55. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

Správa o riešení úloh zo súťaže konanej v školskom roku 2005/2006

47. MEDZINÁRODNÁ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA
18. MEDZINÁRODNÁ OLYMPIÁDA V INFORMATIKE

S pomocou spolupracovníkov spracovali
RNDr. Karel Horák, CSc.,
Mgr. Vladimír Koutný, Mgr. Peter Novotný, Mgr. Michal Forišek
doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., Ján Mazák, Martina Višňovská
a členovia Úlohovej komisie MO.

ISBN 978–80–8072–067–4

Obsah

O priebehu 55. ročníka matematickej olympiády

Matematická olympiáda (MO) je najstaršia a najmasovejšia postupová intelektuálna súťaž žiakov základných a stredných škôl v SR. Matematickú olympiádu vyhlasuje Ministerstvo školstva Slovenskej republiky (MŠ SR) v spolupráci s Jednotou slovenských matematikov a fyzikov (JSMF). V školskom roku 2005/2006 sa uskutočnil už 55. ročník MO.

Súťaž riadila Slovenská komisia matematickej olympiády (SK MO) a začala pracovať v nasledovnom zložení:

Doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., F-PEDaS ŽU Žilina, predseda
RNDr. Oliver Ralík, FPV UKF Nitra, podpredseda A
RNDr. Andrej Blaho, FMFI UK Bratislava, podpredseda P, od 1. 3. 2006 predseda OI
RNDr. Monika Dillingerová, PhD., FMFI UK Bratislava, podpredseda Z
Doc. RNDr. Gabriela Andrejková, CSc., PF UPJŠ Košice, od 1. 3. 2006 podpredseda OI
Mgr. Michal Forišek, FMFI UK Bratislava
Prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc., FPV UKF Nitra
Mgr. Vladimír Koutný, FMFI UK Bratislava
Juliana Lipková, študentka FMFI UK Bratislava
Ján Mazák, študent FMFI UK Bratislava
Doc. RNDr. Božena Mihalíková, CSc., PF UPJŠ Košice
Mgr. Peter Novotný, FMFI UK Žilina
Mgr. Anna Pobešková, Nitra
Mgr. Martin Potočný, študent FMFI UK Bratislava
Doc. RNDr. Vladislav Rosa, CSc., FMFI UK Bratislava
Mgr. Ivona Slobodová, IUVENTA Bratislava
Mgr. Milan Demko, PhD., FHPV PU Prešov, predseda KKMO PO
RNDr. Zuzana Frková, Gymnázium Grösslingová Bratislava, predseda KKMO BA
Doc. RNDr. Mária Lucká, CSc., PF TU Trnava, predseda KKMO TT
RNDr. Tomáš Madaras, PhD., PF UPJŠ Košice, predseda KKMO KE
Doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc., F-PEDaS ŽU Žilina, predseda KKMO ZA
RNDr. Eva Oravcová, Gymnázium J. G. T. Banská Bystrica, predseda KKMO BB
RNDr. Soňa Pavlíková, CSc., TU Trenčín, predseda KKMO TN
Prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc., FPV UKF Nitra, predseda KKMO NR

Pravidelní a najmä starší čitatelia Ročenky MO si asi všimli, že na zozname SK MO chýba meno prof. RNDr. Jozef Moravčík, CSc. Bohužiaľ, pán profesor nás 22. 9. 2005 navždy opustil. Jeho obrovskú prácu pre MO si pripomenieme na inom mieste tejto Ročenky.

*

Už počas predošlého obdobia sa začali práce na osamostatnení kategórie P ako samostatnej súťaže v informatike. Boli teda vypracované organizačné poriadky dvoch súťaží: Matematickej olympiády (MO), ktorá zahrňuje pôvodné kategórie A, B, C pre stredné školy a kategórie Z4 – Z9 pre základné školy, a Olympiády v informatike (OI), ktorá zahrňuje pôvodnú kategóriu P. Organizačné poriadky MO aj OI boli oficiálne zaregistrované na MŠ SR 1. marca 2006, takže od školského roku 2006/2007 obe súťaže fungujú samostatne. Z finančného aj organizačného hľadiska sme však 55. ročník absolvovali spoločne. Vzhľadom na silne neprázdny prienik účastníkov MO a OI budú tieto súťaže veľmi úzko spolupracovať, pričom najväčšou prioritou bude zabezpečiť prázdny prienik termínov, teda aby žiaci sa mohli zúčastniť oboch týchto súťaží. Pod skratkou MO sa však stále skrýva najstaršia súťaž tohto typu u nás, ktorá v dôsledku snahy veľkého množstva našich význačných predchodcov o čo najlepšie výsledky sa rozrástla na striktnú viackolovú súťaž s množstvom kategórií Z4, Z5, Z6, Z7, Z8, Z9 pre základné školy a C, B, A pre stredné školy. Vznik tých kategórií bol postupný a účelom zavedenia kategórií pre stále mladších žiakov bolo podchytiť talenty v čo najmladšom veku (a obmedziť tak ich únik do iných súťaží). Vrcholnou súťažou v tejto oblasti je Medzinárodná matematická olympiáda (IMO), z ktorej naši žiaci pravidelne vozia medaily. V školskom roku 2005/2006 sa pod skratkou MO ako kategória P skrývala aj samostatná Olympiáda v informatike, ktorej vrcholom je Medzinárodná informatická olympiáda (IOI). Aj keď týmto súťažiam sú venované samostatné kapitoly v tejto Ročenke, spomeňme tu aspoň toľko, že na 47. IMO v Slovinsku získala šestica našich žiakov jednu zlatú, dve strieborné a tri bronzové medaily a štvorica našich žiakov na 18. IOI v Mexiku získala tri strieborné medaily. Za všetky čísla v tejto chvíli už len toľko, že štvorice žiakov SR na doterajších štrnástich IOI od vzniku SR získali 53 medailí z 56 možných a šestice našich žiakov na doterajších štrnástich IMO od vzniku SR získali 64 medailí z 84 možných.

Organizačná štruktúra MO sa nezmenila a podarilo sa uskutočniť všetky plánované akcie, ale ani v tomto ročníku sa nepodarilo zabrániť niektorým termínovým kolíziám. Zásadný význam pri tejto súťaži má tvorba úloh. V tejto oblasti stále udržujeme výbornú a obojstranne prospešnú spoluprácu s českými kolegami, v dôsledku toho však máme spoločné termíny súťaží. My ich spoločne naplánujeme ďaleko dopredu (aj dva roky), ale MŠ SR dáva termíny maturít relatívne neskoro. Vďaka obojstrannej ústretovosti sme však s českými priateľmi doteraz vždy dokázali kolízie vyriešiť.

K tvorbe úloh ešte toľko, že SK MO prijíma aj nekonštruktívnu kritiku, ale matematickej olympiáde to veľa nepomôže – úlohové komisie robia, čo vedia. Navyše, všetky hodnotenia sú vždy subjektívne – aj naše. Keby kritizujúci pripojil aj niekoľko pekných úloh, malo by to väčší efekt. Výzvu na tvorbu úloh už uverejňujeme viac rokov po rôznych linkách, ale bohužiaľ, výzva sa nestretáva s pochopením. Prejavíme svoj nezlomný optimizmus (veď ináč by sme pri MO neboli) a dúfame, že teraz to bude iné.

Pár slov o sponzoringu, o ktorý som za uplynulé roky ako predseda SK MO niekoľkokrát prosil. Z oslovených 47 veľmi bohatých firiem, z ktorých mnohé vykazujú ročný zisk vyše miliardy, nebola ochotná prispieť ani jedna, pričom len tri si dali námahu aspoň napísať niečo v tom zmysle, že „ … naše sponzorské aktivity sú upriamené iným smerom … “. Iste, veď MO je len intelektuálna súťaž a ako taká nie je mediálne zaujímavá. Na druhej strane je pravda, že napr. firma CASIO oslovila nás (prostredníctvom Dr. Lilly Koreňovej) a už niekoľkokrát poskytla hodnotné ceny najlepším na celoštátnom kole MO a dala vyrobiť pre naše IMO-družstvo reprezentačné tričká; ďalej je pravda, že aj firma Wolfram Research, ktorú zastupuje ELKAN Praha (Ing. Václav Žák), venovala členom IMO-teamu veľmi hodnotné ceny a chce v tom pokračovať. Aj touto cestou im ďakujem. A poďakovanie SK MO patrí všetkým, ktorí prispeli k cenovému fondu celoštátneho kola, lebo ten sa riadi staršími predpismi a nie je dôstojný súťaže takej kvality.

Ohľadne finančného zaopatrenia MO považujem za potrebné uviesť ešte nasledovné. Začiatkom septembra 2006 MŠ SR krátilo rozpočet o 10 %. Organizátori Korešpondenčného matematického seminára (KMS) sa okamžite zriekli odmien (a spolu s nimi predseda SK MO ihneď zrušil zaslúžené odmeny aj mnohým ďalším), aby bolo možné realizovať naplánované akcie, najmä sústredenia riešiteľov. MŠ SR však o mesiac prehodnotilo krátenie peňazí a tých 10 % do rozpočtu vrátilo, takže bolo možné realizovať aj nejaké odmeny. Nijako to však neznižuje hodnotu postoja a okamžitej reakcie organizátorov KMS a patrí im za to obdiv.

K finančnému zabezpečeniu MO ešte patrí, že autorovi týchto riadkov sa podarilo získať grant APVV, ktorý by po dobu troch rokov mal v nemalej miere pokryť náklady KMS.

V 55. ročníku MO sa objavila jedna nová akcia. Společnost Otakara Borůvky usporiadala a finančne zabezpečila tréningové sústredenie IMO-družstva ČR v mestečku Hluk pri Uherskom Hradišti a na toto sústredenie pozvala aj IMO-družstvo SR, ktorému financovala účasť. Táto akcia má byť organizovaná každoročne, nie je reciproká, a nám neostáva iné, ako úprimne našim českým kolegom poďakovať za veľkorysosť.

Ako lákadlo a zvýšenie motivácie najmä pre mladších žiakov pridávam nasledovnú informáciu. Na IMO v Slovinsku zvolali Rakúšania poradu stredoeurópskych krajín, kde navrhli usporiadanie Stredoeurópskej matematickej olympiády (MEMO). Konala by sa obvykle v septembri a zúčastniť by sa mohli žiaci, ktorí ešte neboli na IMO. V čase písania týchto riadkov už máme písomný prísľub ministra školstva, že MŠ SR urobí všetko pre to, aby sa naši žiaci mohli tejto súťaže zúčastniť.

*

Celoštátne kolo MO (CK MO) v kategóriách A aj P usporiadala KK MO Nitra, ktorej predsedom je prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc. a ktorému veľmi výrazne pomáhali najmä prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc. a RNDr. Oliver Ralík. K úspešnému priebehu výrazne prispela aj Mgr. Ivona Slobodová z IUVENTY. V mene SK MO všetkým za odvedenú prácu ďakujem. Po CK MO sa v oboch kategóriách A aj P uskutočnili veľmi náročné výberové sústredenia, po ktorých vznikli reprezentačné družstvá. Tieto potom absolvovali v rámci prípravy na 47. IMO, 18. IOI a 13. CEOI aj tréningové sústredenia a už tradičné súťažné trojstretnutie ČR-Poľsko-SR. Viac o týchto akciách a tiež o korešpondenčných seminároch nájde záujemca v samostatných kapitolách tejto Ročenky. Už teraz však uveďme aspoň niektoré z mnohých zaujímavých internetových stránok:

http://matematika.webpark.sk – archív zadaní, poradí a riešení MO,
http://pppnnn.webpark.sk/mo.htm – aktuálne dokumenty, najmä pre Žilinský kraj,
http://www.iuventa.sk – stránka IUVENTY,

http://ksp.sk/mop – aktuálne informácie a archív pre kategóriu P,
http://kms.sk/mo – informácie o MO na stránkach korešpondenčného seminára,
http://imo2006.dfma.si – stránka 47. IMO v Slovinsku.

Pretože Ročenka je len o celoštátnych akciách, nie je možné explicitne spomenúť všetkých, ktorí sa na práci v MO podieľajú na školách, v oblastiach a krajoch. Bez nich by to však nešlo. Dovolím si im teda aspoň touto cestou poďakovať.

Vojtech Bálint, predseda SK MO

Spomienka na prof. RNDr. Jozefa Moravčíka, CSc.

Narodil sa 16. februára 1934 v Piešťanoch, kde na gymnáziu v júni 1953 maturoval. Vysokoškolské štúdium absolvoval s vyznamenaním v roku 1958 na PF UK v Bratislave. V roku 1958 nastúpil ako asistent na katedru matematiky PFUK v Bratislave, od októbra 1962 bol odborným asistentom katedry matematiky a deskriptívnej geometrie fakulty strojníckej a elektrotechnickej VŠD (dnešná ŽU) v Žiline. Neskôr sa stal prorektorom VŠD.

Vedeckú hodnosť CSc. obhájil v roku 1965 v odbore matematická analýza. V septembri 1970 predložil na PF UK v Bratislave habilitačnú prácu „Aplikácie teórie ekvivalencie lineárnych diferenciálnych rovníc obyčajných n-tého rádu“. Na základe úspešnej obhajoby, ktorú mu však umožnili až v januári 1974, bol od 1. 1. 1975 menovaný docentom matematiky. Profesorom matematiky sa stal v septembri 1980. V domácich i zahraničných vedeckých časopisoch a zborníkoch publikoval 26 vedeckých prác. Bol autorom resp. spoluautorom dvoch vysokoškolských učebníc a ôsmich vysokoškolských skrípt.

Jeho práca bola veľmi všestranná: spolu s RNDr. Ladislavom Bergerom, Dr. h. c. Žilinskej univerzity, bol zakladateľom konferencií slovenských matematikov, ktoré sa od roku 1969 konajú v Jasnej pod Chopkom; ešte ako externý ašpirant roku 1964 na katedre založil a potom dlhé roky viedol vedecký seminár z diferenciálnych rovníc obyčajných; niekoľko rokov robil recenzie pre Mathematical Reviews; bol výkonným redaktorom fyzikálno-matematickej série zborníka Práce a štúdie VŠD, neskôr členom redakčnej rady časopisu Studies of the University of Žilina, Mathematical series, na ktoré sa Práce a štúdie VŠD transformovali; bol členom niekoľkých vedeckých rád.

Nemalú časť svojej tvorivej energie venoval práci s talentami v rámci MO, pri ktorej bol prakticky od jej vzniku (v roku 1951 ako študent), neskôr aj vo funkcii predsedu ÚV MO. Bol zakladateľom korešpondenčného seminára v ČSR. Na medzinárodných matematických olympiádach v rokoch 1968 – 1992 reprezentoval Československo šesťkrát ako vedúci delegácie a sedemkrát ako pedagogický vedúci družstva. Jeho pestrá činnosť v MO bola ocenená niekoľkými vyznamenaniami, z ktorých tu spomeňme malú medailu sv. Gorazda z roku 2001 pri príležitosti 50. výročia vzniku MO. K aktívnej činnosti v MO priviedol veľmi veľa ľudí a vštepil do nich korektný a zodpovedný prístup k práci s talentovanou mládežou. V MO pracoval do posledných chvíľ. Ešte na jar roku 2005 dodal niekoľko veľmi pekných, originálnych úloh a mal prichystané ďalšie. Bohužiaľ, tie sa už nedozvieme, lebo 22. septembra 2005 nás pán profesor Moravčík, čestný člen JSMF, navždy opustil. Práca v Matematickej olympiáde je však jeho krásnym pomníkom.

Zostáva nám len poďakovať prof. RNDr. Jozefovi Moravčíkovi, CSc. za všetko, čo pre rozvoj matematiky urobil.

Česť jeho pamiatke!

Vojtech Bálint

Výsledky celoštátneho kola, kategória A

Víťazi

1.	Ondrej BUDÁČ	4 G B. S.Timravy, Lučenec	7 7 6 7 7 7	41
2.	Jaroslav KNEBL	4 G A. Bernoláka, Námestovo	7 3 6 6 7 1	30
3.	Ján MIKULÁŠ	4 G B. S.Timravy, Lučenec	6 7 3 6 4 3	29
	Michal TAKÁCS	4 G J. G. Tajovského, B. Bystrica	6 7 3 6 7 0	29
5.	István ESTÉLYI	4 G Z. Kodálya, Galanta	7 3 3 7 6 0	26
6.	Jakub BERAN	4 G Alejová, Košice	6 6 4 0 6 2	24
7.	Vladimír BOŽA	2 G D. Tatarku, Poprad	6 7 0 0 7 1	21
8.	Samuel HAPÁK	2 G Grösslingová, Bratislava	6 6 0 6 0 2	20
	Jakub IMRIŠKA	4 G Jura Hronca, Bratislava	7 1 3 7 1 1	20
	Vladislav UJHÁZI	2 G P. J. Šafárika, Rožňava	5 1 6 5 1 2	20

Ďalší úspešní riešitelia

11.	Kristián KACZ	4 G H. Selyeho, Komárno	7 1 1 6 1 3	19
	Jozef MINÁR	4 G Grösslingová, Bratislava	7 7 1 0 4 0	19
	Peter PEREŠÍNI	4 G J. G. Tajovského, B. Bystrica	7 1 3 6 0 2	19
	Michal SZABADOS	3 ŠPMNDaG, Bratislava	6 6 0 5 1 1	19
15.	Michal KOVÁČ	4 G Grösslingová, Bratislava	0 5 1 5 1 6	18
16.	Andrej BORSUK	4 G Grösslingová, Bratislava	7 1 0 2 6 1	17
	Michal PRUSÁK	4 G J. A. Raymana, Prešov	6 4 0 6 0 1	17
18.	Rastislav OĽHAVA	4 G Alejová, Košice	2 7 2 5 0 0	16
	Katarína ŠKROVINOVÁ	4 G Párovská, Nitra	1 7 3 5 0 0	16

Ostatní riešitelia

20.	Ľubomír NOVÁK	4 G Jura Hronca, Bratislava	5 1 1 5 1 1	14
21.	Peter BERTA	3 G Fábryho, Veľké Kapušany	5 2 0 5 0 1	13
22.	Ondrej MIKULÁŠ	3 G B. S.Timravy, Lučenec	4 2 1 4 0 0	11
	Alexander PÁLDY	3 G Z. Kodálya, Galanta	3 1 1 5 0 1	11
	István SZENTANDRÁSI	4 G Z. Kodálya, Galanta	1 1 1 6 0 2	11
25.	Alena BACHRATÁ	4 G Veľká okružná, Žilina	6 2 0 0 1 0	9
	Marcela HRDÁ	4 G Jura Hronca, Bratislava	0 7 1 0 0 1	9
	Tomáš KOČISKÝ	2 G Grösslingová, Bratislava	2 1 1 4 0 1	9
28.	Martin BEKESS	4 G D. Tatarku, Poprad	4 1 0 0 1 2	8
	František HAŠKO	4 G Poštová, Košice	6 1 0 0 0 1	8

	Alena KOŠINÁROVÁ	2 G Grösslingová, Bratislava	1 2 0 1 4 0	8
	Ivan POLKO	3 G Grösslingová, Bratislava	1 2 0 5 0 0	8
	Tomáš RUSIN	3 G Alejová, Košice	1 0 0 0 0 7	8
33.	Ján PICH	4 G Komenského, Svidník	0 7 0 0 0 0	7
34.	Lukáš JUSKO	3 G Poštová, Košice	4 1 0 0 1 0	6
35.	Jozef JÁNOŠÍK	4 G Varšavská, Žilina	0 1 1 0 1 2	5
36.	Martin BLICHA	3 G Alejová, Košice	0 1 0 0 0 2	3
	Ľubomír PAJTÁŠ	4 G Grösslingová, Bratislava	0 1 0 0 1 1	3
38.	Slavomír TAKÁČ	4 G M. R. Štefánika, Nové Zámky	– 0 – 0 0 1	1

Úspešnosť jednotlivých úloh je zaznamenaná v tabuľke.

Počet bodov	**Spolu**	**Číslo úlohy**					
		1.	2.	3.	4.	5.	6.
7 bodov	26	8	9	0	3	4	2
6 bodov	27	9	3	3	8	3	1
5 bodov	13	3	1	0	9	0	0
4 body	10	3	1	1	2	3	0
3 body	11	1	2	6	0	0	2
2 body	17	2	5	1	1	0	8
1 bod	56	5	15	10	1	11	14
0 bodov	68	7	2	17	14	17	11
Priemer	2,51	3,92	3,18	1,37	3,29	1,82	1,47

Výsledky celoštátneho kola, kategória P

Víťazi

1.	Peter PEREŠÍNI	4 G Tajovského, B. Bystrica	8	8	10	13	15	54
2.	Daniel BUNDALA	4 G Jura Hronca, Bratislava	6	8	8	9	15	46
3.	Matúš FEDÁK	4 G Stará Ľubovňa	9	8	10	6	3	36
4.	Jakub IMRIŠKA	4 G Jura Hronca, Bratislava	8	8	8	6	5	35
5.	Ján MIKULÁŠ	4 G Haličská, Lučenec	1	7	10	2	13	33
6.	Peter HERMAN	3 G Jura Hronca, Bratislava	5	8	1	6	11	31

Ďalší úspešní riešitelia

7.	Vladimír BOŽA	2 G D. Tatarku, Poprad	0	8	7	5	9	29
	Ladislav RAMPÁŠEK	3 G Jura Hronca, Bratislava	7	7	2	5	8	29
9.	Ondrej BUDÁČ	4 G Haličská, Lučenec	3	8	9	8	0	28
	Martin KRÁLIK	4 G Grösslingová, Bratislava	0	7	10	6	5	28
11.	Samuel HAPÁK	2 G Grösslingová, Bratislava	7	6	8	1	5	27
12.	Slavomír TAKÁČ	4 G Nové Zámky	0	9	9	5	2	25
13.	Zuzana PETRUCHOVÁ	4 G Grösslingová, Bratislava	3	5	5	5	6	24

Ostatní riešitelia

14.	Ondrej MIKULÁŠ	3 G Haličská, Lučenec	4	8	6	5	0	23
15.	Jozef JIRÁSEK	3 G Zbrojničná, Košice	0	6	10	5	1	22
16.	Andrej BORSUK	4 G Grösslingová, Bratislava	5	2	9	4	1	21
17.	Michal KOVÁČ	4 G Grösslingová, Bratislava	3	4	6	4	3	20
	Marcel ĎURIŠ	3 G P. Horova, Michalovce	0	1	7	4	8	20
19.	Peter HRINČÁR	2 G D. Tatarku, Poprad	0	3	6	1	9	19
20.	Radoslav KRIVÁK	4 G Mudroňova, Prešov	1	6	–	–	9	16
21.	Michal SUDOLSKÝ	3 G Tajovského, B. Bystrica	0	5	4	5	0	14
	Matúš KOTRY	3 G Párovská, Nitra	2	3	–	5	4	14
23.	Andrej PANČÍK	3 G Tajovského, B. Bystrica	3	3	–	5	0	11
	Adam OKRUHLICA	3 G Jura Hronca, Bratislava	4	5	0	1	1	11
25.	Ondrej KAPRÁL	4 SOU Kukučínova, Poprad	3	3	–	–	3	9
26.	Peter NIKODEM	2 G Školská, Spiš. Nová Ves	0	2	–	–	3	5
27.	Ivan BUŠTOR	3 G Jura Hronca, Bratislava	0	2	0	1	0	3

Výsledky krajských kôl

Z príslušného kraja a v príslušnej kategórii A, B, C, P a Z9 sú uvedení všetci, resp. aspoň prvých 10 úspešných riešiteľov. Gymnáziá so zameraním na matematiku, študijný odbor 01, sú tieto:

Gymnázium Grösslingová, Bratislava,
Gymnázium Párovská, Nitra,
Gymnázium Veľká okružná, Žilina,
Gymnázium J. G. Tajovského, Banská Bystrica,
Gymnázium Alejová, Košice,
Gymnázium Poštová, Košice.

Kraj Bratislava

Kategória A

1.	Marcela HRDÁ	4 Gymnázium Jura Hronca
2.	Alena KOŠINÁROVÁ	2 Gymnázium Grösslingová
	Jozef MINÁR	4 Gymnázium Grösslingová
4.	Andrej BORSUK	4 Gymnázium Grösslingová
5.	Michal MÁJEK	4 Gymnázium Grösslingová
	Michal SZABADOS	3 ŠpMNDaG Skalická
7.	Samuel HAPÁK	2 Gymnázium Grösslingová
	Ľubomír NOVÁK	4 Gymnázium Jura Hronca
9.	Michal KOVÁČ	4 Gymnázium Grösslingová
10.	Jakub IMRIŠKA	4 Gymnázium Jura Hronca

Kategória B

1.	Samuel HAPÁK	Gymnázium Grösslingová
	Mária STAROVSKÁ	Gymnázium Grösslingová
3.	Lucia SIMANOVÁ	Gymnázium Grösslingová
4.	Tomáš KOČISKÝ	Gymnázium Grösslingová
	Katarína POKORNÁ	Gymnázium Grösslingová
	Andrej RIDZIK	Gymnázium Grösslingová
7.	Matúš KUKAN	Gymnázium Grösslingová

	Lenka MATEJOVIČOVÁ	Gymnázium Grösslingová
9.	Katarína BURJANOVÁ	Gymnázium Grösslingová
	Peter KOSTOLÁNYI	Gymnázium Jura Hronca

Kategória C

1.	Peter CSIBA	ŠpMNDaG Skalická
2.	Tomáš KABINA	Gymnázium Grösslingová
	Michal SPIŠIAK	Gymnázium Grösslingová
	Jakub UHRÍK	Gymnázium Grösslingová
5.	Michal HAJDIN	Gymnázium Jura Hronca
	Pavol RADIČ	Gymnázium Grösslingová
7.	Matej ŠIMLOVIČ	Gymnázium Grösslingová
8.	Emil HAAS	Gymnázium Grösslingová
	Igor KOSSACZKÝ	Gymnázium Grösslingová
10.	Natália KARÁSKOVÁ	Gymnázium Grösslingová

Kategória Z9

1.	Martin HURBAN	Gymnázium Grösslingová
	Natália KARÁSKOVÁ	Gymnázium Grösslingová
	Jozef KOVÁČ	Gymnázium Grösslingová
	Ján ŠAUŠA	ZŠ Karloveská
5.	Bruno CUC	Gymnázium Grösslingová
	Juraj HAŠÍK	Gymnázium Grösslingová
7.	Jozef FRANZEN	ZŠ Bieloruská
8.	Tomáš BELAN	ŠpMNDaG Skalická
9.	Hana HOZZÁNKOVÁ	Gymnázium Jura Hronca
	Michal KOTVAN	Gymnázium Jura Hronca

Kategória P

1.	Daniel BUNDALA	4 Gymnázium Jura Hronca
2.	Andrej BORSUK	4 Gymnázium Grösslingová
3.	Peter HERMAN	3 Gymnázium Jura Hronca
4.	Adam OKRUHLICA	3 Gymnázium Jura Hronca
5.	Martin GOTTWEIS	4 Gymnázium Jura Hronca
	Martin KRÁLIK	4 Gymnázium Grösslingová
7.	Samuel HAPÁK	2 Gymnázium Grösslingová
	Ladislav RAMPÁŠEK	3 Gymnázium Jura Hronca

Kraj Nitra

Kategória A

1.	Katarína ŠKROVINOVÁ	4 Gymnázium Párovská, Nitra
2.	Kristián KACZ	4 Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	Slavomír TAKÁČ	4 Gymnázium Nové Zámky
4.	Štefan SAKALÍK	3 Gymnázium Párovská, Nitra
5.	Miroslav HOTÁK	4 Gymnázium A. Vrábla, Levice
	Péter SZÉPE	4 Gymnázium H. Selyeho, Komárno

Kategória B

1.	Dávid PSZOTA	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	András VARGA	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
3.	Martin MELICHERČÍK	Gymnázium Párovská, Nitra
	Dušan ŠVANCARA	Gymnázium Golianova, Nitra
5.	Veronika DVORANOVÁ	Gymnázium Šurany
6.	Gergő ÉDES	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
7.	Peter KORCSOK	Gymnázium Šahy
8.	András MÁTYÁS	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	Gergely NÉMETH	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	Géza ÖLLŐS	Gymnázium H. Selyeho, Komárno

Kategória C

1.	Balázs DINGA	Gymnázium Marianum, Komárno
2.	Dávid LAMI	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	Bálint PÁSZTOR	Gymnázium Šahy
4.	István PARASZTI	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
5.	Beáta TÓTHOVÁ	Gymnázium Šahy
6.	Attila HEGEDÜS	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	Klaudia KURUCOVÁ	Gymnázium Ľ. J. Šuleka, Komárno
8.	Adam BABINEC	Gymnázium Nové Zámky
	Róbert IVÁN	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	András KABAI	Gymnázium H. Selyeho, Komárno

Kategória Z9

1.	Marek JAKAB	ZŠ Veľký Ďur
	Lukáš KOTRY	Gymnázium Párovská, Nitra
3.	Ivana TONHAUSEROVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra

	Juraj KORČEK		Gymnázium A. Vrábla, Levice
	Michaela ĎURIČOVÁ		ZŠ Školská, Levice
	Orsolya KUSTYÁN		ZŠ Čičov
7.	Márton FEKETE		ZŠ Eötvösa, Komárno
8.	Kristína VÁCLAVOVÁ		ZŠ P. Pázmanya, Šaľa
	Marianna GODIŠOVÁ		ZŠ sv. Ladislava, Topoľčany
10.	Dávid RÉDLI		ZŠ Školská, Levice
	Michal DIBUS		Gymnázium Šurany

Kategória P

1.	Slavomír TAKÁČ	4	Gymnázium Nové Zámky

Kraj Trnava

Kategória A

1.	István ESTÉLYI	4	Gymnázium Z. Kodálya, Galanta
2.	István SZENTANDRÁSI	4	Gymnázium Z. Kodálya, Galanta
3.	Tomáš BZDUŠEK	3	Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany
	Sándor PÁLDY	3	Gymnázium Z. Kodálya, Galanta
5.	Tomáš FEKETE	3	Gymnázium Á. Vámbéryho, D. Streda
6.	Matúš REHÁK	3	Gymnázium Skalica

Kategória B

1.	Tibor HORVÁTH		Gymnázium Á. Vámbéryho, D. Streda
2.	Peter BODÓ		Gymnázium Á. Vámbéryho, D. Streda
3.	Klára HIDEGHÉTY		Gymnázium I. Madácha, Šamorín
4.	Ádam LIPPAI		Gymnázium Á. Vámbéryho, D. Streda
5.	Lukáš HANZLÍČEK		Gymnázium L. Novomeského, Senica
	Michaela PIŠNÁ		Gymnázium Hlohovec
7.	Filip KOZÁK		Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany
8.	Lukáš KONEČNÝ		Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany
	Lukáš KUNERT		Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany
10.	Erik BOHONY		Gymnázium Á. Vámbéryho, D. Streda
	Veronika HORVÁTHOVÁ		Gymnázium Veľký Meder
	Katarína MOSNÁ		Gymnázium Hlohovec
	Peter VANKO		Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany

Kategória C

1.	Ján MIKLÁŠ	Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany
2.	Ján BOROVSKÝ	Gymnázium sv. Michala Archanjela, Piešťany
3.	Albert HERENCSÁR	Gymnázium Z. Kodálya, Galanta
	László ÖLLŐS	Gymnázium Á. Vámbéryho, D. Streda

Kategória Z9

1.	Lukáš CÁDER	Gymnázium Hlohovec
	Martin DOVIČIČ	ZŠ Kátlovce
	Terézia THOMOVÁ	ZŠ Brezová, Piešťany
4.	Lenka ŠIŠKOVÁ	ZŠ Brezová, Piešťany
5.	Lukáš CINTULA	ZŠ Borský Mikuláš
	Balázs PONGRÁCZ	ZŠ Holice
7.	Zoltán FÁBIK	ZŠ B. Bartóka, Veľký Meder
	Pavol LOPATKA	ZŠ Chtelnica
	Gábor MOLNÁR	ZŠ B. Bartóka, Veľký Meder
10.	Róbert ADAMČÍK	ZŠ J. Fándlyho, Sereď
	Mária MACÁNKOVÁ	ZŠ Gbely
	Adam NIŽŇAN	Gymnázium A. Merici, Trnava
	Juraj TOMAŠOVIČ	ZŠ Školská, Vrbové
	Tomáš VÁGOVIČ	ZŠ Kátlovce

V kategórii P nikto nezískal dostatočný počet bodov na to, aby sa stal úspešným riešiteľom.

Kraj Trenčín

Kategória A

1.	Peter ZÁMEČNÍK	4 Gymnázium M. R. Štefánika, N. Mesto n/V.

Kategória B

1.	Lucia KOVALČÍKOVÁ	Gymnázium Bánovce nad Bebravou
2.	Marián ŠAGÁT	Gymnázium Považská Bystrica
3.	Martin BÚTORA	Gymnázium Dubnica nad Váhom
	Jozef JAKUBÍK	Gymnázium Partizánske
	Branislav JESENSKÝ	Gymnázium Dubnica nad Váhom

Kategória C

1.	Michal HOJČKA	Gymnázium Partizánske

Kategória Z9

1.	Marika WERNEROVÁ	ZŠ Štúrova, Nové Mesto nad Váhom
	Kamila DOBROTKOVÁ	ZŠ Duklianska, Bánovce nad Bebravou
3.	Jakub KOKEŠ	ZŠ Novomeského, Trenčín
	Lenka BAČINSKÁ	ZŠ Školská, Považská Bystrica
5.	Ivana MATEČKOVÁ	ZŠ Duklianska, Bánovce nad Bebravou
	Viktor GREGOR	ZŠ Slov. partizánov, Považská Bystrica
	Jakub KONEČNÝ	ZŠ J. Kráľa, Nová Dubnica
8.	Marian DUDA	ZŠ Hodžova, Trenčín
	Ivana MIKLÁNKOVÁ	ZŠ Štúrova, Nové Mesto nad Váhom
	Jakub CHALMOVIANSKÝ	ZŠ Rastislavova, Prievidza
	Marián HUDEC	ZŠ Mládežnícka, Púchov

V kategórii P nikto nezískal dostatočný počet bodov na to, aby sa stal úspešným riešiteľom.

Kraj Žilina

Kategória A

1.	Jaroslav KNEBL	4 Gymnázium A. Bernoláka, Námestovo
2.	Jozef JANOŠÍK	4 Gymnázium Varšavská, Žilina
3.	Alena BACHRATÁ	4 Gymnázium Veľká okružná, Žilina
4.	Lenka TROJAKOVÁ	4 Gymnázium Veľká okružná, Žilina

Kategória B

1.	Lukáš KEKELY	Gymnázium Varšavská, Žilina
2.	Miroslav MAJERČÍK	Gymnázium Sučany
	Tomáš MATULA	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
4.	Magda JANUROVÁ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
5.	Róbert ĎUREC	Gymnázium Varšavská, Žilina
6.	Filip KUBINA	Gymnázium P. O. Hviezdoslava, D. Kubín
	Peter MARKO	Gymnázium P. O. Hviezdoslava, D. Kubín
	Pavol OTTO	Gymnázium sv. Františka z Assisi, Žilina

	Lijun WU	Gymnázium M. Hattalu, Trstená

Kategória C

1.	Jakub HRABOVSKÝ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
2.	Matej MELO	Gymnázium sv. Františka z Assisi, Žilina
3.	Andrej DADAJ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
4.	Peter HMÍRA	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
	Tomáš RIZMAN	Gymnázium Varšavská, Žilina
6.	Gabriela BAJDICHOVÁ	Gymnázium P. O. Hviezdoslava, D. Kubín
	Martin ČERŇAN	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
	Michal TORMA	Gymnázium Sučany
9.	Jana KUNDRÍKOVÁ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
10.	Ondrej ŠEDO	Gymnázium Veľká okružná, Žilina

Kategória Z9

1.	Jaroslav BARIČÁK	ZŠ Oščadnica
	Tomáš JANOŠÍK	ZŠ Limbová, Žilina
	Mojmír MAJDIŠ	ZŠ Radlinského, D. Kubín
	Matej NOGA	ZŠ Školská, Turčianske Teplice
	Zuzana ROŠŤÁKOVÁ	Gymnázium M. M. Hodžu, Lipt. Mikuláš
6.	Ľubomír JAGOŠ	ZŠ Limbová, Žilina
	Michal OKÁL	ZŠ Bernolákova, Martin
	Jarmila OSLEJOVÁ	ZŠ Martinská, Žilina
	Juraj STRELEC	ZŠ Karpatská, Žilina
10.	Michal JANÁČIK	ZŠ Clementisova, Kysucké Nové Mesto
	Filip SLÁDEK	Gymnázium A. Bernoláka, Námestovo

V kategórii P nikto nezískal dostatočný počet bodov na to, aby sa stal úspešným riešiteľom.

Kraj Banská Bystrica

Kategória A

1.	Ondrej BUDÁČ	4	Gymnázium B. S. Timravy, Lučenec
	Michal TAKÁCS	4	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
3.	Peter PEREŠÍNI	4	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Ján MIKULÁŠ	4	Gymnázium B. S. Timravy, Lučenec
5.	Ondrej MIKULÁŠ	3	Gymnázium B. S. Timravy, Lučenec
6.	Michal SUDOLSKÝ	3	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica

7.	Jakub UKROP	4 Gymnázium Ľ. Štúra, Zvolen
	Filip ŠTEFAŇÁK	3 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica

Kategória B

1.	Katarína TUREKOVÁ	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
2.	Júlia FARKAŠOVÁ	Gymnázium Fiľakovo
3.	Peter ŠÍPOŠ	Gymnázium Fiľakovo
	Katarína ZUBNÁROVÁ	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
5.	Matej PEKAŘ	Gymnázium Š. Moysesa, B. Bystrica
	Ondrej PEREŠÍNI	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Zuzana RENDLOVÁ	Gymnázium A. Kmeťa, Banská Štiavnica

Kategória C

1.	Peter SLUKA	Gymnázium Ľ. Štúra, Zvolen
2.	Matej POLIAK	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
3.	Tomáš SZANISZLO	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
4.	Veronika HORVÁTHOVÁ	Gymnázium J. Kollára, Žiar nad Hronom
	Pavel KUDIVÁNI	Gymnázium A. Sládkoviča, Krupina
	Marián NOCIAR	Gymnázium B. S. Timravy, Lučenec
7.	Adrián LIDAY	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Michal MATÚŠOV	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Katarína MINĎÁŠOVÁ	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
10.	Lenka LIETAVCOVÁ	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Zosia ORAVCOVÁ	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Daniela SARVAŠOVÁ	Gymnázium B. S. Timravy, Lučenec
	Maroš ŠTERBA	Gymnázium Detva

Kategória Z9

1.	Jozef GANDŽALA	ZŠ Hrnčiarska, Zvolen
	Alexander LORINC	ZŠ Golianova, B. Bystrica
	Martin PITOŇÁK	ZŠ Hrnčiarska, Zvolen
4.	Katarína CHOVANCOVÁ	ZŠ Lom nad Rimavicou
	Michaela KORBELOVÁ	ZŠ Moskovská, B. Bystrica
	Eva SZABOVÁ	ZŠ Jelšava
	Martin UKROP	ZŠ P. Jilemnického, Zvolen
	Michal ZIMAN	Gymnázium B. S. Timravy, Lučenec
9.	Dominika MOTYKOVÁ	ZŠ sv. Alžbety, Nová Baňa
10.	Erika HORVÁTHOVÁ	ZŠ Jelšava
	Renáta MEDEOVÁ	ZŠ Mládežnícka, Fiľakovo
	Dominika ROŠKOVÁ	ZŠ M. R. Štefánika, Žiar nad Hronom

	Patrik ŽILKA	ZŠ nám. A. H. Škultétyho, Veľký Krtíš

Kategória P

1.	Peter PEREŠÍNI	4 Gymnázium Tajovského, B. Bystrica
2.	Ondrej BUDÁČ	4 Gymnázium Haličská, Lučenec
3.	Michal SUDOLSKÝ	3 Gymnázium Tajovského, B. Bystrica
4.	Ondrej MIKULÁŠ	3 Gymnázium Haličská, Lučenec
	Andrej PANČÍK	3 Gymnázium Tajovského, B. Bystrica

Kraj Košice

Kategória A

1.	Peter BERTA	3 Gymnázium Veľké Kapušany
2.	Vladislav UJHÁZI	2 Gymnázium P. J. Šafárika, Rožňava
3.	Tomáš RUSIN	3 Gymnázium Alejová, Košice
	Jakub BERAN	4 Gymnázium Alejová, Košice
5.	Rastislav OĽHAVA	4 Gymnázium Alejová, Košice
	Peter KOBAN	4 Gymnázium Alejová, Košice
	Alexander TILL	3 Gymnázium Poštová, Košice
	František HAŠKO	4 Gymnázium Poštová, Košice
	Martin BLICHA	3 Gymnázium Alejová, Košice
	Zuzana MOLNÁROVÁ	4 Gymnázium Alejová, Košice

Kategória B

1.	Vladislav UJHÁZI	Gymnázium P. J. Šafárika, Rožňava
2.	Tomáš KOCÁK	Gymnázium Poštová, Košice
3.	Richard DUBIEL	Gymnázium Poštová, Košice
4.	Katarína POVOLNÁ	Gymnázium Alejová, Košice
5.	Gabriela VOZÁRIKOVÁ	Gymnázium Poštová, Košice
	Jarosla BÖHMER	Gymnázium Školská, Spišská Nová Ves
7.	Vladimír NOVÁK	Gymnázium Poštová, Košice
8.	Marek OLOS	Gymnázium Poštová, Košice
	Adriána SZILÁGYIOVÁ	Gymnázium Poštová, Košice
10.	Tomáš KUBÁK	Gymnázium Alejová, Košice

Kategória C

1.	Miroslav LIŠČINSKÝ	Gymnázium Alejová, Košice
2.	Dávid VENDEL	Gymnázium Poštová, Košice

	Tomáš KUZMA	Gymnázium Alejová, Košice
4.	Martin ŠTOBER	Gymnázium Poštová, Košice
	Eduard EIBEN	Gymnázium Poštová, Košice
6.	Ľubo REMÁK	Gymnázium Alejová, Košice
7.	Peter FULLA	SPŠ strojnícka, Spišská Nová Ves
	Michal HOSPODÁR	Gymnázium sv. T. Akvinského, Košice
9.	Marek FEDOROČKO	Gymnázium Alejová, Košice
	Ladislav BAČO	Gymnázium Poštová, Košice

Kategória Z9

1.	Ladislav BAČO	ZŠ Kežmarská, Košice
	Marek VERNÍČEK	ZŠ Hutnícka, Spišská Nová Ves
	Kristína KIČOVÁ	ZŠ Drábová, Košice
4.	Simona GREŠKOVÁ	ZŠ Okružná, Michalovce
	Richard STEIN	ZŠ Dneperská, Košice
6.	Milan JANČÁR	ZŠ P. Horova, Michalovce
	Dominika SMIKOVÁ	ZŠ Bruselská, Košice
	Marek MARTIN	ZŠ Juhoslovanská, Košice
	Michal LUKÁČ	ZŠ Trstené pri Hornáde
	Zizana HECLOVÁ	ZŠ Okružná, Michalovce
	Šimon DEMOČKO	ZŠ Z. Nejedlého, Spišská Nová Ves
	Zuzana NIKODEMOVÁ	ZŠ Nad Medzou, Spišská Nová Ves
	Katka JESENSKÁ	ZŠ Novemeskeho, Košice
	Jana MIŽÍKOVÁ	ZŠ Novemeskeho, Košice
	Eva BARTOŠOVÁ	ZŠ Park Angelinum, Košice
	Peter LUKÁČ	ZŠ Krosnianska, Košice
	Paulína PAVLOVÁ	ZŠ Nad Medzou, Spišská Nová Ves

Kategória P

1.	Marcel ĎURIŠ	3 Gymnázium P. Horova, Michalovce

Kraj Prešov

Kategória A

1.	Michal PRUSÁK	4 Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
2.	Vladimír BOŽA	2 Gymnázium D. Tatarku, Poprad
3.	Martin BEKESS	5 Gymnázium D. Tatarku, Poprad
	Ján PICH	4 Gymnázium duklianskych hrdinov, Svidník
5.	Matúš FEDÁK	4 Gymnázium T. Vansovej, Stará Ľubovňa

Kategória B

1.	Vladimír BOŽA	Gymnázium D. Tatarku, Poprad
2.	Michaela MOKESAYOVÁ	Gymnázium Vranov nad Topľou
3.	Michal JURKO	Gymnázium D. Tatarku, Poprad
4.	Michal FEK	SPŠE Plzenská, Prešov
5.	Miroslav BALÁŽ	Gymnázium L. Svobodu, Humenné
	Matúš BENKO	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
	Jakub KÖRY	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov

Kategória C

1.	Jakub VAŇO	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
2.	Stanislav HRIVŇAK	Gymnázium L. Stöckela, Bardejov
	Jozef JAŠŠ	Gymnázium L. Stöckela, Bardejov
4.	Michal KIKTA	Gymnázium D. Tatarku, Poprad
5.	Juraj ČURPEK	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov

Kategória Z9

1.	Daniela AVUKOVÁ	ZŠ P. O. Hviezdoslava, Snina
	Alexandra POREMBOVÁ	Gymnázium T. Vansovej, Stará Ľubovňa
3.	Matúš DŽUBÁK	ZŠ 17. novembra, Sabinov
4.	Andrea LEŠKOVÁ	ZŠ Šarišské Dravce
	Viktor POPOVIČ	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
	Miroslav ŽUPA	ZŠ Bystré
7.	Andrea HERIBANOVÁ	ZŠ Pod Vinbargom, Bardejov
	Dominik KARPIEL	ZŠ a Gymnázium Duchnovičova, Humenné
	Katarína PRIPUTENOVÁ	ZŠ Hniezdne
10.	Eduard DINDOFFER	ZŠ Francisciho, Poprad

Kategória P

1.	Matúš FEDÁK	4 Gymnázium Stará Ľubovňa
2.	Peter HRINČÁR	2 Gymnázium D. Tatarku, Poprad

Zadania súťažných úloh

Kategória C

C – I – 1

a) Dokážte, že pre každé prirodzené číslo m je rozdiel $m^6 - m^2$ deliteľný číslom 60.
b) Určte všetky prirodzené čísla m, pre ktoré je rozdiel $m^6 - m^2$ deliteľný číslom 120.

(J. Moravčík)

C – I – 2

Kružnice k, ℓ, m sa po dvoch zvonka dotýkajú a všetky tri majú spoločnú dotyčnicu. Polomery kružníc k, ℓ sú 3 cm a 12 cm. Vypočítajte polomer kružnice m. Nájdite všetky riešenia.

(L. Boček)

C – I – 3

Určte počet všetkých trojíc navzájom rôznych trojmiestnych prirodzených čísel, ktorých súčet je deliteľný každým z troch sčítaných čísel.

(J. Šimša)

C – I – 4

Je dané prirodzené číslo n ($n \geqq 2$) a reálne čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pre ktoré platí

$$x_1x_2 = x_2x_3 = \ldots = x_{n-1}x_n = x_nx_1 = 1.$$

Dokážte, že

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqq n.$$

(J. Švrček)

C – I – 5

V ostrouhlom trojuholníku ABC označme D pätu výšky z vrcholu C a P, Q zodpovedajúce päty kolmíc vedených bodom D na strany AC a BC. Obsahy trojuholníkov ADP, DCP, DBQ, CDQ označme postupne S_1, S_2, S_3, S_4. Vypočítajte $S_1 : S_3$, ak $S_1 : S_2 = 2 : 3$ a $S_3 : S_4 = 3 : 8$.

(Pavel Novotný)

C – I – 6

Rozhodnite, ktoré z čísel

$$\sqrt{p+\sqrt{q}}+\sqrt{q+\sqrt{p}}, \quad \sqrt{p+\sqrt{p}}+\sqrt{q+\sqrt{q}}$$

je väčšie, ak p a q sú rôzne kladné čísla.

(J. Moravčík)

C – S – 1

Na hokejovom turnaji sa zúčastnili štyri družstvá, pričom každé zohralo s každým práve jeden zápas. V žiadnych dvoch zápasoch nepadlo rovnako veľa gólov, ale počet gólov strelených v každom zápase delí celkový počet gólov strelených na turnaji. Koľko najmenej gólov mohlo na turnaji padnúť?

(M. Panák)

C – S – 2

Vrchol C štvorcov $ABCD$ a $CJKL$ je vnútorným bodom úsečky AK aj úsečky DJ. Body E, F, G a H sú postupne stredy úsečiek BC, BK, DK a DC. Vyjadrite obsah štvoruholníka $EFGH$ pomocou obsahov S a T štvorcov $ABCD$ a $CJKL$.

(P. Leischner)

C – S – 3

Kružnice k, ℓ, m sa dotýkajú spoločnej dotyčnice v troch rôznych bodoch a ich stredy ležia na jednej priamke. Kružnice k a ℓ, a tiež kružnice ℓ a m, majú vonkajší dotyk. Určte polomer kružnice ℓ, ak polomery kružníc k a m sú 3 cm a 12 cm.

(L. Boček)

C – II – 1

Základňa AB lichobežníka $ABCD$ je trikrát dlhšia ako základňa CD. Označme M stred strany AB a P priesečník úsečky DM s uhlopriečkou AC. Vypočítajte pomer obsahov trojuholníka CDP a štvoruholníka $MBCP$.

(Pavel Novotný)

C – II – 2

Ak reálne čísla a, b, c, d spĺňajú rovnosti

$$a^2+b^2=b^2+c^2=c^2+d^2=1,$$

platí nerovnosť

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd \leqq 3.$$

Dokážte a zistite, kedy za daných podmienok nastane rovnosť.

(J. Švrček)

C – II – 3

Kružnice k, ℓ s vonkajším dotykom ležia obe v obdĺžniku $ABCD$, ktorého obsah je $72\,\mathrm{cm}^2$. Kružnica k sa pritom dotýka strán CD, DA a AB, zatiaľ čo kružnica ℓ sa dotýka strán AB a BC. Určte polomery kružníc k a ℓ, ak viete, že polomer kružnice k je v centimetroch vyjadrený celým číslom.

(J. Švrček)

C – II – 4

Nájdite všetky dvojice prvočísel p, q, pre ktoré platí

$$p + q^2 = q + 145p^2.$$

(J. Moravčík)

Kategória B

B – I – 1

Určte všetky hodnoty celočíselného parametra a, pre ktoré má rovnica

$$(x + a)(x + 2a) = 3a$$

aspoň jeden celočíselný koreň.

(J. Zhouf)

B – I – 2

V danom trojuholníku ABC označme D ten bod polpriamky CA, pre ktorý platí $|CD| = |CB|$. Ďalej označme postupne E, F stredy úsečiek AD a BC. Dokážte, že $|\sphericalangle BAC| = 2|\sphericalangle CEF|$ práve vtedy, keď $|AB| = |BC|$.

(P. Leischner)

B – I – 3

Rozhodnite, či nerovnosť

$$a(b + 1) + b(c + 1) + c(d + 1) + d(a + 1) \geqq \tfrac{1}{2}(a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1)$$

platí pre všetky také kladné čísla a, b, c, d, ktoré spĺňajú podmienku

a) $ab = cd = 1$;

b) $ac = bd = 1$.

(J. Šimša)

B – I – 4

Každú z hviezdičiek v zápisoch dvanásťmiestnych čísel $A = *88\,888\,888\,888$, $B = *11\,111\,111\,111$ nahraďte nejakou číslicou tak, aby výraz $|14A - 13B|$ mal čo najmenšiu hodnotu.

(J. Šimša)

B – I – 5

Kruh so stredom S a polomerom r je rozdelený na štyri časti dvoma tetivami, z ktorých jedna má dĺžku r a druhá má od stredu S vzdialenosť $r/2$. Dokážte, že absolútna hodnota rozdielu obsahov tých dvoch častí, ktoré majú spoločný práve jeden bod a pritom žiadna z nich neobsahuje stred S, je rovná jednej šestine obsahu kruhu.

(P. Leischner)

B – I – 6

Určte najmenšie prirodzené číslo n s nasledujúcou vlastnosťou: Keď zvolíme n rôznych prirodzených čísel menších ako 2 005, sú medzi nimi dve také, že podiel súčtu a rozdielu ich druhých mocnín je väčší ako tri.

(J. Zhouf)

B – S – 1

Dokážte, že pre ľubovoľné kladné čísla a, b, c platí nerovnosť

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) \geqq 8.$$

Zistite, kedy nastáva rovnosť.

(J. Šimša)

B – S – 2

Na prepone AB pravouhlého trojuholníka ABC uvažujme také body P a Q, že $|AP| = |AC|$ a $|BQ| = |BC|$. Označme M priesečník kolmice z vrcholu A na priamku CP a kolmice z vrcholu B na priamku CQ. Dokážte, že priamky PM a QM sú navzájom kolmé.

(J. Švrček)

B – S – 3

Nájdite všetky dvojice celých čísel a, b, pre ktoré žiadna z rovníc

$$x^2 + ax + b = 0, \quad y^2 + by + a = 0$$

nemá dva rôzne reálne korene.

(E. Kováč)

B – II – 1

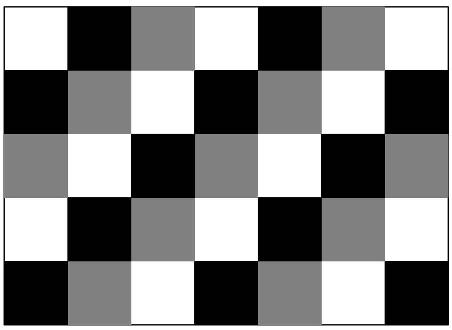
Určte všetky dvojice prvočísel p, q, pre ktoré platí

$$p + q^2 = q + p^3.$$

(J. Švrček)

B – II – 2

Obdĺžnik $ABCD$ so stranami dĺžok $|AB| = 2008$ a $|BC| = 2006$ je rozdelený na $2008 \times \times 2006$ jednotkových štvorcov a tie sú striedavo ofarbené čiernou, sivou a bielou farbou podobne ako obdĺžnik na obr. 1: štvorce pri vrcholoch A a B sú čierne, štvorce pri vrcholoch C a D sú biele. Určte obsah tej časti trojuholníka ABC, ktorá je sivá.



Obr. 1

(Pavel Novotný)

B – II – 3

V lichobežníku $ABCD$, ktorého základňa AB má dvakrát väčšiu dĺžku ako základňa CD, označme E stred ramena BC. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku CDE prechádza stredom uhlopriečky AC práve vtedy, keď strany AB a BC sú navzájom kolmé.

(P. Leischner)

B – II – 4

Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b, c z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ platí

$$1 \leqq a+b+c+2(ab+bc+ca)+3(1-a)(1-b)(1-c) \leqq 9.$$

(J. Šimša)

Kategória A

A – I – 1

V obore reálnych čísel riešte rovnicu

$$\sqrt{2}(\sin t + \cos t) = \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{cotg}^3 t.$$

(J. Švrček)

A – I – 2

Nech $ABCD$ je tetivový štvoruholník s navzájom kolmými uhlopriečkami. Označme postupne p, q kolmice z bodov D, C na priamku AB. Ďalej označme X priesečník priamok AC a p a Y priesečník priamok BD a q. Dokážte, že $XYCD$ je kosoštvorec alebo štvorec.

(E. Kováč)

A – I – 3

Postupnosť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *nenulových* celých čísel má tú vlastnosť, že pre každé $n \geqq 0$ platí $a_{n+1} = a_n - b_n$, kde b_n je číslo, ktoré má rovnaké znamienko ako číslo a_n, ale opačné poradie číslic (zápis čísla b_n môže na rozdiel od zápisu čísla a_n začínať jednou alebo viacerými nulami). Napríklad pre $a_0 = 1\,210$ je $a_1 = 1\,089$, $a_2 = -8\,712$, $a_3 = -6\,534$, ...

a) Dokážte, že postupnosť (a_n) je periodická.

b) Zistite, aké najmenšie prirodzené číslo môže byť a_0.

(T. Jurík)

A – I – 4

Nájdite všetky kubické mnohočleny $P(x)$, ktoré majú aspoň dva rôzne reálne korene, z ktorých jeden je číslo 7, a ktoré pre každé reálne číslo t spĺňajú podmienku: Ak $P(t) = 0$, tak $P(t+1) = 1$.

(Pavel Novotný)

A – I – 5

Dané sú úsečky dĺžok a, b, c, d. Dokážte, že rovnosť $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ platí práve vtedy, keď existujú konvexné štvoruholníky so stranami dĺžok a, b, c, d (pri zvyčajnom označení), pričom uhlopriečky každého takého štvoruholníka zvierajú jeden a ten istý uhol.

(J. Šimša)

A – I – 6

Nájdite všetky usporiadané dvojice (x, y) prirodzených čísel, pre ktoré platí

$$x^2 + y^2 = 2005(x - y).$$

(J. Moravčík)

A – S – 1

Nájdite všetky dvojice celých čísel x a y, pre ktoré platí

$$\sqrt{x\sqrt{5}} - \sqrt{y\sqrt{5}} = \sqrt{6\sqrt{5} - 10}.$$

(J. Moravčík)

A – S – 2

Daný je rovnostranný trojuholník ABC s obsahom S a jeho vnútorný bod M. Označme postupne A_1, B_1, C_1 tie body strán BC, CA a AB, pre ktoré platí $MA_1 \parallel AB$, $MB_1 \parallel BC$ a $MC_1 \parallel CA$. Priesečníky osí úsečiek MA_1, MB_1 a MC_1 tvoria vrcholy trojuholníka s obsahom T. Dokážte, že platí $S = 3T$.

(J. Švrček)

A – S – 3

V obore reálnych čísel vyriešte rovnicu

$$1 + \sin\frac{x+\pi}{5} \cdot \sin\frac{x-\pi}{11} = 0.$$

(J. Šimša)

A – II – 1

Nájdite všetky dvojice takých celých čísel a, b, že súčet $a + b$ je koreňom rovnice $x^2 + ax + b = 0$.

(E. Kováč)

A – II – 2

Postupnosť reálnych čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ spĺňa pre každé $n \geqq 1$ rovnosť

$$\frac{a_{n+3} - a_{n+2}}{a_n - a_{n+1}} = \frac{a_{n+3} + a_{n+2}}{a_n + a_{n+1}}$$

a naviac platí $a_{11} = 4$, $a_{22} = 2$, $a_{33} = 1$. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo k je súčet

$$a_1^k + a_2^k + \cdots + a_{100}^k$$

druhou mocninou prirodzeného čísla.

(J. Zhouf)

A – II – 3

Daný je trojuholník ABC a vnútri neho bod P. Označme X priesečník priamky AP so stranou BC a Y priesečník priamky BP so stranou AC. Dokážte, že štvoruholník $ABXY$ je tetivový práve vtedy, keď druhý priesečník (rôzny od bodu C) kružníc opísaných trojuholníkom ACX a BCY leží na priamke CP.

(E. Kováč)

A – II – 4

V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\sin^2 x + \cos^2 y = y^2,$$
$$\sin^2 y + \cos^2 x = x^2.$$

(J. Švrček)

A – III – 1

Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ prirodzených čísel má tú vlastnosť, že pre každé $n \geqq 1$ platí $a_{n+1} = a_n + b_n$, pričom b_n je číslo, ktoré má opačné poradie číslic ako číslo a_n (zápis čísla b_n môže na rozdiel od zápisu čísla a_n začínať jednou alebo viacerými nulami). Napríklad pre $a_1 = 170$ platí $a_2 = 241$, $a_3 = 383$, $a_4 = 766$, … Rozhodnite, či a_7 môže byť prvočíslo.

(Peter Novotný)

A – III – 2

Nech m a n sú také prirodzené čísla, že rovnica

$$(x + m)(x + n) = x + m + n$$

má aspoň jedno celočíselné riešenie. Dokážte, že platí

$$\frac{1}{2} < \frac{m}{n} < 2.$$

(J. Šimša)

A – III – 3

V trojuholníku ABC, ktorý nie je rovnostranný, označme K priesečník osi vnútorného uhla BAC so stranou BC a L priesečník osi vnútorného uhla ABC so stranou AC. Ďalej označme S stred kružnice vpísanej, O stred kružnice opísanej a V priesečník výšok v trojuholníku ABC. Dokážte, že nasledujúce dve tvrdenia sú ekvivalentné:

a) Priamka KL sa dotýka kružníc opísaných trojuholníkom ALS, BVS a BKS.

b) Body A, B, K, L a O ležia na jednej kružnici.

(T. Jurík)

A – III – 4

V rovine je daná úsečka AB. Zostrojte množinu ťažísk všetkých ostrouhlých trojuholníkov ABC, pre ktoré platí: Vrcholy A a B, priesečník výšok V a stred S kružnice vpísanej do trojuholníka ABC ležia na jednej kružnici.

(J. Švrček)

A – III – 5

Nájdite všetky trojice navzájom rôznych prvočísel p, q, r spĺňajúce nasledujúce podmienky:

$$\begin{aligned} p &\mid q + r, \\ q &\mid r + 2p, \\ r &\mid p + 3q. \end{aligned}$$

(M. Panák)

A – III – 6

V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{cotg}^2 2y &= 1, \\ \operatorname{tg}^2 y + 2 \operatorname{cotg}^2 2z &= 1, \\ \operatorname{tg}^2 z + 2 \operatorname{cotg}^2 2x &= 1. \end{aligned}$$

(J. Švrček, P. Calábek)

Riešenia súťažných úloh

Kategória C

C – I – 1

a) Číslo $n = m^6 - m^2 = m^2(m^2-1)(m^2+1)$ je vždy deliteľné štyrmi, pretože pri párnom m je m^2 deliteľné štyrmi a pri nepárnom m sú čísla m^2-1, m^2+1 obe párne, jedno z nich je dokonca deliteľné štyrmi a ich súčin je teda deliteľný ôsmimi. Z troch po sebe idúcich prirodzených čísel m^2-1, m^2, m^2+1 je práve jedno deliteľné tromi, a preto je aj číslo n deliteľné tromi. Ak je m deliteľné piatimi, je m^2 deliteľné piatimi, dokonca dvadsiatimi piatimi. V opačnom prípade je m tvaru $5k+r$, kde r je rovné niektorému z čísel 1, 2, 3, 4 a k je prirodzené alebo 0. Potom $m^2 = 25k^2 + 10kr + r^2$ a r^2 sa rovná niektorému z čísel 1, 4, 9, 16. V prvom a v poslednom prípade je číslo m^2-1 deliteľné piatimi, v ostatných dvoch prípadoch je číslo m^2+1 deliteľné piatimi. Teda číslo n je vždy deliteľné nesúdeliteľnými číslami 4, 3 a 5, a teda aj ich súčinom 60.

b) Už sme ukázali, že v prípade nepárneho m je súčin $(m^2-1)(m^2+1)$ deliteľný ôsmimi a číslo $n = m^6 - m^2$ je teda deliteľné číslom $120 = 8 \cdot 3 \cdot 5$. Ak je však číslo m párne, sú čísla m^2-1, m^2+1 nepárne, žiadne nie je deliteľné dvoma. Číslo n je potom deliteľné ôsmimi iba v prípade, že m^2 je deliteľné ôsmimi, teda m je deliteľné štyrmi. Číslo n je potom deliteľné šestnástimi, tromi a piatimi, a preto dokonca číslom 240.

Naše výsledky môžeme zhrnúť. Číslo $n = m^6 - m^2$ je deliteľné číslom 120 práve vtedy, keď m je nepárne alebo deliteľné štyrmi.

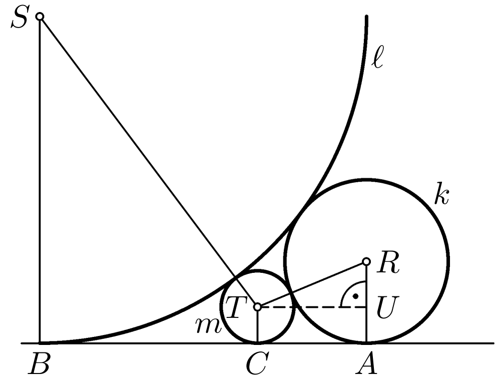
C – I – 2

Označme postupne R, S, T stredy a A, B, C body dotyku kružníc k, ℓ, m na spoločnej dotyčnici a $r=3$, $s=12$ a t ich polomery (dĺžky a obsahy budeme počítať bez jednotiek kvôli jednoduchšiemu dosadzovaniu). V lichobežníku (ktorý v prípade rovnosti $r=t$ je ale obdĺžnikom) $ARTC$ (obr. 2) je $|RT| = r+t$. Ak označíme U priesečník priamky AR a priamky vedenej bodom T rovnobežne s AC, platí $|RU| = |r-t|$. Z pravouhlého trojuholníka RUT vyplýva

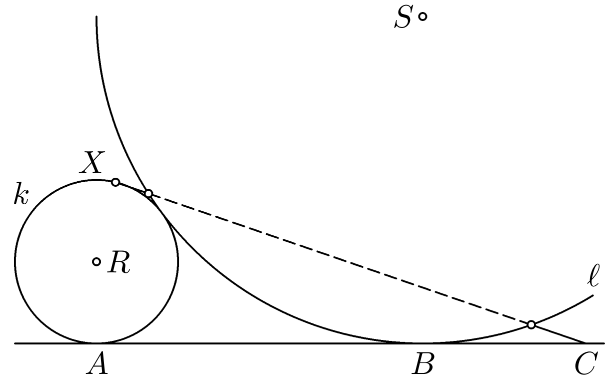
$$|UT| = |AC| = \sqrt{(r+t)^2 - (r-t)^2} = 2\sqrt{rt} = 2\sqrt{3t}.$$

Analogicky by sme z lichobežníkov $CTSB$ a $ARSB$ dostali vzťahy $|BC| = 2\sqrt{st} = 4\sqrt{3t}$ a $|AB| = 2\sqrt{rs} = 2\sqrt{3\cdot 12} = 12$.

Uvažujme najprv prípad, keď bod C leží medzi bodmi A a B. Potom $2\sqrt{3t} + 4\sqrt{3t} = 12$, odkiaľ $t = 4/3$. Ak bod A leží medzi bodmi C a B, dostaneme podobne rovnicu $2\sqrt{3t} + 12 = 4\sqrt{3t}$, odkiaľ $t = 12$. Rovnica $12 + 4\sqrt{3t} = 2\sqrt{3t}$, ktorú dostaneme pre polohu bodu B medzi bodmi A a C, nemá zjavne žiadne riešenie. Že taký prípad nie je možný, vidno aj z obr. 3. Každá kružnica, ktorá sa dotýka kružnice k v bode X



Obr. 2



Obr. 3

rôznom od A a pritom obsahuje bod C polpriamky opačnej k polpriamke BA, musí vo svojom vnútri obsahovať aj tetivu kružnice ℓ (vyznačenú na obr. 3), takže sa jej nemôže dotýkať.

Polomer kružnice m je teda $\frac{4}{3}$ cm alebo 12 cm.

C – I – 3

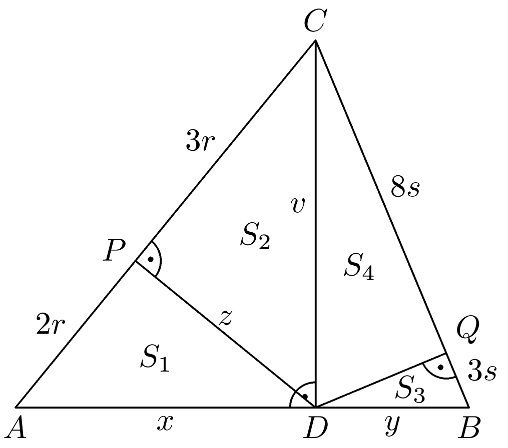
Nech x, y, z je taká trojica navzájom rôznych prirodzených čísel, že každé z nich delí ich súčet. Takže x delí $y+z$, y delí $x+z$ a z delí $x+y$. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme $x<y<z$. Teda $x+y=kz$ pre vhodné prirodzené k. Pretože zároveň $x+y<2z$, nutne $k=1$, t. j. $x+y=z$. Ďalej y delí $x+z=2x+y<3y$, takže $2x+y=2y$, t. j. $y=2x$. Tri prirodzené čísla daných vlastností majú teda tvar x, $y=2x$, $z=3x$, kde x je prirodzené. Pretože majú byť trojmiestne, musí byť $x \geqq 100$, $3x \leqq 999$, takže $100 \leqq x \leqq 333$. Hľadaný počet trojíc je $333-99=234$.

C – I – 4

Čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ sú podľa podmienok úlohy nenulové a všetky s nepárnymi indexami sú si rovné, rovnajú sa nenulovému číslu a; všetky čísla s párnymi indexami sú si tiež rovné, rovnajú sa $1/a$, prevrátenej hodnote a. Ak je n nepárne, vyplýva z rovnice $x_1x_2 = x_nx_1$ rovnosť $x_n = x_2$, takže všetky x_i sú rovnaké. Rovnajú sa 1 alebo -1, lebo to sú jediné hodnoty a, pre ktoré $a = 1/a$. Takže súčet ich druhých mocnín je n. Ak je n párne, rovná sa súčet druhých mocnín všetkých hodnôt x_i súčtu $n/2$ hodnôt a^2 a $n/2$ hodnôt $1/a^2$. Avšak $a^2 + 1/a^2 \geqq 2$ pre každé nenulové číslo a, čo vyplýva z nerovnosti $(a^2-1)^2 \geqq 0$. Preto je súčet druhých mocnín všetkých čísel x_i väčší alebo rovný n.

C – I – 5

Označme $x=|AD|$, $y=|BD|$, $v=|CD|$ (obr. 4). Z podobnosti trojuholníkov ADP a DCP vyplýva $x^2 : v^2 = S_1 : S_2 = 2 : 3$. Podobne z podobnosti trojuholníkov DBQ, CDQ vyplýva $y^2 : v^2 = S_3 : S_4 = 3 : 8$. Odtiaľ $x^2 : y^2 = (2\cdot 8) : (3\cdot 3) = 16 : 9$, teda $x : y = 4 : 3$. Trojuholníky ADC, DBC majú spoločnú výšku, preto $(S_1 + S_2) : (S_3 + S_4) = x : y = 4 : 3$. Za S_2 sem dosadíme $\frac{3}{2}S_1$, za S_4 dosadíme $\frac{8}{3}S_3$ a po úprave dostaneme $S_1 : S_3 = 88 : 45$.



Obr. 4

Iné riešenie. Z pomeru obsahov trojuholníkov ADP a CDP so spoločnou výškou DP vyplýva, že $|AP| : |CP| = 2 : 3$, takže môžeme písať $|AP| = 2r$, $|CP| = 3r$, podobne $|BQ| = 3s$, $|CQ| = 8s$. Označme $x = |AD|$, $y = |BD|$, $v = |CD|$ a $z = |PD|$ (obr. 4). Z pravouhlých trojuholníkov ADP, ADC, PDC vyplýva $x^2 = 4r^2 + z^2$, $z^2 + 9r^2 = v^2 = 25r^2 - x^2$. Odtiaľ $z^2 = 16r^2 - x^2 = 16r^2 - (4r^2 + z^2)$, čiže $2z^2 = 12r^2$, $z = r\sqrt{6}$, $x = r\sqrt{10}$, $v = r\sqrt{15}$, $S_1 = r^2\sqrt{6}$. Analogicky by sme dostali z trojuholníkov BDQ, BDC, QDC, že $v = 2s\sqrt{22}$, $y = s\sqrt{33}$, $S_3 = 3s^2\sqrt{6}$, teda použitím vzťahu $v^2 = 15r^2 = 88s^2$ dostaneme výsledok $S_1 : S_3 = 88 : 45$.

C – I – 6

Dané čísla, ktoré označíme postupne A a B, nebudeme porovnávať priamo. Namiesto toho porovnáme ich druhé mocniny a využijeme poznatok, že pre ľubovoľné kladné čísla u, v platí $u > v$ práve vtedy, keď platí $u^2 > v^2$. Pre dané čísla máme

$$A^2 = p + \sqrt{q} + 2\sqrt{(p + \sqrt{q})\,(q + \sqrt{p})} + q + \sqrt{p},$$
$$B^2 = p + \sqrt{p} + 2\sqrt{(p + \sqrt{p})\,(q + \sqrt{q})} + q + \sqrt{q}$$

a vidíme, že okrem „dlhých“ odmocnín sú na pravých stranách oboch vyjadrení štyri rovnaké sčítance (v odlišných poradiach). Preto nerovnosť $A^2 > B^2$ platí práve vtedy, keď je „dlhá odmocnina“ v prvom riadku väčšia ako v druhom riadku, čiže keď pre odmocňované súčiny platí nerovnosť

$$(p + \sqrt{q})\,(q + \sqrt{p}) > (p + \sqrt{p})\,(q + \sqrt{q})\,.$$

Roznásobením a ďalšími algebraickými úpravami dostaneme postupne ekvivalentné nerovnosti

$$\begin{aligned} pq + \sqrt{pq} + p\sqrt{p} + q\sqrt{q} &> pq + \sqrt{pq} + p\sqrt{q} + q\sqrt{p}, \\ (p-q)\sqrt{p} - (p-q)\sqrt{q} &> 0, \\ (p-q)(\sqrt{p} - \sqrt{q}) &> 0. \end{aligned}$$

Vysvetlíme, prečo ostatná nerovnosť (a teda aj pôvodná nerovnosť $A > B$) v prípade $p \neq q$ vždy platí. Ak totiž $p > q$, tak aj $\sqrt{p} > \sqrt{q}$, takže oba činitele súčinu $(p-q)(\sqrt{p} - \sqrt{q})$ sú kladné. Ak $p < q$, sú oba činitele naopak záporné. V oboch prípadoch je preto daný súčin kladný.

Odpoveď. Väčšie je prvé z daných dvoch čísel.

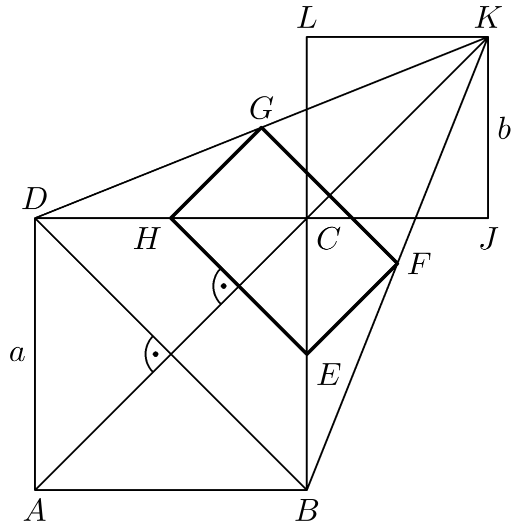
C – S – 1

Keďže každé družstvo zohralo s každým jeden zápas, zohralo každé družstvo na turnaji celkom tri zápasy a počet všetkých zápasov bol $4 \cdot 3/2 = 6$. Máme teda nájsť šesť rôznych prirodzených čísel (nula nedelí žiadne číslo) s najmenším možným súčtom tak, aby bol tento súčet deliteľný každým zo šiestich sčítancov. Najmenší súčet šiestich rôznych prirodzených čísel je $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$, ten však nie je deliteľný napr. dvoma (takisto ani štyrmi, piatimi či šiestimi) a iným spôsobom sa 21 ako súčet šiestich rôznych prirodzených čísel zapísať nedá. Ďalšia možnosť je nahradiť číslo 6 číslom 7, dostaneme $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 = 22$. Zasa je to jediná možnosť, ako 22 na súčet rozložiť. Ale 22 nie je deliteľné napr. tromi. Súčet 23 nemôže vyhovovať, pretože číslo 23 je prvočíslo, je deliteľné iba dvoma prirodzenými číslami (podobný argument sme mohli použiť aj pri súčte 22, ten má totiž iba štyroch rôznych prirodzených deliteľov). Konečne číslo 24 je súčtom čísel 1, 2, 3, 4, 6 a 8, pritom je číslo 24 deliteľné každým z čísel 1, 2, 3, 4, 6, 8. Na turnaji preto mohlo padnúť 24 gólov, nie však menej.

C – S – 2

Označme $a = \sqrt{S}$, $b = \sqrt{T}$ strany štvorcov $ABCD$, $CJKL$. Úsečka EH je strednou priečkou trojuholníka BCD (obr. 5), úsečka FG je strednou priečkou trojuholníka BKD, preto $2|EH| = 2|FG| = |BD|$ a úsečky EH, FG sú rovnobežné s BD. Podobne je úsečka HG strednou priečkou trojuholníka DCK a úsečka EF je strednou priečkou trojuholníka BCK. Preto $2|HG| = 2|EF| = |CK|$ a úsečky HG, EF sú rovnobežné s CK, a teda kolmé na JL a BD. Rovnobežník $EFGH$ je preto obdĺžnik s obsahom

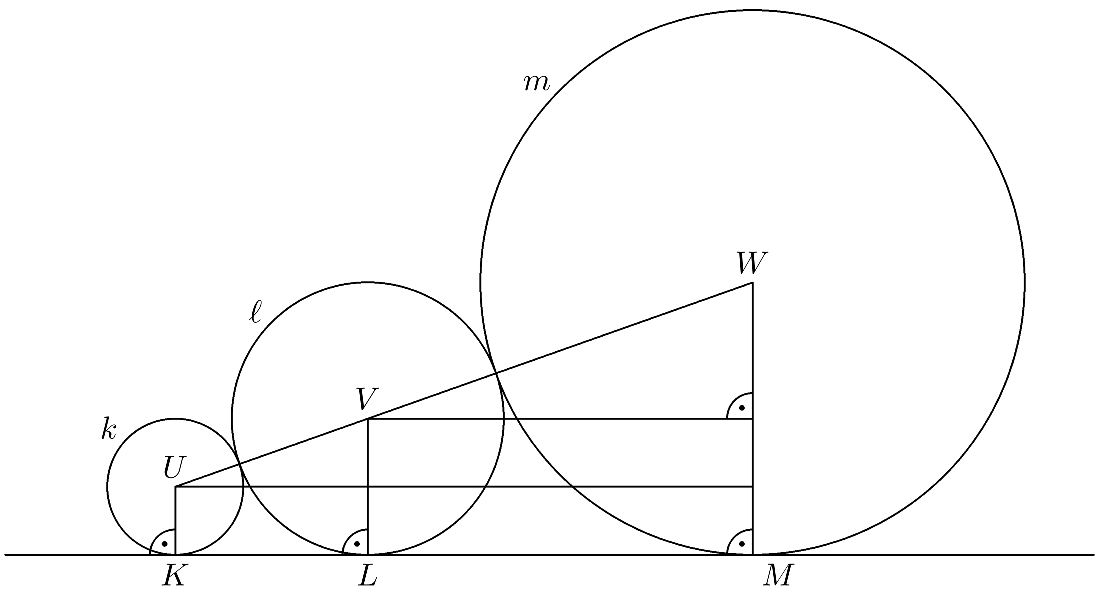
$$|EF| \cdot |FG| = a\,\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot b\,\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}\sqrt{ST}.$$



Obr. 5

C – S – 3

Vzájomná poloha kružníc a ich spoločnej dotyčnice musí vyzerať ako na obr. 6, kde sme písmenami K, L, M označili body dotyku kružníc k, ℓ, m na spoločnej dotyčnici, U, V, W ich stredy a r polomer kružnice ℓ (v centimetroch). Z pravouhlých lichobežníkov $KLVU$, $LMWV$, $KMWU$ vyplýva podľa Pytagorovej vety



Obr. 6

$$|KL|^2 = (r+3)^2 - (r-3)^2 = 12r,$$
$$|LM|^2 = (12+r)^2 - (12-r)^2 = 48r$$

a

$$|KM|^2 = (3+2r+12)^2 - (12-3)^2 = 4r^2 + 60r + 144.$$

Keďže $|KL| + |LM| = |KM|$, dostaneme z prvých dvoch vzťahov

$$|KM|^2 = (|KL| + |LM|)^2 = |KL|^2 + 2|KL||LM| + |LM|^2 = 60r + 2\sqrt{12 \cdot 48}\, r,$$

čo spolu s tretím vzťahom dáva po úprave pre r rovnicu

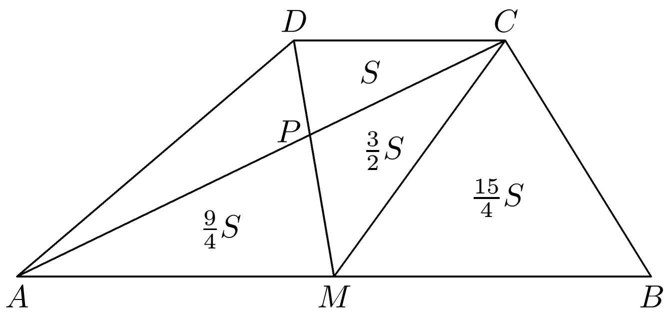
$$4r^2 - 48r + 144 = 0.$$

Pretože $4r^2 - 48r + 144 = 4(r^2 - 12r + 36) = 4(r-6)^2$, má táto rovnica jediné riešenie $r = 6$. Polomer kružnice ℓ je teda 6 cm.

C – II – 1

Výpočet založíme na dvoch známych pravidlách: (1) Ak sú dva trojuholníky podobné s koeficientom podobnosti k, je pomer ich obsahov rovný k^2. (2) Ak nejaké tri body X, Y, Z ležia na jednej priamke a bod V mimo nej, je pomer obsahov trojuholníkov XYV a YZV rovný pomeru $|XY| : |YZ|$.

Zo zhodnosti striedavých uhlov medzi rovnobežkami AB a CD vyplýva, že trojuholníky AMP a CDP sú podľa vety *uu* podobné, a to s koeficientom $|AM| : |CD| = 3/2$. Ak označíme S obsah trojuholníka CDP, je obsah trojuholníka AMP rovný $(3/2)^2 S = \frac{9}{4}S$. Z rovností $|AP| : |CP| = |MP| : |DP| = 3/2$ potom vyplýva, že obsah každého z trojuholníkov APD a MPC je rovný $3/2$ obsahu trojuholníka CDP, čiže $\frac{3}{2}S$. Keďže M je stred strany AB, sú obsahy trojuholníkov AMC a BMC rovnaké a rovnajú sa $\frac{9}{4}S + \frac{3}{2}S = \frac{15}{4}S$ (obr. 7). Obsah štvoruholníka $MBCP$ je teda rovný $\frac{3}{2}S + \frac{15}{4}S = \frac{21}{4}S$ a hľadaný pomer je $4 : 21$.



Obr. 7

C – II – 2

Z predpokladov vyplýva $c^2 = a^2$, $d^2 = b^2$, teda $|c| = |a|$, $|d| = |b|$.

