54. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

Správa o riešení úloh zo súťaže konanej v školskom roku 2004/2005

46. MEDZINÁRODNÁ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA
17. MEDZINÁRODNÁ OLYMPIÁDA V INFORMATIKE

S pomocou spolupracovníkov spracovali
RNDr. Karel Horák, CSc., Mgr. Vladimír Koutný,
Mgr. Peter Novotný, doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.,
Mgr. Michal Forišek, Ján Mazák, Martina Višňovská
a členovia Úlohovej komisie MO.

ISBN 80–8072–053–3

Obsah

O priebehu 54. ročníka matematickej olympiády

Matematická olympiáda (MO) je najstaršia a najmasovejšia postupová intelektuálna súťaž žiakov základných a stredných škôl v SR. Túto súťaž vyhlasuje Ministerstvo školstva Slovenskej republiky (MŠ SR) v spolupráci s Jednotou slovenských matematikov a fyzikov (JSMF) a v školskom roku 2004/2005 sa uskutočnil už 54. ročník MO.

Súťaž riadila Slovenská komisia matematickej olympiády (SK MO), ktorá pracovala v nasledovnom zložení:

Doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., F-PEDAS ŽU Žilina, predseda
RNDr. Oliver Ralík, FPV UKF Nitra, podpredseda A
RNDr. Andrej Blaho, FMFI UK Bratislava, podpredseda P
RNDr. Monika Dillingerová, PhD., FMFI UK Bratislava, podpredseda Z
Mgr. Miroslava Smitková, neskôr *Mgr. Ivona Slobodová*, IUVENTA Bratislava
Doc. RNDr. Gabriela Andrejková, CSc., PF UPJŠ Košice
Mgr. Michal Forišek, FMFI UK Bratislava
Prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc., FPV UKF Nitra
Mgr. Vladimír Koutný, FMFI UK Bratislava
Juliana Lipková, študentka FMFI UK Bratislava
Ján Mazák, študent FMFI UK Bratislava
Doc. RNDr. Božena Mihalíková, CSc., PF UPJŠ Košice
Prof. RNDr. Jozef Moravčík, CSc., FPV ŽU Žilina
Mgr. Peter Novotný, FMFI UK Bratislava
Martin Potočný, študent FMFI UK Bratislava
Doc. RNDr. Vladislav Rosa, CSc., Slovenská štátna inšpekcia
Mgr. Milan Demko, PhD., PedF PU Prešov, predseda KKMO PO
RNDr. Zuzana Frková, Gymnázium Grösslingová Bratislava, predseda KKMO BA
Doc. RNDr. Mária Lucká, CSc., PF TU Trnava, predseda KKMO TT
RNDr. Tomáš Madaras, PhD., PF UPJŠ Košice, predseda KKMO KE
Doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc., F-PEDAS ŽU Žilina, predseda KKMO ZA
RNDr. Eva Oravcová, Gymnázium J. G. T. Banská Bystrica, predseda KKMO BB
RNDr. Soňa Pavlíková, CSc., TU Trenčín, predseda KKMO TN
Prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc., FPV UKF Nitra, predseda KKMO NR

*

Vo vlaňajšej Ročenke som sa dosť podrobne venoval vývoju rozdelenia financií na žiacke postupové intelektuálne súťaže, pričom striktnou a nekompromisnou argumentáciou sa **12. 12. 2003** podarilo pre MO vybojovať podstatný nárast pridelených financií. V závere som vyjadril nádej, že zapustí korene takéto spravodlivejšie *zvykové právo*. Teraz s radosťou konštatujem, že sa tak stalo. A nielen to. Podarilo sa na MŠ SR presadiť, aby na Medzinárodnú matematickú olympiádu (IMO) do Mexika išiel s naším družstvom aj pozorovateľ (observer). Tento jednak získa skúsenosti s prácou obvyklou na IMO, čím je zabezpečená kontinuita v tejto oblasti, a navyše nemalou mierou prispeje k oprave a koordinácii úloh, čo je na IMO najťažšia a najzodpovednejšia práca. Poznamenávam, že mnohé vyspelé krajiny vysielajú na IMO pozorovateľa už viac rokov, je to len otázka peňazí. Dovolím si teraz vyjadriť nádej, že sa to podarí presadiť ešte raz a tak možno zapustí korene aj toto *zvykové právo*.

*

Organizačná štruktúra súťaže sa v 54. ročníku nezmenila a podarilo sa uskutočniť všetky plánované akcie. Pod skratkou MO sa skrýva najstaršia súťaž tohto typu u nás, ktorá sa v dôsledku snahy veľkého množstva našich význačných predchodcov o čo najlepšie výsledky rozrástla na striktnú viackolovú súťaž s kategóriami **Z4**, **Z5**, **Z6**, **Z7**, **Z8**, **Z9** pre základné školy a **C**, **B**, **A** pre stredné školy. Vrcholom MO je Medzinárodná matematická olympiáda (**IMO**) s účasťou vyše 500 žiakov z celého sveta. Podrobnejší rozpis kategórií a kôl nájde záujemca v Organizačnom poriadku MO. Pod skratkou MO sa navyše – ako kategória **P** – skrýva v podstate samostatná súťaž Informatická olympiáda, ktorej vrcholom je Medzinárodná informatická olympiáda (**IOI**), ale koná sa aj Stredoeurópska informatická olympiáda (**CEOI**). Na oboch týchto súťažiach patria naši žiaci k najlepším. Za všetky čísla v tejto chvíli len toľko, že štvorice žiakov SR na doterajších 13 IOI od vzniku SR získali 50 medailí z 52 možných, pričom 20 medailí bolo zlatých, 19 strieborných a 11 bronzových. K takejto úspešnosti majú iné súťaže síce veľmi ďaleko, ale aj šestice žiakov SR na IMO sa majú čím pochváliť, pretože na doterajších 13 IMO od vzniku SR získali 58 medailí zo 78 možných, a to 2 zlaté, 23 strieborných a 33 bronzových.

Zásadný význam pre MO má tvorba úloh; v tejto oblasti stále udržujeme výbornú a obojstranne prospešnú spoluprácu s českými priateľmi. Májové pracovné zasadnutie spoločných úlohových komisií bolo v Žiline, novembrové v Kostelci nad Černými lesy. Zo Slovenska sú členmi úlohovej komisie Bednářová, Bodláková, Dillingerová a Smitková (pre kategórie Z), a Bálint, Mazák, Novotný Pavel a Novotný Peter (pre kategórie A, B, C); občas však dodá úlohy aj niekto ďalší – aj touto cestou všetkým ďakujem. Je to veľmi vítané, lebo originálne a pekné úlohy je čoraz ťažšie nájsť, takže **vyzývam** každého, kto je schopný dodať takú úlohu, aby tak urobil.

Celoštátne kolo MO (CK MO) v kategóriách A aj P usporiadala KKMO Košice pod vedením svojho predsedu RNDr. Tomáša Madarasa, PhD., s výraznou podporou doc. RNDr. Boženy Mihalíkovej, CSc., pričom samotnú súťaž usporiadalo gymnázium Pavla Horova v Michalovciach vo veľmi peknom prostredí na Zemplínskej Šírave. Žiaci tohto gymnázia získali v minulosti (aj) v MO nejeden výrazný úspech, pričom na ich matematickej príprave sa najčastejšie podieľali RNDr. Mária Dományová, RNDr. Anton Hnát a RNDr. Ján Novák. Dovolím si poďakovať im v mene SK MO, ako aj riaditeľovi Mgr. Viliamovi Záhorčákovi za mimoriadnu podporu tejto akcie, a ešte raz Marike Dományovej, ktorá bola dušou organizátorov.

Po CKMO sa v oboch kategóriách A aj P uskutočnili veľmi náročné výberové sústredenia, po ktorých vznikli reprezentačné družstvá. Tieto potom absolvovali v rámci prípravy na 46. IMO, 17. IOI a 12. CEOI aj tréningové sústredenie a súťažné trojstretnutie ČR-Poľsko-SR. Viac o týchto akciách a tiež o korešpondenčných seminároch nájde záujemca v samostatných kapitolách tejto Ročenky. Už teraz však uveďme aspoň niektoré z mnohých internetových stránok:

http://matematika.webpark.sk – archív zadaní, poradí a riešení MO,
http://pppnnn.webpark.sk/mo.htm – aktuálne dokumenty, najmä pre žilinský kraj,
http://www.iuventa.sk – stránka IUVENTY,
http://ksp.sk/mop – aktuálne informácie a archív pre kategóriu P,
http://kms.sk/mo – informácie o MO na stránkach korešpondenčného seminára,
http://imo2006.dmfa.si – stránka 47. IMO 2006 v Slovinsku.

*

V tomto ročníku sme z úsporných dôvodov spolu s IUVENTOU prvý raz realizovali elektronické rozosielanie súťažných zadaní niektorých kôl a tiež oznamovanie výsledkov. Tento spôsob je náročnejší na utajenie, pričom oznamovanie výsledkov prostredníctvom internetových stránok je hodne chúlostivé, pretože musí prebehnúť v presne stanovenom krátkom časovom intervale. Vyskytli sa len drobné problémy okrem jedného prípadu, keď v rozhodujúcej chvíli zlyhal najprv jeden odoslaný súbor, potom pripravené CD a nakoniec aj disketa, takže bolo treba dostať údaje z počítača, pričom jeho majiteľ – a teda znalec hesla – bol od neho vyše 400 km ďaleko. Vzhľadom na veľkosť problému spôsobeného synergickým efektom sa nám ho podarilo vyriešiť asi s prijateľným oneskorením... V tejto súvislosti treba poznamenať, že ak nedôjde k závažným problémom s utajením, tak elektronickú formu budeme zrejme výrazne používať napriek tomu, že môže dôjsť aj k veľkému oneskoreniu, napr. pri vypadnutí prúdu.

Na záver si dovolím poďakovať obrovskému štábu ľudí, ktorí akoukoľvek odbornou alebo organizačnou prácou prispeli k tomu, že 54. ročník MO bol úspešný.

