, ak je vzdialenosť medzi okrajovými zemiakmi aspoň d, tak medzi nimi musí existovať úsek dĺžky aspoň $(d+1-n)/(n-1)$ neobsahujúci žiadne zemiaky. Označme $m = \max\{d_i; 1 \leqq i < n\}$. Hneď ako dostaneme nejaký zemiak do vzdialenosti aspoň $(2m + 1)(n - 1)$ od počiatočných pozícií $\{a, \dots, b\}$, vznikne medzera dĺžky aspoň $2m$. Táto nám rozdelí zemiaky na dve skupiny vzdialené aspoň $2m$ obsahujúce menej ako n zemiakov. Rozťahovanie oboch skupín je však ohraničené číslom m (tak sme m zadefinovali), preto zemiaky v rôznych skupinách sa už nemôžu dostať dosť blízko na to, aby sa navzájom ovplyvňovali. To znamená, že od tohto okamihu môžeme posunúť okrajové zemiaky najviac o m. Odtiaľ $d_n \approx (2m + 1)(n - 1) + m$.

Všimnite si, že každá operácia (stále len druhého typu) nám akosi „zanáša“ zemiaky doľava. Formálne, s každou operáciou sa aritmetický priemer pozícii všetkých zemiakov (ktorý sa dá predstaviť ako ich ťažisko) zmenší o $1/n$. My už ale vieme, že všetky možné pozície sú zdola ohraničené (číslom $a-d_n$), a preto aj ich priemer musí byť ohraničený. To znamená, že môžeme vykonať len obmedzene veľa operácií.

Tým sa dostávame k druhej časti úlohy, kde musíme znovu zobrať do úvahy obe zadané operácie. Snažíme sa nájsť nejaký užitočný invariant (vlastnosť, ktorá sa zachováva počas celého procesu). Predstavme si, že každému zemiaku priradíme nejakú hodnotu závislú na jeho aktuálnej polohe a všetky tieto hodnoty potom sčítame. Dá sa to spraviť tak, aby sa tento súčet vykonávaním operácií nemenil? Označme H_k hodnotu priradenú zemiaku vo vreci s číslom k. Požadujeme, aby $H_k + H_{k+1} = H_{k+2}$ a $2H_k = H_{k-2} + H_{k+1}$. Ľahko možno overiť, že Fibonacciho postupnosť (definovaná vzťahmi $F_1 = F_2 = 1$ a $F_k = F_{k-1}+F_{k-2}$ pre $k > 2$) spĺňa obe tieto podmienky. Aby sme sa vyhli problémom so zápornými indexmi, môžeme prečíslovať vrecia tak, aby všetky zemiaky boli vždy len napravo od nuly (to vieme urobiť, keďže zemiaky sa môžu vyskytovať len v ohraničenej oblasti vriec).

Zamyslime sa teraz na tým, čo všetko už vieme povedať o záverečnej situácii. Súčet hodnôt všetkých zemiakov sa vykonávaním jednotlivých operácií nemení, takže na konci musí byť taký istý, ako bol na začiatku. Navyše vo výslednej pozícii už nemôžeme spraviť žiadnu operáciu, preto všetky vrecia obsahujú najviac po jednom zemiaku a z každých dvoch susedných vriec je aspoň jedno prázdne. Ostáva ukázať, že takéto rozostavenie je iba jedno, čo už nechávame na čitateľa (možno vyskúšať napríklad indukciu vzhľadom na pozíciu zemiaku, ktorý je najviac vpravo).

Piata séria

5.1

(Podľa *Tomáša Kocáka.*) Vyskúšajme najprv pohrať sa s malými n. Pre $n = 1$ nie je čo riešiť, pre $n = 2$ stačí spriemerovať 1 a 2 (v celom riešení budeme pod „spriemerovaním“ čísel a a b rozumieť ich nahradenie číslami $(a + b)/2$, $(a + b)/2$). Pre $n = 3$ opäť stačí jedno spriemerovanie čísel 1 a 3 (ich priemer je 2). Pre $n = 4$ sa to takisto ľahko podarí – spriemerujeme 2 s 3 a 1 so 4 (susedia v kruhu), čím dostaneme namiesto všetkých čísel $\frac{5}{2}$.

Pre vyššie n to už tak ľahko nepôjde a pokiaľ skúšame dosť dlho, asi nám v hlave skrsne domnienka, že pre väčšie n to nepôjde vôbec. Pri bystrom pohľade na nakreslené kruhy čísel si možno všimnúť, že ak vezmeme minimálne a maximálne číslo v kruhu (v prípade, že ich je viac, vezmeme ľubovoľné z nich), tak postupnosť čísel od minima k maximu oboma smermi je neklesajúca. Inak povedané, ak ideme od minima k maximu, tak sa nestane, aby sme prišli k menšiemu číslu než bolo to predchádzajúce. Platí to pre postupnosť v smere hodinových ručičiek aj pre postupnosť v smere opačnom.

Skúsme toto pozorovanie dokázať. Budeme postupovať viac-menej indukciou – na začiatku je postupnosť od minimálneho čísla 1 k maximálnemu n oboma smermi neklesajúca (jedna z postupností má len dva členy). Teraz stačí ukázať, že spriemerovanie hocakých dvoch susedných čísel z kruhu túto vlastnosť neporuší. Ak chceme spriemerovať dve ľubovoľné čísla $a < b$ rôzne od minima a maxima, zrejme je a „bližšie“ k minimu než b (priemerovať dve rovnaké čísla nemá zmysel). Označme ich susedov x, y, pričom

$$x \leqq a < b \leqq y.$$

Po spriemerovaní z toho dostaneme

$$x < \frac{a+b}{2} = \frac{a+b}{2} < y,$$

teda vlastnosť sa nepokazila. (Predchádzajúce nerovnosti platia kvôli tomu, že $2x \leqq$ $\leqq 2a < a + b < 2b \leqq 2y$.)