Ak $c = a$ a súčasne $d = b$, dostaneme postupne pre ľavú stranu L dokazovanej nerovnosti

$$\begin{aligned} L &= ab + ac + ad + bc + bd + cd = \\ &= ab + a^2 + ab + ab + b^2 + ab = 1 + 4ab \leqq \\ &\leqq 1 + 2(a^2 + b^2) = 3, \end{aligned}$$

pretože pre ľubovoľné dve čísla a, b je $2ab \leqq a^2 + b^2$, čo vyplýva zo zrejmej nerovnosti $(a-b)^2 \geqq 0$. Rovnosť potom nastane iba pre dve štvorice $a = b = c = d = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, lebo z podmienky $a = b$ a rovnosti $a^2 + b^2 = 1$ vyplýva $a^2 = \frac{1}{2}$, t. j. $a = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Ak $c = -a$, $d = b$, tak $L = -a^2 + b^2 \leqq a^2 + b^2 = 1 < 3$. Podobne v prípade $c = a$, $d = -b$ vyjde $L = a^2 - b^2 \leqq 1$, v prípade $c = -a$, $d = -b$ dokonca $L = -a^2 - b^2 \leqq 0$.

Iné riešenie. Hodnota súčtu

$$S = (a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2$$

je zrejme nezáporná. Pre dvojnásobok ľavej strany L dokazovanej nerovnosti preto platí

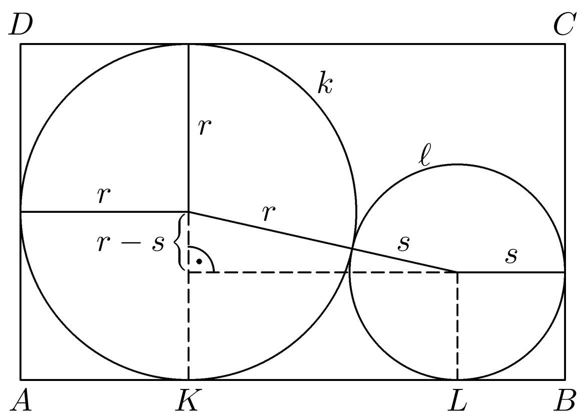
$$2L = 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - S \leqq 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 6,$$

odkiaľ $L \leqq 3$. Rovnosť $L = 3$ potom nastane práve vtedy, keď $S = 0$, teda práve vtedy, keď čísla a, b, c, d majú rovnakú hodnotu, ktorá sa však musí rovnať $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (podobne ako v prvom riešení).

C – II – 3

Označme r, s polomery kružníc k, ℓ (v centimetroch) a K, L ich body dotyku so stranou AB (obr. 8). Potom $|AK| = r$, $|LB| = s$, a ako ľahko spočítame pomocou Pytagorovej vety (pozri tiež 3. úlohu školského kola kategórie C),

$$|KL| = \sqrt{(r+s)^2 - (r-s)^2} = 2\sqrt{rs}.$$



Obr. 8

Pre dĺžky strán obdĺžnika $ABCD$ platí $|AD| = 2r$, $|AB| = r+2\sqrt{rs}+s = (\sqrt{r}+\sqrt{s})^2$. Podľa predpokladu má byť

$$2r\big(\sqrt{r} + \sqrt{s}\big)^2 = 72,$$

čiže po vykrátení dvoma a odmocnení

$$r + \sqrt{rs} = 6.$$

Odtiaľ vyplýva, že $r < 6$, a pre veľkosť polomeru s dostávame vyjadrenie

$$rs = (6 - r)^2,$$
$$s = \frac{(6 - r)^2}{r}. \tag{1}$$

Z podmienok úlohy ďalej vyplýva, že s nemôže byť väčšie ako r, pretože inak by kružnica ℓ neležala v danom obdĺžniku, a pretože aj kružnica k musí ležať v danom obdĺžniku, musí byť $|AB| \geqq |AD| = 2r$. Z nerovnosti $s \leqq r$ podľa (1) dostaneme podmienku $36 - 12r + r^2 \leqq r^2$, t.j. $r \geqq 3$. Z nerovnosti $|AB| \geqq 2r$ potom vyplýva $72 = |AB| \cdot |AD| \geqq 4r^2$, čiže $r^2 \leqq 18$, čo pre celočíselné r znamená, že $r \leqq 4$. Pre polomer r nám tak vychádzajú len dve možnosti, $r \in \{3, 4\}$, prislúchajúce hodnoty polomeru s vypočítame zo vzťahu (1).

Úloha má práve dve riešenia: $r = s = 3\,\mathrm{cm}$ a $r = 4\,\mathrm{cm}$, $s = 1\,\mathrm{cm}$.

C – II – 4

Pre prvočísla p, q má platiť $q(q - 1) = p(145p - 1)$, takže prvočíslo p delí $q(q - 1)$. Prvočíslo p nemôže deliť prvočíslo q, pretože to by znamenalo, že $p = q$, a teda $145p = p$, čo nie je možné. Preto p delí $q - 1$, t.j. $q - 1 = kp$ pre nejaké prirodzené k. Po dosadení do daného vzťahu dostaneme podmienku

$$p = \frac{k + 1}{145 - k^2}.$$

Vidíme, že menovateľ zlomku na pravej strane je kladný jedine pre $k \leqq 12$, zároveň však pre $k \leqq 11$ je jeho čitateľ menší ako menovateľ: $k + 1 \leqq 12 < 24 \leqq 145 - k^2$. Iba pre $k = 12$ tak vyjde p prirodzené a prvočíslo, $p = 13$. Potom $q = 157$, čo je tiež prvočíslo. Úloha má jediné riešenie.

Kategória B

B – I – 1

Po roznásobení ľavej strany a prevedení člena $3a$ z pravej strany na ľavú dostaneme kvadratickú rovnicu
$$x^2 + 3ax + 2a^2 - 3a = 0.$$
Jej korene (pokiaľ existujú) majú podľa známeho vzťahu tvar
$$x_{1,2} = \frac{-3a + \sqrt{a^2 + 12a}}{2}.$$
Hodnota takého výrazu je celé číslo iba vtedy, keď je číslo $a^2 + 12a$ druhou mocninou nejakého celého čísla b, o ktorom môžeme predpokladať, že je nezáporné. Rovnosť $b = \sqrt{a^2 + 12a}$ upravíme umocnením a doplnením na štvorec na tvar
$$(a+6)^2 = b^2 + 36, \quad \text{čiže} \quad (a+6+b)(a+6-b) = 36.$$
Dostali sme rozklad čísla 36 na súčin dvoch celočíselných činiteľov, ktoré preto musia mať rovnaké znamienko. Pretože ich rozdiel
$$(a+6+b) - (a+6-b) = 2b$$
je párne nezáporné číslo (pripomíname, že $b \geqq 0$), majú oba činitele rovnakú paritu (sú zároveň párne alebo nepárne) a druhý činiteľ nie je väčší ako prvý činiteľ. To všetko spolu znamená, že sú len štyri možnosti:

(1) $a+6+b = 18$ a $a+6-b = 2$. Táto sústava rovníc má jediné riešenie $a = 4$ a $b = 8$. Skúška: rovnica $(x+4)(x+8) = 12$ má korene -10 a -2.

(2) $a+6+b = 6$ a $a+6-b = 6$. V tomto prípade $a = 0$ a $b = 0$. Skúška: rovnica $(x+0)(x+0) = 0$ má dvojnásobný koreň 0.

(3) $a+6+b = -2$ a $a+6-b = -18$. V tomto prípade $a = -16$ a $b = 8$. Skúška: rovnica $(x-16)(x-32) = -48$ má korene 20 a 28.

(4) $a+6+b = -6$ a $a+6-b = -6$. V tomto prípade $a = -12$ a $b = 0$. Skúška: rovnica $(x-12)(x-24) = -36$ má dvojnásobný koreň 18.

Odpoveď. Hľadané hodnoty parametra a sú štyri, a to čísla 4, 0, -16 a -12.

Iné riešenie. Rovnako ako v prvom riešení upravíme rovnicu na tvar
$$x^2 + 3ax + 2a^2 - 3a = 0$$
a pokúsime sa mnohočlen na ľavej strane zapísať v tvare súčinu dvoch lineárnych činiteľov tvaru $\alpha x + \beta a + \gamma$. Aj keď taký rozklad neexistuje, experimentovaním zistíme, že „takmer vyhovuje“ súčin
$$(x + 2a + 3)(x + a - 3),$$

ktorý sa líši od daného mnohočlena $x^2 + 3ax + 2a^2 - 3a$ iba v konštantnom člene; presvedčiť sa o tom možno roznásobením. Skúmanú rovnicu tak možno zapísať v tvare

$$(x + 2a + 3)(x + a - 3) = -9.$$

Aj keď na pravej strane nie je nula, pre riešenie v obore celých čísel je každý podobný rozklad cenný, lebo existuje iba konečný počet rozkladov príslušného čísla (v našom prípade čísla -9) na súčin dvoch celočíselných činiteľov. Vypíšme ich:

(1) $x + 2a + 3 = 9$ a $x + a - 3 = -1$, čiže $a = 4$ a $x = -2$,
(2) $x + 2a + 3 = 3$ a $x + a - 3 = -3$, čiže $a = 0$ a $x = 0$,
(3) $x + 2a + 3 = 1$ a $x + a - 3 = -9$, čiže $a = 4$ a $x = -10$,
(4) $x + 2a + 3 = -1$ a $x + a - 3 = 9$, čiže $a = -16$ a $x = 28$,
(5) $x + 2a + 3 = -3$ a $x + a - 3 = 3$, čiže $a = -12$ a $x = 18$,
(6) $x + 2a + 3 = -9$ a $x + a - 3 = 1$, čiže $a = -16$ a $x = 20$.

Prichádzame tak k rovnakej odpovedi ako v prvom riešení: vyhovujúce hodnoty parametra a sú čísla 4, 0, -12 a -16.

B – I – 2

Označme G ten bod polpriamky opačnej k polpriamke AC, pre ktorý platí $|AG| = |BC| = |CD|$ (obr. 9a pre situáciu, keď $|AC| > |BC|$, a obr. 9b pre situáciu, keď $|AC| < |BC|$ – sami si nakreslite a rozmyslite situáciu, keď $|AC| = |BC|$). V trojuholníku ABG označme ešte $\varepsilon = |\sphericalangle ABG|$ a $\delta = |\sphericalangle BGA|$. Pretože $|EA| = |ED|$ a $|AG| = |CD|$, je bod E stred úsečky CG, teda úsečka EF je stredná priečka trojuholníka BCG. Platí preto $EF \parallel GB$ a z rovnosti súhlasných uhlov BGA a FEC dostávame $|\sphericalangle FEC| = \delta$. Pretože uhol BAC je vonkajším uhlom trojuholníka ABG, pre jeho veľkosť $\alpha = |\sphericalangle BAC|$ platí $\alpha = \varepsilon + \delta$. To znamená, že rovnosť $\alpha = 2\delta$ zo zadania úlohy nastane práve vtedy, keď $\varepsilon + \delta = 2\delta$, čiže $\varepsilon = \delta$. Z trojuholníka ABG však vyplýva, že rovnosť $\varepsilon = \delta$ je splnená práve vtedy, keď $|AB| = |AG|$, čiže $|AB| = |BC|$. Tým je ekvivalencia rovností $\alpha = 2\delta$ a $|AB| = |BC|$ dokázaná.

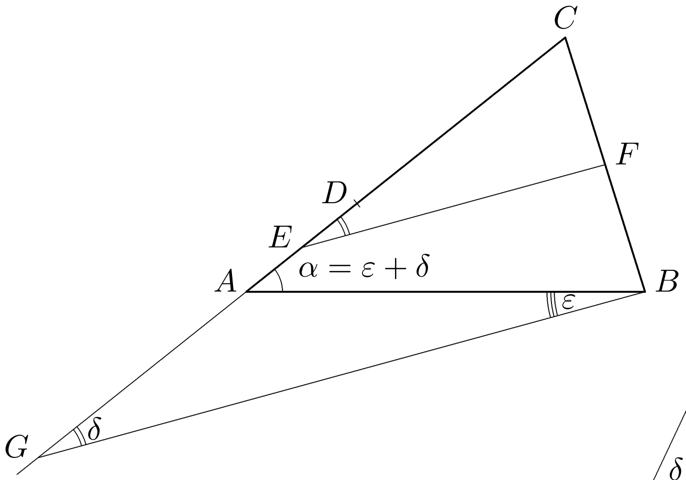
Iné riešenie. Namiesto „trikom“ zvoleného pomocného bodu G z prvého riešenia zostrojíme os o vnútorného uhla BAC daného trojuholníka ABC a jej priesečník so stranou BC označíme H (obr. 10a a obr. 10b pre situácie $|AC| > |BC|$, resp. $|AC| < |BC|$). Význam osi o pre riešenie našej úlohy je zrejmý: podľa súhlasných uhlov CEF a CAH usúdime, že rovnosť $|\sphericalangle BAC| = 2|\sphericalangle CEF|$ zo zadania úlohy nastane práve vtedy, keď budú úsečky AH a EF rovnobežné, čiže trojuholníky CAH a CEF podobné. Podľa vety *sus* sú trojuholníky CAH a CEF podobné práve vtedy, keď je splnený pomer

$$|AC| : |HC| = |EC| : |FC|. \tag{1}$$

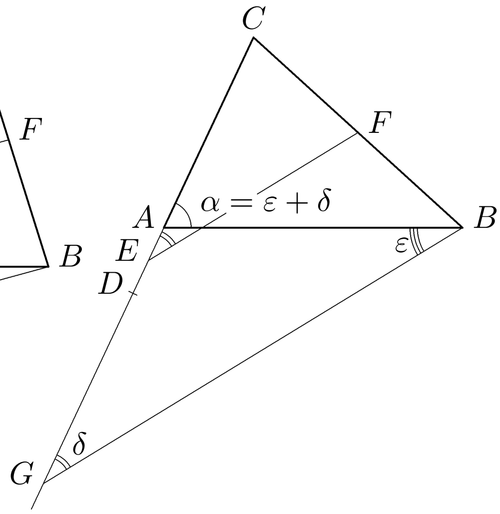
Rovnosť $|\sphericalangle BAC| = 2|\sphericalangle CEF|$ je teda ekvivalentná s podmienkou (1), ktorú teraz preskúmame.

Dĺžky úsečiek zastúpených v (1) najskôr vyjadríme pomocou dĺžok

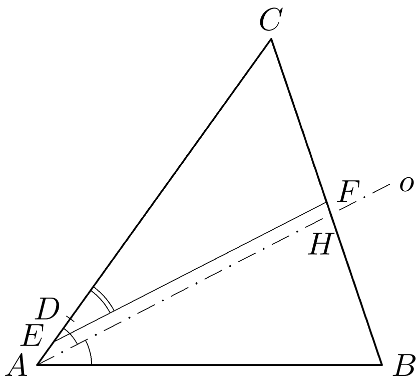
$$a = |BC|, \quad b = |AC|, \quad c = |AB|$$



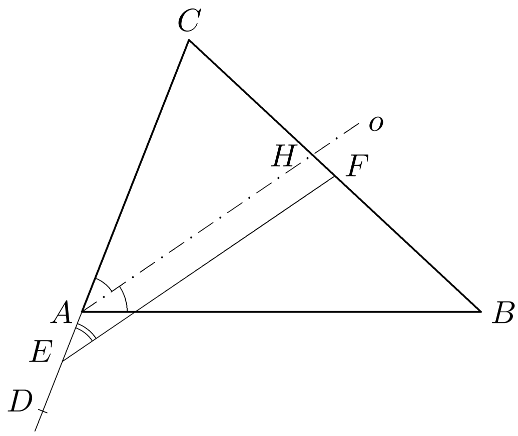
Obr. 9a



obr. 9b



Obr. 10a



obr. 10b

strán zadaného trojuholníka ABC. Pretože bod F je stred úsečky BC a bod E stred úsečky AD, platí $|FC| = |BC|/2 = a/2$ a

$$|EC| = \frac{|AC| + |DC|}{2} = \frac{|AC| + |BC|}{2} = \frac{b+a}{2}.$$

Ostáva vyjadriť dĺžku úsečky HC. Z rovností

$$|HC| + |HB| = a, \quad |HC| : |HB| = b : c$$

(prvá z nich je triviálna, druhá vyjadruje známy fakt o pomere, v ktorom os vnútorného uhla delí protiľahlú stranu trojuholníka, poz. tretiu návodnú úlohu) dostaneme po jednoduchom výpočte vyjadrenie

$$|HC| = \frac{ab}{b+c}.$$

Dosaďme teraz všetky určené dĺžky do rovnosti (1) a potom ju ďalej ekvivalentne upravujme:

$$\begin{aligned} b : \frac{ab}{b+c} &= \frac{a+b}{2} : \frac{a}{2}, \\ \frac{b+c}{a} &= \frac{a+b}{a}, \\ b+c &= a+b, \\ c &= a. \end{aligned}$$

Dokázali sme potrebné: podmienka (1) platí práve vtedy, keď $c = a$, čiže $|AB| = |BC|$.

B – I – 3

a) Danú nerovnosť budeme ekvivalentne upravovať postupným roznásobovaním. Akonáhle sa pritom niekde objaví súčin ab alebo cd, nahradíme ho číslom 1:

$$\begin{aligned} 2(ab+a+bc+b+cd+c+da+d) &\geqq (ab+a+b+1)(cd+c+d+1), \\ 2(ad+bc+a+b+c+d+2) &\geqq (a+b+2)(c+d+2), \\ 2(ad+bc)+2(a+b+c+d)+4 &\geqq ac+ad+bc+bd+2(a+b+c+d)+4, \\ ad+bc &\geqq ac+bd, \\ (a-b)(c-d) &\leqq 0. \end{aligned}$$

Ostatná nerovnosť vo všeobecnosti neplatí, ako ukazuje príklad $a = c = 2$ a $b = d = 1/2$ (hodnoty sú zvolené tak, aby bol splnený predpoklad $ab = cd = 1$).

b) Danú nerovnosť budeme upravovať s podobnou stratégiou ako v časti a). Pretože však tentokrát môžeme číslom 1 nahrádzať súčiny ac a bd, vynásobíme na pravej strane nerovnosti najskôr prvý činiteľ s tretím a druhý činiteľ so štvrtým:

$$\begin{aligned} 2(ab+a+bc+b+cd+c+da+d) &\geqq (ac+a+c+1)(bd+b+d+1), \\ 2(ab+bc+cd+ad+a+b+c+d) &\geqq (a+c+2)(b+d+2), \\ 2(ab+bc+cd+ad)+2(a+b+c+d) &\geqq ab+ad+bc+cd+2(a+b+c+d)+4, \\ ab+bc+cd+da &\geqq 4, \\ (a+c)(b+d) &\geqq 4. \end{aligned}$$

Ostatná nerovnosť platí pre všetky štvorice kladných čísel a, b, c, d spĺňajúce predpoklad $ac = bd = 1$. Každý z oboch činiteľov $a+c$ a $b+d$ je totiž súčtom kladného čísla a čísla k nemu prevráteného, teda je väčší alebo rovný číslu 2. Tento známy výsledok

$$u > 0 \quad \Longrightarrow \quad u + \frac{1}{u} \geqq 2 \tag{1}$$

vyplýva priamo z identickej rovnosti

$$u + \frac{1}{u} = \left(\sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}}\right)^2 + 2$$

a poznatku, že druhá mocnina ľubovoľného reálneho čísla je nezáporná. Odhad (1) možno tiež získať zo známej nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geqq G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

ľubovoľných nezáporných čísel a_i, keď zvolíme $n = 2$, $a_1 = u$ a $a_2 = 1/u$.

Odpoveď. Skúmaná nerovnosť pri podmienke a) všeobecne neplatí, pri podmienke b) platí.

Iné riešenie. a) Použijeme „dosadzovaciu stratégiu“: z danej podmienky $ab = cd = 1$ vypočítame $b = 1/a$, $d = 1/c$ a takto vyjadrené čísla b a d dosadíme do skúmanej nerovnosti. Dostaneme nerovnosť s dvoma (už nezávislými) premennými a a c. Našou úlohou bude zistiť, či pre ľubovoľné hodnoty $a > 0$ a $c > 0$ platí

$$\begin{gathered}
a\Big(\frac{1}{a}+1\Big)+\frac{1}{a}(c+1)+c\Big(\frac{1}{c}+1\Big)+\frac{1}{c}(a+1) \geqq \frac{1}{2}(a+1)\Big(\frac{1}{a}+1\Big)(c+1)\Big(\frac{1}{c}+1\Big),\\
2+a+c+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{c} \geqq \frac{1}{2}\Big(2+a+\frac{1}{a}\Big)\Big(2+c+\frac{1}{c}\Big),\\
2+a+c+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{c} \geqq 2+a+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}\Big(ac+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{1}{ac}\Big),\\
\frac{c}{a}+\frac{a}{c} \geqq ac+\frac{1}{ac},\\
c^2+a^2 \geqq a^2c^2+1,\\
0 \geqq (a^2-1)(c^2-1).
\end{gathered}$$

Vidíme, že ostatná nerovnosť pre kladné čísla a, c všeobecne neplatí, stačí zvoliť napr. hodnoty $a = c = 2$, ktorým zodpovedajú hodnoty $b = d = 1/2$.

b) Podobne ako v časti a) z danej podmienky $ac = bd = 1$ vypočítame teraz $c = 1/a$, $d = 1/b$ a po dosadení za c, d do skúmanej nerovnosti dostaneme nerovnosť s nezávislými premennými $a > 0$ a $b > 0$:

$$\begin{gathered}
a(b+1)+b\Big(\frac{1}{a}+1\Big)+\frac{1}{a}\Big(\frac{1}{b}+1\Big)+\frac{1}{b}(a+1) \geqq \frac{1}{2}(a+1)(b+1)\Big(\frac{1}{a}+1\Big)\Big(\frac{1}{b}+1\Big),\\
ab+a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{1}{ab} \geqq \frac{1}{2}\Big(2+a+\frac{1}{a}\Big)\Big(2+b+\frac{1}{b}\Big),\\
ab+a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{1}{ab} \geqq \frac{1}{2}\Big(4+2a+2b+ab+\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{1}{ab}\Big),\\
ab+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{1}{ab} \geqq 4.
\end{gathered}$$

Ostatná nerovnosť však zrejme platí pre ľubovoľné kladné čísla a a b, lebo je súčtom dvoch nerovností

$$ab+\frac{1}{ab} \geqq 2 \quad \text{a} \quad \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqq 2$$

typu (1) z prvého riešenia, a to pre hodnoty $u = ab$, resp. $u = a/b$.

B – I – 4

Hviezdičku v čísle A nahradíme číslicou a, hviezdičku v čísle B číslicou b a vyjadríme výraz $14A - 13B$ algebraicky ako lineárnu funkciu (neznámych) číslic a a b. Pretože platí

$$11\,111\,111\,111\,111 = \frac{99\,999\,999\,999\,999}{9} = \frac{10^{11}-1}{9},$$

majú čísla A a B vyjadrenia

$$A = a\cdot 10^{11} + \frac{8}{9}\cdot(10^{11}-1) \quad \text{a} \quad B = b\cdot 10^{11} + \frac{1}{9}\cdot(10^{11}-1),$$

odkiaľ dostávame

$$\begin{aligned} 14A - 13B &= (14a - 13b)\cdot 10^{11} + \frac{(14\cdot 8 - 13)}{9}\cdot(10^{11}-1) = \\ &= (14a - 13b + 11)\cdot 10^{11} - 11. \end{aligned} \tag{1}$$

Iste si uvedomíme, že absolútna hodnota takého výrazu je minimálna práve vtedy, keď je minimálna absolútna hodnota výrazu $14a - 13b + 11$. Detailne to zdôvodníme nerovnosťami až potom, ako zistíme, či pre niektoré číslice a, b dokonca neplatí rovnosť $14a - 13b + 11 = 0$. Ak z takej rovnice vyjadríme neznámu b, dostaneme

$$b = \frac{14a + 11}{13} = a + 1 + \frac{a-2}{13}.$$

Všimnime si, že pre ľubovoľnú číslicu a platí $-2 \leqq a - 2 \leqq 7$. Vidíme tak, že hodnota b daná ostatným vzťahom je celočíselná iba v prípade $a - 2 = 0$, keď $a = 2$ a $b = 3$. Iba pre také číslice a, b platí $14a - 13b + 11 = 0$, takže podľa (1) potom máme $|14A - 13B| = 11$. Pre ľubovoľnú inú dvojicu číslic a, b však platí $14a - 13b + 11 \neq 0$, takže tentoraz podľa (1) usúdime, že

$$\begin{array}{llll} \text{buď} & 14a - 13b + 11 \geqq 1, & \text{a teda} & 14A - 13B \geqq 10^{11} - 11 > 11, \\ \text{alebo} & 14a - 13b + 11 \leqq -1, & \text{a teda} & 14A - 13B \leqq -10^{11} - 11 < -11, \end{array}$$

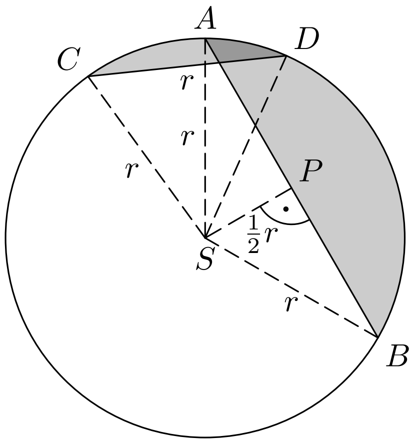
v oboch prípadoch teda $|14A - 13B| > 11$.

Odpoveď. Výraz $|14A - 13B|$ má najmenšiu možnú hodnotu iba vtedy, keď hviezdičky v číslach A, B nahradíme postupne číslicami 2 a 3.

B – I – 5

Označme dané tetivy AB a CD ako na obr. 11, kde je tiež vyznačený stred P tetivy AB.

Podľa zadania platí $|SP| = \frac{1}{2}r$ a $|CD| = r$. Skúmaný rozdiel obsahov dvoch svetlo



Obr. 11

vyfarbených častí kruhu sa nezmení, keď ku každej z nich pripojíme tú istú (tretiu) časť kruhu, ktorá má s jeho hraničnou kružnicou spoločný oblúk AC a je na obr. 11 vyfarbená tmavo. Tak vzniknú dve kruhové odseky, jeden nad tetivou AB, druhý nad tetivou CD. Ich obsahy sú určené veľkosťami uhlov ASB a CSD. Z rovnostranného trojuholníka CSD ihneď máme $|\sphericalangle CSD| = 60°$, takže obsah S_1 odseku nad tetivou CD je rovný

$$S_1 = \frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}.$$

V pravouhlom trojuholníku APS platí $|AS| : |SP| = 2 : 1$, takže $|\sphericalangle ASP| = 60°$, $|\sphericalangle ASB| = 2|\sphericalangle ASP| = 120°$, $|AB| = r\sqrt{3}$ a obsah S_2 odseku nad tetivou AB je rovný

$$S_2 = \frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}.$$

Teraz už ľahko určíme rozdiel $S_2 - S_1$:

$$S_2 - S_1 = \left(\frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) - \left(\frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\pi r^2}{6},$$

čo je pravé šestina obsahu celého kruhu.

B – I – 6

Zistíme najskôr, pre ktoré prirodzené čísla a, b platí spomenutá nerovnosť

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} > 3. \tag{1}$$

Aby bol zlomok na ľavej strane kladný, musí platiť $a^2 > b^2$, čiže $a > b$. Ak je táto nutná podmienka splnená, vynásobíme obe strany skúmanej nerovnosti kladným číslom a^2-b^2 a ďalšími úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &> 3(a^2 - b^2), \\ 4b^2 &> 2a^2, \\ b\sqrt{2} &> a. \end{aligned}$$

Zistili sme, že dve prirodzené čísla a, b vyhovujú podmienke (1) práve vtedy, keď platia nerovnosti $1 < a/b < \sqrt{2}$.

Prirodzené čísla od 1 do 2 005 teraz rozdelíme do skupín tak, aby v nich bolo čo najviac čísel a aby podiel najväčšieho a najmenšieho čísla každej skupiny bol menší ako $\sqrt{2}$. Urobíme to tak, že do skupín budeme postupne zaraďovať čísla 1, 2, ... a k novej skupine vždy prejdeme, až keď to bude nutné.[1] Dostaneme tak týchto dvadsať skupín:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1\}, & A_2 &= \{2\}, \\ A_3 &= \{3, 4\}, & A_4 &= \{5, 6, 7\}, \\ A_5 &= \{8, \dots, 11\}, & A_6 &= \{12, \dots, 16\}, \\ A_7 &= \{17, \dots, 24\}, & A_8 &= \{25, \dots, 35\}, \\ A_9 &= \{36, \dots, 50\}, & A_{10} &= \{51, \dots, 72\}, \\ A_{11} &= \{73, \dots, 103\}, & A_{12} &= \{104, \dots, 147\}, \\ A_{13} &= \{148, \dots, 209\}, & A_{14} &= \{210, \dots, 296\}, \\ A_{15} &= \{297, \dots, 420\}, & A_{16} &= \{421, \dots, 595\}, \\ A_{17} &= \{596, \dots, 842\}, & A_{18} &= \{843, \dots, 1\,192\}, \\ A_{19} &= \{1\,193, \dots, 1\,687\}, & A_{20} &= \{1\,688, \dots, 2\,005\}. \end{aligned}$$

Vysvetlíme napríklad, ako vznikla skupina A_{11}. Číslo 73 sme už nemohli zaradiť do skupiny A_{10}, lebo pre jeho podiel s najmenším číslom 53 tejto skupiny platí

$$\frac{73}{51} = 1{,}431\ldots > 1{,}414\ldots = \sqrt{2}.$$

Číslo 103 sme ešte mohli do skupiny A_{11} zaradiť, lebo

$$\frac{103}{73} = 1{,}410\ldots < 1{,}414\ldots = \sqrt{2}.$$

Aký má zostrojené rozdelenie význam pre riešenie zadanej úlohy? Pre ľubovoľné dve čísla a, b z tej istej skupiny A_i nerovnosť (1) platí. Skupín A_i je spolu 20. Ak teda vyberieme ľubovoľne 21 čísel z množiny $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{20}$, budú niektoré dve z nich

[1] na porovnávanie podielu a/b s číslom $\sqrt{2}$ výhodne využijeme napríklad kalkulačku.

patriť do rovnakej skupiny A_i,[2] teda budú spĺňať (1). Preto číslo $n = 21$ má vlastnosť zo zadania úlohy. Číslo $n = 20$ ju však nemá: ak vyberieme z každej zo skupín A_i jej najmenší prvok, dostaneme dvadsať čísel

$$1, 2, 3, 5, 8, 12, 17, 25, 36, 51, 73, 104, 148, 210, 297, 421, 596, 843, 1\,193, 1\,688, \quad (2)$$

medzi ktorými nie sú žiadne dve čísla a, b spĺňajúce (1), lebo podľa našej konštrukcie je podiel nasledujúceho čísla k číslu predchádzajúcemu vždy väčší ako $\sqrt{2}$.

Poznamenajme, že len uvedenie dvadsiatich čísel (2) z predchádzajúceho odstavca nemožno považovať za úplné riešenie úlohy, aj keď prehlásime, že sme túto dvadsaticu vybrali „čo najlepšie", t. j. aby mala čo najviac prvkov a aby žiadne dva z nich nespĺňali (1).[3] Nemožnosť výberu podobnej skupiny 21 čísel je potrebné nespochybniteľne zdôvodniť. Na to nám poslúžil priehradkový princíp uplatnený na zostrojené skupiny A_i.

Odpoveď. Najmenšie prirodzené číslo s požadovanou vlastnosťou je $n = 21$.

B – S – 1

Ľavú stranu L dokazovanej nerovnosti najskôr upravíme roznásobením a vzniknuté členy zoskupíme do súčtov dvojíc navzájom prevrátených výrazov:

$$L = \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) = \left(ab + 1 + \frac{a}{c} + \frac{1}{bc}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) =$$
$$= \left(abc + \frac{1}{abc}\right) + \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(c + \frac{1}{c}\right).$$

Pretože pre $u > 0$ je

$$\left(u + \frac{1}{u}\right) - 2 = \left(\sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}}\right)^2 \geqq 0,$$

pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď $u = 1$, pre výraz L platí $L \geqq 2+2+2+2 = 8$, čo sme mali dokázať. Rovnosť $L = 8$ nastane práve vtedy, keď platí

$$abc + \frac{1}{abc} = a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b} = c + \frac{1}{c} = 2,$$

teda, ako sme už spomenuli, práve vtedy, keď $abc = a = b = c = 1$, t. j. práve vtedy, keď $a = b = c = 1$.

Poznámka. Dodajme, že upravená nerovnosť

$$abc + a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc} \geqq 8$$

[2] Tomuto zrejmému poznatku sa hovorí *priehradkový* alebo aj *Dirichletov* princíp. Všeobecnejšie znie takto: Ak je $mk+1$ predmetov umiestnených do m skupín, leží v niektorej z nich aspoň $k+1$ z týchto predmetov. V našom prípade je $m = 20$ a $k = 1$.

[3] K overeniu poznatku, že číslo $n = 20$ skúmanú vlastnosť nemá, môžu poslúžiť aj mnohé iné dvadsatice čísel. Napríklad číslo 1 688 v (2) môžeme nahradiť ktorýmkoľvek iným číslom zo skupiny A_{20} a podobne.

vyplýva okamžite aj z nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom ôsmich čísel

$$abc,\ a,\ b,\ c,\ \frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c},\ \frac{1}{abc},$$

lebo ich súčin (a teda aj geometrický priemer) je rovný číslu 1, takže ich aritmetický priemer má hodnotu aspoň 1.

Iné riešenie. V dokazovanej nerovnosti sa najskôr zbavíme zlomkov, a to tak, že obe jej strany vynásobíme kladným číslom abc. Dostaneme tak ekvivalentnú nerovnosť

$$(ab+1)(bc+1)(ac+1) \geqq 8abc,$$

ktorá má po roznásobení ľavej strany tvar

$$a^2b^2c^2 + a^2bc + ab^2c + abc^2 + ab + ac + bc + 1 \geqq 8abc.$$

Poslednú nerovnosť možno upraviť na tvar

$$(abc-1)^2 + ab(c-1)^2 + ac(b-1)^2 + bc(a-1)^2 \geqq 0.$$

Táto nerovnosť už zrejme platí, lebo na ľavej strane máme súčet štyroch nezáporných výrazov. Pritom rovnosť nastane práve vtedy, keď má každý z týchto štyroch výrazov nulovú hodnotu, teda práve vtedy, keď

$$abc-1 = c-1 = b-1 = a-1 = 0,$$

čiže $a = b = c = 1$.

Iné riešenie. Danú nerovnosť možno dokázať aj bez roznásobenia jej ľavej strany. Stačí napísať tri AG-nerovnosti

$$\frac{1}{2}\Big(a+\frac{1}{b}\Big) \geqq \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \frac{1}{2}\Big(b+\frac{1}{c}\Big) \geqq \sqrt{\frac{b}{c}}, \quad \frac{1}{2}\Big(c+\frac{1}{a}\Big) \geqq \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Ich vynásobením dostaneme

$$\frac{1}{2}\Big(a+\frac{1}{b}\Big)\cdot\frac{1}{2}\Big(b+\frac{1}{c}\Big)\cdot\frac{1}{2}\Big(c+\frac{1}{a}\Big) \geqq \sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}\cdot\sqrt{\frac{c}{a}} = 1,$$

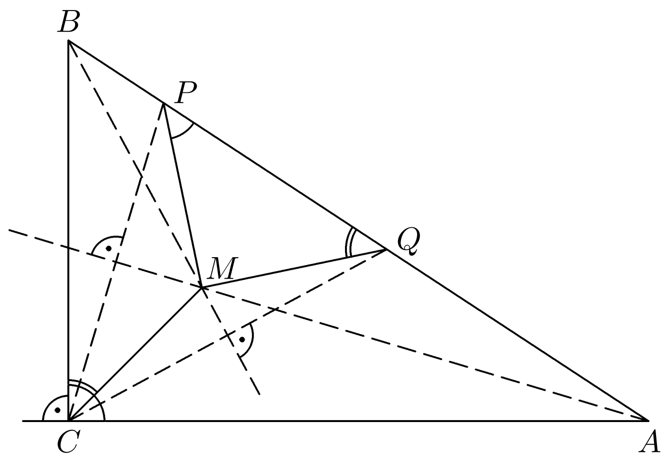
odkiaľ po násobení ôsmimi obdržíme dokazovanú nerovnosť. Rovnosť v nej nastane práve vtedy, keď nastane rovnosť v každej z troch použitých AG-nerovností, teda práve vtedy, keď sa čísla v každej „priemerovanej“ dvojici rovnajú:

$$a = \frac{1}{b},\ b = \frac{1}{c},\ c = \frac{1}{a}.$$

Z prvých dvoch rovností vyplýva $a = c$, po dosadení do tretej rovnosti potom vychádza $a = c = 1$, teda aj $b = 1$.

B – S – 2

Podľa zadania je trojuholník APC rovnoramenný. Priamka AM prechádza jeho hlavným vrcholom A kolmo na základňu CP, je teda osou vnútorného uhla CAP (obr. 12). Body C a P sú preto súmerne združené podľa priamky AM, takže uhly



Obr. 12

APM a ACM sú zhodné. (Inými slovami trojuholníky APM a ACM sú zhodné podľa vety *sus*: zodpovedajúce si strany AC a AP zvierajú so spoločnou stranou AM rovnaký uhol vďaka tomu, že AM je osou uhla CAP.) Podobne z rovnoramenného trojuholníka BQC odvodíme, že BM je osou uhla CBQ, takže aj uhly BQM a BCM sú zhodné.

Rovnosti $|\sphericalangle APM| = |\sphericalangle ACM|$ a $|\sphericalangle BQM| = |\sphericalangle BCM|$ znamenajú, že pre vnútorné uhly trojuholníka PQM pri vrcholoch P, Q platí

$$\begin{aligned}|\sphericalangle QPM| + |\sphericalangle PQM| &= |\sphericalangle APM| + |\sphericalangle BQM| = \\ &= |\sphericalangle ACM| + |\sphericalangle BCM| = |\sphericalangle ACB| = 90^\circ,\end{aligned}$$

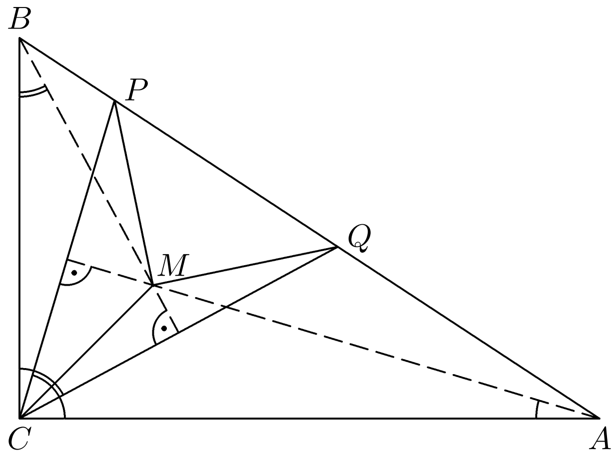
teda vnútorný uhol pri treťom vrchole M je pravý.

Iné riešenie. Bod M ako priesečník osí uhlov CAB a CBA leží aj na osi pravého uhla ACB. Preto uhly ACM a BCM majú oba veľkosť 45°, takže $|\sphericalangle APM| = |\sphericalangle ACM| = 45^\circ$, $|\sphericalangle BQM| = |\sphericalangle BCM| = 45^\circ$ a trojuholník PQM je rovnoramenný pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole M.

Iné riešenie. Zo súmernosti bodov P a C podľa priamky AM vyplýva $|PM| = |CM|$, zo súmernosti bodov Q a C podľa BM vyplýva $|QM| = |CM|$. Teda $|PM| = |QM| = |CM|$ a bod M je stredom kružnice opísanej trojuholníku PQC. Pritom ak označíme α a β uhly pri vrcholoch A a B (obr. 13), platí $\alpha + \beta = 90^\circ$ a

$$(90^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha) + (90^\circ - \tfrac{1}{2}\beta) - |\sphericalangle PCQ| = 90^\circ,$$

takže $|\sphericalangle PCQ| = 45°$. To je veľkosť obvodového uhla nad tetivou PQ spomenutej kružnice. Veľkosť zodpovedajúceho stredového uhla PMQ je teda $90°$.



Obr. 13

B – S – 3

Kvadratická rovnica *má* dva rôzne reálne korene práve vtedy, keď jej diskriminant je kladný. Preto dvojica celých čísel a, b spĺňa zadanú podmienku práve vtedy, keď diskriminanty

$$D_1 = a^2 - 4b, \quad D_2 = b^2 - 4a$$

nie sú kladné, teda keď platí

$$a^2 \leqq 4b \quad \text{a} \quad b^2 \leqq 4a. \tag{1}$$

Odtiaľ najprv vyplýva, že obe čísla b aj a sú nezáporné (pretože sú nezáporné obe čísla a^2 a b^2). Teraz sa na (1) pozrieme ako na sústavu nerovníc s neznámou b a nezáporným parametrom a a ľahko ju v obore nezáporných čísel vyriešime:

$$\frac{a^2}{4} \leqq b \leqq 2\sqrt{a}. \tag{2}$$

Nájdený interval je neprázdny práve vtedy, keď pre nezáporný parameter a platí nerovnosť

$$\frac{a^2}{4} \leqq 2\sqrt{a}, \quad \text{čiže} \quad a \leqq 4.$$

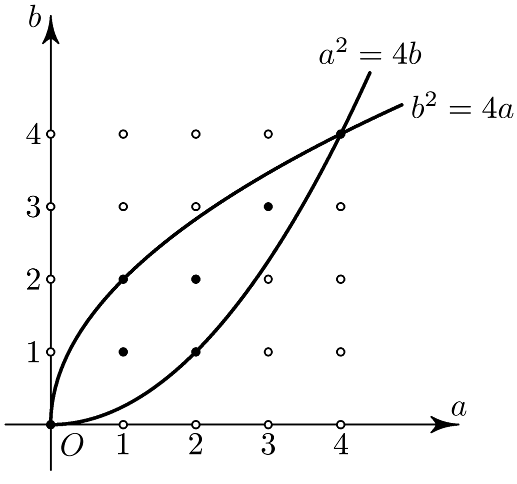
Pretože čísla a, b sú podľa zadania celé, z odvodených nerovností $0 \leqq a \leqq 4$ vyplýva, že číslo a leží v množine $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Každé také a jednotlivo do krajných výrazov v (2) dosadíme a vypíšeme, ktoré celé b v príslušnom intervale leží:

$$\begin{array}{lll}
a=0\colon & 0 \leqq b \leqq 0 & \iff b \in \{0\}, \\
a=1\colon & \frac{1}{4} \leqq b \leqq 2 & \iff b \in \{1,2\}, \\
a=2\colon & 1 \leqq b \leqq 2\sqrt{2} & \iff b \in \{1,2\}, \\
a=3\colon & \frac{9}{4} \leqq b \leqq 2\sqrt{3} & \iff b \in \{3\}, \\
a=4\colon & 4 \leqq b \leqq 4 & \iff b \in \{4\}.
\end{array}$$

Odpoveď. Vyhovuje práve sedem dvojíc (a, b):

$$(0,0),\ (1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (2,2),\ (3,3) \text{ a } (4,4).$$

Poznámka. Z nerovností (1) možno odvodiť nielen $0 \leqq a \leqq 4$, ale z dôvodu symetrickosti aj $0 \leqq b \leqq 4$. Preto namiesto nami popísaného riešenia úpravou na sústavu (2) stačí jednotlivo otestovať 25 dvojíc (a, b), kde $a, b \in \{0,1,2,3,4\}$, či vyhovujú sústave nerovností (1). Takú úlohu možno tiež interpretovať geometricky: v prvom kvadrante súradnicového systému Oab hľadáme tie body s celočíselnými súradnicami, ktoré ležia vnútri alebo na okraji oblasti ohraničenej parabolami s rovnicami $4a = b^2$ a $4b = a^2$ (obr. 14).



Obr. 14

B – II – 1

Danú rovnicu upravíme na tvar

$$q(q-1) = p(p-1)(p+1).$$

Odtiaľ vyplýva $p < q$ (keby totiž bolo $p \geqq q$, potom aj $p-1 \geqq q-1$, a pretože $p+1 > 1$, bolo by $p(p-1)(p+1) > q(q-1)$) a tiež $q \mid p(p-1)(p+1)$. Pretože q je prvočíslo, musí platiť aspoň jeden zo vzťahov $q \mid p$, $q \mid (p-1)$, $q \mid (p+1)$. Vzhľadom na podmienky $p < q$ a $p > 1$ nemôže q deliť ani p ani $p-1$, a preto $q \mid (p+1)$. Musí teda platiť $q \leqq p+1$ a to spolu s $p < q$ dáva $q = p+1$.

Jediné dve prvočísla líšiace sa o 1 sú 2 a 3. Preto $p = 2$ a $q = 3$. Skúškou overíme, že naozaj platí $2 + 3^2 = 3 + 2^3$.

Poznámka. Nerovnosť $p < q$ sa dá dokázať aj touto úvahou: Zrejme $p \neq q$. Prvočísla p a q sú teda nesúdeliteľné, a pretože $p \mid q(q-1)$, musí platiť $p \mid (q-1)$ a odtiaľ $p \leqq q-1$.

B – II – 2

Sivá časť obdĺžnika $ABCD$ so stranami dĺžok $3n+1$ a $3n-1$, ktorý má jednotkové štvorce pri dvoch vrcholoch ofarbené čiernou farbou a jednotkové štvorce pri ďalších dvoch vrcholoch bielou farbou, je symetrická podľa stredu obdĺžnika. Preto je sivá časť trojuholníka ABC zhodná so sivou časťou trojuholníka CDA, a teda obsah sivej časti trojuholníka ABC je rovný polovici obsahu sivej časti obdĺžnika $ABCD$. Obdĺžnik $ABCD$ rozdelíme na obdĺžnik so stranami dĺžok $3n$ a $3n-1$ a pásik $3n-1$ jednotkových štvorcov, v ktorom jeden koncový štvorec je čierny a druhý biely. V obdĺžniku $3n \times (3n-1)$ je počet čiernych, bielych aj sivých štvorčekov rovnaký, takže sivých je $n(3n-1)$. Keby sme k pásiku dĺžky $3n-1$ pridali jeden sivý štvorček, bol by tam tiež rovnaký počet n čiernych, bielych a sivých štvorčekov; v pásiku dĺžky $3n-1$ je teda $n-1$ sivých štvorčekov. Sivých štvorčekov v obdĺžniku $ABCD$ je $n(3n-1) + (n-1) = 3n^2 - 1$ a sivá časť trojuholníka ABC má obsah $S = \frac{1}{2}(3n^2-1)$; pre obdĺžnik $2\,008 \times 2\,006$ je $n = 669$, takže

$$S = \frac{1}{2} \cdot (2\,007 \cdot 669 - 1) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 2\,007^2 - 1\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4\,028\,049}{3} - 1\right) = \\ = \frac{4\,028\,046}{6} = 671\,341.$$

Poznámka. Obsah sivej časti trojuholníka ABC môžeme určiť aj tak, že po diagonálach vypočítame počet sivých štvorčekov, ktoré sú celé obsiahnuté v trojuholníku ABC a pripočítame polovicu počtu štvorčekov v prostrednej sivej diagonále obdĺžnika $ABCD$. Tá je symetrická podľa stredu obdĺžnika $ABCD$, takže jej časť ležiaca v trojuholníku ABC je zhodná s časťou ležiacou v trojuholníku CDA:

$$S = 3 + 6 + \ldots + 2\,004 + \frac{1}{2} \cdot 2\,006 = 334 \cdot 2\,007 + 1\,003 = 671\,341.$$

B – II – 3

Označme S stred uhlopriečky AC. Úsečka SE je stredná priečka trojuholníka ABC, preto $|SE| = \frac{1}{2}|AB| = |DC|$. Úsečky SE a DC sú rovnobežné a zhodné, preto je $SECD$ rovnobežník.

Kružnica opísaná trojuholníku CDE prechádza bodom S práve vtedy, keď je rovnobežník $SECD$ tetivový. Štvoruholník je tetivový práve vtedy, keď je súčet veľkostí jeho protiľahlých uhlov 180°. V rovnobežníku sú ale protiľahlé uhly zhodné, takže je tetivový práve vtedy, keď to je pravouholník, čiže uhol ECD, a teda aj uhol ABC je pravý.

B – II – 4

Označme $V = a + b + c + 2(ab + bc + ca) + 3(1 - a)(1 - b)(1 - c)$. Platí

$$a + b + c + (1-a)(1-b)(1-c) = 1 + ab + ac + bc - abc = 1 + ab(1-c) + ac + bc \geqq 1,$$
$$2(ab + bc + ca) + 2(1 - a)(1 - b)(1 - c) \geqq 0;$$

sčítaním týchto nerovností dostaneme $V \geqq 1$.

Označme $x = 1 - a, y = 1 - b, z = 1 - c$; potom x, y, z sú čísla z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ a

$$\begin{aligned} V &= 1 - x + 1 - y + 1 - z + 2\,[(1-x)(1-y) + (1-y)(1-z) + (1-z)(1-x)] + 3xyz = \\ &= 3 - (x + y + z) + 2\,[3 - 2(x + y + z) + xy + yz + zx] + 3xyz = \\ &= 9 - 5(x + y + z) + 2(xy + yz + zx) + 3xyz = \\ &= 9 - 2x(1 - y) - 2y(1 - z) - 2z(1 - x) - 3x(1 - yz) - 3y - 3z \leqq 9. \end{aligned}$$

Iné riešenie. Ak $a = 0$, potom

$$V = b + c + 2bc + 3(1 - b)(1 - c) = 3 + 5bc - 2b - 2c = 3 + 5\left(b - \frac{2}{5}\right)\left(c - \frac{2}{5}\right) - \frac{4}{5}.$$

Pretože $b, c \in \langle 0, 1\rangle$, výraz $(b-2/5)(c-2/5)$ nadobúda najväčšiu hodnotu pre $b = c = 1$ a najmenšiu hodnotu pre $\{b, c\} = \{0, 1\}$, a teda

$$3 + 5 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \frac{3}{5} - \frac{4}{5} \leqq V \leqq 3 + 5 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} - \frac{4}{5},$$

čiže

$$1 \leqq V \leqq 4.$$

Ak $a = 1$, potom

$$V = 1 + b + c + 2(b + bc + c),$$

zrejme teda

$$1 \leqq V \leqq 9.$$

Ak b, c sú ľubovoľne, ale pevne zvolené čísla z intervalu $\langle 0, 1\rangle$, je V lineárnou funkciou premennej $a \in \langle 0, 1\rangle$ alebo je V konštanta. Lineárna funkcia definovaná v uzavretom intervale nadobúda extrémne hodnoty v koncových bodoch tohto intervalu. Pretože pre $a = 0$ aj pre $a = 1$ platí $1 \leqq V \leqq 9$, platí táto nerovnosť pre všetky $a \in \langle 0, 1\rangle$.

Iné riešenie. Pretože výraz V je lineárny vzhľadom na každú z premenných $a, b, c \in \in \langle 0, 1\rangle$, nadobúda extrémne hodnoty pre $\{a, b, c\} \in \{0, 1\}$. Pre $a = b = c = 0$ je $V = 3$. Ak dve z čísel a, b, c sa rovnajú nule a tretie sa rovná jednej, platí $V = 1$. Ak sa dve z čísel a, b, c rovnajú jednej a tretie sa rovná nule, potom $V = 4$. Pre $a = b = c = 1$ je $V = 9$. Preto platí $1 \leqq V \leqq 9$ pre všetky $a, b, c \in \langle 0, 1\rangle$.

KATEGÓRIA A

A – I – 1

Z vlastností funkcií tangens a cotangens vyplýva, že $t \neq k \cdot \frac{1}{2}\pi$, kde k je ľubovoľné celé číslo. Označme ďalej

$$L = \sqrt{2}(\sin t + \cos t) \qquad \text{a} \qquad P = \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{cotg}^3 t.$$

Vzhľadom na periodickosť funkcií sin, cos, tg, cotg stačí rozobrať nasledujúce prípady.

▷ $t \in (0, \frac{1}{2}\pi)$: Pre každé také t platia nerovnosti

$$\sin t + \cos t \leqq \sqrt{2} \qquad \text{a} \qquad \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{cotg}^3 t = \operatorname{tg}^3 t + \frac{1}{\operatorname{tg}^3 t} \geqq 2.$$

Rovnosť v každej z nich nastáva práve vtedy, keď $t = \frac{1}{4}\pi$. Dostávame tak odhad

$$L \leqq \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \leqq P.$$

Odtiaľ vyplýva $L = P = 2$ a jediné reálne číslo t z uvažovaného intervalu $(0, \frac{1}{2}\pi)$, ktoré danej rovnici vyhovuje, je $t = \frac{1}{4}\pi$.

▷ $t \in (\frac{1}{2}\pi, \pi)$: Pre každé také t platia v tomto prípade nerovnosti

$$\sin t + \cos t > -1 \qquad \text{a} \qquad \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{cotg}^3 t \leqq -2.$$

Pre ľubovoľné t z uvažovaného intervalu potom platia odhady

$$L > -\sqrt{2} > -2 \geqq P,$$

čo znamená, že v tomto prípade daná rovnica nemá žiadne reálne riešenie.

▷ $t \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$: Pre ľubovoľné t z uvažovaného intervalu platia v tomto prípade nerovnosti

$$-\sqrt{2} \leqq \sin t + \cos t < -1 \qquad \text{a} \qquad \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{cotg}^3 t \geqq 2.$$

Odtiaľ

$$L < -\sqrt{2} < 2 \leqq P,$$

a teda ani v tomto prípade daná rovnica nemá žiadne reálne riešenie.

▷ $t \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$: Podobne ako v druhom prípade pre ľubovoľné t z uvažovaného intervalu platia nerovnosti

$$\sin t + \cos t > -1 \qquad \text{a} \qquad \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{cotg}^3 t \leqq -2.$$

Preto

$$L > -\sqrt{2} > -2 \geqq P,$$

čo znamená, že ani v tomto prípade nemá daná rovnica žiadne reálne riešenie.

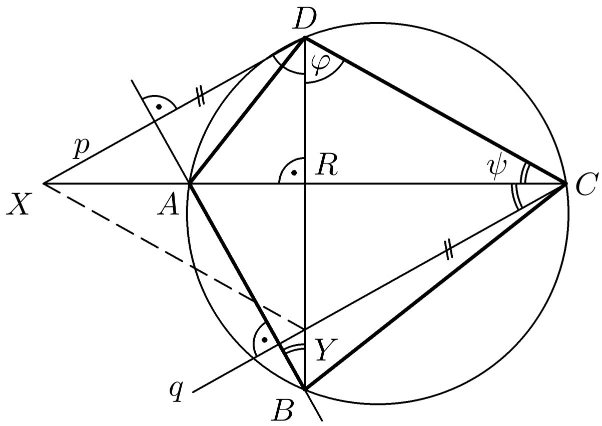
Záver. Vzhľadom na periodickosť uvažovaných goniometrických funkcií sú riešením danej rovnice všetky reálne čísla t tvaru

$$t = \frac{1}{4}\pi + 2k\pi,$$

kde k je ľubovoľné celé číslo.

A – I – 2

Označme R priesečník uhlopriečok daného štvoruholníka a pre jednoduchosť tiež φ, ψ veľkosti uhlov CDR a DCR (obr. 15). Pretože uhlopriečky sú na seba kolmé, platí $\varphi + \psi = 90°$. Vzhľadom na to, že oba vrcholy B, C ležia v rovnakej polrovine určenej



Obr. 15

tetivou AD, máme z rovnosti príslušných obvodových uhlov $|\sphericalangle ABD| = \psi$. A pretože DX je kolmá na AB, platí tiež $|\sphericalangle XDB| = \varphi$. To znamená, že trojuholník XCD je rovnoramenný so základňou XC. Úplne rovnako však zistíme, že aj trojuholník YCD je rovnoramenný so základňou YD. Odtiaľ už zrejme vyplýva, že $XYCD$ je kosoštvorec alebo štvorec.

Iné riešenie. Využijeme nie celkom bežne známy poznatok, že bod súmerne združený s priesečníkom výšok daného trojuholníka podľa jeho ľubovoľnej strany leží na kružnici trojuholníku opísanej (poz. návodnú úlohu).

Označme R priesečník uhlopriečok daného štvoruholníka. Podľa podmienok úlohy je X priesečník výšok trojuholníka ABD a Y priesečník výšok trojuholníka ABC. Podľa predchádzajúceho tvrdenia je bod C obrazom bodu X s osovej súmernosti podľa priamky BD, takže R je stred úsečky XC. Analogicky je R stred úsečky YD. Pretože XC a YD sú na sebe kolmé, je $XYCD$ kosoštvorec alebo štvorec.

A – I – 3

a) Aby sme dokázali, že uvažovaná postupnosť (a_n) je periodická, stačí ukázať, že existujú prirodzené čísla n_0 a p také, že $a_{n_0+p} = a_{n_0}$. Pretože ďalšie členy postupnosti sú daným rekurentným vzťahom jednoznačne určené, bude už pre každé $n \geqq n_0$ platiť $a_{n+p} = a_n$ (postupnosť bude periodická s dĺžkou periódy p).

Číslo $a_{n+1} = a_n - b_n$ má však najviac toľko číslic ako číslo a_n. To je napríklad vidno z nerovnosti $|a - b| \leqq \max(|a|, |b|)$. Ak má teda prvý člen postupnosti k číslic, budú všetky ostatné členy postupnosti patriť do konečnej množiny najviac $2(10^k - 1)$ nenulových celých čísel. Pretože postupnosť je nekonečná, musí obsahovať aspoň dva rovnaké členy. Odtiaľ vyplýva, že uvažovaná postupnosť je periodická.

b) Pretože uvažovaná postupnosť je *nenulová*, nemôže byť jej členom žiadne *palindromické* číslo (číslo, ktoré „prečítame“ rovnako spredu aj zozadu), špeciálne teda ani číslo jednociferné.

Predpokladajme najskôr, že členom uvažovanej postupnosti je dvojciferné číslo $a_0 = \overline{ab} = 10a + b$, pre ktoré $a_1 = 9(a - b)$. Vidíme, že všetky ďalšie členy (hlavne teda tie, ktoré sa budú periodicky opakovať) musia byť deliteľné deviatimi. Stačí preto rozobrať všetky dvojciferné násobky deviatich $18, \ldots, 99$. Ako ľahko zistíme podľa schémy

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
81 \arrow[dr] & & & & \\
& 63 \arrow[dr] & & & \\
18 \arrow[ur] & & 27 \arrow[dr] & & \\
& 36 \arrow[ur] & & 45 \arrow[dr] & \\
& & 72 \arrow[ur] & & 9, \\
& & & 54 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

pre každé také číslo sa medzi členmi po chvíli objaví jednociferná deviatka. To znamená, že uvažovaná postupnosť nemôže obsahovať ani dvojciferné čísla. (Čísla v schéme sú v absolútnej hodnote, pretože príslušná zmena znamienka nemá na práve získaný výsledok vplyv.)

Predpokladajme ďalej, že členom uvažovanej postupnosti je trojciferné číslo $a_0 = \overline{abc} = 100a + 10b + c$, pre ktoré $a_1 = 99(a - c)$. Opäť stačí preskúmať len trojciferné násobky čísla 99, t. j. $198, \ldots, 990$. Podobne ako v predchádzajúcom prípade podľa schémy

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
891 \arrow[dr] & & & & \\
& 693 \arrow[dr] & & & \\
198 \arrow[ur] & & 297 \arrow[dr] & & \\
& 396 \arrow[ur] & & 495 \arrow[dr] & \\
& & 792 \arrow[ur] & & 99 \\
& & & 594 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

zistíme, že pre také čísla sa medzi členmi postupnosti nakoniec objaví dvojciferné číslo 99. Postupnosť teda nemôže obsahovať ani trojciferné čísla.

Pretože pre štvorciferné číslo $a_0 = \overline{abcd} = 1\,000a + 100b + 10c + d$ dostávame $a_1 = 999(a - d) + 90(b - c)$, zistíme opäť, že prvých desať najmenších (pre ktoré je v príslušnom desiatkovom zápise $b = c$) členom uvažovanej postupnosti byť nemôže: pre čísla $1\,000$ a $1\,002$ dostaneme priamo $|a_1| = 999$, číslo $1\,001$ je palindromické a pre čísla 1 003, . . . , 1 009 dostaneme podľa analogickej schémy

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny, column sep=small]
8\,991 \arrow[dr] & & & & \\
& 6\,993 \arrow[dr] & & & \\
1\,998 \arrow[ur] & & 2\,997 \arrow[dr] & & \\
& 3\,996 \arrow[ur] & & 4\,995 \arrow[dr] & \\
& & 7\,992 \arrow[ur] & & 999 \\
& & & 5\,994 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

po niekoľkých krokoch trojciferné číslo 999. Pre nasledujúce štvorciferné číslo 1 010 dostaneme trojciferné číslo 909 a pre 1 011 dokonca dvojciferné číslo -90. Až pre číslo 1 012 dostaneme postupnosť štvorciferných čísel

$$-1\,089,\ 8\,712,\ 6\,534,\ 2\,178,\ -6\,534,$$

ktorá sa zrejme po ďalšom člene zacyklí.

Záver. Najmenšie také číslo a_0 je teda 1 012.

A – I – 4

Podľa zadania má mať kubická rovnica $P(x) = 0$ dva rôzne reálne korene, označme ich $x_1 = 7$ a $x_2 \neq x_1$ (konkrétnu hodnotu $x_1 = 7$ využijeme len vtedy, keď to bude vhodné, inak budeme radšej písať všeobecne x_1). Pre kubický mnohočlen $P(x)$, ktorého koeficient pri mocnine x^3 označíme a, $a \neq 0$, potom existuje ešte reálne číslo x_3 také, že platí

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \tag{1}$$

(nie sú vylúčené rovnosti $x_3 = x_1$ alebo $x_3 = x_2$).

Pripomeňme, ako existenciu tretieho reálneho koreňa x_3 zdôvodniť: kubický mnohočlen $P(x)$ je nutne deliteľný mnohočlenom $(x-x_1)(x-x_2)$, príslušný podiel je lineárny dvojčlen s vedúcim koeficientom a, teda dvojčlen $ax+b$, ktorý možno zapísať ako $a(x - x_3)$, ak zvolíme $x_3 = -b/a$.

Našou úlohou je nájsť všetky vyhovujúce trojice čísel $a \neq 0$, $x_2 \neq x_1$ a x_3, pre ktoré mnohočlen (1) s danou hodnotou $x_1 = 7$ spĺňa pre každé reálne t implikáciu

$$P(t) = 0 \quad\Longrightarrow\quad P(t+1) = 1.$$

Pre rozbor takej podmienky je nutné vedieť, pre koľko *rôznych* hodnôt t rovnosť $P(t) = 0$ (a teda aj rovnosť $P(t+1) = 0$) naozaj platí, teda koľko je v trojici x_1, x_2, x_3 rôznych čísel. Môžu nastať iba nasledujúce možnosti A, B a C.

A. *x_1, x_2, x_3 sú tri navzájom rôzne čísla.* Vtedy má kubická rovnica $P(x) = 1$ tri navzájom rôzne korene $x_1 + 1$, $x_2 + 1$, $x_3 + 1$, takže platí

$$P(x) - 1 = a(x - x_1 - 1)(x - x_2 - 1)(x - x_3 - 1).$$

Keď sem dosadíme rozklad (1), dostaneme rovnosť mnohočlenov

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) - 1 = a(x - x_1 - 1)(x - x_2 - 1)(x - x_3 - 1). \tag{2}$$

Porovnaním koeficientov pri mocnine x^2 na ľavej a pravej strane získame rovnosť

$$-a(x_1 + x_2 + x_3) = -a(x_1 + x_2 + x_3 + 3),$$

ktorá je splnená len v prípade $a = 0$, čo je v rozpore s predpokladom $a \neq 0$. (Navyše rovnosť (2) neplatí ani pre $a = 0$, keď má tvar $-1 = 0$.)

B. $x_1 = x_3 = 7 \neq x_2$. Vtedy $P(x) = a(x-7)^2(x-x_2)$ a rovnosť $P(x) = 1$ musí platiť pre $x = 7 + 1 = 8$ a pre $x = x_2 + 1$. Dostávame tak sústavu dvoch rovníc

$$P(8) = a(8 - x_2) = 1 \quad \text{a} \quad P(x_2 + 1) = a(x_2 - 6)^2 = 1.$$

Prevrátená hodnota čísla a je teda rovná ako číslu $8 - x_2$, tak číslu $(x_2 - 6)^2$. Z rovnice

$$8 - x_2 = (x_2 - 6)^2$$

dostaneme úpravou rovnicu $x_2^2 - 11x_2 + 28 = 0$, ktorá má dva korene $x_2 = 4$ a $x_2 = 7$. Druhý koreň nevyhovuje našej podmienke $x_2 \neq x_1$, takže nutne platí $x_2 = 4$, odkiaľ $a = 4^{-1} = \frac{1}{4}$ a $P(x) = \frac{1}{4}(x-7)^2(x-4)$.

C. $x_1 = 7 \neq x_2 = x_3$. Vtedy $P(x) = a(x-7)(x-x_2)^2$ a rovnosť $P(x) = 1$ musí platiť pre $x = 7 + 1 = 8$ a pre $x = x_2 + 1$. Dostávame tak sústavu dvoch rovníc

$$P(8) = a(8 - x_2)^2 = 1 \quad \text{a} \quad P(x_2 + 1) = a(x_2 - 6) = 1.$$

Prevrátená hodnota čísla a je teda rovná ako číslu $(8 - x_2)^2$, tak číslu $x_2 - 6$. Z rovnice

$$(8 - x_2)^2 = x_2 - 6$$

dostaneme úpravou rovnicu $x_2^2 - 17x_2 + 70 = 0$, ktorá má dva korene $x_2 = 10$ a $x_2 = 7$. Druhý koreň nevyhovuje našej podmienke $x_2 \neq x_1$, takže nutne platí $x_2 = 10$, odkiaľ $a = 4^{-1} = \frac{1}{4}$ a $P(x) = \frac{1}{4}(x-7)(x-10)^2$.

Záver. Podmienkam úlohy vyhovujú iba dva kubické mnohočleny

$$P(x) = \frac{1}{4}(x-7)^2(x-4) \quad \text{a} \quad P(x) = \frac{1}{4}(x-7)(x-10)^2.$$

Poznámka. Možnosť A v uvedenom riešení môžeme vylúčiť vďaka nasledujúcej úvahe: Keby mal mnohočlen P tri rôzne korene k, ℓ, m, mal by mnohočlen $P - 1$ podľa predpokladu korene $k + 1$, $\ell + 1$, $m + 1$. To však nie je možné, pretože súčet koreňov mnohočlena P je rovnaký ako súčet koreňov mnohočlena $P - 1$.

A – I – 5

V ľubovoľnom konvexnom štvoruholníku $ABCD$ označme S priesečník uhlopriečok a okrem dĺžok strán uvažujme ešte veličiny $e = |AC|$, $f = |BD|$, $e_1 = |AS|$, $e_2 = |CS|$, $f_1 = |BS|$, $f_2 = |DS|$ a $\varphi = |\sphericalangle ASB|$. Podľa kosínusovej vety platia rovnosti

$$\begin{aligned}
a^2 &= e_1^2 + f_1^2 - 2e_1 f_1 \cos\varphi,\\
b^2 &= e_2^2 + f_1^2 + 2e_2 f_1 \cos\varphi,\\
c^2 &= e_2^2 + f_2^2 - 2e_2 f_2 \cos\varphi,\\
d^2 &= e_1^2 + f_2^2 - 2e_1 f_2 \cos\varphi.
\end{aligned}$$

Keď sčítame prvú rovnosť s treťou a od výsledku odčítame súčet druhej a štvrtej, dostaneme

$$(a^2+c^2)-(b^2+d^2)=-2(e_1f_1+e_2f_2+e_2f_1+e_1f_2)\cos\varphi,$$

čiže

$$(a^2+c^2)-(b^2+d^2)=-2ef\cos\varphi. \tag{1}$$

Odtiaľ vyplýva takýto záver: ak platí rovnosť $a^2+c^2=b^2+d^2$, potom v každom uvažovanom štvoruholníku je $\cos\varphi=0$, teda uhol φ je vždy pravý a dĺžky strán majú vyjadrenia

$$a^2=e_1^2+f_1^2,\ b^2=e_2^2+f_1^2,\ c^2=e_2^2+f_2^2,\ d^2=e_1^2+f_2^2. \tag{2}$$

Aby sme uzavreli prvú časť riešenia, zdôvodníme ešte, že také štvoruholníky (pre akékoľvek dĺžky a, b, c, d spĺňajúce vzťah $a^2+c^2=b^2+d^2$) existujú. Určite môžeme predpokladať, že platí $d=\min\{a,b,c,d\}$; dĺžku e_1 potom zvolíme v intervale $(0,d)$ ľubovoľne a podľa (2) určíme

$$f_1=\sqrt{a^2-e_1^2},\quad f_2=\sqrt{d^2-e_1^2},$$
$$e_2=\sqrt{c^2-d^2+e_1^2}\left(=\sqrt{b^2-a^2+e_1^2}\right)$$

(vzhľadom k urobenému predpokladu platí $c^2-d^2\geqq 0$). Tým je existencia vyhovujúcich štvoruholníkov (s navzájom kolmými uhlopriečkami) dokázaná.

V druhej časti riešenia budeme naopak predpokladať, že aspoň jeden konvexný štvoruholník $A_0B_0C_0D_0$ so stranami daných dĺžok a, b, c, d existuje. Z úvahy o modeli štvoruholníka z drôtu je jasné, že vyhovujúcich konvexných štvoruholníkov $ABCD$ (tvarom blízkych $A_0B_0C_0D_0$) je potom nekonečne veľa. Ich vnútorné uhly α, γ pri vrcholoch A, C sú viazané podmienkou

$$a^2+d^2-2ad\cos\alpha=b^2-c^2-2bc\cos\gamma \tag{3}$$

(porovnanie dĺžky spoločnej strany BD trojuholníkov ABD a BCD). Pripusťme, že uhlopriečky všetkých týchto štvoruholníkov zvierajú rovnaký uhol φ a že *ľavá strana rovnosti* (1) *je nenulová* (podľa jej znamienka je uhol φ buď ostrý, alebo tupý, takže sa nemôže stať, že pre časť vyhovujúcich štvoruholníkov má veľkosť φ_0, a pre ostatné $\pi-\varphi_0$). Potom z rovnosti (1) môžeme vypočítať súčin ef, ktorý je tak pre všetky vyhovujúce štvoruholníky rovnaký. Zo vzťahu pre ich obsah $S=\frac{1}{2}ef\sin\varphi$ nakoniec vyplýva, že aj hodnota S je jedna a tá istá. Pretože obsah S môžeme vyjadriť aj vzťahom $S=\frac{1}{2}ad\sin\alpha+\frac{1}{2}bc\sin\gamma$, prichádzame k záveru: existujú také konštanty R_1 a R_2, že všetky vyhovujúce štvoruholníky spĺňajú vzťahy

$$ad\cos\alpha-bc\cos\gamma=R_1,\quad ad\sin\alpha+bc\sin\gamma=R_2$$

(prvý vzťah je dôsledkom (3), v druhom $R_2 = 2S > 0$). Z nich ďalej vyplýva

$$(bc)^2 = (bc\cos\gamma)^2 + (bc\sin\gamma)^2 = (ad\cos\alpha - R_1)^2 + (R_2 - ad\sin\alpha)^2 = \\ = (ad)^2 + R_1^2 + R_2^2 - 2ad(R_1\cos\alpha + R_2\sin\alpha).$$

Pretože $ad \neq 0$, možno z ostatnej rovnosti vypočítať hodnotu výrazu

$$V = R_1\cos\alpha + R_2\sin\alpha,$$

ktorá je tak pre všetky vyhovujúce štvoruholníky $ABCD$ rovnaká. To je možné jedine vtedy, keď $R_1 = R_2 = 0$, a to je spor s tým, že $R_2 > 0$. Dôkaz druhej časti tvrdenia je hotový.

Dodajme, že záver o hodnotách výrazu V vyplýva zo známeho vyjadrenia

$$V = \frac{1}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}}\sin(\alpha + \omega),$$

kde uhol ω je určený vzťahmi

$$\sin\omega = \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}} \quad \text{a} \quad \cos\omega = \frac{R_2}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}}.$$

Výraz $\sin(\alpha+\omega)$ nie je konštantný, keď sa uhol α mení v okolí uhla α_0 (ktorý zodpovedá pôvodnému štvoruholníku $A_0B_0C_0D_0$ z úvodu druhej časti riešenia).

A – I – 6

Odvodíme najskôr, ako vyzerá každá dvojica (x, y) prirodzených čísel, ktorá vyhovuje rovnici

$$x^2 + y^2 = k(x - y) \tag{1}$$

s daným prirodzeným číslom k (a až potom všetky tieto riešenia pre hodnotu $k = 2\,005$ zostrojíme).

Predpokladajme, že (x, y) je ľubovoľné riešenie rovnice (1), ktorú zvyčajným spôsobom upravíme na „súčinový“ tvar

$$y(y + k) = x(k - x). \tag{2}$$

Urobme úvahu o súdeliteľnosti zastúpených činiteľov. Označme d najväčší spoločný deliteľ prirodzených čísel x a y. Takže platí $x = dm$ a $y = dn$, kde m a n sú nesúdeliteľné prirodzené čísla. Po vydelení oboch strán rovnosti (2) číslom d dostaneme „výhodnejšiu“ rovnosť $n(y+k) = m(k-x)$. Z nej totiž vzhľadom na nesúdeliteľnosť čísel m, n vyplýva, že prirodzené číslo $y + k$ je násobkom čísla m a číslo $k - x$ rovnakým násobkom čísla n. Pre vhodné prirodzené q teda platia rovnosti

$$y + k = qm \quad \text{a} \quad k - x = qn.$$

Vyjadrime odtiaľ dvoma spôsobmi číslo k a obe vyjadrenia porovnajme:

$$\left.\begin{aligned} k &= qm - y = qm - dn, \\ k &= qn + x = qn + dm \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ qm - dn = qn + dm \ \Rightarrow\ m(q-d) = n(q+d).$$

Odtiaľ opäť z nesúdeliteľnosti čísel m, n vyplýva, že prirodzené číslo $q+d$ je násobkom čísla m a číslo $q-d$ rovnakým násobkom čísla n. Pre vhodné prirodzené r teda platia rovnosti

$$q + d = rm \quad \text{a} \quad q - d = rn.$$

Ich sčítaním a odčítaním dostaneme nasledujúce vyjadrenie čísel q a d pomocou r, m a n:

$$q = \frac{r(m+n)}{2} \quad \text{a} \quad d = \frac{r(m-n)}{2}.$$

Odtiaľ už pre neznáme x, y dostávame konečné vzťahy

$$x = dm = \frac{r(m-n)m}{2} \quad \text{a} \quad y = dn = \frac{r(m-n)n}{2}. \tag{3}$$

Zistíme teraz, ako súvisia parametre r, m, n s daným koeficientom k z pôvodnej rovnice (1). Môžeme postupovať napríklad tak, že odvodené vzťahy dosadíme do rovnosti $k = qn + x$:

$$k = qn + x = \frac{r(m+n)n}{2} + \frac{r(m-n)m}{2} = \frac{r(m^2+n^2)}{2}.$$

Odtiaľ po násobení dvoma dostaneme hľadanú podmienku v tvare

$$2k = r(m^2 + n^2). \tag{4}$$

Iný spôsob odvodenia rovnosti (4), ktorý je súčasne priamou „skúškou“ vzťahov (3), spočíva v tom, že z nich jednoducho vyplývajú vyjadrenia

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{r^2(m-n)^2(m^2+n^2)}{4}, \\ x - y &= \frac{r(m-n)^2}{2}, \end{aligned}$$

z ktorých vidíme, že rovnica (1) je pre také x, y splnená práve vtedy, keď je splnená podmienka (4). Kým sformulujeme dokázaný výsledok, dodajme ešte, že podľa vzťahov (3) musia čísla m, n spĺňať nerovnosť $m > n$. Preto platí nasledujúca veta.

Ak k je dané prirodzené číslo, tak riešeniami rovnice $x^2 + y^2 = k(x-y)$ sú práve tie dvojice prirodzených čísel x a y, ktoré sú tvaru

$$x = \frac{r(m-n)m}{2} \quad \text{a} \quad y = \frac{r(m-n)n}{2},$$

kde r, m, n sú prirodzené čísla, pre ktoré platí rovnosť $2k = r(m^2 + n^2)$, pričom čísla m a n sú nesúdeliteľné a $m > n$.

Z dokázanej vety vyplýva návod, ako všetky riešenia rovnice $x^2 + y^2 = k(x - y)$ pre daný koeficient k zostrojiť. Nájdeme všetky možné rozklady čísla $2k$ na dva činitele, $2k = rs$, a pre každý z nich potom nájdeme vyhovujúce čísla m, n z rovnosti $m^2+n^2 = s$. Nezostáva to urobiť inak ako tak, že pre konečne veľa čísel m, ktoré sú s číslom s nesúdeliteľné a spĺňajú nerovnosti $2m^2 > s > m^2$, testujeme, či je rozdiel $s-m^2$ druhou mocninou prirodzeného čísla. Pre dané $k = 2005 = 5 \cdot 401$ (401 je prvočíslo) existujú tieto rozklady (pretože $m^2+n^2 \geqq 2^2+1^2 = 5$, vynecháme rozklady, v ktorých je činiteľ $s = m^2 + n^2$ menší ako 5):

(i) $r = 802$, $m^2 + n^2 = 5$. Zrejme $m = 2$ a $n = 1$, odkiaľ $x = 802$ a $y = 401$.
(ii) $r = 401$, $m^2 + n^2 = 10$. Zrejme $m = 3$ a $n = 1$, odkiaľ $x = 1203$ a $y = 401$.
(iii) $r = 10$, $m^2 + n^2 = 401$. Platí $15 \leqq m \leqq 20$, vyhovuje iba $m = 20$, kedy $n = 1$, $x = 1\,900$ a $y = 95$.
(iv) $r = 5$, $m^2 + n^2 = 802$. Platí $21 \leqq m \leqq 27$, preberieme iba nepárne m, vyhovuje iba $m = 21$, kedy $n = 19$, $x = 105$ a $y = 95$.
(v) $r = 2$, $m^2+n^2 = 2\,005$. Platí $31 \leqq m \leqq 44$, preberieme iba m nesúdeliteľné s číslom 5, vyhovuje jednak $m = 39$, kedy $n = 22$, $x = 663$ a $y = 374$, jednak $m = 41$, kedy $n = 18$, $x = 943$ a $y = 414$.
(vi) $r = 1$, $m^2 + n^2 = 4\,010$. Platí $45 \leqq m \leqq 63$, preberieme iba m nesúdeliteľné s číslom 10, vyhovuje jednak $m = 59$, kedy $n = 23$, $x = 1\,062$ a $y = 414$, jednak $m = 61$, kedy $n = 17$, $x = 1\,342$ a $y = 374$.

Záver. Úloha má pravé osem riešení (x, y). Zapíšeme ich v rastúcom poradí podľa prvej zložky x: $(105, 95)$, $(663, 374)$, $(802, 401)$, $(943, 414)$, $(1\,062, 414)$, $(1\,203, 401)$, $(1\,342, 374)$, $(1\,900, 95)$.

Všimnime si, že týchto osem dvojíc (x, y) má iba štyri rôzne zložky y (každé y je zastúpené v dvoch dvojiciach). To možno vysvetliť takýmto pozorovaním: ak má pre niektoré prirodzené y kvadratická rovnica

$$x^2 - 2\,005x + (y^2 + 2\,005y) = 0$$

aspoň jedno riešenie x v obore prirodzených čísel, má v tomto obore dve rôzne riešenia. Jednoduché vysvetlenie vyplýva z Viètových vzťahov: ak je x_1 celočíselný koreň tejto rovnice, je aj druhý koreň $x_2 = 2\,005-x_1$ celé číslo (rôzne od x_1); z rovnosti $x_1x_2 = y^2 + 2\,005y$ vyplýva, že oba korene x_1, x_2 majú rovnaké znamienko, lebo $y^2 + 2\,005y > 0$.

A – S – 1

Z tvaru danej rovnice priamo vyplýva, že $x > y \geqq 0$ (lebo číslo $6\sqrt{5} - 10$ je kladné a odmocnina z neho tiež). Pre také x, y môžeme umocniť obe (kladné) strany rovnice na druhú a urobiť ďalšie ekvivalentné úpravy:

$$\begin{aligned} x\sqrt{5} - 2\sqrt{5xy} + y\sqrt{5} &= 6\sqrt{5} - 10, \\ x - 2\sqrt{xy} + y &= 6 - 2\sqrt{5}, \\ x + y - 6 &= 2\bigl(\sqrt{xy} - \sqrt{5}\bigr). \end{aligned} \tag{1}$$

Umocnením a ďalšou úpravou dostaneme, že pre hľadané celé čísla x, y musí platiť

$$(x+y-6)^2 = 4\bigl(xy - 2\sqrt{5xy} + 5\bigr),$$
$$8\sqrt{5xy} = 4(xy+5) - (x+y-6)^2. \tag{2}$$

Z ostatnej rovnice vyplýva, že hodnota $\sqrt{5xy}$ je racionálna, a teda celé číslo.[4] Takže $5xy$ je druhá mocnina nezáporného celého čísla, ktoré je zrejme deliteľné piatimi.[5] Platí teda $5xy = (5k)^2$, čiže $xy = 5k^2$, kde k je nezáporné celé číslo. Toto je výhodné dosadiť nie do rovnice (2), ale do rovnice (1). Dostaneme totiž rovnicu

$$x+y-6 = 2\bigl(\sqrt{5k^2} - \sqrt{5}\bigr) \quad \text{čiže} \quad x+y-6 = 2(k-1)\sqrt{5}.$$

Z nej vďaka iracionálnosti čísla $\sqrt{5}$ vyplýva, že pre splnenie rovnosti (1) je nutné a postačujúce, aby platili obe rovnosti $k=1$ a $x+y-6=0$. Zo sústavy rovníc

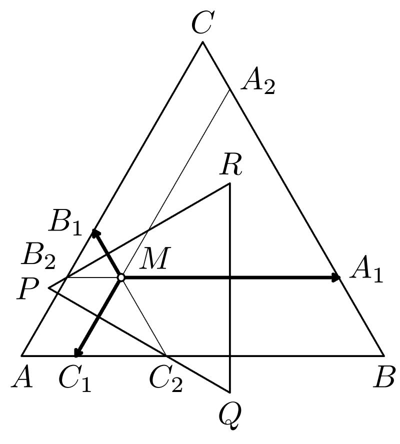
$$xy = 5k^2 = 5, \quad x+y = 6$$

ľahko zistíme, že $\{x,y\} = \{5,1\}$, teda $x=5$ a $y=1$, lebo podľa úvahy na začiatku $x>y$.