Vojtech Bálint, predseda SK MO

Výsledky celoštátneho kola, kategória A

Víťazi

1.	Michal BURGER	4 G Grösslingová, Bratislava	7 7 1 6 7 7	35
2.	Ondrej BUDÁČ	3 G B. S. Timravy, Lučenec	5 7 7 7 7 1	34
3.	Jakub ZÁVODNÝ	4 G Grösslingová, Bratislava	6 7 5 6 2 7	33
4.	František SIMANČÍK	4 G Grösslingová, Bratislava	6 7 2 7 6 0	28
5.	Jozef BODNÁR	4 G Nám. padlých hrdinov, Fiľakovo	3 5 1 7 7 1	24
	Peter ČERNO	4 G Ľ. Štúra, Trenčín	6 7 1 6 3 1	24
	Tamás MÉSZÁROS	4 G M. Fazekasa, Budapešť	7 3 1 6 7 0	24
	Anton REPKO	4 G sv. Mikuláša, Prešov	7 6 2 5 4 0	24

Ďalší úspešní riešitelia

9.	Andrej BORSUK	3 G Grösslingová, Bratislava	6 7 1 3 6 0	23
	István ESTÉLYI	3 G štvrť SNP, Galanta	6 3 2 6 6 0	23
	Jaroslav KNEBL	3 G A. Bernoláka, Námestovo	6 6 3 7 1 0	23
	Peter PEREŠÍNI	3 G J. G. Tajovského, B. Bystrica	7 7 1 7 1 0	23
13.	Michal ĎURIŠ	4 G Grösslingová, Bratislava	6 3 2 7 4 0	22
	Stanislava SOJÁKOVÁ	4 G Jura Hronca, Bratislava	1 6 1 7 6 1	22
15.	Marcela HRDÁ	3 G Jura Hronca, Bratislava	3 7 1 3 7 0	21
16.	Ján MIKULÁŠ	3 G B. S. Timravy, Lučenec	1 7 3 7 2 0	20
	Rastislav OĽHAVA	3 G Alejová, Košice	2 7 2 6 3 0	20
18.	Daniel BOŽÍK	4 G Jura Hronca, Bratislava	2 7 2 1 7 –	19
	István SZENTANDRÁSI	3 G štvrť SNP, Galanta	3 0 3 4 2 7	19

Ostatní riešitelia

20.	Jakub IMRIŠKA	3 G Jura Hronca, Bratislava	6 2 3 7 0 0	18
21.	Ivan KOVÁČ	4 G Alejová, Košice	2 1 1 6 7 0	17
	Milan KURILLA	4 G Párovská, Nitra	2 1 1 4 6 3	17
23.	Martin TAKÁČ	4 G M. R. Štefánika, Nové Zámky	6 1 1 6 2 0	16
24.	Michal TAKÁCS	3 G J. G. Tajovského, B. Bystrica	2 0 3 7 3 0	15
	Slavomír TAKÁČ	3 G M. R. Štefánika, Nové Zámky	6 4 2 1 2 0	15
26.	Štefan GURSKÝ	4 G Jura Hronca, Bratislava	2 2 1 4 5 0	14
27.	Michal KUNCA	4 G Alejová, Košice	2 3 1 4 3 0	13
28.	Jakub BERAN	3 G Alejová, Košice	2 4 2 1 3 0	12
	Kristián KACZ	3 G H. Selyeho, Komárno	1 4 1 4 2 0	12

30.	Štefan RUSKA	4 G Alejová, Košice	2 1 2 4 2 0	11
31.	Ľubomír NOVÁK	3 G Jura Hronca, Bratislava	1 1 1 3 4 0	10
	Pavel STRUHÁR	4 G Jura Hronca, Bratislava	6 – 1 0 3 –	10
	Vladislav UJHÁZI	1 G P. J. Šafárika, Rožňava	2 3 1 2 2 0	10
34.	Ivana HLAVATÁ	4 G Jura Hronca, Bratislava	2 5 1 1 0 0	9
35.	Michal KESELY	4 G Jura Hronca, Bratislava	2 1 1 1 3 0	8
	Lenka KOVALČINOVÁ	4 G Poštová, Košice	2 2 1 1 2 0	8
37.	Martin ADAMČÍK	4 G Školská, Považská Bystrica	0 1 1 0 2 0	4
	Michal KOVÁČIK	4 G Veľká okružná, Žilina	2 1 0 0 1 0	4
39.	Zuzana MOLNÁROVÁ	3 G Alejová, Košice	1 1 1 0 0 0	3

Úspešnosť jednotlivých úloh je zaznamenaná v tabuľke.

Počet bodov	**Spolu**	**Číslo úlohy**					
		1.	2.	3.	4.	5.	6.
7 bodov	36	4	11	1	10	7	3
6 bodov	27	11	3	0	8	5	0
5 bodov	6	1	2	1	1	1	0
4 body	12	0	3	0	6	3	0
3 body	24	3	5	5	3	7	1
2 body	37	14	3	9	1	10	0
1 bod	49	5	9	22	6	3	4
0 bodov	43	1	3	1	4	3	31
Priemer	2,94	3,62	3,77	1,72	4,21	3,59	0,72

Výsledky celoštátneho kola, kategória P

Víťazi

1.	Peter PEREŠÍNI	3 G J. G. Tajovského, B. Bystrica	7	8	7	15	14	51
	František SIMANČÍK	4 G Grösslingová, Bratislava	7	7	7	15	15	51
3.	Michal BURGER	4 G Grösslingová, Bratislava	8	7	9	15	3	42
4.	Michal NÁNÁSI	4 G Jura Hronca, Bratislava	9	8	7	13	4	41
5.	Matúš PETRUĽÁK	4 G Grösslingová, Bratislava	6	6	7	15	6	40
6.	Jakub ZÁVODNÝ	4 G Grösslingová, Bratislava	8	4	7	1	15	35
7.	Peter ČERNO	4 G Ľudovíta Štúra, Trenčín	8	9	4	7	6	34
	Jakub IMRIŠKA	3 G Jura Hronca, Bratislava	5	7	7	15	0	34

Ďalší úspešní riešitelia

9.	Miroslav CICKO	4 G J. G. Tajovského, B. Bystrica	7	6	6	11	3	33
10.	Matúš FEDÁK	3 G Stará Ľubovňa	7	6	3	9	3	28
11.	Marek ZEMAN	4 G Jura Hronca, Bratislava	3	4	2	15	3	27
	Daniel BUNDALA	3 G Jura Hronca, Bratislava	7	4	6	6	4	27
13.	Ján MIKULÁŠ	3 G Haličská, Lučenec	5	4	4	10	3	26
14.	Slavomír TAKÁČ	3 G Nové Zámky	4	9	7	0	5	25

Ostatní riešitelia

15.	Peter HRINČÁR	1 G Dominika Tatarku, Poprad	6	2	6	7	3	24
	Michal ĎURIŠ	4 G Grösslingová, Bratislava	6	4	4	6	4	24
	Juraj ĎUĎÁK	3 G Golianova, Nitra	6	3	5	6	4	24
18.	Martin NÁMEŠNÝ	2 G Žiar nad Hronom	3	3	6	6	3	21
19.	Ondrej BUDÁČ	3 G Haličská, Lučenec	4	2	7	7	0	20
20.	Peter HERMAN	2 G Jura Hronca, Bratislava	4	6	4	1	3	18
	Adam OKRUHLICA	2 G Jura Hronca, Bratislava	7	3	5	0	3	18
22.	Stano BUŠTOR	4 G Jura Hronca, Bratislava	1	5	9	1	0	16
23.	Dušan DOMÁNY	4 G Pavla Horova, Michalovce	2	0	5	5	3	15
24.	Zuzana PETRUCHOVÁ	3 G Grösslingová, Bratislava	3	4	4	0	3	14
	Peter VANDERKA	4 G Trstená	2	2	0	7	3	14
26.	Matej KRCHNIAK	3 G Jura Hronca, Bratislava	3	4	3	3	0	13
27.	Tamara KUŠTÁROVÁ	4 Bilingválne gymnázium Sučany	7	1	4	0	0	12
28.	Ondrej MIKULÁŠ	2 G Haličská, Lučenec	2	1	3	0	2	8

Výsledky krajských kôl

Z príslušného kraja a v príslušnej kategórii A, B, C, P a Z9 sú uvedení všetci, resp. aspoň prvých 10 úspešných riešiteľov. Gymnáziá so zameraním na matematiku, študijný odbor 01, sú tieto:

Gymnázium Grösslingová, Bratislava,
Gymnázium Párovská, Nitra,
Gymnázium Veľká okružná, Žilina,
Gymnázium J. G. Tajovského, Banská Bystrica,
Gymnázium Alejová, Košice,
Gymnázium Poštová, Košice.

Kraj Bratislava

Kategória A

1.	Michal BURGER	4	Gymnázium Grösslingová
	František SIMANČÍK	4	Gymnázium Grösslingová
3.	Jakub ZÁVODNÝ	4	Gymnázium Grösslingová
4.	Michal ĎURIŠ	4	Gymnázium Grösslingová
5.	Andrej BORSUK	3	Gymnázium Grösslingová
6.	Michal KESELY	4	Gymnázium Jura Hronca
7.	Štefan GURSKÝ	4	Gymnázium Jura Hronca
	Stanislava SOJÁKOVÁ	4	Gymnázium Jura Hronca
9.	Jakub IMRIŠKA	3	Gymnázium Jura Hronca
10.	Daniel BOŽÍK	4	Gymnázium Jura Hronca

Kategória B

1.	Samuel HAPÁK	Gymnázium Grösslingová
2.	Martin PODOLÁK	Gymnázium Grösslingová
3.	Vladimír MOSNÝ	Gymnázium Jura Hronca
	Michal SZABADOS	ŠpMNDaG Teplická
5.	Ľubomír MALO	Evanjelické lýceum
	Fedor ŠIMKOVIČ	Gymnázium Jura Hronca
7.	Anna ZAHORANOVÁ	Gymnázium Metodova