Čo sa ale stane, ak je jedno z čísel $a < b$ minimom či maximom? Dokážeme iba prípad, keď za a vezmeme minimum. Ostatné prípady (prípad, keď b je maximum a prípad, keď a je minimum a zároveň b maximum) možno rozobrať podobne. Ak teda vezmeme za a minimum a za b jedného z jeho susedov, tak druhé susedné číslo z môže byť väčšie ako priemer a a b. Potom po spriemerovaní a ostane minimom (aj keď „neostrým“, čo však našej vlastnosti neprekáža). V opačnom prípade, ak z nie je väčšie ako priemer a a b, sa z stáva novým minimom a naša vlastnosť – neklesajúcosť od minima k maximu – sa opäť nepokazí.

Pozrime sa teraz na situáciu odzadu. Na konci sú všetky čísla rovnaké a sú rovné $(n+1)/2$ (to je zrejmé z toho, že pri priemerovaní sa nemení súčet čísel v kruhu). Jeden ťah pred koncom museli byť vedľa seba dve čísla, z ktorých jedno malo hodnotu $(n+1)/2 - k$ a druhé $(n+1)/2 + k$ pre vhodné $k > 0$, aby ich priemer bol $(n+1)/2$. Navyše $k \neq 0$, aby sme týmto spätným ťahom vyrobili iný stav. Predposledným ťahom sme získali dvojicu rovnakých čísel $(n+1)/2, (n+1)/2$, lebo v kruhu nie sú žiadne iné rovnaké susedné čísla. Preto dva ťahy pred koncom museli existovať dve susedné čísla, ktoré mali hodnotu $(n+1)/2 - l$ a $(n+1)/2 + l$ pre vhodné $l > 0$. V kruhu navyše ostalo aspoň jedno číslo s hodnotou $(n+1)/2$ vďaka tomu, že $n \geqq 5$.

Bez ujmy na všeobecnosti nech je $k \geqq l$. Potom je v kruhu (dva ťahy pred koncom) číslo $(n+1)/2-k$ minimom a $(n+1)/2+k$ maximom. Keďže sú tieto dve čísla vedľa seba, musia byť vďaka dokázanej vlastnosti všetky čísla usporiadané vzostupne od minima k maximu. Musia byť teda v poradí

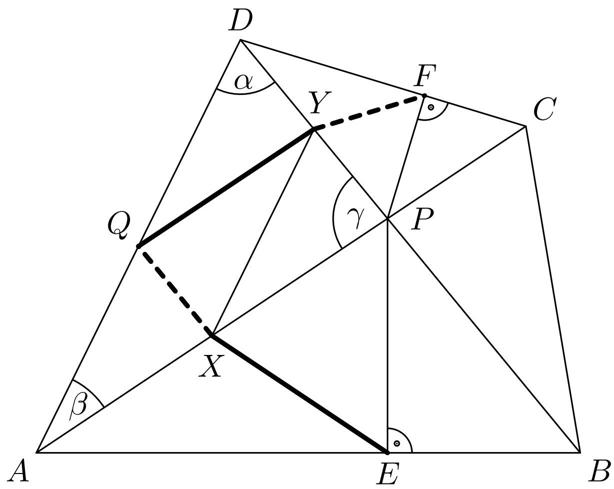
$$\frac{n+1}{2} - k,\ \frac{n+1}{2} - l,\ \frac{n+1}{2},\ \dots,\ \frac{n+1}{2}, \dots,\ \frac{n+1}{2} + l,\ \frac{n+1}{2} + k.$$

Dostávame spor, lebo čísla $(n+1)/2 - l$ a $(n+1)/2 + l$ by mali byť susedné. Dokázali sme, že pre $n \geqq 5$ sa požadovaný stav dosiahnuť nedá. Dobre vidno aj to, prečo nám to pre malé čísla fungovalo.

Iné riešenie. Uvedieme len náznak. Na začiatku od všetkých čísel v kruhu odpočítame celkový priemer, teda $(n+1)/2$. Dostaneme kruh s číslami $(-n+1)/2$ až $(n-1)/2$ a naším cieľom je dostať v kruhu samé nuly (keďže $(n+1)/2$ je to, čo sme chceli dostať na konci pred odpočítaním). Už si len stačí uvedomiť, ako sa môže pri priemerovaní meniť počet núl v kruhu.

5.2

(Podľa *Michala Szabadosa.*) Označme najprv body a uhly, ktoré budeme pri riešení používať. Body Q, X, Y sú po rade stredmi úsečiek AD, AP a DP a uhly α, β, γ sú vnútornými uhlami trojuholníka DAP pri vrcholoch D, A, P (obr. 68).



Obr. 68

Zadanie úlohy trochu pozmeníme. Nebudeme ukazovať, že os úsečky EF rozpoľuje strany AD a BC, ale ekvivalentné tvrdenie, že trojuholník EFQ je rovnoramenný so základňou EF.

Úsečky XY, QY a QX sú stredné priečky v trojuholníku DAF, preto ho rozdeľujú na štyri zhodné trojuholníky s ním podobné. Z podobnosti týchto trojuholníkov vieme čosi povedať o veľkostiach uhlov, konkrétne sa nám hodí, že $|\sphericalangle PXQ| = \alpha + \beta = |\sphericalangle PYQ|$.