Hľadaná dvojica (x,y) je jediná, a to $(x,y) = (5,1)$.

A – S – 2

Označme P, Q, R vrcholy vzniknutého trojuholníka. Každá z osí úsečiek MA_1, MB_1 a MC_1 je kolmá na zodpovedajúcu stranu trojuholníka ABC. Preto každé dve zo strán trojuholníka PQR zvierajú uhol 60 stupňov, takže tento trojuholník je rovnostranný (obr. 16).



Obr. 16

[4] Druhá odmocnina nezáporného celého čísla je buď celé číslo, alebo iracionálne číslo.

[5] Ak je n celé a n^2 je deliteľné piatimi, je aj n deliteľné piatimi.

Teraz ukážeme, že súčet dĺžok úsečiek MA_1, MB_1 a MC_1 je (nezávisle od polohy bodu M) rovný dĺžke a strany pôvodného trojuholníka ABC. Označme preto postupne B_2, C_2 a A_2 priesečníky priamok MA_1, MB_1 a MC_1 so stranami CA, AB a BC. Pretože trojuholníky MA_1A_2, MB_1B_2 a MC_1C_2 sú rovnostranné, platí

$$|MA_1| + |MB_1| + |MC_1| = |A_1A_2| + |A_2C| + |A_1B| = |BC| = a.$$

Pre ľubovoľný (vnútorný) bod rovnostranného trojuholníka platí, že súčet jeho vzdialeností od všetkých strán trojuholníka je rovný výške trojuholníka. To ľahko vidno napríklad z vyjadrenia obsahu takého trojuholníka ako súčtu obsahov troch trojuholníkov tvorených daným (vnútorným) bodom a dvojicami vrcholov. Pretože bod M má od strán (rovnostranného) trojuholníka PQR vzdialenosti $|MA_1|/2$, $|MB_1|/2$ a $|MC_1|/2$, má výška t tohto trojuholníka veľkosť $t = (|MA_1| + |MB_1| + |MC_1|)/2 = a/2$. Pretože pre výšku v rovnostranného trojuholníka ABC platí $v = \sqrt{3}a/2$, platí $S = av/2 = \sqrt{3}v^2/3$. Podobne pre obsah T trojuholníka PQR s výškou t dostávame

$$T = \frac{\sqrt{3}}{3}t^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{v}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{9}v^2 = \frac{1}{3}S,$$

čiže $S = 3T$, čo sme chceli dokázať.

A – S – 3

Pretože všetky hodnoty funkcie sínus ležia v intervale $\langle -1, 1\rangle$, je súčin dvoch hodnôt sínusu rovný číslu -1 len vtedy, keď je jedna hodnota 1 a druhá hodnota je -1. Číslo $x \in \mathbb{R}$ je teda riešením danej rovnice práve vtedy, keď existujú čísla $k, \ell \in \mathbb{Z}$ také, že platí dvojica rovností

$$\begin{cases} \dfrac{x+\pi}{5} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \\ \dfrac{x-\pi}{11} = -\dfrac{\pi}{2} + 2\ell\pi, \end{cases} \quad \text{alebo} \quad \begin{cases} \dfrac{x+\pi}{5} = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \\ \dfrac{x-\pi}{11} = \dfrac{\pi}{2} + 2\ell\pi. \end{cases}$$

Vyriešením týchto lineárnych rovníc dostaneme vyjadrenia

$$\begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{2} + 10k\pi, \\ x = -\dfrac{9\pi}{2} + 22\ell\pi, \end{cases} \quad \text{alebo} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{7\pi}{2} + 10k\pi, \\ x = \dfrac{13\pi}{2} + 22\ell\pi. \end{cases}$$

Teraz nájdeme všetky dvojice celých čísel (k, ℓ), pre ktoré platí

$$\frac{3\pi}{2} + 10k\pi = -\frac{9\pi}{2} + 22\ell\pi, \quad \text{resp.} \quad -\frac{7\pi}{2} + 10k\pi = \frac{13\pi}{2} + 22\ell\pi.$$

Jednoduchou úpravou týchto rovníc (vrátane krátenia číslom 2π) dostaneme

$$5k + 3 = 11\ell, \quad \text{resp.} \quad 5k - 5 = 11\ell.$$

Upravme prvú rovnicu na tvar $5(k-6) = 11(\ell-3)$. Úvahou o deliteľnosti nesúdeliteľnými číslami 5 a 11 zistíme, že všetky celočíselné riešenia takej rovnice majú tvar $k = 6+11n$ a $\ell = 3 + 5n$, pričom $n \in \mathbb{Z}$. Dosadením do príslušného vzťahu pre x tak dostávame prvú skupinu riešení

$$x = \frac{3\pi}{2} + 10k\pi = \frac{3\pi}{2} + 10(6 + 11n)\pi = 61{,}5\pi + 110n\pi.$$

Podobne z druhej rovnice $5k - 5 = 11\ell$ upravenej na tvar $5(k - 1) = 11\ell$ zistíme, že $k = 1 + 11n$, $\ell = 5n$, pričom $n \in \mathbb{Z}$. Takže druhá skupina riešení má vyjadrenie

$$x = -\frac{7\pi}{2} + 10k\pi = -\frac{7\pi}{2} + 10(1 + 11n)\pi = 6{,}5\pi + 110n\pi.$$

Záver. Všetky riešenia danej rovnice sú dané vzťahmi

$$x = 61{,}5\pi + 110n\pi \quad \text{a} \quad x = 6{,}5\pi + 110n\pi, \quad \text{pričom } n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Pretože $61{,}5 - 6{,}5 = 55 = 110/2$, dajú sa všetky riešenia zapísať jedným vzťahom

$$x = 6{,}5\pi + 55n\pi, \quad \text{pričom } n \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Iné riešenie. Vďaka goniometrickému vzorcu

$$\sin A \sin B = \frac{\cos(A - B) - \cos(A + B)}{2}$$

sa dá rovnica $1 + \sin A \sin B = 0$ prepísať na tvar

$$\cos(A + B) - \cos(A - B) = 2.$$

Vzhľadom na obor hodnôt funkcie kosínus je ostatná rovnosť splnená práve vtedy, keď platí $\cos(A + B) = 1$ a $\cos(A - B) = -1$. Pre zlomky A, B z pôvodnej rovnice tak dostávame sústavu rovností

$$\begin{aligned} A + B &= \frac{x+\pi}{5} + \frac{x-\pi}{11} = 2k\pi, \\ A - B &= \frac{x+\pi}{5} - \frac{x-\pi}{11} = \pi + 2\ell\pi, \end{aligned}$$

ktoré musia platiť pre vhodné čísla $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Sčítaním a odčítaním dostaneme

$$\frac{x+\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + (k+\ell)\pi \qquad \text{a} \qquad \frac{x-\pi}{11} = -\frac{\pi}{2} + (k-\ell)\pi,$$

odkiaľ dvoma spôsobmi vyjadríme neznámu x:

$$x = \frac{3\pi}{2} + 5(k+\ell)\pi = -\frac{9\pi}{2} + 11(k-\ell)\pi.$$

Ľahko zistíme, že čísla k, ℓ sú zviazané podmienkou $3(k-1)=8\ell$, čo znamená, že $\ell=3n$ a $k=8n+1$ pre vhodné $n\in\mathbb{Z}$. Dosadením do vzťahu pre x tak dostaneme vyjadrenie

$$x=\frac{13\pi}{2}+55n\pi=6{,}5\pi+55n\pi,$$

ktoré je rovnaké, ako v prvom riešení.

A – II – 1

Hľadáme celé čísla a, b, pre ktoré $(a+b)^2+a(a+b)+b=0$. To je vzhľadom na neznámu b kvadratická rovnica $b^2+(3a+1)b+2a^2=0$ s celočíselnými koeficientmi. Celočíselný koreň má iba v prípade, že jej diskriminant

$$D=(3a+1)^2-4\cdot 2a^2=(a+3)^2-8$$

je úplný štvorec. Ten je pritom o osem menší ako iný úplný štvorec $(a+3)^2$. Ako ľahko zistíme (rozdiely druhých mocnín dvoch susedných prirodzených čísel postupne rastú), rozdiel 8 majú iba úplné štvorce 9 a 1, takže $(a+3)^2=9$, odkiaľ vyplýva $a=-6$ alebo $a=0$. Pre $a=-6$ vychádza $b=8$ a $b=9$, pre $a=0$ vychádza $b=0$ a $b=-1$. Dostávame tak štyri riešenia: (a,b) je jedna z dvojíc $(-6,8)$, $(-6,9)$, $(0,0)$, $(0,-1)$.

Poznámky. Ak za neznámu namiesto b zvolíme a, vyjde rovnica $2a^2+3ba+(b^2+{}$ ${}+b)=0$ s diskriminantom $D'=9b^2-8\cdot(b^2+b)=(b-4)^2-16$; úplné štvorce líšiace sa o 16 sú iba 0, 16 a 9, 25.

Úloha nájsť dva úplné štvorce x^2 a y^2 s daným rozdielom d sa pre malé hodnoty d (ako $d=8$ alebo $d=16$ v našom prípade) dá vyriešiť otestovaním niekoľkých prvých štvorcov 0, 1, 4, 9, … Pre ľubovoľné prirodzené d možno postupovať tak, že rovnicu $x^2-y^2=d$ upravíme na $(x-y)(x+y)=d$ a vypíšeme všetky rozklady daného čísla d na súčin d_1d_2 dvoch celočíselných činiteľov; z rovníc $d_1=x-y$, $d_2=x+y$ potom vypočítame príslušné x a y.

A – II – 2

Najskôr dokážeme, že pre členy skúmanej postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí: rovnosť $a_n=0$ je splnená pre niektoré prirodzené n práve vtedy, keď pre to isté n platí $a_{n+3}=0$. Skutočne, ak $a_n=0$, tak menovatele zlomkov v zadanej rovnosti sú navzájom opačné (nenulové) čísla, takže také musia byť aj ich čitatele. Z rovnosti

$$a_{n+3}-a_{n+2}=-(a_{n+3}+a_{n+2})$$

už vyplýva $a_{n+3}=0$. Naopak, ak platí $a_{n+3}=0$, sú čitatele spomenutých zlomkov navzájom opačné čísla, takže také musia byť aj ich menovatele, odkiaľ $a_n=0$.

Dokázaná vlastnosť má tento dôsledok: z podmienky $a_{33}\neq 0$ vyplýva $a_{3k}\neq 0$ (pre každé $k\geqq 1$), z $a_{22}\neq 0$ vyplýva $a_{3k+1}\neq 0$ a z $a_{11}\neq 0$ vyplýva $a_{3k+2}\neq 0$ (vždy pre každé $k\geqq 0$). Spolu vychádza, že *žiadny člen a_n skúmanej postupnosti nie je rovný nule.*

Z rovnosti zo zadania vyplýva rovnosť

$$(a_{n+3} - a_{n+2})(a_n + a_{n+1}) = (a_{n+3} + a_{n+2})(a_n - a_{n+1}),$$

z ktorej po roznásobení a následnom zjednodušení dostaneme (pre ľubovoľné prirodzené n)

$$a_{n+1}a_{n+3} = a_n a_{n+2}.$$

Ak zväčšíme n o 1, dostaneme analogický vzťah, ktorý platí pre ľubovoľné nezáporné celé n:

$$a_{n+2}a_{n+4} = a_{n+1}a_{n+3}.$$

Keď vynásobíme obe rovnosti a výsledok vykrátime (*nenulovým*) číslom $a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}$, vyjde $a_{n+4} = a_n$, t. j. daná postupnosť má periódu 4. Preto $a_1 = a_{33} = 1$, $a_2 = a_{22} = 2$, $a_3 = a_{11} = 4$, $a_4 = a_1 a_3 / a_2 = 2$, teda

$$a_1^k + a_2^k + \dots + a_{100}^k = 25(1^k + 2^k + 4^k + 2^k) = \bigl(5(1 + 2^k)\bigr)^2.$$

Tým je dôkaz hotový.

A – II – 3

Dané štyri body A, B, X, Y ležia na kružnici (obr. 17) práve vtedy, keď

$$|PA| \cdot |PX| = |PB| \cdot |PY|.$$

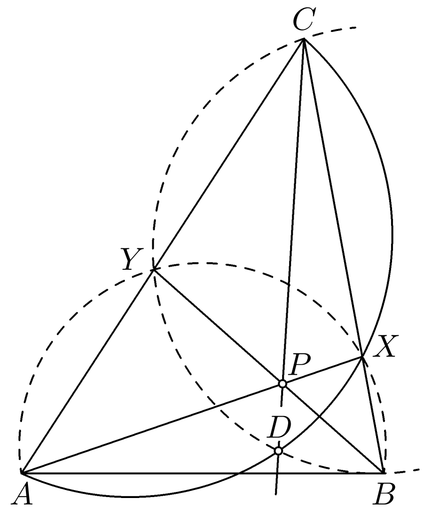
Kružnica opísaná trojuholníku ACX pretne polpriamku opačnú k polpriamke PC v bode, ktorý označíme D. Pre tento bod platí

$$|PA| \cdot |PX| = |PC| \cdot |PD|.$$

Rovnosť z prvej vety riešenia teda nastane práve vtedy, keď platí

$$|PB| \cdot |PY| = |PC| \cdot |PD|.$$

Táto rovnosť je splnená práve vtedy, keď bod D leží na kružnici opísanej trojuholníku BCY, teda práve vtedy, keď je bod $D \neq C$ druhým priesečníkom kružníc opísaných trojuholníkom ACX a BCY. Dôkaz je hotový.



Obr. 17

Poznámka. Úlohu možno ihneď vyriešiť na základe poznatku o tom, ako vyzerá množina všetkých bodov, ktoré majú rovnakú mocnosť k dvom daným kružniciam. Je to vždy priamka (nazývaná chordála), ktorá je kolmá na spojnicu stredov oboch kružníc a prechádza ich spoločnými bodmi (pokiaľ existujú). Rovnosť z prvej vety riešenia preto vyjadruje práve to, že bod P leží na chordále kružníc opísaných trojuholníkom ACX a BCY.

A – II – 4

Najskôr si uvedomme, že s každým reálnym riešením (x, y) danej sústavy rovníc sú jej riešeniami aj dvojice $(x, -y)$, $(-x, y)$ a $(-x, -y)$. Stačí sa preto obmedziť na riešenia v obore nezáporných reálnych čísel. Navyše s každým riešením (x, y) je riešením danej sústavy aj dvojica (y, x). Môžeme preto ďalej predpokladať, že $0 \leqq x \leqq y$.

Prepíšme najskôr obe rovnice sústavy pomocou známeho vzťahu $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$:

$$\sin^2 x + 1 - \sin^2 y = y^2,$$
$$\sin^2 y + 1 - \sin^2 x = x^2.$$

Sčítaním oboch rovníc potom dostaneme

$$x^2 + y^2 = 2. \tag{1}$$

Keď odčítame druhú rovnicu od prvej, dostaneme

$$2\sin^2 x - 2\sin^2 y = y^2 - x^2,$$

čiže

$$2(\sin x + \sin y)(\sin x - \sin y) = y^2 - x^2. \tag{2}$$

Pri uvedenom predpoklade $0 \leqq x \leqq y$ zo vzťahu (1) navyše vyplýva, že $0 \leqq x \leqq \leqq y \leqq \sqrt{2} < \pi/2$, a pretože funkcia sínus je na intervale $\langle 0, \pi/2)$ nezáporná a rastúca, vidíme, že pre také reálne čísla x a y je ľavá strana rovnice (2) nekladná, zatiaľ čo pravá strana je nezáporná. To znamená, že musí platiť $y^2 - x^2 = 0$, čo za uvedených predpokladov dáva $x = y$ a spolu s (1) tak máme $x = y = 1$.

V obore nezáporných reálnych čísel má daná sústava rovníc jediné riešenie, a to $(x, y) = (1, 1)$.

Záver. Daná sústava rovníc má práve štyri riešenia v obore reálnych čísel. Sú nimi nasledujúce dvojice: $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ a $(-1, -1)$.

A – III – 1

Dokážeme, že člen a_7 je vždy zložené číslo deliteľné jedenástimi. Kľúčom k riešeniu úlohy je kritérium deliteľnosti jedenástimi. Ak $\overline{c_k c_{k-1} \ldots c_1 c_0}$ je zápis čísla m v desiatkovej sústave, dáva číslo m po delení jedenástimi rovnaký zvyšok ako striedavý súčet jeho číslic:

$$\mathrm{zv}(m) = c_0 - c_1 + c_2 - \ldots + (-1)^k c_k.$$

Pre zvyšok čísla b_n, ktoré má opačné poradie číslic ako číslo a_n, teda platí, že $\mathrm{zv}(b_n) = \pm \mathrm{zv}(a_n)$ podľa toho, či je počet číslic čísla a_n nepárny alebo párny. Preto ak je niektorý člen uvažovanej postupnosti deliteľný jedenástimi, sú jedenástimi deliteľné aj všetky nasledujúce členy. Navyše akonáhle má nejaký člen a_n uvažovanej postupnosti párny počet číslic, platí $\mathrm{zv}(a_n) = -\mathrm{zv}(b_n)$, takže $a_{n+1} = a_n + b_n$ už je deliteľné jedenástimi (a rovnako aj ďalšie členy).

Postupnosť (a_n) je zrejme rastúca. Ak má člen a_1 párny počet číslic, bude už člen a_2 zložené číslo deliteľné jedenástimi s výnimkou prípadu $a_1 = 10$, kedy však $a_3 = 22$. Stačí teda ukázať, že aj pre čísla a_1 s nepárnym počtom číslic bude medzi prvými šiestimi členmi postupnosti vždy aspoň jeden člen s párnym počtom číslic. Dokážeme to sporom v nasledujúcom odstavci.

Predpokladajme naopak, že všetky čísla $a_1, a_2, \ldots, a_6$ majú nepárny počet číslic. Označme c prvú a d poslednú číslicu čísla a_1, takže $1 \leqq c \leqq 9$ a $0 \leqq d \leqq 9$ (v prípade jednociferného a_1 položíme $c = d$). Číslo b_1 potom bude formálne začínať číslicou d a končiť číslicou c, a pretože predpokladáme, že číslo $a_2 = a_1 + b_1$ má tiež nepárny, teda rovnaký počet číslic, musí nutne byť $c + d < 10$. To bude teda číslica na jeho poslednom mieste, zatiaľ čo na prvom mieste bude stáť $c + d$ alebo $c + d + 1$ (podľa toho, či pri sčítaní došlo na predposlednom mieste k prechodu cez desiatku), v každom prípade bude na prvom mieste číslica aspoň $c + d$. Podobne postupne zistíme, že prvá číslica čísla $a_3 = a_2 + b_2$ bude aspoň $2(c+d)$, prvá číslica čísla $a_4 = a_3 + b_3$ bude aspoň $4(c+d)$, prvá číslica čísla $a_5 = a_4 + b_4$ bude aspoň $8(c + d)$ a prvá číslica čísla $a_6 = a_5 + b_5$ bude aspoň $16(c+d)$. Pretože $1 \leqq c+d < 10$, nemôže už zrejme platiť $16(c+d) < 10$. Aspoň v jednom z čísel $a_2, a_3, \ldots, a_6$ sa teda počet číslic zvýšil z nepárneho počtu na párny.

Tým je úloha vyriešená. Dokázali sme, že a_7 nie je nikdy prvočíslo.

Poznámka. Pre $a_1 = 10\,220$ vyjde $a_6 = 185\,767$, čo je prvočíslo.

A – III – 2

Ukážeme, že z predpokladu úlohy vyplývajú silnejšie odhady

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leqq \frac{m}{n} \leqq 2 - \frac{2}{n}. \tag{1}$$

Danú rovnicu najskôr upravíme na tvar

$$(x + m - 1)(x + n) = m.$$

Ak v tejto rovnosti je x celé číslo, dostávame rozklad prirodzeného čísla m na súčin dvoch celých čísel, ktoré teda ležia obe buď v intervale $\langle 1, m\rangle$, alebo v intervale $\langle -m, -1\rangle$. V každom prípade rozdiel týchto dvoch čísel neprevyšuje (spoločnú) dĺžku oboch intervalov:

$$(x + n) - (x + m - 1) \leqq m - 1, \quad \text{čiže} \quad n \leqq 2m - 2,$$

odkiaľ vyplýva dolný odhad (1). Vzhľadom na symetriu čísel m a n platí tiež nerovnosť $m \leqq 2n - 2$, z ktorej dostaneme horný odhad (1).

Iné riešenie. Vzhľadom na symetriu sa stačí zaoberať prípadom $m \geqq n$ a dokázať horný odhad (1) z prvého riešenia, teda nerovnosť $m \leqq 2n - 2$.

Daná rovnica má tvar $x^2 + (m + n - 1)x + mn - m - n = 0$ a má diskriminant

$$\begin{aligned} D &= (m + n - 1)^2 - 4(mn - m - n) = m^2 + n^2 - 2mn + 2m + 2n + 1 = \\ &= (m - n + 1)^2 + 4n. \end{aligned}$$

Ten musí byť druhou mocninou celého čísla, ak má mať daná rovnica celočíselné riešenie. Pretože $4n$ je kladné párne číslo, je číslo D väčšie ako mocnina $(m-n+1)^2$ a má rovnakú paritu ako jej základ $(m - n + 1)$, ktorý je kladný (keďže uvažujeme len prípad $m \geqq n$). Preto musí platiť $D = k^2$, kde k je celé číslo spĺňajúce podmienky $k > m - n + 1 > 0$ a $k \equiv m - n + 1 \pmod 2$. To znamená, že $k \geqq m - n + 3$, takže platí

$$\begin{aligned} D &= (m - n + 1)^2 + 4n = k^2 \geqq (m - n + 3)^2 = (m - n + 1 + 2)^2 = \\ &= (m - n + 1)^2 + 4(m - n + 1) + 4. \end{aligned}$$

Odtiaľ vyplýva nerovnosť $4n \geqq 4(m - n + 1) + 4$, čiže $m \leqq 2n - 2$, čo sme mali dokázať.

Poznámky. Pretože dvojice tvaru $(m, n) = (2n-2, n)$ a $(m, n) = (m, 2m-2)$ vyhovujú podmienke úlohy, sú odhady (1) najlepšie možné.

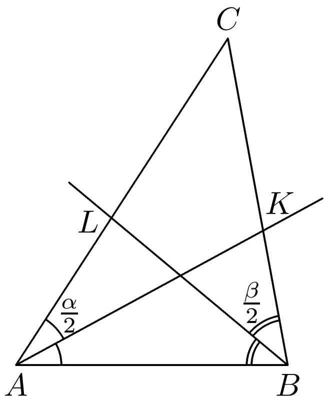
Je možné popísať všetky dvojice prirodzených čísel (m, n), ktoré vyhovujú podmienke úlohy, a to spôsobom uvedeným v nasledujúcom tvrdení, ktoré uvedieme bez dôkazu.

Veta. *Nech m a n sú celé čísla. Rovnica $(x+m)(x+n) = x+m+n$ má aspoň jedno celočíselné riešenie práve vtedy, keď sú čísla m, n tvaru*

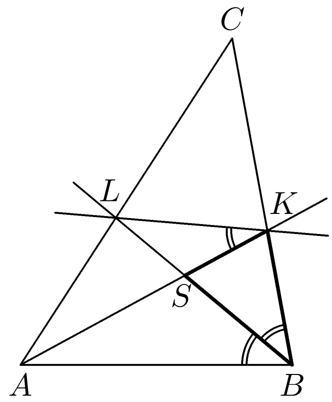
$$m = (a-1)b \quad \text{a} \quad n = a(b-1), \quad \text{pričom} \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

A – III – 3

Označme uhly v trojuholníku ABC zvyčajným spôsobom. Z vlastností bodov K a L je zrejmé (obr. 18), že body A, B, K, L ležia na jednej kružnici práve vtedy, keď $|\sphericalangle KAL| = |\sphericalangle KBL|$, t. j. práve vtedy, keď $\alpha = \beta$.



Obr. 18



Obr. 19

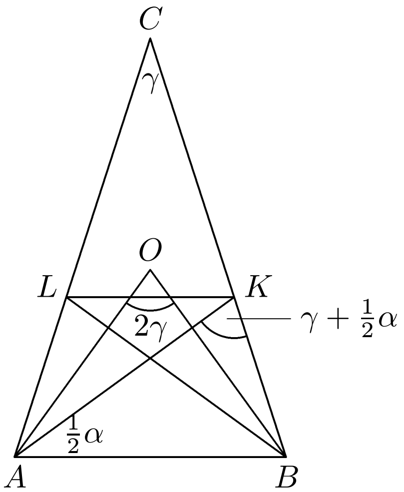
Priamka KL sa dotýka kružnice opísanej trojuholníku BKS (nutne v bode K) práve vtedy, keď sa rovnajú úsekový a obvodový uhol príslušnej tetivy KS (obr. 19): $|\sphericalangle LKA| = |\sphericalangle LBK| = \beta/2 = |\sphericalangle LBA|$. Posledná rovnosť je však ekvivalentná s tým, že body A, B, K, L ležia na jednej kružnici. Ako už vieme, to nastane práve vtedy, keď $\alpha = \beta$. (Zo symetrie je zrejmé, že je to zároveň ekvivalentné tomu, že sa priamka KL dotýka kružnice opísanej trojuholníku ALS.)

Z uvedených výsledkov vyplýva, že svoje ďalšie úvahy môžeme obmedziť na rovnoramenné trojuholníky ABC so základňou AB. Pozrime sa najskôr, kedy kružnica opísaná štvoruholníku $ABKL$ obsahuje bod O. Stredový uhol AOB v kružnici opísanej trojuholníku ABC má veľkosť 2γ, zatiaľ čo veľkosť uhla AKB je $180° - \alpha/2 - \beta = \gamma + \alpha/2$ (obr. 20). Bod O pritom nemôže ležať na strane AB (keď je uhol γ pravý) ani v polrovine opačnej k ABC (keď je uhol γ tupý), pretože v tom prípade je

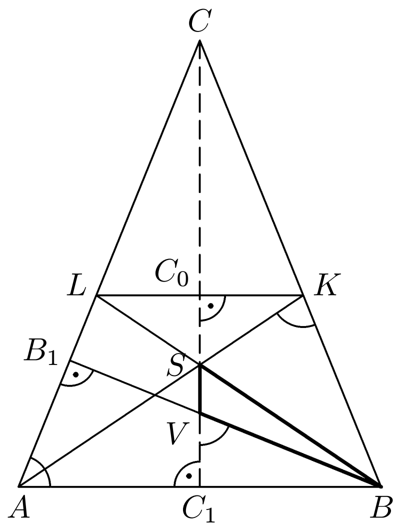
$$|\sphericalangle AOB| + |\sphericalangle AKB| = (360° - 2\gamma) + (\gamma + \tfrac{1}{2}\alpha) = 180° + \tfrac{3}{2}\alpha + \beta > 180°.$$

Body A, B, K, O teda ležia na jednej kružnici práve vtedy, keď

$$2\gamma = \gamma + \tfrac{1}{2}\alpha \quad \text{čiže} \quad \alpha = \beta = 2\gamma = 72°.$$



Obr. 20



Obr. 21

Ostáva zodpovedať otázku, kedy sa kružnica opísaná trojuholníku BVS dotýka priamky KL. V polrovine KLB existujú dve kružnice, ktoré obsahujú body B a S a dotýkajú sa priamky KL (Apollóniova úloha, pre bod dotyku T z mocnosti bodu L k takej kružnici platí $|LT|^2 = |LS| \cdot |LB|$). Jednu takú kružnicu už poznáme, je to kružnica opísaná trojuholníku BKS, ktorá sa priamky KL dotýka v bode K. Druhá kružnica sa teda dotýka priamky KL v bode K' súmerne združenom s K podľa stredu L. Ak má kružnica ℓ opísaná trojuholníku BVS ležať v polrovine KLB, musí v nej ležať aj jej bod V, ktorý je potom nutne vnútorným bodom úsečky C_0C_1, ktorá je časťou osi úsečky AB (obr. 21). Uhol SBV je teda ostrý (jeho veľkosť je najviac $\beta/2$), preto stred kružnice ℓ leží v polrovine C_0C_1B a leží tam aj jeho kolmý priemet (prípadný bod dotyku) na priamku KL. Kružnica ℓ sa teda dotýka priamky KL jedine v prípade, keď je to kružnica opísaná trojuholníku BKS, teda keď body B, K, S, V ležia na jednej kružnici. To nastane, práve vtedy, keď $|\sphericalangle C_1VB| = |\sphericalangle SKB|$ (to platí bez ohľadu na to, či bod V leží medzi bodmi C_1, S, alebo medzi bodmi C_0, S; obr. 21). Z pravouhlých trojuholníkov ABB_1 a BVC_1 vyplýva $|\sphericalangle C_1VB| = \alpha$, takže rovnosť $|\sphericalangle C_1VB| = |\sphericalangle SKB|$ platí práve vtedy, keď

$$\alpha = \gamma + \tfrac{1}{2}\alpha \quad \text{čiže} \quad \alpha = \beta = 2\gamma = 72^\circ.$$

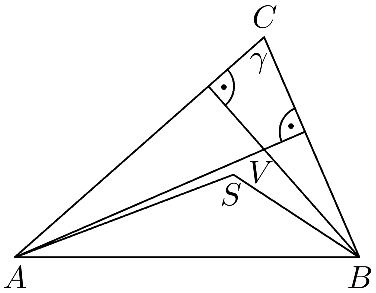
Dokázali sme, že obe podmienky a) a b) sú ekvivalentné s tým, že trojuholník ABC je rovnoramenný s uhlami $\alpha = \beta = 72^\circ$ a $\gamma = 36^\circ$.

A – III – 4

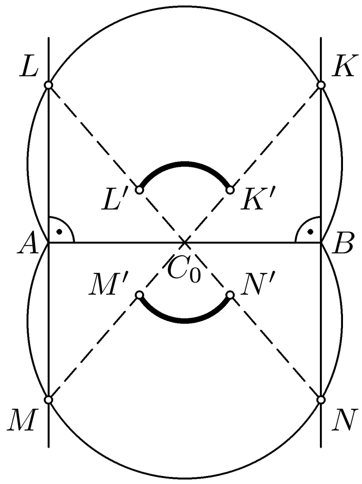
Pretože trojuholník ABC je ostrouhlý, ležia body V a S vnútri neho. Ak označíme veľkosti uhlov v danom trojuholníku zvyčajným spôsobom, platí (obr. 22)

$$|\sphericalangle AVB| = 180^\circ - \gamma \qquad \text{a} \qquad |\sphericalangle ASB| = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\gamma.$$

Body A, B, V a S teda ležia na jednej kružnici práve vtedy, keď $|\sphericalangle AVB| = |\sphericalangle ASB|$, čo je podľa uvedených vzťahov ekvivalentné s rovnosťou $\gamma = 60°$. Vrchol C tak nutne leží na niektorom z dvoch kružnicových oblúkov, z ktorých je vidno úsečku AB pod uhlom $60°$. Pretože je trojuholník ABC ostrouhlý, musí navyše vrchol C ležať vnútri pásu ohraničeného kolmicami na priamku AB v bodoch A a B. Vrchol C je teda vnútorným bodom takto ohraničených kružnicových oblúkov KL a MN (obr. 23).



Obr. 22



Obr. 23

Označme ďalej C_0 stred úsečky AB. Pretože ťažisko T každého z uvažovaných trojuholníkov ABC je obrazom bodu C v rovnoľahlosti so stredom C_0 a koeficientom $\frac{1}{3}$, je bod T vnútorným bodom jedného z oblúkov $K'L'$ alebo $M'N'$, ktoré sú obrazmi oblúka KL a MN v uvažovanej rovnoľahlosti.

Pretože spomenutá rovnoľahlosť je vzájomne jednoznačné zobrazenie, je zrejmé, že každý vnútorný bod oblúka $K'L'$ alebo $M'N'$ má požadovanú vlastnosť, t. j. je ťažiskom ostrouhlého trojuholníka ABC s uhlom $60°$ pri vrchole C, ktorého zodpovedajúce body V a S ležia na jednej kružnici s vrcholmi A a B.

A – III – 5

Hľadajme trojice p, q, r podľa toho, ktoré z týchto troch čísel je najväčšie:

- ▷ *Najväčšie je p.* Potom z podmienky $p \mid q + r$ a z nerovnosti $q + r < 2p$ vyplýva $q + r = p$. Z druhej podmienky potom dostaneme $q \mid r + 2p = 3r + 2q$, teda $q \mid 3r$, čo vzhľadom na rôznosť prvočísel znamená, že $q = 3$. Teda $p = r + 3$ a posledná podmienka hovorí, že $r \mid r + 12$, čiže $r \mid 12$, teda $r = 2$ (prvočísla majú byť rôzne). Takže $p = 5$. Táto trojica naozaj spĺňa podmienky zo zadania.
- ▷ *Najväčšie je q.* Potom podmienka $q \mid r+2p$ a nerovnosť $r+2p < 3q$ dávajú $r+2p = q$ alebo $r + 2p = 2q$.

  Ak $2q = r + 2p$, musí byť r párne. Teda $r = 2$ a z rovnosti $2q = 2 + 2p$ vyplýva $q = p + 1$, čo pre prvočísla p, q väčšie ako $r = 2$ nie je možné.

Ak $q = r+2p$, prvá podmienka hovorí, že $p \mid 2r+2p$, teda $p \mid 2r$, čiže $p = 2$. Posledná podmienka potom dáva $r \mid p + 3q = 3r + 7p = 3r + 14$, teda $r \mid 14$, takže $r = 7$. Potom $q = r + 2p = 11$. Táto trojica tiež vyhovuje zadaniu.

▷ *Najväčšie je* r. Potom porovnáme podmienku $r \mid p + 3q$ a nerovnosť $p + 3q < 4r$.
Keby bolo $p + 3q = 3r$, bolo by $p = 3(r - q)$, teda $p = 3$, $r - q = 1$, takže $r = 3$ a $q = 2$, čo nie sú tri rôzne prvočísla.
Ak $p + 3q = 2r$, dostávame z prvej podmienky $p \mid 2(q + r) = p + 5q$, takže $p \mid 5q$ a $p = 5$. Druhá podmienka potom dáva $q \mid 2(r + 2p) = 2r + 20 = 3q + 25$, teda $q = 5$ a výslednú trojicu netvoria rôzne prvočísla.
Napokon nech $p + 3q = r$. Prvá podmienka potom dáva $p \mid p + 4q$, takže $p \mid 4q$ a $p = 2$. Druhá podmienka hovorí, že $q \mid r + 2p = 3q + 6$, teda $q \mid 6$ a $q = 3$, lebo $q \neq p = 2$. Potom $r = p + 3q = 11$. Táto trojica tiež vyhovuje zadaniu.

Riešením úlohy sú tri trojice prvočísel (p, q, r), a to $(5, 3, 2)$, $(2, 11, 7)$ a $(2, 3, 11)$.

A – III – 6

Pre každé prípustné φ platí

$$2 \operatorname{cotg}^2 2\varphi = 2\left(\frac{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{2\sin\varphi\cos\varphi}\right)^2 = \frac{1}{2}(\operatorname{tg}^2\varphi + \operatorname{cotg}^2\varphi - 2).$$

Položme $\operatorname{tg}^2 x = a$, $\operatorname{tg}^2 y = b$ a $\operatorname{tg}^2 z = c$, pričom a, b, c sú kladné reálne čísla. Danú sústavu tak prevedieme na tvar

$$\begin{aligned} a + \frac{1}{2}\Big(b + \frac{1}{b}\Big) &= 2,\\ b + \frac{1}{2}\Big(c + \frac{1}{c}\Big) &= 2,\\ c + \frac{1}{2}\Big(a + \frac{1}{a}\Big) &= 2. \end{aligned} \tag{1}$$

Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $a \geqq b \geqq c$ (pri inom usporiadaní úlohu vyriešime podobne). Pri takomto usporiadaní z predchádzajúcej sústavy rovníc vyplýva

$$b + \frac{1}{b} \leqq c + \frac{1}{c} \leqq a + \frac{1}{a}.$$

Pretože pre každé kladné x platí $x + 1/x \geqq 2$, zo sústavy (1) navyše vyplýva $0 < a, b, c \leqq 1$. Funkcia $f(x) = x + 1/x$ je však na intervale $(0; 1\rangle$ klesajúca, preto platia aj nerovnosti

$$a + \frac{1}{a} \leqq b + \frac{1}{b} \leqq c + \frac{1}{c}.$$

To spolu s predchádzajúcimi nerovnosťami dáva $a = b = c$.

Ostáva tak určiť všetky $u \in (0; 1\rangle$, ktoré sú riešením rovnice

$$u + \frac{1}{2}\Big(u + \frac{1}{u}\Big) = 2.$$

Po jednoduchej úprave dostaneme kvadratickú rovnicu

$$3u^2 - 4u + 1 = 0, \quad \text{t. j.} \quad (u-1)(3u-1) = 0.$$

Táto kvadratická rovnica má práve dva kladné reálne korene $u_1 = 1$ a $u_2 = 1/3$. Vzhľadom na použité substitúcie a periodickosť funkcie tangens sú riešením danej sústavy rovníc práve nasledujúce trojice (x, y, z) reálnych čísel

$$\left(\frac{\pi}{4} + k_1\,\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + k_2\,\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + k_3\,\frac{\pi}{2}\right) \ \text{ a } \ \left(\pm\frac{\pi}{6} + k_1\pi, \pm\frac{\pi}{6} + k_2\pi, \pm\frac{\pi}{6} + k_3\pi\right),$$

pričom k_1, k_2, k_3 sú ľubovoľné celé čísla a tri znamienka v trojici druhého typu sú vybrané ľubovoľne, t. j. navzájom nezávisle.

Prípravné sústredenia pred IMO

Pred medzinárodnou matematickou olympiádou (IMO) sa každoročne koná jedno výberové a jedno prípravné sústredenie pre najlepších riešiteľov tretieho kola kategórie A. Tento rok sa navyše uskutočnilo po prvý raz aj spoločné prípravné sústredenie českého a slovenského družstva.

Na výberovom sústredení pred IMO sa zúčastnilo 12 súťažiacich, najúspešnejších riešiteľov tretieho kola MO kategórie A. Sústredenie sa konalo v dňoch 23. – 29. 4. 2006 v Bratislave. Úlohy zadávali lektori z FMFI UK Bratislava:

Ján Mazák, úlohy 1 – 4,
Mgr. Tomáš Jurík, úlohy 5 – 7,
Mgr. Peter Novotný, úlohy 8 – 10,
Erika Trojáková, úlohy 11 – 14,
Martin Potočný, úlohy 15 – 17.

Každý deň študenti riešili sériu troch či štyroch úloh pri podobných podmienkach ako na IMO. V poobedňajších hodinách sa konal spoločný rozbor úloh s lektorom. Na konci sústredenia sa získané body za jednotlivé dni sčítali a s prihliadnutím na výsledky tretieho kola MO bolo vybrané šesťčlenné družstvo a náhradník pre účasť na IMO.

Výsledky sústredenia:

Ján Mikuláš	42	*Michal Takács*	23
Ondrej Budáč	39	*Michal Szabados*	21,5
Jaroslav Knebl	39	*Kristián Kacz*	19
István Estélyi	35	*Jozef Minár*	18
Samuel Hapák	31,5	*Vladislav Ujházi*	18
Jakub Beran	25	*Vladimír Boža*	17,5

Poradie po zohľadnení výsledkov CKMO:

1.	*Ondrej Budáč*	80	7.	*Jakub Beran*	49
2.	*Ján Mikuláš*	71	8.	*Michal Szabados*	40,5
3.	*Jaroslav Knebl*	69	9.	*Vladimír Boža*	38,5
4.	*István Estélyi*	61	10.	*Kristián Kacz*	38
5.	*Michal Takács*	52		*Vladislav Ujházi*	38
6.	*Samuel Hapák*	51,5	12.	*Jozef Minár*	37

Druhé sústredenie sa konalo v dňoch 11. – 17. 6. 2006 v Bratislave. Sústredenie bolo zamerané obzvlášť na prípravu reprezentačného družstva. Lektormi boli

Mgr. Peter Novotný, FMFI UK Bratislava (Teória čísel, Geometria),
Michal Burger, FMFI UK Bratislava (Kombinatorika),
Mgr. Juraj Földes, University of Minnesota, USA (Algebra),
Mgr. Richard Kollár, PhD., University of Michigan, USA (Ako písať riešenia).

Prvé spoločné sústredenie českého a slovenského družstva sa uskutočnilo v dňoch 18. – 23. 6. 2006 v ČR v obci Hluk pri Uherskom Hradišti. Organizátormi boli Společnost Otakara Borůvky a Gymnázium Uherské Hradiště. Celé sústredenie bolo finančne zabezpečené z neštátnych prostriedkov. Pedagogický dozor slovenským (a na mieste aj českým) študentom robil *Mgr. Michal Valko*, študent na University of Pittsburgh v USA. Odborné prednášky viedli

Doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., MÚ AV ČR, Brno (Teória čísel a polynómy),
RNDr. Karel Horák, CSc., MÚ AV ČR, Praha (Syntetická planimetria),
RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., PF UP, Olomouc (Nerovnosti v geometrii a algebre),
Mgr. Martin Panák, PhD., MÚ AV ČR, Brno (Kombinatorika),
RNDr. Petr Kaňovský, Brno (Funkcionálne rovnice).

Zadania súťažných úloh výberového sústredenia pred IMO

1. Ciferný súčet čísla N je 100, ciferný súčet čísla $5N$ je 50. Dokážte, že N je párne.

2. Nech AA' a BB' sú výšky ostrouhlého trojuholníka ABC. Bod D leží na oblúku ACB kružnice opísanej trojuholníku ABC. Nech P je priesečník priamok AA' a BD, nech Q je priesečník priamok BB' a AD. Dokážte, že priamka $A'B'$ prechádza stredom úsečky PQ.

3. Niekoľko jabĺk a pomarančov je rozmiestnených v 99 škatuliach. Dokážte, že vieme vybrať 50 škatúľ tak, aby obsahovali aspoň polovicu všetkých pomarančov a aspoň polovicu všetkých jabĺk.

4. Vnútri štvorca so stranou dĺžky 6 sa nachádzajú body A, B, C, D tak, že vzdialenosť ľubovoľných dvoch z týchto bodov je aspoň 5. Dokážte, že body A, B, C, D vytvárajú konvexný štvoruholník s obsahom aspoň 21.

5. V trojuholníku ABC, pre ktorý platí $|AB| + |BC| = 3|AC|$, sa jemu vpísaná kružnica so stredom v bode I dotýka strán AB a BC v bodoch D a E. Obrazy bodov D, E v stredovej súmernosti podľa bodu I označme K, L. Dokážte, že štvoruholník $ACKL$ je tetivový.

6. Ak pre prirodzené čísla a, b platí, že pre každé prirodzené číslo n je číslo $b^n + n$ deliteľné číslom $a^n + n$, tak $a = b$. Dokážte.

7. Pre ľubovoľné reálne čísla $a_i \geqq 1$ $(i = 1, 2, \dots, 2006)$ nájdite najmenšiu možnú hodnotu výrazu

$$\frac{a_1^2 + a_2}{a_1 + a_2^2} + \frac{a_2^2 + a_3}{a_2 + a_3^2} + \dots + \frac{a_{2005}^2 + a_{2006}}{a_{2005} + a_{2006}^2} + \frac{a_{2006}^2 + a_1}{a_{2006} + a_1^2}.$$

8. Nech $\mathbb{R}^+$ je množina všetkých kladných reálnych čísel. Dokážte, že jediná funkcia $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, ktorá spĺňa rovnosť

$$f(x)f(y) = 2f(x + yf(x))$$

pre každú dvojicu kladných reálnych čísel x, y, je konštantná funkcia $f(x) \equiv 2$.

9. Daný je rovnobežník $ABCD$. Priamka ℓ prechádzajúca bodom A pretína polpriamky BC, DC postupne v bodoch X, Y. Označme K, L stredy kružníc pripísaných postupne k stranám BX, DY trojuholníkov ABX, ADY. Dokážte, veľkosť uhla KCL nezávisí na polohe priamky ℓ.

10. Na stole je n mincí ($n \geqq 2$). Každá je z jednej strany biela a z druhej strany čierna. Mince sú na začiatku poukladané v jednom rade bielou stranou nahor. V každom kroku, pokiaľ je to možné, zvolíme jednu mincu otočenú bielou stranou nahor (nie však jednu z dvoch krajných mincí), odložíme ju zo stola preč a obrátime naopak mince, ktoré s odloženou susedili, t. j. najbližšiu mincu napravo a najbližšiu naľavo. Zistite, pre ktoré n môžu (ak robíme správne kroky) na stole ostať len dve krajné mince.

11. Dokážte, že každé prirodzené číslo $k > 1$ má kladný násobok menší ako k^5, ktorého dekadický zápis obsahuje nanajvýš štyri rôzne číslice.

12. Nech $ABCD$ je štvoruholník, pre ktorý platí $|\sphericalangle CBD| = 2|\sphericalangle ADB|$, $|\sphericalangle ABD| = 2|\sphericalangle CDB|$ a $|AB| = |CB|$. Dokážte, že $|AD| = |CD|$.

13. Zistite, či existuje množina 18 po sebe idúcich prirodzených čísel, ktorá sa dá rozdeliť na dve disjunktné množiny A, B tak, že súčin prvkov množiny A sa rovná súčinu prvkov množiny B.

14. Nájdite všetky kvadratické polynómy $p(x)$ tvaru $x^2 + ax + b$ s celočíselnými koeficientmi, pre ktoré existuje polynóm $q(x)$ s celočíselnými koeficientmi taký, že $p(x)q(x)$ je polynóm, ktorého všetky koeficienty sú ± 1.

15. Najnovší výskum v oblasti červích dier konečne umožnil medzigalaktické cestovanie. Do vybudovania GIGANT (Global Intergalactic Network for Travel) sa zapojilo n galaxií $G_1, G_2, \dots, G_n$. Každá dvojica z nich má byť prepojená práve jednou priamou diaľnicou, ktorej dĺžka vyjadrená v jednotkách yt (years of travel) bude prirodzené číslo a nebude presahovať r tak, že
(1) pre každé prirodzené číslo od 1 po r (vrátane) bude aspoň jedna diaľnica s danou dĺžkou;
(2) pre každú okružnú cestu $G_iG_jG_k$ budú dve z týchto troch diaľnic rovnako dlhé a každá z nich bude dlhšia ako tretia.
Úlohy:
(a) Určte najväčšiu hodnotu prirodzeného čísla r, pre ktorú sa dá vybudovať GIGANT.
(b) Koľko rôznych diaľničných sietí sa dá vybudovať pre túto hodnotu?

16. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník $|AB| \neq |AC|$, nech H je jeho ortocentrum a M je stred strany BC. Body D na AB a E na AC sú také, že $|AE| = |AD|$ a D, H, E sú kolineárne. Dokážte, že priamka HM je kolmá na chordálu kružníc opísaných trojuholníkom ABC a ADE.

17. Nájdite všetky prirodzené čísla $n > 1$ také, pre ktoré existuje jediné prirodzené číslo $a \leqq n!$ také, že $a^n + 1$ je deliteľné číslom $n!$.

6. česko–slovensko–poľské stretnutie

Žilina, 25. – 28. 6. 2006

V rámci záverečnej prípravy pred IMO sa uskutočnilo po šiesty krát prípravné stretnutie medzi družstvami Českej republiky, Poľska a Slovenska. Jednotlivé krajiny reprezentovali šestice študentov, ktorí si vybojovali vo svojich krajinách účasť na 47. IMO v Slovinsku.

Súťaž sa uskutočnila 26. a 27. júna na fakulte PEDAS Žilinskej univerzity. Všetky tri reprezentačné družstvá pricestovali na miesto konania už v nedeľu 25. júna. Organizácia a priebeh súťaže zostali nezmenené z predchádzajúcich ročníkov – je prispôsobená štýlu III. kola našej MO a podmienkam IMO. Súťažiacim boli počas dvoch dní predložené dve trojice súťažných úloh, pričom za každú správnu úlohu mohli získať najviac 7 bodov, t. j. celkove 42 bodov (rovnako ako na IMO). Na každú trojicu úloh mali súťažiaci vymedzené 4,5 hodiny čistého času.

Prehľad výsledkov:

Por.	Meno	Štát	1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$
1.	Przemysław Mazur	Poľsko	7	7	6	7	7	7	41
2.	Michał Pilipczuk	Poľsko	7	7	4	7	5	7	37
3.	Zbyněk Konečný	Česká rep.	7	7	0	7	5	1	27
4.	Krzysztof Dorobisz	Poľsko	7	7	0	5	7	0	26
5.	*Jaroslav Knebl*	Slovensko	7	7	0	7	2	0	23
6.	Marcin Dublański	Poľsko	0	7	3	6	6	0	22
7.	*Ján Mikuláš*	Slovensko	7	5	1	7	0	0	20
8.	*Ondrej Budáč*	Slovensko	0	1	5	7	6	0	19
9.	Jakub Opršal	Česká rep.	7	6	1	0	4	0	18
10.	Vojtěch Říha	Česká rep.	2	5	0	5	2	0	14
11.	*Michal Takács*	Slovensko	2	5	0	6	0	0	13
12.	*István Estélyi*	Slovensko	1	1	0	7	2	0	11
	Samuel Hapák	Slovensko	0	6	0	2	3	0	11
14.	Joanna Bogdanowicz	Poľsko	0	7	0	0	0	0	7
	Maciej Skórski	Poľsko	0	7	0	0	0	0	7
16.	Pavel Šalom	Česká rep.	0	5	0	0	0	0	5
17.	Jan Uhlík	Česká rep.	1	0	0	0	0	0	1
18.	Jaroslav Hančl	Česká rep.	0	0	0	0	0	0	0

Štát	1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$
Česká rep.	17	23	1	12	11	1	65
Poľsko	21	42	13	25	25	14	140
Slovensko	17	25	6	36	13	0	97

Opravu riešení zabezpečila medzinárodná porota, ktorú tvorili *RNDr. Pavel Novotný, CSc.* a *Ján Mazák* zo Slovenska, *Mgr. Tomasz Szymczyk*, *Dr. inż. Jacek Uryga* a *Dr. Józef Kalinowski* z Poľska, a *RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.* a *RNDr. Jaroslav Zhouf* z Českej republiky. Organizačne súťaž zabezpečil *doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.*

V budúcom roku sa spoločné prípravné stretnutie uskutoční v Českej republike.

Zadania úloh 6. česko–slovensko–poľského stretnutia

Úloha 1.
Na kružnici s polomerom r leží 5 rôznych bodov A, B, C, D, E v tomto poradí, pričom platí $|AC| = |BD| = |CE| = r$. Dokážte, že trojuholník, ktorého vrcholy sú ortocentrá trojuholníkov ACD, BCD a BCE, je pravouhlý.

(Tomáš Jurík)

Úloha 2.
Okolo okrúhleho stola sedí n detí. Erika je z nich najstaršia a má n cukríkov. Ostatné deti nemajú žiadne cukríky. Erika sa rozhodla, že cukríky rozdelí a stanovila nasledovné pravidlá. V každom kole zdvihnú ruky všetky deti, ktoré majú pri sebe aspoň dva cukríky. Erika jedného z prihlásených vyberie a ten dá každému svojmu susedovi jeden cukrík. (V prvom kole sa teda prihlási iba Erika a dá svojim dvom susedom po cukríku.) Zistite, pre ktoré $n \geqq 3$ môže delenie po konečnom počte kôl skončiť tak, že každé dieťa bude mať práve jeden cukrík.

(Peter Novotný)

Úloha 3.
Súčet štyroch reálnych čísel sa rovná 9, súčet ich druhých mocnín sa rovná 21. Dokážte, že dané čísla možno označiť a, b, c a d tak, aby platila nerovnosť $ab - cd \geqq 2$.

(Jaromír Šimša)

Úloha 4.
Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $k \geqq 1$ existuje také prirodzené číslo n, že v zápise čísla 2^n v desiatkovej sústave sa nachádza blok práve k za sebou idúcich núl, t. j.

$$2^n = \ldots a\underbrace{00\ldots0}_{k \text{ núl}}b\ldots,$$

pričom cifry a, b sú nenulové.

(Peter Novotný)

Úloha 5.
Zistite, koľko existuje postupností celých čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ takých, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$a_n \neq -1 \qquad \text{a} \qquad a_{n+2} = \frac{a_n + 2\,006}{a_{n+1} + 1}.$$

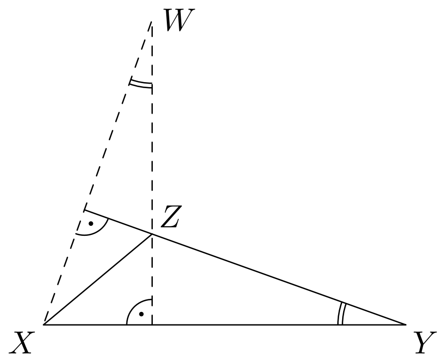
(Peter Novotný)

Úloha 6.
Zistite, či existuje taký konvexný päťuholník $A_1A_2A_3A_4A_5$, že pre každé $i = 1, 2, 3, 4, 5$ sú priamky A_iA_{i+3}, $A_{i+1}A_{i+2}$ rôznobežné a pretínajú sa v bode B_i, pričom body B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 ležia na jednej priamke. (Uvažujeme $A_6 = A_1$, $A_7 = A_2$ a $A_8 = A_3$.)

(Waldemar Pompe)

Riešenia úloh 6. česko–slovensko–poľského stretnutia

Úloha 1.
V ľubovoľnom tupouhlom trojuholníku XYZ s tupým uhlom pri vrchole Z a ortocentrom W majú uhly XYZ a XWZ rovnakú veľkosť, oba sú totiž doplnkom do 90 stupňov k uhlu YXW (obr. 24). Navyše body Y a W ležia v rôznych polrovinách určených priamkou XZ.

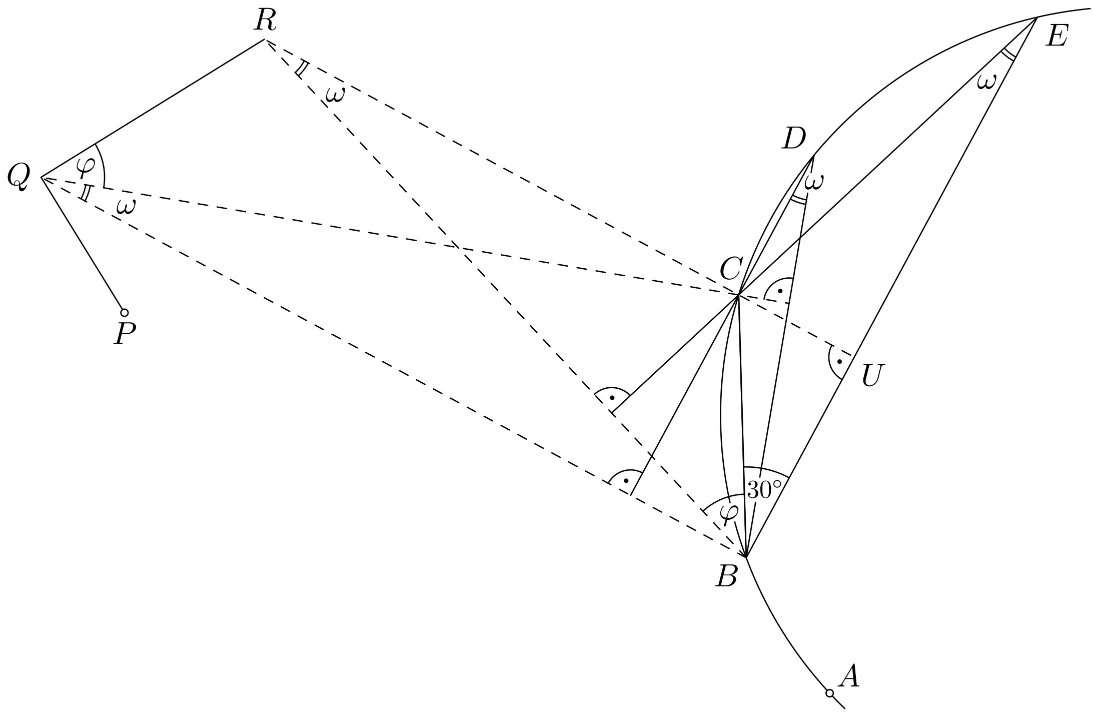


Obr. 24

Označme ortocentrá trojuholníkov zo zadania postupne P, Q, R. Ukážeme, že uhol PQR je pravý. Zrejme všetky tri trojuholníky sú tupouhlé s tupými uhlami pri vrchole C. Body P, Q, R sa teda nachádzajú na predĺženiach výšok z vrcholu C na príslušné strany. Z polohy týchto strán je navyše zrejmé, že polpriamka CQ leží „medzi“ polpriamkami CP a CR, t. j. v uhle PCR. Veľkosť uhla PQR preto môžeme vypočítať ako súčet veľkostí uhlov RQC a PQC (obr. 25). Podľa tvrdenia z úvodného odstavca ležia body Q, R v tej istej polrovine určenej priamkou BC a platí

$$|\sphericalangle BEC| = |\sphericalangle BRC| \qquad \text{a} \qquad |\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle BQC|.$$

Pritom uhly BEC a BDC majú rovnakú veľkosť, lebo sú obvodovými uhlami nad spoločnou tetivou BC. Preto tiež $|\sphericalangle BRC| = |\sphericalangle BQC|$ (označme veľkosť týchto uhlov ω) a štvoruholník $BCRQ$ je tetivový (ľahko možno nahliadnuť, že je to rovnoramenný lichobežník, to však potrebovať nebudeme). Uhly RQC a RBC nad tetivou RC majú



Obr. 25

teda rovnakú veľkosť, ktorú označme φ. Keďže $|EC| = r$, má stredový uhol nad tetivou EC veľkosť $60°$, čiže obvodový uhol EBC má veľkosť $30°$. Ak označíme U pätu výšky na stranu BE v trojuholníku BEC, sčítaním uhlov v pravouhlom trojuholníku BUR dostaneme

$$\omega + \varphi + 30° + 90° = 180°, \qquad \text{t. j.} \qquad |\sphericalangle RQC| = \varphi = 60° - \omega = 60° - |\sphericalangle BDC|.$$

Zrejme analogicky vieme odvodiť $|\sphericalangle PQC| = 60° - |\sphericalangle DBC|$. Spolu máme

$$|\sphericalangle PQR| = |\sphericalangle RQC| + |\sphericalangle PQC| = 120° - (|\sphericalangle BDC| + |\sphericalangle DBC|) = |\sphericalangle BCD| - 60° \quad (1)$$

(pri poslednej úprave sme využili, že súčet vnútorných uhlov v trojuholníku BCD je $180°$). Avšak aj tetiva BD má dĺžku rovnú polomeru zadanej kružnice. Obvodový uhol BCD teda prislúcha k vypuklému stredovému uhlu veľkosti $300°$, t. j. má veľkosť $150°$. Podľa (1) potom $|\sphericalangle PQR| = 90°$.

Úloha 2.

Najprv ukážeme, že pre párne n delenie nikdy nemôže skončiť tak, že každé dieťa bude mať jeden cukrík. V každom kole sa poloha zmení len dvom cukríkom, pričom sa posunú „opačným smerom“. To nás navádza skúmať, ako sa mení celkový súčet vzdialeností cukríkov od daného dieťaťa, povedzme od Eriky. Označme jednotlivé stoličky v smere hodinových ručičiek číslami od 0 po $n-1$ podľa vzdialenosti (v tomto smere) od Eriky. Po každom kole spočítajme súčet vzdialeností všetkých cukríkov od Eriky a označme ho S (t. j. s každým cukríkom pripočítame do S číslo stoličky, na ktorej sedí jeho aktuálny majiteľ). Ak v danom kole vyberie Erika dieťa na stoličke s číslom k, pričom $1 \geqq k \geqq$ $\geqq n-2$, hodnota S sa nezmení – namiesto $2k$ započítame v súčte $(k-1)+(k+1)$. Ak vyberie dieťa na stoličke s číslom $n-1$, v S namiesto $2(n-1)$ započítame $(n-2)+0$, hodnota súčtu sa teda zmenší o n. Napokon, ak vyberie seba, namiesto $2 \cdot 0$ započítame $(n-1)+1$ a hodnota S sa o n zväčší. Keďže na začiatku je $S=0$ a meniť sa môže iba o hodnotu $\pm n$, ostane S po každom kole deliteľné číslom n, t. j. S/n bude stále celé číslo. Avšak v prípade, že by každé dieťa držalo práve jeden cukrík, mali by sme

$$S = 0+1+2+\dots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}, \qquad \text{čiže} \qquad \frac{S}{n} = \frac{n-1}{2},$$

čo pre párne hodnoty n nie je celé číslo. Taká situácia teda nastať nemôže.

Venujme sa teraz nepárnym hodnotám n. Ukážeme, že existuje delenie, ktoré skončí tak, že každé dieťa má práve jeden cukrík. Nech $n = 2k+1$. Vhodné delenie zostrojíme indukciou; presnejšie, dokážeme, že pre každé $i = 0, 1, \dots, k$ vieme dostať pozíciu, že Erika má $n-2i$ cukríkov a prvých i detí sediacich od nej naľavo a takisto prvých i detí napravo má po jednom cukríku. Hodnota $i=0$ predstavuje začiatok delenia, hodnota $i=1$ stav po prvom kole (a teda prvý indukčný krok) a hodnota $i=k$ stav, keď každý má jeden cukrík. Predpokladajme, že sa nám podarilo dostať sa do popísanej pozície pre nejakú hodnotu $i=m$, pričom $1 \leqq m < k$ (a prešli sme pritom všetkými pozíciami pre $i<m$). Z tejto situácie postupujme nasledovne. Najprv Erika dá po cukríku dvom svojim susedom (keďže $m<k$, má aspoň tri cukríky a môže to urobiť). Ďalšie kolá sú znázornené v schéme. (Čísla znamenajú počty cukríkov u Eriky a detí napravo od nej, naľavo postupujeme súčasne a symetricky.)

$$\begin{gathered}
\underline{n-2m}, \underbrace{1, \dots, 1}_{m}, 0, \dots \quad \to \quad n-2m-2, \underline{2}, \underbrace{1, \dots, 1}_{m-1}, 0, \dots \quad \to \\
\to \quad n-2m, 0, \underline{2}, \underbrace{1, \dots, 1}_{m-2}, 0, \dots \quad \to \quad n-2m, 1, 0, \underline{2}, \underbrace{1, \dots, 1}_{m-3}, 0, \dots \quad \to \\
\to \quad n-2m, 1, 1, 0, \underline{2}, \underbrace{1, \dots, 1}_{m-4}, 0, \dots \quad \to \dots \to \quad n-2m, \underbrace{1, \dots, 1}_{m-2}, 0, \underline{2}, 0, \dots \quad \to \\
\to \quad n-2m, \underbrace{1, \dots, 1}_{m-1}, 0, 1, 0, \dots
\end{gathered}$$

Dostali sme sa tak do pozície, keď Erika má $n-2m$ cukríkov, prvých $m-1$ detí napravo aj naľavo má po jednom cukríku, m-té dieťa po oboch stranách nemá žiadny cukrík a deti vzdialené o $m+1$ miest majú po jednom cukríku. Aby sme dosiahli pozíciu pre $i=m+1$, stačí doplniť cukríky práve deťom na miestach vzdialených o m od Eriky. Na to však môžeme využiť indukčný predpoklad. Ak si totiž odmyslíme cukríky u detí vzdialených o $m+1$ miest, dostaneme pozíciu pre $i=m-1$ (len Erika má o dva cukríky menej, avšak stále ich má aspoň tri, teda vieme robiť tie isté kroky). Z nej sa už vieme dostať do situácie pre $i=m$. Keď vrátime späť odmyslené cukríky, dostaneme pozíciu pre $i=m+1$.

Nakoniec sa nám preto podarí dosiahnuť aj pozíciu pre $i=k$, t. j. pre nepárne n delenie môže skončiť tak, že každé dieťa má práve jeden cukrík.

Poznámky. Pre párne n, ktoré nie je deliteľné štyrmi, možno tvrdenie, ktoré sme dokázali v úvode riešenia, dokázať jednoduchšie. V takom prípade totiž môžeme stoličky, na ktorých deti sedia, striedavo ofarbiť bielou a čiernou farbou. Je zrejmé, že parita počtu cukríkov u všetkých detí na bielych stoličkách (ktorých je pre n daného tvaru nepárne veľa) sa nemení. Na začiatku je táto hodnota párna, zatiaľ čo v situácii, keď by každé dieťa malo práve jeden cukrík, by bola nepárna. Preto sa nemožno do takej situácie dostať.

Dá sa ukázať, že v prípade nepárneho n delenie dokonca vždy musí (bez ohľadu na to, ako deti vyberáme) po konečnom počte krokov skončiť tak, že každé dieťa má práve jeden cukrík. Ak $n = 2k+1$, počet kôl, po ktorom to nastane, je vždy $1^2+2^2+\cdots+k^2$.

Úloha 3.
Označme dané čísla p, q, r, s tak, aby $p \geqq q \geqq r \geqq s$. Uvažujme najskôr prípad $p+q \geqq 5$. Potom

$$p^2+q^2+2pq \geqq 25 = 4+(p^2+q^2+r^2+s^2) \geqq 4+p^2+q^2+2rs,$$

odkiaľ máme $pq-rs \geqq 2$.

Predpokladajme teda, že $p+q<5$; potom

$$4 < r+s \leqq p+q < 5. \tag{1}$$

Všimnime si, že

$$(pq+rs)+(pr+qs)+(ps+qr) = \frac{(p+q+r+s)^2-(p^2+q^2+r^2+s^2)}{2} = 30.$$

Navyše

$$pq+rs \geqq pr+qs \geqq ps+qr,$$

pretože $(p-s)(q-r) \geqq 0$ a $(p-q)(r-s) \geqq 0$.

Odtiaľ dostávame, že $pq+rs \geqq 10$. Z (1) vyplýva $0 \leqq (p+q)-(r+s) < 1$, takže

$$(p+q)^2-2(p+q)(r+s)+(r+s)^2 < 1.$$

Keď túto nerovnosť pripočítame k zrejmej rovnosti $(p+q)^2+2(p+q)(r+s)+(r+s)^2 = 9^2$, dostaneme

$$(p+q)^2+(r+s)^2 < 41.$$

Preto

$$41 = 21+2\cdot 10 \leqq (p^2+q^2+r^2+s^2)+2(pq+rs) = (p+q)^2+(r+s)^2 < 41,$$

čo je spor.

Iné riešenie. Z rovnosti $a+b+c+d=9$ pri usporiadaní $a \geqq b \geqq c \geqq d$ najskôr vyplýva, že aritmetické priemery dvojíc čísel a, b, resp. c, d majú vyjadrenie

$$\frac{a+b}{2} = \frac{9}{4}+\varepsilon_1, \qquad \frac{c+d}{2} = \frac{9}{4}-\varepsilon_1$$

pre vhodné $\varepsilon_1 \geqq 0$. Odtiaľ zasa vyplýva vyjadrenie čísel a, b, c, d v tvare

$$a = \frac{9}{4} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad b = \frac{9}{4} + \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \qquad c = \frac{9}{4} - \varepsilon_1 + \varepsilon_3, \quad d = \frac{9}{4} - \varepsilon_1 - \varepsilon_3$$

pre vhodné $\varepsilon_2, \varepsilon_3 \geqq 0$. Nerovnosť $b \geqq c$ znamená, že

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \geqq -\varepsilon_1 + \varepsilon_3, \qquad \text{čiže} \qquad \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \leqq 2\varepsilon_1.$$

Z rovnosti

$$21 = (a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) = 2 \cdot \left(\frac{9}{4} + \varepsilon_1\right)^2 + 2\varepsilon_2^2 + 2 \cdot \left(\frac{9}{4} - \varepsilon_1\right)^2 + 2\varepsilon_3^2 =$$
$$= 4 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^2 + 4\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_3^2 = 20 + \frac{1}{4} + 2 \cdot (2\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2)$$

zistíme, že nezáporné čísla ε_i spĺňajú vzťah

$$2\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = \frac{3}{8}. \tag{2}$$

Vzhľadom na nerovnosti $\varepsilon_2 + \varepsilon_3 \leqq 2\varepsilon_1$ a $\varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 \leqq (\varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2$ vyplýva z (2) odhad

$$\frac{3}{8} \leqq 2\varepsilon_1^2 + (\varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 \leqq 2\varepsilon_1^2 + 4\varepsilon_1^2 = 6\varepsilon_1^2,$$

odkiaľ $\varepsilon_1^2 \geqq (1/6) \cdot (3/8) = 1/16$, čiže $\varepsilon_1 \geqq 1/4$. Pre skúmaný výraz $ab - cd$ platí

$$ab - cd = \left(\frac{9}{4} + \varepsilon_1\right)^2 - \varepsilon_2^2 - \left(\frac{9}{4} - \varepsilon_1\right)^2 + \varepsilon_3^2 = 9\varepsilon_1 - \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2.$$

Ak za ε_2^2 dosadíme vyjadrenie z (2), dostaneme

$$ab - cd = 9\varepsilon_1 - \left(\frac{3}{8} - 2\varepsilon_1^2 - \varepsilon_3^2\right) + \varepsilon_3^2 = 9\varepsilon_1 + 2\varepsilon_1^2 - \frac{3}{8} + 2\varepsilon_3^2 \geqq 9 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{3}{8} = 2.$$

Tým je tvrdenie dokázané.

Úloha 4.
Najskôr ukážeme, že v zápisoch mocnín čísla 2 sa nachádzajú ľubovoľne dlhé bloky núl. Aby v zápise čísla 2^n bolo *aspoň* k núl, musí sa dať zapísať v tvare $y \cdot 10^{m+k} + z$, pričom y, z sú prirodzené a z má najviac m cifier, t. j. $z < 10^m$. Stačí teda nájsť také n a m, aby zvyšok čísla 2^n po delení číslom 10^{m+k} bol menší ako 10^m. Podľa Eulerovej vety pre každé prirodzené t platí

$$2^{\varphi(5^t)} \equiv 1 \pmod{5^t}.$$

(Využili sme, že $(2, 5^t) = 1$.) Vynásobením tejto kongruencie číslom 2^t dostaneme

$$2^{t+\varphi(5^t)} \equiv 2^t \pmod{10^t}, \qquad \text{čiže} \qquad 2^{t+\varphi(5^t)} = y \cdot 10^t + 2^t$$

pre nejaké prirodzené y. Podľa predošlých úvah zvoľme $n = t + \varphi(5^t)$ a $m = t - k$. Pritom t musí mať takú hodnotu, aby bolo $2^t < 10^{t-k}$. Také t určite existuje, stačí zobrať napríklad $t = 2k$ (lebo $2^{2k} = 4^k < 10^k$). Z uvedeného vyplýva, že v čísle

$$2^{2k+\varphi(5^{2k})} = y \cdot 10^{2k} + 2^{2k}$$

sa nachádza blok aspoň k núl.

Zoberme teda pre dané k takú mocninu dvoch (označme ju 2^n), ktorá obsahuje blok práve r núl, pričom $r \geqq k$. Skúmajme, čo sa s blokom deje, keď zoberieme nasledujúce mocniny, t. j. keď číslo s blokom postupne násobíme dvoma. Keďže pre nejaké nenulové cifry a, b máme

$$2^n = \underbrace{\ldots a}_{y}\underbrace{00\ldots 0}_{r \text{ núl}}\underbrace{b\ldots}_{z} = y \cdot 10^{r+s} + z,$$

dostaneme $2^{n+1} = 2y \cdot 10^{r+s} + 2z$. Pritom číslo $2z$ má zrejme buď rovnako veľa cifier ako z, alebo o jednu viac. Z „pravej strany“ sa teda blok núl buď neskráti, alebo skráti o jedna. Z „ľavej strany“ sa blok môže predĺžiť (ak y je deliteľné piatimi). Celkovo sa tak dĺžka bloku buď zmenší o jedna, alebo sa nezmení, alebo sa zväčší. Rovnako keď budeme násobiť dvoma ďalej, dĺžka bloku sa v každom kroku zmenší najviac o jedna. Teda jediná možnosť, ako by sme sa mohli vyhnúť bloku dĺžky k, je, že blok bude mať stále dĺžku viac ako k. To však nie je možné. Totiž y má vo svojom prvočíselnom rozklade číslo 5 s nejakým exponentom, povedzme α. Keď 2^n vynásobíme dvoma α-krát, pri ďalšom násobení sa už blok zrejme „zľava“ predlžovať nebude. A „sprava“ sa blok minimálne po každom štvrtom násobení skráti (keďže $2^4 > 10$). Po dostatočnom počte krokov teda dostaneme mocninu čísla 2, ktorá obsahuje blok práve k núl.

Úloha 5.
Každá postupnosť spĺňajúca podmienky zadania je určená prvými dvoma členmi – všetky ďalšie vieme pomocou rekurentného vzťahu vypočítať. Hľadáme teda také dvojice (a_1, a_2), že všetky ostatné členy sú celé čísla. Napíšme zadaný vzťah pre niekoľko malých hodnôt n. Po roznásobení zlomkov dostaneme

$$\begin{aligned} a_3(a_2+1) &= a_1 + 2\,006, \\ a_4(a_3+1) &= a_2 + 2\,006, \\ a_5(a_4+1) &= a_3 + 2\,006, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Odčítajme susedné rovnosti, aby sme sa zbavili čísla 2 006. Po preusporiadaní členov získame rovnosti

$$\begin{aligned} a_3 - a_1 &= (a_3+1)(a_4-a_2), \\ a_4 - a_2 &= (a_4+1)(a_5-a_3), \\ a_5 - a_3 &= (a_5+1)(a_6-a_4), \\ &\vdots \end{aligned} \tag{1}$$

Keďže podľa zadania sú všetky zátvorky $(a_n + 1)$ nenulové, môžu nastať dve možnosti. Ak $a_3 - a_1 = 0$, postupným dosadzovaním do predošlých rovností dostaneme aj $a_4 - a_2 = 0$, $a_5 - a_3 = 0, \ldots$, t. j.

$$a_1 = a_3 = a_5 = \ldots \qquad \text{a} \qquad a_2 = a_4 = a_6 = \ldots \tag{2}$$

Na druhej strane, ak $a_3 - a_1 \neq 0$, rovnakým dosadzovaním odvodíme $a_4 - a_2 \neq 0$, $a_5 - a_3 \neq 0, \ldots$ Venujme sa najprv druhej možnosti. Z rovností (1) máme pre každé $n \geqq 1$ vzťah

$$0 < |a_{n+3} - a_{n+1}| = |a_{n+2} - a_n| \cdot \frac{1}{|a_{n+2} + 1|} \leqq |a_{n+2} - a_n|. \tag{3}$$

Dostávame tak nerastúcu postupnosť kladných celých čísel

$$|a_3 - a_1| \geqq |a_4 - a_2| \geqq |a_5 - a_3| \geqq \ldots$$

Táto postupnosť je zrejme od určitého člena konštantná (inak by sme z nej vedeli vybrať nekonečnú klesajúcu postupnosť kladných celých čísel, čo je nemožné). Existuje teda taký index N a hodnota d, že pre $n \geqq N$ je $|a_{n+2} - a_n| = d$. Podľa (3) potom $|a_{n+2} + 1| = 1$, t. j. pre $n \geqq N + 2$ máme $a_n \in \{0, -2\}$. Avšak podľa zadania

$$a_{N+4} = \frac{a_{N+2} + 2\,006}{a_{N+3} + 1},$$

čiže a_{N+4} nadobúda jednu z hodnôt

$$\tfrac{0+2\,006}{0+1} = 2\,006, \quad \tfrac{0+2\,006}{-2+1} = -2\,006, \quad \tfrac{-2+2\,006}{0+1} = 2\,004, \quad \tfrac{-2+2\,006}{-2+1} = -2\,004,$$

čo je v spore s tým, že $a_{N+4} \in \{0, -2\}$. V tomto prípade žiadna postupnosť podmienkam zadania nevyhovuje.

Každá vyhovujúca postupnosť preto spĺňa (2). Dosadením $n = 1$ a $a_3 = a_1$ do zadanej rovnosti dostaneme

$$a_1 = \frac{a_1 + 2\,006}{a_2 + 1}, \qquad \text{čiže} \qquad a_1 a_2 = 2\,006 = 2 \cdot 17 \cdot 59.$$

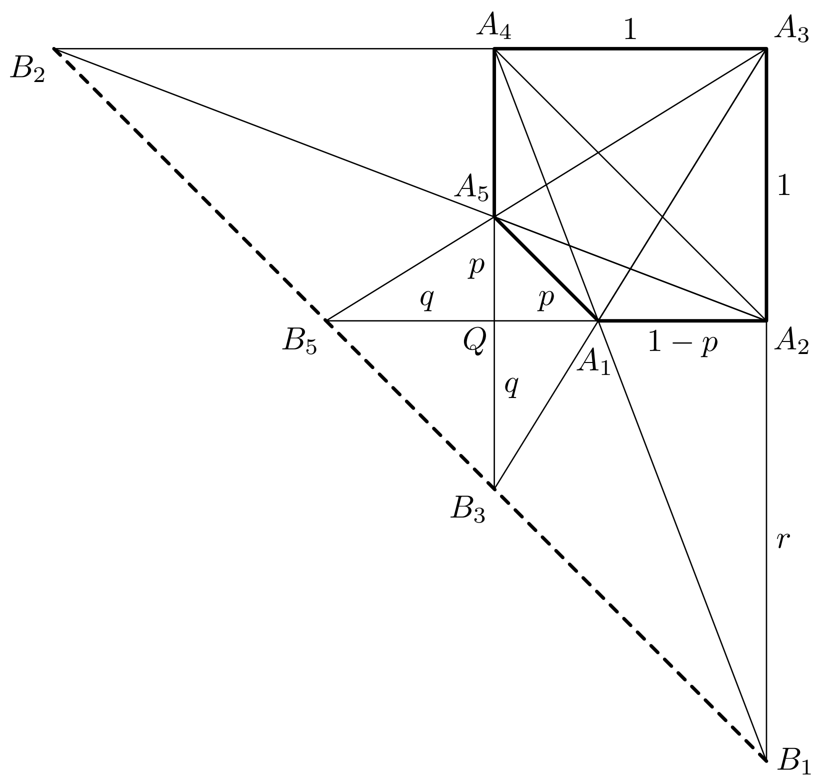
Berúc do úvahy $a_1, a_2 \neq -1$ dostávame

$$a_1 \in \{1, \pm 2, \pm 17, \pm 34, \pm 59, \pm 118, \pm 1\,003, 2\,006\} \qquad \text{a} \qquad a_2 = \frac{2\,006}{a_1}.$$

Ľahko overíme, že každá takáto postupnosť $a_1, a_2, a_1, a_2, a_1, \ldots$ spĺňa podmienky zadania. Hľadaných postupností je teda 14.

Úloha 6.

Skúsme päťuholník s popísanými vlastnosťami nájsť. Prekážkou je, že päťuholníky osovo súmerné podľa nejakej osi (pri ktorých by mohlo byť manuálne jednoduchšie ukázať, že popísané body ležia na jednej priamke) majú vždy aspoň jednu dvojicu priamok A_iA_{i+3}, $A_{i+1}A_{i+2}$ rovnobežnú. Zadajme si preto na začiatok jednoduchšiu úlohu – nájdime taký päťuholník $A_1A_2A_3A_4A_5$, že iba štyri z bodov B_i budú ležať na jednej priamke. Tu si už môžeme dovoliť hľadať ho medzi osovo súmernými päťuholníkmi. Aby sme situáciu ešte zjednodušili, povedzme, že body A_2, A_3, A_4 budú vrcholmi štvorca $QA_2A_3A_4$ so stranou dĺžky 1 a body A_1, A_5 budú ležať postupne na stranách QA_2 a QA_4 vo vzdialenosti p od vrcholu Q (obr. 26). Zo symetrickosti (päťuholník je osovo



Obr. 26

súmerný podľa osi QA_3) je zrejmé, že priamky B_1B_2, B_3B_5 sú rovnobežné. Poľahky možno vypozorovať, že v prípade, keď p nadobúda malé hodnoty, t. j. keď body A_1, A_5 sú blízko bodu Q, nachádza sa priamka B_3B_5 bližšie k bodu Q ako priamka B_1B_2. Naopak, keď p nadobúda hodnoty blízke 1, body A_1, A_5 sú blízko bodov A_2, A_4 a priamka B_1B_2 je k bodu Q bližšie, prípadne dokonca na opačnej strane, ako priamka B_3B_5. Dá sa preto očakávať, že pre nejakú hodnotu $p \in (0,1)$ sú obe priamky totožné a body B_1, B_2, B_3, B_5 ležia na jednej priamke. Nájdime také p.