8.	Kristína ČEVOROVÁ	ŠpMNDaG Teplická
	Tomáš KOVAČOVSKÝ	Gymnázium Jura Hronca
	Romana ODRÁŠKOVÁ	Gymnázium Grösslingová

Kategória C

1.	Daniela HEŽELYOVÁ	Gymnázium Grösslingová
2.	Alena KOŠINÁROVÁ	Gymnázium Grösslingová
	Lenka MATEJOVIČOVÁ	Gymnázium Grösslingová
4.	Mária STAROVSKÁ	Gymnázium Grösslingová
5.	Dušan BANÍK	Gymnázium Ladislava Sáru
	Lucia SIMANOVÁ	Gymnázium Grösslingová
	Juraj ŠOLTÉS	Gymnázium Grösslingová
8.	Katarína POKORNÁ	Gymnázium Grösslingová
	Damián VIZÁR	Gymnázium Tomášikova
10.	Tomáš KOČISKÝ	Gymnázium Grösslingová
	Matúš KUKAN	Gymnázium Grösslingová
	Michal MUTŇANSKÝ	Gymnázium Grösslingová

Kategória Z9

1.	Igor KOSSACZKÝ	ZŠ Sokolíkova
2.	Dušan HUPKA	ZŠ Fándlyho, Pezinok
	František NAGY	ZŠ Rajčianska
4.	Miroslava KUZMOVÁ	Gymnázium Grösslingová
	Michal SPIŠIAK	Gymnázium Grösslingová
	Radovan VANTA	CZŠ svätej Rodiny
7.	Peter CSIBA	ŠpMNDaG Teplická
	Katarína JANÁKOVÁ	ZŠ Sokolíkova
	Marek MARCHOT	ZŠ Slovenský Grob
10.	Martin CIESAR	ZŠ Vincenta de Paula
	Barbora HOLLÁ	ŠpMNDaG Teplická

Kategória P

1.	František SIMANČÍK	4 Gymázium Grösslingová
2.	Michal NÁNÁSI	4 Gymázium Jura Hronca
3.	Michal BURGER	4 Gymázium Grösslingová
4.	Stano BUŠTOR	4 Gymázium Jura Hronca
5.	Jakub ZÁVODNÝ	4 Gymázium Grösslingová
	Marek ZEMAN	4 Gymázium Jura Hronca
7.	Daniel BUNDALA	3 Gymázium Jura Hronca
8.	Matúš PETRUĽÁK	4 Gymázium Grösslingová

9.	Michal ĎURIŠ	4 Gymázium Grösslingová
10.	Jakub IMRIŠKA	3 Gymázium Jura Hronca
	Adam OKRUHLICA	2 Gymázium Jura Hronca

Kraj Nitra

Kategória A

1.	Tamás MÉZSÁROS	4 Gymnázium M. Fazekasa, Budapešť
2.	Slavomír TAKÁČ	3 Gymnázium Nové Zámky
3.	Krisztián KACZ	3 Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	Milan KURILLA	4 Gymnázium Párovská, Nitra
5.	Martin TAKÁČ	4 Gymnázium Nové Zámky
6.	Pavel GYURÁSZ	3 Gymnázium Šahy
	Péter MÁTYÁS	4 Gymnázium H. Selyeho, Komárno
8.	Erik NAGY	4 Gymnázium Šaľa
	Matej PIVOLUSKA	4 Gymnázium Levice
10.	Peter GAŠPARÍK	4 Gymnázium Levice
	Gergely KAJTÁR	3 Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	Peter PILINSKÝ	3 Gymnázium Levice

Kategória B

1.	Rastislav FARKAŠ	Gymnázium Levice
2.	Mónika BALÁZSOVÁ	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	Anna KÁLOSI	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
4.	Mária HOLECYOVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
	József KONCZER	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	Peter ŠKERLÍK	Gymnázium Párovská, Nitra
7.	Juraj CVIK	Gymnázium Levice
	Norbert ORSÁG	Gymnázium Ľ. J. Šuleka, Komárno
	Estera VÖRÖSOVÁ	Gymnázium H. Selyeho, Komárno

Kategória C

1.	Anna MARCZELL	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
2.	Veronika DVORANOVÁ	Gymnázium Šurany
3.	Pavol VALKOVIČ	Gymnázium Zlaté Moravce
4.	Peter KORCSOK	Gymnázium Šahy
5.	Gergo ÉDES	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
6.	Dávid PSZOTA	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
7.	Ondrej ĎURČO	Gymnázium Ľ. J. Šuleka, Komárno

	Géza ÖLLOS		Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	Barbora ONDEJČÍKOVÁ		Gymnázium Párovská, Nitra
10.	András VARGA		Gymnázium H. Selyeho, Komárno

Kategória Z9

1.	Tomáš CHRIEN		Gymnázium Levice
2.	Monika HANÁKOVÁ		ZŠ Močenok
	Anikó NAGYOVÁ		ZŠ Marcelová
	Bálint PÁSZTOR		ZŠ Mládežnícka, Šahy
5.	Barbora OREMUSOVÁ		ZŠ G. Bethlena, Nové Zámky
6.	Adrián GOGH		ZŠ F. Rákocziho, Kolárovo
7.	Dominika BEDNÁRIKOVÁ		ZŠ Radošina
	Tomáš LETKO		ZŠ Komjatice
9.	Adam BABINEC		ZŠ Mostná, Nové Zámky
	Tomáš KRAJČÍR		ZŠ Komenského, Komárno

Kategória P

1.	Szabolcs CSÉFALVAY		Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	Juraj ĎUĎÁK	3	Gymnázium Golianova, Nitra
3.	Slavomír TAKÁČ	3	Gymnázium Nové Zámky
4.	Tomáš MALÍK		Gymnázium Cyrila a Metoda, Nitra
	Petr ZAJÍČEK		Gymnázium H. Selyeho, Komárno
6.	Ľuboš SLOVÁK	4	Gymnázium Párovská, Nitra
7.	Igor ANDRUŠKA	4	SPŠ Levice
	Roman BETÍK	3	SPŠ Levice
	Jozef HAJNALA		Gymnázium Golianova, Nitra
10.	Miroslav KANIANSKY		Gymnázium Piaristická, Nitra
	Peter PAULIS	4	Gymnázium Cyrila a Metoda, Nitra

Kraj Trnava

Kategória A

1.	István ESTÉLYI	3	Gymnázium Z. Kodálya, Galanta
2.	István SZENTANDRÁSI	3	Gymnázium Z. Kodálya, Galanta
3.	Jakub GAJARSKÝ	4	Gymnázium Hollého, Trnava
4.	Michal DANIŠKA	3	Gymnázium Komenského, Hlohovec
	Sándor PÁLDY	2	Gymnázium Z. Kodálya, Galanta
6.	Péter GERÖ	3	Gymnázium Á. Vámbéryho, D. Streda
	Michal PRÍVOZNÍK	4	Gymnázium A. Merici, Trnava

	Tomáš BARTEK	4 Gymnázium Sereď
	Péter CSONGA	3 Gymnázium Á. Vámbéryho, D. Streda
	Ákos FEKETE	3 Gymnázium Á. Vámbéryho, D. Streda

Kategória B

1.	Tomáš BZDUŠEK	Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany
2.	Sándor PÁLDY	Gymnázium Z. Kodálya, Galanta
3.	Mária POLÁČKOVÁ	Gymnázium Sereď
	Ondrej URBAN	Gymnázium A. Merici, Trnava
5.	Katarína HRÍBIKOVÁ	Gymnázium A. Merici, Trnava
	Tomáš FEKETE	Gymnázium Á. Vámbéryho, D. Streda
	Vladimír RUŽIČKA	Gymnázium Skalica

Kategória C

1.	Tibor HORVÁTH	Gymnázium Á. Vámbéryho, D. Streda
2.	Eva BEDNÁRIKOVÁ	Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany
	Erik BOHONY	Gymnázium Á. Vámbéryho, D. Streda
4.	Ádám LIPPAI	Gymnázium Á. Vámbéryho, D. Streda
5.	Miklós KARÁCSONY	Gymnázium Šamorín
6.	Ladislav DUBRAVSKÝ	Gymnázium Hollého, Trnava
7.	Lukáš KUNERT	Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany

Kategória Z9

1.	Albert HERENCSÁR	Gymnázium Z. Kodálya, Galanta
2.	Štefan KASALA	ZŠ Spartakovská, Trnava
3.	Balász DINGA	ZŠ B. Bartóka, Veľký Meder
4.	Alexandra ANDICS	ZŠ Topoľníky
	István PARASZTI	ZŠ B. Bartóka, Veľký Meder
6.	Martin JAKUBÍK	ZŠ Mojmírova, Piešťany
	Ján MIKLÁŠ	Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany
	Gábor NAGY	ZŠ Horné Saliby
9.	J. KOSTOLANSKÝ	ZŠ Gorkého, Trnava
	László ÖLLS	Gymnázium Á. Vámbéryho, D. Streda

Kategória P

1.	Eva SCHLOSÁRIKOVÁ	4 Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany
2.	Robert SASÁK	4 SPŠE Piešťany
3.	Ľuboš PECHO	Gymnázium Hollého, Trnava

4.	Jakub GAJARSKÝ	4 Gymnázium Hollého, Trnava

Kraj Trenčín

Kategória A

1.	Peter ČERNO	4 Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
2.	Martin ADAMČÍK	4 Gymnázium Považská Bystrica
3.	Juraj ŠIBÍK	4 Gymnázium Považská Bystrica
4.	Pavel FILIP	4 Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
	Michal SIVÁK	3 Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín

Kategória B

1.	Ľubica KRAUSKOVÁ	Gymnázium V. B. Nedožerského, Prievidza
2.	Matúš IGLARČÍK	Gymnázium V. B. Nedožerského, Prievidza
3.	Danica CHOVANCOVÁ	Gymnázium Dubnica nad Váhom
4.	Peter DIŽO	Gymnázium Partizánske
5.	Ivana LUKŠOVÁ	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín

Kategória C

1.	Jozef JAKUBÍK	Gymnázium Partizánske
2.	Lucia KOVALČÍKOVÁ	Gymnázium Bánovce nad Bebravou
3.	Štefan NOVOSAD	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
	Marek PLEVA	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
5.	Daniel MIŠKÁR	SPŠ Dubnica nad Váhom
6.	Tibor STRAPKO	Gymnázium Dubnica nad Váhom