Pozrime sa teraz na trojuholníky AEP a DFP. Štvoruholník $ABCD$ je tetivový, preto sú veľkosti uhlov PDF a PAE rovnaké (obvodové uhly nad tetivou BC). Okrem toho uhly PEA a PFD sú pravé, preto trojuholníky PAE a PDF sú podobné podľa vety *uu*. Potom však aj trojuholníky PXE a PYF sú podobné, lebo majú rovnaké uhly pri vrchole P a sú rovnoramenné ($|XP| = |XE| = |XA|$ a $|YP| = |YF| = |YD|$). Z tejto podobnosti budeme potrebovať vzťah $|\sphericalangle EXP| = |\sphericalangle PYF|$. Z toho vyplýva, že

$$|\sphericalangle EXQ| = |\sphericalangle PXQ| + |\sphericalangle EXP| = |\sphericalangle PYF| + |\sphericalangle QYP| = |\sphericalangle QYF|.$$

Z Tálesovej vety a z vlastností stredných priečok máme $|EX| = |AX| = |QY|$, podobne $|FY| = |DY| = |QX|$. Preto trojuholníky EXQ a QYF sú zhodné podľa vety *sus*. To však znamená, že $|EQ| = |FQ|$. Trojuholník EFQ je rovnoramenný so základňou EF, preto os úsečky EF prechádza bodom Q. Analogicky sa dá ukázať, že os prechádza aj stredom úsečky BC.

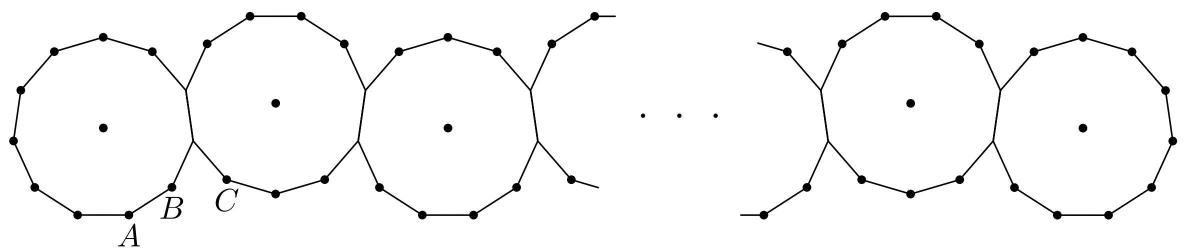
Ešte je vhodné uvedomiť si, či sme vyriešili úlohu pre všetky možné polohy bodov E a F. Ak by bol uhol ACD (teda aj uhol ABD) tupý, body E a F by ležali mimo úsečiek AB a CD. Pri riešení by sa však úvahy a výpočty nezmenili. Ak by bol uhol ACD pravý, postup by sa značne zjednodušil, lebo bod E by splynul s bodom D a bod F s bodom A.

Iné riešenie. Veľmi stručne načrtneme iný prístup k úlohe. Všimnime si trojuholník APD. Nad jeho stranami máme podobné pravouhlé trojuholníky AEP a DFP. Chceme dokázať, že $|QF| = |QE|$. Bod Q je stredom strany AD, vyskúšajme celú situáciu zobraziť v stredovej súmernosti so stredom Q. Nech P' je obraz bodu P v spomínanej súmernosti. Útvar $APDP'$ je rovnobežník, ktorému sú opísané dva obdĺžniky. Chceme dokázať, že tieto dva obdĺžniky majú rovnako dlhú uhlopriečku. Ešte sme nevyužili podobnosť trojuholníkov AEP a DFP. Sú pravouhlé, takže ich strany vieme pomocou uhlov vypočítať ľahko. Ostáva technická časť dôkazu: vyjadriť dĺžky uhlopriečok pomocou základných prvkov určujúcich situáciu a porovnať vyjadrené dĺžky.

5.3

a) Našou úlohou je zistiť, či existuje taký pravouholník, ktorý sa dá pokryť 25 kruhmi s priemerom 2 a nedá sa pokryť 100 kruhmi s priemerom 1. Ukážeme, že neexistuje. Rozdeľme preto pravouholník strednými priečkami na štyri zhodné pravouholníky. Tieto menšie štvoruholníky sú podobné s pôvodným štvoruholníkom s koeficientom $\frac{1}{2}$. Vieme, že pôvodný pravouholník pokryjeme 25 kruhmi s priemerom 2. To znamená, že menšie pravouholníky vieme pokryť (vďaka podobnosti) 25 kruhmi s polovičnými priemermi. Dokopy teda štyri menšie pravouholníky pokryjeme 100 kruhmi s priemerom 1.

b) Ak ukážeme, že existuje mnohouholník U, ktorý sa dá pokryť 25 kruhmi s priemerom 2 a je v ňom niekoľko vybraných bodov, ktoré sa nedajú pokryť 100 kruhmi s priemerom 1, tak sme skončili a útvar spĺňajúci podmienky zadania existuje. Vpíšme do kruhu s priemerom 2 pravidelný 11-uholník a skúsme zodpovedať otázku, koľko najviac význačných bodov (vrcholov, resp. stredov) tohto 11-uholníka vie pokryť jeden kruh s priemerom 1. Po chvíľke zistíme, že najviac dva. Pospájajme 25 takýchto pravidelných 11-uholníkov tak, ako vidno na obr. 69. Kvôli jednoduchosti vezmime za vybrané body, ktoré sa budeme snažiť pokrývať, vyznačené body z obrázka – teda všetky vrcholy a stredy 11-uholníkov bez množiny vrcholov, v ktorých sa susedné 11-uholníky stretávajú. Ľahko zistíme, že vybraných bodov je dokopy 204.