Označme $|B_5Q| = |B_3Q| = q$ a $|B_1A_2| = r$. Z podobnosti trojuholníkov B_5QA_5 a $B_5A_2A_3$ máme

$$\frac{q}{p} = \frac{q+1}{1}, \qquad \text{čiže} \qquad q = \frac{p}{1-p}.$$

Z podobnosti trojuholníkov $B_1A_2A_1$ a $B_1A_3A_4$ máme

$$\frac{r}{1-p} = \frac{r+1}{1}, \qquad \text{čiže} \qquad r = \frac{1-p}{p}.$$

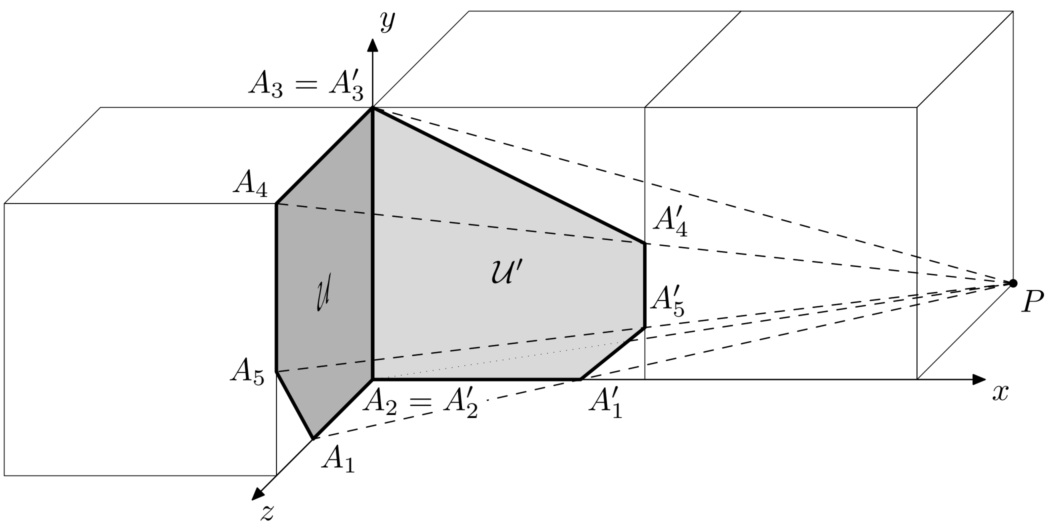
Napokon na to, aby bod B_1 ležal na priamke B_3B_5, stačí, aby boli podobné trojuholníky B_5QB_3 a $B_5A_2B_1$. To platí vtedy, keď

$$\frac{q}{q} = \frac{q+1}{r}, \qquad \text{čiže} \qquad q+1 = r.$$

Po dosadení predošlých vzťahov dostaneme rovnicu

$$\frac{p}{1-p} + 1 = \frac{1-p}{p},$$

ktorej jednoduchou úpravou získame kvadratickú rovnicu $p^2 - 3p + 1 = 0$. Tá má v intervale $(0,1)$ jediné riešenie $p = (3-\sqrt{5})/2$. (Zaujímavé je všimnúť si, že pre dané p je pomer, v ktorom rozdeľuje A_1 úsečku QA_2, zlatý rez.) Pre túto hodnotu teda body B_1, B_3, B_5, B_2 ležia na jednej priamke. Navyše priamky A_1A_5 a A_2A_4 (ktoré, keby neboli rovnobežné, pretínali by sa v bode B_4) sú s ňou rovnobežné. V istom zmysle sa teda tieto tri priamky pretínajú „v nekonečne“ v „bode“ B_4 a všetky body B_i ležia na jednej priamke. Aby sme vyhoveli podmienkam zadania, stačí nájsť vhodné zobrazenie, ktoré „bod z nekonečna“ zobrazí na konkrétny bod (a zachová všetky ostatné potrebné vlastnosti, t. j. zobrazí priamky na priamky). Takým zobrazením bude premietnutie (obr. 27). Uvažujme štandardnú karteziánsku sústavu súradníc v priestore. Päťuholník

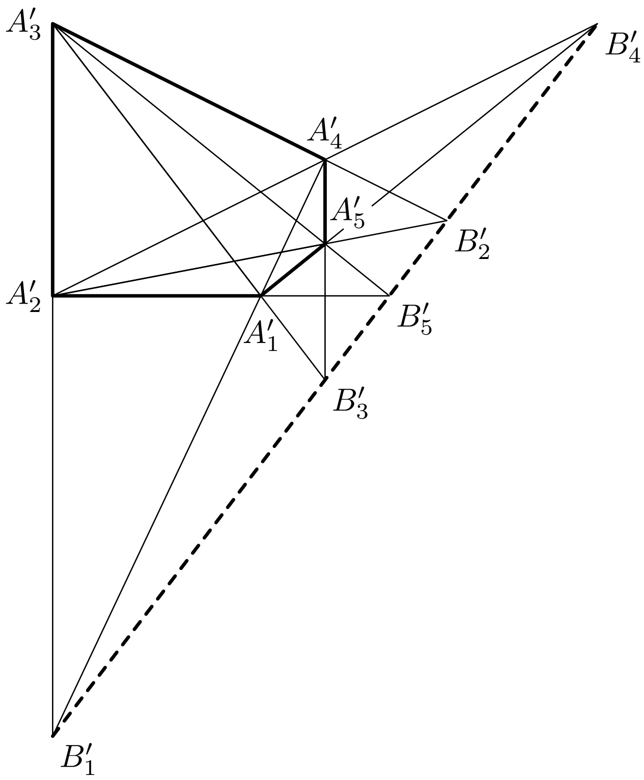


Obr. 27

$A_1A_2A_3A_4A_5 = \mathcal{U}$ vložme do roviny $\mathcal{O}_{yz}$ s bodom A_2 v počiatku a s bodmi A_1, A_3 postupne na kladných osiach z, y. Zvoľme ako premietací bod napríklad bod $P \equiv (2,0,-1)$. Každá priamka PA_i pretne rovinu $\mathcal{O}_{xy}$ v bode, ktorý označíme A_i'. Dostaneme tak päťuholník $A_1'A_2'A_3'A_4'A_5' = \mathcal{U}'$. Priamo z vlastností použitého zobrazenia vyplýva, že $\mathcal{U}'$ spĺňa podmienky zadania. O tom sa môžeme presvedčiť aj výpočtom. Ľahko totiž možno spočítať, že v rovine $\mathcal{O}_{xy}$ majú jednotlivé body súradnice

$$A_1' \equiv (3-\sqrt{5},0), \quad A_2' \equiv (0,0), \quad A_3' \equiv (1,0), \quad A_4' \equiv (1,\tfrac{1}{2}), \quad A_5' \equiv (1,\tfrac{3-\sqrt{5}}{4})$$

a následne overiť, že príslušné body B_1', B_2', B_3', B_4', B_5' ležia na jednej priamke (obr. 28).



Obr. 28

Poznámka. Úlohu možno riešiť aj bez konštruovania takého päťuholníka, že štyri z bodov B_i ležia na jednej priamke. Za premietaný útvar $\mathcal{U}$ stačí zabrať pravidelný päťuholník. Ten má totiž všetky dvojice priamok A_iA_{i+3}, $A_{i+1}A_{i+2}$ rovnobežné; po vhodnom premietnutí budú teda priesečníky B_i' ležať v množine, ktorá pri danom premietaní nemá vzor. Takou množinou je však priamka.

47. Medzinárodná matematická olympiáda

V dňoch 6. – 18. júla. 2006 sa v slovinskej Ľubľane uskutočnil už 47. ročník Medzinárodnej matematickej olympiády (IMO). Tejto populárnej intelektuálnej súťaže sa zúčastnilo 498 žiakov z 90 štátov. Slovensko reprezentovali

Ondrej Budáč, Gymnázium B. S.Timravy, Lučenec, 4. ročník,
István Estélyi, Gymnázium Z. Kodálya, Galanta, 4. ročník,
Samuel Hapák, Gymnázium Grösslingová, Bratislava, 2. ročník,
Jaroslav Knebl, Gymnázium A. Bernoláka, Námestovo, 4. ročník,
Ján Mikuláš, Gymnázium B. S.Timravy, Lučenec, 4. ročník,
Michal Takács, Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica, 4. ročník.

Delegáciu SR viedol predseda SK MO *doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.* (vedúci katedry KMAHI na fakulte PEDAS ŽU v Žiline), pedagogický vedúci bol *Ján Mazák* (študent FMFI UK Bratislava) a v úlohe pozorovateľa veľmi účinne pri koordinácii úloh pomohol *Mgr. Peter Novotný* (interný doktorand na FMFI UK Bratislava).

Obr. 29
(Zľava: S. Hapák, J. Knebl, O. Budáč, M. Takács, J. Mikuláš, I. Estélyi.)

Výsledky nášho družstva boli (podľa počtu a kvality medailí) najlepšie v doterajšej histórii Slovenska a sú uvedené v tabuľke. Všetci naši súťažiaci získali medailu, pričom zlatú medailu sa nám podarilo získať po dlhých dvanástich rokoch. Dovolím si touto cestou vysloviť poďakovanie všetkým učiteľom, ktorí sa na ich príprave podieľali.

Meno	1	2	3	4	5	6	Súčet	Cena
Ondrej Budáč	7	7	1	7	7	1	30	zlato
István Estélyi	7	1	0	7	0	0	15	bronz
Samuel Hapák	6	7	0	7	1	0	21	striebro
Jaroslav Knebl	7	5	1	7	0	0	20	striebro
Ján Mikuláš	6	1	0	7	3	0	17	bronz
Michal Takács	7	1	0	6	1	0	15	bronz

Je treba povedať, že kadečo nám vyšlo. Napr. aj to, že na bronz bolo treba akurát 15 bodov. Ale smolu sme si v tomto smere v minulosti už viackrát vybrali, napr. keď na bronz stačilo len 13 bodov a viacerí naši mali bodov presne 12. Ako ukazuje tabuľka, naši boli najúspešnejší v riešení úlohy č. 4, tzv. ľahkej teórii čísel, a v úlohe č. 1, tzv. ľahkej geometrii. Prívlastok tzv. preto, že v skutočnosti na IMO ľahké úlohy obvykle nie sú. Býva však zvykom úlohy 1, 2 a 3 prvého dňa, resp. 4, 5 a 6 druhého dňa zoradiť podľa obtiažnosti tak, „ako to vidí Jury“, ktorú tvoria vedúci štátnych reprezentácií. Zadania úloh sú uvedené v nasledujúcej časti Ročenky.

IMO je súťaž jednotlivcov, ale býva zvykom sledovať aj neoficiálne poradie družstiev, ktoré uvádzame v tabuľke (čísla v zátvorke sú uvedené za krajinami, ktoré mali na IMO menší počet účastníkov). V tomto sme skončili so 118 bodmi na veľmi dobrom 18. mieste, pričom zo štátov Európskej únie nás predbehli len Nemecko, Poľsko, Taliansko a Maďarsko, takže v rámci EÚ sme na 5. mieste. Z európskych krajín nás predbehli ešte Rusko, Rumunsko a Moldavsko. Za nami ostala veľmi silná Veľká Británia a dokonca aj Bulharsko (víťazi z roku 2003 v Tokiu), Ukrajina, Bielorusko, … Menšie štáty majú obvykle menší výber kvalitných žiakov a tak Česká republika doplatila na to, že jej traja možno najlepší žiaci sa nezúčastnili tejto súťaže. Jeden z nich by totiž v čase konania súťaže tesne prekročil povolený vekový limit a dvaja ďalší dali prednosť medzinárodnej fyzikálnej olympiáde, ktorej termín – bohužiaľ už skoro tradične – koliduje s IMO a ktorá sa tento rok konala v Singapure, čo je pre žiakov z našich končín atraktívnejšie. Poradie krajín na čele nebolo za posledné roky žiadnou novinkou: Čína, Rusko, Kórea, Nemecko, USA, pričom všetci súťažiaci z Číny získali zlaté medaily a najhorší z nich skončil na 15. mieste. Absolútnymi víťazmi s plným počtom 42 bodov sa stali Iurie Boreico (Moldavsko), Zhiyu Liu (Čína) a Alexander Magazinov (Rusko).

*

Dovolím si aj touto cestou v mene SK MO poďakovať firme CASIO, ktorá našej výprave už druhý rok darovala olympijské tričká (a predtým poskytla ceny pre najlepších účastníkov celoštátneho kola MO). Veľkú vďaku vyslovujem tiež Oddeleniu služieb medzinárodnej spolupráce MŠ SR (dámy Masicová, Fischerová, Jenisová) za starostlivo pripravenú účasť slovenskej reprezentácie na IMO po technickej stránke.

Por.	Štát	Z	S	B	∑	Por.	Štát	Z	S	B	∑
1.	Čína	6	0	0	214		Španielsko	0	1	2	80
2.	Rusko	3	3	0	174	47.	Portugalsko	0	0	3	78
3.	Južná Kórea	4	2	0	170	48.	Azerbajdžan	0	1	1	77
4.	Nemecko	4	0	2	157		Česká republika	0	0	3	77
5.	USA	2	4	0	154	50.	Albánsko	0	1	1	76
6.	Rumunsko	3	1	2	152		Kolumbia	0	0	2	76
7.	Japonsko	2	3	1	146	52.	Belgicko	0	0	1	75
8.	Irán	3	1	2	145		Lotyšsko	0	0	3	75
9.	Moldavsko	2	1	3	140	54.	Chorvátsko	0	1	1	72
10.	Tchaj-wan	1	4	1	136	55.	Srí Lanka	0	0	3	71
11.	Poľsko	1	2	3	133	56.	Grécko	0	0	2	69
12.	Taliansko	2	2	0	132	57.	Uzbekistan	0	0	2	68
13.	Vietnam	2	1	3	131	58.	Nový Zéland	0	0	2	66
14.	Hongkong	1	3	2	129	59.	Island	0	0	1	63
15.	Kanada	0	4	2	123		Macao	0	0	2	63
	Thajsko	1	2	3	123	61.	Turkmenistan (5)	0	0	2	59
17.	Maďarsko	0	3	3	122	62.	Holandsko	0	0	0	57
18.	Slovensko	1	2	3	118		Južná Afrika	0	0	0	57
19.	Turecko	0	4	1	117		Macedónsko	0	0	1	57
	Veľká Británia	0	4	1	117	65.	Maroko	0	0	0	55
21.	Bulharsko	0	3	2	116	66.	Nórsko	0	0	1	52
22.	Ukrajina	1	1	3	114	67.	Írsko	0	0	0	49
23.	Bielorusko	0	3	2	111	68.	Paraguaj (4)	0	1	0	47
24.	Mexiko	1	2	1	110	69.	Dánsko	0	0	0	45
25.	Izrael	0	2	2	109	70.	Ekvádor	0	0	1	40
26.	Austrália	0	3	2	108		Malajzia	0	0	1	40
27.	Singapur	0	1	4	100	72.	Tadžikistan	0	0	0	35
28.	Francúzsko	1	0	3	99	73.	Trinidad a Tobago	0	0	0	34
29.	Brazília	0	0	6	96		Venezuela (4)	0	0	0	34
30.	Argentína	0	2	2	95	75.	Panama (4)	0	0	0	33
	Kazachstan	0	0	5	95	76.	Pakistan	0	0	0	32
	Švajčiarsko	1	1	0	95	77.	Kirgizstan	0	0	0	31
33.	Gruzínsko	0	1	3	94	78.	Kostarika (2)	0	0	1	27
	Litva	0	1	2	94		Salvádor (3)	0	0	0	27
35.	India	0	0	5	92	80.	Bangladéš (4)	0	0	0	22
36.	Arménsko	0	1	1	90	81.	Cyprus	0	0	0	19
	Slovinsko	0	1	3	90	82.	Luxembursko (2)	0	0	0	12
38.	Srbsko	0	0	5	88		Uruguaj (2)	0	0	0	12
39.	Fínsko	0	0	4	86	84.	Nigéria	0	0	0	11
40.	Peru	0	0	2	85		Portoriko	0	0	0	11
41.	Bosna a Hercegovina	0	1	2	84	86.	Bolívia (2)	0	0	0	5
42.	Rakúsko	0	0	3	83		Kuvajt (4)	0	0	0	5
43.	Švédsko	0	0	3	82	88.	Saudská Arábia (4)	0	0	0	3
44.	Estónsko	0	0	2	80	89.	Lichtenštajnsko (1)	0	0	0	2
	Mongolsko	0	0	2	80	90.	Mozambik (3)	0	0	0	0

Keď som v roku 2001 prevzal vedenie SK MO, ako jednu z hlavných úloh som si vytýčil získanie mladých ľudí pre prácu v MO na vrcholovej úrovni. Samozrejme, nie je problém mladých ľudí delegovať do vrcholného orgánu, teda do SK MO. Podarilo sa mi však na MŠ SR okrem iného presadiť, že na IMO už druhý rok po sebe išiel zo Slovenska aj tzv. pozorovateľ (observer). Práca vedúcich sa tak stala oveľa efektívnejšou. Vycestovanie na IMO je navyše dobrou motiváciou práve pre prácu v MO na špičkovej úrovni, čo bolo hlavným cieľom. Ďalšou výhodou účasti pozorovateľa je, že sa tak rozširuje množina mladých ľudí, ktorí sa s prácou na IMO dôverne zoznámia a sú schopní ju v podstate kedykoľvek prevziať. S radosťou vyzdvihujem fakt, že tak Peťo Novotný ako aj Janko Mazák odviedli (nielen) na IMO skvelú prácu.

A aby pre potencionálnych vedúcich a najmä pre žiakov bola motivácia v budúcnosti ešte väčšia, podávam krátku informáciu o novej pripravovanej súťaži, ktorej skratka je MEMO, teda Middle European Mathematical Olympiad. Vedenie rakúskej výpravy totiž usporiadalo počas IMO v Slovinsku pracovné stretnutie vedúcich stredoeurópskych výprav a navrhlo každý rok v septembri usporiadať súťaž 6-členných tímov v podstate podľa kritérií IMO. Súťaže by sa však mohli zúčastniť len žiaci, ktorí ešte nikdy na IMO neboli. Bola by to nesporne dobrá príprava pre žiakov, prípadných budúcich olympionikov, a otvorila by sa tak cesta k účasti v kvalitnej medzinárodnej súťaži najmä mladším žiakom, ktorí sa do IMO-družstva neprebojovali (niekedy len veľmi tesne). Prvý ročník tejto súťaže by usporiadalo v roku 2007 Rakúsko, Česká republika sa zaviazala usporiadať druhý ročník v roku 2008. Mám prísľub terajšieho ministra školstva, že Slovensko sa bude tejto súťaže zúčastňovať a usporiadame MEMO v roku 2010.

Je mojou milou povinnosťou poďakovať aj Ing. Václavovi Žákovi z firmy ELKAN, ktorý pre všetkých žiakov nášho IMO-družstva vybavil od firmy Wolfram Research veľmi kvalitný software Mathematica. Mám navyše prísľub, že túto príjemnosť bude firma Wolfram Research našim žiakom spôsobovať aj v budúcnosti.

Ku skvalitneniu prípravy našich žiakov bezpochyby prispelo aj pozvanie našich českých partnerov na 5-dňové prípravné sústredenie, ktoré finančne zabezpečila Společnost Otakara Borůvky. Aj touto cestou našim českým priateľom ďakujem. Určite stojí za zmienku, že IMO je na organizovanie mimoriadne náročná celosvetová akcia a Slovinsko je najmenšia krajina, ktorá ju kedy usporiadala. Treba dodať, že na vynikajúcej technickej aj spoločenskej úrovni. Hvala!

Vojtech Bálint

IMO pohľadom súťažiacich

Pamätáme si to takto. Nedlhú noc predtým v Bratislave sme strávili s v ušiach znejúcimi cigánskymi pesničkami prichádzajúcimi z vedľajšej izby našej ubytovne. Ráno, všetci (aj Jaro) podozrivo načas, sme nasadali do dodávky s vierou skorého príchodu do Ľubľany. Tam nás vrelo privítali a priradili nám našu sprievodkyňu Maju Alif. O hlavu od každého z nás nižšia, mladá, pekná, sympatická a čo vám budeme hovoriť. Napriek vyspelému vzhľadu nemala ani 17. Najlepšie sme sa dorozumeli po anglicky, ale ani pomalá Slovenčina nevytvorila na Majinej tvári črty nepochopenia.

Sotva sme sa stihli aklimatizovať, vlastne ani nestihli, našu spokojnosť naplnilo jedlo vzdialene pripomínajúce švédske stoly. Ubytovanie nám poskytol vysokoškolský internát. Priznajme si to, sklamanie, 4-hviezdičkový hotel to nebol. Tretí deň ráno sme aj cez prázdniny zasadli do lavíc a dymilo sa. Vlastne parilo – z našich hláv. To sme úspešne zalievali množstvom vody (Ondro vypil 4 litre). Rôzne náročné úlohy zamestnali naše mysle na 4 a pol hodiny. Ďalší deň opäť a potom sme si mohli vydýchnuť. S našimi výkonmi sme už nemohli nič spraviť.

Nasledujúci program – zabaviť sa a spoznať Slovinsko. Nádherný výlet po najnavštevovanejších tamojších destináciách nám dotvoril obraz Slovinska. Podobá sa na Slovensko nielen názvom, ale aj lesmi a prírodou. Najväčší dojem na nás urobila obrovská jaskyňa Postojna Jama. Cestovali sme do jej útrob takmer 10 minút vláčikom. Klincom na záver bol detský kolotoč v areáli jaskyne, po ktorom bolo všetkým zle. Toho dňa sme sa trošku omočili aj v mori. Tam sme stretli našich vedúcich, ktorí bojovali o každý náš bod. Potešení, s novými informáciami o približných počtoch bodov, sme merali dlhú cestu späť do hlavného mesta. Autobusom.

Vďaka skvelej partii a čiastočne organizovanému programu bolo o zábavu postarané. Organizátori nám pripravili športový deň, kde sme konečne mali možnosť preukázať aj naše iné ako matematické kvality. Vďaka spojeniu s našimi kamarátmi Čechmi sme boli schopní všetko vyhrať. Vo futbale to celkom nevyšlo. Ak si dobre spomíname, ani vo volejbale. Zato v stolnom tenise na nás nestačila ani čínska reprezentácia. Vo štvorhre sme ako Československo vyhrali zlaté medaily (Mišo a Jarda), ktoré nám dokonca aj oficiálne odovzdali. Voľné popoludnia sme často využili na športovanie. Hrávali sme náš obľúbený šport frisbee spolu s Čechmi, Francúzmi, pakistanským deputy leaderom – tomu to šlo, srbskou princeznou (aspoň nám tak pripadala) a inými.

Ako sa náš pobyt chýlil ku koncu, blížili sa aj výsledky. Viacerí z nás mali body na medailových hraniciach a dychtivo sme čakali, kedy sa zjaví konečné poradie. Po jeho zverejnení na internete napätie opadlo a poslednú noc sme skoro celú predebatovali s Majou, prechádzali sme sa po zákutiach Ľubľany a bavili sme sa. S touto nocou dozneli naše posledné zážitky. Spomínať budeme dlho a šťastne, až kým nepomrieme, alebo aj dlhšie.

Ondrej Budáč, Michal Takács

Zadania úloh IMO

Úloha 1.
Nech I je stred kružnice vpísanej do trojuholníka ABC. Bod P z vnútra trojuholníka spĺňa

$$|\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle PCA| = |\sphericalangle PBC| + |\sphericalangle PCB|.$$

Dokážte, že $|AP| \geqq |AI|$, pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď $P = I$.

(Južná Kórea)

Úloha 2.
Nech P je pravidelný 2006-uholník. Jeho uhlopriečka sa nazýva *dobrá*, ak jej koncové body rozdeľujú hranicu mnohouholníka P na dve časti, z ktorých každá pozostáva z nepárneho počtu strán. Strany mnohouholníka P sa tiež považujú za *dobré*. Predpokladajme, že P je rozdelený na trojuholníky 2003 uhlopriečkami, z ktorých žiadne dve nemajú spoločný bod vo vnútri P. Nájdite maximálny možný počet rovnoramenných trojuholníkov, ktoré majú dve dobré strany.

(Srbsko a Čierna Hora)

Úloha 3.
Určte najmenšie reálne číslo M tak, aby nerovnosť

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leqq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

platila pre všetky reálne čísla a, b, c.

(Írsko)

Úloha 4.
Určte všetky dvojice (x, y) celých čísel takých, že

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

(USA)

Úloha 5.
Nech $P(x)$ je polynóm stupňa $n > 1$ s celočíselnými koeficientmi a nech k je kladné celé číslo. Uvažujme polynóm $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, kde P sa vyskytuje k-krát. Dokážte, že existuje najviac n celých čísel t takých, že $Q(t) = t$.

(Rumunsko)

Úloha 6.
Každej strane b konvexného mnohouholníka P priradíme maximálny obsah trojuholníka, ktorého jedna strana je b a ktorý je obsiahnutý v P. Dokážte, že súčet obsahov priradených všetkým stranám mnohouholníka P je aspoň dvojnásobkom obsahu mnohouholníka P.

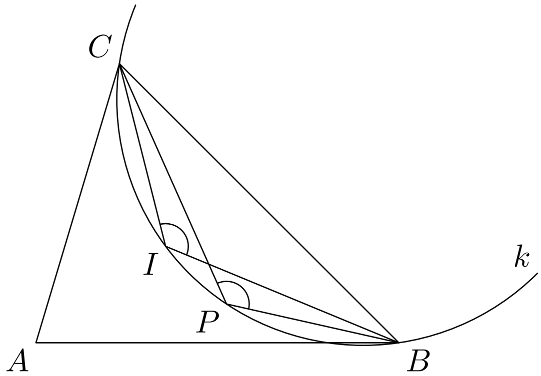
(Srbsko a Čierna Hora)

Riešenia úloh IMO

Úloha 1.
Označme zvyčajným spôsobom α, β, γ veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC. Keďže

$$|\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle PCA| + |\sphericalangle PBC| + |\sphericalangle PCB| = \beta + \gamma,$$

podmienka zo zadania je ekvivalentná s rovnosťou $|\sphericalangle PBC| + |\sphericalangle PCB| = (\beta + \gamma)/2$, ktorá je zasa ekvivalentná s rovnosťou $|\sphericalangle BPC| = 90^\circ + \alpha/2$ (využili sme, že súčet uhlov



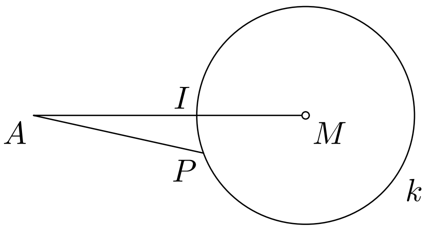
Obr. 30

v trojuholníku BCP je 180°). Z trojuholníka BCI zasa dostávame

$$|\sphericalangle BIC| = 180^\circ - (\beta + \gamma)/2 = 90^\circ + \alpha/2.$$

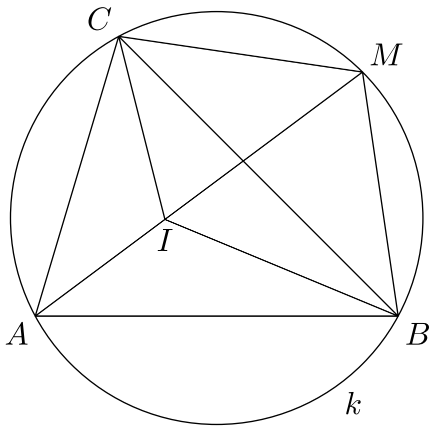
Takže $|\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle BIC|$ a keďže P a I sa nachádzajú v tej istej polrovine určenej priamkou BC, ležia body B, C, I a P na jednej kružnici (obr. 30). Inými slovami, bod P leží na kružnici k opísanej trojuholníku BCI.

Označme M stred kružnice k. Na to, aby sme dokázali, že $|AP| \geqq |AI|$ a že rovnosť nastane len vtedy, keď $P = I$, stačí ukázať, že I leží na úsečke AM (obr. 31). To je



Obr. 31

však zrejmé z toho, že M je súčasne stredom oblúka BC kružnice opísanej trojuholníku ABC (toto známe tvrdenie možno ľahko odvodiť dopočítaním veľkostí uhlov v rovnoramenných trojuholníkoch CIM a BIM). Vieme totiž, že stredom oblúka BC prechádza



Obr. 32

os uhla pri vrchole A, čiže polpriamka AI (obr. 32). Tým je úloha vyriešená.

Úloha 2.
(Podľa *Ondreja Budáča*.) Rovnoramenný trojuholník s dvoma dobrými stranami nazývajme *dobrý*. Zrejme každý dobrý trojuholník má dobré ramená, a nie základňu.

Zaoberajme sa najprv špeciálnym prípadom. Nebudeme uvažovať všetkých 2006 vrcholov mnohouholníka P, ale len nejaký oblúk pozostávajúci z n vrcholov ($n \geqq 2$), pričom jeho krajné body zvierajú so stredom mnohouholníka P uhol nanajvýš $180°$ (t. j. $n \leqq 1004$). Týchto n vrcholov tvorí mnohouholník X. Označme $f(n)$ maximálny možný počet dobrých trojuholníkov, ktoré môžu vzniknúť rozdelením X na trojuholníky jeho uhlopriečkami. Ľahko možno skúšaním overiť, že $f(2) = 0$, $f(3) = 1$, $f(4) = 1$, $f(5) = 2$, … Dokážeme matematickou indukciou, že

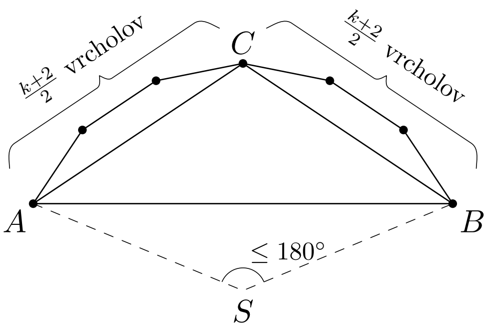
$$f(n) \leqq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

Prvý indukčný krok sme už urobili. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre $n \leqq k$ a zoberme oblúk pozostávajúci z $n = k+1$ vrcholov. Krajné body tohto oblúka označme A, B. Uvažujme rozdelenie mnohouholníka X uhlopriečkami na trojuholníky, pri ktorom vznikne maximálny možný počet dobrých trojuholníkov. Úsečka AB je stranou nejakého trojuholníka ABC patriaceho tomuto rozdeleniu.

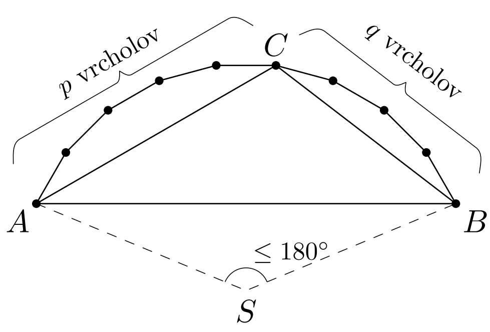
Ak trojuholník ABC je dobrý, tak vzhľadom na podmienku $n \leqq 1004$ je nutne AB jeho základňa a BC, CA sú jeho dobré ramená, takže oblúk AB pozostáva z dvoch rovnakých oblúkov nepárnych dĺžok (obr. 33). Preto $k \equiv 2 \pmod 4$. Z indukčného predpokladu potom dostávame

$$f(k+1) \leqq 1 + 2f\left(\tfrac{k+2}{2}\right) \leqq 1 + 2\left\lfloor \frac{\frac{k+2}{2} - 1}{2} \right\rfloor =$$
$$= 1 + 2\left\lfloor \tfrac{k}{4} \right\rfloor = 1 + 2 \cdot \tfrac{k-2}{4} = \tfrac{k}{2} = \left\lfloor \frac{(k+1)-1}{2} \right\rfloor,$$

teda tvrdenie platí aj pre $n = k + 1$.



Obr. 33



Obr. 34

Ak trojuholník ABC nie je dobrý, tak máme oblúky AC, CB s počtami vrcholov p, q, pričom $p+q=k+2$, $p,q \geqq 2$ (obr. 34). Takže

$$f(k+1) \leqq f(p)+f(q) = f(p)+f(k+2-p) \leqq \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k+2-p-1}{2} \right\rfloor \leqq$$
$$\leqq \left\lfloor \frac{p-1}{2} + \frac{k+2-p-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(k+1)-1}{2} \right\rfloor$$

(využili sme známu nerovnosť

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqq \lfloor x+y \rfloor, \tag{1}$$

ktorá platí pre ľubovoľné kladné čísla x, y). Aj v tomto prípade teda tvrdenie pre $n=k+1$ platí. Tým je dôkaz indukciou ukončený.

Vráťme sa teraz k pôvodnej úlohe. V rozdelení mnohouholníka P na trojuholníky určite existuje trojuholník ABC, ktorý obsahuje (vo vnútri či na obvode) jeho stred S. Oblúky AB, BC, CA majú počty vrcholov $p,q,r \leqq 1004$. Teda $p+q+r = 2006+3 = 2009$. V prípade, že ABC nie je dobrý, nachádza sa v rozdelení nanajvýš

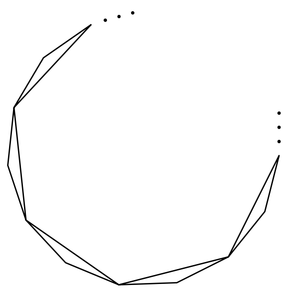
$$f(p)+f(q)+f(r) \leqq \left\lfloor \tfrac{p-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{q-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{r-1}{2} \right\rfloor \leqq \left\lfloor \frac{p-1+q-1+r-1}{2} \right\rfloor = 1003$$

dobrých trojuholníkov (opäť sme využili nerovnosť (1)).

Ak naopak ABC je dobrý, sú práve dve z čísel p, q, r párne. Bez ujmy na všeobecnosti nech sú to p, q. Potom je v rozdelení nanajvýš

$$1+f(p)+f(q)+f(r) \leqq 1 + \left\lfloor \tfrac{p-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{q-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{r-1}{2} \right\rfloor = 1 + \tfrac{p-2}{2} + \tfrac{q-2}{2} + \tfrac{r-1}{2} = 1003$$

dobrých trojuholníkov.



Obr. 35

Ukázali sme teda, že maximálny počet dobrých trojuholníkov je 1003. Táto hodnota sa dá ľahko dosiahnuť, ako vidno na obr. 35 (po obvode „odrežeme“ 1003 rovnoramenných trojuholníčkov s ramenami dĺžky 1 a zvyšok rozdelíme ľubovoľne).

Iné riešenie. Podobne ako v prvom riešení, rovnoramenný trojuholník s dvoma dobrými stranami pochádzajúci z rozdelenia mnohouholníka P jeho uhlopriečkami nazývajme *dobrý*.

Nech ABC je dobrý trojuholník s dobrými stranami AB a BC. To znamená, že medzi vrcholmi A a B, a podobne medzi vrcholmi B a C, sa nachádza nepárny počet strán mnohouholníka P. Budeme hovoriť, že tieto strany *patria* dobrému trojuholníku ABC.

Aspoň jedna strana v každej z týchto dvoch skupín nepatrí žiadnemu inému dobrému trojuholníku, ktorého vrcholy ležia medzi vrcholmi A a B, resp. medzi B a C. Totiž každý taký dobrý trojuholník má dve zhodné strany, a teda existuje spolu párny počet strán, ktoré mu patria. Keď vylúčime všetky strany patriace dobrým trojuholníkom na tejto ploche, musí zostať aspoň jedna strana, ktorá nepatrí žiadnemu z nich. Priraďme tieto dve strany (jednu v každej z dvoch skupín) trojuholníku ABC.

Každému dobrému trojuholníku sme takto priradili dvojicu strán, pričom žiadne dva trojuholníky nemajú priradenú rovnakú stranu. Keďže takých dvojíc vieme vytvoriť maximálne 1003, je to zároveň maximálny možný počet dobrých trojuholníkov. Tento počet vieme dosiahnuť, ako sme ukázali v prvom riešení.

Úloha 3.
Úpravou výrazu vnútri absolútnej hodnoty na ľavej strane dostaneme

$$\begin{aligned}
&ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)=b(a^3-c^3)+b^3(c-a)+ca(c-a)(c+a)=\\
&=(a-c)\big(b(a^2+ac+c^2)-b^3-ca(c+a)\big)=\\
&=(a-c)\big(b(a^2-b^2)+ac(b-a)+c^2(b-a)\big)=(a-c)(a-b)\big(b(a+b)-ac-c^2\big)=\\
&=(a-c)(a-b)\big(a(b-c)+b^2-c^2\big)=(a-c)(a-b)(b-c)(a+b+c).
\end{aligned}$$

Zadanú nerovnosť teda môžeme prepísať na tvar

$$|(a-c)(a-b)(b-c)(a+b+c)| \leqq M(a^2+b^2+c^2)^2. \tag{1}$$

Vzhľadom na symetriu výrazov môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $a \leqq \leqq b \leqq c$. V takomto prípade použitím nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom dostaneme

$$|(a-b)(b-c)| = (b-a)(c-b) \leqq \left(\frac{(b-a)+(c-b)}{2}\right)^2 = \frac{(c-a)^2}{4}, \tag{2}$$

pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $b-a=c-b$, t. j. $2b=a+c$. Z nerovnosti medzi aritmetickým a kvadratickým priemerom zasa máme

$$\left(\frac{(c-b)+(b-a)}{2}\right)^2 \leqq \frac{(c-b)^2+(b-a)^2}{2},$$

čo je po jednoduchej úprave ekvivalentné s

$$3(c-a)^2 \leqq 2 \cdot \left[(b-a)^2 + (c-b)^2 + (c-a)^2\right], \tag{3}$$

pričom rovnosť nastáva opäť len v prípade, keď $2b = a + c$.

Z (2) a (3) vyplýva

$$\begin{aligned}
&|(a-c)(a-b)(b-c)(a+b+c)| \leqq \\
&\leqq \tfrac{1}{4} \cdot |(c-a)^3(a+b+c)| = \tfrac{1}{4} \cdot \sqrt{(c-a)^6(a+b+c)^2} \leqq \\
&\leqq \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\left(\frac{2 \cdot [(b-a)^2 + (c-b)^2 + (c-a)^2]}{3}\right)^3 \cdot (a+b+c)^2} = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\sqrt[4]{\left(\frac{(b-a)^2 + (c-b)^2 + (c-a)^2}{3}\right)^3 \cdot (a+b+c)^2}\right)^2 \leqq \\
&\leqq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{(b-a)^2 + (c-b)^2 + (c-a)^2 + (a+b+c)^2}{4}\right)^2 = \frac{9\sqrt{2}}{32} \cdot (a^2+b^2+c^2)^2.
\end{aligned}$$

Ostatný odhad vyplýva z AG-nerovnosti pre štyri čísla, z ktorých jedno je $(a+b+c)^2$ a zvyšné tri sú $[(b-a)^2 + (c-b)^2 + (c-a)^2]/3$.

Vidíme, že pre $M = \frac{9}{32}\sqrt{2}$ nerovnosť (1) platí, pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $2b = a + c$ a

$$\frac{(b-a)^2 + (c-b)^2 + (c-a)^2}{3} = (a+b+c)^2. \tag{4}$$

Dosadením $b = (a+c)/2$ upravíme (4) na

$$2(c-a)^2 = 9(a+c)^2.$$

Podmienku na rovnosť teda možno prepísať v tvare

$$2b = a + c \qquad \text{a} \qquad (c-a)^2 = 18b^2.$$

Ak zvolíme $b = 1$, dostaneme $a = 1 - \frac{3}{2}\sqrt{2}$, $c = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$. Takže $M = \frac{9}{32}\sqrt{2}$ je naozaj najmenšia hodnota, pre ktorú je zadaná nerovnosť splnená. Rovnosť nastáva pre trojice $(t - \frac{3}{2}\sqrt{2}t, t, t + \frac{3}{2}\sqrt{2}t)$ a ich permutácie, pričom t je ľubovoľné reálne číslo.

Úloha 4.

Ak je dvojica (x, y) riešením, ľahko možno ukázať, že $x \geqq 0$ a riešením je aj dvojica $(x, -y)$. Pre $x = 0$ dostaneme vyhovujúce dvojice $(0, 2)$ a $(0, -2)$. Zaoberajme sa teda iba prípadom $x, y > 0$.

Predpokladajme, že (x, y) je riešením. Rovnicu možno prepísať na tvar

$$2^x(1 + 2^{x+1}) = (y-1)(y+1).$$

Odtiaľ vidno, že činitele $y-1$ a $y+1$ sú oba párne, pričom zrejme práve jeden z nich je deliteľný štyrmi. Preto $x \geqq 3$ a jeden z činiteľov je deliteľný číslom 2^{x-1}, nie však číslom 2^x. Pre nejaké nepárne prirodzené číslo m a pre vhodné znamienko teda platí

$$y = 2^{x-1}m \pm 1. \tag{1}$$

Dosadením do pôvodnej rovnice postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} 1+2^x+2^{2x+1} &= (2^{x-1}m \pm 1)^2, \\ 1+2^x(1+2^{x+1}) &= 2^{2x-2}m^2 \pm 2^x m + 1, \\ 2^x(1+2^{x+1}) &= 2^x(2^{x-2}m^2 \pm m), \\ 1+2^{x+1} &= 2^{x-2}m^2 \pm m, \\ 1 \mp m &= 2^{x-2}(m^2-8). \end{aligned} \tag{2}$$

Ak by na ľavej strane v (2) bolo znamienko „$-$“, mali by sme $m^2-8 \leqq 0$, t. j. $m=1$. Po dosadení do (2) potom $0 = -7 \cdot 2^{x-2}$, čomu nevyhovuje žiadna hodnota x.

Pre znamienko „$+$“ je ľavá strana (2) kladná, preto musí byť kladný aj výraz m^2-8, odkiaľ $m \geqq 3$. Na druhej strane z (2) dostaneme

$$1+m = 2^{x-2}(m^2-8) \geqq 2(m^2-8),$$

čiže $2m^2-m-17 \leqq 0$. Odtiaľ nutne $m \leqq 3$ (pre hodnoty $m = 5, 7, 9\ldots$ je výraz $2m^2-m-17$ zjavne kladný). Zistili sme, že jediná vyhovujúca hodnota je $m=3$. Po dosadení do (2) máme $x=4$ a z (1) vyjde $y=23$. Ľahko možno overiť, že táto dvojica naozaj vyhovuje. Riešeniami zadanej rovnice sú teda dvojice $(0,2)$, $(0,-2)$, $(4,23)$ a $(4,-23)$.

Úloha 5.

(Podľa *Ondreja Budáča.*) Označme

$$\underbrace{P(P(\ldots P(P}_{m\text{-krát}}(x))\ldots)) = P_m(x) \qquad \text{pre } m = 1, 2, \ldots, k.$$

Predpokladajme sporom, že existuje $n+1$ rôznych celých čísel $x_0, x_1, \ldots, x_n$ takých, že $P_k(x_i) = x_i$ (pre každé $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$). Keďže P má celočíselné koeficienty, pre ľubovoľné celé čísla u, v (nie nutne rôzne) platí

$$u - v \mid P(u) - P(v), \qquad \text{a teda aj} \qquad |u-v| \leqq |P(u) - P(v)|.$$

Keď toto známe tvrdenie použijeme k-krát, pre ľubovoľné $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ dostaneme

$$|x_i - x_j| \leqq |P(x_i) - P(x_j)| \leqq |P_2(x_i) - P_2(x_j)| \leqq \cdots \leqq |P_k(x_i) - P_k(x_j)| = |x_i - x_j|.$$

Nakoľko prvý a posledný výraz sa rovnajú, musí rovnosť nastávať vo všetkých nerovnostiach. Takže $|x_i - x_j| = |P(x_i) - P(x_j)|$, t. j.

$$P(x_i) - P(x_j) = \pm(x_i - x_j) \tag{1}$$

pre vhodné znamienko. Ukážeme, že toto znamienko je pre všetky dvojice indexov rovnaké.

Označme $P(x_0) = a$. Rozoberme dva prípady pre $P(x_1)$, ktoré podľa (1) môžu nastať.

Prípad 1. Nech $P(x_1) = a + (x_1 - x_0)$. Pre ľubovoľné $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ podľa (1) platí

$$P(x_i) - a = x_i - x_0 \qquad \text{alebo} \qquad P(x_i) - a = x_0 - x_i. \tag{2}$$

Ak by pre niektoré i nastala druhá možnosť, tak $P(x_i) = a + x_0 - x_i$. Potom použitím (1) a dosadením dostaneme

$$\pm(x_i - x_1) = P(x_i) - P(x_1) = a + x_0 - x_i - (a + x_1 - x_0) = 2x_0 - x_i - x_1.$$

Pre znamienko „+“ po úprave vyjde $x_i = x_0$ a pre znamienko „−“ vyjde $x_1 = x_0$, čo sú neprípustné možnosti (čísla $x_0, x_1, \dots, x_n$ sú rôzne). Pre každé $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ preto v (2) nastáva prvá možnosť, t. j. $P(x_i) = a + x_i - x_0$. Keďže táto rovnosť podľa predpokladu platí aj pre $i = 1$ a triviálne aj pre $i = 0$, dostávame, že polynomická rovnica $P(t) - a - t + x_0 = 0$ stupňa $n \geqq 2$ (s neznámou t) má aspoň $n + 1$ rôznych koreňov $x_0, x_1, \dots, x_n$, čo je v spore so základnou vetou algebry.

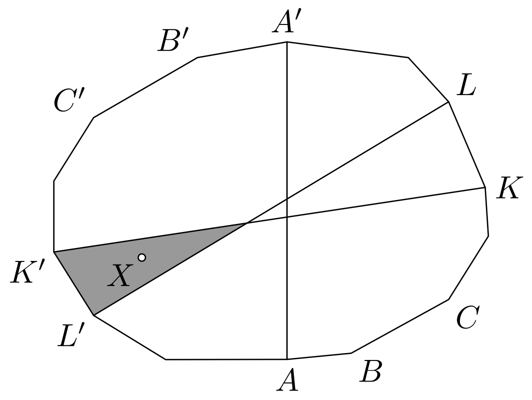
Prípad 2. Nech $P(x_1) = a + (x_0 - x_1)$. Analogicky ako v prvom prípade dostaneme, že $P(x_i) = a + x_0 - x_i$ pre každé x_i, a teda neprípustný počet koreňov má rovnica $P(t) - a - x_0 + t = 0$.

Záver. Existuje najviac n rôznych celých čísel t takých, že $Q(t) = P_k(t) = t$.

Úloha 6.
Dokážeme najprv, že ľubovoľný konvexný $2n$-uholník s obsahom S má takú stranu AB a vrchol V, že obsah trojuholníka ABV je aspoň S/n.

Uhlopriečky, ktoré rozdeľujú $2n$-uholník na dve časti s rovnakým počtom strán, budeme nazývať *hlavné*. Pre každú stranu b daného $2n$-uholníka označme $\triangle_b$ taký trojuholník ABP, že A, B sú krajné body strany b a P je priesečník hlavných uhlopriečok AA', BB'. Tvrdíme, že zjednotenie všetkých $2n$ trojuholníkov $\triangle_b$ pokrýva celý $2n$-uholník.

Nech X je ľubovoľný vnútorný bod $2n$-uholníka, ktorý neleží na žiadnej hlavnej uhlopriečke (body ležiace na obvode a na hlavných uhlopriečkach opísaným zjednotením zrejme pokryté sú). Uvažujme postupnosť (orientovaných) hlavných uhlopriečok $AA', BB', CC', \dots$, pričom $B, C, \dots$ sú po sebe nasledujúce vrcholy ležiace v opačnej polrovine určenej priamkou AA' ako bod X. Bez ujmy na všeobecnosti nech bod X je „naľavo“ od AA'. V tejto postupnosti sa na mieste s poradovým číslom $n + 1$ nachádza uhlopriečka $A'A$, ktorá má bod X „napravo“. Preto v postupnosti $A, B, C, \dots, A'$ existujú po sebe idúce vrcholy K, L také, že X leží „naľavo“ od KK', ale „napravo“ od LL'. To však znamená, že X leží v trojuholníku $\triangle_{K'L'}$ (obr. 36). Trojuholníky $\triangle_b$ teda naozaj pokrývajú celý $2n$-uholník. Súčet ich obsahov je preto aspoň S.

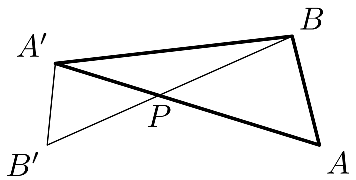


Obr. 36

Označme $S_{\mathcal{U}}$ obsah útvaru $\mathcal{U}$. Z predošlého vyplýva, že existujú dve protiľahlé strany $b = AB$, $b' = A'B'$ (pričom AA', BB' sú hlavné uhlopriečky pretínajúce sa v bode P) také, že $S_{\triangle_b} + S_{\triangle_{b'}} \geqq S/n$. Bez ujmy na všeobecnosti nech $|PB| \geqq |PB'|$. Potom (obr. 37)

$$S_{ABA'} = S_{ABP} + S_{PBA'} \geqq S_{ABP} + S_{PA'B'} = S_{\triangle_b} + S_{\triangle_{b'}} \geqq S/n.$$

Tým je tvrdenie zo začiatku riešenia dokázané.



Obr. 37

Zoberme teraz ľubovoľný konvexný mnohouholník P s obsahom S, ktorý má m strán $a_1, \dots, a_m$. Nech S_i je obsah najväčšieho trojuholníka, ktorý má stranu a_i a je celý obsiahnutý v P. Tvrdenie zo zadania dokážeme sporom. Predpokladajme, že neplatí, t. j.

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{S_i}{S} < 2.$$

Potom existujú racionálne čísla $q_1, \dots, q_m$ také, že

$$\sum_{i=1}^{m} q_i = 2 \qquad \text{a} \qquad q_i > \frac{S_i}{S} \quad \text{pre každé } i;$$

stačí napríklad pre $i < m$ zobrať za q_i ľubovoľné racionálne číslo z intervalu

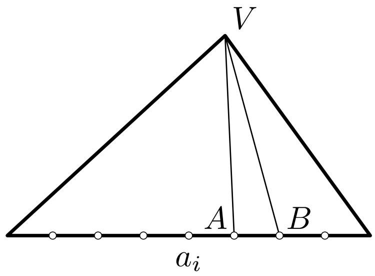
$$\left(\frac{S_i}{S}, \frac{S_i}{S} + \frac{1}{m-1}\left(2 - \sum \tfrac{S_i}{S}\right)\right)$$

a položiť $q_m = 2 - (q_1 + \cdots + q_{m-1})$.

Zapíšme zlomky $q_1, \ldots, q_m$ v tvare $q_i = k_i/n$, kde n je ich spoločný menovateľ. Máme teda $\sum k_i = 2n$. Keď rozdelíme každú stranu a_i mnohouholníka P na k_i zhodných úsekov, vytvoríme konvexný $2n$-uholník s obsahom S (s niektorými vnútornými uhlami veľkosti $180°$). Podľa tvrdenia, ktoré sme dokázali na začiatku, má tento nový mnohouholník takú stranu AB a vrchol V, že $S_{ABV} \geqq S/n$. Ak AB je časťou strany a_i mnohouholníka P (obr. 38), tak pre obsah trojuholníka T so stranou a_i a vrcholom V dostávame

$$S_T = k_i \cdot S_{ABV} \geqq k_i \cdot S/n = q_i \cdot S > S_i,$$

čo je v rozpore s definíciou obsahu S_i. Tým je úloha vyriešená.



Obr. 38

Poznámka. Súčet priradených obsahov môže byť *práve* dvojnásobkom obsahu mnohouholníka P. Platí to pre všetky stredovo súmerné mnohouholníky.

Zadania súťažných úloh

Kategória P

Archív zadaní Matematickej olympiády, kategórie P sa nachádza na WWW stránke http://www.ksp.sk/mop.

P – I – 1

Na monitore sa práve schyľuje k veľkej bitke medzi armádou hráča a armádou jeho počítača. Sily sú vyrovnané, obe armády obsahujú rovnaký počet plukov, pričom ale jednotlivé pluky môžu obsahovať rôzne počty vojakov. Na začiatku bitky sa pluky oboch armád zoradia do dvoch radov tak, že oproti každému hráčovmu pluku stojí práve jeden pluk patriaci počítaču. Potom sa začne samotný boj. Pluky stojace oproti sebe na seba zaútočia. A keďže v počte je sila, zvíťazí ten z nich, ktorý má viac vojakov. Ak náhodou majú súperiace pluky rovnaký počet vojakov, vyhráva pluk patriaci počítaču.

Hráčova armáda má veľmi schopných špiónov, ktorí pred bitkou zistia, koľko vojakov má nepriateľ v ktorom pluku a ako sú jeho pluky rozmiestnené. Vašou úlohou je rozmiestniť na základe týchto informácií hráčove pluky tak, aby čo najviac z nich svoj súboj vyhralo.

Súťažná úloha

Napíšte program, ktorý vám poradí, ako najlepšie rozmiestniť pluky, ktoré máte k dispozícii. Na vstupe dostanete počet plukov N v každej armáde a počty vojakov v každom z $2N$ plukov na bojisku. Ako výstup programu nám stačí jediné celé číslo – najväčší počet hráčovych plukov, ktoré vyhrajú svoj súboj pri nejakom rozostavení.

Formát vstupu Prvý riadok vstupného súboru `pluky.in` obsahuje jedno celé číslo N $(1 \leq N \leq 10\,000)$ – počet plukov v každej z armád. V druhom riadku je medzerami oddelených N celých čísel $A_1, \ldots, A_N$ $(1 \leq A_i \leq 100\,000\,000)$ – počty vojakov v hráčovych plukoch. V treťom riadku je medzerami oddelených N celých čísel $B_1, \ldots, B_N$ $(1 \leq B_i \leq$ $\leq 100\,000\,000)$ – počty vojakov v plukoch patriacich počítaču.

Formát výstupu Jediný riadok výstupného súboru `pluky.out` má obsahovať jediné celé číslo – najväčší počet hráčovych plukov, ktoré môžu naraz vyhrať svoj súboj.

Príklad

`pluky.in`	**`pluky.out`**
`5`	`3`
`7 12 1 7 47`	*(Ak to hráč spraví dobre, vyhrajú jeho pluky veľkosti*
`7 12 1 7 47`	*47, 12 a jeden z plukov veľkosti 7.)*

Príklad

pluky.in	**pluky.out**
4	0
10 10 10 10	*(Pri každom rozostavení všetky hráčove pluky prehrajú.)*
10 10 10 10	

Príklad

pluky.in	**pluky.out**
5	4
1 3 5 7 9	*(Obetujeme hráčov najmenší pluk, pošleme ho proti pluku veľkosti 10. Ostatné pluky vieme potom rozmiestniť tak, aby vyhrali.)*
2 4 6 8 10	

P – I – 2

Vedcom sa konečne podarilo vymyslieť efektívny spôsob cestovania v časopriestore. Ich testovacie stredisko sa skladá z niekoľkých lokalít. V každej lokalite je umiestnených niekoľko teleportov. Keď vstúpime do teleportu, presunie nás na vopred zadanú lokalitu (čo by sme od teleportu očakávali), ale navyše nás presunie aj v čase o zadaný počet minút (buď dopredu alebo dozadu). Vedci by chceli zistiť, či je cestovanie teleportami výhodné. Práve sa nachádzajú pri centrálnom počítači a chceli by sa ísť najesť do bufetu. A keďže čas sú peniaze, chceli by byť v bufete čo najskôr. Pohybovať v čase a priestore sa samozrejme chcú len pomocou už postavených teleportov.

Súťažná úloha

Program dostane na vstupe počet lokalít N, ktoré budeme označovať číslami $1, \ldots, N$. Centrálny počítač je v lokalite číslo 1, bufet má číslo N. Nasleduje počet teleportov M a zoznam týchto teleportov. Pre každý teleport je určená začiatočná lokalita, koncová lokalita a zmena času v minútach, ktorá nastane pri prechode týmto teleportom (kladné číslo znamená posun do budúcnosti, záporné do minulosti a 0 znamená, že sa na koncovej lokalite objavíme v tom istom čase, v akom sme nastúpili do teleportu).

Každý teleport sa dá použiť len tým smerom, ktorý je uvedený na vstupe. Medzi dvoma lokalitami môže byť viacero teleportov. Dokonca môže existovať teleport, ktorý nás presunie len v čase (teda koncová a začiatočná lokalita je tá istá).

Program má vypočítať čas, kedy najskôr môžeme byť v lokalite N, ak sa v lokalite 1 nachádzame v čase 0. Ak tam vieme byť lubovoľne skoro (teda vieme cestovať do nekonečna do minulosti), alebo ak sa tam nevieme dostať vôbec, program by o tom mal podať príslušnú správu.

Formát vstupu Prvý riadok vstupného súboru `teleport.in` obsahuje dve čísla N a M ($2 \leq N \leq 1\,000$, $0 \leq M \leq 50\,000$) oddelené medzerou. Nasleduje M riadkov, na každom sú tri čísla A_i, B_i, T_i ($1 \leq A_i, B_i \leq N$, $|T_i| \leq 10\,000$) popisujúce teleport z lokality A_i do lokality B_i so zmenou času T_i minút.

Formát výstupu Jediný riadok výstupného súboru `teleport.out` má obsahovať správu „`Vedci umru od hladu`“, ak sa od centrálneho počítača nedá dostať do bufetu, resp. správu „`Vedci spoznaju zaciatok vesmiru`“, ak vieme cestovať do nekonečna do minulosti. Inak má obsahovať najskorší čas v minútach, kedy sa vedia vedci dostať do bufetu.

Príklad

teleport.in	teleport.out
`3 4` `1 2 5` `2 3 -7` `1 3 -1` `1 3 16`	`-2` *(Prvým teleportom sa dostanú do lokality 2 v čase 5, odtiaľ druhým do lokality 3 v čase $5 + (-7) = -2$. Ostatné možnosti sú horšie.)*

Príklad

teleport.in	teleport.out
`2 2` `1 1 -1` `1 2 0`	`Vedci spoznaju zaciatok vesmiru` *(Skôr ako sa druhým teleportom presunú do bufetu, môžu prvým odísť ľubovoľne ďaleko do minulosti.)*

Príklad

teleport.in	teleport.out
`4 2` `1 2 -1` `2 3 0` `4 3 10`	`Vedci umru od hladu` *(Posledný teleport nemôžu použiť na presun z lokality 3 do lokality 4, iba naopak.)*

P – I – 3

Kde bolelo, tam bolelo, žil raz v istom kráľovstve starý kráľ. Kráľovstvo tvorilo N miest a kde-tu nejaká cesta. Keďže králi sú od prírody lakomí, v kráľovstve veru nebolo udržiavaných ciest nazvyš. Presnejšie, ciest bolo práve $N - 1$ a boli zvolené tak, aby sa medzi každými dvoma mestami dalo prejsť po cestách (možno idúc cez iné mestá). V reči teórie grafov takejto cestnej sieti hovoríme strom.

Na staré kolená však kráľa navštívila teta Paranoja a našepkala mu, že susedia chcú napadnúť jeho kráľovstvo. Preto sa rozhodol, že lakomosť musí nabok, postaví v mestách vojenské posádky. Paranoja však šepkala ďalej: „Zbláznil si sa? Ak sú dve posádky v susediacich mestách, budú si medzi sebou posielať odkazy. A vieš, ako to dopadne… Nechaj veľa vojakov pokope, vzbúria sa proti tebe!“

Tri dni a tri noci kráľ nespal, až vyhútal nasledujúci kompromis: Vyberie niekoľko miest, v ktorých postaví vojenské posádky. Aby mu nehrozila vzbura, rozhodol sa, že nikdy nesmú byť pri sebe viac ako 3 posádky. Teraz sedí nad mapou a húta, ako ich len rozmiestniť, aby kráľovstvo bolo čo najbezpečnejšie.

Súťažná úloha

Ešte raz si formálnejšie zopakujme, o čo kráľovi ide.

Na vstupe máte počet miest N a popis ciest medzi nimi. Ciest je práve $N-1$, nikde sa nekrižujú, nimi tvorená cestná sieť je súvislá a spája všetky mestá. Pre každé mesto i vieme číslo b_i – toto číslo hovorí, koľko pridá posádka v i-tom meste k bezpečnosti kráľovstva. Kráľovou (a vašou) úlohou je vybrať množinu miest, v ktorých postaviť posádky. Táto množina musí spĺňať nasledujúce podmienky:

- Každá jej súvislá podmnožina má veľkosť najviac 3.
- Spomedzi všetkých takýchto množín má najväčší možný súčet hodnôt b_i – bezpečnosť kráľovstva.

(Množinu miest voláme súvislá, ak sa medzi každými dvomi mestami z nej dá prejsť po cestách bez toho, aby sme navštívili mesto, ktoré do tejto množiny nepatrí.)

Formát vstupu Prvý riadok vstupného súboru `posadky.in` obsahuje jedno číslo N ($1 \leq N \leq 100\,000$) – počet miest v kráľovstve. Mestá sú očíslované od 1 do N. Každý z nasledujúcich $N-1$ riadkov obsahuje dve čísla miest, ktoré sú spojené cestou. Môžete predpokladať, že cestná sieť je súvislá.

Posledný riadok vstupného súboru obsahuje N celých čísel $b_1, \ldots, b_N$ ($0 \leq b_i \leq \leq 10\,000$), ktoré udávajú, kde je ako výhodné mať vojenskú posádku.

Formát výstupu Prvý riadok výstupného súboru `posadky.out` má obsahovať jediné celé číslo – najlepšiu dosiahnuteľnú bezpečnosť kráľovstva. Druhý riadok má obsahovať niekoľko čísel oddelených medzerami – jednu vhodnú množinu miest, pre ktorú sa uvedená bezpečnosť dosiahne.

Príklad

`posadky.in`
```
7
1 2
2 3
3 4
4 5
5 6
6 7
1 1 1 1 1 1 1
```

`posadky.out`
```
6
1 2 3 5 6 7
```
(Všade je zisk z posádky rovnaký, chceme ich čo najviac.)

Príklad

`posadky.in`
```
5
1 5
2 5
3 5
4 5
1 6 5 2 1000
```

`posadky.out`
```
1011
2 3 5
```
(Zjavne chceme posádku v meste 5. Potom už ale môžeme vybrať len 2 spomedzi ostatných miest.)

Príklad

posadky.in	**posadky.out**
5	16
1 5	1 2 3 4
2 5	*(Nie vždy sa oplatí vybrať mesto s najväčším b_i.)*
3 5	
4 5	
4 4 4 4 5	

P – I – 4

Študijný text – paralelizátor

Za siedmimi horami a šiestimi dolinami vynašiel vynálezca Kleofáš podivnú to mašinu, ktorú nazval *paralelizátor*. Na prvý pohľad vyzeral paralelizátor ako obyčajný počítač... Bol tu však jeden malý, ale o to dôležitejší rozdiel. Za určitých okolností vedel paralelizátor paralelne (t.j. súčasne) spustiť viacero vetiev programu bez toho, aby ho to akokoľvek spomalilo. Kleofáš rýchlo pochopil, že zo slovného popisu tohto zázraku by nik nezmúdrel, a tak vymyslel aj programovací jazyk, v ktorom sa dali písať programy pre jeho paralelizátor.

Tento programovací jazyk je kópiou jazyka Pascal. Oproti klasickému Pascalu nemáme k dispozícii generátor náhodných čísel (a teda napríklad príkaz **Random**), takže je dopredu určené, ako bude beh každého programu vyzerať.

Programy pre paralelizátor sa budú od klasických jemne líšiť tým, že nebudú mať výstup. Budeme iba rozlišovať, či program skončil *úspešne* alebo nie. U klasických programov by to znamenalo, že nás zaujíma jedine tzv. exit code (po slovensky „návratová hodnota“) programu.

Oproti štandardnému Pascalu nám pribudli štyri príkazy: **Accept**, **Reject**, **Both**(x) a **Some**(x) (kde x je premenná typu integer). Čo každý z týchto príkazov robí?

Príkaz **Accept** *úspešne* ukončí bežiaci program.

Príkaz **Reject** ukončí bežiaci program, avšak *nie úspešne*. (To isté spraví aj vykonanie štandardných Pascalovských príkazov **Halt** a **End**., príkaz **Reject** definujeme len kvôli názornosti.)

V nasledujúcom texte pod *vytvorením kópie programu* rozumieme, že sa v operačnej pamäti vytvorí úplne presná kópia celého programu vrátane obsahu jeho premenných – výsledok bude rovnaký, ako keby sme už na začiatku daný program spustili nie raz, ale dvakrát.

Príkaz **Both**(x) zastaví aktuálne bežiaci program. Vytvoria sa dve jeho identické kópie. V prvej z nich je hodnota premennej x nastavená na 0, v druhej na 1. Obe kópie programu sú paralelne spustené, pričom ich výpočet pokračuje príkazom nasledujúcim za príslušným príkazom **Both**.

Sú tri možnosti, ako môže výpočet dopadnúť:

- Ak obe kópie úspešne skončia, v nasledujúcom takte procesora úspešne skončí aj pôvodný program.

- Ak aspoň jedna kópia skončí, ale nie úspešne, v nasledujúcom takte procesora skončí aj pôvodný program, tiež nie úspešne.
- Vo všetkých ostatných prípadoch pôvodný program nikdy neskončí.

Príkaz **Some**(x) funguje podobne. Taktiež zastaví aktuálne bežiaci program. Opäť sa vytvoria dve jeho identické kópie, v prvej z nich je hodnota premennej x nastavená na 0, v druhej na 1, atď.

Opäť sú tri možnosti, ako môže výpočet dopadnúť:

- Ak obe kópie skončia, pričom ani jedna z nich úspešne, v nasledujúcom takte procesora skončí aj pôvodný program, tiež nie úspešne.
- Ak aspoň jedna kópia úspešne skončí, v nasledujúcom takte procesora úspešne skončí aj pôvodný program.
- Vo všetkých ostatných prípadoch pôvodný program nikdy neskončí.

Slovne môžeme tieto operácie popísať nasledovne: Príkaz **Both** robí „paralelný and“ – overí, či obe vetvy úspešne skončia. Príkaz **Some** robí „paralelný or“ – overí, či aspoň jedna z vetiev úspešne skončí.

Netrvalo dlho a Kleofáš si uvedomil, že na takomto zázračnom zariadení dokáže niektoré problémy riešiť priam až neuveriteľne rýchlo. Napríklad testovanie prvočíselnosti je skutočne ľahké:

Príklad 1

V premennej N je prirodzené číslo. Napíšte program pre paralelizátor, ktorý pre každé N skončí, pričom *úspešne* skončí práve vtedy, keď N je prvočíslo.

Riešenie Pomocou volaní **Both** paralelne vygenerujeme všetky čísla od 2 do $N-1$ a naraz pre každé z nich overíme, či delí N. Každá vetva úspešne skončí, ak „jej“ číslo nedelí N. Aby pôvodný program úspešne skončil, musia úspešne skončiť všetky vetvy, teda žiadne z vygenerovaných čísel nesmie deliť N. Časová zložitosť takéhoto programu je $O(\log N)$.

```
{ VSTUP: N : integer; }

var moc2, pocet_cifier : integer;
    cislo : integer;
    i,x : integer;

begin
   { osetrime okrajovy pripad }
   if ( N = 1 ) then Reject;

   { zistime, kolko ma N cifier v dvojkovej sustave }
   moc2 := 1;
   pocet_cifier := 0;
   while (moc2 <= N) do begin
```

```
    moc2 := moc2 * 2;
    inc( pocet_cifier );
  end;

  { vygenerujeme cisla od 0 do 2^pocet_cifier - 1 }
  cislo := 0;
  for i:=1 to pocet_cifier do begin
    Both(x);
    cislo := 2*cislo + x;
  end;

  { primale delitele skusat nebudeme, prehlasime za dobre }
  if (cislo <= 1) then Accept;
  { ani privelke delitele skusat nebudeme }
  if (cislo >= N) then Accept;
  { inak skusime, ci vygenerovane cislo deli N }
  if (N mod cislo <> 0) then Accept;
  Reject;
end.
```

Názorne si ukážeme, ako vyzerá výpočet paralelizátora na tomto programe pre $N = 3$ a pre $N = 6$. Kópie programu, ktoré vznikajú počas výpočtu, budeme číslovať v poradí, v akom vznikajú.

Pre $N = 3$ bude výpočet prebiehať nasledovne:

- Spustí sa kópia #1 (teda vlastne originál).
- Spočíta, že pocet_cifier = 2.
- Spustí sa for-cyklus pre i = 1.
- Kópia #1 sa zastaví, vzniknú kópie #2 a #3.
- V kópii #2 je cislo = 0, v kópii #3 je cislo = 1.
- V oboch bežiacich kópiách sa spustí for-cyklus pre i = 2.
- Kópie #2 a #3 sa zastavia, z #2 vzniknú #4 a #5, z #3 vzniknú #6 a #7.
- V kópiách #4 až #7 nadobudne premenná cislo hodnoty 0 až 3.
- Kópie #4 a #5 úspešne skončia, lebo čísla 0 a 1 nechceme testovať ako delitele.
- Kópia #2 úspešne skončí, lebo už úspešne skončili obe kópie, ktoré z nej vznikli.
- Kópia #7 úspešne skončí, lebo ani číslo 3 nechceme testovať.
- Kópia #6 úspešne skončí, lebo 2 nedelí 3.
- Kópia #3 úspešne skončí, lebo už úspešne skončili obe kópie, ktoré z nej vznikli.
- Kópia #1 (teda pôvodný program) úspešne skončí, lebo už úspešne skončili obe kópie, ktoré z nej vznikli.

Pre $N = 6$ bude výpočet prebiehať nasledovne:

- Podobne ako pri $N = 3$ sa dostaneme do situácie, kedy bežia kópie #8 až #15, premenná cislo v nich má hodoty postupne od 0 do 7.
- Kópie #8 a #9 (s primalým číslom) úspešne skončia.
- Kópia #4 (z ktorej vznikli #8 a #9) úspešne skončí.
- Kópie #14 a #15 (s priveľkým číslom) úspešne skončia.
- Kópia #7 (z ktorej vznikli #14 a #15) úspešne skončí.
- Kópie #10 až #13 skončia – a to: #12 a #13 úspešne (4 ani 5 nedelí 6), #10 a #11 neúspešne (2 aj 3 delí 6).
- Kópia #5 skončí neúspešne (obe jej „deti“ skončili neúspešne), kópia #6 skončí úspešne.
- Kópia #2 skončí neúspešne (lebo kópia #5 skončila neúspešne), kópia #3 skončí úspešne.
- Kópia #1 (teda pôvodný program) skončí neúspešne.

Príklad 2

V premenných N a K sú prirodzené čísla. Napíšte program pre paralelizátor, ktorý pre každé N skončí, pričom *úspešne* skončí práve vtedy, keď N má nejakého deliteľa z množiny $M = \{2, 3, \dots, 2^K - 1\}$.

Riešenie Pomocou volaní **Some** paralelne prezrieme všetky $m \in M$, stačí nám, ak ľubovoľné jedno z nich delí N.

(Iný pohľad na to isté riešenie: Pomocou volaní **Some** „uhádneme“ deliteľa $m \in M$ a overíme, či sme ho uhádli správne. Na náš program sa môžeme pozerať tak, že sa nevetví, ale každé volanie **Some** „uhádne“ a do x dosadí tú „správnu“ hodnotu. Ak teda N má v množine M deliteľa, nájdeme ho, inak skončíme s nejakým číslom, ktoré N nedelí.)

Časová zložitosť takéhoto programu je $O(K)$.

```
{ VSTUP:  N, K : integer; }

var cislo : integer;
    i,x : integer;

begin
  { paralelne skusame cisla od 0 do 2^K - 1 }
  cislo := 0;
  for i:=1 to K do begin
    Some(x);
    cislo := 2*cislo + x;
  end;

  { 0 a 1 do mnoziny M nepatria }
  if (cislo <= 1) then Reject;
```

```
  { skusime, ci vygenerovane cislo deli N }
  if (N mod cislo = 0) then Accept;
  Reject;
end.
```

Súťažná úloha

a) V premenných *ihla* a *seno* sú dva reťazce. Napíšte čo najrýchlejší program pre paralelizátor, ktorý pre každý vstup skončí, pričom *úspešne* skončí práve vtedy, keď sa reťazec *ihla* nachádza v reťazci *seno* ako (súvislý) podreťazec.

   Váš program by teda mal úspešne skončiť ak napríklad:
   $ihla = abcd$, $seno = aaabcdddaa$
   $ihla = ddda$, $seno = aaabcdddaa$
   ale nie v prípadoch:
   $ihla = abcd$, $seno = aaabcEdddaa$
   $ihla = jasomihla$, $seno = vtejtokopesenaihlyniet$

b) Nad poľom nezáporných celých čísel môžeme postaviť „pyramídu". Spodný riadok pyramídy bude tvoriť samotné pole. Každý vyšší riadok bude o 1 kratší ako predchádzajúci, pričom i-ty prvok v novom riadku je rovný súčtu i-teho a $(i+1)$-ého prvku z riadku pod ním, modulo 10 000. (Čiže ak by bol súčet väčší ako 9999, necháme z neho len posledné 4 cifry.) Vrchný riadok je tvorený jedným číslom.

   V premennej N máme prirodzené číslo. V poli A na pozíciách 1 až N máme N nezáporných celých čísel menších ako 10 000. V premennej V je nezáporné celé číslo menšie ako 10 000.

   Napíšte čo najrýchlejší program pre paralelizátor, ktorý pre každý vstup skončí, pričom *úspešne* skončí práve vtedy, ak V je na vrchu pyramídy, utvorenej nad poľom A.

   Príklad

Vstup	**Výstup**
$N = 4$	skončí úspešne
$A = \{1, 2, 3, 4\}$	*Pyramída vyzerá nasledovne:*
$V = 20$	

```
      20
    8    12
  3    5    7
1    2    3    4
```

Príklad

Vstup	**Výstup**
$N = 4$	neskončí úspešne
$A = \{6, 3, 9, 3\}$	
$V = 17$	

P – II – 1

V Absurdistane práve začína nový ročník futbalovej súťaže. Tento rok ju bude hrať aj slávny tím Dynamo Zbicykla. Jeho tréner už tri noci poriadne nespal, no napriek tomu ešte nemá hotový plán na túto sezónu. Dobre vie, že žiadne mužstvo nedokáže vyhrávať všetky zápasy, lebo každá výhra stojí hráčov veľa síl. Vymyslel si preto nasledujúce zjednodušenie:

Súťažná úloha

Aktuálny stav jeho mužstva bude popisovať jedno celé číslo S, ktoré udáva, koľko majú hráči sily. Na začiatku sezóny (v deň číslo 0) je sila tímu nulová. Každú noc si hráči oddýchnu, a preto sa ich sila zväčší o 1. Ak chcú nejaký zápas vyhrať, musia sa snažiť – každá výhra ich stojí V sily. Môžu samozrejme aj „hrať na remízu“, čo ich stojí len R sily, prípadne zápas úplne vypustiť a prehrať ho, čo ich nestojí nič. (Ak chcú nejaký zápas vyhrať alebo remizovať, musia mať na to dosť síl, sila tímu nesmie nikdy klesnúť pod nulu.)

Tréner už pozná presný rozpis ligy, vie teda, v ktoré dni má jeho mužstvo voľno a kedy hrá nejaký zápas. Napíšte program, ktorý vypočíta, koľko najviac bodov môže jeho mužstvo v tomto ročníku ligy získať. (Ako už vo futbale istú dobu platí, za výhru sú tri body a za remízu jeden.)

Formát vstupu Na vstupe sú celé čísla V, R (vysvetlené vyššie) a počet zápasov N. Nasleduje N celých čísel – čísla dní, v ktoré hrá naše futbalové mužstvo zápas.

Môžete predpokladať, že $N \leq 10\,000$. Čísla V, R aj všetky čísla dní sa zmestia do bežnej 32-bitovej celočíselnej premennej. Čísla dní zápasov sú uvedené v rastúcom poradí.

Formát výstupu Vypíšte jediné celé číslo – maximálny počet bodov, ktoré vie mužstvo získať.

Príklad

Vstup	**Výstup**
$V = 10$, $R = 3$, $N = 2$	4
dni zápasov:	*Hráči stihnú nazbierať presne toľko síl, aby zvládli prvý*
3, 13	*zápas remizovať a druhý vyhrať.*

Príklad

Vstup	**Výstup**
$V = 20$, $R = 15$, $N = 4$	3
dni zápasov:	*Mužstvo dokáže vyhrať ľubovoľný jeden z týchto štyroch*
23, 24, 25, 26	*zápasov.*

Príklad

Vstup	**Výstup**
$V = 30$, $R = 9$, $N = 4$	4
dni zápasov:	*Nie vždy sa oplatí vyhrať, v tomto prípade je optimálne*
30, 32, 34, 36	*všetky 4 zápasy remizovať.*

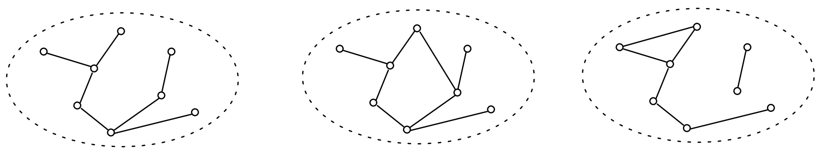
P – II – 2

Strom je objekt, ktorý má nasledujúce vlastnosti:

- Obsahuje konečný počet význačných miest (tie voláme *vrcholy*, ich počet značíme N), niektoré dvojice vrcholov sú prepojené „konármi" (tie voláme *hrany*).
- Je súvislý, teda z každého vrcholu sa vieme dostať do každého iného tak, že postupne prejdeme po niekoľkých hranách.
- Obsahuje práve $N - 1$ hrán.

Strom si môžeme predstaviť napríklad ako súvislú cestnú sieť, ktorú tvorí N miest a práve $N - 1$ ciest medzi nimi.

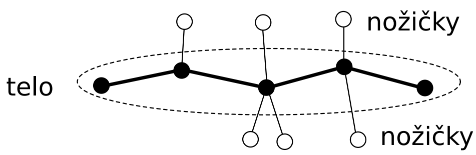
Na nasledujúcom obrázku ľavý graf je strom, zvyšné dva nie sú – druhý obsahuje priveľa hrán a tretí má síce správny počet hrán, ale nie je súvislý.



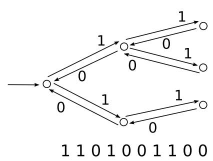
Obr. 39

Postupnosť na seba nadväzujúcich hrán, v ktorej sa žiadna hrana neopakuje, nazveme *cesta*. Všimnite si, že v strome medzi každými dvoma vrcholmi vedie práve jedna cesta.

Húsenica je taký strom, v ktorom existuje cesta (túto cestu voláme *telo*) taká, že každý vrchol stromu je buď na tejto ceste, alebo susedí s nejakým vrcholom cesty (takýto vrchol voláme *nožička*). Príklad húsenice nájdete na obrázku vľavo.



Obr. 40: Húsenica



Obr. 41: Popis stromu postupnosťou

Spôsobov, ako zadať strom, je niekoľko. My strom popíšeme postupnosťou núl a jednotiek: Vyberieme si jeden vrchol a začneme sa z neho po strome prechádzať, pričom chceme navštíviť každý vrchol a každou hranou prejsť práve dvakrát (raz v každom smere). Počas tejto prechádzky si budeme zapisovať nuly a jednotky nasledovne: Vždy, keď prídeme do vrcholu, v ktorom sme ešte neboli, napíšeme jednotku, vždy, keď sa z vrcholu vraciame späť (hranou, ktorou sme doň prvýkrát prišli), napíšeme nulu. Rozmyslite si, že takto vieme (aspoň jedným spôsobom) popísať ľubovoľný strom a že z takéhoto popisu vieme strom jednoznačne zostrojiť.

Súťažná úloha

Zo zadanej postupnosti núl a jednotiek zostrojte strom a zistite, koľko najmenej vrcholov z neho treba odstrániť, aby sme dostali húsenicu.

Inými slovami, nájdite v zadanom strome takú cestu, pre ktorú je množina vrcholov, ktoré na nej neležia, ani s ňou nesusedia, najmenšia možná.

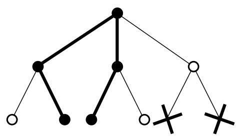
Formát vstupu Na vstupe je postupnosť núl a jednotiek reprezentujúca strom tak, ako je to popísané vyššie.

Formát výstupu Vypíšte jediné celé číslo – minimálny počet vrcholov, ktoré je treba odstrániť z pôvodného stromu, aby sme dostali húsenicu.

Príklad

Vstup
`110100110100110100`

Výstup
`2` *(Treba odstrániť 2 vrcholy.)*

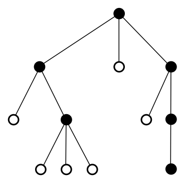


Obr. 42

Príklad

Vstup
`1101101010001011011000`

Výstup
`0` *(Zadaný strom už je húsenica.)*



Obr. 43

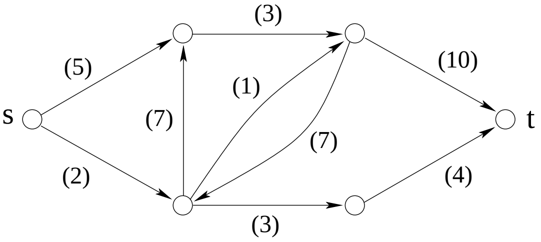
Poznámka V oboch príkladoch vstupu prechádzku začíname v „hornom“ vrchole stromu a ostatné vrcholy navštevujeme v poradí „zľava doprava“.

P – II – 3

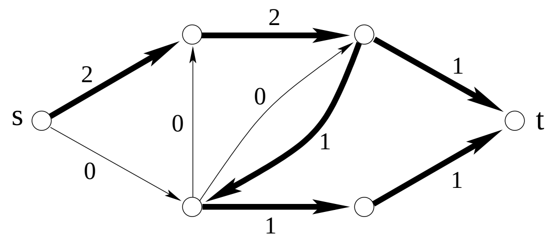
Predstavte si sieť na seba ponapájaných potrubí. Miesta, kde sa stretajú konce a začiatky potrubí, budeme volať uzly. Z každého uzlu môže viesť ľubovoľne veľa potrubí, podobne do každého uzlu môže ľubovoľne veľa potrubí prichádzať. Každé potrubie je upravené tak, že ním voda môže tiecť len jedným smerom. Rôzne potrubia môžu mať rôznu hrúbku, a teda nimi za sekundu môže pretiecť rôzne množstvo vody. (Maximálne množstvo vody, ktoré za sekundu môže pretiecť potrubím, voláme jeho *kapacitou*.)

Dva uzly budú mať špeciálny význam. Jeden z nich voláme zdroj (a značíme s), druhý voláme ústie (a značíme t). Zdroj je miesto, kde do potrubia môže pritekať voda, ústie je miesto, kde naopak voda môže odtekať. Pre jednoduchosť budeme predpokladať, že do zdroja ani z ústia žiadne potrubia nevedú.

Teraz si predstavte, že cez takúto sieť potrubí nejako pustíme vodu a pre každé potrubie si zapíšeme množstvo vody, ktoré ním za sekundu pretečie. Tomuto zoznamu čísel hovoríme *tok*. *Veľkosť* tohto toku je množstvo vody, ktoré za sekundu vytečie von ústím (alebo ekvivalentne, ktoré za sekundu pritečie zo zdroja).



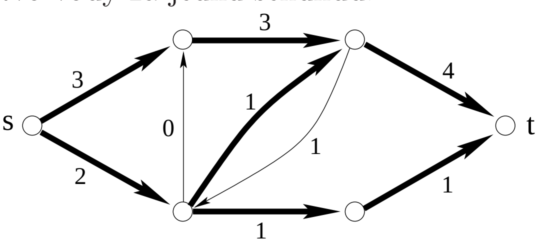
Obr. 44: príklad siete potrubí



Obr. 45: príklad toku veľkosti 2

Na obrázku 44 je príklad siete potrubí, čísla v zátvorkách predstavujú kapacity jednotlivých potrubí. Na obrázku 45 je jeden možný tok pre našu ukážkovú sieť potrubí. Hrubou čiarou sú znázornené potrubia, cez ktoré tečie nejaká voda, čísla pri potrubiach udávajú množstvo vody, ktoré za sekundu cez dané potrubie pretečie.

Maximálny tok je tok, ktorý má pre danú sieť potrubí najväčšiu možnú veľkosť. Inými slovami, maximálny tok popisuje, ako cez našu sieť potrubí „pretlačiť" čo najväčšie množstvo vody za jednu sekundu.



Obr. 46: príklad maximálneho toku

Súťažná úloha

Predstavte si, že máte k dispozícii čiernu krabičku, ktorej zadáte popis nejakej siete potrubí (spolu s ich kapacitami) a ona vám nájde hodnotu maximálneho toku. Pomocou nej vyriešte nasledovný problém:

Na vstupe máte zadané bludisko – neorientovaný graf s N lokalitami a M chodbičkami medzi nimi. Myška sa nachádza v lokalite 1. V lokalite N sa nachádza syr. Myška vie naraz uniesť maximálne 1 kúsok syra a chce preniesť čo najviac syra z lokality N do lokality 1. Nechce ale prísť dvakrát do tej istej lokality (samozrejme okrem lokalít 1 a N), lebo nechce riskovať, že si ju tam počká kocúr, ktorý ju tam po prvom prechode mohol zaňuchať. Koľko kúskov syra vie maximálne preniesť? (Predpokladajte, že lokality 1 a N

nie sú spojené chodbičkou, vtedy by samozrejme myška mohla postupne nanosiť všetok syr.)