Kategória Z9

1.	Lívia BISKUPIČOVÁ	ZŠ Rozkvet, Považská Bystrica
2.	Iveta KLIMČÍKOVÁ	ZŠ Kubranská cesta, Trenčín
3.	Pavol MALO	ZŠ Mládežnícka, Púchov
4.	Katarína BAXOVÁ	ZŠ Dlhé Hony, Trenčín
	Jana FIGULOVÁ	ZŠ Dlhé Hony, Trenčín
6.	Ondrej MIČUDA	Gymnázium Dubnica nad Váhom
	Dana SUCHOMELOVÁ	ZŠ Novomeského, Trenčín
8.	Martin HARKABUS	Gymnázium Považská Bystrica
	Peter KRÁLIK	ZŠ Gorazdova, Bánovce nad Bebravou
10.	Martina KOVÁČOVÁ	ZŠ Duklianska, Bánovce nad Bebravou

Kategória P

1.	Peter ČERNO	4	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
2.	Veronika MASTRÁKOVÁ		Gymnázium V. B. Nedožerského, Prievidza
	Ján NOVÁK	3	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
4.	Lukáš ČERNO		Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín

Kraj Žilina

Kategória A

1.	Jaroslav KNEBL	3	Gymnázium A. Bernoláka, Námestovo
2.	Peter ŠEPITKA	4	Gymnázium V. P. Tótha, Martin
3.	Peter PIJÁK	4	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
4.	Michal KOVÁČIK	4	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
5.	Eva PEŠKOVÁ	4	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
6.	Marek HANES	4	Gymnázium J. Lettricha, Martin
7.	Lenka VESELOVSKÁ	3	Gymnázium M. M. Hodžu, Lipt. Mikuláš
	Pavol STANEK	4	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
9.	Ján LABANT	4	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
	Alena BACHRATÁ	3	Gymnázium Veľká okružná, Žilina

Kategória B

1.	Ján PEPRNÍK	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
2.	Lucia HÚŠŤAVOVÁ	Gymnázium Varšavská, Žilina
3.	Kristína KOVALČÍKOVÁ	Gymnázium Varšavská, Žilina
4.	Miroslava ORIEŠČÍKOVÁ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
5.	Jana MAKOVNÍKOVÁ	Gymnázium Sučany

Kategória C

1.	Lukáš KEKELY	Gymnázium Varšavská, Žilina
2.	Peter MARKO	Gymnázium P. O. Hviezdoslava, D. Kubín
3.	Lijun WU	Gymnázium M. Hattalu, Trstená
4.	Juraj CVACHO	Gymnázium P. O. Hviezdoslava, D. Kubín
	Tomáš MATULA	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
6.	Martin BARÁNEK	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
	Tomáš MARTINOVIČ	Evanjelické gymnázium, Lipt. Mikuláš
	Miroslava MIČEKOVÁ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
9.	Matej NOVÁK	Gymnázium Varšavská, Žilina

Kategória Z9

1.	Mária SÚKENÍKOVÁ	ZŠ Nábrežná, Kysucké Nové Mesto
2.	Filip VAJDA	ZŠ Bystrická, Ružomberok
3.	Ondrej ŠEDO	ZŠ Karpatská, Žilina
4.	Vladimíra KANISOVÁ	ZŠ Karpatská, Žilina
	Juraj TYLKA	ZŠ J. Kráľa, Lipt. Mikuláš
6.	Martin ČERŇAN	ZŠ Karpatská, Žilina
	Vladimír HUDEC	Gymnázium Varšavská, Žilina
	Daniela OVADOVÁ	ZŠ Lisková
9.	Veronika ČAVAJDOVÁ	ZŠ A. Bernoláka, Martin
	Monika SMITALOVÁ	ZŠ Čsl. brigády, Lipt. Mikuláš
	Dana ŠUNÍKOVÁ	ZŠ Gaštanová, Žilina

Kategória P

1.	Samuel BREZÁNI	2 Gymnázium Rajec
2.	Peter VANDERKA	4 Gymnázium Trstená
3.	Tamara KUŠTÁROVÁ	4 Bilingválne gymnázium Sučany
4.	Lukáš ŠPALEK	4 Gymnázium Čadca
5.	Lukáš BELEŠ	4 Gymnázium Čadca
6.	Miroslav MINTÁL	3 SOU Ružomberok
7.	Ján PALENČÁR	4 Gymnázium Malá Hora, Martin
8.	Lukáš TVRDÝ	4 Gymnázium Čadca

Kraj Banská Bystrica

Kategória A

1.	Jozef BODNÁR	4 Gymnázium Fiľakovo
	Ondrej BUDÁČ	3 Gymnázium B. S. Timravy, Lučenec
3.	Peter PEREŠÍNI	3 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
4.	Michal TAKÁCS	3 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
5.	Ján MIKULÁŠ	3 Gymnázium B. S. Timravy, Lučenec
6.	Miroslav CICKO	4 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
7.	Igor MAJERČÍK	3 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
8.	Silvia BALÁŽOVÁ	4 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Zuzana PÔBIŠOVÁ	3 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Vladimíra SEČKÁROVÁ	4 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Ivana SELEČÉNIOVÁ	3 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Michal SUDOLSKÝ	2 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Jakub UKROP	3 Gymnázium Ľ. Štúra, Zvolen

Kategória B

1.	Michal SUDOLSKÝ	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
2.	Filip ŠTEFAŇÁK	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
3.	Radka SELEČÉNIOVÁ	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
4.	Ondrej MIKULÁŠ	Gymnázium B. S. Timravy, Lučenec

Kategória C

1.	Daniel BENE	Gymnázium B. S. Timravy, Lučenec
2.	Vladimír KOBZA	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
3.	Mária VRBOVSKÁ	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
4.	Dominik VÁCLAV	Gymnázium Detva
	Katarína JURÍKOVÁ	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Ondrej PEREŠÍNI	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Andrea ŽIVČÁKOVÁ	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
8.	Andrea ČÍŽKOVÁ	Gymnázium Ľ. Štúra, Zvolen
	Dana LENNEROVÁ	Gymnázium Ľ. Štúra, Zvolen
10.	Maroš KUCBEL	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Matej SNOHA	Športové gymnázium B. Bystrica
	Petra TURČANOVÁ	Gymnázium Kremnica
	Veronika SPIŠKOVÁ	Gymnázium Okružná, Zvolen

Kategória Z9

1.	Peter SLUKA	ZŠ lX. Zvolen
	Martin UKROP	ZŠ III. Zvolen
3.	Tomáš SZANISZLO	ZŠ Tatranská, B. Bystrica
	Katarína ČÍŽKOVÁ	ZŠ VI. Zvolen
5.	Marian NOCIAR	Gymnázium B. S. Timravy, Lučenec
6.	Marián PAVLÍK	ZŠ III. Zvolen
	Matej POLIAK	ZŠ Radvanská, B. Bystrica
8.	Soňa STRHÁRSKA	Gymnázium Veľký Krtíš
	Veronika ORSÁGOVÁ	ZŠ Kriváň
	Daniela SARVAŠOVÁ	Gymnázium B. S. Timravy, Lučenec

Kategória P

1.	Peter PEREŠÍNI	3 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
2.	Ondrej BUDÁČ	3 Gymnázium Haličská, Lučenec
3.	Miroslav CICKO	4 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica

4.	Martin NÁMEŠNÝ	2 Gymnázium Žiar nad Hronom
5.	Ján MIKULÁŠ	3 Gymnázium Haličská, Lučenec
6.	Ondrej MIKULÁŠ	2 Gymnázium Haličská, Lučenec
7.	Andrej PANČÍK	2 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Michal PANČÍK	4 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
9.	Michal SUDOLSKÝ	2 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
10.	Tomáš MACÍK	4 Gymnázium A. Sládkoviča, B. Bystrica
	Miroslav MIKLUŠ	3 Gymnázium Haličská, Lučenec
	Lukáš ZACHAR	4 Gymnázium A. Sládkoviča, B. Bystrica

Kraj Košice

Kategória A

1.	Ivan KOVÁČ	4 Gymnázium Alejová, Košice
2.	Rastislav OĽHAVA	3 Gymnázium Alejová, Košice
3.	Štefan RUSKA	4 Gymnázium Alejová, Košice
4.	Michal KUNCA	4 Gymnázium Alejová, Košice
5.	Jakub BERAN	3 Gymnázium Alejová, Košice
	Vladislav UJHÁZI	1 Gymnázium P. J. Šafárika, Rožňava
7.	Lenka KOVALČINOVÁ	4 Gymnázium Poštová, Košice
	Zuzana MOLNÁROVÁ	3 Gymnázium Alejová, Košice
	Michal REPISKÝ	4 Gymnázium Poštová, Košice
10.	Ján NIŽŇANSKÝ	4 Gymnázium Alejová, Košice

Kategória B

1.	Tomáš RUSIN	Gymnázium Alejová, Košice
2.	Marek DERŇÁR	Gymnázium Veľké Kapušany
	Peter BERTA	Gymnázium Alejová, Košice
4.	Alexander TILL	Gymnázium Poštová, Košice
5.	Pavol SIROCZKI	Gymnázium Š. Moyzesa, Moldava n/B.
6.	Martin BLICHA	Gymnázium Poštová, Košice
	Beáta BABIAKOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
8.	Juraj ŠKVARLA	Gymnázium Poštová, Košice
9.	Roman HOČ	Gymnázium Poštová, Košice
10.	Lukáš JUSKO	Gymnázium Poštová, Košice
	Beáta KANDRIKOVÁ	Gymnázium Školská, Spišská Nová Ves
	Matej LUKÁČ	Gymnázium Šrobárova, Košice

Kategória C

1.	Vladislav UJHÁZI	Gymnázium P. J. Šafárika, Rožňava
2.	Adriána SZILÁGYIOVÁ	Gymnázium Poštová, Košice
3.	Mária HARČARUFKOVÁ	Gymnázium Poštová, Košice
4.	Dominika FODOROVÁ	Gymnázium Poštová, Košice
5.	Tomáš KUBÁK	Gymnázium Alejová, Košice
6.	Marek KLENOVIČ	Gymnázium Poštová, Košice
	Tomáš KOCÁK	Gymnázium Poštová, Košice
	Mária KOČIŠOVÁ	Gymnázium Poštová, Košice
	Marián MICKO	Gymnázium Sobrance
	Katarína POVOLNÁ	Gymnázium Alejová, Košice