Obr. 69

Aj pre takto pospájané 11-uholníky platí, že kruh s priemerom 1 pokryje nanajvýš dva vybrané body (dokážte sami, že trojicu bodov A, B, C vyznačených na obrázku kruh s priemerom 1 nepokryje). Dokopy máme 204 izolovaných bodov, ktoré sa snažíme pokryť. Každým zo 100 kruhov s priemerom 1 vieme pokryť nanajvýš dva body, teda dokopy vieme pokryť najviac 200 bodov. Čiže existuje bod mnohouholníka U, ktorý nie je pokrytý. Útvar U, ktorý sme vytvorili, sa teda dá pokryť 25-timi kruhmi s priemerom 2 a nedá sa pokryť 100 kruhmi s priemerom 1.

5.4

Na tomto príklade je netradičné, že máme dokázať platnosť aspoň jednej z dvoch nerovností. Vidíme, že obe sú cyklické, no nie sú symetrické a jednu vieme na druhú previesť tým, že spermutujeme indexy (namiesto x_k dosadíme x_{n+1-k}). Sčítaním nerovností dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+2}}{x_i+x_{i+1}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i+x_{i+3}}{x_{i+1}+x_{i+2}} \geqq n.$$

Ak dokážeme, že táto nerovnosť platí, musí platiť aspoň jedna z pôvodných. Navyše táto nová nerovnosť je symetrická. Máme ukázať, že súčet nejakých zlomkov je aspoň n. To by sa dokazovalo oveľa ľahšie, ak by čitatele aj menovatele zlomkov boli rovnaké, potom by sme napríklad mohli použiť, že pre kladné reálne čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ platí

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geqq n,$$

čo dostaneme použitím nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom na ľavú stranu.

Možno nie prirodzený, ale asi najjednoduchší spôsob úpravy je nasledovný. Ku každému členu sumy umelo pričítame a odčítame 1, dostaneme

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i+x_{i+3}}{x_{i+1}+x_{i+2}} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i+x_{i+1}+x_{i+2}+x_{i+3}}{x_{i+1}+x_{i+2}} - 1 \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i+x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}} + \frac{x_{i+2}+x_{i+3}}{x_{i+1}+x_{i+2}} \right) - n.\end{aligned}$$

Využitím tohto v nerovnosti dostávame ekvivalentnú nerovnosť

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i+x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}} + \frac{x_{i+2}+x_{i+3}}{x_{i+1}+x_{i+2}} \right) - n \geqq n$$

alebo

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i+x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+2}+x_{i+3}}{x_{i+1}+x_{i+2}} \geqq 2n.$$

Obe sumy, ktoré sme dostali, sú presne takého typu, ako sme už spomínali, čitatele aj menovatele sú tvaru $x_i + x_{i+1}$, ale sú navzájom posunuté. Preto

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i+x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}} \geqq n \qquad \text{a} \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+2}+x_{i+3}}{x_{i+1}+x_{i+2}} \geqq n$$

a teda ich súčet je aspoň $2n$, čo sme chceli dokázať.

Poznámka. Nerovnosť

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}} \geqq \frac{n}{2}.$$

sa nazýva sa Shapirova (podľa H. Shapira) a je to jedna z veľmi zaujímavých nerovností. Všeobecne platí len pre párne $n \geqq 12$ a nepárne $n \geqq 23$ (pričom x_i sú rovnaké ako v zadaní). Ukrajinský matematik Vladimir Drinfeľd dokázal, že pre všetky n platí

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geqq \gamma \frac{n}{2},$$

kde $\gamma \approx 0.9891\ldots$, alebo presnejšie, $\gamma = \psi(0)/2$, kde ψ je konvexný obal funkcií $f(x) = e^{-x}$ a $g(x) = 2/(e^x + e^{x/2})$.

5.5

Vyriešime úlohu s rovnakým zadaním, ale s jednoduchšou rovnicou $a^3 + b^5 = f^4$. Dokážeme, že má nekonečne veľa riešení v obore kladných celých čísel.

Nechceme rovnicu vyriešiť, len nájsť nejaké riešenia. Hľadajme ich v tvare $a = m^x$, $b = m^y$, $f = m^z$ pre nejaké prirodzené číslo m. Dostaneme rovnicu $m^{3x} + m^{5y} = m^{4z}$. Nech $3x \geqq 5y$. Potom

$$m^{5y}(m^{3x-5y} + 1) = m^{4z}, \qquad \text{čiže} \qquad m^{3x-5y} + 1 = m^{4z-5y}.$$

Zrejme $m \geqq 2$ a $4z - 5y \geqq 1$. Preto pravá strana je deliteľná číslom m. Ak $3x > 5y$, bude ľavá strana po delení m dávať zvyšok 1, teda a, b, f nebudú riešením. Ostáva uvažovať prípad $3x = 5y$. Z rovnice teraz vieme zistiť, že $m = 2$ a $4z - 5y = 1$. Hľadáme teda trojicu $(x, y, z) = (5y/3, y, (1 + 5y)/4)$. Pre $y = 12k + 3$ dostaneme[13] nekonečne veľa takýchto trojíc a týmto trojiciam zodpovedá nekonečne veľa riešení rovnice $a^3 + b^5 = f^4$.

Vyriešili sme „ľahšiu“ úlohu, uvedená metóda sa však poľahky dá použiť pre zadanú rovnicu.