Riešením tejto úlohy je teda program, ktorý ju rieši, pričom v ňom môžete volať funkciu `NajdiMaximalnyTok(...)`, ktorej zadáte ako parametre popis siete potrubí (počet uzlov, počet potrubí, pre každé potrubie jeho začiatok, koniec a kapacitu, a navyše informáciu, ktorý uzol je zdroj a ktorý je ústie) a ona vám vráti hodnotu maximálneho toku v ňom. Túto funkciu nemusíte implementovať, presný formát parametrov si zvoľte tak, ako vám bude vyhovovať.

Príklad

Vstup	**Výstup**
$N = 8$, $M = 9$	1
$1-2$, $1-5$, $1-7$, $2-3$, $2-4$, $3-8$, $4-8$, $5-6$, $6-8$, $7-8$	*(Myška môže ísť $1-2-3-8$ po syr, $8-$ $-7-1$ späť. Mohla by ešte ísť $1-5-6-8$ po syr, ale naspäť sa už nedostane.)*

Študijný text – toky v grafoch

V tejto časti zadania uvádzame formálnejšie definície vyššie spomenutých pojmov. Pokiaľ ti je všetko jasné, tento text čítať nemusíš, použi ho len v prípade nejasností v neformálnom popise.

Začneme niekoľkými definíciami: Graf je usporiadaná dvojica (V, E), kde V je konečná množina jeho vrcholov a E je konečná množina jeho hrán. Počet vrcholov označme N a počet hrán M, hrany označme e_1 až e_M. Každá hrana e_i spája práve dva vrcholy grafu a_i a b_i. Ak sa bude dať prechádzať po hrane e_i iba jedným smerom (t.j. vieme po nej prejsť z vrcholu a_i do b_i, ale nie opačne), budeme ju volať orientovaná hrana, inak ju budeme volať neorientovaná hrana. Graf nazveme orientovaný, resp. neorientovaný, ak sú všetky hrany v ňom orientované, resp. neorientované.

V grafe budeme mať dva špeciálne vrcholy. Jeden z nich nazveme *zdroj* (značíme s) a ten druhý *ústie* (značíme t). Ďalej budeme predpokladať, že každá hrana má svoju kapacitu $c_i \geq 0$. V orientovanom grafe hrana z a_i do b_i môže mať inú kapacitu ako hrana z b_i do a_i, resp. niektorá z nich ani nemusí existovať.

Funkciu f, ktorá priraďuje každej hrane množstvo vody, ktoré ňou preteká, nazveme tok, ak spĺňa nasledovné podmienky:

- $f(e_i) \in \mathbb{Z}$ pre $1 \leq i \leq M$. Teda cez každú hranu môže tiecť len celočíselné množstvo vody.

- $0 \leq f(e_i) \leq c_i$ pre $1 \leq i \leq M$. Teda cez každú hranu nemôže tiecť viac vody ako je jej kapacita, ani menej ako 0.

- Nech a je vrchol rôzny od zdroja a ústia. Nech hrany vedúce z vrcholu a majú čísla $v_1, \ldots, v_k$. Podobne, nech hrany vedúce do vrcholu a majú čísla $p_1, \ldots, p_l$. Potom platí: $\sum f(e_{v_i}) = \sum f(e_{p_i})$. T.j. vo „vnútorných“ vrcholoch sa voda nemôže hromadiť.

Teda tok je taká funkcia f, ktorá nám určuje, ktorým potrubím tečie koľko vody. Predpokladajme, že zdroj nemá žiadne prichádzajúce hrany a ústie nemá žiadne odchádzajúce hrany. Potom môžeme hodnotu toku f definovať ako množstvo vody, ktoré odteká zo zdroja. *Maximálny tok* je tok s najväčšou možnou hodnotou pre daný graf.

P – II – 4

Pôvodný študijný text „paralelizátor" k príkladu P–II–4 možno nájsť v zadaní príkladu P–I–4 na strane **115**.

V krajine je niekoľko miest, každé z nich má priradené nejaké prirodzené číslo (ktoré sa zmestí do bežnej celočíselnej premennej). Rôzne mestá majú rôzne čísla, ale inak číslovanie miest nie je nijako systematické.

Medzi niektorými dvojicami miest sú postavené cesty. Dokopy je M takýchto ciest. Všetky cesty sú jednosmerné. Všetky križovatky sú mimoúrovňové, t.j. keď sa vyberieme nejakou cestou, musíme po nej zájsť až do mesta, kde končí. Môžete predpokladať, že v každom meste aspoň jedna cesta začína alebo končí.

V poli `C[0..M-1][0..1]` sú zadané jednotlivé cesty (i-ta cesta spája mestá s číslami `C[i-1][0]` a `C[i-1][1]`).

Súťažná úloha

Napíšte čo najrýchlejší program pre paralelizátor, ktorý pre každý prípustný vstup skončí, pričom úspešne skončí práve vtedy, ak je cestná sieť silne súvislá – teda ak sa z ľubovoľného mesta vieme dostať po cestách do ľubovoľného iného mesta.

Poznámka Ide to v lepšom ako lineárnom čase. Samozrejme, ak sa vám takéto riešenie nájsť nepodarí, môžete niekoľko bodov získať aj za pomalšie riešenia.

Príklad

Vstup	**Výstup**
$M = 5$ cesty: $1 \to 2$, $2 \to 3$, $3 \to 1$, $47 \to 1$, $2 \to 47$	skončí úspešne *(Po prvých troch cestách vieme voľne prechádzať medzi mestami 1, 2 a 3, vďaka zvyšným dvom sa vieme dostať aj do mesta 47 a z neho zase preč.)*

Príklad

Vstup	**Výstup**
$M = 3$ cesty: $123456 \to 234567$, $23 \to 47$, $345678 \to 234567$	neskončí úspešne *(Nevieme sa dostať napr. z mesta 47 do mesta 123456.)*

P – III – 1

Na monitore sa opäť raz schyľuje k veľkej bitke medzi armádou hráča a armádou jeho počítača.

Každú armádu tvorí N príšer. Každú príšeru môžeme popísať dvoma prirodzenými číslami: prvé vyjadruje jej *útok* (útočnú silu), druhé jej *obranu* (obranné schopnosti). Príšeru s útokom A a obranou B zapisujeme A/B.

Ak sa dve príšery pobijú, ak je útok prvej väčší ako obrana druhej, druhá príšera zahynie. Môže sa samozrejme stať, že sa obe príšery zabijú navzájom, alebo že obe prežijú. Hovoríme, že príšera *vyhrala súboj*, ak sa jej podarí druhú príšeru zabiť a zároveň prežiť.

Príšery ovládané počítačom útočia, hráč sa musí brániť. Proti každej príšere počítača musí poslať práve jednu zo svojich príšer.

Súťažná úloha

Napíšte program, ktorý zistí, aký najväčší počet súbojov môžu dokopy hráčove príšery vyhrať.

Formát vstupu V prvom riadku vstupu je celé číslo N ($1 \leq N \leq 10\,000$) – počet príšer, ktoré má každý z hráčov k dispozícii. V druhom riadku sú uvedené hráčove príšery, v treťom riadku sú príšery počítača. Útok aj obrana každej príšery je celé číslo od 1 do 1 000 000 000.

Formát výstupu Vypíšte jediné celé číslo – najväčší počet hráčovych príšer, ktoré môžu naraz vyhrať svoje súboje.

Príklad

Vstup
```
3
9/2 9/7 8/8
100/100 1/1 7/8
```

Výstup
```
2
```
(Nad príšerou 7/8 vyhrá jedine príšera 9/7. Príšere 1/1 môže hráč priradiť hociktorú zo zvyšných dvoch svojich príšer.)

Príklad

Vstup
```
4
10/1 10/1 10/2 10/9
10/1 10/1 10/2 10/8
```

Výstup
```
0
```
(Bez ohľadu na rozdelenie sa všetky príšery navzájom zabijú.)

Príklad

Vstup
```
4
7/3 2/12 47/47 5/6
10/1 4/7 3/6 1/1
```

Výstup
```
4
```
(Jediné riešenie: svoje príšery hráč priradí postupne tretej, prvej, druhej a štvrtej príšere počítača.)

P – III – 2

V Bürrolande vyriešili otázku nezamestnanosti po svojom – zamestnali hromadu úradníkov. Aby mali noví úradníci čo robiť, začali vydávať všelijaké potvrdenia, ktoré je potrebné predkladať pri rôznych príležitostiach. Keďže úradníkov je veľa, každý z nich je úzko špecializovaný a vie vydávať len jeden typ potvrdení.

Dostať od úradníka potvrdenie, ktoré vydáva, nie je vôbec ľahké. Aby ste ho dostali, musíte mať potvrdenie iného konkrétneho typu, a navyše musíte úradníkovi predložiť niekoľko svojich osobných dokladov (nezáleží na tom akých, dôležitý je len ich počet, ktorý úradník potrebuje vidieť).

Marián už vlastní jedno potvrdenie, potreboval by si ale vybaviť potvrdenie iného typu. Teraz ho zaujíma, či je to vôbec možné, a ak áno, aký *najmenší počet osobných dokladov* mu na to bude stačiť.[1]

Súťažná úloha

Daný je počet rôznych typov potvrdení N ($2 \leq N \leq 10\,000$), počet úradníkov M ($1 \leq \leq M \leq 1\,000\,000$) a číslo K ($1 \leq K \leq 10\,000$), udávajúce počet rôznych osobných dokladov existujúcich v Bürrolande.

Typy potvrdení sú očíslované od 1 po N. Marián vlastní potvrdenie typu 1 a potrebuje potvrdenie typu N.

Pre každého uradníka sú dané tri čísla: typ potvrdenia, ktoré mu treba ukázať, typ potvrdenia, ktorý vydáva a počet osobných dokladov, ktoré na to treba mať so sebou (číslo od 0 do K).

Úlohou je vypísať najmenší počet osobných dokladov, ktoré stačia k získaniu potvrdenia typu N, a tiež postupnosť, v akej máme potvrdenia vybavovať. Ak sa potvrdenie typu N nedá vybaviť, podajte o tom správu.

Príklad

Vstup

$N = 4$, $M = 5$, $K = 2$

```
1 4 2
1 2 0
2 3 2
3 4 1
1 3 1
```

Výstup

```
1
3 4
```

Vysvetlenie

Existuje viacero spôsobov, ako získať potvrdenie typu 4. Môžeme ho priamo získať z potvrdenia 1 (u prvého úradníka), ale na to potrebujeme 2 doklady. Alebo si najskôr môžeme vybaviť potvrdenie typu 2 (u druhého úradníka), potom 3 (u tretieho) a nakoniec 4 (u štvrtého), ale k tomu potrebujeme tretiemu úradníkovi predložiť tiež 2 doklady.
Najlepšie je však získať potvrdenie 3 (u piateho úradníka) a potom 4, na čo nám stačí jeden doklad.

[1] Pre Mariána je oveľa rýchlejšie navštíviť pár úradníkov, ako nájsť doma vo svojom „poriadku“ rodný list. . .

P – III – 3

Pôvodný študijný text „paralelizátor" k príkladu P–III–3 možno nájsť v zadaní príkladu P–I–4 na strane **115**.

Danka a Janka majú rozohratú partiu piškvoriek. Danka hrá s krížikmi a začína. V premenných R a C je počet riadkov a stĺpcov hracej plochy, v dvojrozmernom poli znakov A je na súradniciach $[i, j]$ (kde $0 \leq i < R$, $0 \leq j < C$)[2] znak '`X`', '`O`' alebo '`.`'. Znak '`.`' znamená, že políčko je zatiaľ prázdne. V premennej K je dĺžka piškvorky potrebná na výhru partie.

Môžete predpokladať, že vstup korektne popisuje rozohratú partiu, v ktorej je práve na ťahu Danka (teda počet krížikov a krúžkov je rovnaký a nikde na hracej ploche sa nevyskytuje K rovnakých znakov v rade vedľa seba).

Súťažná úloha

Napíšte čo najrýchlejší program pre paralelizátor, ktorý pre každý prípustný vstup skončí, pričom *úspešne* skončí práve vtedy, ak má v danej pozícii Danka vyhrávajúcu stratégiu. (Inými slovami, ak existuje postup, ktorý Danke zaručí výhru bez ohľadu na to, ako dobre bude Janka hrať – teda ak Danka z danej pozície dokáže vhodnou voľbou ťahov vyhrať vždy, bez ohľadu na to, ako ťahá Janka.)

Príklad

Vstup
$R = 6$, $C = 5$, $K = 4$
A :
```
.....
.....
.....
.OXO.
.X...
.....
```

Výstup
skončí úspešne

(Danka začne ťahom na políčko $[2, 3]$*, teda na políčko v treťom riadku a štvrtom stĺpci, čím dostane tri znaky '`X`' vedľa seba.*

Ak aj Janka potiahne na jedno z políčok $[5, 0]$ *a* $[1, 4]$*, Danka vždy môže v druhom ťahu potiahnuť na to druhé z nich a vyhrať.)*

Príklad

Vstup
$R = 6$, $C = 5$, $K = 4$
A :
```
XOXOX
XOXOX
OXO.O
XO.OX
X....
OXOXO
```

Výstup
neskončí úspešne

(Danka prvým ťahom piškvorku nevytvorí, dokonca ani nedokáže zabrániť Janke, aby nasledujúcim ťahom vyhrala.)

[2] Všimnite si, že riadky aj stĺpce číslujeme od 0.

Príklad

Vstup	**Výstup**
$R = 5$, $C = 6$, $K = 6$	neskončí úspešne
A :	
......	*(Piškvorky sa dajú vytvoriť jedine vodorovne. Janka ľahko zabráni Danke vyhrať. Pri optimálnej hre oboch partia skončí remízou.)*
......	
......	
......	
......	

Študijný text – piškvorky

Piškvorky sú hra, ktorú hrajú dvaja hráči na štvorčekovom papieri obdĺžnikového tvaru. Na začiatku hry sa hráči dohodnú na kladnom celom čísle K. Každý hráč má svoju značku – začínajúci hráč obvykle používa krížik (‘`X`’) a druhý hráč krúžok (‘`O`’). Hráči ťahajú striedavo, ťah spočíva v tom, že si hráč zvolí prázdne políčko na hracom pláne a umiestni doň svoju značku. Hra končí, akonáhle niektorý hráč dosiahol, že sa niekde na hracom pláne vo vodorovnom, zvislom alebo šikmom (diagonálnom) smere nachádza K jeho znakov za sebou. V prípade, že sa celá plocha zaplní a nik nevyhral, hra končí remízou.

P – III – 4

Najmenší kladný násobok čísla 13, ktorý je tvorený len ciframi 1 a 2, je 221. Aj číslo 997 má násobky, ktoré sa dajú zapísať len použitím cifier 1 a 2. Najmenším z nich je číslo $1\,121\,222\,212 = 997 \times 1\,124\,596$. Najmenším násobkom čísla 3, v ktorom môžu byť použité len cifry 4 a 7, je číslo 444.

Súťažná úloha

Tvojou úlohou bude napísať program, ktorý bude takéto čísla hľadať.

Formát vstupu V prvom riadku vstupu je uvedený reťazec R tvorený aspoň jednou a najviac desiatimi ciframi (od 0 do 9). Všetky cifry v R sú navzájom rôzne.

V druhom riadku vstupu je uvedené jedno kladné celé číslo N ($1 \le N \le 1\,000\,000$).

Formát výstupu Vypíš jediný riadok a v ňom jediné celé číslo – najmenší kladný násobok čísla N, v ktorom sa vyskytujú len cifry z reťazca R. (Pozor, toto číslo môže mať dosť veľa cifier!)

Ak číslo N žiaden takýto násobok nemá, vypíšte namiesto toho reťazec „`neexistuje`“.

Príklad

Vstup	**Výstup**
`12`	`1121222212`
`997`	

Príklad

Vstup	Výstup
`1379` `2`	`neexistuje`

Príklad

Vstup	Výstup
`7654321` `47`	`47`

P – III – 5

Rozhodli sme sa, že začneme konkurovať svetoznámym „vyhľadávačom“, ako sú napríklad Google a Yahoo!. Hlavným kľúčom k úspechu bude samozrejme prezentácia nájdených stránok používateľovi. Presnejšie, chceli by sme z každej nájdenej stránky ukázať používateľovi čo najkratší úsek, ktorý obsahuje všetky slová, ktoré hľadal. Tvojou úlohou bude samozrejme napísať program, ktorý by takýto úsek v texte danej stránky našiel.

Súťažná úloha

Daných je N slov, ktoré používateľ zadal. Okrem toho je daný text stránky, obsahujúci M slov. Napíšte program, ktorý nájde najkratší úsek stránky, ktorý obsahuje všetky zadané slová (každé aspoň raz). Vyhľadávame len presné výskyty slov, teda text „`ahoj oblak`“ neobsahuje slovo „`lak`“.

Úsek stránky tvorí niekoľko po sebe nasledujúcich slov. Dĺžka úseku je rovná súčtu ich dĺžok, plus ich počet, mínus jedna (za medzery medzi nimi). Teda napríklad dĺžka úseku „`toto je usek`“ je 12.

Formát vstupu V prvom riadku vstupu je celé číslo N – počet vyhľadávaných slov. Nasleduje N riadkov, v každom z nich je jedno vyhľadávané slovo. Všetky vyhľadávané slová budú navzájom rôzne.

V nasledujúcom riadku vstupu je celé číslo M – počet slov na stránke. Nasleduje M riadkov, v každom z nich je jedno slovo textu stránky, v poradí, v akom sú na stránke uvedené.

Každé slovo je reťazec tvorený len malými písmenami anglickej abecedy. Dĺžka každého slova je medzi 1 a 100 znakmi, vrátane.

N je medzi 1 a 5 000, vrátane. M je medzi 1 a 200 000, vrátane. Súčet dĺžok vyhľadávaných slov neprekročí 100 000. Súčet dĺžok slov na stránke neprekročí 1 000 000.

Formát výstupu Nájdite a vypíšte najkratší úsek stránky, v ktorom sa každé vyhľadávané slovo vyskytuje aspoň raz. Ak je takých úsekov viac, vypíšte ten, ktorý prvý začína. Úsek vypisujte tak, ako je uvedený na vstupe, teda každé slovo na samostatný riadok.

Ak sa niektoré vyhľadávané slovo v texte stránky nenachádza, vypíšte jediný riadok s textom „`ZLA STRANKA`“ (bez uvodzoviek).

Príklad

Vstup

```
3
nasi
vasi
prisli
20
poslali
ma
nasi
k
vasim
aby
prisli
vasi
k
nasim
ak
nepridu
vasi
k
nasim
tak
nepridu
nasi
k
vasim
```

Výstup

```
nasi
k
vasim
aby
prisli
vasi
```

Riešenia súťažných úloh

Kategória P

P – I – 1

Tento príklad má veľa rôzne rýchlych riešení, niektoré z nich si postupne ukážeme.

Priamočiare riešenie je zostrojiť si podľa vstupu *bipartitný graf* (vrcholy jednej partície sú hráčove pluky, druhú partíciu tvoria pluky počítača, hrana predstavuje priradenie plukov, pri ktorom hráčov pluk vyhrá) a v tomto grafe nájsť *najväčšie párovanie* – najväčšiu množinu hrán, v ktorej žiadne dve nemajú spoločný vrchol. Existujú známe algoritmy riešiace túto úlohu, najznámejší a najjednoduchší z nich je založený na hľadaní zlepšujúcich ciest. Tento algoritmus má časovú zložitosť $O(MN)$, v najhoršom prípade teda $O(N^3)$. Keďže ale existujú aj lepšie riešenia pre túto úlohu, nebudeme sa tu algoritmami na hľadanie párovania podrobnejšie zaoberať.

To, čo chceme dosiahnuť, je vybrať čo najviac navzájom disjunktných dvojíc (hráčov pluk, pluk počítača), v ktorých má hráčov pluk viac vojakov ako pluk počítača.

Utrieďme pluky hráča aj pluky počítača podľa počtu vojakov nerastúco (t.j. každého prvý pluk bude najväčší, atď.).

Pozorovanie 1. Existuje optimálne riešenie, v ktorom keď zoradíme hráčove pluky podľa veľkosti, budú aj im zodpovedajúce pluky počítača zoradené podľa veľkosti.

Prečo je tomu tak? Zoberme ľubovoľné optimálne riešenie R. Dokážeme si, že keď teraz prehádžeme pluky počítača tak, aby boli zoradené podľa veľkosti, opäť dostaneme prípustné riešenie R'.

Nech P je k-ty najväčší vybratý pluk počítača. V riešení R mu je priradený nejaký hráčov pluk, ktorý je od neho väčší. Máme ešte $K-1$ plukov počítača, ktoré sú väčšie ako P. Každý z nich má v R priradený nejaký hráčov pluk, všetky tieto hráčove pluky sú od nich väčšie, a teda sú väčšie aj od P. Vieme teda už o k hráčovych plukoch, ktoré sú od P väčšie. Preto aj v riešení R' (kde je pluku P priradený k-ty najväčší hráčov pluk) bude P zjavne od svojej „dvojice“ menší.

Toto pozorovanie nám stačí na napísanie riešenia pomocou dynamického programovania: Optimálne riešenie pre prvých x hráčovych plukov a prvých y plukov počítača vyzerá buď tak, že x-tý pluk hráča porazí y-ty pluk počítača (ak sa to dá) a zvyšné pluky priradíme (už spočítaným) optimálnym spôsobom, alebo nevyberieme x-tý pluk hráča, alebo nevyberieme y-ty pluk počítača.

Priamočiara implementácia tohto riešenia potrebuje čas aj pamäť $O(N^2)$. Pamäťové nároky sa pri veľkej snahe dajú zmenšiť na $O(N)$. Opäť, detaily nechávame na čitateľa, keďže ešte máme na sklade pár lepších riešení tejto úlohy.

Ukážeme si teraz ľahšie napísateľné riešenie, ktoré bude potrebovať čas $O(N^2)$ a pamäť $O(N)$.

Pozorovanie 2. Existuje optimálne riešenie, v ktorom vyberieme najväčších K hráčovych plukov a najmenších K plukov počítača.

Dôkaz. Zoberme ľubovoľné optimálne riešenie. Kým sa to dá, nahrádzajme vybratý pluk počítača za menší nevybratý. Zjavne stále dostávame rovnako dobré prípustné riešenia. Keď sa to už nedá, zjavne máme vybratých niekoľko najmenších plukov počítača. Teraz ešte analogicky „zväčšíme“ vybraté hráčove pluky a vyhrali sme.

Predchádzajúce dve pozorovania dokopy nám stačia na triviálne napísateľné kvadratické riešenie – jednoducho postupne pre každé K skontrolujeme, či dostaneme prípustné riešenie, ak K najväčším hráčovym plukom priradíme (v takom istom poradí) K najmenších plukov počítača.

Ešte stále existuje aj lepšie riešenie.

Rovnako ako v predchádzajúcom prípade si uvedomíme, že môžeme vybrať niekoľko najväčších hráčovych plukov. Avšak postupne (začínajúc najväčším hráčovym plukom) každému z nich priradíme čo najväčší pluk počítača, ktorý ešte dokáže poraziť.

Zostáva zodpovedať dve otázky. Prvá z nich je, prečo to funguje.

Zoberme ľubovoľné optimálne riešenie, v ktorom sme vybrali niekoľko najväčších hráčovych plukov a v ktorom sú pluky oboch hráčov zoradené podľa veľkosti. Postupne od najväčšieho sa pozerajme na pluky počítača a každý z nich skúšajme nahradiť **väčším** nepoužitým, kým sa to dá. Takto zjavne dostaneme rovnako dobré prípustné riešenie – a ľahko nahliadneme, že práve toto riešenie nájde aj vyššie popísaný algoritmus.

Druhá otázka je, ako to efektívne implementovať. Na to si stačí uvedomiť, že každému ďalšiemu hráčovmu pluku priradíme menší pluk počítača ako predchádzajúcemu. Preto si stačí udržiavať index posledného priradeného pluku počítača.

Takto nájdeme optimálne priradenie v lineárnom čase. Nesmieme ale zabudnúť, že sme museli pluky utriediť podľa veľkosti. Preto celková časová zložitosť tohto riešenia je $O(N \log N)$.

P – I – 2

Situáciu zo zadania si predstavíme ako ohodnotený orientovaný graf. Vrcholmi budú lokality, hranami teleporty medzi lokalitami. Každá hrana je ohodnotená číslom, ktoré reprezentuje posun v čase pri prechode danou hranou (budeme ho volať dĺžka). Úlohou je nájsť sled[3] z vrchola 1 do vrchola N s najmenším súčtom ohodnotení hrán (budeme ho volať najkratší), prípadne vypísať, že takýto sled neexistuje.

Najskôr si všimnime, že ak medzi dvoma vrcholmi vedie viac hrán (tým istým smerom), tak stačí uvažovať tú s najmenšou dĺžkou (inak by sme vedeli sled skrátiť výmenou hrany za kratšiu). Ďalej si všimnime, že náš graf môže obsahovať aj hrany so zápornou dĺžkou. Môžu teda nastať dve situácie, kedy hľadaný najkratší sled neexistuje. Buď sa z 1 do N po hranách grafu nevieme dostať vôbec, alebo existuje sled z vrchola 1 do N taký, že obsahuje cyklus so záporným súčtom dĺžok. (Po takomto cykle môžeme chodiť dookola a vždy zmenšovať celkovú dĺžku sledu. Preto neexistuje najkratší sled – od každého sledu totiž vieme vyrobiť kratší.)

Riešenie 1: Floyd-Warshallov algoritmus Graf si zapíšeme do dvojrozmerného

[3] Sled je postupnosť vrcholov $v_1, \ldots, v_k$, taká že medzi v_i a v_{i+1} je hrana.

poľa `G`, pričom `G[i][j]` bude dĺžka hrany z vrchola i do vrchola j (alebo ∞, ak taká hrana neexistuje). Algoritmus potom vyzerá takto:

```
for k:=1 to N do
  for i:=1 to N do
    for j:=1 to N do
      if G[i][j] > G[i][k]+G[k][j] then
        G[i][j] := G[i][k]+G[k][j];
```

Po dobehnutí algoritmu je v `G[i][j]` dĺžka najkratšieho sledu z i do j (prípadne ∞, ak žiaden neexistuje). Navyše, ak `G[i][i]` je záporné pre nejaké i, tak vrchol i leží na nejakom zápornom cykle. Ak tento vrchol leží na nejakom slede z 1 do N (teda `G[1][i]` a `G[i][N]` nie sú ∞), tak existuje ľubovoľne krátky sled z 1 do N.

Idea algoritmu je v dynamickom programovaní. Ak vonkajší cyklus prebehol k krát, tak `G[i][j]` je dĺžka najkratšieho sledu z i do j takého, že ako vnútorné vrcholy používa len vrcholy z množiny $\{1, \ldots, k\}$.

Časová zložitosť tohto algoritmu je $O(N^3)$, pamäťová $O(N^2)$.

Riešenie 2: Bellman-Fordov algoritmus Hrany v tomto algoritme si pamatáme jednoducho, napr. v 3 poliach, kde `a[i]` je začiatok, `b[i]` je koniec a `t[i]` je dĺžka i-tej hrany. Idea tohto algoritmu spočíva tiež v dynamickom programovaní. Nech `D[l][i]` je dĺžka takého najkratšieho sledu z 1 do i, ktorý používa práve l hrán. Zrejme `D[0][i]` je ∞ pre všetky i okrem $i = 1$, pre ktoré je to 0. Nech teraz poznáme `D[l-1][i]` pre všetky i a nejaké $l > 0$. Je ľahko vidieť, ako teraz vypočítame `D[l][i]` pre ľubovoľné i. V najkratšom slede používajúcom l hrán je nejaká hrana posledná a zvyšok je najkratší sled používajúci $l-1$ hrán, končiaci v začiatku l-tej hrany. Jednoducho vyskúšame všetky možnosti pre túto poslednú hranu. Máme teda:

$$\texttt{D[l][i]} = \min_{1 \le k \le M} \left\{ \texttt{D[l-1][a[k]]} + \texttt{t[k]},\ \text{kde } \texttt{b[k]} = i \right\}$$

Najjednoduchšie sa to (pri našej reprezentácii grafu) počíta tak, že prejdeme postupne cez všetky hrany a počítame jednotlivé minimá pre všetky vrcholy súčasne.

Vieme, že ak existuje najkratší sled z 1 do N, tak potom bude mať nanavýš $N-1$ hrán (lebo neobsahuje cyklus). Výsledkom je teda minimum z `D[l][N]` pre $l = 1, \ldots, N-1$. Ak je táto hodnota ∞, tak žiaden sled neexistuje. Ešte potrebujeme overiť, či sa nemôžeme dostať do záporného cyklu. Takýto cyklus môže obsahovať najviac N hrán (predstavme si graf s hranami (1,2,1), (2,3,1), …, ($N-1$,N,1), (N,1,$-N$)). Ak teda existuje sled obsahujúci záporný cyklus, tak existuje aj sled dĺžky nanajvýš $2N-1$, ktorý tento cyklus obsahuje. Úpravu vzdialeností teda spustíme ešte N krát. Ak minimum z `D[l][N]` pre $N \le l \le 2N-1$ je menšie ako výsledok, ktorý sme našli predtým, potom naozaj existuje sled z 1 do N, ktorý obsahuje záporný cyklus.

Takto určite odhalíme všetky vrcholy, ktoré ležia na nejakom (z vrcholu 1 dosiahnuteľnom) zápornom cykle. Navyše takto odhalíme aj niektoré z vrcholov, ktoré sú z nejakého takéhoto záporného cyklu dosiahnuteľné – ale nie nutne všetky! (Ako príklad uvažujme graf s zápornou hranou z 1 do 1 a s oveľa oveľa drahšou kladnou hranou z 1 do 2.)

Aby sme teda zistili, či existuje ľubovoľne krátky sled z 1 do N, potrebujeme zistiť, či je vrchol N dosiahnuteľný z niektorého z (dosiahnuteľných) záporných cyklov, teda či je dosiahnuteľný z niektorého z vrcholov, ktoré sme našli vyššie popísaným postupom. Toto už vieme spraviť jedným jednoduchým prehľadávaním.

Na záver ešte jedno zjednodušenie. Uvedomme si, že nás nezaujímajú presne dĺžky sledov s práve k hranami. Preto nám stačí jednorozmerné pole `D[i]` a jednotlivé úpravy stačí robiť len na ňom. Premyslite si, že výsledok to nezmení (aj keď jednotlivé iterácie budú vyzerať inak).

Časová zložitosť tohto algoritmu je $O(NM)$, pamäťová $O(N+M)$.

Poznámka pre skusených: Ak poznáte Dijkstrov algoritmus, tak isto viete, že je rýchlejší od oboch uvedených algoritmov, avšak nefunguje na grafoch so zápornými hranami! Skúste si vymyslieť kontrapríklad.

Poznámka pre ešte skusenejších: Ak by sme hľadali najkratšiu cestu (teda sled, v ktorom vrcholy sa nemôžu opakovať), tak daný problém by sa už stal NP-ťažkým problémom (všetky známe polynomiálne algoritmy na hľadanie najkratšej cesty totiž fungujú len na špeciálnych typoch grafov, väčšinou ide o grafy bez záporných cyklov).

P – I – 3

Na riešenie tejto úlohy použijeme postup známy pod názvom *dynamické programovanie* – budeme riešiť úlohu zo zadania (a jej drobne zmenené verzie) postupne pre rôzne časti cestnej siete, pričom z výsledkov pre menšie časti budeme počítať výsledky pre väčšie časti mapy. Ako to celé bude fungovať sa dočítate v ďalšom texte.

Cestnú sieť v kráľovstve môžeme tradičným spôsobom reprezentovať grafom – vrcholy grafu budú mestá, hrany cesty medzi nimi. Zo zadania vieme, že tento graf je strom, teda má N vrcholov, práve $N-1$ hrán a je súvislý.

Ľubovoľný z vrcholov stromu nazveme jeho koreňom. Všetkých jeho susedov nazveme jeho synmi, ich ostatní susedia budú zase ich synmi, atď. (Môžeme si to celé predstaviť tak, že celý strom zavesíme za koreň. Otcom vrcholu je ten jeho sused, ktorý je nad ním, ostatní susedia budú jeho synmi.)

Od tohto okamihu budeme pod slovom *podstrom s koreňom v* rozumieť tú časť nášho stromu, z ktorej sa do koreňa vieme dostať len cez vrchol v. Keď budeme hovoriť o *podstrome*, myslíme tým podstrom s ľubovoľným koreňom.[4]

Názov *skupina posádok* bude označovať množinu vrcholov s posádkami, ktorá je súvislá a nesusedí s žiadnym ďalším vrcholom s posádkou.

Všimnime si, ako vyzerá optimálne riešenie. Pre koreň máme dve možnosti: buď tam posádka je, alebo tam nie je. Ak tam nie je, ostalo nám niekoľko *samostatných* podstromov, v každom z nich sú posádky rozmiestnené optimálnym spôsobom. Čo ak tam posádka je? Všimnime si skupinu posádok obsahujúcu koreň. V žiadnom z vrcholov, ktoré s ňou susedia, posádka byť nemôže. Keď odstránime všetky tieto vrcholy z grafu, opäť nám ostane niekoľko *samostatných* podstromov. A opäť v každom z týchto podstromov sú posádky rozmiestnené optimálne.

[4] Často sa za podstrom považuje ľubovoľný podgraf, ktorý je strom. Úplne korektne by sme mali naše podstromy volať napr. *podstrom indukovaný vrcholom v*. Čitateľ určite pochopí, že kvôli ľahšiemu vyjadrovaniu sme radšej zvolili takúto dohodu.

Keby sme teda vedeli optimálne spôsoby rozmiestnenia posádok pre všetky podstromy, vedeli by sme teraz vyskúšaním konečného počtu možností nájsť optimálny spôsob rozmiestnenia posádok pre celý strom.

Lenže aj každý z podstromov je strom a môžme preň zopakovať celú túto úvahu.

No a princíp *dynamického programovania* je o tom, že sa na problém pozrieme z opačnej strany. Pre *listy* (vrcholy, ktoré nemajú žiadneho syna) je riešenie triviálne. No a postupne budeme spracúvať čím ďalej, tým väčšie podstromy, až kým nenájdeme optimálne riešenie pre celý strom.

Uvedomte si, že v okamihu, keď spracúvame nejaký podstrom, boli už všetky *jeho* podstromy spracované, a teda pre ne vieme optimálne riešenie.

Aby sa nám riešenie ľahšie implementovalo, urobíme nasledujúci trik:

Nech $A_{v,i}$ je hodnota najlepšieho riešenia pre podstrom s koreňom v, ak vieme, že skupina posádok, obsahujúca v, má veľkosť i. (Pritom i je od 0 do 3, $i = 0$ znamená, že vo v nie je posádka.)

Ďalej nech $A_v = \max_i A_{v,i}$ je hodnota najlepšieho riešenia pre podstrom s koreňom v.

Pripomeňme si zo zadania, že číslo b_v hovorí, koľko pridáva posádka vo v k bezpečnosti kráľovstva.

Ukážeme, ako ľahko spočítať tieto hodnoty pre v, ak ich poznáme pre všetkých jeho synov. Nech v má synov $s_1, \ldots, s_K$.

Zjavne $A_{v,0} = \sum_{i=1}^{K} A_{s_i}$ – každý z podstromov vyriešime optimálne.

Ďalej $A_{v,1} = b_v + \sum_{i=1}^{K} A_{s_i,0}$ – zarátame prínos vrcholu v, každý podstrom vyriešime optimálne s tým, že jeho vrchol musí zostať prázdny.

Podobne spočítame $A_{v,2}$ (len v jednom podstrome vyberieme $A_{s_i,1}$) a $A_{v,3}$ (v dvoch podstromoch vyberieme $A_{s_i,1}$ alebo v jednom $A_{s_i,2}$).

Čas potrebný na spracovanie jedného vrcholu je úmerný počtu jeho susedov, celkový čas je teda úmerný počtu vrcholov a hrán dokopy. Hrán je však len $N-1$, preto je celková časová zložitosť $O(N)$.

P – I – 4

Časť a)

Nech dĺžka reťazca *ihla* je N a dĺžka reťazca *seno* je M. Ukážeme riešenie v čase $O(\log N + \log M)$.

Základná myšlienka: Keby nám niekto povedal, kde začína niektorý výskyt reťazca *ihla* v reťazci *seno*, pomocou volania **Both** ľahko overíme v čase $O(\log N)$, či hovorí pravdu: Podobne ako sme v príklade v zadaniach vedeli paralelne overiť všetky delitele čísla, môžeme paralelne porovnať N dvojíc písmen.

Keďže nám ale nik nepovie, kde začína nejaký výskyt reťazca *ihla*, pomocou **Some** paralelne overíme všetky možné začiatky a úspešne skončíme, ak niektorý z nich vyhovuje.

Časť b)

Priamočiare riešenie je vypočítať postupne všetky políčka pyramídy a hodnotu horného porovnať s V. Políčok je $N(N-1)/2$, preto takéto riešenie beží v čase $O(N^2)$.

Ešte stále sme ale nevyužili dve skutočnosti: To, že poznáme V – a samozrejme silu paralelizátora. Ukážeme si teraz riešenie, ktoré pobeží v čase $O(N)$.

Ak by sme poznali obe čísla v druhom riadku zhora, vieme ľahko overiť, či je V správny súčet celej pyramídy – jednoducho ich sčítame. My ich však nepoznáme – iba vieme, že sú medzi 0 a 9 999 vrátane. Pomocou **Some** vyskúšame všetky dvojice takýchto čísel, ktoré (modulo 10 000) dávajú súčet V – t.j. skúsime „uhádnuť“ tie správne čísla, ktoré tam majú byť. Pre každú zo skúšaných možností potrebujeme o oboch nových číslach overiť, či patria na to miesto, kam sme ich práve umiestnili. Pomocou jedného volania **Both** overíme obe čísla naraz. No a už si stačí len uvedomiť, že sme dostali opäť presne pôvodnú úlohu, len s pyramídou, ktorá má o 1 kratšiu základňu.

Keď sa takto dostaneme až k spodnému riadku, namiesto hádania sa už len jednoducho pozrieme na čísla zo vstupu.

Prečo naše riešenie funguje? Uvedomme si, že vlastne ideme v pyramíde „zhora dole“ a skúšame ju všetkými spôsobmi dopĺňať. Úspešne skončíme len vtedy, ak sa nám podarilo doplniť celú pyramídu. No a keďže pyramída je svojim spodným riadkom jednoznačne určená, toto sa dá len vtedy, ak je naozaj V na jej vrchu.

„Spracovať“ jednu úroveň pyramídy vieme v konštantnom čase, úrovní je $O(N)$, preto aj časová zložitosť nášho programu je $O(N)$.

P – II – 1

Na úvod si dohodnime nasledujúce značenie:

- d_i je deň, kedy sa hrá i-ty zápas, navyše definujeme $d_0 = 0$,
- b_i je počet bodov, ktoré získame za i-ty zápas (0, 1 alebo 3).

Všimnime si nejaké (ľubovoľné) optimálne riešenie problému. Ukážeme, že existuje rovnako dobré riešenie, kde je postupnosť počtov získaných bodov neklesajúca – inými slovami, najskôr niekoľko zápasov prehráme, potom niekoľko remizujeme a všetky ostatné vyhráme.

Toto vieme dosiahnuť postupnými výmenami výsledkov zápasov. Ak pre nejaké i platí $b_{i-1} > 0$ a $b_i = 0$, tak ich môžeme vymeniť – namiesto $(i-1)$-ého zápasu vyhráme/remizujeme až i-ty, síl na to máme určite dosť a po i-tom zápase budeme na tom presne rovnako ako v pôvodnom riešení. Podobne, výsledky môžeme vymeniť aj ak $b_{i-1} = 3$ a $b_i = 1$. Tu rozlíšime dva prípady: Ak $R < V$, môžeme ich vymeniť z podobného dôvodu ako predtým, prvý zápas namiesto výhry len remizujeme (čo nás stojí nanajvýš toľko isto síl), druhý zápas vyhráme, celková „spotreba síl“ za tieto dva zápasy je rovnaká. Ak $R \geq V$, táto situácia nenastane, lebo v optimálnom riešení sa nám neoplatí remizovať.

Zamyslime sa teraz nad tým, ako overiť, či vieme vyhrať posledných niekoľko zápasov.

Označme v_i minimálnu veľkosť sily, ktorá nám tesne pred i-tym zápasom stačí na to, aby sme od tohto okamihu do konca sezóny vyhrali všetky zápasy. Hodnoty v_i spočítame od konca. Zjavne $v_N = V$. Ak vieme hodnotu v_{i+1}, hodnotu v_i spočítame nasledovne: $v_i = V + \max(0, v_{i+1} - (d_{i+1} - d_i))$. (Potrebujeme určite aspoň V na vyhranie tohto zápasu. Pred nasledujúcim zápasom musíme mať v_{i+1} sily. Do nasledujúceho zápasu jej vieme načerpať $d_{i+1} - d_i$, prípadný zvyšok si teda musíme priniesť spred i-teho zápasu.)

Na druhej strane, ľahko vieme určiť, že pred i-tym zápasom vieme mať najviac d_i sily. Vyhrať všetko od i-teho zápasu ďalej teda vieme práve vtedy, ak $d_i \geq v_i$.

Jemným zovšeobecnením tejto úvahy dostávame prvé pomerne efektívne riešenie úlohy Vyskúšame všetky možnosti pre počet výhier a. Pre každú možnosť vyššie uvedeným postupom overíme, či je prípustná. Ak áno, dopočítame, koľko najviac predchádzajúcich zápasov vieme remizovať. (Toto spravíme presne rovnakým postupom, začneme od $(N - a + 1)$-ého zápasu, pred ktorým máme mať v_{N-a+1} sily, pri výpočte sily potrebnej pred predchádzajúcimi zápasmi použijeme ten istý vzorec, len namiesto V v ňom bude R, keďže tieto zápasy chceme remizovať.) Takto získaný počet remizovaných zápasov označme b.

Vyskúšať jedno možné a vieme teda v lineárnom čase od N. Spomedzi všetkých rádovo N skúšaných možností si vyberieme samozrejme tú, kde je získaný počet bodov (teda hodnota $3a + b$) najväčší možný. Vyššie popísané riešenie má zjavne časovú zložitosť $O(N^2)$.

Teraz ukážeme, ako túto úlohu riešiť v čase lineárnom od počtu zápasov.

V prvom rade ošetríme situáciu, kedy $R \geq V$. Vtedy sa nám neoplatí remizovať, preto len ideme od konca a nájdeme maximálny možný počet výhier. V nasledujúcom texte predpokladáme, že $R < V$.

Myšlienka je nasledovná: budeme postupne zvyšovať počet vyhratých zápasov a zakaždým (šikovnejšie ako v minulom riešení) upravíme maximálny počet zápasov, ktoré predtým zvládame remizovať.

Na úvod teda nájdeme riešenie, v ktorom žiaden zápas nevyhráme, ale čo najviac posledných zápasov remizujeme, nech je ich b. Toto riešenie vieme vyššie popísaným postupom nájsť v lineárnom čase.

Teraz ideme postupne zväčšovať počet vyhratých zápasov. Počas tejto fázy si budeme pamätať prvý remizovaný zápas x a posledný remizovaný zápas y. Na začiatku je teda $x = N - b + 1$ a $y = N$.

Od tohto okamihu až do chvíle, kedy sa nám minú remizované zápasy a už žiadny nevieme vyhrať, budeme opakovať nasledujúci postup:

Všimnime si, že pri aktuálnom riešení bude naše mužstvo pred y-tym zápasom mať $d_y - R(y - x)$ sily. Ak je táto hodnota $\geq v_y$, môžeme si dovoliť y-ty zápas vyhrať bez toho, aby sme museli zmenšovať počet „bodovaných" zápasov. V opačnom prípade musíme zmenšiť počet „bodovaných" zápasov, a teda x-tý zápas namiesto remízy prehráme.

Malo by byť zjavné, že vyššie uvedeným postupom v okamihu, keď sme práve „vyrobili" a-tu výhru, máme k nej najväčší možný počet remíz. Určite teda optimálne riešenie nepreskočíme.

Zostáva ukázať, že časová zložitosť tohto riešenia je naozaj lineárna. Prvú fázu (spočítanie hodnôt v_i a maximálneho počtu remíz bez výhier) vieme ľahko spraviť v lineárnom čase. Každý krok druhej fázy buď zväčší y, alebo zmenší x a prestaneme, keď $x < y$, preto je týchto krokov najviac N. Každý z nich vieme spraviť v konštantnom čase, preto celá druhá fáza beží v čase lineárnom od N, č.b.t.d.

Program uvedený nižšie implementuje tú istú myšlienku trochu ináč. Rovnako ako v prvom prezentovanom riešení začne zostrojením optimálneho riešenia, v ktorom len remizujeme. Pre každý interval si pamätá, koľko sily získanej počas neho nevyužívame. Túto silu potom používa na prerábanie remizovaných zápasov na vyhraté. Pritom platí, že vždy, keď má na výber, použije tú dostupnú silu, ktorá vznikne najneskôr – tým určite nič nepokazí. Aj implementáciou tejto myšlienky vieme dostať riešenie bežiace v lineárnom čase.

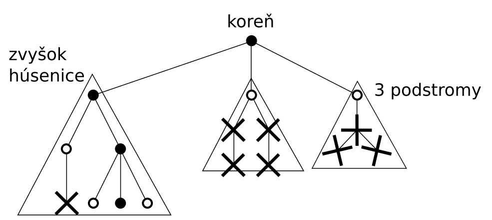
Poznámka na záver: Existujú aj iné, väčšinou pomalšie riešenia, ktoré sú založené na dynamickom programovaní. Napríklad môžeme postupne pre každý zápas (od 1 do N) a každý počet bodov (od 0 po $3N$) zistiť, či je po danom zápase možné mať daný počet bodov, a ak áno, koľko najviac sily vieme v takom prípade po jeho skončení mať. Túto informáciu spočítame tak, že vyskúšame všetky tri možnosti, ako daný zápas dopadol, a pre každú sa pozrieme na už vypočítaný výsledok pre o jedno menší počet zápasov a zodpovedajúci počet bodov. Časová aj pamäťová zložitosť tohto riešenia sú $O(N^2)$, pri šikovnej implementácii si vystačíme aj s pamäťou $O(N)$.

P – II – 2

Všimnime si najskôr, že počet vrcholov, ktoré musíme odstrániť, vieme vypočítať ako (počtu vrcholov stromu) mínus (počet vrcholov výslednej húsenice). Môžeme teda namiesto najmenšieho počtu vrcholov na odstránenie hľadať najväčšiu húsenicu nachádzajúcu sa v strome.

Úlohu si ešte trochu zjednodušme: nebudeme hľadať hocijakú húsenicu, ale takú, ktorej telo končí v koreni (koreň je ten vrchol, z ktorého sa začíname prechádzať pri popise stromu). Pripomeňme si však, že telo húsenice je cesta a že v strome medzi každými dvoma vrcholmi vedie práve jedna cesta. Zvyšok tela potom zjavne musí byť celý obsiahnutý v niektorom podstrome. Nech sa tento zvyšok tela nachádza v ktoromkoľvek podstrome, počet vrcholov tvoriacich húsenicu vieme vyjadriť takto:

počet vrcholov húsenice
$=$ 1 (koreň)
$+$ (počet podstromov $-$ 1)
$+$ zvyšok húsenice



Obr. 47

Vidíme, že ak chceme nájsť najväčšiu húsenicu, ktorej telo končí v koreni, potrebujeme nájsť čo najväčší zvyšok húsenice – t.j. čo najväčšiu húsenicu z niektorého podstromu. To nás privádza k rekurzívnemu riešeniu: Pre každý vrchol stromu (resp. podstrom s koreňom v tomto vrchole) budeme počítať veľkosť (t.j. počet vrcholov) najväčšej húsenice v podstrome, ktorá končí v tomto vrchole. Ak je vrchol list, potom tento vrchol tvorí húsenicu (najväčšiu), ktorá sa skladá z jedného vrcholu. Pre ostatné vrcholy túto hodnotu najskôr rekurzívne vypočítame pre všetky podstromy – nájdeme v nich najväčšie húsenice. Z týchto hodnôt nájdeme maximum a (podľa vyššie uvedeného vzorca) pripočítame počet podstromov.

Všimnite si, že každý vrchol spracujeme v čase úmernom jeho stupňu, teda počtu vychádzajúcich hrán. Keďže strom má hrán $N-1$, je celkový čas potrebný na tento výpočet lineárny od N.

Ako však ukazujú už príklady v zadaní, telo húsenice v žiadnom prípade nemusí končiť práve v nami zvolenom koreni. Aby sme teda našli naozaj najväčšiu, musíme postupne ako koreň (teda jeden koniec tela) vyskúšať všetky vrcholy.[5] Tak dostávame algoritmus s časovou zložitosťou $O(N^2)$, t.j. kvadratický od počtu vrcholov stromu.

Tento algoritmus môžeme vylepšiť, ak si všimneme, ako vyzerá ľubovoľná cesta v zakorenenom strome: najskôr ide niekoľko (aj nula) vrcholov nahor (smerom ku koreňu) a potom klesá (smerom od koreňa). Každá cesta má teda práve jeden „najvyšší“ vrchol.

Upravíme teraz náš pôvodný algoritmus tak, aby pri jednom prechode stromom určite našiel najdlhšiu húsenicu. Okrem pôvodne počítanej informácie (veľkosť najväčšej húsenice idúcej v danom podstrome z jeho koreňa „dodola“) budeme pre každý vrchol počítať aj veľkosť najväčšej húsenice, ktorej telo má v danom vrchole najvyšší bod cesty. Z týchto hodnôt nám už iba stačí nájsť maximum.

Telo húsenice sa teda skladá z najvyššieho vrcholu a dvoch ciest v dvoch podstromoch. Veľkosť celej húsenice teda vieme vypočítať ako

1	za tento vrchol
+	veľkosť húsenice, ktorej telo vedie dole jedným podstromom
+	veľkosť húsenice, ktorej telo vedie dole iným podstromom
+	počet podstromov $-$ 2 (korene ostatných podstromov tvoria nožičky)
+	1, ak tento vrchol nie je koreň (aj otec tohto vrchola je nožička)

Opäť vidíme, že najväčšiu húsenicu dostaneme vtedy, keď vyberieme dve najväčšie húsenice z dvoch rôznych podstromov. Keď už vieme pre každý podstrom veľkosť najväčšej húsenice, ktorá ide z jeho koreňa dodola, dve najväčšie z týchto húseníc vieme nájsť v čase lineárnom od počtu podstromov, a teda lineárnom od stupňa spracúvaného vrcholu.

Zopakujme si to celé. Pre každý vrchol budeme počítať:

- veľkosť najväčšej húsenice, ktorej telo končí v danom vrchole a celá sa nachádza v jeho podstrome
- veľkosť najväčšej húsenice takej, že daný vrchol je najvyšší vrchol jej tela.

Obe informácie pre konkrétny vrchol vieme vypočítať z rovnakých údajov o podstromoch vrcholu. Celý postup vieme realizovať v čase $O(N)$ – lineárnom od veľkosti stromu (stačí ho totiž raz prejsť). Strom prechádzame priamo počas čítania reťazca núl a jednotiek, ktorým je zadaný.

[5] Resp. stačí všetky listy, ale tým si príliš nepomôžeme.

P – II – 3

Myšací problém zjavne súvisí s tokmi, ale ako? Potrebujeme nájsť čo najviac navzájom vrcholovo disjunktných ciest z 1 do N. (Takéto cesty budeme volať *nezávislé*.) Podmienka „myš môže ísť cez každý vrchol najviac raz“ pripomína situáciu, kedy určujeme kapacitu jednotlivých hrán – tu by sme ale potrebovali obmedziť akúsi kapacitu vrchola. Ako na to?

Z grafu G na vstupe vytvoríme orientovaný graf G' takto: Pre každý vrchol v v G okrem vrchola 1 a N vytvoríme v G' dva vrcholy v^1 a v^2. Vrcholy v^1 a v^2 spojíme orientovanou hranou z v^1 do v^2 s kapacitou 1. (Prechod po tejto hrane bude zodpovedať prechodu pôvodným vrcholom. Vrchol v^1 bude akoby „vstupná časť“ a v^2 „výstupná časť“ pôvodného vrcholu v.)

Pre vrchol 1 vytvoríme iba vrchol 1^2 a pre vrchol N iba vrchol N^1, keďže nechceme vchádzať do 1 ani vychádzať z N. Každú hranu e (spájajúcu vrcholy a a b) nahradíme v G' dvomi orientovanými hranami: z a^2 do b^1 a z b^2 do a^1. Tieto hrany môžu mať ľubovoľnú kapacitu, napríklad ju tiež nastavme na 1. Výsledný graf G' dáme na vstup čiernej skrinke (vrchol 1^2 je zdroj a vrchol N^1 je ústie). Ona nám vráti nejaké číslo c_m – hodnotu maximálneho toku v G'. Tvrdíme, že počet kúskov syra, ktoré vie myška preniesť, je rovný $\lfloor c_m/2 \rfloor$. To však ešte treba dokázať.

Všimnime si, že každá hrana v G' má veľkosť jedna, teda voda buď hranou preteká v plnej kapacite alebo hranou voda nepreteká. Ukážeme, že c_m je rovné maximálnemu počtu nezávislých ciest medzi vrcholmi 1 a N, t.j. takých, že každá začína vo vrchole 1, končí vo vrchole N a každý vrchol (okrem 1 a N) sa nachádza na najviac jednej ceste. Označme maximálny počet nezávislých ciest p.

Najprv ukážeme, že $p \leq c_m$. Pozrime sa na ľubovoľných p nezávislých ciest v G. Každá cesta $w_1, w_2, \ldots, w_n$ z vrchola 1 do vrchola N v G nám určuje tok v G' prirodzeným spôsobom: Voda preteká iba hranami z ${w_i}^1$ do ${w_i}^2$ a hranami z ${w_i}^2$ do ${w_{i+1}}^1$. Cesty sú nezávislé a teda vieme toky prislúchajúce jednotlivým cestám spojiť do jedného veľkého toku tak, že vo výslednom veľkom toku bude voda prechádzať iba tými hranami, ktoré sa nachádzajú v niektorom čiastkovom toku. Teda pre každých p nezávislých ciest vieme v G' nájsť tok veľkosti c_m.

Ešte ukážeme, že $c_m \leq p$. Majme nejaký tok v G'. Urobíme presne opačnú konštrukciu ako v predchádzajúcom odstavci. Do každej dvojice vrcholov v^1 a v^2 $v \neq N$ v G' priteká a z nej odteká zjavne len jedna jednotka vody. Začnime vo vrchole 1^2 a vyberme sa nejakou hranou, ktorou z neho odteká voda. Teda keď prídeme do ľubovolného vrchola v^1, kde v nie je ústie, tak z neho vieme pokračovať do v^2 a z neho niekam ďalej. Keď prídeme do ústia, tak sme vlastne našli nejakú cestu v G z 1 do N. Keď sa vydáme na začiatku inou hranou, ktorou odteká voda, tak dostaneme nejakú ďalšiu cestu z 1 do N. Tieto cesty sú zjavne nezávislé. Teda ak zo zdroja vychádza k hrán, po ktorých tečie voda, tak vieme nájsť k nezávislých ciest v G z 1 do N. Zo zdroja vychádza práve c_m takých hrán a teda vieme nájsť aspoň c_m nezávislých ciest a teda $c_m \leq p$.

Ľahko si už môžete aj sami dokázať, že myška vie preniesť $\lfloor p/2 \rfloor$ kúskov syra, kde p je maximálny počet nezávislých ciest v G.

Hľadanie maximálneho toku Okrem riešenia zadanej hodnoty si navyše ukážeme aj to, ako implementovať algoritmus skrytý v našej čiernej krabičke.

Začnime tým, že si definujeme jeden nový pojem: *minimálny rez*. Predstavme si, že niektoré uzly zafarbíme na čierno a ostatné na bielo tak, aby s bol čierny a t biely. Takéto ofarbenie uzlov voláme *rez*. Všimnime si teraz všetky potrubia, ktoré majú začiatok čierny a koniec biely. Číslo, ktoré dostaneme sčítaním ich kapacít, voláme *veľkosť rezu*. *Minimálny rez* je teda taký rez, ktorý má zo všetkých možných rezov najmenšiu veľkosť.

(Alebo formálne, *rez grafu* je rozdelenie všetkých vrcholov grafu do dvoch disjunktných množín A, B tak, že zdroj patrí do A a ústie do B. Veľkosť rezu je súčet kapacít všetkých hrán, ktorých začiatočný vrchol patrí do A a koncový do B. *Minimálny rez* je rez daného grafu s najmenšou možnou veľkosťou.)

Dokážeme teraz, že veľkosť minimálneho rezu je rovná veľkosti maximálneho toku. Označme veľkosť minimálneho rezu r_m a veľkosť maximálneho toku t_m. Veľkosť toku F budeme značiť t_F, veľkosť rezu R budeme značiť r_R.

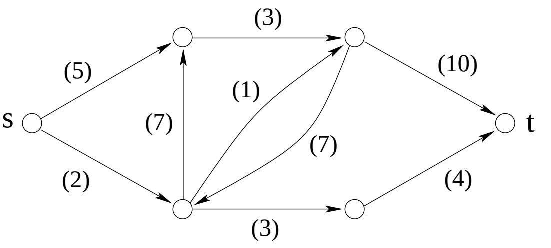
Zvoľme pevne nejaký tok F. Pre daný rez R (určený časťami A a B, pričom zdroj sa nachádza v A a ústie v B) označme o_R množstvo vody vytekajúce z časti A do časti B a p_R množstvo vody pritekajúce do A z B. Všimnime si, že $o_R - p_R$ je pre ľubovoľný rez R rovné veľkosti toku F. Tiež si všimnime, že o_R je nanajvýš rovné veľkosti rezu R (lebo každým potrubím vedúcim z A do B tečie nanajvýš toľko, koľko je jeho kapacita).

Spojením týchto pozorovaní dostávame: $t_F = o_R - p_R \leq o_R \leq r_R$, inými slovami veľkosť ľubovoľného toku je nanajvýš rovná veľkosti ľubovoľného rezu. Špeciálne teda aj veľkosť maximálneho toku je nanajvýš rovná veľkosti minimálneho rezu.

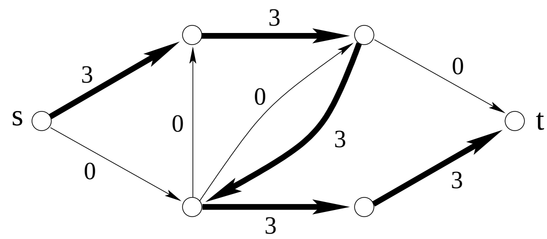
(Na túto nerovnosť nám stačí aj „sedliacky rozum“. Stačí si uvedomiť, že pre ľubovoľný tok a ľubovoľný rez každý „kúsok“ vody idúci zo zdroja do ústia musí skôr či neskôr prejsť niektorou z hrán, ktoré „tvoria rez“, teda vedú z prvej jeho množiny do druhej.)

Na dôkaz opačnej nerovnosti si zadefinujeme pojem zlepšujúca cesta a kvôli jednoznačnejšiemu popisu budeme používať terminológiu z teórie grafov (viď študijný text na konci zadania). Majme nejaký graf G a v ňom nejaký tok f. Vytvorme z grafu G graf G' tak, že v ňom ponecháme všetky vrcholy a postupne doň budeme pridávať hrany: Pre každú „nenasýtenú“ hranu e_i v G (t.j. takú, že $f(e_i) < c_i$) vedúcu z a do b dáme do grafu G' hranu z a do b s kapacitou $c_i - f(e_i)$. Označme tieto hrany ako hrany prvého druhu. Pre každú hranu e_i vedúcu z a do b, cez ktorú tečie aspoň nejaká voda (t.j. $f(e_i) > 0$), dáme do G' hranu z b do a s kapacitou $f(e_i)$. Tieto hrany označme ako hrany druhého druhu. Zlepšujúca cesta je ľubovolná cesta v grafe G' zo zdroja do ústia. Rezervou zlepšujúcej cesty C označme najmenšiu kapacitu hrany na tejto ceste. Označme ju r_c.

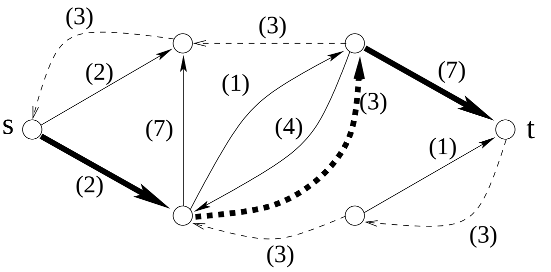
Pozrime sa na nejaký tok f pre ktorý existuje nejaká zlepšujúca cesta $C = v_1, v_2, \ldots, v_k$, kde v_1 je zdroj a v_k je ústie. Bez ujmy na všeobecnosti sa v nej neopakujú vrcholy. Nech e_i je hrana medzi v_i a v_{i+1}. Ukážeme, že vieme zvýšiť hodnotu toku f a dostať tak nejaký iný tok f', t.j. že f nie je maximálny. V toku f modifikujeme pretekajúce množstvo vody len na hranách na zlepšujúcej ceste. Na všetkých hranách e_i prvého druhu položme $f'(e_i) = f(e_i) + r_c$, kde r_c je príslušná rezerva zlepšújúcej cesty C. Na všetkých hranách druhého druhu položme $f'(e_i) = f(e_i) - r_c$. Dá sa jednoducho ukázať, že f' bude po tejto modifikácii toku f zase korektný tok.



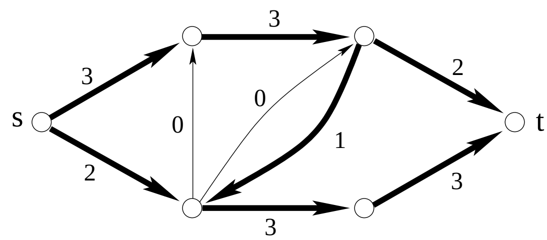
Obr. 48: príklad siete potrubí



Obr. 49: príklad toku veľkosti 3



Obr. 50: graf G' pre zlepšujúce cesty



Obr. 51: upravený tok

(Na obrázku 50 sú čiarkovane znázornené hrany druhého typu. Hrubo je vyznačená jedna možná zlepšujúca cesta, na obrázku 51 je nový tok, ktorý dostaneme z toku na obrázku 49 použitím zlepšujúcej cesty z obrázku 50. Všimnite si, ako sa zmenil tok hranou idúcou doľava dodola.)

Ešte raz inými slovami si povedzme, čo robíme pri hľadaní zlepšujúcej cesty. Chceme našou sieťou potrubí pretlačiť ešte nejakú vodu, musíme jej teda nájsť cestu, ktorou potečie. Toto bude práve tá naša zlepšujúca cesta. Ako môže vyzerať? Hrany prvého typu sú jasné – ak máme potrubie, ktorého kapacitu sme ešte nedosiahli, môžeme ním poslať viac vody. O čom sú ale hrany druhého druhu? Predstavme si, že máme potrubie z a do b, ktorým tečie k litrov vody za sekundu. Ak teraz nejako privedieme napríklad 1 liter vody do b, môžeme spraviť to, že touto hranou pustíme z a do b len $k-1$ litrov. Tým opäť pre vrchol b platí, že doň priteká toľko, koľko odteká – zvyšuje nám ale liter vody vo vrchole a. Výsledný efekt je teda ten istý, ako keby sme daný liter vody „pretlačili proti prúdu“ potrubím z a do b.

Ukázali sme si už teda, že ak k danému toku existuje zlepšujúca cesta, vieme po nej poslať vodu a tento tok zväčšiť. To znamená, že pre maximálny tok nemôže existovať zlepšujúca cesta. Majme teraz maximálny tok f. Vytvorme preň graf G' tým istým spôsobom ako je uvedené vyššie. Vieme, že v tomto grafe nemôže existovať cesta zo zdroja do ústia. Zostrojme rez R nasledovne: do prvej množiny A dáme všetky vrcholy, ktoré sú v G' dosiahnuteľné z s, do druhej množiny B všetky ostatné vrcholy. Označme veľkosť tohto rezu r_R. Ukážeme, že každá hrana e_i z nejakého vrchola $a \in A$ do nejakého vrchola v $b \in B$ je nasýtená t.j. $f(e_i) = c_i$. V opačnom prípade totiž existuje cesta v G' z a do b (bude prvého druhu) a do komponentu A patrí aj ďalší vrchol z B. Ďalej platí, že cez žiadnu z hrán e_j z $b \in B$ do $a \in A$ netečie žiadna voda. Inak totiž z tohto istého dôvodu sa komponent A dá rozšíriť o ďalší vrchol.

Teda v toku f z komponentu A do B tečie r_R jednotiek vody a z komponentu B do A už žiadna voda netečie. Teda veľkosť toku f je nutne r_R. Ukázali sme, že veľkosť maximálneho toku c_m sa rovná veľkosti nejakého rezu, preto veľkosť maximálneho toku je väčšia alebo rovná veľkosti minimálneho rezu r_m, č.b.t.d.

A nielen to. Našli sme totiž aj algoritmus, ako (jeden možný) maximálny tok v danom grafe zostrojiť. Stačí začať s ľubovoľným tokom (napríklad prázdnym) a dookola hľadať zlepšujúce cesty a vylepšovať tak aktuálny tok, kým sa to dá. Dokázali sme totiž, že ak už neexistuje zlepšujúca cesta, je aktuálna veľkosť toku rovná veľkosti minimálneho rezu – a väčší tok už tým pádom neexistuje.

Na hľadanie zlepšujúcej cesty môžeme použiť jednoduché prehľadávanie grafu. Dá sa ukázať, že napríklad ak použijeme prehľadávanie do šírky (čiže vždy nájdeme zlepšujúcu cestu s najmenším možným počtom hrán), bude mať výsledný algoritmus časovú zložitosť $O(M^2N)$, teda bude polynomiálny.[6]

P – II – 4

V riešení použijeme príkazy **ForAll** a **Exists**, ktoré sme definovali v riešeniach domáceho kola. (Príkaz **ForAll**(c,N) paralelne spustí N kópii, v ktorých postupne c=0, …, N-1; program úspešne skončí, ak všetky tieto kópie úspešne skončia. Príkaz **Exists** funguje analogicky, len stačí, aby úspešne skončila jedna ľubovoľná kópia.)

V prvom rade si uvedomme, že miest je nanajvýš $2M$ a že všetky ich čísla máme v poli C. Keď teda potrebujeme prezrieť všetky mestá, môžeme namiesto toho prezrieť všetky políčka poľa C.

Zamyslime sa, ako vieme najrýchlejšie overiť pre dve konkrétne mestá x a y, či sa dá dostať z x do y. Prvý dôležitý postreh je, že ak existuje spôsob, ako prísť z x do y, tak existuje taký spôsob, pri ktorom žiadnou cestou nejdeme dvakrát. Stačí nám teda vedieť overiť, či sa z x do y vieme dostať na najviac M „krokov".

Toto ľahko spravíme využitím príkazu **Exists**: postupne „hádame" cesty, ktorými ideme. Ak sa nám podarí dostať do y, zavoláme **Accept**, ak už sme išli M cestami a stále nie sme v y, zavoláme **Reject**.

Týmto dostávame triviálne riešenie v čase $O(M \log M)$: Pre každú dvojicu miest x, y paralelne overíme, či sa vieme z x dostať do y.

(Na tomto mieste by sme chceli podotknúť, že existuje riešenie v čase $O(M \log M)$, ktoré vôbec nevyužíva paralelizátor: Utriedime čísla z poľa C, prečíslujeme vrcholy číslami od 1 do $2M$, dvoma prehľadávaniami do šírky/hĺbky zistíme, či sa vieme dostať z mesta 1 do všetkých iných a či sa odvšadiaľ vieme dostať do mesta 1. Jedinou nevýhodou tohto riešenia je, že je omnoho zložitejšie a je ľahké v ňom spraviť chybu.)

Teraz si ukážeme, ako efektívnejšie overiť, či sa vieme dostať z x do y (na najviac M krokov). Trik je jednoduchý: Ak sa z x do y vieme dostať priamo, vyhrali sme. Ak nie, „uhádneme" mesto z, cez ktoré pôjdeme (približne) v strede našej púte z x do y. Teraz potrebujeme overiť, či sme si dobre tipli – teda či sa vieme dostať z x do z (na najviac

[6] N je počet vrcholov grafu (uzlov), M je počet hrán (potrubí).

$\lceil M/2 \rceil$ krokov) aj z z do y (na najviac $\lfloor M/2 \rfloor$ krokov). Tieto dve veci ale vieme overiť paralelne!

Časová zložitosť tohto algoritmu je $O(\log^2 M)$. Prečo? Pri každom rekurzívnom volaní procedúry Over sa počet krokov zmenší približne na polovicu, teda hĺbka rekurzie je $O(\log M)$. Najzložitejšia operácia pri behu procedúry Over je jedno volanie **Exists**, na ktoré potrebujeme čas $O(\log M)$.

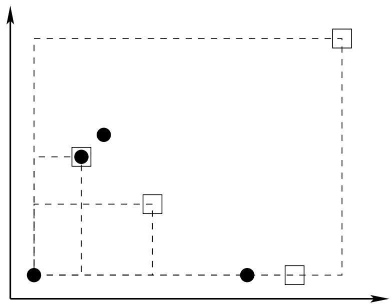
P – III – 1

V prvom rade musíme spomenúť riešenie „na istotu“. Pre každú dvojicu (naša príšera, príšera počítača) vieme povedať, či pri tomto priradení naša príšera vyhrá súboj. Vstup teda môžeme prerobiť na bipartitný graf. (Jednu partíciu tvoria naše príšery, druhú ostatné príšery, hrany spájajú tie dvojice, v ktorých naše príšery vyhrajú.)

Úlohou je nájsť v tomto grafe maximálne párovanie. Na to existujú všeobecné algoritmy. V našom prípade však budú existovať aj lepšie riešenia. Na to, aby sme takéto lepšie riešenie našli, však musíme poriadnejšie pochopiť zadaný problém.

Začnime tým, že si všimneme, že ak máme príšeru A/B, tak tá dokáže vyhrať súboj s príšerami X/Y, kde $1 \leq X \leq B$ a $1 \leq Y < A$.

Môžeme si teda vstup znázorniť nasledovne: Každú príšeru počítača s parametrami X/Y si znázorníme ako bod $[X, Y]$. Každú našu príšeru s parametrami A/B si znázorníme ako obdĺžnik s rohmi $[1, 1]$ a $[B, A-1]$. Úlohou teraz je čo najviac bodom priradiť niektorý obdĺžnik, ktorý daný bod obsahuje. (Samozrejme jeden obdĺžnik môžeme priradiť len jednému bodu.)



Obr. 52: Na obrázku je znázornenie nasledujúcej situácie: Príšery počítača (krúžky) sú zľava doprava 1/1, 3/6, 4/7, 10/1. Hráčove príšery sú 7/3, 5/6, 2/12, 13/14. Zodpovedajú im vyznačené obdĺžniky. Pravý horný roh každého obdĺžnika je označený štvorčekom.

Pozrime sa na ten z obdĺžnikov, ktorého y-ová súradnica pravého horného rohu je najmenšia. (Ak ich je viac, vyberieme si ľubovoľný z nich.) Kľúčové tvrdenie, na ktorom založíme svoje riešenie, je:

Ak môžeme tento obdĺžnik priradiť nejakému bodu, tak existuje optimálne riešenie, v ktorom je tento obdĺžnik priradený najpravejšiemu z bodov, ktoré obsahuje.

Dôkaz: Zoberme ľubovoľné optimálne riešenie. Označme náš obdĺžnik O, ďalej označme M množinu bodov, ktorým môžeme priradiť obdĺžnik O. Rozoberieme dva prípady.

1. V riešení, ktoré sme si zvolili, nie je obdĺžnik O priradený žiadnemu bodu.

   V takomto prípade požadované optimálne riešenie dostaneme tak, že obdĺžniku O priradíme najpravejší bod z M. Obdĺžnik, ktorému bol tento bod doteraz priradený, zostane voľný.

2. V riešení, ktoré sme si zvolili, je obdĺžnik O priradený nejakému inému bodu z M.

   Ak je najpravejší bod z M voľný, jednoducho ho priradíme O namiesto toho bodu, ktorý má O priradený teraz.

   Jediná zaujímavá situácia nastáva v okamihu, ak má najpravejší bod z M priradený nejaký iný obdĺžnik P. Všimnime si, že potom P musí obsahovať aj bod, ktorý je teraz priradený obdĺžniku O (P je aspoň tak vysoký ako O, a aspoň tak široký, aby obsahoval celú množinu M). Teda môžeme body priradené týmto dvom obdĺžnikom vymeniť.

V oboch prípadoch sme ukázali, že ľubovoľné optimálne riešenie vieme prerobiť na rovnako dobré (teda nutne tiež optimálne), ktoré spĺňa naše tvrdenie. Tým je dôkaz hotový.

Samotný algoritmus by už mal byť jasný: Vždy zoberieme „najnižší“ obdĺžnik a (ak sa to dá) priradíme mu najpravejší z (ešte nespracovaných) bodov, ktoré v ňom ležia.

Preložené späť do reči príšer, vždy zoberieme našu najslabšiu príšeru a pošleme ju na najsilnejšiu z príšer, nad ktorou vie vyhrať.

Dobrá implementácia

Priradzovanie obdĺžnikov bodom budeme teda robiť „pažravo“ (greedy). Aby sme to vedeli robiť efektívne, budeme potrebovať dátovú štruktúru, ktorá bude čo najrýchlejšie vedieť realizovať operácie: „pridaj bod“ a „nájdi a odstráň najpravejší bod menší alebo rovný x“.

Existuje veľa rôznych dátových štruktúr, ktoré obe tieto operácie vedia robiť v čase logaritmickom od počtu vložených bodov. Klasickým príkladom sú vyvažované binárne stromy, existujú ale aj ľahšie naprogramovateľné možnosti. Napríklad si môžeme body vopred zoradiť podľa x-ovej súradnice, a potom si v intervalovom strome (na ktorý nám stačí jedno pole) pamätať, ktoré z nich aktuálne v množine sú.

Takéto riešenie má časovú zložitosť $O(N \log N)$ a pamäťovú zložitosť $O(N)$.

P – III – 2

Úlohu si môžeme zrejmým spôsobom previesť na orientovaný ohodnotený graf. Potvrdenia budú vrcholy a hrana bude viesť z vrchola u do vrchola v s ohodnotením k, ak existuje úradník, ktorý na základe potvrdenia u a k osobných dokladov, vydá potvrdenie v. Zrejme optimálna postuposť získavania potvrdení bude cestou z vrchola 1 do vrchola N v tomto grafe (neoplatí sa nám získavať potvrdenia, ktoré neskôr nevyužijeme). Šírkou cesty budeme volať maximum z ohodnotení jej hrán. Počet dokladov, ktorý potrebujeme na získavanie potvrdení po danej ceste je zrejme rovný šírke danej cesty. Úlohou je teda nájsť cestu s minimálnou šírkou.

Asi najjednoduchším riešením je skúšať postupne všetky počty dokladov k od 0 po K. Pre každé k zistíme, či v grafe existuje cesta z vrchola 1 do vrchola N, ktorá nepoužíva hrany s ohodnotením väčším ako k. To vieme urobiť v čase $O(N+M)$ prehľadávaním do hĺbky alebo šírky, pričom si „veľké“ hrany nebudeme všímať. Prvé k, pre ktoré taká cesta existuje, je výsledný počet potrebných dokladov. Takto nás celý algoritmus výjde na čas $O((N+M)K)$. Zlepšenie môžeme dosiahnuť, ak namiesto postupného skúšania k ho budeme binárne vyhľadávať. Tak dostaneme algoritmus o časovej zložitosti $O((N+ + M)\log K)$.

Ukazuje sa, že táto úloha je veľmi podobná hľadaniu najkratšej cesty z 1 do N. Ak v algoritme pre hľadanie najkratšej cesty nahradíme všetky sčítania operáciou maxima, dostaneme riešenie našej úlohy. Keď použijeme Floyd-Warshallov, prípadne Bellman-Fordov algoritmus (viz. popis v riešeniach domáceho kola) dostaneme $O(N^3)$, prípadne $O(NM)$ algoritmus.

Zastavíme sa pri riešení Dijkstrovym algoritmom. Existujú viaceré implementácie s rôznou časovou zložitosťou, my si ale ukážeme, že v našom prípade sa dá využiť, že ohodnotenia hrán sú malé prirodzené čísla. Upravíme tento algoritmus tak, aby mal časovú zložitosť $O(K+N+M)$.

Pre každý vrchol v si budeme pamätať zatiaľ najmenšiu nájdenú šírku cesty do vrchola v (`sirka[`v`]`) a predposledný vrchol na niektorej ceste tejto šírky (tzv. predchodca vrchola v, `pred[`v`]`). Na začiatku je šírka cesty do všetkých vrcholov veľké číslo (v našom prípade postačí $K+1$), okrem začiatočného vrchola, ktorý má šírku cesty doň rovnú 0.

V každom kroku algoritmu vyberieme nejaký vrchol u. Zistíme, či cez vrchol u nemôžeme zlepšiť cestu (zmenšiť šírku) do jeho susedov. Ak z u vedie hrana do vrchola v s ohodnotením k, tak šírka tejto cesty do v cez u je $\max\{k, \texttt{sirka[}u\texttt{]}\}$. V prípade, že `sirka[`$v$`]` je väčšie číslo, tak ho upravíme a nastavíme predchodcu `pred[`v`]` $\leftarrow u$.

Všimnite si, že v žiadnom kroku sa šírka suseda vrchola u nemôže upraviť na číslo menšie ako je `sirka[`u`]`. Preto môžeme v každom kroku za u zvoliť vrchol, ktorý má najmenšiu šírku cesty doň a ktorý sme doteraz takto nespracúvali. To je totiž vrchol, ktorému sa šírka cesty doň už určite nezmenší.

Ak budeme teda voliť za u vždy nejaký doteraz nespracovaný vrchol, ktorý má zo všetkých nespracovaných vrcholov najmenšiu šírku cesty doň, stačí nám každý vrchol spracovať raz.

Vo všeobecnosti by nájdenie vrchola s minimálnou šírkou bola náročná operácia (buď by sme vždy museli prejsť všetky vrcholy, alebo si ich pamätať v nejakej komplikovanejšej dátovej štruktúre). V našom prípade sú však všetky šírky malé celé čísla. Preto si môžeme pre každú možnú šírku s pamätať zoznam vrcholov, do ktorých najlepšia (doteraz známa) cesta má šírku s.

Pre každú šírku budeme mať vrcholy uložené v spájanom zozname, a navyše si budeme pre každý vrchol pamätať pointer (smerník) na miesto, kde je práve uložený. Vďaka tejto informácii budeme v konštantnom čase vedieť vymazať vrchol z jedného zoznamu a pridať ho na koniec iného. (Toto budeme robiť vždy, keď sa zmení `sirka` pre daný vrchol.)

Zoznamy budeme postupne prechádzať od šírky 0 po šírku K a budeme spracúvať v nich uložené vrcholy. Takto budeme spracúvať vždy nespracovaný vrchol s najmenšou šírkou. Vzhľadom na to, že vrcholy, ktorým meníme šírku, nikdy nepresúvame do zoznamov, ktoré sme už prešli, nemusíme sa nikdy „vracať“ na prezeranie predošlých zoznamov. (Všimnite si, že ak do nejakého vrcholu nájdeme cestu s aktuálne spracúvanou šírkou, tento vrchol zaradíme *na koniec* aktuálneho zoznamu, teda medzi ešte nespracované vrcholy.)

Každý zoznam, každý vrchol a každú hranu spracujeme najviac raz, teda celková zložitosť algoritmu bude $O(K + N + M)$.

Implementačná poznámka: Pre vypisovanie cesty je jednoduchšie obrátiť hrany grafu a hľadať cestu z vrchola N do vrchola 1, aby sme pomocou predchodcov mohli cestu z 1 do N priamo vypísať.

P – III – 3

Najskôr si našu hru trochu upravme. Keďže nás zaujíma len to, či si Danka vie zabezpečiť výhru, zrušíme remízy a dohodneme sa, že aj v prípadoch, kedy by mala byť remíza, vyhráva Janka. Teraz teda každú partiu vyhrá jedno z dievčat, pričom množina partií, ktoré vyhrá Danka, sa nezmenila.

Pozícia v hre nám jednoznačne popisuje stav hry. Vo všeobecnosti je to stav hracej plochy spolu s informáciou o tom, ktorý hráč je na ťahu. V piškvorkách si to vieme odvodiť z počtov jednotlivých symbolov na hracom pláne, takže pozícia v hre bude pre nás znamenať to isté ako stav hracieho plánu.

Začnime definíciou *koncových pozícii.* Koncová pozícia je korektná pozícia, v ktorej už hráč, ktorý by mal ťahať, žiaden ťah nemôže spraviť. V piškvorkách teda koncové pozície sú pozície, kde práve niekto prvýkrát dosiahol piškvorku, a navyše pozície, kde sa celý hrací plán zaplnil bez vytvorenia piškvorky.

Všetky pozície v hre môžeme rozdeliť na *vyhrávajúce* a *prehrávajúce* nasledovne: Pozícia je vyhrávajúca, ak existuje postup, ktorý hráčovi v nej zaručí výhru bez ohľadu na ťahy druhého hráča. Ostatné pozície voláme prehrávajúce. Zadanie úlohy teda môžeme preformulovať: Daná je pozícia, napíšte program pre paralelizátor, ktorý rozhodne, či je táto pozícia vyhrávajúca.

Zjavne musia pre vyhrávajúce a prehrávajúce pozície platiť nasledujúce skutočnosti:

1. Keď je hráč na ťahu v prehrávajúcej pozícii, nech potiahne ľubovoľne, vždy bude po jeho ťahu súper vo vyhrávajúcej pozícii.

   (Inými slovami, ak nám žiaden ťah nezaručuje výhru, znamená to, že bez ohľadu na to, čo spravíme, bude mať druhý hráč postup, ktorý mu výhru zaručí.)

2. Keď je hráč na ťahu vo vyhrávajúcej pozícii, existuje ťah, po ktorom bude jeho súper v prehrávajúcej pozícii.

   (Inými slovami, ak by každý náš možný ťah viedol do nejakej pozície, z ktorej si súper vie zaistiť výhru, nemôže byť naša pozícia vyhrávajúca.)