Kategória Z9

1.	Viktor ANDREJKOVIČ	ZŠ Park Angelinum, Košice
	Peter FULLA	ZŠ Nad medzou, Spišská Nová Ves
3.	Dávid VENDEL	ZŠ Staničná, Košice
4.	Martin BALÁŽ	Gymnázium Alejová, Košice
5.	Ľubica NOVÁKOVÁ	ZŠ Nad medzou, Spišská Nová Ves
6.	Eduard EIBEN	ZŠ Bruselská, Košice
	Ľubomír REMÁK	Gymnázium Alejová, Košice
8.	Ladislav BACO	ZŠ Kežmarská, Košice
	Jakub DANKO	ZŠ Moussonova, Michalovce
	Milica FABIŠÍKOVÁ	ZŠ Kežmarská, Košice
	Tomáš KOCOUREK	ZŠ Hutnícka, Spišská Nová Ves
	Martin ORENDÁČ	ZŠ Park Angelinum, Košice
	Martin POLAČKO	Gymnázium Alejová, Košice
	Martin ŠTOBER	ZŠ Akademika Hronca, Rožňava

Kategória P

1.	Dušan DOMÁNY	4	Gymnázium Pavla Horova, Michalovce
2.	Ján JERGUŠ	2	Gymnázium Alejová, Košice
3.	František CSAJKA	3	Gymnázium Poštová, Košice
	Michal DZETKULIČ	4	Gymnázium Pavla Horova, Michalovce
5.	Marián BAŽALIK	3	Gymnázium Poštová, Košice
6.	Tomáš DZURŇÁK	3	Gymnázium Školská, Spišská Nová Ves
	Martin ĽUDVÍK	4	Gymnázium Školská, Spišská Nová Ves
	Peter MORIHLADKO	4	Gymnázium Školská, Spišská Nová Ves
	Peter NIKODEM	1	Gymnázium Školská, Spišská Nová Ves
10.	Peter BAŠISTA	3	Gymnázium Pavla Horova, Michalovce
	Peter JURČO	3	Gymnázium Pavla Horova, Michalovce

Kraj Prešov

Kategória A

1.	Anton REPKO	4 Gymnázium sv. Mikuláša, Prešov
2.	Michal PRUSÁK	3 Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
	Tomáš STAŠKO	4 Gymnázium J. A. Raymana, Prešov

Kategória B

1.	Michal KOVAĽ	Gymnázium L. Stöckela, Bardejov
2.	Vladimír VOLČKO	SPŠE Prešov
3.	Juraj FERENC	SPŠE Prešov
4.	Slavomír KOHÚTIK	Gymnázium P. O. Hviezdoslava, Kežmarok
	Ľudmila MIŠKANOVÁ	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
	Mária ŠPAKOVÁ	Gymnázium P. O. Hviezdoslava, Kežmarok
	Dominik TKÁČ	Gymnázium Giraltovce

Kategória C

1.	Miroslav BALÁŽ	Gymnázium L. Svobodu, Humenné
2.	Vladimír BOŽA	Gymnázium D. Tatarku, Poprad
3.	Tomáš OMASTA	Gymnázium D. Tatarku, Poprad
4.	Zuzana HARČARÍKOVÁ	Gymnázium L. Stöckela, Bardejov
	Michaela MOKCSAYOVÁ	Gymnázium Vranov nad Topľou
6.	Nikola ŠPESOVÁ	Gymnázium Konštantínova, Prešov

Kategória Z9

1.	Ján CABALA	Gymnázium Giraltovce
2.	Ondrej KACHMAN	ZŠ Bystré
	Lukáš PRIPUTEN	ZŠ Hniezdne
4.	Jozef JASS	ZŠ Komenského, Bardejov
	Ján KUZMA	ZŠ Šmeralova, Prešov
	Jakub VAŇO	ZŠ Májové námestie, Prešov
7.	Marek BELIŠ	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
	Stanislav HRIVNÁK	ZŠ Pod Vinbargom, Bardejov
9.	Michal BUŠOVSKÝ	Gymnázium sv. F. Assiského, Levoča
	Ivan HNÁT	Gymnázium Svidník
	Vladimír CHABAL	ZŠ Májové námestie, Prešov
	Daniela JUDIČÁKOVÁ	ZŠ Komenského, Lipany

	Dávid KATUŠČÁK	ZŠ Nešporova, Prešov
	Martin STANCEL	ZŠ Hradné námestie, Kežmarok
	Mária VAŠKOVÁ	ZŠ Prostějovská, Prešov

Kategória P

1.	Matúš FEDÁK	3 Gymnázium Stará Ľubovňa
2.	Peter HRINČÁR	1 Gymnázium D. Tatarku Poprad
3.	Vladimír BOŽA	1 Gymnázium D. Tatarku Poprad
4.	Ľuboš HUSIVARGA	4 Gymnázium Dr. Daxnera, Vranov n. Topľou
5.	Peter GREŠKOVIČ	4 Gymnázium Svidník
6.	Libor BEŠENYI	4 Gymnázium Stropkov
	Daniel DUPAĽ	4 Gymnázium Dr. Daxnera, Vranov n. Topľou
8.	Maroš GÁLIK	3 Gymnázium Dr. Daxnera, Vranov n. Topľou
9.	Ondrej KAPRÁL	3 SOU Kukučínova, Poprad
10.	Ondrej LIČÁK	3 Gymnázium Dr. Daxnera, Vranov n. Topľou
11.	Štefan SEDLÁK	4 Gymnázium Dr. Daxnera, Vranov n. Topľou

Zadania súťažných úloh

Kategória C

C – I – 1

Nech a, b, c, d sú také reálne čísla, že $a + d = b + c$. Dokážte nerovnosť

$$(a - b)(c - d) + (a - c)(b - d) + (d - a)(b - c) \geqq 0.$$

(E. Kováč)

C – I – 2

Zistite, pre ktoré prirodzené čísla $n \geqq 2$ je možné z množiny $\{1, 2, \ldots, n - 1\}$ vybrať navzájom rôzne párne čísla tak, aby ich súčet bol deliteľný číslom n.

(J. Zhouf)

C – I – 3

V ľubovoľnom konvexnom štvoruholníku $ABCD$ označme E stred strany BC a F stred strany AD. Dokážte, že trojuholníky AED a BFC majú rovnaký obsah práve vtedy, keď sú strany AB a CD rovnobežné.

(J. Šimša)

C – I – 4

Tri štvormiestne čísla k, ℓ, m majú rovnaký tvar $ABAB$, t. j. číslica na mieste jednotiek je rovnaká ako číslica na mieste stoviek a číslica na mieste desiatok je rovnaká ako číslica na mieste tisícok. Číslo ℓ má číslicu na mieste jednotiek o 2 väčšiu a číslicu na mieste desiatok o 1 menšiu ako číslo k. Číslo m je súčtom čísel k a ℓ a je deliteľné deviatimi. Určte všetky také čísla k.

(T. Joska)

C – I – 5

Určte počet všetkých trojíc dvojmiestnych prirodzených čísel a, b, c, ktorých súčin abc má zápis, v ktorom sú všetky číslice rovnaké. Trojice líšiace sa len poradím čísel považujeme za rovnaké, t. j. započítavame ich len raz.

(J. Šimša)

C – I – 6

V trojuholníku ABC so stranou BC dĺžky 2 cm je bod K stredom strany AB. Body L a M rozdeľujú stranu AC na tri zhodné úsečky. Trojuholník KLM je rovnoramenný a pravouhlý. Určte dĺžky strán AB, AC všetkých takých trojuholníkov ABC.

(P. Leischner)

C – S – 1

Nájdite všetky trojice celých čísel x, y, z, pre ktoré platí

$$x + yz = 2005,$$
$$y + xz = 2006.$$

(J. Šimša)

C – S – 2

Pre ktoré prirodzené čísla n možno z množiny $\{n, n+1, n+2, \dots, n^2\}$ vybrať štyri navzájom rôzne čísla a, b, c, d tak, aby platilo $ab = cd$?

(J. Šimša)

C – S – 3

Je daná úsečka AB. Zostrojte bod C tak, aby sa obsah trojuholníka ABC rovnal $1/8$ obsahu S štvorca so stranou AB a súčet obsahov štvorcov so stranami AC a BC sa rovnal S.

(A. Jančařík)

C – II – 1

Určte číslice x, y, z tak, aby platila rovnosť

$$\frac{x+y}{z} = \overline{z{,}yx},$$

kde $\overline{z{,}yx}$ označuje číslo zložené zo z jednotiek, y desatín a x stotín.

(J. Zhouf)

C – II – 2

Ku každému prirodzenému číslu $n > 2$ nájdite aspoň jednu dvojicu rôznych prirodzených čísel p, q tak, aby číslo $1/n$ bolo aritmetickým priemerom čísel $1/p$ a $1/q$.

(L. Boček)

C – II – 3

Ľubovoľným vnútorným bodom P uhlopriečky AC daného obdĺžnika $ABCD$ sú vedené rovnobežky s jeho stranami tak, že pretínajú úsečky AB, BC, CD a DA postupne v bodoch K, L, M a N. Dokážte, že

a) priamky LM a KN sú rovnobežky,
b) vzdialenosť rovnobežiek LM a KN je konštantná (nezávisí na voľbe bodu P),
c) pre obvod o štvoruholníka $KLMN$ platí nerovnosť $o \geqq 2|AC|$.

(J. Švrček)

C – II – 4

Popíšte konštrukciu lichobežníka $ABCD$ so základňami AB a CD, ktorému sa dá opísať kružnica s polomerom $r = 5\,\mathrm{cm}$, keď je daná vzdialenosť $d = 2\,\mathrm{cm}$ jej stredu od priesečníka uhlopriečok a $|\sphericalangle BAC| = 70°$.

(E. Kováč)

Kategória B

B – I – 1

Určte všetky dvojice (a, b) reálnych čísel, pre ktoré má každá z rovníc

$$x^2 + ax + b = 0, \qquad x^2 + (2a + 1)x + 2b + 1 = 0$$

dva rôzne reálne korene, pričom korene druhej rovnice sú prevrátenými hodnotami koreňov prvej rovnice.