Šiesta séria

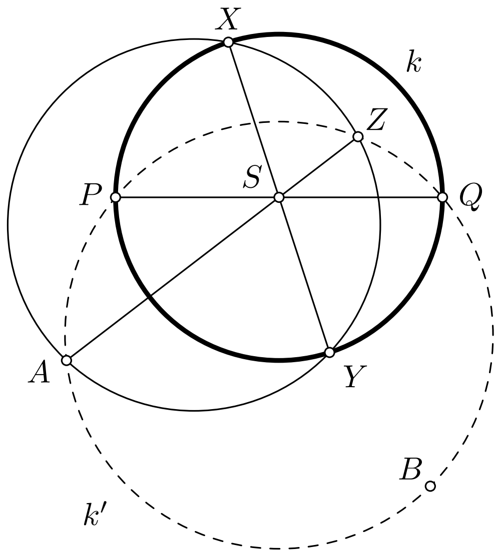
6.1

(Podľa *Martina Melicherčíka.*) Nech Z je priesečník priamky AS s kružnicou k' rôzny od A. Mocnosť bodu S ku kružniciam k a k' je rovnaká a je rovná $|SP| \cdot |SQ|$. Zvoľme za úsečku XY ľubovoľný priemer kružnice k, ktorý neleží na priamke AS (obr. 70). Vyjadríme niekoľkými spôsobmi mocnosť bodu S a dostaneme

$$|SX| \cdot |SY| = |SP| \cdot |SQ| = |SA| \cdot |SZ|.$$

To však znamená, že body A, Y, Z, X ležia na kružnici. Preto bod Z leží na kružnici opísanej trojuholníku AXY. Navyše Z leží na AS (tak sme ho zvolili). Keďže bod S je vnútorným bodom úsečky XY, bod Z je jednoznačne určený a vždy existuje práve jeden.

[13] Tvar $y = 12k + 3$ sa dá uhádnuť, no dá sa aj priamo zistiť pomocou *čínskej zvyškovej vety.*



Obr. 70

Na kružnici k' ležia body A, B a Z. Všetky tri už poznáme, takže ju môžeme zostrojiť. Úloha má práve jedno riešenie.

Iné riešenie. Označme P a Q priesečníky kružnice k' s kružnicou k. Snažíme sa zostrojiť úsečku PQ ako priemer kružnice k. Táto úsečka je určená priamkou, na ktorej leží, a táto priamka prechádza bodom S. Na jej úplné určenie stačí poznať ďalší bod, ktorým prechádza. Nech M je priesečník priamok PQ a AB. (Ten neexistuje len v prípade $AB \parallel PQ$, v ktorom úsečku PQ zostrojíme ľahko.) Predpokladajme, že bod M neleží v kruhu určenom kružnicou k. (Ak leží, nasledujúce úvahy treba iba mierne zmeniť.) Nech r je polomer kružnice k. Mocnosť bodu M ku kružnici k je rovná

$$|MP| \cdot |MQ| = |MS|^2 - r^2. \tag{1}$$

Body P a Q však oba ležia aj na kružnici k', preto

$$|MP| \cdot |MQ| = |MA| \cdot |MB| = |MT|^2 - a^2, \tag{2}$$

kde T je stred úsečky AB a $a = |AB|/2$. Porovnaním vzťahov (1) a (2) dostávame

$$|MS|^2 - |MT|^2 = r^2 - a^2. \tag{3}$$

Body S, T a hodnoty r, a sú pevné, preto vzťah (3) určuje istú množinu bodov M. Nech N je päta kolmice z bodu M na priamku ST. Z Pytagorovej vety pre trojuholníky MNS a MNT máme

$$|MN|^2 = |MS|^2 - |NS|^2 = |MT|^2 - |NT|^2,$$

preto $|NS|^2 - |NT|^2 = |MS|^2 - |MT|^2 = r^2 - a^2$. Takýto bod N je na priamke ST jediný, čo znamená, že všetky body M z množiny určenej vzťahom (3) ležia na kolmici p

na priamku ST prechádzajúcej bodom N. Ľahko sa dá ukázať, že každý bod priamky p spĺňa vzťah (3). Priesečníkom tejto priamky s priamkou AB je hľadaný bod M, z ktorého už vieme zostrojiť aj kružnicu k'. Keďže priamku ST poznáme, stačí jediný bod priamky p a vieme ju tiež zostrojiť. Nad jeho skonštruovaním už porozmýšľajte sami.

Úloha má vždy práve jedno riešenie, pretože priamka p nie je rovnobežná s priamkou AB (lebo A, B, S podľa zadania neležia na priamke).

Iné riešenie. (Podľa *Maje Alif.*) Nech m je ľubovoľná kružnica prechádzajúca bodmi A a B. Nech E je priesečník chordály kružníc k' a m (priamka AB) s chordálou kružníc k a m. Chordála q kružníc k' a k musí tiež prechádzať bodom E, lebo bod E má rovnakú mocnosť ku kružniciam k, k' a m. Navyše priamka q prechádza bodom S. Jej priesečníky P, Q s kružnicou k sú koncovými bodmi priemeru, ktorý sme chceli na zostrojenie kružnice k'. Môže sa stať, že bod E neexistuje, čo je však prípad, ktorý možno ľahko vyriešiť osobitne.

6.2

Najskôr upravíme ľavú stranu rovnosti zo zadania[14] na spoločného menovateľa a vynásobíme obe strany menovateľom výsledného zlomku:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}&=2,\\ (1+y)(1+z)+(1+x)(1+z)+(1+x)(1+y)&=2(1+x)(1+y)(1+z),\\ 1&=xy+xz+yz+2xyz. \end{aligned}$$

Pozrime sa na dokazované tvrdenie. Hovorí niečo o hornom odhade výrazu $8xyz$. Prečo by tento výraz nemohol byť veľký? Nech $8xyz>1$, skúsme zistiť, kde dostaneme spor. Podľa AG-nerovnosti pre kladné a, b, c platí $a+b+c\geqq 3\sqrt[3]{abc}$. Inak povedané, súčet vieme zdola odhadnúť súčinom. Vyskúšame to aj v našom prípade:

$$xy+yz+xz\geqq 3\sqrt[3]{xy\cdot yz\cdot xz}=3\sqrt[3]{(xyz)^2}>3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{3}{4}.$$

Takže $xy+yz+zx+2xyz>3/4+1/4=1$, čo je hľadaný spor.