Tieto dve pozorovania spolu so skutočnosťou, že o koncových pozíciách vieme povedať, či sú vyhrávajúce alebo prehrávajúce (pre hráča na ťahu), jednoznačne určujú, či je pozícia vyhrávajúca alebo prehrávajúca. Vieme to dokonca popísať jednoduchým rekurzívnym algoritmom. Aby sme zistili, či je pozícia vyhrávajúca:

1. Skontrolujeme, či to nie je koncová pozícia, ak áno, pozrieme, kto vyhral, a odpovieme.
2. Vygenerujeme všetky možné ťahy, ktoré sa v nej dajú urobiť.
3. Pre každý z nich sa na pozíciu, ktorú ním dostaneme, rekurzívne zavoláme a zistíme, či je vyhrávajúca pre hráča na ťahu.
4. Ak je niektorá z takto preskúmaných pozícií prehrávajúca, je pôvodná pozícia vyhrávajúca, v opačnom prípade je pôvodná pozícia prehrávajúca.

Tento postup by sme na klasickom počítači ľahko naprogramovali pomocou rekurzívnej procedúry s návratom, tzv. backtrackingu.

To isté ešte raz, len inými slovami: Ako zistíme, že pozícia, v ktorej je Danka na ťahu, je vyhrávajúca? Sú tri možnosti (teda ukáže sa, že sú vlastne len dve):

1. Danka už vyhrala. Táto možnosť ale nemôže nastať – posledný ťah totiž robila Janka a jej ťahom Danka vyhrať nemohla.
2. Nasledujúcim ťahom vie Danka vyhrať.
3. Existuje taký Dankin ťah, pre ktorý platí: Nech v nasledujúcom ťahu Janka potiahne ľubovoľne, vždy dostane Danku opäť do vyhrávajúcej pozície.

Toto už vieme prepísať do efektívneho programu pre paralelizátor.

V riešení použijeme funkcie **ForAll** a **Exists**, ktoré sme definovali v riešeniach domáceho kola. (Spomeňte si, že **ForAll**(cislo,N) paralelne spustí N kópii, v ktorých c=0, . . . , N-1, úspešne skončí, ak všetky úspešne skončia. Funkcia **Exists** funguje analogicky, len stačí, aby úspešne skončila jedna ľubovoľná kópia.)

```
{ VSTUP: R,C,K : integer; A : array[0..R-1,0..C-1] of char; }

procedure Over;

var riadokD, stlpecD, riadokJ, stlpecJ : integer;

begin
  { ak uz nemame tah, prehravame }
  if (jePlnaPlocha) then Reject;

  { vyskusame vsetky mozne Dankine tahy, staci najst jeden dobry }
  Exists(riadokD,R);
  Exists(stlpecD,C);
```

```
    { overime, ci skusame korektny tah }
    if (A[riadokD][stlpecD] <> '.') then Reject;
    A[riadokD][stlpecD] := 'X';

    { ak sme prave vyrobili piskvorku, vyhravame }
    if (jePiskvorka) then Accept;

    { ak Janka nema tah, nevyhrali sme, smola }
    if (jePlnaPlocha) then Reject;

    { preskumame mozne Jankine tahy, po vsetkych musi Danka vyhrat }
    ForAll(riadokJ,R);
    ForAll(stlpecJ,C);

    { ignorujeme policka, kam Janka nesmie tahat }
    if (A[riadokJ][stlpecJ] <> '.') then Accept;
    A[riadokJ][stlpecJ] := 'O';

    { rekurzivne overime, ci je vysledna pozicia pre Danku dobra }
    Over;
end;
```

Zostáva doplniť, ako implementovať chýbajúce funkcie `jePlnaPlocha` a `jePiskvorka`.

Na prvú z nich nám stačí udržiavať v pomocnej premennej počet znakov na hracom pláne. Vždy, keď potrebujeme vedieť, či je plocha plná, porovnáme túto premennú s hodnotou $R \times C$.

Overovať, či je na hracom pláne piškvorka, stačí v ôsmich smeroch od políčka, na ktoré sme umiestnili poslednú značku.

Tu sa ale oplatí zamyslieť. Ak by sme to overovanie robili „klasicky“ postupne, budeme na to potrebovať $O(K)$ krokov. Toto sa dá zlepšiť použitím metódy „rozdeľ a panuj“. Trik bude podobný ako hľadanie cesty v úlohe krajského kola. Ak chceme overiť, či je na pláne piškvorka začínajúca na $[x, y]$ a končiaca na $[x+k, step_x, y+k.step_y]$, najskôr pozrieme, či je na $[x+(k/2), step_x, y+(k/2).step_y]$ správny znak, a ak áno, paralelne skontrolujeme, či oba úseky tvoria piškvorky približne polovičnej dĺžky. Takto teda vieme overiť, či máme na pláne piškvorku, v čase $O(\log K)$.

Celková časová zložitosť jedného vykonania funkcie `Over` je $O(\log R + \log C + \log K)$. Volať sama seba bude nanajvýš $(RC/2)$-krát, preto výsledná časová zložitosť programu je $O(RC(\log R + \log C + \log K))$.

(Po krátkej úvahe toto vieme upraviť na $O(RC(\log R + \log C))$ – ak je K väčšie ako oba rozmery hracieho plánu, môžeme rovno na začiatku vstup zamietnuť.)

Naschvál sme však neuviedli podrobnú implementáciu vyššie uvedeného riešenia. Ukážeme si ešte jedno, ktoré tú istú časovú zložitosť dosiahne omnoho jednoduchšie.

Budeme striedavo generovať ťahy Danky („existuje ťah Danky taký, …“) a Janky

(„…že pre všetky Jankine ťahy…“) rovnako ako v predchádzajúcom riešení. Avšak jediné, čo budeme kontrolovať, je, či je to ťah na prázdne políčko.

A čo s kontrolou piškvorky? Tú si necháme na koniec. Jednoducho si v každej iterácii funkcie `Over` pomocou jedného volania **Some** „tipneme“, či práve Danka vyhrala. Ak sme si tipli, že nie, simulujeme nasledujúci ťah každej z hráčok. Ak sme si tipli, že áno, overíme, či naozaj posledným ťahom Danka vyhrala. (Teda či má piškvorku a či všetky piškvorky na hracej ploche vznikli jej posledným ťahom.) Toto overenie už môžeme robiť „klasicky“, zložitosť nám to nepokazí.

Prečo to funguje? Najskôr ukážeme, že pre vyhrávajúce pozície náš program skončí úspešne. Vždy, keď je na ťahu Danka, pozrime si tú vetvu programu, ktorá zodpovedá jej ťahu podľa vyhrávajúcej stratégie. Bez ohľadu na to, ako potiahne Janka (teda čo vygenerujú naše volania **ForAll**), dostaneme sa pri nasledujúcom volaní `Over` opäť do pozície, ktorá je pre Danku vyhrávajúca. A takto pokračujeme ďalej, až kým sa nedostaneme do situácie, kedy už Danka vyhrá. V tomto okamihu ale úspešne skončí vetva, v ktorej overujeme úspešný koniec hry. A sme tam, kde sme chceli byť.

Naopak, ak neexistuje vyhrávajúca stratégia pre Danku, niektoré vetvy výpočtu (kópie pôvodného programu) sa dostanú do situácie, kedy vyhrala Janka. Tu nám už ale nič nepomôže, lebo kontrola hracieho plánu sa už určite k volaniu **Accept** nedostane.

(Keby sme chceli byť úplne korektní, predchádzajúce tvrdenia by sa dokazovali matematickou indukciou. Napríklad by sme indukciou podľa k dokazovali tvrdenie: Nech spustíme náš program na vstupe, kde je k voľných políčok na hracom pláne, v pozícii, ktorá je pre Danku prehrávajúca. Potom spomedzi $R \times C$ kópii, ktoré vzniknú volaním **Exists***(riadokD,R) a* **Exists***(stlpecD,C), žiadna neskončí úspešne. Dôkaz indukčného kroku by vyzeral tak, že ukážeme, že ani overenie konca hry, ani skúšanie všetkých Jankinych ťahov nevedie k úspešnému koncu. To prvé preto, že Danka predsa nevyhrala, to druhé preto, že Janka má vyhrávajúci ťah, a ten nás dovedie do pozície, pre ktorú platí indukčný predpoklad, a teda táto kópia neskončí úspešne.)*

A teraz už samotný program.

```
{ VSTUP: R,C,K : integer; A : array[0..R-1,0..C-1] of char; }

var zostavaTahov : integer; { globalne pocitadlo tahov do konca hry }

{ Funkcia jeKoniec vracia true prave vtedy, ak v aktualnej pozicii
  prave Danka vyhrala.
  Vieme, ze pozicia je korektna a posledny tah bol [lastr,lastc].
  Implementaciu prenechavame na citatela :) }
function jeKoniec(lastr, lastc : integer) : boolean;
begin
   { overime, ze cez [lastr,lastc] ide piskvorka }
   { zmazeme znak 'X' z [lastr,lastc] }
   { overime, ze na ploche nezostala ziadna piskvorka }
end;
```

```
{ Procedura Over overi, ci je aktualna pozicia pre Danku vyhravajuca.
  Ak ano, ukonci cely program uspesne.
  Ak nie, ukonci cely program, ale nie uspesne. }
procedure Over;

var riadokD, stlpecD, riadokJ, stlpecJ, pom : integer;

begin
   { ak uz nemame tah, prehravame }
   if (zostavaTahov=0) then Reject;
   Dec(zostavaTahov);

   { vyskusame vsetky mozne Dankine tahy, staci najst jeden dobry }
   Exists(riadokD,R);
   Exists(stlpecD,C);

   { overime, ci skusame korektny tah }
   if (A[riadokD][stlpecD] <> '.') then Reject;
   A[riadokD][stlpecD] := 'X';

   { mozeme sa prave rozhodnut, ze ideme kontrolovat }
   Some(pom);
   if (pom=1 and jeKoniec(riadokD,stlpecD)) then Accept;

   { ak Janka nema tah, nevyhrali sme, smola }
   if (zostavaTahov=0) then Reject;
   Dec(zostavaTahov);

   { preskumame mozne Jankine tahy, po vsetkych musi Danka vyhrat }
   ForAll(riadokJ,R);
   ForAll(stlpecJ,C);

   { ignorujeme policka, kam Janka nesmie tahat }
   if (A[riadokJ][stlpecJ] <> '.') then Accept;
   A[riadokJ][stlpecJ] := 'O';

   { rekurzivne overime, ci je vysledna pozicia pre Danku dobra }
   Over;
end;

{ hlavny program: len nastavime pocitadlo tahov a ideme rekurzivne
  overovat, ci vie Danka vzdy vyhrat }
var i,j : integer;
begin
   zostavaTahov := 0;
   for i:=0 to R-1 do for j:=0 to C-1 do
      if (A[i][j] = '.') then Inc(zostavaTahov);
```

```
  Over;
end.
```

P – III – 4

Označenie: C nech je množina povolených cifier, N nech je zadané číslo. Našou úlohou je nájsť najmenší kladný násobok N, v ktorom sú použité len cifry z C.

Zamyslime sa najskôr nad jednoduchšou úlohou – ako zistiť, či má zadaná úloha vôbec riešenie?

Označme P množinu všetkých kladných čísel, ktoré sa dajú poskladať z cifier v C. Zistíme, aké zvyšky dávajú čísla z P po delení N. Ak bude medzi týmito zvyškami aj 0, úloha má riešenie, ak nie, úloha riešenie nemá, teda žiaden násobok N nemá požadovaný tvar.

Všimnime si jeden zaujímavý spôsob, ako môžeme definovať našu množinu prípustných čísel P:

1. Jednociferné prípustné čísla sú práve všetky nenulové cifry z C.

2. Ak $p \in P$ a $c \in C$, tak $10p + c \in P$.

3. Nijaké iné čísla v P nie sú.

Inými slovami, všetky k-ciferné prípustné čísla vieme vygenerovať tak, že zoberieme všetky $(k-1)$-ciferné prípustné čísla a na koniec im pripíšeme ešte jednu povolenú cifru.

Všimnime si teraz, čo sa stane, ak máme dve prípustné čísla p_1, p_2, ktoré dávajú po delení N rovnaký zvyšok z. Ak za každé z nich pripíšeme cifru c, dostaneme dve nové prípustné čísla, a opäť obe budú dávať rovnaký zvyšok po delení N. (Tento zvyšok bude $10z + c \bmod N$.)

Teraz už máme dosť informácii na to, aby sme vedeli nájsť množinu Z zvyškov, ktoré dávajú čísla z P po delení N. Budeme vyššie uvedeným postupom postupne generovať čísla z P. Vždy, keď nejaké vygenerujeme, pozrieme sa, či sme dostali nový zvyšok. Ak áno, číslo si necháme na ďalšie spracovanie, ak nie, jednoducho ho zahodíme. (Všetky zvyšky, ktoré vieme vyrobiť z tohto čísla, vieme vyrobiť aj z toho, ktoré dalo tento zvyšok ako prvé.) Keďže zvyškov je len konečne veľa, časom skončíme.

V tomto okamihu už vieme povedať, či pre zadaný vstup existuje riešenie. A ak sa zamyslíme ešte chvíľu, prídeme na to, že ak sme čísla z P generovali v rastúcom poradí, tak v okamihu, kedy sme dosiahli zvyšok 0, sme zároveň našli hľadané riešenie.

Pre skúsenejších riešiteľov dodáme, že vyššie uvedený postup zodpovedá prehľadávaniu do šírky v grafe, ktorého vrcholy sú zvyšky po delení N a každá hrana zodpovedá pridaniu cifry. Každú hranu označíme pridávanou cifrou. V tomto grafe teraz nájdeme najkratšiu cestu z niektorého vrcholu zodpovedajúceho jednocifernému číslu do vrcholu 0. Hrany vychádzajúce z vrcholu vždy spracúvame v rastúcom poradí podľa pridávanej cifry. Hľadané číslo môže byť veľmi dlhé, preto si pre každý zvyšok pamätáme len, z ktorého zvyšku a pridaním ktorej cifry sme ho prvýkrát vyrobili. Ak sa nám podarí vyrobiť zvyšok 0, z týchto informácii spätne zostrojíme hľadané číslo.

Pamäťová aj časová zložitosť tohto riešenia je $O(N)$.

P – III – 5

Máme vlastne pred sebou dve samostatné úlohy. Prvou je porovnávanie slov na stránke s vyhľadávanými slovami. Potrebujeme čo najrýchlejšie zistiť, kde sa na stránke ktoré vyhľadávané slovo nachádza.

Očíslujme si vyhľadávané slová od 1 do N. Teraz prevedieme text stránky na postupnosť čísel: namiesto vyhľadávaného slova napíšeme jeho číslo, namiesto slova, ktoré nás nezaujíma, napíšeme nulu.

Napríklad pre vyhľadávané slová „`nasi vasi prisli`“ a text „`poslali ma nasi k vasim aby prisli vasi k nasim ak nepridu vasi k nasim tak nepridu nasi k vasim`“ dostaneme postupnosť: 0, 0, 1, 0, 0, 0, 3, 2, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0.

Úseky stránky, ktoré obsahujú všetky vyhľadávané slová, nazveme *dobré*. (Každý dobrý úsek stránky zodpovedá v našej postupnosti úseku, ktorý aspoň raz obsahuje každé z čísel 1 až N.)

Dobrý úsek, ktorý už nemôžeme ani na jednom konci skrátiť, budeme volať *minimálny*. Nami hľadaný úsek je určite minimálny. Minimálnych úsekov však môže byť aj viac, a nemusia byť všetky rovnako dlhé. V našom príklade jeden minimálny úsek tvoria slová 3 až 8, druhý tvoria slová 7 až 18.

Naše riešenie jednoducho nájde všetky minimálne úseky, z nich vyberie a vypíše ten najkratší.

Ako na to? Postupne pre každé slovo textu stránky zistíme, či tam začína nejaký minimálny úsek, a ak áno, kde končí. Všimnime si, že ak máme dva minimálne úseky, tak ten, ktorý neskôr začína, musí aj neskôr končiť. Preto ako posúvame doprava začiatok hľadaného minimálneho úseku, bude sa aj jeho koniec posúvať len doprava.

Aby sme vedeli rýchlo povedať, či je práve skúmaný úsek dobrý, budeme si pamatať nasledujúce informácie: `pocet[i]` bude hovoriť, koľkokrát sa vyhľadávané slovo i nachádza v hľadanom úseku. Okrem toho, `mame` bude počet vyhľadávaných slov, ktoré máme v aktuálnom úseku aspoň raz.

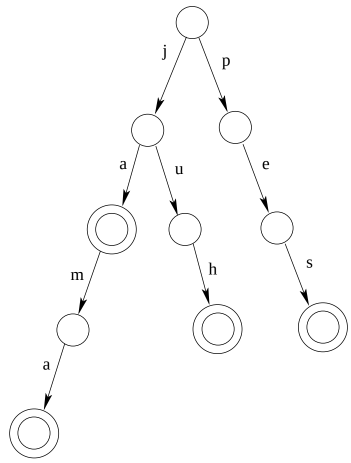
Ak teraz posunieme niektorý koniec skúmaného úseku, zmení sa nám najviac jedna hodnota `pocet[i]` a na základe toho sa možno (ak sme práve vynechali posledný výskyt niektorého slova, prípadne pridali slovo, ktoré ešte v úseku nebolo) zmení hodnota `mame` o 1.

Tým už máme túto časť úlohy vyriešenú. Začneme s úsekom, ktorý tvorí len prvé slovo textu stránky. V každom kroku sa teraz pozrieme, či je aktuálny úsek dobrý. Ak áno, vynecháme z neho jeho prvé slovo, ak nie, pridáme k nemu nasledujúce slovo textu.

Zostala nám ešte jedna časť úlohy: Ako efektívne prepísať slová textu stránky na čísla?

Jedno možné efektívne riešenie je použiť dátovú štruktúru nazývanú písmenkový strom (po anglicky *trie*). Písmenkový strom je zakorenený strom, v ktorom každý vrchol má najviac 26 synov, a hrany do synov sú označené rôznymi písmenkami (od `a` po `z`). Každá cesta z koreňa nadol zodpovedá slovu, ktoré si „prečítame“ na hranách, po ktorých ideme.

Písmenkový strom sa dá použiť na uloženie množiny slov. Jednoducho vytvoríme všetky vrcholy, ktoré treba na to, aby sme si mohli na ceste z koreňa dole „prečítať“ každé z našich slov, a následne označíme tie vrcholy, kde niektoré z uložených slov končí. (Napríklad si do toho vrcholu napíšeme číslo slova, ktoré tam končí.)



Obr. 53: Písmenkový strom pre `ja`, `jama`, `juh` *a* `pes`.

Našu úlohu teda môžeme vyriešiť tak, že vytvoríme písmenkový strom pre vyhľadávané slová. Teraz pre každé slovo na stránke jednoducho zistíme, či je v strome uložené, a ak áno, rovno sme sa dozvedeli aj jeho číslo.

V praxi sa ale často zvykne v takýchto situáciách používať prístup, známy pod názvom *hašovanie*. Princíp je nasledujúci: Každé vyhľadávané slovo zakódujeme do čísla. Tieto čísla nebudú nutne z rozsahu 1 až N, ale povedzme z rozsahu 0 až $2^{32}-1$. Jedna možnosť, ako to spraviť: Reťazec môžeme chápať ako obrovské číslo v sústave so základom 997. Jednotlivé znaky predstavujú cifry, napríklad znak `e` je cifra (101). Hašovacou hodnotou reťazca potom bude zvyšok, ktorý dáva toto číslo po delení $2^{32}-1$. Všimnite si, že ak sa dva reťazce líšia, je len veľmi malá šanca, že ich hašovacie hodnoty budú rovnaké.

V našom riešení implementujeme vyššie spomínaný písmenkový strom.

Ak označíme L najväčšiu dĺžku slova na vstupe, má naše riešenie časovú zložitosť $O((N+M)L)$.

13. Stredoeurópska informatická olympiáda

V dňoch 1.–8. júla 2006 sa v meste Vrsar v Chorvátsku konal už 13. ročník Stredoeurópskej informatickej olympiády. Na podujatí sa zúčastnilo 28 súťažiacich zo 7 krajín, konkrétne: Česká republika, Chorvátsko, Maďarsko, Nemecko, Poľsko, Rumunsko a Slovensko. Okrem toho sa nesúťažne zapojilo aj ďalších 8 súťažiacich z Chrovátska.

Slovensko na súťaži reprezentovali štyria súťažiaci, ktorí boli vybratí na základe výsledkov celoštátneho kola a výberového sústredenia: Vladimír Boža (2. ročník, Gymnázium Dominika Tatarku, Poprad), Samuel Hapák (2. ročník, Gymnázium Grösslingová, Bratislava), Peter Herman (3. ročník, Gymnázium Jura Hronca, Bratislava) a Ján Mikuláš (4. ročník, Gymnázium Haličská, Lučenec). Výpravu sprevádzali doc. RNDr. Gabriela Andrejková, CSc. (PF UPJŠ Košice) a Lukáš Poláček (FMFI UK Bratislava).

Samotná súťaž pozostávala z dvoch súťažných dní. Každý súťažný deň súťažiaci riešili tri príklady v časovom limite 5 hodín. Riešenia boli hodnotené už tradičným spôsobom — kontrolou výstupov programov pre zadané vstupné dáta, pričom bol stanovený časový limit pre beh programu. Každý deň bolo možné získať 300 bodov.

Spolu bolo udelených 14 medailí, z toho 2 zlaté, 5 strieborných a 7 bronzových. Bohužiaľ, našim súťažiacim sa tento rok nepodarilo získať žiadnu z nich, hoci dvom z nich chýbalo k jej zisku naozaj len pár bodov. Naši súťažiaci dosiahli nasledujúce výsledky:

Por.	Súťažiaci	1.	2.	3.	4.	5.	6.	Spolu
15.	Ján Mikuláš	0	20	8	0	4	100	132
16.	Samuel Hapák	0	28	0	0	0	100	128
25.	Vladimír Boža	0	2	30	0	0	10	42
27.	Peter Herman	0	0	0	5	12	0	17

O niečo horšie výsledky ako po minulé roky boli zapríčinené tým, že na túto olympiádu boli vybraní súťažiaci mladších ročníkov, ktorí nemajú veľa skúseností s takýmito medzinárodnými súťažami. Účasť na tomto podujatí bola pre nich prípravou pre ich pravdepodobné účinkovanie na Medzinárodnej informatickej olympiáde v budúcich rokoch. Pevne veríme, že nabudúce sa im bude dariť aspoň o trochu lepšie.

Mgr. Vladimír Koutný, FMFI UK Bratislava

Zadania úloh 13. Stredoeurópskej informatickej olympiády

Anténa

Jedna nemenovaná telekomunikačná spoločnosť vyvíja GSM sieť v meste Vrsar. Ich zmluva s mestom špecifikuje minimálny počet domácností, ktoré musia byť pokryté signálom. Keďže rozpočet je obmedzený, môžu postaviť len jednu anténu s nejakým dosahom. Cena závisí od dosahu antény, preto chcú anténu s minimálnym dosahom a chcú ju umiestniť tak, aby bol pokrytý dostatok domácností.

Súťažná úloha

Vo Vrsare je N domácností, každá je popísaná dvojicou celočíselných súradníc. Anténa môže byť umiestnená na *hocijaký bod v rovine* (nemusí mať nutne celočíselné súradnice) a dosah antény môže byť ľubovoľné *kladné reálne číslo*. Ak je dosah antény R, potom domácnosť je pokrytá signálom antény, ak vzdialenosť antény od domácnosti je najviac R.

Vašou úlohou je pre dané domácnosti a celé číslo K nájsť minimálny dosah antény a jednu možnú pozíciu antény takú, že najmenej K domácností je pokrytých jej signálom.

Formát vstupu Prvý riadok vstupu obsahuje dve celé čísla N a K ($2 \leq K \leq N \leq$ ≤ 500) – celkový počet domácností a minimálny počet domácností, ktoré musia byť pokryté signálom. Každý z nasledujúcich N riadkov obsahuje dve celé čísla X, Y ($0 \leq$ $\leq X, Y \leq 10\ 000$) – súradnice domácnosti. Žiadne dve domácnosti nebudú mať rovnaké súradnice.

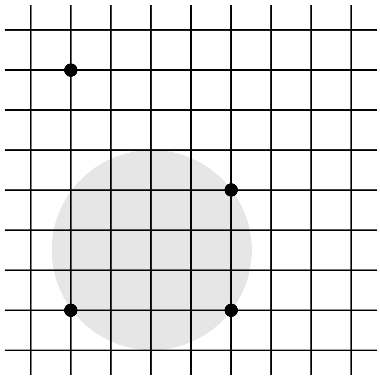
Formát výstupu Prvý riadok výstupu obsahuje reálne číslo R – minimálny dosah antény. Druhý riadok obsahuje súradnice antény – dve reálne čísla X a Y. Ak existuje viac riešení vypíšte ľubovoľné z nich. Všetky tri čísla musia byť zapísané buď v štandardnom desatinnom zápise alebo vo vedeckej notácii.

Hodnotenie Riešenie bude považované za správne, ak sú splnené nasledujúce dve podmienky:

1. Absolútna chyba medzi hodnotou R a skutočnou hodnotou je najviac 0.0001.
2. Anténa s dosahom $R + 0.0002$ umiestnená do bodu (X, Y) pokrýva aspoň K domácností.

Príklad

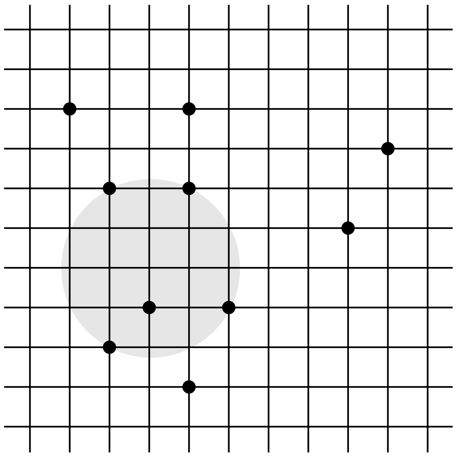
Vstup	Výstup
`4 3` `2 2` `6 2` `6 5` `2 8`	`2.5` `4 3.5`



Obr. 54

Príklad

Vstup	Výstup
`10 5` `1 8` `2 6` `4 8` `2 2` `9 7` `8 5` `5 3` `3 3` `4 6` `4 1`	`2.236068` `3 4`



Obr. 55

Rad na lísky

Ak ste fanúšikom futbalu, tak pravdepodobne viete, že získať lístky na zápasy tohtoročných majstrovstiev sveta vo futbale v Nemecku bola takmer nesplniteľná úloha. Niektorí organizátori a futbalová federácia zobrala väčšinu dostupných lístkov a rozdelila ich medzi sponzorov, priateľov a rodinných príslušníkov. Výsledkom toho bolo, že verní fanúšikovia sledovali zápasy medzi reklamami v televízii a lístky dostali aj takí, ktorých futbal až tak nezaujímal.

Niekoľko lístkov bolo ponechaných pre finále a tak sa vytvoril veľký rad pred predajňou lístkov. Prichádzajúci fanúšikovia dostávali pri príchode poradové čísla. Prvá osoba v rade bola označená poradovým číslom jedna, druhá číslom dva, atď.

Súťažná úloha

Pretože fanúšikovia prichádzali už v noci pred zápasom, museli dlho čakať predtým, než predaj začal a prirodzene, niektorí z nich si potrebovali oddýchnuť v priestore na to určenom. Zakaždým, keď osoba potrebovala oddych, vystúpila z radu a po oddychu sa vrátila do radu nie nutne na tú istú pozíciu, v ktorej bola predtým. Pretože existoval len jeden oddychovací priestor pre jednu osobu, žiadna osoba nevystúpila z radu pred návratom práve oddychujúcej osoby (teda v ľubovoľnom momente najviac jedna osoba chýbala v rade). V priebehu noci sa v oddychovacom priestore uskutočnilo celkom N návštev. Každá návšteva je popísaná dvomi kladnými celými číslami A a B vyjadrujúcimi, že osoba s poradovým číslom A vystúpila z radu a po oddychu sa vrátila do radu bezprostredne pred osobu s poradovým číslom B. Teraz, keď sú všetky návštevy ukončené, je nutné zodpovedať niekoľko otázok. Každá otázka má jeden z nasledujúcich dvoch tvarov: tvar 'P X' vyjadruje otázku na *pozíciu osoby s poradovým číslom* X, tvar 'L X' vyjadruje otázku na *poradové číslo osoby na pozícii* X. Prvá osoba v rade je na pozícii jedna, druhá na pozícii dva, atď.

Napíšte program, ktorý pre daný popis návštev a otázok zodpovie všetky tieto otázky.

Formát vstupu V prvom riadku vstupného súboru sa nachádza celé číslo N ($2 \leq N \leq 50\,000$) – celkový počet oddychov. Každý z nasledujúcich N riadkov obsahuje dve celé čísla A a B ($1 \leq A, B \leq 10^9$) popisujúce jeden oddych.

Ďalší riadok obsahuje celé číslo Q ($1 \leq Q \leq 50\,000$) – celkový počet otázok. Každý z nasledujúcich Q riadkov obsahuje jeden znak (veľké písmeno 'P' alebo veľké písmeno 'L') a celé číslo X ($1 \leq X \leq 10^9$) popisujúce jednu otázku.

Formát výstupu Výstup má obsahovať celkom Q riadkov. i-tý riadok obsahuje jediné celé číslo R – odpoveď na i-tú otázku. Ak zodpovedajúca otázka je tvaru 'P X_i', tak odpoveď je číslo R, ktoré vyjadruje konečnú pozíciu osoby s poradovým číslom X_i. Ak zodpovedajúca otázka je tvaru 'L X_i', tak R je poradové číslo osoby v pozícii X_i.

Hodnotenie Je možné získať čiastočný počet bodov za nie celkom správne riešenie, ktoré ale správne odpovedá na všetky otázky jedného typu. Ak sú zodpovedané správne všetky otázky tvaru 'P X', alebo ak sú správne zodpovedané otázky tvaru 'L X', tak je možné získať 50% bodov v danom testovacom prípade.

Aby ste dosiahli čiastočný počet bodov, musite vytvoriť výstup podľa stanovených špecifikácií. Teda, aj keď ste si vybrali odpovede len jedného typu, odpovedať musíte aj na otázky druhého typu.

Príklad

Vstup	**Výstup**
2	1
6 3	2
9 6	9
8	6
L 1	1
L 2	2
L 3	5
L 4	6
P 1	
P 2	
P 3	
P 4	

Príklad

Vstup	Výstup
`5`	`10`
`7 2`	`3`
`2 7`	`1`
`9 7`	`5`
`10 1`	`4`
`100005 99995`	`4`
`9`	`1`
`L 1`	`100000`
`P 2`	`99999`
`L 2`	
`P 7`	
`L 7`	
`P 9`	
`P 10`	
`P 99999`	
`L 100000`	

Prechádzka

Hľadanie cesty vo veľkom meste môže byť veľmi náročné, hlavne keď ste informatik ako Santo a snažíte sa ísť vždy najkratšou cestou. Plánovanie môže pomôcť – Santo má mapu mesta a chce nájsť najkratšiu cestu medzi jeho aktuálnou pozíciou a jeho cieľom.

Súťažná úloha

Mapa mesta môže byť reprezentovaná v rovine ako nekonečná sieť štvorčekov 1×1. Santo je teraz na štvorčeku so súradnicami $(0, 0)$ a chce sa dostať na štvorček so súradnicami (X, Y). V meste je N budov. Každá budova je obdĺžnik, ktorý plne zaberá niekoľko jednotkových štvorčekov. Žiadne dve budovy sa nedotýkajú a neprekrývajú, takže Santo môže chodiť voľne okolo každej budovy. Budova je obdĺžnik definovaný svojimi dvoma protiľahlými rohmi.

V každom kroku sa môže Santo pohnúť na jedno zo 4 susedných políčok, ale nemôže stúpiť na políčko, kde je budova. Jeho aktuálna pozícia je na západnej strane mesta a x-ová súradnica každého štvorca budovy je ostro väčšia ako nula.

Vašou úlohou je napísať program, ktorý nájde **najkratšiu cestu** medzi Santovou aktuálnou pozíciou a jeho cieľom. Cesta by mala byť popísaná ako postupnosť zvislých a horizontálnych úsečiek, pričom žiadne dve po sebe idúce úsečky nemôžu byť rovnobežné. Dĺžka cesty je počet štvorčekov na ceste okrem prvého štvorčeka.

Formát vstupu Prvý riadok vstupu obsahuje dve celé čísla X, Y $(1 \leq X \leq 10^6, -10^6 \leq Y \leq 10^6)$ – súradnice Santovho cieľa. Druhý riadok obsahuje jedno celé číslo N $(0 \leq N \leq 100\,000)$ – počet budov v meste. Každý z nasledujúcich N riadkov obsahuje 4 celé čísla x_1, y_1, x_2, y_2 $(1 \leq x_1, x_2 \leq 10^6, -10^6 \leq y_1, y_2 \leq 10^6)$ – súradnice bodov dvoch protiľahlých rohov obdĺžnika.

Formát výstupu Prvý riadok výstupu obsahuje jedno celé číslo L – dĺžku najkratšej cesty do cieľa. Druhý riadok obsahuje jedno celé číslo M – počet úsečiek v najkratšej ceste. Toto číslo nemôže prekročiť 1 000 000.

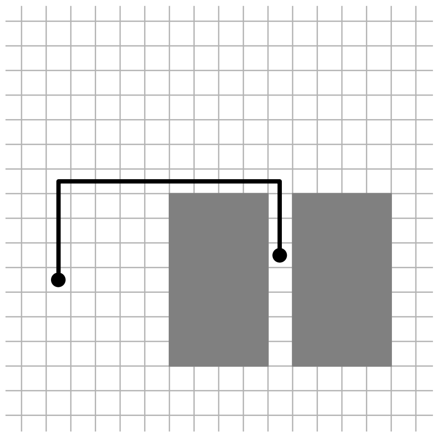
Každý z nasledujúcich M riadkov obsahuje dve celé čísla DX, DY, ktoré popisujú Santov pohyb od predchádzajúceho bodu. Pre každú úsečku je práve jedna z hodnôt DX, DY nulová. Žiadne dve po sebe idúce úsečky nemôžu byť rovnobežné. Ak je riešení viac, vypíšte ľubovoľné z nich.

Hodnotenie Riešenie, ktoré nájde dĺžku najkratšej cesty, ale vypíše postupnosť krokov nesprávne, dostane 80% bodov. Ak sa rozhodnete vypísať len dĺžku najkratšej cesty, nemusíte už vypisovať nič ďalšie.

Príklad

Vstup
```
9 1
2
5 -3 8 3
10 -3 13 3
```

Výstup
```
16
3
0 4
9 0
0 -3
```

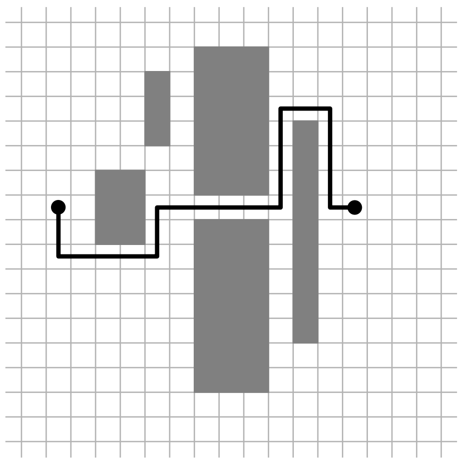


Obr. 56

Príklad

Vstup
```
12 0
5
2 -1 3 1
6 -7 8 -1
6 1 8 6
4 3 4 5
10 -5 10 3
```

Výstup
```
24
8
0 -2
4 0
0 2
5 0
0 4
2 0
0 -4
1 0
```



Obr. 57

Spájanie

Ešte v nedávnej minulosti, keď bol najpoužívanejší nemenovaný 16-bitový operačný systém s trojpísmenovým názvom, dominovali na trhu terminály s rozmermi 25×80 znakov.

Jedna z najobľúbenejších hier sa volala „Nibbles“. Toto zadanie sa však bude zaoberať hrou nazvanou „Spájanie“, ktorá je úplne odlišná od hry Nibbles.

Súťažná úloha

Spájanie sa hrá na ploche zloženej z jednotkových štvorčekov usporiadaných v R riadkoch a C stĺpcoch, kde R aj C sú nepárne čísla. Riadky sú očíslované od 1 po R a stĺpce sú očíslované od 1 po C. Každá pozícia je buď voľná alebo obsadená stenou. Naviac, každá plocha spĺňa nasledujúce podmienky:

- Štvorčeky s obidvomi súradnicami párnymi sú miestnosti. Nie sú nikdy obsadené stenou.
- Štvorčeky s obidvomi súradnicami nepárnymi sú bariéry. Sú vždy obsadené stenou.
- Všetky ostatné štvorčeky sú chodby. Chodba môže byť zastavaná stenou.
- Chodby pozdĺž okraja plochy sú vždy obsadené stenou.

Bariéry sú reprezentované znakom '`+`', obsadené horizontálne chodby znakom '`|`' a obsadené vertikálne chodby znakom '`-`'. Miestnosti a voľné chodby sú reprezentované medzerou.

Na začiatku hry je na plochu umiestnený párny počet značiek (reprezentovaných znakom '`X`') – každá v samostatnej miestnosti. Cesta medzi značkami A a B je postupnosť voľných štvorčekov začínajúca v A a končiaca v B taká, že štvorček v postupnosti susedí hranou s predchádzajúcim štvorčekom postupnosti (cesta obsahuje na začiatku štvorček A a na konci štvorček B). Dĺžka cesty je celkový počet krokov potrebných na cestu z A do B (je to vlastne počet štvorčekov na ceste mínus jedna).

Cieľom hráča je najprv rozdeliť všetky značky do párov a potom každý pár značiek spojiť cestou. Značky musia byť spojené tak, že žiadne dve cesty nemajú spoločný štvorček. Počet bodov za hru je definovaný ako súčet dĺžok ciest medzi všetkými pármi značiek.

```
+-+-+-+-+-+-+-+
|             |
+ + + + + + + +
|X  |   |     |
+ + + + + + + +
|   |   | X   |
+-+ + + + + + +
|       |     |
+ + + +-+-+-+-+
|            X|
+ + +-+-+-+-+ +
|             |
+ + + + + + + +
|  X|         |
+ + + + + + + +
|   |         |
+-+-+-+-+-+-+-+
```

Obr. 58

```
+-+-+-+-+-+-+-+
|  .......    |
+ +.+ + +.+ + +
|X..|   |.    |
+ + + + +.+ + +
|   |   |..X  |
+-+ + + + + + +
|       |     |
+ + + +-+-+-+-+
|            X|
+ + +-+-+-+-+.+
|  ...........|
+ +.+ + + + + +
|  X|         |
+ + + + + + + +
|   |         |
+-+-+-+-+-+-+-+
```

Obr. 59

Vašou úlohou je napísať program, ktorý dostane začiatočnú pozíciu hry a hrá ju tak, že dostane minimálny počet bodov. Môžete predpokladať, že riešenie vždy existuje.

Formát vstupu Prvý riadok vstupu obsahuje dve nepárne celé čísla R a C ($5 \leq R \leq$ $\leq 25, 5 \leq C \leq 79$). Každý z nasledujúcich R riadkov vstupu obsahuje C znakov, ktoré reprezentujú jeden riadok hracej plochy. Každý znak bude buď jeden z trojice znakov '`+`', '`|`' a '`-`', ktoré označujú obsadenú chodbu alebo bariéru, alebo medzera, ktorá reprezentuje prázdnu chodbu alebo miestnosť, alebo znak '`X`', ktorý reprezentuje značku v miestnosti. Môžete predpokladať, že na celej ploche sú aspoň dve značky.

Príklady načítania celého riadku zo vstupu:

Pascal:	**C:**	**C++:**
`var s : string;`	`char s[82];`	`string s;`
`readln(s);`	`gets(s);`	`getline(cin,s);`

Formát výstupu Prvý riadok výstupu obsahuje jedno celé číslo – minimálne možné skóre. Nasledujúcich R riadkov obsahuje popis hracej plochy na konci hry. Formát popisu je rovnaký, ako na vstupe, ale miestnosti a chodby, cez ktoré vedie cesta, musia byť reprezentované znakom '`.`'. Ak je viac riešení, môžete vypísať ľubovoľné z nich.

Hodnotenie Ak vypíšete správne len najmenšie možné skóre, dostanete 80% bodov za daný testovací prípad. Ak sa rozhodnete nájsť len minimálne skóre, nemusíte vypisovať už nič ďalšie.

Príklad

Vstup

```
17 15
+-+-+-+-+-+-+-+
|             |
+ + + + + + + +
|X  |   |     |
+ + + + + + + +
|   |   |  X  |
+-+ + + + + + +
|       |     |
+ + + +-+-+-+-+
|            X|
+ + +-+-+-+-+ +
|             |
+ + + + + + + +
|  X|         |
+ + + + + + + +
|   |         |
+-+-+-+-+-+-+-+
```

Výstup

```
30
+-+-+-+-+-+-+-+
|  ......... |
+ +.+ + + +.+ +
|X..|   |  .  |
+ + + + + +.+ +
|   |   |  X  |
+-+ + + + + + +
|       |     |
+ + + +-+-+-+-+
|            X|
+ + +-+-+-+-+.+
|  ...........|
+ +.+ + + + + +
|  X|         |
+ + + + + + + +
|   |         |
+-+-+-+-+-+-+-+
```

Príklad

Vstup

```
15 15
+-+-+-+-+-+-+-+
|X|           |
+ + + +-+ + + +
| |   |X|  X  |
+ + + + + + +-+
|     | |   |X|
+ +-+-+ + + + +
|       |   | |
+-+-+ + + +-+ +
|     |     | |
+ + + +-+-+ + +
|     |X  | | |
+ +-+-+ + + + +
|    X|       |
+-+-+-+-+-+-+-+
```

Výstup

```
56
+-+-+-+-+-+-+-+
|X|           |
+.+ + +-+ + + +
|.|   |X|  X  |
+.+ + +.+ +.+-+
|.    |.|  .|X|
+.+-+-+.+ +.+.+
|..... .|...|.|
+-+-+.+.+.+-+.+
|    .|...  |.|
+ + +.+-+-+ +.+
|.....|X..| |.|
+.+-+-+ +.+ +.+
|....X|  .....|
+-+-+-+-+-+-+-+
```

Odkazy

Webmaster Kirk spravuje školské webové stránky. Umiestnil tam niekoľko stránok, s obsahom ktorých je spokojný, ale ich prepojenie nie je celkom v poriadku. V skutočnosti, každá stránka obsahuje presne jeden odkaz, ktorý odkazuje na inú stránku. Tento návrh je veľmi jednoduchý – návštevník začne obvykle na domovskej stránke, potom sleduje ďalšie stránky postupne, až nájde stránku, ktorá ho zaujíma. Avšak niektoré stránky nie sú dosiahnuteľné vôbec. Kirk predovšetkým chce pridať niekoľko odkazov tak, aby každá stránka bola rýchlo prístupná z domovskej stránky. Nové odkazy môžu byt pridané kdekoľvek.

Súťažná úloha

Kirk spravuje N stránok označených celými číslami od 1 po N a domovská stránka je označená číslom 1. Je daných tiež N odkazov; každá stránka obsahuje práve jeden odkaz odkazujúci na práve jednu inú stránku. Pre celé číslo K systém týchto stránok nazývame K-*dosiahnuteľný*, ak každá stránka v ňom môže byť dosiahnutá z domovskej stránky cez najviac K odkazov.

Napíšte program, ktorý pre daný popis systému webových stránok a celé číslo K nájde minimálny počet odkazov, ktorý je potrebné pridať tak, aby sa systém stal K-dosiahnuteľný.

Formát vstupu Prvý riadok vstupu obsahuje dve celé čísla N a K ($2 \leq N \leq$ $\leq 500\,000, 1 \leq K \leq 20\,000$) – počet stránok a maximálny počet sledovaných odkazov.

Každý z nasledujúcich N riadkov obsahuje dve rôzne celé čísla A a B ($1 \leq A, B \leq N$) vyjadrujúce, že odkaz na stránke A ukazuje na stránku B.

Formát výstupu Prvý a jediný riadok na výstupe by mal obsahovať jediné celé číslo – minimálny počet dodatočných odkazov, ktoré je treba pridať, aby sa systém stránok stal K-dosiahnuteľný.

Poznámka Veľkosť stacku v tomto príklade je obmedzená na 64 MB. Spustením príkazu '`ulimit -s 64000`' v Linuxe zmeníte povolenú veľkosť stacku pre program, aby ste mohli testovať program v podmienkach, v akých bude nakoniec testovaný.

Príklad

Vstup	**Výstup**
8 3 1 2 2 3 3 5 4 5 5 6 6 7 7 8 8 5	2

Príklad

Vstup	**Výstup**
`14 4` `1 2` `2 3` `3 4` `4 5` `7 5` `5 6` `6 3` `8 10` `10 9` `9 8` `14 13` `13 12` `12 11` `11 14`	`3` *(Jedným z možných riešení je pridať odkazy* $1 \to 7$, $1 \to 14$ *a* $14 \to 10$.*)*

Medián^2

Niektoré spoločnosti radi udržujú platy svojich zamestnancov v tajnosti, aby uchránili vládu od poznania, ako sú zamestnanci nadhodnotení alebo podhodnotení. Niekedy ale spoločnosti poskytujú určité informácie pre štatistické a marketingové účely.

Jedna z týchto spoločností je ochotná poskytovať odpovede na otázky položené v nasledujúcom tvare: „Aký je **medián**^{2} platov zamestnancov A, B, C a D?“

Medián^2 štyroch čísel je definovaný ako aritmetický priemer dvoch mediánových hodnôt. Presnejšie, medián postupnosti a, b, c, d získame tak, že najprv tieto štyri čísla utriedime a potom vypočítame $(x + y)/2$, kde x a y sú druhé a tretie číslo utriedenej postupnosti.

Súťažná úloha

Vaším cieľom je vypočítať presné platy zamestnancov položením otázok vo vyššie uvedenom tvare. Poznamenajme, že platy niektorých zamestnancov nie je možné určiť (napríklad, plat najmenej plateného zamestnanca), aj keď položíte všetky možné otázky.

Spoločnosť má N ($4 \leq N \leq 100$) zamestnancov označených číslami od 1 po N. Plat každého zamestnanca je kladné párne číslo menšie alebo rovné 100 000 a žiadni dvaja zamestnanci nemajú rovnaký plat.

Máte k dispozícii knižnicu s funkciou **Meandian**. Pre dané štyri rôzne celé čísla A, B, C, D ($1 \leq A, B, C, D \leq N$) táto funkcia vráti **Medián**^{2} platov zamestnancov s číslami A, B, C a D.

Napíšte program, ktorý pomocou knižnice nájde presné hodnoty všetkých platov okrem tých, ktoré sa nedajú nikdy určiť. Váš program môže položiť najviac 1000 otázok.

Knižnica

Máte k dispozícii knižnicu s nasledujúcimi funkciami:

```
function Init : longint;
int Init(void);
```

Túto funkciu musíte zavolať na začiatku Vášho programu. Nemá argumenty a vráti celé číslo N – počet zamestnancov v spoločnosti.

```
function Meandian(a,b,c,d : longint) : longint;
int Meandian(int a, int b, int c, int d);
```

Funkcia vráti celé číslo medián[2] platov zamestnancov A, B, C a D. Všetky argumenty sú rôzne celé čísla medzi 1 a N, vrátane.

```
procedure Solution(var sol : array of longint);
void Solution(const int *sol);
```

Túto funkciu je potrebné zavolať na konci Vášho programu. Ako argument má pole reprezentujúce platy zodpovedajúcich zamestnancov. Ak plat niektorého zamestnanca nemôže byť vypočítaný, zodpovedajúca hodnota v poli je rovná -1. Poznamenajme, že toto pole musí byť indexované od 0 vo všetkých programovacích jazykoch. To znamená, že plat zamestnanca s číslom 1 je v poli na pozícii 0, plat zamestnanca s číslom 2 je v poli na pozícii 1, atď.

Použitie knižnice s Pascalom Zdrojový kód programu musí obsahovať riadok '`uses libmean;`'. Na otestovanie vášho riešenia si môžete stiahnuť knižnicu zo stránky „Tasks“ v súťažnom systéme. Knižnicu umiestnite do adresára, kde kompilujete.

Použitie knižnice s C/C++ Váš zdrojový kód musí obsahovať riadok '`#include "libmean.h"`'. Na otestovanie vášho riešenia si môžete stiahnuť knižnicu zo stránky „Tasks“ v súťažnom systéme. Aby sa vaše riešenie skompilovalo, musíte ho zlinkovať s knižnicou pomocou nasledovných príkazov:

```
gcc -o meandian meandian.c libmean.o
g++ -o meandian meandian.cpp libmean.o
```

Testovanie

Stiahnuteľná knižnica vám umožňuje otestovať vaše riešenie zadaním čísla N a N celých čísel na štandardný vstup. Knižnica vypíše, či bolo vaše riešenie správne. Zároveň vytvorí súbor `meandian.log`, ktorý obsahuje detaily o behu programu.

Nasledujú úryvky kódu, ktoré neriešia problém, ale ukazujú použitie knižnice.

Pascal

```
uses libmean;

var i, n : integer;
    arr : array[0..99] of longint;
    foo, bar, quux : integer;

begin
   n := Init;
   foo := Meandian(1, 2, 3, 4);
   bar := Meandian(4, 2, 3, 1);
   quux := Meandian(n, n-1, n-2, n-3);
   for i := 1 to n do
      arr[i-1] := 2*i;
   arr[3] := -1;
   Solution(arr);
end.
```

C/C++

```
#include "libmean.h"

int main(void)
{
   int i, n;
   int arr[100];
   int foo, bar, quux;

   n = Init();
   foo = Meandian(1, 2, 3, 4);
   bar = Meandian(4, 2, 3, 1);
   quux = Meandian(n, n-1, n-2, n-3);
   for (i=1; i<=n; ++i)
      arr[i-1] = 2*i;
   arr[3] = -1;
   Solution(arr);

   return 0;
}
```

Príklad

Tu je príklad, ako zadať vstup programu knižnici zlinkovanej spolu s vašim programom. Knižnica vám oznámi, či bolo vaše riešenie správne.

Vstup

10
100 500 200 400 250 300 350 600 550 410

18. Medzinárodná informatická olympiáda

V roku 2006 sa Medzinárodná olympiáda v informatike (IOI) konala v dňoch 13. až 20. augusta v Méride, Mexiko. Súťaže sa zúčastnilo 285 súťažiacich z takmer 80 krajín celého sveta.

Našu krajinu tento rok reprezentovali štyria gymnazisti: Daniel Bundala a Jakub Imriška z Gymnázia Jura Hronca v Bratislave, Ján Mikuláš z Gymnázia Boženy Slančíkovej-Timravy v Lučenci a Peter Perešíni z Gymnázia Jozefa Gregora Tajovského v Banskej Bystrici. U Petra Perešíniho išlo o štvrtú účasť na IOI, čo sa zo Slovenska doteraz nepodarilo nikomu inému. U ostatných troch išlo o prvú účasť na IOI.

Výsledky našich súťažiacich uvádzame zhrnuté v tabuľke.

meno	deň 1	deň 2	spolu	medaila
Daniel Bundala	230	128	358	strieborná
Ján Mikuláš	235	87	322	strieborná
Peter Perešíni	202	113	315	strieborná
Jakub Imriška	134	55	189	bez medaily

Tri strieborné medaily sú pekným úspechom, ktorým pokračujeme v tradícii výborných umiestnení našich súťažiacich. Jakuba Imrišku od medaily delila jediná neodhalená chyba v príklade z prvého dňa.

Mérida leží na historicky významnom polostrove Yucatán. Toto organizátori aj náležite zohľadnili pri príprave sprievodného programu, ktorý zahŕňal okrem iného celodenný výlet k pyramídam Chichen Itza. Takisto mali účastníci IOI možnosť presvedčiť sa „na vlastné ústa“, že miestne špeciality sú často skutočne veľmi pikantné.

Mgr. Michal Forišek, FMFI UK

Zadania úloh 18. Medzinárodnej informatickej olympiády

Dekódovanie mayského písma

Dekódovať mayské písmo bolo ťažším orieškom ako si archeológovia spočiatku mysleli. Aj po dvesto rokoch výskumu sa z neho rozumelo len veľmi málo. Až v posledných troch desaťročiach sa vedcom podarilo dosiahnuť aký-taký pokrok.

Mayské písmo je tvorené malými obrázkami, ktoré voláme glyfy. Každý glyf predstavuje jeden zvuk. Mayovia zapisovali slovo tak, že nakreslili všetky jeho glyfy. Tieto mohli byť ľubovoľne poprehadzované, ako sa práve pisateľovi zachcelo, či ako sa mu to zdalo najkrajšie.

Jeden z problémov pri dekódovaní mayského písma je práve v tom, že nie je jasné, v akom poradí takto zapísané glyfy čítať. Takže aj keď archeológovia poznajú zvuky zodpovedajúce jednotlivým glyfom, ešte stále pre niektoré slová nevedia, ktoré je to správne poradie, v ktorom ho treba prečítať.

Archeológovia teraz hľadajú špeciálne slovo W. Vedia, z akých glyfov sa skladá, ale nevedia, akými všetkými spôsobmi zvykli Mayovia tieto glyfy rozmiestňovať. Preto potrebujú vašu pomoc. Dajú vám g glyfov, ktoré tvoria slovo W, a dlhú postupnosť glyfov S, ktorú našli na stene jednej pyramídy. Glyfy v postupnosti S budú zadané presne v takom poradí, v akom boli na stene.

Pomôžte im nájsť všetky možné výskyty slova W v tejto postupnosti.

Súťažná úloha

Váš program dostane zadané glyfy tvoriace slovo W a postupnosť glyfov S, ktorú našli archeológovia. Mal by nájsť všetky možné výskyty slova W v S. Formálne, zaujímajú nás súvislé podpostupnosti S, ktoré majú dĺžku g a sú permutáciou glyfov slova W.

Obmedzenia

- Pre počet glyfov g tvoriacich slovo W platí $1 \leq g \leq 3\,000$
- Pre hodnotu $|S|$ (dĺžku postupnosti S) platí $g \leq |S| \leq 3\,000\,000$

Formát vstupu Vstupný súbor `writing.in` obsahuje nasledujúce údaje:

- V prvom riadku sú dve medzerami oddelené čísla: g a $|S|$.
- V druhom riadku je reťazec tvorený g znakmi. Každý z týchto znakov je malé alebo veľké písmeno anglickej abecedy ('a'-'z', 'A'-'Z'). Rozlišujeme medzi malými a veľkými písmenami. Tento reťazec obsahuje (v nejakom náhodnom poradí) glyfy, ktoré tvoria slovo W.
- V treťom riadku je reťazec tvorený $|S|$ znakmi. Opäť, každý z týchto znakov je malé alebo veľké písmeno anglickej abecedy a rozlišujeme medzi malými a veľkými písmenami. Tento reťazec predstavuje postupnosť nájdenú archeológmi.

Formát výstupu Výstupný súbor `writing.out` má obsahovať jediný riadok, v ktorom je jedno celé číslo – počet možných výskytov slova W v postupnosti S.

Hodnotenie V testovacích vstupoch, ktoré budú dokopy hodné 50 bodov, bude navyše platiť $g \leq 10$.

Príklad

writing.in	**writing.out**
`4 11` `cAda` `AbrAcadAbRa`	`2`

Upozornenie pre programátorov v Pascale

V štandardne nastavenom FreePascale môže mať premenná typu `string` najviac 255 znakov. Ak chcete používať dlhšie `stringy`, použite na začiatku svojho programu direktívu `{$H+}`.

Pyramída

Jedného dňa vyhral kráľ Jaguár veľkú bitku. I keď sa tak po bitke zamyslel, vymyslel, že postaví priamo na bojisku pyramídu. Tá bude slúžiť ako hrobka pre padlých vojakov, a zároveň bude večným pomníkom jeho veľkého víťazstva. Pyramída bude mať pôdorys tvaru obdĺžnika s rozmermi $a \times b$. Vo vnútri pyramídy bude obdĺžniková komora, ktorej rozmery budú $c \times d$. V tejto miestnosti budú uložené telá a zbrane padlých vojakov.

Bojisko, na ktorom bude kráľ stavať pyramídu, má rozmery $m \times n$. Kráľovi architekti zistili, že bojisko je tvorené sieťou štvorcov 1×1, pričom v rámci každého štvorca je nadmorská výška konštantná. Nadmorská výška štvorca so súradnicami $[i, j]$ je $h_{i,j}$.

Keďže kráľ má rád celé čísla, pyramída aj komora v nej musia byť postavené tak, aby mali strany rovnobežné so stranami bojiska a aby každý jednotkový štvorec buď ležal celý vnútri, alebo celý mimo.

Pri stavbe zostanú štvorce tvoriace komoru nedotknuté. Štvorce tvoriace zvyšok terénu, na ktorom bude stáť pyramída, je potrebné zarovnať na rovnakú nadmorskú výšku. Toto sa bude robiť tak, že z tých vyšších prevezieme časť zeminy na tie nižšie. Výsledná nadmorská výška základov pyramídy bude teda priemerom pôvodných nadmorských výšok štvorcov, na ktorých stojí (samozrejme okrem tých, kde bude komora). Na nadmorskej výške štvorcov tvoriacich komoru nezáleží, môžu byť vyššie aj nižšie ako nadmorská výška základov pyramídy.

Komora sa môže nachádzať hocikde v pyramíde, ale musí mať z každej strany aspoň jeden štvorec hrubú stenu.

Pomôžte architektom nájsť také miesto pre pyramídu a pre komoru v nej, aby výsledná nadmorská výška základov pyramídy bola najvyššia možná.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	5	10	3	7	1	2	5
2	6	12	4	4	3	3	1	5
3	2	4	3	1	6	6	19	8
4	1	1	1	3	4	2	4	5
5	6	6	3	3	3	2	2	2

Obr. 60

Na obrázku je príklad bojiska. Každé číslo predstavuje nadmorskú výšku zodpovedajúceho štvorca. Sivé štvorce predstavujú základy pyramídy, biele štvorce v ich vnútri tvoria komoru.

Štvorec v ľavom hornom rohu má súradnice $[1, 1]$.

Súťažná úloha

Váš program dostane zadané rozmery bojiska, pyramídy a komory a nadmorské výšky jednotlivých štvorcov bojiska. Mal by nájsť a vypísať optimálnu polohu pyramídy a komory v nej.

Obmedzenia

- $3 \leq m \leq 1\,000$
- $3 \leq n \leq 1\,000$
- $3 \leq a \leq m$
- $3 \leq b \leq n$
- $1 \leq c \leq a - 2$
- $1 \leq d \leq b - 2$
- $1 \leq h_{i,j} \leq 100$

Formát vstupu Vstupný súbor `pyramid.in` obsahuje nasledujúce údaje:

- V prvom riadku je 6 medzerami oddelených celých čísel, postupne m, n, a, b, c, d.
- Nasleduje n riadkov, každý z nich obsahuje m celých čísel – popis nadmorských výšok. Presnejšie, i-ta hodnota v j-tom z týchto riadkov je hodnota $h_{i,j}$.

Formát výstupu Vstupný súbor `pyramid.out` má obsahovať nasledujúce údaje:

- V prvom riadku vypíšte dve medzerou oddelené celé čísla: súradnice ľavého horného rohu základov pyramídy (najskôr stĺpec, potom riadok).
- V druhom riadku vypíšte dve medzerou oddelené celé čísla: súradnice ľavého horného rohu komory (najskôr stĺpec, potom riadok).

Hodnotenie V testovacích vstupoch, ktoré budú dokopy hodné 30 bodov, bude navyše platiť $3 \leq m \leq 10$ a $3 \leq n \leq 10$.

Príklad

`pyramid.in`
```
8 5 5 3 2 1
1 5 10 3 7 1 2 5
6 12 4 4 3 3 1 5
2 4 3 1 6 6 19 8
1 1 1 3 4 2 4 5
6 6 3 3 3 2 2 2
```

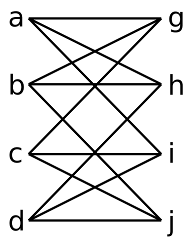
`pyramid.out`
```
4 1
6 2
```

Zakázaný podgraf

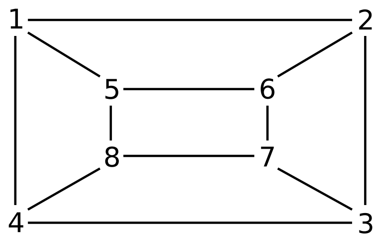
Dva neorientované grafy G a H nazývame *izomorfné*, ak:

- majú rovnaký počet vrcholov, a
- existuje mapovanie medzi ich vrcholmi také, že medzi ľubovolnými dvoma vrcholmi z G existuje hrana práve vtedy, ak existuje hrana medzi zodpovedajúcimi vrcholmi v H.

Napríklad tieto dva grafy sú izomorfné, aj keď vyzerajú úplne inak:



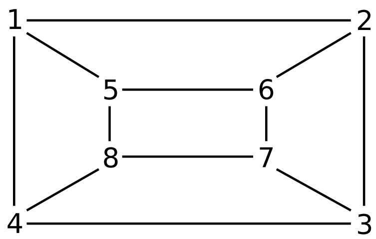
Obr. 61



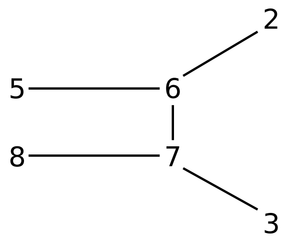
Obr. 62

Jedno z možných mapovaní vrcholov, ktoré ukazuje izomorfnosť týchto dvoch grafov, je $\{a$–1, b–6, c–8, d–3, g–5, h–2, i–4, j–7$\}$; existujú však aj iné.

Podgrafom grafu G je graf, ktorého množiny vrcholov a hrán sú podmnožinami týchto množín v grafe G. Špeciálne, G je podgrafom samého seba. Nasledujúci príklad ukazuje graf a jeden z jeho podgrafov:

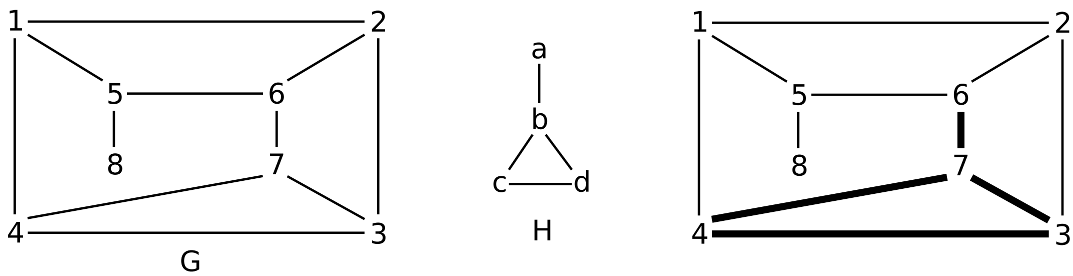


Obr. 63



Obr. 64

Hovoríme, že graf G *obsahuje* iný graf H, ak existuje nejaký podgraf H' grafu G, ktorý je izomorfný s H. Nasledujúci obrázok znázorňuje graf G, ktorý obsahuje graf H:



Obr. 65

Súťažná úloha

Pre dané dva neorientované grafy G a H, vygenerujte podgraf G' grafu G taký, že:

- počet vrcholov v G a G' je rovnaký, a
- graf G' **neobsahuje** graf H

Prirodzene, takýchto podgrafov môže existovať viacero. Vygenerujte jeden z tých, ktoré majú čo najviac hrán.

Základný algoritmus Asi najjednoduchší algoritmus, ktorý rieši túto úlohu, je zobrať hrany grafu G v poradí, v ktorom sú uvedené na vstupe a postupne ich skúšať pridávať do grafu G', pričom v každom kroku overíme, či G' obsahuje H alebo nie. Správna implementácia tohto algoritmu získa v hodnotení nejaké body, ale existujú oveľa lepšie riešenia.

Obmedzenia

- $3 \leq m \leq 4$, počet vrcholov grafu H
- $3 \leq n \leq 1\,000$, počet vrcholof grafu G

Formát vstupu Dostanete 10 vstupných súborov, `forbidden1.in` až `forbidden10.in`. Každý z nich popisuje jednu dvojicu grafov H a G.

- V prvom riadku sú 2 celé čísla oddelené medzerou, m a n.
- Nasleduje m riadkov, každý z nich obsahuje m celých čísel – matica susednosti grafu H (hodnota 1 znamená, že medzi príslušnými vrcholmi existuje hrana).
- Za týmto blokom nasleduje n riadkov, každý z nich obsahuje n celých čísel – matica susednosti grafu G.

Formát výstupu Musíte vytvoriť 10 súborov, jeden pre každý vstupný súbor. Každý z nich musí obsahovať popis grafu G' v nasledovnom formáte.

- Prvý riadok musí obsahovať hlavičku v tvare `#FILE forbidden` K, kde K je číslo vstupného súboru.
- Druhý riadok obsahuje číslo n – počet vrcholov grafu G'. Zvyšok súboru obsahuje maticu susednosti grafu G' v rovnakom tvare, ako vo vstupnom súbore.

Hodnotenie Váš bodový zisk bude závisieť od počtu hrán v grafe G', ktorý vytvoríte. Ak vytvorený graf nespĺňa požiadavky zo zadania, dostanete zaň 0 bodov. V opačnom prípade získate

$$\begin{aligned} 30 \cdot E_y/E_b &\quad \text{ak } E_y \leq E_b \\ 30 + 70 \cdot (E_y - E_b)/(E_m - E_b) &\quad \text{ak } E_y > E_b \end{aligned}$$

kde E_y je počet hrán vo Vašom grafe G', E_b je počet hrán, ktoré vygeneruje základný algoritmus a E_m je maximálny počet hrán, ktorý bol dosiahnutý nejakým súťažicim.

Príklad

forbidden$K$**.in**

```
3 5
0 1 0
1 0 1
0 1 0
0 1 0 0 0
1 0 1 0 0
0 1 0 1 0
0 0 1 0 1
0 0 0 1 0
```

forbidden$K$**.out**

```
#FILE forbidden K
5
0 1 0 0 0
1 0 0 0 0
0 0 0 0 0
0 0 0 0 0
0 0 0 0 0
```

Poznámka: Uvedený výstup je jedným z možných korektných riešení, ale nie je optimálnym.

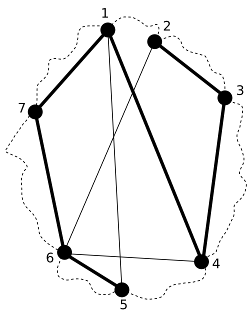
Mexická dolinka

Mesto Mexiko je postavené v nádhernom údolí, ktoré sa volá Mexická dolinka. Mexická dolinka bola kedysi dávno skoro celá pokrytá jazerom. Okolo roku 1300 aztécki veľkňazi vydali príkaz, že stred jazera treba zasypať a postaviť tam hlavné mesto ich ríše. A tak jazero zasypávali a zasypávali až ho zasypali úplne celé.

Pred príchodom Aztékov sa na brehoch jazera nachádzalo c miest. Niektoré dvojice miest mali medzi sebou uzatvorené obchodné zmluvy. Takéto mestá medzi sebou obchodovali, pričom tovar prevážali na lodiach po jazere.

Jedného dňa sa králi miest rozhodli zorganizovať obchodovanie efektívnejšie. Chceli by navrnúť obchodnú trasu, ktorá spája všetky mestá na jazere. Trasa musí spĺňať tieto kritériá:

- Trasa začína v ľubovoľnom meste a končí v ľubovoľnom inom meste ako začala.
- Trasa vedie cez každé mesto práve raz.
- Každá dvojica miest, ktoré na trase nasledujú hneď po sebe, má medzi sebou uzatvorenú obchodnú zmluvu.
- Každá dvojica miest, ktoré na trase nasledujú hneď po sebe, je spojená úsečkou. (Ľubovoľné dve mestá je možné spojiť úsečkou, ktorá prechádza jazerom.)
- Aby sa vyhlo zrážkam lodí, trasa nikdy nekrižuje samú seba.



Obr. 66

Na obrázku je nakreslený príklad, ako môže vyzerať jazero a mestá na jeho pobreží. Čiary znázorňujú obchodné zmluvy medzi mestami. Hrubé čiary znázorňujú obchodnú trasu, ktorá začína v meste 2 a končí v meste 5.

Táto trasa sa sa nikde nepretína. Trasa vedúca napr. mestami 2 – 6 – 5 – 1 nie je povolená, pretože by sa pretínala.

Mestá na jazere sú očíslované od 1 po c v smere hodinových ručičiek počnúc najvrchnejším mestom.

Súťažná úloha

Napíšte program, ktorý pre daný počet miest c a zoznam obchodných zmlúv medzi nimi zostrojí obchodnú trasu spĺňajúcu vyššie uvedené požiadavky.

Obmedzenia Pre počet miest c platí $3 \leq c \leq 1\,000$

Formát vstupu Vstupný súbor `mexico.in` obsahuje nasledujúce údaje:

- V prvom riadku sa nachádza jediné celé číslo c.
- V druhom riadku sa nachádza jediné celé číslo, ktoré udáva počet obchodných zmlúv.
- Každý z nasledujúcich riadkov udáva jednu obchodnú zmluvu. Nachádzajú sa na ňom dve celé čísla oddelené medzerou, ktoré určujú dvojicu miest, medzi ktorými je zmluva uzatvorená. Každá zmluva je uvedená práve raz.

Formát výstupu Výstupný súbor `mexico.out` má obsahovať nasledovné údaje:

- Ak je možné zostrojiť obchodnú trasu, výstupný súbor obsahuje c riadkov, pričom na každom z nich sa nachádza jediné celé číslo. Tieto čísla určujú poradie miest na obchodnej trase. Ak nie je možné zostrojiť obchodnú trasu, výstupný súbor obsahuje jediný riadok s jediným číslom -1.
- Ak existuje viacero obchodných trás spĺňajúcich dané podmienky, môžete vypísať ľubovoľnú z nich.

Hodnotenie V testovacích vstupoch, ktoré budú dokopy hodné 40 bodov, bude navyše platiť $3 \leq c \leq 20$.

Príklad

mexico.in	mexico.out
7	2
9	3
1 4	4
5 1	1
1 7	7
5 6	6
2 3	5
3 4	
2 6	
4 6	
6 7	

Spájanie bodov

V miestnom kraji majú dve politické strany: stranu zelených a stranu červených. Medzi týmito stranami panuje taká averzia, že spolu nechcú vôbec nič mať, najradšej ani spoločnú cestu. A tak v krajine existujú dve nezávislé cestné siete, a na počesť tohoto historického počinu hrajú miestni obyvatelia hru „spájanie bodov“. „Spájanie bodov“ je hra pre jedného hráča, a hrá sa nasledovne:

Na začiatku hry zvolíme dve celé čísla. Každé z nich musí byť väčšie ako 2. Prvé, označme ho g, predstavuje počet zelených a druhé, označme ho r, predstavuje počet červených bodov.

Na začiatku nakreslime štyri body, ktoré budú tvoriť vrcholy štvorca (ktorého strany sú rovnobežné so súradnicovými osami). Horné dva nakreslíme zelenou a dolné dva červenou farbou. Následne dokreslíme do vnútra štvorca ďalšie zelené a červené body tak, aby sme na konci mali práve g zelených a r červených bodov. Body kreslíme tak, aby žiadne tri (vrátane tých vo vrcholoch štvorca) neležali na tej istej priamke.

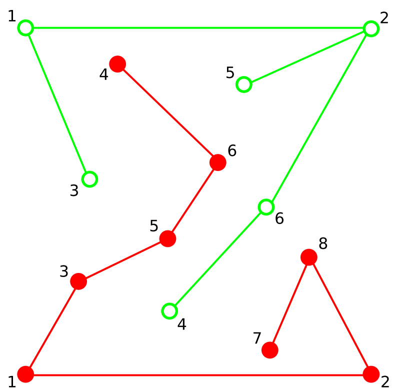
Keď máme celý hrací plán nakreslený, môžeme začať hrať. V každom ťahu môžeme spojiť úsečkou nejaké dva body. Pritom musí platiť, že:

- spájané body majú rovnakú farbu (tou istou farbou nakreslíme aj úsečku)
- úsečka, ktorou ich spojíme, nepretne žiadnu zo skôr nakreslených úsečiek (pochopiteľne, s niektorými zo skôr nakreslených úsečiek môže mať spoločný koncový bod).

Hovoríme, že dva body u a v sú v tom istom komponente, ak sa z jedného dá dostať na druhý tak, že prechádzame len po nakreslených úsečkách.

Hru sa nám podarí vyhrať vtedy, keď dosiahneme nasledovnú situáciu: Všetky zelené body sú spojené do jedného komponentu použitím práve $g-1$ úsečiek a všetky červené body sú spojené do jedného komponentu použitím práve $r-1$ úsečiek.

Váš program dostane na vstupe hrací plán: počty bodov g a r, ako aj súradnice jednotlivých zelených a červených bodov. Zelené body očíslujeme od 1 do g, pričom bod v ľavom hornom rohu dostane číslo 1, bod v pravom hornom rohu číslo 2, a ostatné body v ľubovoľnom poradí čísla od 3 do g. Podobne, červené body dostanú čísla od 1 do r, pričom ľavý dolný bude mať číslo 1 a pravý dolný číslo 2.



Obr. 67

Na obrázku je príklad vyhranej hry. Všetky zelené body tvoria jeden komponent, všetky červené (v čiernobielej verzii: tmavšie) tvoria druhý. Žiadne dve nakreslené úsečky sa nepretínajú.

Dá sa dokázať, že bez ohľadu na to, ako hrací plán vyzerá, vždy existuje spôsob, ako hru vyhrať.

Súťažná úloha

Napíšte program, ktorý zo súradníc g zelených a r červených bodov vypočíta jednu z možností, ako nakresliť $g-1$ zelených a $r-1$ červených úsečiek tak, aby všetky zelené body ležali v jednom komponente, všetky červené v druhom, a žiadne dve úsečky sa nepretínali.

Obmedzenia

- $3 \leq g \leq 50\,000$: Počet zelených bodov.
- $3 \leq r \leq 50\,000$: Počet červených bodov.
- $0 \leq xg_i \leq 200\,000\,000$
- $0 \leq yg_i \leq 200\,000\,000$
- $0 \leq xr_i \leq 200\,000\,000$
- $0 \leq yr_i \leq 200\,000\,000$

Formát vstupu Vstupný súbor `points.in` obsahuje nasledujúce údaje:

- V prvom riadku je jedno celé číslo g.
- Nasleduje g riadkov, v i-tom z nich sú dve medzerou oddelené čísla xg_i a yg_i. Tieto čísla predstavujú súradnice zeleného bodu s číslom i.
- V nasledujúcom riadku je jedno celé číslo r.
- Nasleduje r riadkov, v i-tom z nich sú dve medzerou oddelené čísla xr_i a yr_i. Tieto čísla predstavujú súradnice červeného bodu s číslom i.

Formát výstupu Výstupný súbor `points.out` má obsahovať $(g-1)+(r-1)$ riadkov, jeden pre každú nakreslenú úsečku.

Každý riadok musí obsahovať tri medzerami oddelené údaje. Prvé dva sú vždy čísla bodov, ktoré spájame, tretí je písmeno (malé '`g`' alebo malé '`r`') označujúce farbu týchto bodov (a teda aj úsečky).

Nezáleží na poradí, v akom úsečky vypíšete, ani na poradí, v akom uvediete koncové body úsečky.

Hodnotenie V testovacích vstupoch, ktoré budú dokopy hodné 35 bodov, bude navyše platiť $3 \leq g \leq 20$ a $3 \leq r \leq 20$.

Príklad

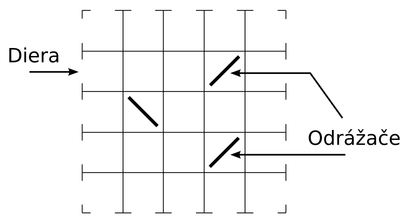
points.in
```
6
0 1000
1000 1000
203 601
449 212
620 837
708 537
8
0 0
1000 0
185 300
314 888
416 458
614 622
683 95
838 400
```

points.out
```
1 3 g
3 1 r
3 5 r
4 6 r
6 5 r
4 6 g
1 2 g
1 2 r
5 2 g
2 6 g
7 8 r
8 2 r
```

Odrážačka

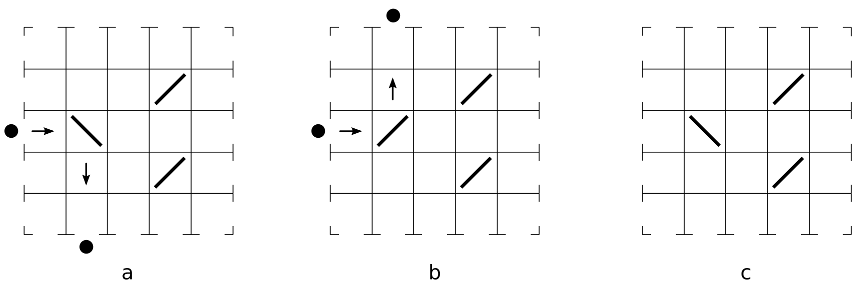
Odrážačka je stolová hra, ktorá má tvar plochej krabice so štvorcovou podstavou. Každá z jej štyroch strán má n dier (spolu má teda krabica $4n$ dier), do ktorých môžeme hádzať guličky. Každá vhodená gulička niekedy z krabice vypadne jednou z dier, možno aj tou istou, ktorou sme ju vhodili.

Vnútornosti Odrážačky si môžeme predstaviť ako mriežka $n \times n$. Diery v stenách sú začiatky a konce riadkov a stĺpcov. Každé políčko je buď prázdne, alebo obsahuje *odrážač*. Odrážač je zariadenie, ktoré zmení smer guličky o 90 stupňov (niečo ako zrkadlo). Vpravo je príklad jednej krabice rozmeru 5×5.



Obr. 68

Gulička vhodená do krabice ide priamo, až kým neopustí krabicu, alebo nenarazí na odrážač. Keď narazí na odrážač, gulička zmení svoj smer a odrážač zmení svoju polohu (otočí sa o 90 stupňov). Nasledujúci obrázok ukazuje, ako odrážač funguje:



Obr. 69

a) Vhodíme guličku do krabice, tá narazí na odrážač a zmení svoj smer.
b) Po vhodení prvej guličky odrážač zmení svoju polohu. Nová gulička vhodená do tej istej diery znovu narazí na ten istý odrážač, ale odrazí sa opačným smerom ako prvá gulička.
c) Odrážač zmení svoju polohu vždy, keď doňho narazí gulička.

Vždy, keď gulička narazí na nejaký odrážač, krabica pípne. Počet zmien smeru guličky môžeme preto určiť podľa počtu pípnutí. Dá sa dokázať, že gulička v konečnom čase opustí krabicu. Okrem toho má krabica dve tlačítka – jedno nastaví všetky odrážače do začiatočnej polohy a to druhé zmení naraz polohu všetkých odrážačov.

Súťažná úloha

Dostanete prístup k 15 krabiciam cez knižnicu funkcií. Vašou úlohou je zistiť „vnútornosti“ každej krabice čo najpresnejšie a vygenerovať súbor s popisom každej z krabíc. Máte tiež možnosť zadefinovať si vlastné krabice.

Obmedzenia

- $3 \leq n \leq 30$

Formát výstupu Pre každú krabicu musíte vytvoriť súbor, ktorý popisuje počiatočný stav každej krabice. Prvý riadok obsahuje text `#FILE blackbox` K, kde K je poradové číslo krabice (1 až 15).

Nasledujúcich n riadkov po n znakov obsahuje popis krabice:

'.' pre prádne políčko
'/' pre odrážač s pôvodnou polohou '/'
'\' pre odrážač s pôvodnou polohou '\'
'?' pre políčko, ktorého obsah sa vám nepodarilo zistiť

Knižnica

K dispozícii máte knižnicu s nasledujúcimi funkciami:

```
function Initialize(box: integer) : integer;
int Initialize(int box);
```

Inicializácia knižnice, musí byť zavolaná ako prvá funkcia na začiatku programu. Funkcia vracia číslo n – počet dier na každej stene krabice. Parameter `box` určuje ktorú krabicu chcete používať (1 až 15), alebo 0 pre vašu vlastnú krabicu.

```
function throwBall(holeIn, sideIn: integer;
                   var holeOut, sideOut: integer) : longint;
int throwBall(int holeIn, int sideIn, int *holeOut, int *sideOut);
int throwBall(int holeIn, int sideIn, int &holeOut, int &sideOut);
```

Vhodenie guličky do krabice cez dieru číslo `holeIn` v stene `sideIn`. Steny sú číslované:

1–horná, 2–pravá, 3–dolná, 4–ľavá; diery v stene sú číslované zhora nadol, resp. zľava doprava vždy od 1. V `holeOut` a `sideOut` dostanete dieru, ktorou gulička vypadla z krabice a návratová hodnota určuje počet pípnutí krabice, ktoré spôsobil prechod guličky krabicou.

```
procedure ResetBox;
void ResetBox();
```

Nastaví každý odrážač do jeho pôvodnej polohy.

```
procedure ToggleDeflectors;
void ToggleDeflectors();
```

Zmení polohu všetkých odrážačov v krabici.

```
procedure Finalize;
void Finalize();
```

Ukonči činnosť knižnice. Toto musí byť posledné volanie knižnice.

Upozornenie Knižnica je napísaná tak, aby nebolo možné spustiť viacero programov, ktoré s ňou komunikujú, naraz.

Príklad komunikácie s knižnicou

Vhodenie guličky do krabice 5×5 tak ako na obrázku a) v popise príkladu zodpovedá týmto volaniam:

`Initialize(0);`

Ak uvažujeme krabicu ako v príklade, vráti toto volanie hodnotu 5, teda $n = 5$.

`throwBall(3, 4, holeOut, sideOut);`

Guličku vhodíme do tretej diery zhora v ľavej stene. Funkcia vráti hodnotu 1, teda gulička narazila do jedného odrážača. Gulička opustí krabicu cez stenu 3 druhou dierou, teda `holeOut`=2 a `sideOut`=3.

Vlastné experimenty s knižnicou

Ak dáte funkcii `Initialize` ako parameter `box` hodnotu 0, knižnica načíta popis krabice zo súboru `blackbox.in`. Takto môžete experimentovať s knižnicou na vlastných vstupoch. Formát tohto súboru je nasledovný:

Prvý riadok obsahuje jediné celé číslo n – rozmery krabice. Druhý riadok obsahuje jediné celé číslo d – počet odrážačov v krabici. Nasleduje d riadkov, každý z nich popisuje jeden odrážač – stĺpec (celé číslo od 1 do n), riadok (celé číslo od 1 do n) a jeho počiatočná poloha (znak '/' alebo '\').