(E. Kováč)

B – I – 2

Daný je rovnobežník $ABCD$. Priamka vedená bodom D pretína úsečku AC v bode G, úsečku BC v bode F a polpriamku AB v bode E tak, že trojuholníky BEF a CGF majú rovnaký obsah. Určte pomer $|AG| : |GC|$.

(T. Jurík)

B – I – 3

Na stole leží k hromádok o 1, 2, 3, …, k kameňoch, kde $k \geqq 3$. V každom kroku vyberieme tri ľubovoľné hromádky na stole, zlúčime ich do jednej a pridáme k nej jeden kameň, ktorý dovtedy na stole nebol. Dokážte, že ak po niekoľkých krokoch vznikne jediná hromádka, potom výsledný počet kameňov nie je deliteľný tromi.

(J. Zhouf)

B – I – 4

Označme V priesečník výšok a S stred kružnice opísanej trojuholníku ABC, ktorý nie je rovnostranný. Dokážte, že ak uhol pri vrchole C má $60°$, potom os uhla ACB je osou úsečky VS.

(J. Zhouf)

B – I – 5

V obore reálnych čísel vyriešte rovnicu

$$\frac{x}{x+4} = \frac{5\lfloor x\rfloor - 7}{7\lfloor x\rfloor - 5},$$

kde $\lfloor x\rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako x (tzv. *dolná celá časť* reálneho čísla x).

(J. Šimša)

B – I – 6

Do kružnice k s polomerom r sú vpísané dve kružnice k_1, k_2 s polomerom $r/2$, ktoré sa vzájomne dotýkajú. Kružnica ℓ sa zvonka dotýka kružníc k_1, k_2 a s kružnicou k má vnútorný dotyk. Kružnica m má vonkajší dotyk s kružnicami k_2 a ℓ a vnútorný dotyk s kružnicou k. Vypočítajte polomery kružníc ℓ a m.

(L. Boček)

B – S – 1

Na stole leží 54 kôpok s $1, 2, 3, \dots, 54$ kameňmi. V každom kroku vyberieme ľubovoľnú kôpku, povedzme s k kameňmi, a odoberieme ju celú zo stola spolu s k kameňmi z každej tej kôpky, v ktorej je aspoň k kameňov. Napríklad po prvom kroku, v ktorom vyberieme kôpku s 52 kameňmi, zostanú na stole kôpky s 1, 2, 3, …, 51, 1 a 2 kameňmi. Predpokladajme, že po určitom počte krokov zostane na stole jediná kôpka. Zdôvodnite, koľko kameňov v nej môže byť.

(J. Šimša)

B – S – 2

Nech ABC je pravouhlý trojuholník so stranami $a < b < c$. Označme Q stred odvesny BC a S stred prepony AB. Priesečník osi úsečky AB s odvesnou CA označme R. Dokážte, že $|RQ| = |RS|$ práve vtedy, keď

$$a^2 : b^2 : c^2 = 1 : 2 : 3.$$

(J. Švrček)

B – S – 3

V obore reálnych čísel riešte rovnicu

$$\left\lfloor \frac{x}{1-x} \right\rfloor = \frac{\lfloor x \rfloor}{1 - \lfloor x \rfloor},$$

kde $\lfloor a \rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré neprevyšuje číslo a.

(J. Šimša)

B – II – 1

Kružnica k_1 s polomerom 1 má vonkajší dotyk s kružnicou k_2 s polomerom 2. Každá z kružníc k_1, k_2 má vnútorný dotyk s kružnicou k_3 s polomerom 3. Vypočítajte polomer kružnice k, ktorá má s kružnicami k_1, k_2 vonkajší dotyk a s kružnicou k_3 vnútorný dotyk.

(P. Novotný)

B – II – 2

Na jednej internetovej stránke prebieha hlasovanie o najlepšieho hokejistu sveta posledného desaťročia. Počet hlasov pre jednotlivých hráčov sa uvádza po zaokrúhlení v celých percentách. Po Jožkovom hlasovaní pre Miroslava Šatana sa jeho zisk 7 % nezmenil. Najmenej koľko ľudí vrátane Jožka hlasovalo? Predpokladáme, že každý účastník ankety hlasoval práve raz, a to pre jediného hráča.

(M. Panák)

B – II – 3

Nech ABC je ostrouhlý trojuholník. Označme K a L päty výšok z vrcholov A a B, M stred strany AB a V priesečník výšok trojuholníka ABC. Dokážte, že os uhla KML prechádza stredom úsečky VC.

(J. Švrček)

B – II – 4

Nájdite všetky trojice reálnych čísel x, y, z, pre ktoré platí

$$\lfloor x \rfloor - y = 2 \cdot \lfloor y \rfloor - z = 3 \cdot \lfloor z \rfloor - x = \frac{2004}{2005},$$

kde $\lfloor a \rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré neprevyšuje číslo a.

(J. Šimša)

Kategória A

A – I – 1

Neprázdnu podmnožinu prirodzených čísel nazveme *malou*, keď má menej prvkov, ako je jej najmenší prvok. Určte počet všetkých tých malých množín M, ktoré sú podmnožinami množiny $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ a majú nasledovnú vlastnosť: ak do M patria dve rôzne čísla x a y, potom do M patrí aj číslo $|x - y|$.

(J. Földes)

A – I – 2

Nech M je ľubovoľný vnútorný bod kratšieho oblúka CD kružnice opísanej štvorcu $ABCD$. Označme P, R priesečníky priamky AM postupne s úsečkami BD, CD a podobne Q, S priesečníky priamky BM s úsečkami AC, DC. Dokážte, že priamky PS a QR sú navzájom kolmé.

(J. Švrček)

A – I – 3

Nech k je ľubovoľné prirodzené číslo. Uvažujme dvojice (a, b) celých čísel, pre ktoré majú kvadratické rovnice

$$x^2 - 2ax + b = 0, \qquad y^2 + 2ay + b = 0$$

reálne korene (nie nutne rôzne), ktoré možno označiť $x_{1,2}$ resp. $y_{1,2}$ v takom poradí, že platí rovnosť $x_1y_1 - x_2y_2 = 4k$.

a) Pre dané k určte najväčšiu možnú hodnotu b zo všetkých takých dvojíc (a, b).
b) Pre $k = 2\,004$ určte počet všetkých takých dvojíc (a, b).
c) Pre dané k vypočítajte súčet čísel b zo všetkých takých dvojíc (a, b), pričom každé číslo b sa pripočíta toľkokrát, v koľkých dvojiciach (a, b) vystupuje.

(E. Kováč)

A – I – 4

Dané aritmetické postupnosti $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ a $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ majú rovnaký prvý člen a nasledovnú vlastnosť: existuje index k $(k > 1)$, pre ktorý platia rovnosti

$$x_k^2 - y_k^2 = 53, \quad x_{k-1}^2 - y_{k-1}^2 = 78, \quad x_{k+1}^2 - y_{k+1}^2 = 27.$$

Nájdite všetky také indexy k.

(V. Bálint)

A – I – 5

V lichobežníku $ABCD$, kde $AB \parallel CD$, platí $|AB| = 2|CD|$. Označme E stred ramena BC. Dokážte, že rovnosť $|AB| = |BC|$ platí práve vtedy, keď štvoruholník $AECD$ je dotyčnicový.

(R. Horenský)

A – I – 6

Nájdite všetky funkcie $f : \langle 0, +\infty) \to \langle 0, +\infty)$, ktoré splňujú zároveň tri nasledovné podmienky:

a) Pre ľubovoľné nezáporné čísla x, y také, že $x + y > 0$, platí rovnosť
$$f\bigl(xf(y)\bigr)f(y) = f\Bigl(\frac{xy}{x+y}\Bigr);$$
b) $f(1) = 0$;
c) $f(x) > 0$ pre ľubovoľné $x > 1$.

(P. Calábek)

A – S – 1

Určte počet všetkých nekonečných aritmetických postupností celých čísel, ktoré majú medzi svojimi prvými desiatimi členmi obe čísla 1 a 2 005.

(V. Bálint, J. Šimša)

A – S – 2

V rovnobežníku $ABCD$ platí $|AB| > |BC|$. Označme K, L, M a N postupne body dotyku kružníc vpísaných trojuholníkom ACD, BCD, ABC a ABD s príslušnou uhlopriečkou AC, resp. BD. Dokážte, že $KLMN$ je obdĺžnik.

(R. Horenský)

A – S – 3

Zistite, pre ktoré prirodzené čísla k má sústava nerovníc
$$k(k-2) \leqq \Bigl(k + \frac{1}{k}\Bigr)x \leqq k^2(k+3)$$
s neznámou x práve $(k+1)^2$ riešení v obore celých čísel.

(J. Šimša)

A – II – 1

Ak je súčin kladných reálnych čísel a, b, c rovný 1, platí nerovnosť
$$\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geqq \frac{3}{4}.$$

Dokážte a zistite, kedy nastáva rovnosť.

(J. Šimša)

A – II – 2

V obore celých čísel riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x(y+z+1) &= y^2+z^2-5, \\ y(z+x+1) &= z^2+x^2-5, \\ z(x+y+1) &= x^2+y^2-5. \end{aligned}$$

(J. Šimša)

A – II – 3

V rovine je daný rovnoramenný trojuholník KLM so základňou KL. Uvažujme ľubovoľné dve kružnice k a ℓ, ktoré majú vonkajší dotyk a ktoré sa dotýkajú priamok KM a LM postupne v bodoch K a L. Určte množinu dotykových bodov T všetkých takých kružníc k a ℓ.

(J. Švrček)

A – II – 4

Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel, ktorých súčet má poslednú číslicu 3, rozdiel je prvočíslo a súčin je druhou mocninou prirodzeného čísla.

(J. Földes)

A – III – 1

Uvažujme ľubovoľné aritmetické postupnosti reálnych čísel $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ a $(y_i)_{i=1}^{\infty}$, ktoré majú rovnaký prvý člen a spĺňajú pre niektoré $k > 1$ rovnosti

$$x_{k-1}y_{k-1} = 42, \quad x_k y_k = 30 \quad \text{a} \quad x_{k+1}y_{k+1} = 16.$$

Nájdite všetky také postupnosti, pre ktoré je index k najväčší možný.