6.3

(Podľa *Michala Szabadosa.*) Ak je $p+q$ deliteľné tromi a p, q sú nesúdeliteľné, musí po delení tromi jedno z nich dávať zvyšok 1 a druhé zvyšok 2. Preto rozdelíme prirodzené čísla do troch množín podľa zvyšku po delení tromi. Tým je jedna implikácia dokázaná.

Predpokladajme, že existuje rozklad množiny prirodzených čísel na tri množiny podľa zadania a pritom $p+q$ nie je deliteľné tromi. Všimnime si nasledujúcu tabuľku.

z	$z+p$	$z+q$
$z+p$	$z+2p$	$z+p+q$
$z+q$	$z+p+q$	$z+2q$

[14] Takáto rovnosť sa pri nerovnostiach nazýva *väzba*, lebo „zväzuje“ hodnoty premenných – nie každá trojica x, y, z vyhovuje väzbe.

V riadkoch aj stĺpcoch sú uvedené trojice čísel, ktoré musia byť v rôznych množinách. Vidíme, že číslo $z+p+q$ musí byť v tej istej množine ako z, lebo nemôže byť ani v tej, kde je $z+p$, ani v tej, kde je $z+q$. Táto úvaha funguje pre každé z, čo znamená, že čísla líšiace sa o $p+q$ ležia v rovnakých množinách. Podobne z tabuľky vidno, že $z+p$ a $z+2q$ musia byť v rovnakých množinách. Takže čísla líšiace sa o $2q-p$ musia ležať v rovnakých množinách. A nakoniec aj čísla líšiace sa o $2p-q$ ležia v rovnakých množinách.

Bez ujmy na všeobecnosti nech číslo $2p-q$ je kladné. Nájdeme Euklidovým algoritmom najväčšieho spoločného deliteľa čísel $p+q$ a $2p-q$:

$$(p+q, 2p-q) = (p+q, 3p-p-q) = (p+q, 3p) = (p+q, p) = (q, p) = 1$$

(využili sme, že $3 \nmid p+q$). Nech $p+q$ patrí do množiny M nášho rozkladu. Podľa už povedaného do tejto množiny potom patria všetky násobky čísla $p+q$. Ukážeme, že každé z bude patriť do M, čo bude zjavný spor. Čísla

$$z,\ z+(2p-q),\ z+2(2p-q),\ \dots,\ z+k(2p-q),\ \dots$$

ležia v jednej množine, stačí teda ukázať, že jedno z nich patrí do množiny M. Inak povedané, dokazujeme, že existuje k s vlastnosťou

$$z+k(2p-q) \equiv 0 \pmod{p+q}.$$

Lineárna kongruencia $ax+b \equiv 0 \pmod{n}$ s neznámou x má v prípade $(a,n)=1$ vždy riešenie: stačí si uvedomiť, že čísla $a+b, 2a+b, 3a+b, \dots, na+b$ dávajú navzájom rôzne zvyšky po delení n, takže medzi týmito n zvyškami musí byť aj zvyšok 0. Toto je však práve to, čo chceme: $(p+q, 2q-p) = 1$ a teda vhodné k vždy existuje.

6.4

Nech $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$. Nech E je päta kolmice z I na AC a S je stred strany BC.

Najprv podmienku $AD \perp OI$ prevedieme na ekvivalentný vzťah medzi stranami trojuholníka ABC. Je známe, že $AD \perp OI$ práve vtedy, keď $|AO|^2 - |DO|^2 = |AI|^2 - |DI|^2$. Pritom

$$\begin{aligned} |AO|^2 - |DO|^2 &= |BO|^2 - |DO|^2 = |BS|^2 - |SD|^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}(c-b)^2, \\ |AI|^2 - |DI|^2 &= |AI|^2 - |EI|^2 = |AE|^2 = \tfrac{1}{4}(b+c-a)^2. \end{aligned}$$

Z toho všetkého dostávame, že $AD \perp OI$ práve vtedy, keď

$$a(b+c) = b^2 + c^2. \tag{1}$$

Teraz by sme dokazované tvrdenie radi previedli na vzťah medzi stranami trojuholníka ABC. Vieme, že os uhla delí protiľahlú stranu v pomere priľahlých strán. Pre trojuholník SAD z tohto už vieme sformulovať dokazované tvrdenie, ale pre veľmi zložité výrazy. (Napríklad dĺžka $|AD|$ vyjadrená pomocou strán trojuholníka ABC.) Zobrazme situáciu v stredovej súmernosti podľa bodu S. Nech A' je obraz bodu A a N je priesečník priamok CA' a AM. Chceme dokázať, že uhly BAS a CAD sú rovnako veľké. To platí práve vtedy, keď uhly CAD a $CA'A$ sú rovnako veľké, čiže práve vtedy, keď sa priamka CA dotýka kružnice opísanej trojuholníku ADA'. (Využili sme tvrdenie o úsekovom uhle.) Takže chceme dokázať, že $|CA|^2 = |CN| \cdot |CA'|$ (mocnosť bodu C ku kružnici opísanej trojuholníku ADA'). Po dosadení dĺžok úsečiek $|CA| = b$, $|CA'| = c$ vidíme, že chceme dokázať rovnosť $|CN| = b^2/c$. Tá platí práve vtedy, keď $|A'N|/|CN| = (c^2 - b^2)/b^2$.