Príklad

```
blackbox.in
5
3
2 3 \
4 2 /
4 4 /
```

Chybové správy

V prípade akýchkoľvek problémov knižnica vypíše chybovú správu na štandardný chybový výstup. Možné chybové správy sú:

- **ERR 1 More than one app**
  Len jedna aplikácia naraz môže komunikovať s knižnicou. Zrušte všetky bežiace aplikácie a spustite len jednu.
- **ERR 2 Invalid box**
  Číslo krabice, ktoré ste zadali, nie je medzi 0 a 15, vrátane.
- **ERR 3 Invalid deflector**
  Súbor `blackbox.in` obsahuje odrážač na neprípustnej pozícii.
- **ERR 4 Invalid symbol**
  Súbor `blackbox.in` obsahuje zlý symbol.
- **ERR 5 Invalid size**
  Rozmer krabice v súbore `blackbox.in` je zlý.
- **ERR 6 Invalid input hole**
  Číslo steny alebo diery v stene je nesprávne.
- **ERR 7 ALARM**
  Kontaktujte organizátora.

Hodnotenie Pre každú z krabíc musíte vytvoriť popis pôvodného stavu krabice tak presne, ako viete. Pre každú krabicu získate nasledovné body:

- Ak má vaše riešenie znak '.', '/' alebo '\' na nesprávnom mieste, získate za túto krabicu 0 bodov.
- Nech B_m je maximálny počet správne uhádnutých políčok zo všetkých správnych odovzdaných riešení a B_y je počet uhádnutých políčok vo vašom riešení, potom váš percentuálny zisk za túto krabicu je $100 \cdot B_y/B_m$.

Poznámka Oficiálne riešenie tohto príkladu vie zistiť políčka vo všetkých krabiciach za menej ako 8 minút.

Korešpondenčný seminár SK MO

Korešpondenčný seminár Slovenskej komisie Matematickej olympiády (KS SK MO) vznikol pred vyše 30 rokmi ako jeden z prvých matematických korešpondenčných seminárov (vtedy ešte ako československý seminár) preto, aby bolo umožnené venovať individuálnu starostlivosť aj tým študentom, ktorí nenavštevovali triedy so zameraním na matematiku. Úlohy tohto seminára svojou náročnosťou prevyšujú akúkoľvek inú matematickú súťaž na Slovensku pre stredoškolákov, seminár je preto dôležitou súčasťou prípravy aj na medzinárodnú matematickú olympiádu.

Počas svojej existencie prešiel seminár viacerými zmenami. Po jednoročnej prestávke v 52. ročníku MO jeho organizovanie prebrali vedúci korešpondenčného seminára KMS. Odvtedy je KS SK MO jeho kategóriou GAMA a KMS je oficiálnym seminárom SK MO.

KS SK MO má každý rok šesť sérií – tri zimné prebiehajúce od septembra do decembra a tri letné prebiehajúce od februára do mája. V každej sérii je zadaných 5 úloh.

Celkové poradie KS SK MO 2005/2006

1. *Ondrej Budáč*, 4. ročník, Gymnázium B. S. Timravy, Lučenec, 213 bodov
2. *Peter Perešíni*, 4. ročník, Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica, 161 bodov
3. *Michal Takács*, 4. ročník, Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica, 124 bodov
4. *Michal Szabados*, 3. ročník, ŠpMNDaG, Bratislava, 115 bodov
5. *Samuel Hapák*, 2. ročník, Gymnázium Grösslingová, Bratislava, 114 bodov

Uvádzame všetky príklady tohto ročníka súťaže spolu s riešeniami, často študentskými. Príklady boli vyberané z národných olympiád či iných súťaží.

Zadania súťažných úloh KS SK MO

Prvá séria

1.1 Na plániku je 2 000 miest a medzi niektorými z nich je priama letecká linka. Pre každé mesto A je počet miest spojených s mestom A priamou leteckou linkou rovný jednému z čísel $1, 2, 4, 8, \ldots, 1\,024$. Nech $S(A)$ je počet ciest z mesta A do iných miest (rôznych od A) s najviac jedným medzipristátím. Nezabudnite, že z mesta A do mesta B môže viesť aj niekoľko rôznych ciest, ktoré musíme do $S(A)$ započítať. Dokážte, že keď sčítame $S(A)$ všetkých miest, tak nám nemôže vyjsť 10 000.

1.2 Nájdite najmenšie nepárne prirodzené číslo $n > 1$ s nasledujúcou vlastnosťou: existuje nekonečne veľa prirodzených čísel, ktorých štvorec (druhá mocnina) je rovný súčtu štvorcov nejakých n za sebou idúcich prirodzených čísel.

1.3 Nech $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ je taká funkcia, že funkcie $f(x) - x^3$ a $f(x) - 3x$ sú rastúce. Zistite, či funkcia $f(x) - x^2 - x$ musí byť monotónna.

(Irán, 2005)

1.4 Kružnica k vpísaná do trojuholníka ABC sa dotýka strán AB, BC, CA po poradí v bodoch Q, E, P. Úsečka EF je priemerom kružnice k. Priamky FA, FP, FQ pretínajú priamku BC po poradí v bodoch M, K, L. Dokážte, že bod M je stredom úsečky KL.

(Poľsko, 2004)

1.5 Dokážte, že z ľubovoľných 200 prirodzených čísel vieme vybrať práve 100 čísel tak, že súčet vybraných čísel je deliteľný číslom 100.

(Poľsko, 2004)

Druhá séria

2.1 Po hranách kocky lozia traja pavúci a v jej vnútri lieta mucha. Pavúci tvoria vrcholy trojuholníkovej siete a snažia sa ňou chytiť muchu. Maximálna rýchlosť aspoň jedného z nich je aspoň taká veľká ako maximálna rýchlosť muchy. Pavúci muchu chytia, ak sa nachádza vnútri siete, alebo na jej okraji. Zistite, či sa pavúkom vždy podarí muchu chytiť.

2.2 Kružnice so stredmi O a O' sa pretínajú v bodoch A a B. Priamka TT' sa dotýka prvej kružnice v bode T a druhej v bode T'. Päty kolmíc spustených z bodov T a T' na priamku OO' označme S a S'. Polpriamka AS pretína prvú kružnicu znova v bode R a polpriamka AS' druhú kružnicu znova v bode R'. Dokážte, že body R, B a R' ležia na jednej priamke.

2.3 Nájdite najväčšiu a najmenšiu možnú hodnotu výrazu

$$\sin x \cos y + \sin y \cos(2z) + \sin z \cos(4x),$$

kde x, y, z sú reálne čísla. Nadobúda výraz všetky hodnoty medzi maximom a minimom?

(Poľsko, 2004)

2.4 Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ také, že pre všetky kladné celé čísla m, n je číslo $(m^2 + n)^2$ deliteľné číslom $f(m^2) + f(n)$.

(Rumunsko, 2005)

2.5 V rovine sú dané dve konečné množiny bodov A, B. Pre každú množinu C štyroch navzájom rôznych bodov z množiny $(A \cup B)$ existuje priamka, ktorá oddelí množinu $(C \cap A)$ od množiny $(C \cap B)$ (priamka *oddeľuje* dve množiny bodov práve vtedy, ak sa body jednej z týchto množín nachádzajú vnútri jednej z polrovín určených touto priamkou a body druhej množiny sa nachádzajú vnútri tej druhej polroviny). Dokážte, že existuje priamka, ktorá oddeľuje množiny A a B.

(Irán, 2005)

Tretia séria

3.1 Pre reálne čísla a, b, c platí $a + b + c = 0$. Dokážte, že potom platí nerovnosť

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3 \geqq 6abc.$$

(Poľsko, 2004)

3.2 Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť s počiatočnými členmi $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 15$ a s predpisom

$$a_n = 15a_{n-2} - 4a_{n-3} \qquad \text{pre } n \geqq 4.$$

Dokážte, že ak je a_n prvočíslo, tak aj n je prvočíslo.

(Poľsko, 2002)

3.3 Nech M je množina slov dĺžky n nad k-prvkovou abecedou $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ taká, že každé dve slová z M sa líšia na aspoň dvoch miestach. Nájdite maximálnu možnú veľkosť takejto množiny M. (Slovo je konečná postupnosť prvkov abecedy.)

3.4 Daná je priamka a na nej $mn + 1$ úsečiek. Dokážte, že medzi týmito úsečkami existuje $m + 1$ navzájom disjunktných úsečiek alebo $n + 1$ úsečiek, ktoré majú spoločný bod.

3.5 Trojuholník ABC je ťažnicami rozdelený na šesť menších trojuholníkov. Dokážte, že stredy kružníc opísaných týmto šiestim trojuholníkom ležia na jednej kružnici.

(Poľsko, 2002)

Štvrtá séria

4.1 Rasťo sa hrá s tabuľkou 6×6, ktorá má v každom políčku zopár kamienkov. V jednom kroku hry si vyberie niekoľko políčok tabuľky tvoriacich štvorec so stranou väčšou ako 1 a do každého políčka tohto štvorca pridá jeden kamienok. Rasťo vyhrá vtedy, keď sa mu podarí dosiahnuť v každom políčku tabuľky počet kamienkov deliteľný tromi. Má šancu vyhrať pre každé počiatočné rozmiestnenie kamienkov v tabuľke?

(Ukrajina, 2005)

4.2 Zistite, pre ktoré prirodzené čísla n sa dajú čísla $1, 2, 3, \ldots, 4n$ rozdeliť do n skupín po štyri čísla tak, aby v každej skupine aspoň jedno číslo bolo priemerom zvyšných troch.

(India, 1999)

4.3 Nech $ABCO$ je štvorsten taký, že priamky OA, OB, OC sú navzájom kolmé. Nech r je polomer gule doňho vpísanej a nech H je ortocentrum trojuholníka ABC. Dokážte, že $|OH| \leqq \pi r$.

(Rumunsko, 2003)

4.4 Daný je rovnobežník $ABCD$ s priesečníkom uhlopriečok O. Body M, N sú stredy úsečiek BO, CD (v tomto poradí). Dokážte, že ak trojuholníky ABC a AMN sú podobné, tak $ABCD$ je štvorec.

(Švédsko)

4.5 Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x, y platí

$$f(x + f(x) + f(y)) = f(y + f(x)) + x + f(y) - f(f(y)).$$

PIATA SÉRIA

5.1 Vnútri strany AC trojuholníka ABC leží bod D taký, že $|AB| = |CD|$ a uhly ACB a ABD majú rovnakú veľkosť. Os uhla CAB pretína stranu BC v bode E. Dokážte, že priamky AB a DE sú rovnobežné.

(Poľsko, 2004)

5.2 Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník. Označme v tomto poradí A', B', C', D' obrazy bodov A, B, C, D v osových súmernostiach podľa tej uhlopriečky, na ktorej neležia. Dokážte nasledujúce tvrdenia:
a) Ak $ABCD$ je lichobežník a $A'B'C'D'$ je štvoruholník, tak $A'B'C'D'$ je tiež lichobežník.
b) Ak S je obsah štvoruholníka $ABCD$ a S' je obsah štvoruholníka určeného bodmi A', B', C', D', tak $S' \leqq 3S$.

(Poľsko 2004)

5.3 *Opakovane bola zadaná úloha 3.3.*

5.3 Bod P je vnútorným bodom daného pravidelného mnohouholníka $A_1A_2 \dots A_n$. Stredy strán $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ označíme v tomto poradí $M_1, M_2, \dots, M_n$. Dokážte, že

$$\sum_{i=1}^{n} |PA_i| \geqq \sum_{i=1}^{n} |PM_i| \geqq \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} |PA_i|.$$

Kedy nastáva rovnosť? Skúste nájsť čo najlepší dolný a horný odhad pomeru $\sum_{i=1}^{n} |PM_i| \Big/ \sum_{i=1}^{n} |PA_i|$.

(Poľsko, 2002)

5.4 Neznámy dobrodinec nám daroval n bielych mačiatok ležiacich v kruhu, prirodzené číslo m a nasledovnú hru. Začneme počítať mačiatka od prvého a keď napočítame do m, presne m-té mačiatko v poradí zafarbíme na fialovo. Pokračujeme podobne ako predtým: začneme počítať od nasledujúceho mačiatka, pričom fialové mačiatka už nepočítame, a keď napočítame do m, dotyčné

mačiatko zafarbíme. Takto postupujeme, až kým neostane posledné nezafarbené mačiatko. Jedno biele mačiatko si chceme nechať, ale musíme dopredu, pred začatím farbenia, povedať, ktoré. Zjavne teda nie je jedno, ktoré mačiatko si vyberieme, pretože ho chceme mať biele a nie zafarbené na fialovo.
a) Majme v kruhu $2n$ mačiatok, prvých n sú mačičky a druhých n sú kocúrikovia. Vieme zvoliť také m, že najprv zafarbíme všetkých kocúrikov?
b) Majme n mačiatok, ktoré už ležia v kruhu. Mačiatko, ktoré sme si vybrali, je na p-tom mieste. Vieme zvoliť m tak, že mačiatko, ktoré sme si vybrali, ostane posledné?

Siesta séria

6.1 Nech k je prirodzené číslo a $P(x)$ polynóm s celočíselnými koeficientmi. Dokážte, že existuje prirodzené číslo n také, že súčet $P(1)+P(2)+\cdots+P(n)$ je deliteľný číslom k.

(Rusko, 2005)

6.2 Bača má v stáde 101 oviec. Ak z nich vyberie ľubovoľných 100, vždy ich vie rozdeliť na 2 skupiny po 50 oviec tak, aby súčty hmotností oviec v jednotlivých skupinách boli rovnaké. Dokážte, že každé dve bačove ovce vážia rovnako.

6.3 Nech ABC je trojuholník ($|AB| < |BC|$) a S stred kružnice doňho vpísanej. Označme M stred úsečky AC a N stred toho oblúka AC kružnice opísanej trojuholníku ABC, ktorý obsahuje bod B. Dokážte, že uhly SMA a SNB majú rovnakú veľkosť.

(Rusko, 2005)

6.4 Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel x, y, pre ktoré platí

$$3^x = y \cdot 2^x + 1.$$

6.5 Nech a, b, c sú kladné reálne čísla spĺňajúce vzťah $a^2+b^2+c^2=1$. Dokážte, že

$$\frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b}+\frac{c}{1-c} \geqq \frac{3\sqrt{3}+3}{2}.$$

(Poľsko, 2004)

Riešenia súťažných úloh KS SK MO

PRVÁ SÉRIA

1.1 Úspech slávi najmä prístup, v ktorom sa na letecké linky pozrieme z nadhľadu a uvedomíme si, čo to vlastne súčet všetkých $S(A)$ je. Ale začnime pekne po poriadku. $S(A)$ je počet liniek z mesta A do iných miest s najviac jedným medzipristátím, čiže je to počet priamych liniek (ten označme $P(A)$) plus počet liniek, ktoré začínajú v A, idú cez suseda A a nekončia v A.

Súčet všetkých $S(A)$ sa skladá zo súčtu všetkých priamych liniek a zo súčtu všetkých liniek s jedným medzipristátím. Súčet všetkých priamych liniek je $P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_{2000})$ (kde A_i je i-te mesto), lebo z každého mesta A môžeme letieť práve $P(A)$ spôsobmi. Teraz spočítame počet ciest s jedným medzipristátím. Ak je mesto medzipristátia A, tak máme $P(A)$ spôsobov, ako sme do neho mohli priletieť (lebo s toľkými má priame spojenie) a $P(A) - 1$ spôsobmi môžeme z neho odísť (do mesta, odkiaľ sme prileteli, sa už nemôžeme vrátiť). Dostávame, že pre súčet počtov ciest platí

$$S(A) = \sum_{i=1}^{2000} P(A_i) + \sum_{i=1}^{2000} P(A_i)\,(P(A_i) - 1) = \sum_{i=1}^{2000} P(A_i)^2.$$

Teraz už ostáva len zistiť, prečo $S(A)$ nemôže byť práve 10 000. Na to potrebujeme informáciu zo zadania, ktorú sme ešte nepoužili. Vieme totiž, že $P(A_i)$ je mocninou 2. Čiže $P(A_i)^2$ je mocninou 4. A keďže mocniny 4 dávajú po delení tromi vždy zvyšok 1, súčet $S(A)$ bude dávať po delení tromi zvyšok $2\,000 \cdot 1$, teda 2. Lenže 10 000 dáva po delení tromi zvyšok 1, a tak súčet $S(A)$ nemôže byť 10 000.

1.2 (Podľa *Ondreja Budáča.*) Máme nájsť najmenšie nepárne číslo väčšie ako 1, ktoré spĺňa podmienky zadania. Rozumné teda bude skúšať postupne nepárne čísla $3, 5, 7, \ldots$ a zisťovať, či vyhovujú. Keď natrafíme na prvé, ktoré vyhovuje (a dokážeme to o ňom a o predošlých dokážeme, že nevyhovujú), bude úloha vyriešená.

Skúsme teda ako prvú hodnotu $n = 3$. Chceme zistiť, či existuje nekonečne veľa čísel, ktorých štvorec je súčtom troch po sebe idúcich štvorcov. Zaujíma nás preto, či rovnica

$$k^2 = (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2$$

má v obore prirodzených čísel nekonečne veľa riešení. (Presnejšie takých riešení, pre ktoré platí $a > 1$, lebo chceme, aby $a - 1$, a aj $a + 1$ boli prirodzené. Avšak ak bude nekonečne veľa prirodzených riešení, bude aj nekonečne veľa takých, pri ktorých $a > 1$.) Tvar $(a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2$ sme uprednostnili pred tvarom $a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2$ len z kozmetických dôvodov (po úprave vypadnú niektoré členy), celé riešenie sa dá urobiť aj bez tohto „triku“. Po úprave uvedenej rovnice dostaneme

$$k^2 = 3a^2 + 2.$$

Skúsené oko už zbadá, že táto rovnosť nemôže byť splnená pre žiadne celé čísla k, a. Totiž pravá strana očividne dáva pre ľubovoľnú hodnotu a po delení tromi zvyšok 2, zatiaľ čo ľavá strana je štvorec, a tak dáva po delení tromi zvyšok 0 alebo 1 (dokázať to nie je problém, stačí rozobrať tri možnosti podľa toho, aký zvyšok dáva po delení tromi číslo k). Tým sme dokázali, že hodnota $n = 3$ prípustná nie je (neexistuje *žiadne* číslo, ktorého štvorec je súčtom troch po sebe idúcich čísel, nie to ešte nekonečne veľa čísel).

Na rade je hodnota $n = 5$. Tentoraz nás zaujíma rovnica

$$k^2 = (a-2)^2 + (a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2$$

(opäť sme urobili kozmetickú úpravu). Po úprave dostaneme prijateľnejší tvar

$$k^2 = 5(a^2 + 2).$$

Ak by ostatná rovnosť platila pre čísla k a a, tak nutne $5 \mid k^2$, teda aj $5 \mid k$ (keď má k^2 v prvočíselnom rozklade päťku, musí ju mať aj k), z čoho zasa $25 \mid k^2$. Preto 25 musí deliť aj pravú stranu, čiže $5 \mid a^2 + 2$. Avšak $a^2 + 2$ nemôže byť nikdy deliteľné piatimi, ako vidíme z tabuľky.

zvyšok a po delení piatimi	0	1	2	3	4
zvyšok a^2+2 po delení piatimi	2	3	1	1	3

Takže $n = 5$ tiež nevyhovuje.

Hodnotu $n = 7$ vybavíme veľmi podobne, ako sme to urobili pri $n = 5$. Po úprave príslušnej rovnice (už ju nebudeme písať) totiž dostaneme

$$k^2 = 7(a^2 + 4).$$

Ak k a a spĺňajú túto rovnosť, skopírovaním úvah z predošlého odstavca dostaneme $7 \mid a^2 + 4$. Z tabuľky opäť vidíme, že to nie je možné.

zvyšok a po delení siedmimi	0	1	2	3	4	5	6
zvyšok a^2+4 po delení siedmimi	4	5	1	6	6	1	5

Vylúčiť prípad $n = 9$ je ešte jednoduchšie. Po úprave máme rovnicu

$$k^2 = 9a^2 + 60.$$

Pravá strana však zjavne nemôže byť štvorcom, lebo je deliteľná tromi, ale nie je deliteľná deviatimi (zatiaľ čo každý štvorec, ktorý je deliteľný tromi, je deliteľný aj deviatimi – podobnú úvahu sme robili už pri hodnote $n = 5$, keď z predpokladu $5 \mid k^2$ sme odvodili $25 \mid k^2$).

Pomaly strácame chuť príklad ďalej takto riešiť. Naoko to vyzerá, že zakaždým ukážeme, že rovnica nemá žiadne riešenie a že teda žiadne číslo n nevyhovuje podmienkam zadania. Našťastie sa toto zdanie ukáže ako mylné už pri nasledujúcom kandidátovi $n = 11$. Riešenú rovnicu

$$k^2 = (a-5)^2 + (a-4)^2 + (a-3)^2 + \dots + (a+3)^2 + (a+4)^2 + (a+5)^2 \qquad (1)$$

upravíme na tvar

$$k^2 = 11(a^2 + 10).$$

Pravá strana je vždy deliteľná jedenástimi, preto aj $11 \mid k$ a môžeme položiť $k = 11m$, kde m je prirodzené číslo. Po vykrátení tak dostaneme

$$11m^2 = a^2 + 10. \qquad (2)$$

Príliš sme si nepomohli, len sme o niečo znížili koeficienty rovnice. Avšak pri tejto rovnici na prvý pohľad vidíme, že jej riešením je dvojica $(m, a) = (1, 1)$. I keď táto dvojica nám ešte nedá 11 za sebou idúcich štvorcov prirodzených čísel, ktorých súčet je štvorcom (na to potrebujeme $a > 5$), vieme vďaka nej, že sa nám určite nepodarí dokázať (tak ako sa nám to podarilo pri $n = 3, 7, 9, 11$ pomocou zvyškových tried), že rovnica (2) nemá v celých číslach žiadne riešenie (jedno sme predsa práve našli). Navyše pri tomto type rovníc často nájdenie jedného riešenia naznačuje, že riešení by mohlo byť nekonečne veľa. Na vyriešenie úlohy nepotrebujeme vyriešiť rovnicu (2) všeobecne, t. j. nemusíme nájsť všetky riešenia a dokázať, že žiadne iné neexistujú. Stačí nájsť nekonečne veľa riešení. Skúsme teda nejaké ďalšie riešenia objaviť. Skvelé by bolo vytvoriť rekurentný vzťah, ktorým vieme generovať z už nájdených riešení nové riešenia. Veľmi dobrou metódou je zopár riešení nájsť pomocou kalkulačky či počítača, rekurentný vzťah sa dá potom ľahšie objaviť. Skúsme to však bez toho.

Chceme vytvoriť postupnosť riešení (m_k, a_k), $k = 1, 2, \dots$, pričom každé ďalšie sa bude dať vyjadriť pomocou predchádzajúceho. Také vyjadrenie môže mať povedzme tvar

$$\begin{aligned} m_{k+1} &= A \cdot m_k + B \cdot a_k, \\ a_{k+1} &= C \cdot m_k + D \cdot a_k, \end{aligned} \qquad k = 1, 2, \dots, \qquad (3)$$

pričom práve koeficienty A, B, C, D chceme nájsť. Dopredu síce vôbec nemáme záruku, že také vyjadrenie existuje, t. j. že existujú celé čísla A, B, C, D také, že postupnosť definovaná pomocou (3) s počiatočnými hodnotami $(m_1, a_1) = (1, 1)$ je postupnosťou riešení rovnice (2), ale za pokus to stojí, veď ak také čísla nájdeme, bude úloha vyriešená.

Každé riešenie (m, a) danej rovnice spĺňa rovnosť $11m^2 - a^2 = 10$. Vhodné teda bude navoliť A, B, C, D tak, aby platilo

$$11m_{k+1}^2 - a_{k+1}^2 = 11m_k^2 - a_k^2, \qquad (4)$$

z čoho po dosadení z (3) postupnými úpravami dostaneme

$$11(Am_k + Ba_k)^2 - (Cm_k + Da_k)^2 = 11m_k^2 - a_k^2,$$
$$(11A^2 - C^2)m_k^2 + (11B^2 - D^2)a_k^2 + (22AB - 2CD)m_k a_k = 11m_k^2 - a_k^2.$$

Táto rovnosť má platiť pre každý index k. Klasickým porovnaním koeficientov dostávame sústavu

$$\begin{aligned} 11A^2 - C^2 &= 11, \\ 11B^2 - D^2 &= -1, \\ 22AB - 2CD &= 0. \end{aligned}$$

Uhádnime nejaké riešenie. Z prvej rovnice sústavy vidíme, že $11 \mid C$. Vyskúšajme do nej dosadiť $C = 11, 22, 33, \dots$ Prvé dve hodnoty nám nedajú celočíselné A. No pre $C = 33$ dostaneme $A = 10$ (prípadne $A = -10$, ale nezabúdajme, že iba hádame hocaké riešenie, zápornej možnosti sa teda nevenujme). Zatiaľ sme pracovali len s prvou rovnicou. Dosaďme uhádnuté čísla do tretej rovnice sústavy. Získame

$$22 \cdot 10B - 2 \cdot 33D = 0 \qquad \text{a po vykrátení} \qquad 10B - 3D = 0.$$

Už dosadením najmenšieho prirodzeného riešenia tejto rovnice $B = 3$, $D = 10$ do druhej rovnice sústavy zistíme, že vyhovuje ($11 \cdot 3^2 - 10^2$ je naozaj -1). Našli sme teda jedno riešenie $(A, B, C, D) = (10, 3, 33, 10)$ a po dosadení do (3) máme postupnosť

$$\begin{aligned} m_{k+1} &= 10m_k + 3a_k, \\ a_{k+1} &= 33m_k + 10a_k, \end{aligned} \qquad k = 1, 2, \dots, \qquad m_1 = a_1 = 1.$$

Pre zaujímavosť zrátajme prvých pár členov. Dostaneme dvojice

$$(1, 1), \quad (13, 43), \quad (259, 859), \quad \dots$$

Neveriaci ľahko overia, že sú to naozaj riešenia rovnice (2). Zrejme takto vygenerujeme nekonečne veľa rôznych riešení (postupnosť je zjavne rastúca). To, že sú to naozaj riešenia, vyplýva z postupu, akým sme našli konštanty A, B, C, D. Platí totiž vzťah (4) a ostatné je vecou indukcie. Dokázali sme teda, že rovnica (2) má nekonečne veľa riešení, preto ich má nekonečne veľa aj rovnica (1). (Ku každej dvojici (m_k, a_k), ktorá je riešením (2), máme dvojicu $(11m_k, a_k)$, ktorá je riešením (1). Pritom pre $k > 1$ máme $a_k > 5$, takže z každej dvojice $(11m_k, a_k)$ pre $k > 1$ dostaneme nových 11 po sebe idúcich štvorcov *prirodzených* čísel.)

Tým je úloha vyriešená. Hľadaným číslom je $n = 11$.

Poznámka. Prípady $n < 11$ bolo možné vylúčiť viacerými spôsobmi. Napríklad pre $n = 5$ stačilo rozobrať všetky možnosti zvyškov po delení štyrmi a pre $n = 7$ po delení šestnástimi.

Riešenia rovnice (2) možno popísať aj iným rekurentným vzťahom. Keď máme vygenerovaných zopár riešení, dá sa uhádnuť, že riešenia tvoria postupnosť (m_k, a_k) definovanú

$$m_{k+2} = 20m_{k+1} - m_k, \quad a_{k+2} = 20a_{k+1} - m_k, \quad m_1 = a_1 = 1,\ m_2 = 13,\ m_2 = 43.$$

Matematickou indukciou, ktorá ale vyžaduje trochu viac technických detailov, sa potom dá dokázať, že táto postupnosť naozaj obsahuje riešenia rovnice.

Rovnica (2) má aj iné riešenia ako tie, ktoré sme popísali našou postupnosťou. Vyhovuje napríklad aj dvojica $(7, 23)$. Zaujímavé je zistiť, ako vyzerá množina všetkých riešení. Ďalšou otvorenou otázkou je, ktoré nepárne n okrem jedenástky spĺňajú podmienky zadania.

1.3 (Podľa *Ondreja Budáča.*) Na skúmanie priebehu funkcií máme v matematickej analýze mnoho užitočných metód, avšak v našom príklade sa použiť nedajú. O funkcii f nevieme takmer nič. Nemusí byť spojitá, diferencovateľná... Dokonca môže byť spojitá a pritom môže nemať v žiadnom bode svojho definičného oboru deriváciu (aj také funkcie existujú). Preto prístupy využívajúce skúmanie derivácie funkcie $f(x) - x^2 - x$ neviedli k cieľu.

Rastúcosť funkcie môžeme prepísať priamo z definície; funkcia f je rastúca práve vtedy, keď pre každé x, y z jej definičného oboru platí, že ak $x < y$, tak $f(x) < f(y)$.

Po chvíľke hry s funkciou $f(x) - x^2 - x$ zistíme, že je rastúca. (Hra by mala zahŕňať voľbu konkrétnych funkcií namiesto f a dosádzanie konkrétnych hodnôt za x.) Toto tvrdenie dokážeme. Presnejšie, nech a, b sú dve kladné reálne čísla s vlastnosťou $a > b$. Dokážeme, že $f(a) - a^2 - a > f(b) - b^2 - b$, inak napísané $f(a) - f(b) > a^2 + a - b^2 - b$.

Z predpokladov v zadaní vieme, že pre naše a, b platí

$$f(a) - a^3 > f(b) - b^3 \qquad \text{a tiež} \qquad f(a) - 3a > f(b) - 3b.$$

Takže pre rozdiel $f(a) - f(b)$ máme dva dolné odhady

$$f(a) - f(b) > a^3 - b^3, \qquad f(a) - f(b) > 3a - 3b.$$

Chceme ukázať, že aspoň jedno z čísel $a^3 - b^3$ a $3a - 3b$, ktorými sme odhadli rozdiel $f(a) - f(b)$, je väčšie ako $a^2 + a - b^2 - b = (a - b)(a + b + 1)$. Spravíme teda niekoľko porovnaní:

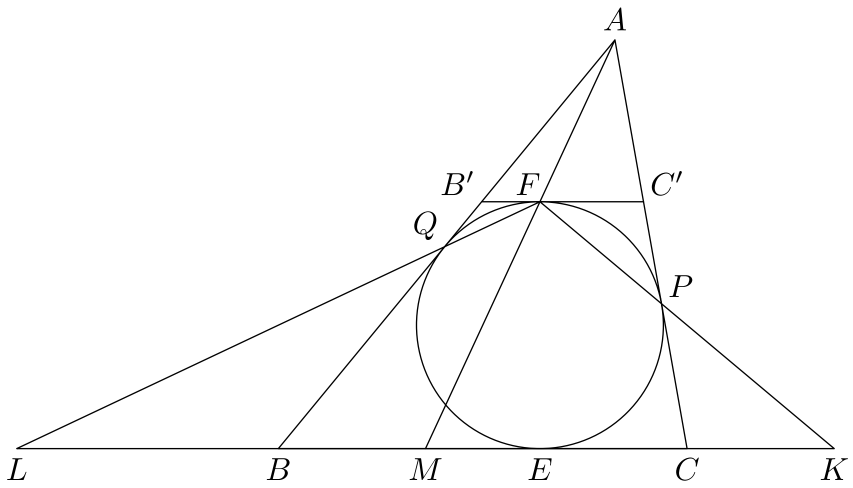
$$3a - 3b \geqq (a - b)(a + b + 1) \quad \Longleftrightarrow \quad 3 \geqq a + b + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a + b \leqq 2.$$

Takže stačí dokázať, že pre $a + b > 2$ platí (po postupných ekvivalentných úpravách) nerovnosť

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &\geqq (a - b)(a + b + 1), \\ a^2 + ab + b^2 &\geqq a + b + 1, \\ 2a^2 + 2ab + 2b^2 - 2a - 2b - 2 &\geqq 0, \\ (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (a + b)^2 - 4 &\geqq 0. \end{aligned}$$

Posledná nerovnosť je pravdivá, lebo $a + b > 2$ a štvorce sú nezáporné. Všimnite si, ako sme k nej dospeli; cieľom úprav bolo získať na ľavej strane štvorce a na pravej nulu.

1.4 Vari najťažšou časťou riešenia bolo všimnúť si, že body M a F sú rovnoľahlé so stredom v bode A a z toho vyvodiť, že bod M je dotykom pripísanej kružnice k strane BC trojuholníka ABC (obr. 70).



Obr. 70

Na úvod pripomeňme známe tvrdenia o vpísanej a pripísanej kružnici. Keďže E je bod dotyku vpísanej kružnice a strany BC, platí

$$|CE| = \frac{a+b-c}{2}, \qquad |BE| = \frac{a+c-b}{2}.$$

Ďalej ak M je bodom dotyku strany BC a k nej pripísanej kružnice, tak

$$|BM| = \frac{a+b-c}{2}, \qquad |CM| = \frac{a+c-b}{2}.$$

Narysujme rovnobežku s BC cez bod F. Jej priesečníky s AB a AC označme B' a C'. Priamka $B'C'$ je zjavne dotyčnicou k vpísanej kružnici, preto sú trojuholníky $PC'F$ a $QB'F$ rovnoramenné. Potom aj s nimi podobné trojuholníky PCK a QBL sú rovnoramenné, čiže $|KC| = |CP|$ a $|LB| = |BQ|$. Teraz použijeme triviálnu vlastnosť vpísanej kružnice, že $|CP| = |CE|$ a $|BQ| = |BE|$ a dostaneme

$$|KM| = |KC| + |CM| = |CE| + |CM|,$$
$$|LM| = |LB| + |BM| = |BE| + |BM|.$$

Pri pohľade na vzťahy z úvodu riešenia zistíme, že $|KM| = |LM|$.

1.5 Dokážeme, že ak $n > 1$ je prirodzené číslo, tak z ľubovoľných $2n - 1$ celých čísel vieme vybrať práve n tak, že súčet týchto n čísel je deliteľných číslom n.

Máme teda tvrdenie, ktorého platnosť sa snažíme dokázať pre všetky prirodzené čísla. Matematická indukcia v takých prípadoch nebýva zlý nápad. Avšak spraviť indukčný krok z deliteľnosti číslom n na deliteľnosť číslom $n+1$ je pomerne náročné.

No môže nás napadnúť niečo iné. Nebudeme robiť obyčajnú indukciu, ale nejakú, kde vieme dobre narábať s deliteľnosťou. Napríklad robiť indukčný krok z n na $2n$, tam by sa deliteľnosť sčasti zachovávala. Majme teda n, o ktorom predpokladáme, že z ľubovoľných $2n-1$ čísel vieme vybrať n tak, že ich súčet je deliteľný číslom n. Zoberme ľubovoľných $2(2n)-1=4n-1$ čísel, využime indukčný predpoklad a vyberme z nich n, ktorých súčet je deliteľný n. Zostalo nám $3n-1$ čísel a keď predpoklad využijeme ešte dva krát, získame tri (disjunktné) n-tice čísel, z ktorých každá má súčet prvkov deliteľný n. Označme súčty prvkov týchto n-tíc S_1, S_2 a S_3. Vieme, že sú deliteľné číslom n, a preto ich môžeme zapísať v tvare $S_1=nT_1$, $S_2=nT_2$, $S_3=nT_3$. Zrejme z čísel T_1, T_2, T_3 vieme vybrať dve, ktorých súčet je párny. Povedzme, že sú to T_1 a T_2. Potom $S_1+S_2=nT_1+nT_2=n(T_1+T_2)$ a toto číslo je deliteľné číslom $2n$, teda z ľubovoľných $4n-1$ čísel sa dá vybrať $2n$ čísel deliteľných číslom $2n$.

Zatiaľ vieme, že ak naše tvrdenie platí pre číslo n, tak platí aj pre $2n$. Dokázali sme ho teda pre všetky čísla tvaru 2^k. Zovšeobecnenie nás napadne celkom prirodzene, stačí, aby sme si všimli, ako vyzeral dôkaz pri prechode z n na $2n$. Predpokladajme, že naše tvrdenie platí pre n aj pre m, ukážeme, že platí aj pre mn. Majme ľubovoľných $2mn-1$ čísel. Vieme, že pokiaľ je čísel aspoň $2m-1$, môžeme z nich podľa predpokladu v každom kroku vybrať m-ticu čísel so súčtom deliteľným číslom m. Takýchto krokov môžeme urobiť $2n-1$; dostávame tak $2n-1$ m-tíc, ktorých súčty označíme S_1, S_2,…, S_{2n-1}. Stále postupujeme podobne ako predtým, súčty zapíšme v tvare $S_i=mT_i$ pre $i=1, 2,\dots, 2n-1$. Spomedzi čísel T_i však vieme (podľa indukčného predpokladu) vybrať práve n tak, že ich súčet bude deliteľný číslom n. Spojením týchto n m-tíc získame mn čísel, ktorých súčet je deliteľný číslom mn.

Aby sme teda dokázali tvrdenie pre všetky prirodzené čísla, stačí ho dokázať pre prvočísla (t. j. urobiť prvý krok indukcie).

Nech p je ľubovoľné prvočíslo. Nech $0\leqq a_1\leqq a_2\leqq\dots\leqq a_{2p-1}\leqq p-1$ sú zvyšky daných $2p-1$ prirodzených čísel po delení číslom p. Položme $b_k=a_{p+k}-a_k$ pre $k=1,2,\dots,p-1$. Zrejme $0\leqq b_k\leqq p-1$. Ak by nejakých p z čísel a_i bolo rovnakých, tvrdenie by triviálne platilo. Môžeme preto predpokladať, že $b_k\neq 0$. Vytvorme 2^{p-1} p-prvkových množín. Všetky budú obsahovať a_p a z každej dvojice $\{a_k,a_{p+k}\}$ budú obsahovať práve jedno číslo. Ak zo všetkých dvojíc vyberieme prvé číslo, súčet bude $S=a_1+\dots+a_p$. Ak z i-tej dvojice vyberieme druhé číslo, stačí k S pripočítať $b_i=a_{p+i}-a_i$, aby sme získali súčet čísel tejto množiny. Všetky možné súčty čísel popísaných množín získame tak, že k S pripočítame niektoré z čísel b_i. Zostáva ešte dokázať, že takto vieme získať aj súčet, ktorý dáva zvyšok 0 po delení číslom p.

Nech pre $0\leqq j\leqq p-1$ je M_j množina tých zvyškových tried po delení číslom p, ktoré vieme získať ako súčet niektorých prvkov množiny $\{b_1, b_2,\dots, b_j\}$ (môžeme sčítať aj 0 prvkov, v M_j teda je aj zvyšok 0). Ukážeme, že M_{p-1} obsahuje všetkých p možných zvyškov. Zrejme $\mathsf{M}_0\subseteq\mathsf{M}_1\subseteq\dots\subseteq\mathsf{M}_{p-1}$. Ak sú všetky tieto inklúzie vlastné (t. j. neplatí rovnosť $\mathsf{M}_j=\mathsf{M}_{j+1}$ pre žiadne j), tak zrejme M_{p-1} obsahuje všetky možné zvyšky. Na druhej strane, ak pre nejaké j platí $\mathsf{M}_j=\mathsf{M}_{j+1}$, znamená to, že pridaním zvyšku b_{j+1} sme nevyrobili žiadny nový súčet. Takže pre každý prvok $s \in \mathsf{M}_j$ aj $s+b_{j+1}$ leží v M_j (súčty uvažujeme modulo p). Keď túto úvahu použijeme viackrát po sebe, zistíme, že v M_j musia byť všetky prvky

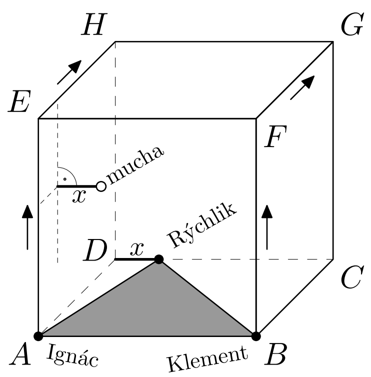
$$s, \quad s+b_{j+1}, \quad s+2b_{j+1}, \quad s+3b_{j+1}, \quad \dots, \quad s+(p-1)b_{j+1}.$$

Avšak tieto zvyšky sú navzájom rôzne. (Ak totiž $s+ub_{j+1} \equiv s+vb_{j+1} \pmod p$ pre nejaké $0 \leqq u < v \leqq p-1$, tak po úprave $(v-u)b_{j+1} \equiv 0 \pmod p$. Keďže p je prvočíslo a $b_{j+1} \neq 0$, ostatná kongruencia nemôže platiť.) Množina M_j (a tým skôr aj M_{p-1}) teda obsahuje všetkých p rôznych zvyškov. Nájdeme v nej preto aj zvyšok, ktorý treba pripočítať k S, aby sme dostali číslo deliteľné prvočíslom p. Tým je úloha vyriešená.

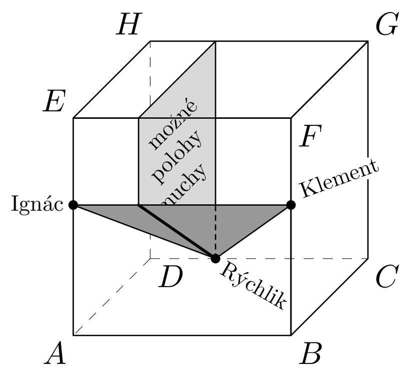
Druhá séria

2.1 Nazvime pavúkov Ignác, Klement a Rýchlik. Nech Rýchlik je najrýchlejší z nich. Vieme, že jeho maximálna rýchlosť je aspoň taká veľká ako maximálna rýchlosť muchy. Okrem toho sa aj Ignác a Klement vedia hýbať, keďže v zadaní je napísané, že všetci traja pavúci lozia. No a keďže ich maximálne rýchlosti sú na základe predchádzajúcej vety nenulové, vedia sa v konečnom čase dostať, kam chcú. Pavúci sa snažia chytiť muchu do trojuholníkovej siete, ktorú v každom okamihu svojou polohou určujú. Niekedy môžu pavúci tvoriť degenerovaný trojuholník. To nastáva napríklad keď splývajú, alebo keď stoja na jednej priamke. Takéto situácie nám nebudú prekážať.

Ako by mohli pavúci chytiť muchu do siete? Napríklad tak, že ju touto sieťou pritlačia na niektorú stenu, alebo že ju pripučia v rohu. My ukážeme, že ju vedia pritlačiť o stenu. Označme kocku klasicky $ABCDEFGH$ a umiestnime ju do karteziánskej sústavy tak, že bod A je bod $(0,0,0)$ a body B, D a E ležia v poradí na x-ovej, y-ovej a z-ovej osi. Ignác a Klement dolezú do vrcholov A a B. Rýchlik dolezie na hranu CD tak, aby jeho x-ová súradnica bola taká istá ako x-ová súradnica muchy (obr. 71). V istom okamihu toto môže dosiahnuť tak, že sa vydá z bodu C do bodu D. Niekedy na tejto ceste bude mať tú istú x-ovú súradnicu ako mucha. Bude to vtedy, keď sa kolmý priemet pohybu muchy na hranu CD stretne s pohybom pavúka. V okamihu, keď budú mať rovnaké x-ové súradnice, Rýchlik začne kopírovať pohyb muchy tak, aby zhodnosť x-ovej súradnice bola stále zachovaná.



Obr. 71



Obr. 72

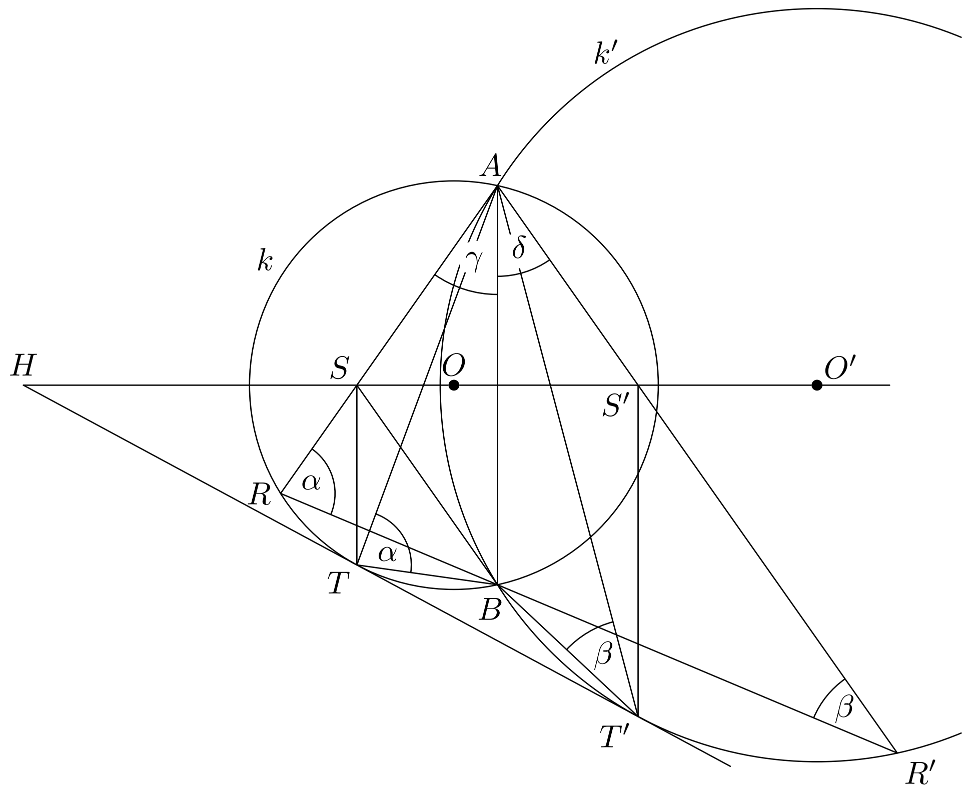
Keď už Rýchlik kopíruje pohyb muchy, môžu sa Ignác s Klementom vydať na cestu. Začnú sa naraz hýbať z bodov A, B rovnakou rýchlosťou (teda maximálnou rýchlosťou pomalšieho z nich). Ignác pôjde z vrcholu A do vrcholu H cez E. Klement pôjde z vrcholu B do G cez vrchol F. Zamerajme sa teraz na muchu. Ak ešte nie je chytená, musí sa nachádzať „nad“ rovinou trojuholníka tvoreného pavúkmi. Teda lieta niekde v polpriestore určenom pavúkmi a vrcholom G. Navyše vieme, že Rýchlik a mucha majú stále rovnakú x-ovú súradnicu (obr. 72). Do opačného polpriestoru sa mucha dostať nemôže, pretože nemôže preletieť rovinou, v ktorej je sieť. Pri pokuse o prelet na sieť narazí, lebo v okamihu prelietania má Rýchlik tú istú x-ovú súradnicu ako mucha. A keďže všetky body výšky trojuholníka, ktorý pavúci tvoria (spustenej z vrcholu, v ktorom je Rýchlik), majú tú istú x-ovú súradnicu a ležia v sieti, chytí sa mucha do siete.

Takto sa životný priestor muchy stále zmenšuje. Vo chvíli, keď Ignác a Klement dorazia do vrcholov G, H, je mucha chytená. Vtedy je trojuholníková sieť časťou steny $DCGH$ a mucha leží niekde na výške trojuholníka tvoreného vrcholmi G, H a miestom, kde stojí Rýchlik (uvažujeme samozrejme výšku na stranu GH).

Keďže sme na začiatku neuvažovali žiadnu špeciálnu polohu muchy, je náš postup univerzálny. Teda pavúkom sa naozaj vždy podarí chytiť muchu.

Poznámka. Existuje aj spôsob, ako chytiť muchu do rohu.

2.2 Ak majú kružnice rovnaký polomer, body S, O (resp. S', O') splynú a tvrdenie



Obr. 73

platí, lebo uhly nad priemermi pri bode B sú pravé. Inak môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že kružnica k má menší polomer ako kružnica k' (obr. 73).

Máme dokázať, že body R, B, R' ležia na priamke, t. j. že uhol RBR' je priamy. Nech veľkosti uhlov ARB, $AR'B$, RAB, $R'AB$ sú postupne α, β, γ, δ. Prečo sme označili práve tieto uhly? Uhly γ a δ vyjadrujú polohu bodov S, S' vnútri jednotlivých kružníc a uhly α a β zase hovoria, pod akým uhlom vidíme zo zodpovedajúcich kružníc úsečku AB. Preto tieto uhly popisujú celú situáciu. Dokazované tvrdenie je ekvivalentné s tým, že $\alpha+\beta+\gamma+\delta=180°$. Uhly vyjadrované pomocou α, β, γ, δ teda predstavujú akúsi spoločnú reč pre predpoklady a dokazované tvrdenie a stojí za pokus označiť ich práve takto.

Z tetivových štvoruholníkov $ABRT$ a $ABR'T'$ vieme vyjadriť $|\sphericalangle ATB| = \alpha$, $|\sphericalangle AT'B| = \beta$. Týmto sme sa zbavili bodov R, R', na dôkaz tvrdenia $\alpha+\beta+\gamma+\delta=180°$ ich nepotrebujeme. Starajme sa radšej o to, ako situáciu ďalej zjednodušiť. Máme tam stále veľa priamok a dve kružnice. Ale tie kružnice sú rovnoľahlé podľa bodu H, ktorý je priesečníkom osi OO' a spoločnej dotyčnice TT'. Obe spomenuté priamky sú v našej situácii podstatné, preto tento smer úvah vyzerá sľubne. Zobrazme v tejto rovnoľahlosti kružnicu k' na k. Bod B sa zobrazí do nejakého bodu C, bod A do bodu D, bod S' do bodu S, bod T' do T. Uhol $AT'B$ sa zobrazí do DTC a oba teda majú rovnakú veľkosť β.

Pozrieme sa na vec v novom svetle a zistíme niekoľko zaujímavostí. Priamky AB, CD, ST sú rovnobežné. Preto uhol ASD má veľkosť $\gamma+\delta$. Veľkosť uhla ADB je rovnaká ako veľkosť uhla ATB, teda α. Veľkosť uhla DAC je rovnaká ako veľkosť uhla DTC, teda β. Čo s bodom O? Skôr, než ho zahodíme, pozrime sa, či nie je na niečo užitočný. Priamka OT je kolmá na dotyčnicu HT. Navyše vieme zistiť veľkosť uhla AOD, je to $180°-\alpha-\beta$. Ale toto znamená veľa, dokazované tvrdenie platí práve vtedy, keď štvoruholník $ADSO$ je tetivový (potom ASD a AOD majú rovnakú veľkosť). To je ekvivalentné s tým, že $|HD|\cdot|HA| = |HS|\cdot|HO|$ (mocnosť bodu ku kružnici). Zrejme $|HS|\cdot|HO| = |HT|^2$ z Euklidovej vety v pravouhlom trojuholníku HTO a $|HD|\cdot|HA| = |HT|^2$ z mocnosti bodu H ku kružnici k. A sme hotoví.

Poznámka. V poslednej časti dôkazu sme akosi odskočili od počítania uhlov. Spravili sme to kvôli stručnosti a tiež pre ilustráciu využitia mocnosti bodu ku kružnici. Neznamená to však, že riešenie sa počítaním uhlov nedá dokončiť.

Tetivovosť štvoruholníka $ADSO$ sa dá dokázať aj inými spôsobmi. Sú však náročnejšie z pohľadu použitých poznatkov. Napríklad v kružnicovej inverzii so stredom O podľa kružnice k sa body H a S zobrazia na seba. Body A, D sú samodružné. Obrazom priamky prechádzajúcej bodmi H, D, A je kružnica prechádzajúca obrazmi týchto bodov a navyše stredom O. Tými obrazmi sú body S, D, A.

Iné riešenie. (Podľa *Jaroslava Knebla.*) Budeme používať rovnaké označenie ako v predošlom riešení. Nech AR a BS' sú rovnobežné. Z tejto rovnobežnosti vyplýva, že tieto priamky sú rovnoľahlé podľa bodu H v rovnoľahlosti, ktorá zobrazí kružnicu k na kružnicu k'. (Pretože bod S' je obrazom S.) V tejto rovnoľahlosti sa R zobrazí na B, preto body R, B, H ležia na priamke. Priamky BR, AS' sú tiež rovnobežné (lebo situácia je symetrická podľa osi OO'), preto aj body R', B, H ležia na priamke. Zostáva dokázať rovnobežnosť priamok AR a BS'. Keďže bod B je obrazom bodu A v osovej súmernosti podľa osi OO', je to ekvivalentné s rovnoramennosťou trojuholníka $SS'A$. Priamka AB je chordálou kružníc k a k', preto pretína úsek TT' na spoločnej dotyčnici v jeho strede. Keď si to kolmo premietneme na priamku OO', tak priesečník priamky AB s OO' je stredom úsečky SS'. Tým je tvrdenie dokázané.

2.3 Výraz rozdelíme na dve časti, v_1 a v_2, a obe sa pokúsime odhadnúť:

$$\underbrace{\sin x \cos y + \sin y \cos(2z)}_{v_1 \leqq |\cos y| + |\sin y|} + \underbrace{\sin z \cos(4x)}_{v_2 \leqq 1}.$$

Výraz $|\cos y| + |\sin y|$ vyzerá tak, že by sa dal zhora pekne odhadnúť. Po krátkych úvahách o pravouhlých trojuholníkoch si môžeme rýchlo uvedomiť, že

$$|\cos y| + |\sin y| \leqq \sqrt{2}.$$

Preto platí nerovnosť

$$\sin x \cos y + \sin y \cos(2z) + \sin z \cos(4x) \leqq 1 + \sqrt{2}.$$

Poďme teraz zistiť, či náhodou niekedy nenastáva rovnosť. Po dlhšom alebo kratšom hľadaní zistíme, že rovnosť nastáva napríklad pre $x = \pi/2$, $y = \pi/2$ a $z = -\pi/4$. Maximálna hodnota výrazu zo zadania je teda číslo $1 + \sqrt{2}$.

Ako to vyzerá s minimom? Nie je náhodou pravda, že minimum bude $-(1+\sqrt{2})$? Pokúsme sa to nejako dokázať. Chceli by sme ukázať, že ak náš výraz nadobúda pre nejaké x, y, z hodnotu q, tak pre nejaké iné x', y', z' nadobúda hodnotu $-q$. Po krátkom zamyslení sa nad vlastnosťami goniometrických funkcií si uvedomíme, že ak položíme $x' = -x$, $y' = -y$ a $z' = -z$, tak výraz naozaj nadobudne hodnotu $-q$. To znamená, že $-1-\sqrt{2}$ je naozaj minimom nášho výrazu.

A ako to bude s nadobúdaním všetkých hodnôt medzi maximom a minimom? Na pomoc zavoláme spojitosť. Označme $V(x, y, z)$ funkciu prislúchajúcu výrazu zo zadania. Chceli by sme postupne po spojitých funkciách precestovať z maxima do minima. Urobíme to tak, že najprv zmeníme x, potom y a nakoniec z. Túto cestu nám budú realizovať tri funkcie, medzi ktorými budeme „prestupovať“:

$$\begin{aligned} f(t) &= V\left(t, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right), \\ g(t) &= V\left(-\frac{\pi}{2}, t, -\frac{\pi}{4}\right), \\ h(t) &= V\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, t\right). \end{aligned}$$

Keďže všetky tri funkcie sú spojité a v „prestupových bodoch“ majú rovnakú hodnotu, pri ceste z maxima do minima prejdeme cez všetky hodnoty. Teda výraz nadobúda všetky hodnoty medzi maximom a minimom.

2.4 (Podľa *Ondreja Budáča.*) Naším cieľom je nájsť všetky také funkcie f, ktoré spĺňajú podmienku v zadaní. Skúsme o hľadaných funkciách zistiť niečo viac, najjednoduchšie asi bude zistiť funkčné hodnoty pre konkrétne čísla. Dosaďme najprv za m^2 aj za n číslo jedna. Dostávame, že $f(1) \mid 2$, takže $f(1) \in \{1, 2\}$. Ak podobným spôsobom dosadíme za m^2 aj za n číslo štyri, zistíme, že $f(4) \in \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$. Navyše ak dosadíme $m^2 = 4$ a $n = 1$, uvidíme, že $f(1) + f(4) \in \{5, 25\}$. Jediné hodnoty tomu vyhovujúce sú $f(1) = 1$ a $f(4) = 4$.

Tieto zistenia nám nenápadne podsúvajú hypotézu, že riešením je práve funkcia $f(n) = n$. Táto funkcia vyhovuje zadaniu, ale ešte stále nevieme, či je jediná. Skúsme dosadzovať ďalej, ale teraz už všeobecnejšie. Využime, že už poznáme hodnotu $f(1)$ a že ak p je prvočíslo, tak p^2 má len troch deliteľov. Položme $m^2 = 1$ a $n = p-1$. Dostávame, že $(f(p-1)+1) \mid p^2$, teda $f(p-1) \in \{p-1, p^2-1\}$. Už vieme, že predpoklad $f(p-1) = p-1$ nevedie k sporu. Venujme sa teda druhej možnosti a ukážme, že nemôže nastať. Dosaďme $m^2 = 4$, $n = p-1$. Máme $(p^2+3) \mid (p+3)^2$, čo môžeme prepísať na

$$\frac{(p+3)^2}{p^2+3} = 1 + \frac{6p+6}{p^2+3} \in \mathbb{Z}^+.$$

Pre $p \geqq 7$ je druhý z uvedených zlomkov kladný a menší ako jedna, pričom však má byť aj celým číslom, čo je spor.

Využime nový poznatok, že $f(p-1) = p-1$ pre prvočísla $p \geqq 7$. Môžeme $p-1$ dosadiť za n a dostávame

$$\frac{(m^2+p-1)^2}{f(m^2)+p-1} \in \mathbb{Z}^+.$$

Uvedený výraz upravme tak, aby sme v čitateli získali rozdiel $m^2 - f(m^2)$. Tak dostávame

$$2m^2 - f(m^2) + p - 1 + \frac{(m^2 - f(m^2))^2}{f(m^2)+p-1}.$$

Všimnime si, že pre $p > (m^2 - f(m^2))^2 - f(m^2)$ je nezáporný zlomok v predchádzajúcom výraze menší ako jedna. Keďže je zároveň celým číslom, je rovný nule a $f(m^2) = m^2$ pre všetky $m \in \mathbb{Z}^+$.

Teraz už konečne môžeme zisťovať niečo aj priamo o $f(n)$. Podobne ako v predchádzajúcom kroku má platiť

$$\frac{(m^2+n)^2}{m^2+f(n)} \in \mathbb{Z}^+.$$

Keď uvedený výraz, podobne ako pred chvíľou, upravíme na tvar

$$m^2 - f(n) + 2n + \frac{(n - f(n))^2}{m^2 + f(n)},$$

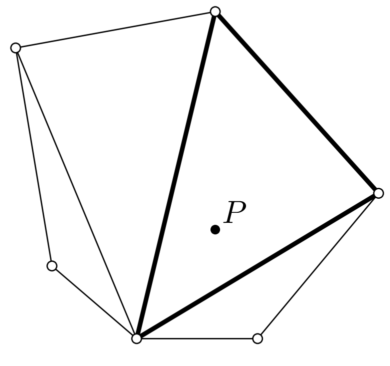
opäť nahliadneme, že pre $m^2 > (n - f(n))^2 - f(n)$ je nezáporný zlomok v predchádzajúcom výraze menší ako jedna. Keďže je zároveň celým číslom, musí platiť $f(n) = n$ pre každé $n \in \mathbb{Z}^+$.

2.5 Pre jednoduchšie vyjadrovanie nazývajme body množiny A *čierne* a body množiny B *biele*. Ďalej o dvoch množinách bodov (t. j. o nejakých rovinných útvaroch) povieme, že sa *prenikajú*, ak majú aspoň jeden spoločný bod. A ešte sa dohodnime, že ak povieme, že nejaký bod leží *v*, resp. *na* nejakom útvare, myslíme tým, že je prvkom toho útvaru, t. j. môže byť aj na hranici. Máme ukázať, že čierne a biele body vieme oddeliť priamkou. Keď si predstavíme nejaké dve konečné množiny bodov, ktoré sú oddelené priamkou, uvedomíme si, že aj ich *konvexné obaly* sú oddelené tou istou priamkou.

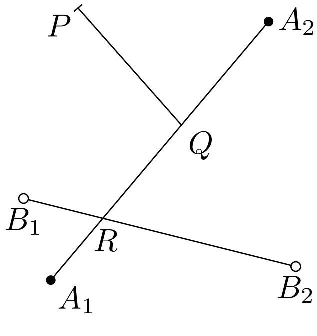
Pripomeňme si, že konvexný obal konečnej množiny bodov je mnohouholník (prípadne úsečka či bod), ktorý dostaneme, keď pospájame všetky body množiny úsečkami a vyfarbíme všetky vzniknuté trojuholníky. Iná možnosť je natiahnuť okolo všetkých bodov gumičku a potom ju sťahovať, kým to ide. Pre všeobecnú množinu sa konvexný obal definuje ako prienik všetkých konvexných množín, ktoré danú množinu obsahujú. Možností, ako ho definovať, je viacero. Pre potreby nášho riešenia pod konvexným obalom *konečnej* množiny bodov M rozumieme konvexný mnohouholník O_M, ktorého vrcholy sú z množiny M a ktorý obsahuje (vnútri a na obvode) všetky body z M. Pritom ak všetky body množiny M ležia na jednej priamke, pod O_M rozumieme úsečku, ktorej krajnými bodmi sú dva najvzdialenejšie body z M a ak M obsahuje iba jeden bod, tak $O_M = M$ (v oboch týchto prípadoch budeme hovoriť o O_M, že je *degenerovaný*). Uvedomme si, že keby sme chceli byť dôslední, mali by sme dokázať, že taký útvar O_M vždy existuje.

Pokúsme sa úlohu vyriešiť tak, že najprv dokážeme, že O_A a O_B sa neprenikajú a potom ukážeme, že existuje priamka, ktorá oddeľuje O_A a O_B. Keďže $A \subset O_A$ a $B \subset$ $\subset O_B$, budú touto priamkou oddelené aj množiny A a B a úloha bude vyriešená.

Predpokladajme sporom, že O_A a O_B sa prenikajú. Teda existuje nejaký bod P, ktorý leží v oboch konvexných obaloch. Zrejme musíme nejako využiť predpoklady zo zadania o množine C. Bod P je prvkom O_B, takže určite leží v niektorom trojuholníku, ktorého vrcholy sú biele. (Pretože O_B vieme vždy rozdeliť na trojuholníky, ktoré nemajú spoločné vnútorné body a ktorých vrcholy sú vrcholmi O_B. Takéto rozdelenie sa volá *triangulácia* mnohouholníka. Ak je O_B degenerovaný, budú aj trojuholníky degenerované.)



Obr. 74



Obr. 75

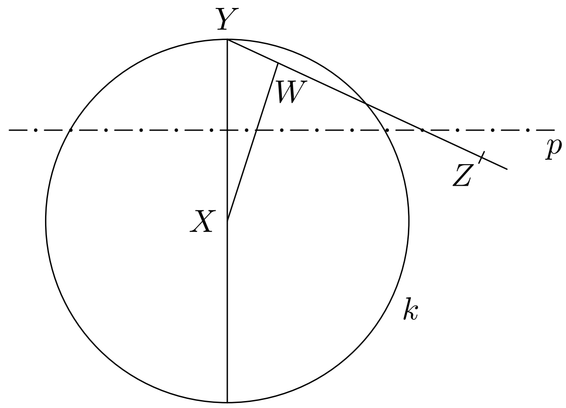
Ak je bod P priamo jedným z prvkov množiny A, t. j. ak je čierny, potom máme trojuholník s bielymi vrcholmi, v ktorom je čierny bod(obr. 74). Tu už máme spor so zadaním, lebo keď dáme do množiny C tieto tri biele vrcholy a čierny bod P, nevieme ich oddeliť priamkou do dvoch polrovín: akonáhle budú v nejakej polrovine tie tri biele vrcholy, bude tam aj celý trojuholník, ktorý tvoria, teda aj bod P. Takže P nemôže byť čierny. Rovnako sa dá ukázať, že nemôže byť ani biely.

Vyberme sa z bodu P na prechádzku po polpriamke ľubovoľným smerom. Zrejme v nejakom okamihu opustíme ako prvý jeden z obalov O_A alebo O_B. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že najprv opustíme O_A (nevadí, ak opustíme oba obaly naraz). Označme Q bod, v ktorom sa to stalo. Bod Q je ešte stále aj v O_A aj v O_B, nie je teda ani čierny, ani biely (z rovnakých dôvodov ako P). Avšak Q leží na obvode O_A, leží teda na úsečke, ktorá má čierne krajné body, označme ich A_1 a A_2. Zmeňme smer našej prechádzky a pokračujme z Q ďalej po úsečke QA_1. Keďže A_1 je čierny, nemôže ležať v O_B (inak by sme ho mohli zobrať na začiatku za bod P, o tom sme ale ukázali, že nie je čierny). Preto v istom okamihu kráčania po QA_1 opustíme v nejakom bode R obal O_B. Bod R leží na obvode O_B, teda na nejakej úsečke B_1B_2 s bielymi krajnými bodmi. Zároveň ale leží aj na úsečke A_1A_2. Takže úsečky B_1B_2 a A_1A_2 sa prenikajú (obr. 75). Keď teraz dáme do množiny C čierne body A_1, A_2 a biele body B_1, B_2, nevieme ich oddeliť priamkou do dvoch polrovín. Totiž akonáhle sú v nejakej polrovine body A_1 a A_2, je v nej aj celá úsečka A_1A_2 s bodom R, čiže nie celá úsečka B_1B_2 je v opačnej polrovine, z čoho vyplýva, že aspoň jeden z bodov B_1, B_2 nie je v opačnej polrovine. Dostali sme tak spor so zadaním.

Ukázali sme, že O_A a O_B sa neprenikajú. Zostáva nájsť priamku p, ktorá ich oddeľuje. Dobrou myšlienkou je zobrať dva body $X \in O_A$ a $Y \in O_B$ také, že dĺžka úsečky XY je najmenšia možná. Priamkou p potom bude os úsečky XY.

Pred tým, ako ukážeme, že priamka p oddeľuje dané obaly, si uvedomme, že taká úsečka XY naozaj existuje. Pre všeobecné množiny O_A a O_B to nie je vždy tak, napríklad ak by množina O_A bola vnútro jedného štvorca a množina O_B vnútro druhého štvorca, ktorý sa s O_A nepreniká, tak takú úsečku XY nenájdeme. Ku každej totiž vieme nájsť kratšiu. V našej situácii sú však O_A a O_B neprenikajúce sa konvexné mnohouholníky (v prípade degenerovaných obalov úsečky či body). Pre ne vieme najkratšiu úsečku XY skonštruovať tak, že nájdeme minimálnu vzdialenosť d spomedzi všetkých vzdialeností medzi dvoma vrcholmi z O_A a O_B a spomedzi všetkých vzdialeností medzi vrcholom jedného a stranou druhého obalu (keďže týchto vzdialeností je konečný počet, minimum spomedzi nich určiť vieme). Ak je úsečiek s minimálnou dĺžkou viac, vyberieme ľubovoľnú z nich. Takto nájdená úsečka XY dĺžky d bude najkratšou možnou úsečkou medzi bodom z O_A a bodom z O_B.

Majme teda úsečku XY takú, že $X \in O_A$, $Y \in O_B$ a pre ľubovoľné body $X' \in \in O_A$, $Y' \in O_B$ platí $|X'Y'| \geqq |XY|$. Keďže obaly sa neprenikajú, sú body X a Y rôzne. Os úsečky XY označme p. Tvrdíme, že p oddeľuje O_A od O_B. Predpokladajme sporom, že to neplatí. Bez ujmy na všeobecnosti nech v polrovine určenej priamkou p, v ktorej je bod X, leží nejaký bod Z z obalu O_B. Kvôli konvexnosti množiny O_B celá úsečka YZ leží v O_B. Z obr. 76 vidno, že úsečka YZ je sečnicou kružnice k so stredom X



Obr. 76

a polomerom $|XY|$ (YZ má s k spoločný bod Y, pritom nie je dotyčnicou, preto je nutne sečnicou), teda na nej ležia body W, pre ktoré platí $|XW| < |XY|$. Našli sme teda body $Y' = W \in O_B$, $X' = X \in O_A$ také, že $|X'Y'| < |XY|$, čo je v spore s výberom bodov X a Y. Takže p naozaj oddeľuje dané konvexné obaly. Tým je úloha vyriešená.

Poznámky. Napriek tomu, že sme práve úlohu vyriešili, tvrdenie zo zadania *neplatí.* Zoberme dvojprvkovú množinu bodov $A = \{A_1, A_2\}$ a jednoprvkovú $B = \{B_1\}$ takú, že B_1 leží vnútri úsečky A_1A_2. Žiadna množina C *štyroch* navzájom rôznych bodov z množiny $(A \cup B)$ neexistuje. Takže množiny A a B spĺňajú predpoklady zadania, zrejme sa však nedajú žiadnou priamkou oddeliť. Čitateľovi prenechávame na premyslenie, kde v riešení sme spravili chybnú úvahu a ako treba upraviť zadanie, aby tvrdenie platilo.

Úloha sa dala vyriešiť aj bez použitia konvexných obalov. Stačilo uvažovať minimálnu vzdialenosť medzi bodmi (resp. medzi bodom a úsečkou) z množín A a B. Pre danú najkratšiu vzdialenosť a úsečku, ktorá ju realizuje, sa rovina rozpadne na niekoľko sektorov. Potom už stačí rozobrať, aké body môžu byť v jednotlivých sektoroch. Takto úlohu riešil *Ondrej Budáč.*

Tretia séria

3.1 Pri prvom pohľade na nerovnosť vidíme, že ľavá strana je vždy kladná (dokonca väčšia alebo rovná trom), zatiaľ čo pravá strana môže byť záporná alebo nulová. Preskúmajme teda najskôr, pre aké hodnoty a, b, c platí $6abc \leqq 0$. Určite to platí, ak je aspoň jedna z nich rovná 0; vtedy $6abc = 0$. Keď sú dve hodnoty kladné a jedna záporná, tak $6abc < 0$. Nakoľko $a + b + c = 0$, nemôžu byť všetky hodnoty kladné, takisto nemôžu byť všetky záporné. Ostala nám tak jediná možnosť, že dve hodnoty spomedzi a, b, c sú záporné a jedna kladná; pre všetky ostatné prípustné možnosti sme ukázali, že

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3 \geqq 3 > 0 \geqq 6abc,$$

teda pre ne dokazovaná nerovnosť platí.

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $a > 0$, $b < 0$ a $c < 0$ (ak nerovnosť dokážeme pre takéto hodnoty, vďaka jej symetrickosti to rovnako urobíme pre zostávajúce možnosti). Nerovnosti sa dobre dokazujú, ak premenné, ktoré v nich vystupujú, sú kladné. Označme preto $x = -b$ a $y = -c$ (zo zápornosti b, c máme $x > 0$ a $y > 0$). Z predpokladu $a+b+c = 0$ dostávame $a = x+y$. Po dosadení do dokazovanej nerovnosti a drobných úpravách dostávame

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3 \geqq 6abc,$$

$$(x+y)^2x^2 + x^2y^2 + y^2(x+y)^2 + 3 \geqq 6(x+y)xy, \tag{1}$$

$$x^4 + y^4 + 2x^3y + 2xy^3 + 3x^2y^2 + 3 \geqq 6x^2y + 6xy^2. \tag{2}$$

Ak dokážeme, že nerovnosť (2) platí pre ľubovoľné kladné čísla x, y, bude platiť aj pôvodná nerovnosť. Na prvý pohľad sme úlohu príliš nezjednodušili. Avšak vďaka šikovnému preznačeniu sme na ľavej aj pravej strane dostali výrazy s kladnými premennými a s kladnými znamienkami. Nerovnosti takéhoto typu sa často dajú dokázať pomocou AG-nerovnosti (t. j. známej nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom). Tomuto nasvedčuje aj to, že pre $x = y = 1$ platí rovnosť.

Na pravej strane sú dva členy. Každý z nich chceme odhadnúť zhora súčtom niektorých členov z ľavej strany. Inými slovami, ľavú stranu chceme rozdeliť na dve časti, jedna bude väčšia ako člen $6x^2y$, druhá väčšia ako člen $6xy^2$. Naľavo máme o. i. členy $3x^2y^2$ a 3, ktoré sú symetrické vzhľadom na x a y. V rozdelení ľavej strany sa teda hádam rozdelia „napoly“. Nepárna trojka sa však delí na dve rovnaké časti zle, preto dokazovanú nerovnosť ešte vynásobme dvoma. Dostaneme

$$2x^4 + 2y^4 + 4x^3y + 4xy^3 + 6x^2y^2 + 6 \geqq 12x^2y + 12xy^2. \tag{3}$$

Teraz už po krátkom skúšaní pohodlne objavíme dve AG-nerovnosti

$$\frac{x^4+x^4+x^3y+x^3y+x^3y+xy^3+x^2y^2+x^2y^2+x^2y^2+1+1+1}{12} \geqq \sqrt[12]{x^{24}y^{12}} = x^2y,$$

$$\frac{y^4+y^4+xy^3+xy^3+xy^3+x^3y+x^2y^2+x^2y^2+x^2y^2+1+1+1}{12} \geqq \sqrt[12]{x^{12}y^{24}} = xy^2$$

(nie je to jediná možnosť, dalo sa to rozdeliť aj inak). Ich sčítaním a prenásobením dvanástimi dostaneme nerovnosť (3) (prípadne prenásobením iba šiestimi priamo nerovnosť (2)), ktorú sme chceli dokázať. Tým je úloha vyriešená. Rovnosť nastane len vtedy, ak nastane v oboch AG-nerovnostiach, t. j. keď $x = y = 1$, čomu zodpovedá trojica $(a, b, c) = (2, -1, -1)$ (prípadne trojice $(-1, 2, -1)$ a $(-1, -1, 2)$ pri predpoklade $b > 0$, resp. $c > 0$).

Iné riešenie. Dokážme iným spôsobom nerovnosť (1) pre kladné x a y. Ako naznačuje rovnosť pre hodnoty $x = y = 1$, dokazovaná nerovnosť by mohla byť „kritická“ pre $x = y$. Ak označíme $z = (x + y)/2$ (mimochodom, vtedy $z = a/2$) a $\delta = (x - y)/2$, máme $x = z + \delta$, $y = z - \delta$. Situácia $x = y$ zodpovedá hodnote $\delta = 0$. Po dosadení do nerovnosti dostávame ekvivalentnými úpravami

$$(2z)^2(z+\delta)^2 + (z+\delta)^2(z-\delta)^2 + (z-\delta)^2(2z)^2 + 3 \geqq 6 \cdot 2z(z+\delta)(z-\delta),$$

$$(2z)^2(2z^2 + 2\delta^2) + z^4 - 2z^2\delta^2 + \delta^4 + 3 \geqq 12z(z^2 - \delta^2),$$

$$(9z^4 - 12z^3 + 3) + (\delta^4 + 6z^2\delta^2 + 12z\delta^2) \geqq 0. \tag{4}$$

Druhá zátvorka na ľavej strane nerovnosti (4) je nezáporná, lebo $z > 0$ a $\delta^2 \geqq 0$ (nulová je práve pre „kritickú“ hodnotu $\delta = 0$). Prvá zátvorka sa dá upraviť (po nenáročnom zistení, že 1 je dvojnásobným koreňom polynómu v tejto zátvorke) na

$$9z^4 - 12z^3 + 3 = (z-1)^2(9z^2+6z+3) = \underbrace{(z-1)^2}_{\geqq 0}\underbrace{\left((3z+1)^2+2\right)}_{\geqq 2} \geqq 0.$$

Ľavá strana nerovnosti (4) je teda súčtom dvoch nezáporných výrazov. Tým je nerovnosť (4) (čiže aj nerovnosť (1), aj zadaná nerovnosť) dokázaná. Rovnosť nastane iba pre $z = 1$ a $\delta = 0$, čomu prislúchajú rovnaké trojice (a, b, c) ako v prvom riešení.

Iné riešenie. (Podľa *Kataríny Turekovej*.) V oboch uvedených riešeniach sme najskôr po diskusii a dosadení väzby $a+b+c = 0$ úlohu previedli na nerovnosť s kladnými premennými. Uvedieme riešenie, ktoré takúto „prípravu“ nepotrebuje.

Skusmým dosadzovaním hodnôt a, b, c spĺňajúcich zadanú väzbu objavíme, že rovnosť v nerovnosti platí, keď dve z čísel sú rovné -1 a jedno je rovné 2. Nerovnosť by platila, keby sa nám (po prevedení všetkých členov naľavo) podarilo rozložiť ľavú stranu na súčet nezáporných výrazov. Ak taký rozklad existuje, jeho sčítance musia byť pre trojicu $(a, b, c) = (-1, -1, 2)$ nulové (a takisto pre trojice $(-1, 2, -1)$ a $(2, -1, -1)$). Vhodným sčítancom by mohol byť napríklad (zjavne nezáporný) výraz $(a+1)^2(b+1)^2$. Ten je nulový pre všetky tri uvedené trojice a zároveň jeho roznásobením vzniknú členy, ktoré sú aj v dokazovanej nerovnosti. Podobne sú vhodné aj sčítance $(b+1)^2(c+1)^2$ a $(c+1)^2(a+1)^2$. Ďalšie už je len vecou šikovného využívania zadanej väzby. Postupne dostávame

$$\begin{aligned}
0 &\leqq (a+1)^2(b+1)^2 + (b+1)^2(c+1)^2 + (c+1)^2(a+1)^2 = \\
&= (ab + \underbrace{a+b}_{=-c} + 1)^2 + (bc + \underbrace{b+c}_{=-a} + 1)^2 + (ca + \underbrace{c+a}_{=-b} + 1)^2 = \\
&= (a^2b^2 + c^2 + 1 - 2abc + 2ab - 2c) + (b^2c^2 + a^2 + 1 - 2abc + 2bc - 2a) + \\
&\quad + (c^2a^2 + b^2 + 1 - 2abc + 2ca - 2b) = \\
&= a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3 - 6abc + (\underbrace{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}_{=(a+b+c)^2=0}) - 2(\underbrace{a+b+c}_{=0}) = \\
&= a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3 - 6abc.
\end{aligned}$$

Dostali sme presne to, čo sme chceli dokázať. Rovnosť nastáva, keď sú nulové všetky tri sčítance zo začiatku úprav, t. j. keď dve z čísel a, b, c sú rovné -1 (kvôli väzbe je potom tretie rovné 2).

Poznámka. V zadaní sa nevyžadovalo vyšetriť rovnosť. Pri riešení je však dôležité uvedomiť si, kedy nastáva. Na základe toho ľahšie objavíme, ako nerovnosť dokázať, resp. niektoré nápady môžeme odmietnuť už v zárodku (napr. aplikáciu AG-nerovnosti priamo na zadaný tvar).

3.2 Na začiatok sa vyplatí skúsiť vypísať niekoľko členov skúmanej postupnosti (napríklad na počítači). Rýchlo si všimneme, že sa správa podľa jednoduchšej rekurencie než je uvedená v zadaní, spĺňa totiž pre $n \geqq 3$ vzťah

$$a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}. \tag{1}$$

Aby sme túto hypotézu potvrdili, dokážeme ju indukciou. Pre $n = 3$ možno platnosť vzťahu overiť jednoduchým dosadením, predpokladajme teda, že $n > 3$ a pre všetky menšie hodnoty naša postupnosť uvedenú rekurenciu spĺňa. Potom $a_n = 15a_{n-2} - 4a_{n-3} = 4(4a_{n-2} - a_{n-3}) - a_{n-2} = 4a_{n-1} - a_{n-2}$, čím sme ukázali, že naša postupnosť spĺňa rekurenciu (1) pre všetky $n \geqq 3$. Zo vzťahu (1) možno tiež triviálnou indukciou ukázať, že naša postupnosť je rastúca a preto pre všetky $n \geqq 2$ platí $a_n > 1$.

Ak budeme postupnosť skúmať ešte pozornejšie, zistíme, že koeficienty v rekurentnom zápise sú aj samé členmi našej postupnosti (vidno to už aj zo vzťahu (1) či pôvodného zadania). Presnejšie povedané, platí

$$a_n = a_{k+1}a_{n-k} - a_k a_{n-k-1}$$

pre $n \geqq 3$ a $1 \leqq k \leqq n-2$, čo si opäť dokážeme indukciou, tentoraz vzhľadom na k. Majme nejaké pevne zvolené n, potom pre $k = 1$ dostávame z dokazovaného vzťahu rekurenciu (1), ktorej platnosť sme už dokázali. Nech teda $k > 1$ a pre hodnotu $k-1$ rovnosť (2) platí. Potom

$$\begin{aligned} a_n &= a_{(k-1)+1}a_{n-(k-1)} - a_{k-1}a_{n-(k-1)-1} = a_k a_{n-k+1} - a_{k-1}a_{n-k} = \\ &= a_k(4a_{n-k} - a_{n-k-1}) - a_{k-1}a_{n-k} = (4a_k - a_{k-1})a_{n-k} - a_k a_{n-k-1} = \\ &= a_{k+1}a_{n-k} - a_k a_{n-k-1}, \end{aligned}$$

čím sme vzťah (2) dokázali.

Toto zistenie nám už dáva istú predstavu o tom, ako sa naša postupnosť správa a sme teda pripravení zasadiť príkladu rozhodujúci úder v podobe nasledujúceho tvrdenia: platí $a_k \mid a_{n \cdot k}$ pre všetky $k, n \geqq 1$. Dokazovať ho budeme – ako inak – indukciou, a to vzhľadom na n. Pre $n = 1$ je tvrdenie triviálne, preto predpokladajme, že $n > 1$. Potom podľa (2) dostávame $a_{n \cdot k} = a_{k+1}a_{(n-1)k} - a_k a_{(n-1)k-1}$. Z indukčného predpokladu vieme, že $a_{(n-1)k} = c \cdot a_k$ pre nejaké celé číslo c. Potom $a_{n \cdot k} = a_k(a_{k+1}c - a_{(n-1)k-1})$ a preto $a_k \mid a_{k \cdot n}$, čo sme chceli dokázať.

Tým je úloha vyriešená: Ak by bolo a_n prvočíslo, ale číslo n by bolo zložené, tak $n = r \cdot s$ pre nejaké celé čísla r, s väčšie ako 1. Ale potom podľa dokázaného tvrdenia platí $a_r \mid a_n$ a keďže naša postupnosť je rastúca a všetky jej členy okrem prvého sú väčšie ako 1, platilo by $1 < a_r < a_n$ a preto a_n by malo deliteľa rôzneho od jednotky a seba samého, čo je spor.