(J. Šimša)

A – III – 2

Zistite, pre ktoré m existuje práve 2^{15} podmnožín X množiny $\{1, 2, 3, \dots, 47\}$ s vlastnosťou: Číslo m je najmenší prvok množiny X a pre každé $x \in \mathsf{X}$ platí buď $x + m \in \mathsf{X}$, alebo $x + m > 47$.

(R. Kučera)

A – III – 3

V lichobežníku $ABCD$ ($AB \parallel CD$) označme E stred ramena BC. Ak sú oba štvoruholníky $ABED$ a $AECD$ dotyčnicové, spĺňajú dĺžky strán lichobežníka $ABCD$ označené zvyčajným spôsobom rovnosti

$$a + c = \frac{b}{3} + d \qquad \text{a} \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{3}{b}.$$

Dokážte.

(R. Horenský)

A – III – 4

V rovine je daný ostrouhlý trojuholník AKL. Uvažujme ľubovoľný pravouholník $ABCD$, ktorý je trojuholníku AKL opísaný tak, že bod K leží na strane BC a bod L leží na strane CD. Určte množinu priesečníkov S uhlopriečok AC, BD všetkých takých pravouholníkov $ABCD$.

(J. Šimša)

A – III – 5

Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla p, q, r, s za podmienok $q \neq -1$ a $s \neq -1$ platí: Kvadratické rovnice

$$x^2 + px + q = 0, \qquad x^2 + rx + s = 0$$

majú v obore reálnych čísel spoločný koreň a ich ďalšie korene sú navzájom prevrátené čísla práve vtedy, keď koeficienty p, q, r, s spĺňajú rovnosti

$$pr = (q+1)(s+1) \quad \text{a} \quad p(q+1)s = r(s+1)q.$$

(Dvojnásobný koreň kvadratickej rovnice počítame dvakrát.)

(J. Šimša)

A – III – 6

Rozhodnite, či pre každé poradie čísel $1, 2, 3, \dots, 15$ možno tieto čísla zapísať najviac štyrmi rôznymi farbami tak, aby všetky čísla rovnakej farby tvorili v danom poradí monotónnu (t. j. rastúcu alebo klesajúcu) postupnosť. (Jednočlenná postupnosť je monotónna.)

(J. Šimša)

Riešenia súťažných úloh

Kategória C

C – I – 1

Keď vyjadríme z rovnosti v predpoklade napr. $d = b + c - a$ a dosadíme túto hodnotu do ľavej strany dokazovanej nerovnosti, postupne dostaneme

$$\begin{aligned}
&(a-b)(a-b) + (a-c)(a-c) + (b+c-2a)(b-c) = \\
&= a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 + bc - 2ab - bc - c^2 + 2ac = \\
&= 2a^2 - 4ab + 2b^2 = 2(a^2 - 2ab + b^2) = 2(a-b)^2.
\end{aligned}$$

Tento výraz je nezáporný pre všetky reálne čísla a, b, čím je daná nerovnosť dokázaná.

Iné riešenie. Najskôr ponecháme podmienku $a + d = b + c$ bokom a ukážeme, že výraz na ľavej strane dokazovanej nerovnosti možno upraviť na súčin. Prvá časť výrazu, súčin $(a-b)(c-d)$, je rovný nule v prípadoch, keď $a = b$ alebo $c = d$. Druhá časť výrazu, súčet $(a-c)(b-d) + (d-a)(b-c)$, má tiež v oboch prípadoch $a = b$, $c = d$ nulovú hodnotu. Takže výraz musí byť deliteľný súčinom $(a-b)(c-d)$. Presvedčíme sa o tom roznásobením a následným postupným vynímaním:

$$\begin{aligned}
(a-c)(b-d) + (d-a)(b-c) &= (ab - bc - ad + cd) + (bd - ab - cd + ac) = \\
&= (-bc + bd) + (-ad + ac) = -b(c-d) + a(c-d) = \\
&= (a-b)(c-d).
\end{aligned}$$

Dokazovaná nerovnosť má preto tvar

$$2(a-b)(c-d) \geqq 0,$$

do ktorého teraz dosadíme $c - d = a - b$. Dostaneme tak nerovnosť

$$2(a-b)^2 \geqq 0,$$

ktorá platí pre všetky reálne čísla a, b. Tým je daná nerovnosť dokázaná.

C – I – 2

Ak je n párne a v danej množine sú párne čísla 2 a $n-2$, pričom $2 < n-2$, je ich súčet $2 + (n-2) = n$ deliteľný číslom n. Z podmienky $2 < n-2$ tak dostávame, že všetky párne čísla $n > 4$ vyhovujú podmienke úlohy.

Z množín $\{1\}$ (pre $n = 2$) a $\{1, 2, 3\}$ (pre $n = 4$) zrejme nemožno požadovaný výber uskutočniť.

Ak je n nepárne, môžeme pre $n > 7$ z danej množiny vybrať tri párne čísla 4, $n-3$, $n-1$, pričom $4 < n-3 < n-1$, so súčtom $4+(n-3)+(n-1) = 2n$, ktorý je deliteľný číslom n.

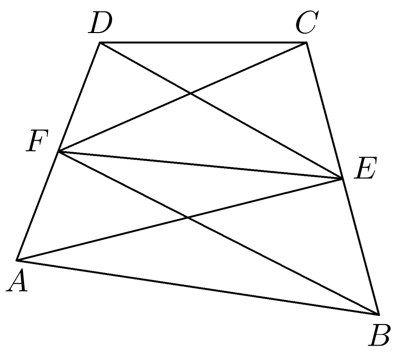
Z množín $\{1,2\}$ (pre $n = 3$), $\{1,2,3,4\}$ (pre $n = 5$) a $\{1,2,3,4,5,6\}$ (pre $n = 7$) zrejme nemožno vybrať ani dve, ani tri rôzne párne čísla s požadovanou vlastnosťou.

Podmienke úlohy vyhovuje číslo $n = 6$ a všetky prirodzené čísla $n \geqq 8$.

C – I – 3

Priečka EF daného štvoruholníka $ABCD$ je v každom z trojuholníkov AED aj BFC ťažnicou (obr. 1), čo znamená, že pre ich obsahy platí

$$\begin{aligned} S_{AED} &= 2S_{FED} = 2S_{FEA}, \\ S_{BFC} &= 2S_{FEC} = 2S_{FEB}. \end{aligned} \tag{1}$$



Obr. 1

Oba trojuholníky FED, FEC majú spoločnú stranu FE a ich obsahy sú rovnaké práve vtedy, keď $CD \parallel FE$. Podobne aj trojuholníky FEA, FEB majú spoločnú stranu FE a ich obsahy sú rovnaké práve vtedy, keď $AB \parallel FE$. Ak teda majú trojuholníky AED a BFC rovnaký obsah, tak $CD \parallel FE$ a $AB \parallel FE$, čiže $AB \parallel CD$.

Ak naopak $AB \parallel CD$, je stredná priečka EF lichobežníka $ABCD$ rovnobežná s oboma základňami AB a CD, takže podľa prechádzajúcej úvahy $S_{FED} = S_{FEC}$ a podľa (1) tiež $S_{AED} = S_{BFC}$. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

C – I – 4

Aby bolo číslo $m = \overline{CDCD}$ deliteľné deviatimi, musí byť súčet $2(C+D)$ jeho číslic deliteľný deviatimi, teda aj súčet $C+D$ musí byť deliteľný deviatimi, čiže číslo $\overline{CD}$ musí byť deliteľné deviatimi.

Ak má číslo k číslice A, B, A, B, má číslo ℓ číslice $A-1$, $B+2$, $A-1$, $B+2$. Keďže číslo $B+(B+2) = 2B+2$ je párne, je číslica D čísla $m = k+\ell$ párna. Preto prichádzajú vzhľadom na deliteľnosť deviatimi do úvahy len tieto čísla m: 1 818, 3 636, 5 454, 7 272, 9 090. Pretože číslica C je vo všetkých prípadoch nepárna a súčet číslic

$A + (A - 1) = 2A - 1$ je tiež nepárny, nemôže byť $B + (B + 2) > 10$, teda $B + (B + + 2) = D$ a $A + (A - 1) = C$. Odtiaľ už ľahko určíme zodpovedajúce číslice C, D a čísla k, ℓ zapíšeme do nasledujúcej tabuľky:

m	1 818	3 636	5 454	7 272	9 090
k	1 313	2 222	3 131	4 040	neexistuje
ℓ	0 505	1 414	2 323	3 232	neexistuje

Číslo 0505 nie je štvormiestne, preto sú riešením úlohy iba čísla $k \in \{2\,222, 3\,131, 4\,040\}$.

C – I – 5

Pre dvojmiestne čísla a, b, c je súčin abc číslo štvormiestne, alebo päťmiestne, alebo šesťmiestne. Ak sú teda všetky číslice čísla abc rovné jednej číslici k, platí jedna z rovností $abc = k \cdot 1\,111$, $abc = k \cdot 11\,111$ alebo $abc = k \cdot 111\,111$, $k \in \{1, 2, \dots, 9\}$.