Veľkosť pomeru $|A'N|/|CN|$ určíme z Menelaovej vety pre trojuholník SCA' a priamku AD. Platí

$$\frac{|CD|}{|SD|} \cdot \frac{|SA|}{|A'A|} \cdot \frac{|A'N|}{|CN|} = 1.$$

Z toho s využitím (1) dostávame

$$\frac{|A'N|}{|CN|} = \frac{|SD|}{|CD|} \cdot \frac{|A'A|}{|SA|} = \frac{\frac{1}{2}(c-b)}{\frac{1}{2}(a+b-c)} \cdot 2 = \frac{2(c^2-b^2)}{a(b+c)+b^2-c^2} = \\ = \frac{2(c^2-b^2)}{b^2+c^2+b^2-c^2} = \frac{c^2-b^2}{b^2},$$

čo sme chceli dokázať.

6.5

Skôr ako začneme čokoľvek počítať, zamyslime sa nad tým, ako je zadaná postupnosť definovaná. Jediný spôsob, ako určiť hodnotu x_n, je pomocou x_{n-1}, preto je dosť ťažké predstaviť si nejaký postup, ktorým by sme dokázali vypočítať x_{1000} bez toho, aby sme zároveň nezískali rozumné odhady pre $x_0, x_1, \ldots, x_{999}$. Mali by sme sa teda pozrieť na to, ako sa naša postupnosť správa ako celok. Ako na to? Predstavme si, že by sme vedeli vyjadriť x_n nejakým jednoduchým vzorcom obsahujúcim len n. Takýto vzorec by stačilo uhádnuť, jeho platnosť by sme dokázali indukciou a nakoniec by sme len dosadili $n = 1000$. Taký vzorec však nepoznáme. My ale nepotrebujeme presnú odpoveď. Stačil by nám výraz, ktorý by bol pre n približne rovný x_n. Inak povedané, hľadáme „peknú“ funkciu f, pre ktorú $f(n) \approx x_n$. Ukážeme dve metódy, ako takú funkciu nájsť.

Prvá metóda využíva počítač. Napriek tomu, že dôkazy pomocou počítačových programov sa všeobecne uznávajú len vtedy, keď vieme s matematickou presnosťou dokázať ich funkčnosť (čo by v tomto prípade muselo zahŕňať aj odhady chýb spôsobených nedokonalou aritmetikou čísel s pohyblivou desatinnou čiarkou), nič nám nebráni použiť program na získanie lepšieho prehľadu o tom, ako sa naša postupnosť správa. Dnešné počítače dokážu v momente vypočítať hodnoty x_n pre n do stoviek miliónov, čo nám dáva naozaj ohromné množstvo dát. Treba len vedieť, na čo sa má človek zamerať. Ako prvé môžeme sledovať napríklad rýchlosť rastu x_n. Všimneme si, že ak pre veľké n zväčšíme n stonásobne, x_n sa zväčší desaťnásobne. To naznačuje, že x_n závisí od $\sqrt{n}$ približne lineárne. Pozrime sa teraz na $x_n/\sqrt{n}$. Pre veľké n sa táto hodnota blíži k 1,4142, odkiaľ usudzujeme, že $x_n \approx \sqrt{2n}$. Tento vzorec už dáva veľmi dobré odhady pre veľké n, pre malé n je ale nepresný. Čo sa však stane, ak pridáme pod odmocninu nejakú konštantu? Hodnoty výrazu sa badateľne zmenia len pre malé n, a to je presne to, čo potrebujeme. Keďže $x_0 = 5$, položíme $f(n) = \sqrt{2n + 25}$.

Čo robiť, ak nemáme po ruke počítač? Skúsme aplikovať trochu analýzy na funkciu f. My potrebujeme jej hodnoty len na prirodzených číslach, to však neznamená, že ju nemôžeme vhodne dodefinovať na reálnych číslach. Predpokladajme teda, že f je funkcia z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ spĺňajúca

$$f(x+1) \approx f(x) + \frac{1}{f(x)}.$$

Ak navyše predpokladáme, že f má spojitú deriváciu, tak pre malé h platí

$$f(x+h) \approx f(x) + hf'(x).$$

To pre $h = 1$ spolu s prvou rovnicou dáva

$$f'(x) \approx \frac{1}{f(x)}.$$

Skúsme teraz nájsť všetky f také, pre ktoré nastáva v tomto výraze presná rovnosť. Riešime jednoduchú diferenciálnu rovnicu

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{f(x)}, \\ 2f(x)f'(x) &= 2, \\ (f(x)^2)' &= 2, \\ f(x)^2 &= 2x + c, \\ f(x) &= \sqrt{2x + c}, \end{aligned}$$

kde c je reálna konštanta. Keďže požadujeme $f(0) = 5$, zoberieme $c = 25$, čím dostávame rovnakú funkciu ako v prvom postupe.

Aj keď to už začína vyzerať sľubne, zatiaľ sme ešte vôbec nič nedokázali. Potrebujeme ukázať, že naša „uhádnutá“ funkcia sa naozaj nelíši od x_n o viac než je povolené. Tu prichádza na rad indukcia. Dokážeme, že $\sqrt{2n+25} \leqq x_n < \sqrt{2n+25} + b$, kde b je kladná konštanta, ktorú určíme v priebehu dôkazu. Pre indukčný základ máme $x_0 = 5 = \sqrt{0 + 25}$. Predpokladajme, že indukčný predpoklad platí pre nejaké n. Zrejme $x_n \geqq 5$ a funkcia $x + \frac{1}{x}$ je na tomto intervale rastúca, preto

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} \geqq \sqrt{2n+25} + \frac{1}{\sqrt{2n+25}} = \frac{2n+26}{\sqrt{2n+25}} > \sqrt{2(n+1)+25},$$

keďže $2n + 26 > \sqrt{2n+25}\sqrt{2n+27} = \sqrt{(2n+26)^2 - 1}$.