My sa však s týmto výsledkom neuspokojíme a ukážeme navyše, že v našej postupnosti sa nevyskytuje vôbec žiadne prvočíslo. Na párnych pozíciách skutočne nemôže byť, to vyplýva z posledného dokázaného faktu $(a_2 | a_{2k})$ a pre $n = 2$ z definície tejto postupnosti. A ako je to s nepárnymi pozíciami? Nech $n = 2k + 1$, podľa (2) platí

$$\begin{aligned} a_n &= a_{k+1}a_{(2k+1)-k} - a_k a_{2k+1-k-1} = a_{k+1}^2 - a_k^2 = \\ &= (a_{k+1} + a_k) \cdot (a_{k+1} - a_k). \end{aligned}$$

Stačí teda ukázať, že pre všetky k platí $1 < a_{k+1} - a_k < a_{2k+1}$, jednoducho sa to urobí napríklad indukciou.

3.3 *Riešenie je uvedené pri úlohe 5.3.*

3.4 (Podľa *Petra Perešíniho.*) Predpokladajme, že medzi našimi úsečkami nie je žiadnych $n+1$ takých, ktoré majú spoločný bod. Ukážeme, že potom medzi nimi vieme nájsť $m+1$ po dvojiciach disjunktných úsečiek. Otočme danú priamku tak, aby pred nami ležala vodorovne. Nech u je tá úsečka, ktorej pravý koniec je najviac vľavo (ak je takých úsečiek viac, tak vezmeme ľubovoľnú z nich). Tento jej krajný bod označme A. V akej polohe vzhľadom na u môžu byť ostatné úsečky? Buď sú s u disjunktné alebo majú s u spoločný bod. Zamerajme sa na druhý prípad. Pravé konce všetkých ostatných úsečiek sú napravo od A, preto ak má niektorá z nich spoločný bod s u, tak aj A je ich spoločným bodom. Takýchto úsečiek však môže byť najviac $n-1$, inak by spolu s u tvorili $n+1$ úsečiek so spoločným bodom A. Zapamätajme si teraz úsečku u a spolu so všetkými ostatnými, s ktorými má spoločný bod, ju jednoducho vymažme. Takto sme vymazali najviac n úsečiek a všetky zostávajúce sú už s u disjunktné. Keďže máme až $mn+1$ úsečiek, môžeme tento proces zopakovať aspoň $(m+1)$-krát, skôr všetky úsečky určite nevymažeme. Získali sme tým $m+1$ zapamätaných úsečiek. Tie sme vyberali tak, že každá z nich je disjunktná so všetkými nasledovnými, máme teda množinu $m+1$ po dvojiciach disjunktných úsečiek.

Iné riešenie. (Podľa *Ondreja Budáča.*) Definujme čiastočné usporiadanie na danej množine $mn+1$ úsečiek nasledovným spôsobom: nech $u \leqq u$ pre všetky u a nech $u \leqq v$, ak úsečky u a v sú disjunktné a u leží celá naľavo od v. Ľahko overíme, že takto definovaná relácia je reflexívna ($u \leqq u$), tranzitívna (ak $u \leqq v$ a $v \leqq w$, tak $u \leqq w$) a antisymetrická (ak $u \leqq v$ a $v \leqq u$, tak $u = v$), spĺňa teda všetky požiadavky na čiastočné usporiadanie. Môžeme preto použiť *Dilworthovu lemu*[6], podľa ktorej sa v našej množine nachádza reťazec dĺžky $m+1$ alebo antireťazec dĺžky $n+1$. V prvom prípade máme postupnosť $m+1$ úsečiek takých, že každá z nich je menšia ako nasledovná úsečka, čo nie je nič iné ako $m+1$ disjunktných úsečiek. Naopak v druhom prípade máme $n+1$ po dvojiciach neporovnateľných úsečiek. To znamená, že každá dvojica z nich má spoločný bod (inak by sa dali porovnať). No a dôkaz toho, že prienik ľubovoľného počtu úsečiek s touto vlastnosťou je neprázdna množina, už nechávame na čitateľa[7].

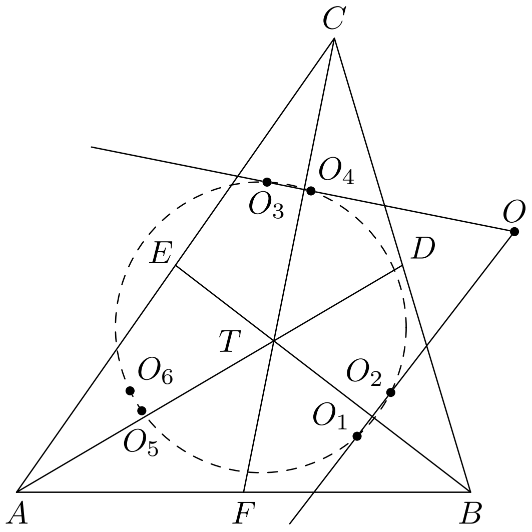
Poznámka. Úsečky $u_1, u_2, \dots, u_k$ tvoria *reťazec*, ak $u_1 \leqq u_2 \leqq \dots \leqq u_k$. Množina úsečiek tvorí *antireťazec*, ak sú navzájom neporovnateľné.

3.5 Zaveďme vhodné označenie. Nech stredy strán BC, CA, AB sú po rade D, E, F, ťažisko trojuholníka ABC nech je T. Stredy kružníc opísaných trojuholníkom BFT, BDT, CDT, CET, AET, AFT označíme postupne O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6 (obr. 77).

---

[6] `http://mathworld.wolfram.com/DilworthsLemma.html`

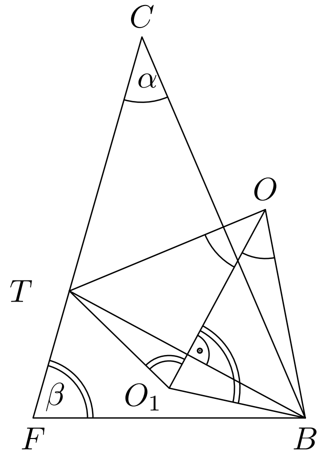
[7] Pomôcť môže tvrdenie známe ako *Hellyho veta* pre konvexné útvary.



Obr. 77

Máme dokázať, že nejakých šesť bodov leží na kružnici. Skúsme dokázať aspoň to, že nejaké štyri z našich bodov ležia na jednej kružnici. Body O_1, O_2 ležia na osi úsečky BT. Body O_3, O_4 ležia na osi úsečky CT. Tieto dve osi strán sa pretínajú v strede kružnice opísanej trojuholníku BCT, označme ho O. Body O_1, O_2, O_3, O_4 ležia na kružnici práve vtedy, keď $|OO_1| \cdot |OO_2| = |OO_3| \cdot |OO_4|$ (vyplýva to z vlastností mocnosti bodu ku kružnici). Zrátajme teda veľkosť úsečiek OO_1 až OO_4. Budeme ich vyjadrovať podľa možnosti pomocou spoločných prvkov, aby sme po dosadení získaných hodnôt do vzťahu $|OO_1| \cdot |OO_2| = |OO_3| \cdot |OO_4|$ vedeli ľahko dokázať, že platí rovnosť. Trojuholníky, v ktorých sú O_1 až O_4 stredmi opísaných kružníc, majú (okrem iného) „spoločný“ trojuholník BTC.

Body O, O_1 sú stredy kružníc opísaných trojuholníkom BTC, BTF. Tieto trojuholníky sú k sebe pekne „prilepené“. Uhly pri stredoch opísaných kružníc vieme vyjadriť dobre, navyše uhly CTB a FTB sú doplnkové. Dĺžku $|OO_1|$ môžeme skúsiť zrátať z trojuholníka OO_1B. Nech $|\sphericalangle BCT| = \alpha$, $|\sphericalangle BFT| = \beta$. Jednoduchým porátaním stredových uhlov dostaneme $|\sphericalangle O_1OB| = \alpha$, $|\sphericalangle OO_1B| = \beta$ (obr. 78). Inak povedané,



Obr. 78

trojuholníky BFC a BO_1O sú podobné. Preto $|OO_1|/|BO| = |FC|/|BC|$ a odtiaľ

$$|OO_1| = \frac{|BO| \cdot |FC|}{|BC|} = \frac{3}{2} \cdot \frac{|BO| \cdot |CT|}{|BC|}.$$

Teraz sa pozrieme na dĺžku $|OO_2|$. Bod O_2 je „taký istý“ ako bod O_1, tiež je to stred opísanej kružnice jedného zo šiestich malých trojuholníčkov. Preto by sa táto vzdialenosť mala dať zrátať podobne, ako vzdialenosť $|OO_1|$. Vzdialenosť $|OO_1|$ sme vyjadrili pomocou „prvkov“ trojuholníka BTC. Preto skúsime využiť tento trojuholník aj teraz. Trojuholníky CTB a DTB sú v podobnej pozícii ako tie pred chvíľou, stredy kružníc im opísaných sú body O a O_2. Tentokrát vieme počítaním stredových uhlov ukázať, že $|\sphericalangle TOO_2| = |\sphericalangle TCB|$ a $|\sphericalangle TO_2O| = 180^\circ - |\sphericalangle TDB| = |\sphericalangle TDC|$. To znamená, že trojuholníky TO_2O a TDC sú podobné a preto $|OO_2|/|TO| = |DC|/|CT|$, z čoho dostaneme

$$|OO_2| = \frac{|TO| \cdot |CD|}{|CT|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|TO| \cdot |BC|}{|CT|}.$$

Dajme dokopy získané hodnoty (využijeme, že $|OB| = |OT| = |OC|$).

$$|OO_1| \cdot |OO_2| = \frac{3}{2} \cdot \frac{|BO| \cdot |CT|}{|BC|} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{|TO| \cdot |BC|}{|CT|} = \frac{3}{4}|BO| \cdot |TO| = \frac{3}{4}|TO|^2.$$

Podobne vieme dokázať, že $|OO_3| \cdot |OO_4| = 3/4 \cdot |TO|^2$ a preto body O_1, O_2, O_3, O_4 ležia na kružnici. Analogicky aj štvorice bodov O_3, O_4, O_5, O_6 a O_5, O_6, O_1, O_2 ležia na kružnici.

Ešte chýba dôkaz, že tri kružnice, na ktorých štvorice bodov ležia, sú totožné. Predpokladajme, že nie sú totožné. Ak dve sú totožné, tak všetkých 6 bodov leží na jednej kružnici a máme spor. Inak môžeme predpokladať, že sú všetky tri kružnice navzájom rôzne a teda každé dve z nich sa pretínajú v práve dvoch bodoch. Chordály dvojíc jednotlivých kružníc (t. j. priamky O_1O_2, O_3O_4, O_5O_6) sa pretínajú v jednom bode. Tieto priamky sú však osami úsečiek BT, CT, AT, preto sa v jednom bode pretínať nemôžu. Tým je úloha vyriešená.

Štvrtá séria

4.1 Keby Rasťo vedel zmeniť počet kamienkov v každom jednotlivom políčku, tak ľahko vyhrá. Skúsme teda nájsť takýto postup pre jednotlivé políčka. Vezmeme si štvorčekový papier a budeme sa hrať. Pomocou jedného štvorca 5×5, dvoch štvorcov 2×2 a dvoch štvorcov 3×3 (umiestnených oproti sebe po diagonále) vieme dosiahnuť, aby sa menil počet kamienkov na strednom políčku toho štvorca 5×5 a nikde inde. Zaujímajú nás iba zvyšky čísel na jednotlivých políčkach po delení tromi, takže sa odteraz budeme na tie čísla tak aj dívať. Z popísanej konštrukcie je jasné, že vieme dosiahnuť, aby na ktoromkoľvek zo štyroch stredných políčok tabuľky 6×6 bolo ľubovoľné číslo.

Vezmime si štvorec 4×4 a v ňom štvorec 2×2 (v strede) a dva štvorce 3×3 oproti sebe po diagonále. Ich vhodným využitím dosiahneme, že vieme súčasne zväčšovať o 1 počet kamienkov na políčkach v rohoch ľubovoľného štvorca 4×4 (tie rohy ležia na koncoch jednej z jeho uhlopriečok). Použitím tejto konštrukcie vieme dosiahnuť ľubovoľné číslo v rohoch štvorca 6×6 a potom upraviť predošlou konštrukciou štyri stredné políčka na požadovanú hodnotu (číslo deliteľné tromi).

Takto sa ešte chvíľu pohráme a budeme vedieť upraviť ľubovoľné z políčok ležiacich na uhlopriečkach štvorca 6×6. Ďalej však nech sa snažíme, ako chceme, čísla sa nedajú meniť jednotlivo, ale vždy iba v skupinách po aspoň dve čísla. To možno znamená, že pre „zlú" pozíciu nevieme dosiahnuť, aby všetky čísla boli deliteľné tromi. V skutočnosti stačí preskúmať 3^{36} pozícií, pretože pre každé políčko môže počet kamienkov na ňom dávať tri rôzne zvyšky po delení tromi. Každý krok (prípustný podľa zadania) umožňuje prejsť z pozície do niekoľkých iných. K tomuto sa dá nakresliť obrázok: pozícii bude zodpovedať bod a prechodom medzi pozíciami šípky. Našou úlohou je zistiť, či sa z ľubovoľnej pozície (bodu) dá po šípkach prejsť do bodu, ktorý zodpovedá pozícii, kde sú všetky počty kamienkov deliteľné tromi. Takýto obrázok by bol super, keby nebol priveľký. Preto sa na to budeme musieť pozrieť inak.

Vezmime si takúto úlohu: Majme číslo 1. V každom kroku prirátame 2 alebo odrátame 4. Dá sa po konečnom počte krokov dosiahnuť číslo 0?

Odpoveď je nie, pretože po každom kroku máme nepárne číslo a pritom 0 je párna. Vidíme, že pozície v tejto úlohe sú buď párne čísla alebo nepárne čísla, podľa toho, či začíname párnym, alebo nepárnym číslom. Vyplýva to z toho, že prípustné kroky nemenia paritu. Hodnotu (resp. vlastnosť), ktorá sa nemení, nazývame *invariant*. Invariantom je v prípade predošlej jednoduchej úlohy parita čísla. Bežne používané invarianty sú práve zvyšky po delení alebo súčty či rozdiely nejakých čísel (závisí to od toho, čo tvorí „pozíciu").

V našom prípade rozdelíme políčka neležiace na diagonálach štvorca 6×6 do dvoch skupín tak, aby sa nemenil rozdiel I súčtov zvyškov v jednotlivých skupinách (presnejšie povedané, chceme, aby sa nemenil zvyšok tohto rozdielu po delení tromi) po pridaní kamienkov do niektorého štvorca. Symbol (i, j) nech označuje políčko ležiace v i-tom riadku a j-tom stĺpci. Nech políčko $(2, 1)$ je v prvej skupine. Potom políčko $(1, 2)$ musí byť v druhej skupine. Ak by bolo v prvej, tak zvýšením počtu kamienkov v štvorci 2×2 umiestnenom v ľavom hornom rohu veľkého štvorca sa zvýši súčet zvyškov v prvej skupine o 2 a v druhej sa nezmení, takže rozdiel I sa zväčší o 2 a to nechceme.

Políčko $(4, 5)$ musí byť v prvej skupine, pretože políčko $(1, 2)$ je v druhej a jednou z popísaných konštrukcií vieme súčasne zväčšiť počet kamienkov na týchto políčkach o 1. Zopakovaním podobných úvah nájdeme rozdelenie všetkých políčok do skupín, ako ukazuje tabuľka.

0	2	2	1	1	0
1	0	2	1	0	2
1	1	0	0	2	2
2	2	0	0	1	1
2	0	1	2	0	1
0	1	1	2	2	0

Čo sme týmto dosiahli? Je isté, že ak sa Rasťovi podarilo vyhrať, tak číslo I má hodnotu 0. Ale ľahko nájdeme pozíciu, kde číslo I má hodnotu 1 či 2. Preto existujú pozície, z ktorých Rasťo vyhrať nemôže. Otvorenou otázkou zostáva, či Rasťo vie vyhrať z každej pozície, v ktorej je číslo I na začiatku rovné 0. Skúste nájsť odpoveď.

Aj by sme boli hotoví, ale zabudli sme na jednu dôležitú vec. Naozaj je číslo I invariantom? Aby sme si boli istí, treba overiť, že pre každý povolený Rasťov ťah sa číslo I nezmení. To znamená vyskúšať všetky polohy štvorcov 2×2 až 5×5, čo už ponechávame na čitateľa.

4.2 Pri riešení úlohy pre všeobecné n je dobré vyskúšať niekoľko malých hodnôt n. Buď nám to priamo pomôže niečo objaviť alebo ak aj nie, výsledky pre malé n nám poslúžia ako veľmi dobrá kontrola všeobecného výsledku. Jednoduchým vyskúšaním zistíme, že pre $n = 1$ sa to nedá, ale už pre $n = 2$ to ide. Čísla rozdelíme do dvoch skupín takto: Prvá skupina obsahuje čísla 1, 3, 4, 8, kde číslo 4 je priemerom zvyšných troch. Druhá skupina obsahuje čísla 2, 6, 7 a číslo 5, ktoré je priemerom predchádzajúcich. Podobné rozdelenie bude fungovať aj pre všetky párne n. Keď je n párne, tak máme spolu $8k$ čísel ($k = n/2$). Rozdelíme ich postupne po ôsmich do k skupín. Prvá osmica bude obsahovať čísla 1 až 8, druhá 9 až 16, k-ta $8(k-1)+1$ až $8k$. V každej z osmíc čísla rozdelíme rovnakým spôsobom ako pre $n = 2$ do dvoch skupiniek. Čiže prvá skupinka skupiny s poradovým číslom $(i+1)$ bude mať čísla $8i+1$, $8i+3$, $8i+8$ a číslo $8i+4$, ktoré je ich priemerom. Druhá skupinka bude pozostávať z čísel $8i+2$, $8i+6$, $8i+7$ a ich priemeru $8i+5$. Pre párne n je teda vždy možné rozdeliť čísla do n skupín po 4 čísla, tak aby bolo v každej skupine aspoň jedno číslo priemerom zvyšných.

Pozrime sa teraz na tie ostatné (nepárne) n. Pre $n = 3$ sme dlho skúšali a stále nič, podozrenie, že to vôbec nepôjde, je namieste. A naozaj. V každej štvorici a, b, c, d má byť jedno číslo priemerom zvyšných troch. Nech napr. $(a+b+c)/3 = d$. Takže súčet čísel v skupine $a+b+c+d = 3d+d = 4d$ je násobkom čísla 4. Keďže to platí v každej skupine, aj celkový súčet všetkých čísel musí byť násobkom čísla 4. Súčet čísel od 1 po $4n$ je $4n(4n+1)/2 = 2n(4n+1)$. Číslo $4n+1$ je vždy nepárne, ak by bolo aj n nepárne, tak súčet našich $4n$ čísel je dvojnásobkom nepárneho čísla a teda nie je deliteľný štyrmi. Pre nepárne n hľadané rozdelenie neexistuje.

Všimnime si, že skúmanie prípadu $n = 2$ (a niekoľko iných párnych n) nám naozaj pomôže pri nájdení všeobecného spôsobu rozdelenia. Na druhej strane neexistencia rozdelenia pre $n = 1$ či $n = 3$ (získaná napríklad vyskúšaním všetkých možností) nehovorí nič všeobecné, na dôkaz neexistencie rozdelenia treba skúmať skôr štruktúru našich štvorprvkových množín vo všeobecnosti.

4.3 Na to, aby sme sa v tejto úlohe dostali ďalej, musíme najprv zistiť, v akom vzťahu sú O a H. Po chvíľke rozmýšľania a prezerania obrázkov si môžeme všimnúť, že OH je kolmica na rovinu ABC, a teda H je kolmý priemet bodu O do roviny ABC. Poďme to dokázať.

Zo zadania vieme, že priamka OC je kolmá na priamky OA a OB. Z toho vyplýva, že priamka OC je kolmá na celú rovinu OAB. Keď je priamka kolmá na rovinu, je kolmá aj na každú priamku v tejto rovine, a teda aj na priamku AB. Preto kolmým priemetom priamky OC do roviny ABC je nejaká priamka p kolmá na priamku AB a prechádzajúca bodom C. Takáto priamka p je však výškou v trojuholníku ABC. Zopakovaním tejto úvahy pre priemety priamok OA a OB odvodíme, že priemet bodu O do roviny ABC leží na všetkých výškach trojuholníka ABC, teda je totožný s jeho ortocentrom H. (Z toho tiež vyplýva, že $|OH|$ je najmenšia vzdialenosť medzi O a rovinou ABC.)

A teraz prejdime k samotnému dôkazu nerovnosti (podľa *Ondreja Budáča*). Nakreslime obrázok nášho štvorstena tak, že bod O je akoby v rohu miestnosti. (Inak povedané, priamky OA, OB, OC sú osami pravouhlej súradnicovej sústavy.) Nech G je stred gule vpísanej do štvorstena. Ďalej nech sa táto guľa dotýka trojuholníka ABC v bode S. Dĺžku úsečky GO vieme vyjadriť takto: Úsečka GO je telesovou uhlopriečkou v kocke s hranami dĺžky r (pretože vzdialenosť bodu G od dotykového bodu vpísanej gule so stenami OAB, OBC, OAC je r a navyše priamka cez G a dotykový bod je kolmica na tieto roviny). Teda $|GO| = r\sqrt{3}$. Navyše $|GS| = r$. Lomená čiara OGS je nejaká cesta z bodu O na rovinu ABC a keďže OH je najkratšia takáto cesta, musia platiť nerovnosti

$$\begin{aligned} |OG| + |GS| &\geqq |OH|, \\ (\sqrt{3}+1)r &\geqq |OH|. \end{aligned}$$

Druhú nerovnosť sme dostali z prvej dosadením vypočítaných dĺžok úsečiek OG a GS. Keďže $\pi > \sqrt{3}+1$, z predchádzajúcej nerovnosti vyplýva aj požadované tvrdenie $\pi r \geqq$ $\geqq |OH|$.

Iné riešenie. Úloha sa dá riešiť aj „hrubou silou“. Okrem priameho analytického prístupu je možné využiť Herónov vzorec, ktorý hovorí, že obsah trojuholníka so stranami a, b, c je $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kde $s = (a+b+c)/2$, t.j. polovica obvodu). Po dosadení a roznásobení dostaneme $16S^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 +$ $+ b^4 + c^4)$.

Objem nášho štvorstena vieme zrátať dvoma spôsobmi (podobne ako obsah trojuholníka):

$$V = \frac{1}{3}|OH| \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3}r(S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCA} + S_{ABC}).$$

Z tohto dostávame

$$\frac{|OH|}{r} = 1 + \frac{S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCA}}{S_{ABC}}.$$

Je jasné, že obsahy trojuholníkov OAB, OBC, OCA sú menšie než obsah trojuholníka ABC, takže máme

$$\frac{|OH|}{r} = 1 + \frac{S_{OAB}}{S_{ABC}} + \frac{S_{OBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{OCA}}{S_{ABC}} < 1+1+1+1 = 4.$$

Nanešťastie však $\pi < 4$, takže náš odhad budeme musieť zjemniť.

Nech $|OA| = x$, $|OB| = y$, $|OC| = z$. Týmto je náš štvorsten určený jednoznačne. Chceme dokázať, že

$$S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCA} = (xy + yz + zx)/2 \leqq (\pi - 1)S_{ABC}. \tag{1}$$

Strany trojuholníka ABC majú veľkosti $\sqrt{x^2+y^2}$, $\sqrt{x^2+y^2}$, $\sqrt{x^2+y^2}$, ale v roznásobenom Herónovom vzorci vystupujú iba v druhej mocnine. Nerovnosť (1) je po umocnení na druhú, vynásobení číslom 4 a dosadení obsahu trojuholníka ABC ekvivalentná s nerovnosťou

$$(xy+yz+zx)^2 \leqq (\pi-1)^2 \cdot (x^2y^2+y^2z^2+z^2y^2).$$

Tento vzťah platí, vidno to po vhodnej substitúcii alebo z Cauchyho-Schwarzovej nerovnosti (odhadneme ľavú stranu). Dokončenie dôkazu ponechávame čitateľovi.

4.4 Z podobnosti trojuholníkov ABC a AMN vyplýva, že $|\sphericalangle NAM| = |\sphericalangle CAM|$. Po odčítaní veľkosti uhla CAB od oboch týchto uhlov dostávame

$$|\sphericalangle NAC| = |\sphericalangle MAB|. \tag{1}$$

Keďže trojuholníky ABC a AMN sú podobné, máme tiež

$$\frac{|AN|}{|AC|} = \frac{|AM|}{|AB|}. \tag{2}$$

Z (1) a (2) dostávame, že trojuholníky NAC a MAB sú podobné, a teda $|\sphericalangle NCA| = |\sphericalangle MBA|$. Z rovnosti týchto uhlov a z vlastnosti, že bod O je rovnako vzdialený od úsečiek AB a CD, vyplýva, že $|BO| = |CO|$. Teda vidíme, že uhlopriečky v tomto rovnobežníku majú rovnakú dĺžku. Vieme, že iba uhlopriečky v pravouholníku majú takúto vlastnosť, takže rovnobežník $ABCD$ je buď štvorec, alebo obdĺžnik. Na to, aby sme ukázali, že je to štvorec, treba ukázať, že dve jeho susedné strany majú rovnakú dĺžku. Označme preto $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|AC| = u$. Z podobnosti trojuholníkov NAC a MAB máme

$$\frac{|NC|}{|MB|} = \frac{|AC|}{|AB|}.$$

Vyjadrením a dosadením jednotlivých dĺžok dostávame $2 \cdot a^2 = u^2$. Zároveň z Pytagorovej vety pre trojuholník ABC máme $a^2 + b^2 = u^2$. Porovnaním posledných dvoch vzťahov získame $a^2 = b^2$, čiže $a = b$. Týmto sme dokázali, že rovnobežník zo zadania je obdĺžnik s dvoma rovnakými susednými stranami, a teda je to štvorec.

Iné riešenie. Skúsme teraz úlohu riešiť pomocou komplexných čísel. Toto riešenie je elegantné a jednoduché. Položme rovnobežník $ABCD$ do komplexnej roviny tak, aby bod A bol 0 (úlohu neriešime analyticky, takže bod A je naozaj iba číslo). Ďalej nech body B, D rovnobežníka sú čísla B, D. Pre výpočet číselných hodnôt ostatných bodov môžeme použiť klasické postupy ako pri analytickej geometrii: $C = B + D$, $O = (B + D)/2$, $M = B + (D - B)/4$, $N = D + B/2$. Z podobnosti trojuholníkov ABC a AMN dostávame $|AC|/|AB| = |AN|/|AM|$ a súčasne $|\sphericalangle NAM| = |\sphericalangle CAB|$. Pokúsme sa túto podmienku prepísať pomocou komplexných čísel. Zamyslime sa nad tým, čo vyjadruje zlomok C/B. Ako výsledok tohto podielu dostaneme komplexné číslo. Vzdialenosť tohto čísla od A je $|C/B|$. Uhol priradený k tomuto číslu je CAB.

Teda keď urobíme podiel čísel C a B, tento v sebe zahŕňa informáciu ako o uhle, tak aj o veľkosti pomeru uhlopriečky AC ku strane AB. Ak preto chceme vyjadriť podmienku podobnosti dvoch trojuholníkov v komplexnej rovine, stačí overiť rovnosť pomerov dvoch dvojíc komplexných čísel. V našom prípade musí platiť

$$\frac{C}{B} = \frac{N}{M}.$$

Dosadením vyjadrení jednotlivých bodov a jednoduchými úpravami dostávame rovnosť $B^2 + D^2 = 0$. Z tejto rovnosti môžeme jednoducho vyjadriť B pomocou D, a to ako $B = iD$ alebo $B = -iD$ (i je komplexná jednotka). Tieto dve rovnosti vyjadrujú, že B dostaneme z D otočením o 90 stupňov. A keďže z rovnobežníkov jedine štvorec spĺňa uvedenú vlastnosť, podarilo sa nám dokázať, že rovnobežník $ABCD$ je naozaj štvorec.

Poznámka. Násobenie komplexným číslom $k(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ znamená vlastne zloženie dvoch zobrazení: rovnoľahlosti s koeficientom k a otočenia o uhol φ, obe tieto zobrazenia majú stred v bode 0. Takéto zobrazenie sa nazýva v angličtine *spiral similarity*, v slovenčine preň nemáme lepší pojem než doslovný preklad *špirálová podobnosť*.

4.5 Nech funkcia f je riešením našej rovnice. Potom rovnosť zo zadania platí pre všetky x a y, takže môžeme za x aj y dosádzať ľubovoľné hodnoty, aby sme našli nutné podmienky, ktoré musí funkcia f spĺňať. Nuž dosádzajme.

Nech y je ľubovoľné, $x = y - f(y)$:

$$\begin{aligned} f(y - f(y) + f(y - f(y)) + f(y)) &= f(y + f(y - f(y))) + y - f(y) + f(y) - f(f(y)), \\ f(y + f(y - f(y))) &= f(y + f(y - f(y))) + y - f(f(y)), \\ f(f(y)) &= y. \end{aligned} \tag{1}$$

Z (1) vyplýva, že funkcia f je prostá.[8]

Nech $x = y = 0$:

$$\begin{aligned} f(0 + 2f(0)) &= f(0 + f(0)) + 0 + f(0) - f(f(0)), \\ f(2f(0)) &= f(0). \end{aligned}$$

Keďže funkcia f je prostá, platí $2f(0) = 0$ a preto

$$f(0) = 0. \tag{2}$$

Nech y je ľubovoľné, $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(0 + f(0) + f(y)) &= f(y + f(0)) + 0 + f(y) - f(f(y)), \\ f(f(0) + f(y)) &= f(y + f(0)) + f(y) - f(f(y)), && \text{(použijeme (2))} \\ f(f(y)) &= f(y) + f(y) - f(f(y)), && \text{(použijeme (1))} \\ y &= f(y) + f(y) - y, \\ f(y) &= y. \end{aligned}$$

[8] Okrem toho z toho vyplýva, že oborom hodnôt funkcie f je celá množina reálnych čísel.

Teda jediným možným riešením (ak nejaké existuje) je funkcia $f(x) = x$. Dosadením do pôvodnej rovnice ľahko overíme, že táto funkcia naozaj vyhovuje zadaniu.

Piata séria

5.1 Priamka AE je osou uhla. Os uhla delí protiľahlú stranu v pomere priľahlých strán, t. j. v našom prípade $CE/BE = AC/AB$. Máme dokázať istú rovnobežnosť. Tá sa dá veľmi dobre popísať pomocou pomerov: stačí, keď dokážeme, že

$$\frac{CE}{BE} = \frac{CD}{AD}. \tag{1}$$

Veľkosť pomeru CE/BE poznáme z tvrdenia o osi uhla, platí

$$\frac{CE}{BE} = \frac{AC}{AB}. \tag{2}$$

Zo zadania vieme, že uhly ACB a ABD majú rovnakú veľkosť. Bez tohto predpokladu priamky AB a DE nemusia byť rovnobežné, preto tento predpoklad treba použiť v dôkaze. Trojuholníky ABD a ACB sú podobné (dve dvojice rovnakých uhlov). Takže platí

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AD} = \frac{CD}{AD}, \tag{3}$$

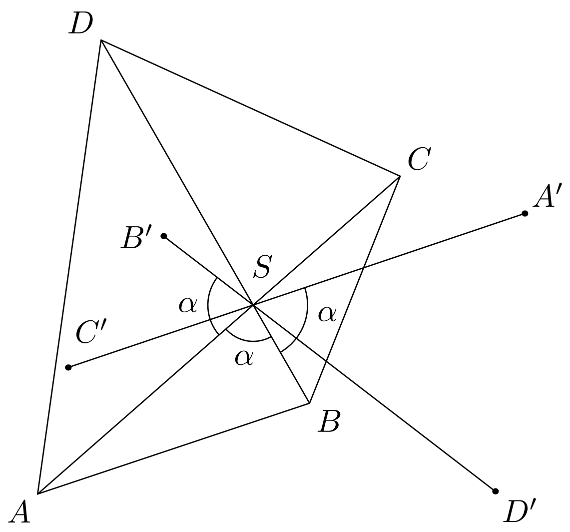
poslednú rovnosť máme zo zadania.

Porovnaním vzťahov (2) a (3) dostaneme vzťah (1) a sme hotoví.

Iné riešenie. Bodom D vieme viesť rovnobežku s priamkou AB. Označme E' jej priesečník so stranou BC. Os uhla BAC má so stranou BC jediný priesečník E, takže vlastne našou úlohou je dokázať, že bod E' je totožný s bodom E.

Bod E' sme zostrojili tak, že $DE' \parallel AB$. Preto uhly CDE' a CAB majú rovnakú veľkosť. Zo zadania vieme, že úsečky AB a CD sú rovnako dlhé. Keď sa na tieto úsečky bližšie pozrieme, vidíme, že trojuholníky ABD a DCE' sú zhodné podľa vety *usu*. Z toho vyplýva zhodnosť úsečiek AD a DE', takže trojuholník ADE' je rovnoramenný. Teraz stačí porátať pár uhlov a je jasné, že AE' je osou uhla CAB, preto body E a E' sú totožné.

5.2 Vezmime konvexný štvoruholník $ABCD$ a zobrazme ho na $A'B'C'D'$. Body A a C sa v osovej súmernosti podľa BD zobrazia na A' a C'. Nech S je priesečník uhlopriečok (z konvexnosti vyplýva, že existuje práve jeden vnútri štvoruholníka). Kam sa zobrazí bod S v osovej súmernosti podľa BD? Keďže leží na osi BD, zobrazí sa sám na seba. Úsečka AC sa zobrazí na úsečku $A'C'$, ktorá tiež prechádza bodom S. Navyše $|A'S| = |AS|$ a $|C'S| = |CS|$. Podobne to platí aj pre body B, D a osovú súmernosť podľa osi AC (obr. 79).



Obr. 79

Teraz sa pustíme do riešenia prvej časti úlohy. Štvoruholník $ABCD$ je lichobežník. V lichobežníku $ABCD$ s priesečníkom uhlopriečok S platí, že trojuholníky ABS a CDS sú podobné (vyplýva to priamo z rovnobežnosti priamok AB a CD). Pre ich strany teda platí $|AS|/|BS| = |CS|/|DS|$. Táto podmienka je za predpokladu, že AC a BD sú uhlopriečky a S ich priesečník, ekvivalentná tomu, že priamky AB a CD sú rovnobežné.

Už len poskladať dokopy to, na čo sme doteraz prišli. Štvoruholník $ABCD$ sa zobrazí na štvoruholník $A'B'C'D'$, pričom S bude priesečníkom jeho uhlopriečok. Ďalej už vieme, že $|A'S| = |AS|$, $|B'S| = |BS|$, $|C'S| = |CS|$ a $|D'S| = |DS|$, teda $|A'S|/|B'S| = |AS|/|BS| = |CS|/|DS| = |C'S|/|D'S|$. Z toho už pekne vidíme, že $A'B' \parallel C'D'$.

V druhej časti máme dokázať niečo o obsahoch. Skúsme odvodiť nejaký vzorec na obsah všeobecného konvexného štvoruholníka. Najlepšie taký, čo súvisí s uhlopriečkami. Keď S je priesečník uhlopriečok štvoruholníka $ABCD$, vieme, že $S_{ABCD} = S_{ABS} + S_{BCS} + S_{CDS} + S_{DAS}$. Teraz ešte vyjadriť obsahy jednotlivých trojuholníkov. Platí $S_{ABS} = |AS|\cdot|BS|\cdot\sin(|\sphericalangle ASB|)/2$. Podobné vzťahy dostaneme aj pre ostatné trojuholníky. Označme $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle CSD| = \alpha$. Môžeme predpokladať, že $\alpha \leqq 90°$. Potom $|\sphericalangle BSC| = |\sphericalangle DSA| = 180° - \alpha$ a keďže $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$, pre obsah štvoruholníka $ABCD$ dostaneme

$$S_{ABCD} = \tfrac{1}{2}\sin\alpha\cdot(|AS|\cdot|BS| + |BS|\cdot|CS| + |CS|\cdot|DS| + |DS|\cdot|AS|) = \\ = \tfrac{1}{2}\sin\alpha\cdot(|BS|\cdot(|AS| + |CS|) + |DS|\cdot(|AS| + |CS|)) = \tfrac{1}{2}\sin\alpha\cdot|AC|\cdot|BD|.$$

Veľkosti uhlopriečok štvoruholníka $A'B'C'D'$ už poznáme. Teraz nás bude zaujímať uhol, ktorý zvierajú. Bod A' je obraz bodu A v osovej súmernosti podľa BD, preto $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle A'BS| = \alpha$. Bod B' je obraz bodu B v osovej súmernosti podľa AC, preto $|\sphericalangle ASB'| = |\sphericalangle ASB| = \alpha$. Takže $|\sphericalangle A'SB'| = |\sphericalangle A'SB| + |\sphericalangle BSA| + |\sphericalangle ASB'| = 3\alpha$.

Ďalší postup závisí od veľkosti uhla 3α. Aká môže byť?

Pri uhle $\alpha < 60°$ je $3\alpha < 180°$ a teda pri výpočte obsahu môžeme použiť $\sin(3\alpha) = \sin(180° - 3\alpha)$, keďže uhol, ktorý zvierajú priamky $A'C'$ a $B'D'$, je 3α alebo $180° - 3\alpha$ (podľa toho, ktorý je menší, pričom pri vzorci pre obsah je to jedno). Pre obsah štvoruholníka teda bude platiť $S_{A'B'C'D'} = \sin 3\alpha \cdot (|A'C'| \cdot |B'D'|)/2$.

Ak $\alpha = 60°$, potom $3\alpha = 180°$ a body A', B', C', D' budú ležať na priamke. Obsah je teda nulový a daná nerovnosť je splnená.

Pre $90° \geqq \alpha > 60°$ je $270° \geqq 3\alpha > 180°$. Vtedy uhol, ktorý zvierajú priamky $A'C'$ a $B'D'$, je $3\alpha - 180°$ (tento uhol je nanajvýš $90°$). Preto pre obsah štvoruholníka dostávame $S_{A'B'C'D'} = \sin(3\alpha - 180°) \cdot (|A'C'| \cdot |B'D'|)/2$.

Z vlastnosti funkcie sínus vyplýva $\sin(3\alpha - 180°) = -\sin 3\alpha$. Pre obsah teda dostávame vzťah $S_{A'B'C'D'} = |\sin 3\alpha| \cdot (|A'C'| \cdot |B'D'|)/2$. Teraz nám ostáva už len posledný krok, a to ukázať, že $S_{A'B'C'D'} \leqq 3S_{ABCD}$, na čo stačí ukázať $|\sin 3\alpha| \leqq 3 \sin\alpha$, keďže $|AC| = |A'C'|$ a $|BD| = |B'D'|$. A to už pomocou pár súčtových vzorcov nie je problém:

$$\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) = \ldots = 3\sin\alpha - 4(\sin\alpha)^3.$$

5.3 Dokážeme, že množina M má najviac k^{n-1} prvkov. Skúsme toto tvrdenie dokázať sporom. Nech je v M aspoň $k^{n-1} + 1$ prvkov. Ukážeme, že v tom prípade sú v M aspoň dve slová, ktoré sa líšia iba v jednom písmene. Rozdeľme slová do skupín podľa toho, ktorým písmenom abecedy začínajú. Takto dostaneme k skupín, z ktorých aspoň jedna má na základe Dirichletovho princípu $k^{n-2} + 1$ prvkov. Každé dve slová v tejto skupine sa musia líšiť na aspoň dvoch miestach. Po odmyslení prvého písmena slov tejto skupiny dostaneme $k^{n-2} + 1$ slov dĺžky $n - 1$. Tieto sa opäť dajú rozdeliť na k skupín podľa toho, ktorým písmenom začínajú, pričom jedna z množín bude mať minimálne $k^{n-3} + 1$ prvkov. Po odmyslení prvého písmena tejto množiny dostávame $k^{n-3} + 1$ slov dĺžky $n - 2$. Opakovaním tohto postupu sa dostaneme do situácie, že máme slová dĺžky $n - (n - 1) = 1$, ktoré sa líšia aspoň v dvoch písmenách, a týchto slov je $k^{n-n} + 1 = 2$. Toto tvrdenie je evidentne nepravdivé a teda náš predpoklad bol nesprávny. Z toho máme, že množina M má najviac k^{n-1} prvkov.

Skúsme teraz nájsť k^{n-1} slov tak, aby tvorili prípustnú množinu M. Namiesto s písmenami abecedy budeme pracovať s číslami $0, 1, \ldots, k-1$. Na tieto čísla sa môžeme dívať ako na písmená a keď nájdeme príklad pre číslovú abecedu, tak zrejme substitúciou čísel písmenami vyriešime úlohu aj pre ľubovoľnú inú abecedu. Ako by sme skonštruovali príklad k^{n-1} prvkovej množiny M zo zadania? Vytvorme slová nasledovne. Prvých $n - 1$ písmen slov budeme voliť ľubovoľne a posledné písmeno zvolíme tak, aby vlastnosť množiny M platila. Vieme, že možností na výber $n - 1$ prvých písmen n-písmenového slova nad k-prvkovou abecedou je k^{n-1}. Posledné písmeno slova určíme jednoznačne, a to ako zvyšok po delení súčtu prvých $n - 1$ písmen slova číslom k. Teraz ukážeme, že každé dve takéto slová $x_1x_2\ldots x_n$ a $y_1y_2\ldots y_n$ z M sa líšia aspoň na dvoch miestach.

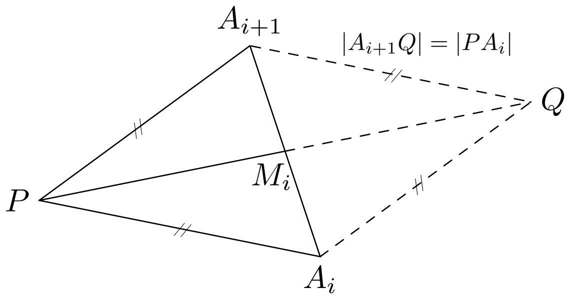
Ak sa slová líšia aspoň v dvoch písmenách na prvých $n - 1$ miestach, vtedy nie je čo dokazovať. Ak sa slová líšia na prvých $n - 1$ miestach iba v jednom písmene, treba ukázať, že sa líšia aj na poslednom mieste. Nech sa teda líšia na pozícii i, $1 \leqq i < n$. Potom

$$x_i - y_i \equiv x_n - y_n \pmod{k}.$$

Keďže $x_i - y_i \neq 0$ a pracujeme iba so zvyškami po delení číslom k, musia aj čísla x_n a y_n dávať po delení číslom k rôzne zvyšky a teda sú rôzne.

Ukázali sme, že množina M má najviac n^{k-1} prvkov a zároveň sme našli príklad množiny, ktorá túto hodnotu dosahuje. Teda množina M má naozaj maximálnu možnú veľkosť n^{k-1}.

5.4 Dokážeme najskôr jednoduchšiu ľavú nerovnosť. V akom sú vzťahu dĺžky $|PM_i|$ a $|PA_i|$? Keď situáciu nakreslíme, uvedomíme si, že PM_i je ťažnica v trojuholníku A_iPA_{i+1}, zatiaľ čo PA_i a PA_{i+1} sú jeho strany (pre zjednodušenie zápisu položme $A_{n+1} = A_1$). Dĺžku ťažnice pritom vieme zhora ohraničiť veľmi jednoducho práve



Obr. 80

pomocou dĺžok strán. Z obr. 80 dobre vidieť, že

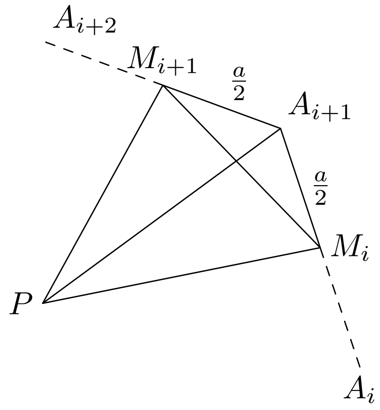
$$2|PM_i| < |PA_i| + |PA_{i+1}| \tag{1}$$

(stačí použiť trojuholníkovú nerovnosť v trojuholníku PQA_{i+1}, pričom Q získame doplnením trojuholníka A_iPA_{i+1} na rovnobežník s uhlopriečkou PQ dĺžky $2|PM_i|$). Sčítaním nerovností (1) pre $i = 1, \ldots, n$ dostaneme

$$2|PM_1| + \cdots + 2|PM_n| < |PA_1| + |PA_2| + |PA_2| + |PA_3| + \cdots + |PA_n| + |PA_1|,$$

odkiaľ po vydelení dvoma máme $\sum_{i=1}^{n} |PA_i| > \sum_{i=1}^{n} |PM_i|$, čo sme chceli dokázať. Vidíme, že v tomto prípade rovnosť nenastáva nikdy.

Teraz dokážeme druhú nerovnosť (podľa *Jakuba Opršala*). V prvej (ľahšej) časti nám pomohlo, že sme rozdelili celú nerovnosť na súčet jednoduchších nerovností. Zbavili sme sa tak znaku sumy, s ktorým sa narába ťažšie. Skúsme niečo podobné urobiť aj tu. Môžeme skúsiť rozdeliť nerovnosť rovnako ako v prvej časti. Avšak to by sme museli dokázať, že $|PM_i| \geqq \cos(\pi/n)(|PA_i|/2 + |PA_{i+1}|/2)$, čo sa nám určite nepodarí (keďže táto nerovnosť neplatí pre každú polohu bodu P). Lepší nápad je zobrať dve úsečky PM_i a jednu PA_i, t. j. pokúsiť sa dokázať, že pre každé $i = 1, \ldots, n$ je $|PM_i|/2 + |PM_{i+1}|/2 \geqq \cos(\pi/n)|PA_i|$ (tentoraz berieme $M_{n+1} = M_1$).



Obr. 81

Po nakreslení obr. 81 vidíme, že výhodné bude použiť *Ptolemaiovu nerovnosť*[9] (je dobré si ju pamätať, je to jedna z najjednoduchších geometrických nerovností). Jej aplikovaním na štvoruholník $PM_iA_{i+1}M_{i+1}$ a drobnými úpravami dostaneme

$$|PM_i||A_{i+1}M_{i+1}| + |PM_{i+1}||A_{i+1}M_i| \geqq |PA_{i+1}||M_iM_{i+1}|,$$
$$|PM_i| \cdot \frac{a}{2} + |PM_{i+1}| \cdot \frac{a}{2} \geqq |PA_{i+1}| \cdot a\cos\left(\frac{\pi}{n}\right),$$
$$\frac{|PM_i|}{2} + \frac{|PM_{i+1}|}{2} \geqq \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot |PA_{i+1}|, \tag{2}$$

čo je presne to, čo sme chceli dokázať. (Ptolemaiova nerovnosť platí aj v prípade, že bod P leží na úsečke M_iM_{i+1}, t. j. keď uvažovaný štvoruholník nie je štvoruholníkom.) Pri úprave sme využili, že $|M_iM_{i+1}| = a\cos(\pi/n)$. To možno jednoducho odvodiť z kosínusovej vety v trojuholníku $M_iA_{i+1}M_{i+1}$ (keďže vieme, že $|\sphericalangle M_iA_{i+1}M_{i+1}| = \pi - 2\pi/n$) Ešte jednoduchšie to dostaneme z toho, že mnohouholníky $A_1 \dots A_n$ a $M_1 \dots M_n$ sú podobné s koeficientom podobnosti $|SM_i| : |SA_i| = \cos(\pi/n)$ (pričom S je stred oboch pravidelných mnohouholníkov), takže aj $|M_iM_{i+1}| : a = \cos(\pi/n)$. Tým je úloha vyriešená (stačí už len sčítať nerovnosti (2) pre $i = 1, \dots, n$). Rovnosť nastane práve vtedy, keď nastane vo všetkých Ptolemaiových nerovnostiach, teda keď sú všetky štvoruholníky $PM_iA_{i+1}M_{i+1}$ tetivové. To platí len v prípade, keď P je stredom mnohouholníka $A_1 \dots A_n$.

Poznámky. Úloha sa dala veľmi elegantne vyriešiť aj pomocou komplexných čísel, ako to urobil *Ondrej Budáč*. Treba si uvedomiť, že vrcholy pravidelného mnohouholníka sa dajú chápať ako čísla $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ v komplexnej rovine, pričom ω je komplexné číslo spĺňajúce $\omega^n = 1$. Ďalšie je vecou šikovných úprav a vhodného využitia „trojuholníkovej nerovnosti“ $|x| + |y| \geqq |x + y|$, ktorá pre komplexné čísla platí.

Čo sa týka odhadu pomeru $\sum_{i=1}^n |PM_i| / \sum_{i=1}^n |PA_i|$, najlepší dolný odhad sme vlastne v riešení našli – je ním $\cos(\pi/n)$ (ukázali sme, že $\sum_{i=1}^n |PM_i| / \sum_{i=1}^n |PA_i| \geqq \cos(\pi/n)$ a zároveň sme našli prípad, keď nastane rovnosť. S horným odhadom je

[9] `http://planetmath.org/encyclopedia/ProofOfPtolemysInequality.html`

to náročnejšie. Hypotéza sa dá urobiť pomocou počítača – keď každý vnútorný bod P mnohouholníka $A_1 \dots A_n$ vykreslíme farbou podľa toho, aká je hodnota skúmaného pomeru (napr. väčšie hodnoty tmavšie, menšie svetlejšie), všimneme si, že najtmavšie sú oblasti okolo vrcholov mnohouholníka. Dá sa teda očakávať, že pomer bude maximálny, keď P bude niektorým vrcholom A_i. Čitateľovi nechávame na rozmyslenie, ako by sa táto hypotéza dala dokázať.

5.5 (Podľa *Ondreja Budáča.*)

a) Ak zvolíme $m = (2n)(2n-1)(2n-2)\cdots(n+1)$, potom prvý padne kocúrik s číslom $2n$ (spravíme $m/2n$ okruhov a skončíme na kocúrikovi $2n$). Následne začíname rátať od mačiatka číslo 1 a v kruhu už máme len $2n-1$ mačiatok. Keďže $2n-1$ delí m, tak po $m/(2n-1)$ okruhoch skončíme u kocúrika s číslom $2n-1$. Toho zafarbíme a opäť začíname rátať od mačiatka číslo 1. Predpokladajme teraz, že v i-tom ($1 \leqq i \leqq n$) kroku zafarbíme mačiatko s číslom $2n-i+1$ a následne začneme odpočítavať od mačiatka číslo 1. V kroku s poradovým číslo $(i+1)$ zafarbíme mačiatko $2n-i$, pretože v kruhu máme $2n-i$ nezafarbených mačiatok a m je deliteľné číslom $(2n-i)$, teda po $m/(2n-i)$ okruhoch skončíme na kocúrikovi $2n-i$ a toho zafarbíme. Takto po n krokoch zafarbíme všetkých kocúrikov a žiadnu mačičku.

b) V riešení využijeme *Bertrandov postulát*[10], ktorý tvrdí, že ak $n \geqq 3$, tak existuje prvočíslo p také, že $n/2 < p < n$. Majme teda takéto prvočíslo p. Vieme, že p delí $n!$, no p^2 nedelí $n!$ (keďže $p > n/2$). Nech $s = n!/p$. Potom zjavne p nedelí s. Zoberme čísla $s, 2s, 3s, \dots, ps$. Ak by is a js $(i \neq j)$ mali rovnaký zvyšok po delení p, tak by p delilo $is-js = s(i-j)$. Keďže p je nesúdeliteľné s s, p musí deliť $(i-j)$. Z toho ale vyplýva, že $i = j$, čo je spor. Teda čísla $s, 2s, 3s, \dots, ps$ dávajú rôzne zvyšky po delení p a je ich p, čiže sa medzi nimi nachádzajú všetky zvyšky po delení p. Položme teraz m postupne $s, 2s, 3s, \dots, ps$. Označme písmenom x počet nezafarbených mačiatok. Pokiaľ $x > p$, tak sa zafarbovanie správa rovnako ako v prípade a). Vieme, že x delí s a s delí m, teda x delí m. Takže v danom kroku zafarbíme x-té mačiatko a začneme odpočítavať od prvého. Takto postupne zafarbíme mačiatka $n, n-1, \dots, p+1$.

V nasledujúcom kroku, keďže $s, 2s, 3s, \dots, ps$ majú rôzne zvyšky po delení p, zafarbíme pre každé $m = is$ iné mača a ostane nám $p-1$ nezafarbených.

V ďalších krokoch však pokračujeme ako predtým. Vždy zafarbíme mačiatko pred tým mačiatkom, ktoré bolo zafarbené v predchádzajúcom kroku (keďže $(p-1), (p-2), \dots, 1$ delia s). Takto nám na konci zostane ľubovoľné mačiatko z mačiatok $1, 2, \dots, p$, podľa toho, aké m zvolíme (pre iné m nám ostane iné mača).

Čo ale s ostatnými mačiatkami $p+1, \dots, n$? Všimnime si nasledujúcu vec. Ak pri odrátavaní $m \leqq ps \leqq n!$ ostane mačiatko j, tak pri odrátavaní $m' = n! + 1 - m > 0$ ostane mačiatko $n+1-j$. Prečo? Uvažujme ako, bude prebiehať farbenie. Nech v prvom kroku pri odrátavaní m ostane mača j. Pri odrátavaní m' najprv narátame $n! + 1$ mačiatok (teda spravíme $(n-1)!$ okruhov) a dostaneme sa na to mača, od ktorého sme začínali odrátavať, čiže na mača číslo 1. Potom odrátame m mačiatok v opačnom smere. Tým pádom zafarbíme mača $n+1-j$, ktoré je symetrické cez stred

[10] `http://en.wikipedia.org/wiki/Proof_of_Bertrand's_postulate`

s mačiatkom j. V ďalších krokoch budeme stále zachovávať symetriu. Po odrátaní $n!+1$ mačiatok sa dostaneme na mačiatko, z ktorého sme začínali, a potom opačným smerom odrátame m mačiatok. Skončíme na mačiatku symetrickom cez stred s mačiatkom, ktoré by sme zafarbili pri odrátavaní m (vychádzame zo symetrických mačiatok a robíme rovnaký počet odrátavaní, ale opačným smerom, teda skončíme opäť v symetrických mačiatkach). Tým pádom ak nám pri odrátavaní m ostane na konci mačiatko j, tak pri odrátavaní m' ostane mačiatko $n+1-j$. A sme na konci riešenia, pretože ak pomocou odrátavaní $s, 2s, \dots, ps$ vieme dosiahnuť, že na konci ostanú mačatá $1, 2, \dots, p$, tak pomocou odrátavaní $n!+1-s, n!+1-2s, \dots, n!+1-ps$ nám na konci ostanú mačatá $n+1-1, n+1-2, \dots, n+1-p$. No $p > n/2$, čiže

$$\{1, 2, \dots, p\} \cup \{n+1-1, n+1-2, \dots, n+1-p\} = \{1, 2, \dots, n\}$$

a teda vieme pre každé mača j vybrať také m, aby mača j nebolo zafarbené. Aby bolo riešenie úplne kompletné, potrebujeme ešte vybaviť prípady, keď $n \leqq 2$, ktoré sme hneď v úvode riešenia vylúčili (vzhľadom na podmienku v Bertrandovom postuláte). No pre $n \leqq 2$ to je jednoduché. Ak $n = 1$, $j = 1$, tak $m = 1$; ak $n = 2$, $j = 1$, tak $m = 2$; a ak $n = 2$, $j = 2$, tk $m = 1$.

Šiesta séria

6.1 Je veľmi pravdepodobné, že hľadané n bude závisieť od stupňa polynómu a/alebo od čísla k. Vyskúšajme preto takéto n nájsť pre konkrétne malé hodnoty k a pre konkrétny polynóm, napríklad $P(x) = x^2 + 3x + 1$. Napíšme najprv zvyšky, ktoré dáva $P(i)$ po delení číslom k, ukazuje ich tabuľka. (Riadky určujú postupne i, stĺpce k.) Pomocou týchto zvyškov zistíme zvyšky súčtov $P(1) + P(2) + \cdots + P(n)$, napíšme si preto aj tie. (Po riadkoch sa zvyšuje hodnota n.)

zvyšky hodnôt $P(i)$

	2	3	4	5	6	7
1	1	2	1	0	5	5
2	1	2	3	1	5	4
3	1	1	3	4	1	5
4	1	2	1	4	5	1
5	1	2	1	1	5	6
6	1	1	3	0	1	6
7	1	2	3	1	5	1
8	1	2	1	4	5	5
9	1	1	1	4	1	4
10	1	2	3	1	5	5

zvyšky súčtov

	2	3	4	5	6	7
1	1	2	1	0	5	5
2	0	1	0	1	4	2
3	1	2	3	0	5	0
4	0	1	0	4	4	1
5	1	0	1	0	3	0
6	0	1	0	0	4	6
7	1	0	3	1	3	0
8	0	2	0	0	2	5
9	1	0	1	4	3	2
10	0	2	0	0	2	0

Ak sa na napísané čísla pozrieme pozornejšie, ľahko si všimneme, že pre jednotlivé hodnoty k sa zvyšky pravidelne opakujú, čo by sme radi aj dokázali. Potrebujeme ale ešte vedieť, čo vlastne chceme dokázať, teda presne ako často sa zvyšky hodnôt opakujú. Prípad $k = 2$ je zrejme nezaujímavý, no hodnoty $k = 3, 4, 5$ nám prezradia to, čo potrebujeme. (Treba si ešte uvedomiť, že napr. pre prípad $k = 3$ nie je dôležité, že $P(1) = P(2)$. To dôležité je, že sa opakuje postupnosť 2, 2, 1, ktorá má dĺžku tri.) Vidíme teda, že pre $k = 3, 4, 5$ sa zvyšky hodnôt opakujú postupne po každých troch, štyroch, resp. piatich číslach.

Chceme dokázať, že $P(i)$ a $P(k+i)$ dávajú rovnaký zvyšok po delení číslom k. Nech

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n. \tag{1}$$

Stačí ukázať, že každý člen na pravej strane (1) dáva pre i a $k + i$ rovnaký zvyšok po delení k. To znamená, že i^l a $(k+i)^l$ dávajú rovnaký zvyšok pre všetky l. Výraz $(k+i)^l$ je asi trochu zložitejší, ako by sme chceli, zjednodušiť ho vieme pomocou binomickej vety, dostávame

$$(k+i)^l = \binom{l}{0}k^l + \binom{l}{1}k^{l-1}i + \binom{l}{2}k^{l-2}i^2 + \cdots + \binom{l}{l-1}k^1i^{l-1} + \binom{l}{l}k^0i^l. \tag{2}$$

Keďže $k^0 = 1$, tak v rozvoji (2) sú všetky členy okrem posledného deliteľné číslom k. Pritom posledný člen je i^l, čo sme chceli ukázať.

Čo toto opakovanie znamená pre naše súčty? Časť súčtu od $k+1$ po $2k$ bude dávať rovnaký zvyšok ako časť od 1 po k, označme zvyšok tohto čiastočného súčtu ξ. Podobne aj časti od $2k+1$ po $3k$, od $3k+1$ po $4k$,... budú dávať zvyšok ξ. Preto najjednoduchšie, čo môžeme spraviť, je vziať takýchto čiastočných súčtov k, súčet ich zvyškov potom bude $k\cdot\xi$, čo je deliteľné číslom k. Takýto počet súčtov dosiahneme, ak za n zvolíme k^2. Tým je úloha vyriešená.

Poznámka. Vzťah $(k+i)^l \equiv i^l \pmod k$ vlastne znamená, že postupnosť zvyškov hodnôt polynómu je periodická. Zároveň ho vieme dokázať aj bez použitia binomickej vety – keďže $(k+i) \equiv i$, tak túto rovnosť nepokazíme, ani keď ju umocníme na l. Postupovať sa dalo aj trochu inak, s využitím faktu $(b-a) \mid P(b) - P(a)$, ktorý nie je ťažké dokázať.

6.2 Najprv si všimnime, že keď máme ovce s nejakými hmotnosťami a každú z tých hmotností vynásobíme nejakým nenulovým číslom, alebo k nej nejaké číslo pričítame, vlastnosť zo zadania nijako nepokazíme. Ak sme ovce vedeli rozdeliť predtým, vieme ich rozdeliť aj teraz a to presne tak isto. Ak sme ich nevedeli rozdeliť predtým, tak ich nevieme ani teraz.

Zaoberajme sa najprv jednoduchšou situáciou. Vezmime si takých 101 oviec, aby hmotnosť každej z nich bolo prirodzené číslo. Poďme v tejto zjednodušenej úlohe dokázať sporom, že všetky ovce majú rovnakú hmotnosť.

Nech medzi našimi ovečkami je nejaká s párnou hmotnosťou a nejaká s nepárnou hmotnosťou. Rozdeľme ich do dvoch košiarov, v prvom budú tie s párnymi hmotnosťami, v druhom tie s nepárnymi hmotnosťami. V každom košiari bude aspoň jedna ovca. Keďže oviec je nepárny počet, tak bude buď tých v prvom košiari, alebo tých v druhom košiari, nepárny počet.

Čo to znamená pre nás? Vždy vieme vybrať nejakú ovečku tak, aby v druhom košiari ostal nepárny počet oviec. Keď teraz ostatných sto chceme rozdeliť na dve rovnako vážiace 50-tice, nepodarí sa nám to. (Stačí rozobrať dva prípady). Preto na začiatku musela byť parita hmotností všetkých ovečiek rovnaká.

Ešte to nie je úplne hotové, ale už sme blízko. Vyberme najľahšiu ovečku a jej hmotnosť odčítajme od všetkých oviec. Ona teda bude mať nulovú hmotnosť a všetky ostatné nezápornú. Z predošlej úvahy vieme, že všetky hmotnosti musia mať rovnakú paritu, a teda sú párne. Čo sa stane, keď tieto hmotnosti vydelíme dvoma? Ako sme si povedali v úvode, nič to nepokazí na pôvodnej vlastnosti, a teda našu úvahu môžeme zopakovať znovu. A znovu. Aby to celé fungovalo tak, ako má, musia byť hmotnosti ovečiek deliteľné dvoma až do nekonečna, takže to musia byť nuly.

Tým sme ukázali, že keď máme ovečky s celočíselnými hmotnosťami, tak musia byť tieto hmotnosti rovnaké.

Čo sa stane, ak budú hmotnosti racionálne? Vieme ich vynásobením upraviť na prirodzené čísla. Pre túto situáciu sme tvrdenie práve dokázali, takže nám ostávajú už len iracionálne čísla.

Pozrime sa bližšie na reálne hmotnosti našich oviec. Ako môžu vyzerať? Keby to boli napríklad všetko racionálne násobky čísla $\sqrt{2}$, tak to už vieme. Lenže vo všeobecnosti nebudú. Skúsme si preto zapísať hmotnosti všetkých našich ovečiek ako súčet racionálnych násobkov nejakých „škaredých“ čísel (1, $\sqrt{2}$, $\pi, \dots$). Od týchto škaredých čísel navyše budeme požadovať, aby sa žiadne z nich nedalo zapísať ako súčet racionálnych násobkov ostatných škaredých čísel.

Nie je jasné, že takáto netriviálna množina M škaredých čísel vôbec existuje. Vezmime na začiatku množinu M, ktorá obsahuje všetky hmotnosti oviec. Ak sa nejaké číslo z tejto množiny dá zapísať ako súčet racionálnych násobkov ostatných, z M ho vyhodíme. Toto opakujeme, kým všetky čísla z M nemajú požadovanú vlastnosť.

Na čo je dobrá množina M? Ak vieme nejaké reálne číslo vyjadriť ako súčet racionálnych násobkov prvkov množiny M, tak toto vyjadrenie musí byť jednoznačné. (Ak by sme mali dve rôzne vyjadrenia, ich odčítaním dostaneme súčet racionálnych násobkov niektorých čísel z M rovný 0. To by znamenalo, že niektoré číslo z M sa dá napísať ako súčet racionálnych násobkov ostatných čísel z M.) Navyše vieme hmotnosť každej ovce (aj skupiny oviec) zapísať ako súčet racionálnych násobkov čísel z množiny M.

Nech m je niektoré číslo z množiny M. Majme dve skupiny oviec s rovnakou hmotnosťou H. Hmotnosť každej ovce z prvej skupiny má vo svojom zápise pomocou čísel z M nejaký koeficient pri čísle m. Číslo H je súčtom hmotností oviec v prvej skupine, preto koeficient pri m v zápise čísla H je súčtom koeficientov pri m v zápisoch hmotností jednotlivých oviec z prvej skupiny. Taká istá úvaha funguje aj pre druhú skupinu. Z jednoznačnosti zápisu čísla H dostávame, že súčty koeficientov pri m pre ovce z prvej a druhej skupiny sa rovnajú. Tieto koeficienty sú racionálne a funguje to rovnako pre výber ľubovoľnej ovce a rozdelenie zvyšných na dve rovnako veľké skupiny. To je problém, ktorý sme už vyriešili vyššie.

Poznámka. Každé rozdelenie oviec na dve skupiny sa dá popísať lineárnou rovnicou, kde neznáme sú hmotnosti našich oviec a koeficienty sú 0 (ovca mimo), 1 (ovca v prvej skupine), -1 (ovca v druhej skupine). Takže máme sústavu 101 rovníc so 101 neznámymi. Stačí ukázať, že jediným riešením tejto sústavy sú reálne násobky riešenia $(1, 1, \ldots, 1)$. To spravíme tak, že vhodne sčítavame a odčítavame rovnice a sledujeme paritu koeficientov pri jednotlivých neznámych. Riešenie vyžaduje isté znalosti o sústavách lineárnych rovníc, preto ho tu neuvádzame.

6.3 (Podľa *Michala Takácsa.*) Keďže N je stred oblúka AC, je zrejmé, že trojuholník ACN je rovnoramenný a MN je os strany AC. Známou vlastnosťou každého trojuholníka je, že os vnútorného uhla pretína os protiľahlej strany na opísanej kružnici. Vieme teda, že os uhla ABC, priamka MN a opísaná kružnica sa pretínajú v jednom bode. Nazvime ho P. Zjavne NP je priemerom opísanej kružnice, čiže uhol NBP je pravý. V riešení využijeme ešte jednu známu vlastnosť každého trojuholníka a síce, že

$$|AP| = |SP| = |CP| = \frac{b}{2\cos\frac{\beta}{2}}.$$

Pätu kolmice z S na AC označme Q, polomer vpísanej a opísanej kružnice nazvime ϱ a R. Ľahko nahliadneme, že $|SQ| = \varrho$ a $|AQ| = s - a$, kde s označuje polovicu obvodu trojuholníka ABC, čiže $s = (a + b + c)/2$. Ďalej $|AM| = b/2$ a teda

$$|QM| = \frac{b}{2} - s + a = \frac{a - c}{2}.$$

Nech T je päta kolmice z S na NP. Potom $STMQ$ je obdĺžnik, preto $|ST| = |QM| = (a-c)/2$. Navyše trojuholníky BNP a TSP majú jeden uhol spoločný a sú pravouhlé, čiže sú podobné. Platí teda

$$\frac{|SP|}{|ST|} = \frac{|NP|}{|BN|},$$

$$\frac{\frac{b}{2\cos\frac{\beta}{2}}}{\frac{a-c}{2}} = \frac{2R}{|BN|},$$

$$|BN| = \frac{2R(a-c)\cos\frac{\beta}{2}}{b}.$$

Trojuholníky SBN a SQM sú pravouhlé, našim cieľom bude dokázať, že sú podobné. Čiže chceme dokázať, že

$$\frac{|BN|}{|BS|} = \frac{|QM|}{|QS|},$$

čo je ale ekvivalentné s rovnosťami

$$\frac{\frac{2R(a-c)\cos\frac{\beta}{2}}{b}}{\frac{\varrho}{\sin\frac{\beta}{2}}} = \frac{\frac{a-c}{2}}{\varrho},$$

$$\frac{2R(a-c)\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{b} = \frac{a-c}{2},$$

$$\frac{b}{\sin\beta} = 2R,$$

z ktorých posledná je opäť známou vlastnosťou každého trojuholníka vyplývajúca zo sínusovej vety. Tým je úloha vyriešená.

Iné riešenie. Dokreslíme bod P ako v predošlom riešení. Uhol NBP je pravý. Uhol SMA sa nachádza pri ťažnici v trojuholníku SCA. Preto sa jeho veľkosť ťažko vyjadruje pomocou uhlov α, β. My však tú veľkosť nepotrebujeme. Stačí nájsť trojuholník SDE podobný s trojuholníkom SCA, v ktorom je SNB uhlom pri ťažnici SN. Preto body D, E musia ležať na priamke BN. Nech D, E sú priesečníky priamky BN s priamkami AS, CS. Trojuholníky SDE a SCA sú podobné, dokážeme to porátaním uhlov s využitím vlastností osí uhlov (vieme, aké uhly zvierajú okolo bodu S) a toho, že uhol NBP je pravý.

Dokazujeme, že bod N je stredom úsečky DE. Po porátaní veľkostí niekoľkých ďalších uhlov zistíme, že uhly DCE a DAE sú pravé. Nech F je priesečník priamok EA a DC. Ukážeme, že F leží na priamke BS. Vyplýva to z toho, že keď vezmeme bod G ako bod stredovo súmerný s bodom S podľa stredu P, tak úsečka GS je priemerom kružnice opísanej trojuholníku ASC (pretože P je stred tejto kružnice). Takže uhly SCF, SAF nad priemerom SG sú pravé. Preto bod G je totožný s bodom F.

V trojuholníku DEF sú body A, B, C pätami výšok. Preto kružnica opísaná trojuholníku ABC je Feuerbachovou kružnicou v trojuholníku DEF. Bod N je jej druhý priesečník so stranou DE, preto je to stred strany DE a úloha je vyriešená.

6.4 Najprv sa trochu pohráme. Skúsime nájsť aspoň jedno riešenie. To nám okrem iného povie, že nebude existovať žiaden triviálny dôvod, prečo by rovnica nemala riešenie. Príkladom takého dôvodu sú rôzne zvyšky strán rovnice po delení tromi.

Pravá strana našej rovnice je vždy nepárna. Aj ľavá. Toto nám nedá žiadnu informáciu o číslach x, y. Skúsime (inšpirovaní pravou stranou) vyššiu mocninu dvojky. V prípade $x = 1$ dostávame $y = 1$ a máme jedno riešenie rovnice. Ak $x \geqq 2$, tak pravá strana je deliteľná štyrmi. Aj ľavá musí byť, a z toho máme, že číslo x je párne.

Naša rovnica má dve celočíselné neznáme. Jednej z nich sa vieme ihneď zbaviť:

$$y = \frac{3^x - 1}{2^x}.$$

Takže hľadáme také párne prirodzené čísla $x \geqq 2$, že $2^x \mid 3^x - 1$.

Všimnime si výraz $3^x - 1$. Akou najväčšou mocninou dvojky je deliteľný? Ak by napríklad nebol deliteľný 32, tak stačí vyskúšať $x \leqq 4$. Ku každej mocnine dvojky však nájdeme x, pre ktoré je výraz $3^x - 1$ deliteľný touto mocninou dvojky. Skúsme. Číslo $3^2 - 1$ je deliteľné 8. Potom číslo $3^4 - 1 = (3^2 - 1)(3^2 + 1)$ je deliteľné 16, $3^8 - 1$ je deliteľné 32,...[11]

Vráťme sa k našej úlohe. Dá sa číslo $3^x - 1$ rozložiť na súčin? Vieme, že x je párne, teda $x = 2k$ pre nejaké prirodzené číslo k. Potom $3^x - 1 = (3^k + 1)(3^k - 1)$. Čísla $3^k - 1$, $3^k + 1$ sú za sebou idúce párne čísla, preto jedno z nich nie je deliteľné 4 a teda delí ho nanajvýš jedna dvojka. Všetky ostatné dvojky z čísla 2^{2k} musia deliť druhé zo

[11] Existencia vhodného exponentu vyplýva aj z Eulerovej vety, ktorá hovorí, že ak prirodzené čísla a a n sú nesúdeliteľné, tak $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. V našom prípade zvolíme $a = 3$, $n = 2^x$.

spomínaných po sebe idúcich čísel. Preto $2^{2k-1} \leqq 3^k + 1$. Z poslednej nerovnosti je jasné, že ju môže spĺňať len niekoľko malých k. Tie vyskúšame a dostaneme riešenia $(2,2)$ a $(4,5)$.

6.5 Výraz na ľavej strane nerovnosti označme V. Chceme ho zdola odhadnúť konštantou. Chceme čo najlepší odhad, takže by mala niekedy nastávať rovnosť. Rovnosť obyčajne nastáva v krajných bodoch alebo ak sú všetky premenné rovnaké. Vyskúšame, rovnosť nastáva pre $a = b = c = 1/\sqrt{3}$ a asi nikdy inokedy. Medzitým sme z väzby zistili, že čísla a, b, c sú z intervalu $(0,1)$ a preto všetky ďalšie úvahy budeme robiť na tomto intervale.

Nemá veľký zmysel roznásobovať nerovnosť. Konštanta na pravej strane z niečoho vyjsť musí a len tak zadarmo to nebude. Navyše výraz V sa vôbec nepodobá na väzbu. Väzba $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ je stupňa 2 a niet ju kam dosadiť, aby sme zhomogenizovali nerovnosť. Takže budeme skúšať niečo iné.

Ako sa dá použiť väzba? Ak by sa nám podarilo dokázať, že na intervale $(0,1)$ platí

$$\frac{a}{1-a} \geqq \frac{3\sqrt{3}+3}{2} a^2, \tag{1}$$

tak stačí sčítať takéto nerovnosti pre a, b, c a máme tvrdenie dokázané. Problém je, že nerovnosť (1) neplatí. Ale idea je to dobrá. Možno treba trochu upraviť výraz $a/(1-a)$ a už to pôjde. Z niekoľkých možných úprav vyskúšame tú, ktorá menovateľ výrazu upraví na čosi podobné väzbe (môže a nemusí to viesť k riešeniu):

$$\frac{a}{1-a} = \frac{a\cdot(1+a)}{(1-a)\cdot(1+a)} = \frac{a+a^2}{1-a^2} = \frac{a}{1-a^2} + \frac{1+a^2-1}{1-a^2} = \frac{a}{1-a^2} + \frac{1}{1-a^2} - 1.$$

Vyzerá to horšie ako predtým. Pozrime sa však na to po častiach. Ako nájdeme dolný odhad výrazu

$$\frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} + \frac{1}{1-c^2}?$$

Nerovnosť medzi harmonickým a aritmetickým priemerom pre tri čísla sa dá napísať v tvare

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geqq 9.$$

Hociktorý z výrazov na ľavej strane vieme odhadnúť zdola pomocou druhého výrazu. Dosaďme $x = 1 - a^2$, $y = 1 - b^2$, $z = 1 - c^2$ a použime väzbu. Dostaneme

$$\frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} + \frac{1}{1-c^2} \geqq \frac{9}{2}.$$

Vieme teda, že

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} + \frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} + \frac{1}{1-c^2} - 3 \geqq \frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} + \frac{3}{2}.$$

Teraz na odhad členov v tvare $a/(1-a^2)$ stačí metóda zo začiatku odstavca, dokážeme, že na intervale $(0,1)$ platí

$$\frac{a}{1-a^2} \geqq 3\sqrt{3}a^2.$$

To stačí na dôkaz celej nerovnosti. Pri dôkaze poslednej nerovnosti dostaneme kubický mnohočlen s premennou a. Ten treba rozložiť na súčin; pomôže nám pri tom, že vieme, kde nastáva rovnosť. Tá rovnosť musí nastať aj v našom odhade, takže poznáme jeden koreň nášho mnohočlena.

Iné riešenie. Vylepšíme metódu z prvého riešenia. Najprv trochu upravíme výrazy na ľavej strane, ku každému z nich pripočítame 1. Dokazovaná nerovnosť sa zmení na

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geqq \frac{3\sqrt{3}+9}{2}.$$

Označme $f(x) = 1/(1-x)$. Skúsime funkciu f odhadnúť na intervale $(0,1)$ zdola nejakou funkciou g. Od funkcie g budeme požadovať, aby prechádzala bodom $\big(1/\sqrt{3}, f(1/\sqrt{3})\big)$, lebo v ňom nastáva rovnosť. Navyše budeme chcieť, aby pre $x = 1/\sqrt{3}$ mala funkcia $g(x)$ rovnakú deriváciu ako $f(x)$. Chceme teda, aby graf funkcie g ležal medzi grafom funkcie f a dotyčnicou k f v bode $1/\sqrt{3}$. Potom bude fungovať odhad $f(a) + f(b) + f(c) \geqq g(a) + g(b) + g(c)$ a budeme navyše chcieť $g(a) + g(b) + g(c) \geqq (3\sqrt{3}+9)/2$.

Zo všetkých takých funkcií g si vyberieme takú, ktorá sa podobá na väzbu. Budeme hľadať g v tvare $g(x) = px^2 + q$. Pre čísla p, q dostaneme z podmienok položených na funkciu $g(x)$ sústavu rovníc

$$p + 3q = \frac{3\sqrt{3}+9}{2},$$
$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = g'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2p\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Vyriešením tejto sústavy získame čísla p, q. Treba dokázať, že platí $f(x) \geqq g(x)$ na celom skúmanom intervale. To už ponechávame na čitateľa.

Iné riešenie. Ideou tohto riešenia je využiť na odhad ľavej strany váženú Jensenovu nerovnosť. Dôležité je upraviť ľavú stranu do takého tvaru, kde sa dá táto nerovnosť použiť. Ostatné kroky sú technické.

Dokážeme nerovnosť v tvare

$$\frac{a^2}{a(1-a)} + \frac{b^2}{b(1-b)} + \frac{c^2}{c(1-c)} \geqq \frac{3\sqrt{3}+3}{2}.$$

Nech $f(x) = 1/x(1-x)$ pre x z intervalu $(0,1)$. Funkcia f je konvexná, preto z Jensenovej nerovnosti máme

$$a^2f(a) + b^2f(b) + c^2f(c) \geqq f(a^3 + b^3 + c^3).$$

Z nerovnosti medzi mocninovými priemermi máme

$$\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \geqq \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Odtiaľ dostávame $a^3+b^3+c^3 \geqq 1/\sqrt{3}$. Na intervale $(1/2, 1)$ je funkcia f rastúca, preto

$$f(a^3+b^3+c^3) \geqq f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3}+3}{2}.$$

Iné korešpondenčné semináre

Okrem matematickej olympiády sú pre študentov základných aj stredných škôl počas školského roka organizované aj iné matematické súťaže. Patria medzi ne predovšetkým korešpondenčné semináre. Tieto súťaže sa v detailoch istotne líšia, avšak základné črty majú spoločné. Počas školského roka prebiehajú dve časti (letná a zimná), ktoré pozostávajú zväčša z troch sérií úloh rozosielaných riešiteľom do škôl alebo domov. Riešenia súťažiaci vypracovávajú rovnakou formou ako v MO a v určenom termíne ich odosielajú na adresu príslušného seminára, odkiaľ sa po niekoľkých dňoch až týždňoch vrátia opravené spolu so vzorovými riešeniami a výsledkovou listinou. Mladší a menej skúsení riešitelia zväčša nemusia riešiť tie najzložitejšie príklady, aby aj oni mali šancu ovplyvniť poradie na prvých miestach. Na konci oboch častí súťaže sú približne tridsiati najúspešnejší riešitelia pozývaní na týždňové sústredenie, účasť na ktorom býva často najsilnejšou motiváciou na riešenie úloh. Nie je ale možné nespomenúť, že takýto pravidelný tréning sa odráža aj na výsledkoch dosahovaných v MO, a že drvivá väčšina reprezentantov Slovenska a Českej republiky na IMO a IOI sa aktívne zapájala do viacerých z týchto seminárov.

Nižšie uvedené korešpondenčné semináre (KS) sú určené predovšetkým študentom stredných škôl, svojím záberom pokrývajú územie celého Slovenska a často majú aj riešiteľov z Českej republiky. Je však možné, že vo svojom okolí nájdete aj menšie súťaže podobného druhu.

Korešpondenčný matematický seminár — KMS

KMS vznikol v minulom ročníku spojením Bratislavského a Stredoslovenského korešpondenčného matematického seminára (BKMS a SKMS), ktoré ešte v 51. ročníku MO prebiehali samostatne. Organizovaný je študentmi FMFI UK v Bratislave.

KMS má tri kategórie. Začínajúcim a mladším riešiteľom je určená kategória ALFA, pre skúsenejších je kategória BETA. Rozdelenie do kategórií umožňuje bojovať o miesta na sústredení aj neskúseným študentom, ktorí by v príliš silnej konkurencii strácali motiváciu. Od tohto ročníka pribudol ako kategória GAMA seminár SK MO, ktorému je venovaná predchádzajúca kapitola.

KMS
OATČ KAGDM FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

e-mail: kms@kms.sk
URL: http://kms.sk

Súťaž talentovaných riešiteľov obľubujúcich matematiku — STROM

Korešpondenčný seminár STROM je pokračovateľom najstaršieho korešpondenčného seminára v bývalom Československu. Je organizovaný z PF UPJŠ v Košiciach skupinou nadšencov, väčšinou bývalých riešiteľov seminára a študentov UPJŠ. V posledných rokoch sa na organizovaní seminára okrem košickej skupiny podieľajú aj študenti FMFI UK pochádzajúci z východného Slovenska. Riešiteľskú základňu má prevažne na východnom Slovensku.

STROM
PF UPJŠ
Jesenná 5
041 54 Košice

e-mail: strom@strom.sk
URL: http://www.strom.sk

Korešpondenčný seminár z programovania — KSP

Na rozdiel od predchádzajúcich KS, je KSP súťažou v programovaní. Všetky jeho súťažné úlohy sú, podobne ako na IOI, praktické. KSP je organizovaný zanietenou skupinkou študentov FMFI UK v Bratislave, ktorí majú zároveň na starosti všetky ostatné súťaže v programovaní od COFAX-u až po MO–P. Sústredenia bývajú na jar a na jeseň.

KSP
KVI FMFI UK
Mlynská Dolina
842 48 Bratislava

e-mail: ksp@ksp.sk
URL: http://www.ksp.sk/

Ak ste sa rozhodli do niektorého zo seminárov zapojiť, najrozumnejšie je požiadať o zaslanie úloh prvej série začiatkom septembra alebo začiatkom januára, prípadne si zadania a pravidlá nájsť na internete.

RNDr. Karel Horák, CSc. – Mgr. Vladimír Koutný
Mgr. Peter Novotný – doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.
Mgr. Michal Forišek – Ján Mazák – Martina Višňovská
Úlohová komisia MO

**Päťdesiatypiaty ročník
Matematickej olympiády
na stredných školách**

Sadzbu programom AMS-TEX a LATEX pripravili RNDr. Karel Horák, CSc.,
Mgr. Vladimír Koutný a Mgr. Peter Novotný
Zostavil: Mgr. Vladimír Koutný
Recenzoval: doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.
Grafická úprava obálky: Mgr. Vladimír Koutný
Vydané s finančnou podporou Ministerstva školstva SR.
Nepredajné.
Vydal: Iuventa, Bratislava, 2007
Náklad: 500 ks

ISBN 978–80–8072–067–4