Pre druhú stranu nerovnosti

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} < \sqrt{2n+25} + b + \frac{1}{\sqrt{2n+25} + b} < \sqrt{2(n+1)+25} + b$$

platí vtedy, keď $1/(\sqrt{2n+25}+b) < \sqrt{2n+27}-\sqrt{2n+25}$, čiže

$$b > \frac{1}{\sqrt{2n+27}-\sqrt{2n+25}} - \sqrt{2n+25} = \frac{\sqrt{2n+27}-\sqrt{2n+25}}{2}.$$

Napokon, funkcia $\sqrt{2n+27}-\sqrt{2n+25}$ je klesajúca, preto b bude vyhovovať tejto podmienke pre všetky n, ak bude platiť

$$b > \frac{\sqrt{27}-\sqrt{25}}{2} \approx 0,098.$$

Môžeme teda položiť $b = 0,1$, čím je dôkaz indukciou hotový.

Dokázali sme, že $\sqrt{2n+25} \leqq x_n < \sqrt{2n+25} + 0{,}1$. Pre $n = 1000$ dostávame $45 \leqq$ $\leqq x_{1000} < 45{,}1$, a teda $x_{1000} \approx 45{,}0$.

Iné korešpondenčné semináre

Okrem matematickej olympiády sú pre študentov základných aj stredných škôl počas školského roka organizované aj iné matematické súťaže. Patria medzi ne predovšetkým korešpondenčné semináre. Tieto súťaže sa v detailoch istotne líšia, avšak základné črty majú spoločné. Počas školského roka prebiehajú dve časti (letná a zimná), ktoré pozostávajú zväčša z troch sérií úloh rozosielaných riešiteľom do škôl alebo domov. Riešenia súťažiaci vypracovávajú rovnakou formou ako v MO a v určenom termíne ich odosielajú na adresu príslušného seminára, odkiaľ sa po niekoľkých dňoch až týždňoch vrátia opravené spolu so vzorovými riešeniami a výsledkovou listinou. Mladší a menej skúsení riešitelia zväčša nemusia riešiť tie najzložitejšie príklady, aby aj oni mali šancu ovplyvniť poradie na prvých miestach. Na konci oboch častí súťaže sú približne tridsiati najúspešnejší riešitelia pozývaní na týždňové sústredenie, účasť na ktorom býva často najsilnejšou motiváciou na riešenie úloh. Nie je ale možné nespomenúť, že takýto pravidelný tréning sa odráža aj na výsledkoch dosahovaných v MO, a že drvivá väčšina reprezentantov Slovenska na IMO sa aktívne zapájala do viacerých z týchto seminárov.

Nižšie uvedené korešpondenčné semináre (KS) sú určené študentom stredných škôl, svojím záberom pokrývajú územie celého Slovenska a často majú aj riešiteľov z Českej republiky. Je však možné, že vo svojom okolí nájdete aj menšie súťaže podobného druhu.

Korešpondenčný matematický seminár — KMS

KMS vznikol v roku 2002 spojením Bratislavského a Stredoslovenského korešpondenčného matematického seminára (BKMS a SKMS), ktoré ešte v 51. ročníku MO prebiehali samostatne. Organizovaný je študentmi FMFI UK v Bratislave.

KMS má tri kategórie. Začínajúcim a mladším riešiteľom je určená kategória ALFA, pre skúsenejších je kategória BETA. Rozdelenie do kategórií umožňuje bojovať o miesta na sústredení aj neskúseným študentom, ktorí by v príliš silnej konkurencii strácali motiváciu. Kategória GAMA je seminár SK MO a je mu venovaná predchádzajúca kapitola.

KMS
OATČ KAGDM FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

e-mail: kms@kms.sk
URL: http://kms.sk

Súťaž talentovaných riešiteľov obľubujúcich matematiku — STROM

Korešpondenčný seminár STROM je pokračovateľom najstaršieho korešpondenčného seminára v bývalom Československu. Je organizovaný z PF UPJŠ v Košiciach skupinou nadšencov, väčšinou bývalých riešiteľov seminára a študentov UPJŠ. V posledných rokoch sa na organizovaní seminára okrem košickej skupiny podieľajú aj študenti FMFI UK pochádzajúci z východného Slovenska. Riešiteľskú základňu má prevažne na východnom Slovensku.

STROM
PF UPJŠ
Jesenná 5
041 54 Košice

e-mail: strom@strom.sk
URL: http://www.strom.sk

Ak ste sa rozhodli do niektorého zo seminárov zapojiť, najrozumnejšie je požiadať o zaslanie úloh prvej série začiatkom septembra alebo začiatkom januára, prípadne si zadania a pravidlá nájsť na internete.

Mgr. Peter Novotný – RNDr. Karel Horák, CSc.
doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.
Mgr. Ján Mazák – Ivan Kováč
Úlohová komisia MO

Päťdesiatyšiesty ročník Matematickej olympiády na stredných školách

Sadzbu programom $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX pripravili
Mgr. Peter Novotný a RNDr. Karel Horák, CSc.

Zostavil: Mgr. Peter Novotný

Recenzoval: doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.

Vydal: Iuventa, Bratislava, 2008

Náklad: 500 ks

ISBN 978–80–8072–085–8