Čísla $1\,111 = 11 \cdot 101$ a $11 \cdot 111 = 41 \cdot 271$ však majú vo svojom rozklade trojmiestne prvočísla, takže nemôžu byť súčinom dvojmiestnych čísel. Ostáva preto jediná možnosť:

$$abc = k \cdot 111\,111 = k \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37.$$

Pozrime sa, ako môžu byť prvočísla 3, 7, 11, 13, 37 rozdelené medzi jednotlivé činitele a, b, c. Pretože súčiny $37 \cdot 3$ a $3 \cdot 7 \cdot 11$ sú väčšie ako 100, musí byť prvočíslo 37 samo ako jeden činiteľ a zvyšné štyri prvočísla 3, 7, 11, 13 musia byť rozdelené do dvojíc. Keďže aj súčin $11 \cdot 13$ je väčší ako 100, prichádzajú do úvahy iba rozdelenia na činitele $3 \cdot 11$, $7 \cdot 13$ a 37, alebo na činitele $3 \cdot 13$, $7 \cdot 11$ a 37. K týmto činiteľom ešte pripojíme možné činitele z rozkladu číslice k a dostaneme riešenia dvoch typov:

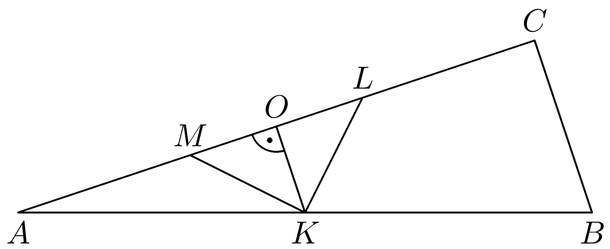
$$\begin{aligned} a &= 33k_1,\ b = 91,\ c = 37k_2, \quad \text{pričom } k_1 \in \{1, 2, 3\},\ k_2 \in \{1, 2\},\\ a &= 39k_1,\ b = 77,\ c = 37k_2, \quad \text{pričom } k_1 \in \{1, 2\},\ k_2 \in \{1, 2\}, \end{aligned}$$

Hľadaný počet trojíc čísel a, b, c je teda $3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 10$.

C – I – 6

Body L a M na strane AC zvolíme tak, aby $|AM| = |ML| = |LC|$. Ťažnica KO trojuholníka KLM je strednou priečkou trojuholníka ABC, platí teda $|KO| = |BC|/2$, $|AC| = 6|MO|$ a $|AB| = 2|AK|$. Rozoberieme tri možnosti.

(a) Nech $|KL| = |KM|$ (obr. 2). Potom $|\sphericalangle MKL| = |\sphericalangle MOK| = 90°$ a $|MO| = |KO|$.



Obr. 2

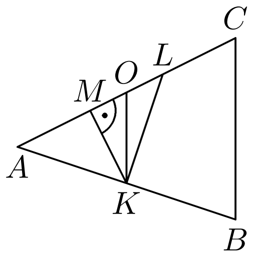
Z Pytagorovej vety pre trojuholník AKO vyplýva

$$|AK| = \sqrt{(3|MO|)^2 + |KO|^2} = \sqrt{10|KO|^2} = \sqrt{10}|KO| = \tfrac{1}{2}\sqrt{10}|BC|,$$

takže

$$|AB| = 2|AK| = \sqrt{10}|BC| = 2\sqrt{10}\,\text{cm},$$
$$|AC| = 6|MO| = 6|KO| = 3|BC| = 6\,\text{cm}.$$

(b) Nech $|ML| = |MK|$ (obr. 3). Potom $|\sphericalangle KML| = 90°$ a $|AM| = |ML| = |MK| =$



Obr. 3

$= 2|MO|$. Z Pytagorovej vety pre trojuholník KMO vyplýva

$$|KO| = \sqrt{|MO|^2 + (2|MO|)^2} = \sqrt{5}|MO|,$$

takže

$$|AC| = 6|MO| = \frac{3}{\sqrt{5}}|BC| = \frac{6\sqrt{5}}{5}\,\text{cm}.$$

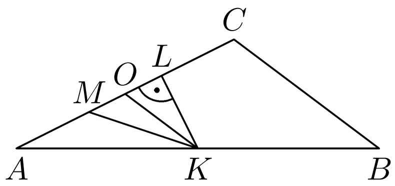
Z Pytagorovej vety pre trojuholník AKM vyplýva

$$|AK| = \sqrt{|AM|^2 + |MK|^2} = \sqrt{2}|MK| = 2\sqrt{2}|MO| = \frac{2\sqrt{10}}{5}|KO| = \frac{\sqrt{10}}{5}|BC|,$$

takže

$$|AB| = 2|AK| = \frac{2\sqrt{10}}{5}|BC| = \frac{4\sqrt{10}}{5}\text{ cm.}$$

(c) Nech $|ML| = |KL|$ (obr. 4). Potom $|\sphericalangle MLK| = 90^\circ$, takže $|KL| = |ML| =$



Obr. 4

$= 2|LO| = 2|MO|$ a $|AL| = |AM| + |ML| = 4|MO|$. Z Pytagorovej vety pre trojuholník KLO tak vyplýva

$$|KO| = \sqrt{|LO|^2 + (2|LO|)^2} = \sqrt{5}|LO|,$$

takže

$$|AC| = 6|MO| = 6|LO| = \frac{3}{\sqrt{5}}|BC| = \frac{6\sqrt{5}}{5}\text{ cm.}$$

Z Pytagorovej vety pre trojuholník AKL vyplýva

$$|AK| = \sqrt{|AL|^2 + |LK|^2} = \sqrt{(4|LO|)^2 + (2|LO|)^2} =$$
$$= 2\sqrt{5}|LO| = 2|KO| = |BC| = 2\text{ cm},$$

takže

$$|AB| = 2|AK| = 2|BC| = 4\text{ cm.}$$

C – S – 1

Odčítaním prvej rovnice od druhej dostaneme

$$(x-y)(z-1) = 1,$$

odkiaľ vyplýva, že buď platí $x - y = z - 1 = 1$, alebo $x - y = z - 1 = -1$.

V prvom prípade máme $z = 2$, $y = x - 1$ a po dosadení do ktorejkoľvek z pôvodných rovníc určíme $x = 669$, takže $y = 668$.

V druhom prípade máme $z = 0$, $y = x + 1$, takže $x = 2\,005$ a $y = 2\,006$.

Riešením sú dve trojice $x = 669$, $y = 668$, $z = 2$ a $x = 2\,005$, $y = 2\,006$, $z = 0$.

Iné riešenie. Z prvej rovnice vyjadríme $x = 2\,005 - yz$ a tento vzťah dosadíme do druhej rovnice, ktorú upravíme na

$$y + 2\,005z - yz^2 = 2\,006,$$
$$y(1 - z^2) = 2\,005(1 - z) + 1.$$

Z danej sústavy je zrejmé, že $z \neq 1$, takže môžeme písať

$$y(1+z) = 2\,005 + \frac{1}{1-z}.$$

Ľavá strana poslednej rovnosti je celé číslo, preto musí byť celé číslo aj pravá strana. Tejto podmienke vyhovuje jedine $z = 0$ a $z = 2$.

Rovnako ako v predchádzajúcom riešení dosadením do ktorejkoľvek rovnice pôvodnej sústavy dopočítame $x = 669$, $y = 668$ pre $z = 2$ a $x = 2\,005$, $y = 2\,006$ pre $z = 0$.

C – S – 2

Pre $n = 1$ a $n = 2$ má daná množina menej ako štyri prvky.

Keďže pre každé prirodzené číslo n platí

$$n(2n+2) = 2n(n+1),$$

mohli by sme zvoliť $a = n$, $b = 2n+2$, $c = 2n$, $d = n+1$. Tieto čísla sú navzájom rôzne pre každé $n > 1$, lebo pre také n platí $n < n+1 < 2n < 2n+2$. Ešte zostáva overiť, pre ktoré čísla n platí $2n+2 \leqq n^2$, aby takto zvolené štyri čísla a, b, c, d boli z danej množiny. Je vidieť, že táto nerovnosť platí pre každé $n > 2$, lebo je ekvivalentná s nerovnosťou $3 \leqq (n-1)^2$.

Môžeme teda zhrnúť, že požadované čísla a, b, c, d možno z danej množiny vybrať pre každé prirodzené číslo $n > 2$.

Iné riešenie. Pre $n = 1$ a $n = 2$ má daná množina menej ako štyri prvky.

Keďže pre každé prirodzené číslo n platí

$$n \cdot 6n = 2n \cdot 3n,$$

mohli by sme zvoliť $a = n$, $b = 6n$, $c = 2n$, $d = 3n$. Tieto čísla sú navzájom rôzne pre každé n, lebo $n < 2n < 3n < 6n$. Ešte zostáva overiť, pre ktoré čísla n platí $6n \leqq n^2$, aby zvolené štyri čísla a, b, c, d boli z danej množiny. Je vidieť, že táto nerovnosť platí pre každé $n > 5$.

Pre $n = 3$ vyberieme $a = 3$, $b = 8$, $c = 6$, $d = 4$, pre $n = 4$ vyberieme $a = 4$, $b = 10$, $c = 8$, $d = 5$ alebo $a = 5$, $b = 12$, $c = 6$, $d = 10$, pre $n = 5$ vyberieme $a = 5$, $b = 12$, $c = 10$, $d = 6$.

Môžeme teda zhrnúť, že požadované čísla a, b, c, d možno z danej množiny vybrať pre každé prirodzené číslo $n > 2$.

Poznámka. Štvoríc navzájom rôznych čísel a, b, c, d, ktoré spĺňajú dané podmienky, je veľa. Vždy je ale treba pri takej štvorici určiť, od ktorého najmenšieho čísla n dané podmienky platia a pre zostávajúce prirodzené čísla n je treba určiť konkrétne hodnoty čísel a, b, c, d.

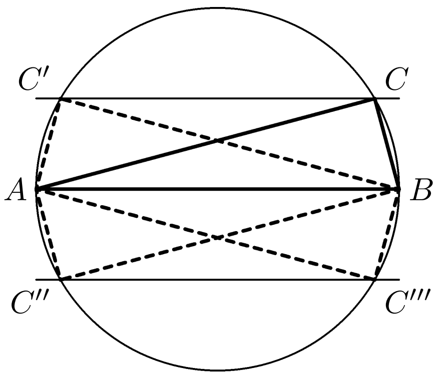
Tak je možné voliť napríklad $a = n$, $b = 3n+3$, $c = 3n$, $d = n+1$ pre $n > 3$, alebo $a = n+1$, $b = 2n+4$, $c = 2(n+1)$, $d = n+2$ pre $n > 3$ a podobne.

C – S – 3

Podmienka, že obsah trojuholníka ABC sa má rovnať $1/8$ obsahu S štvorca so stranou AB znamená, že výška trojuholníka ABC na stranu AB má dĺžku $|AB|/4$, takže bod C musí ležať na jednej z dvoch rovnobežiek s priamkou AB vzdialených $|AB|/4$ od priamky AB.

Podmienka, že súčet obsahov štvorcov so stranami AC a BC sa má rovnať obsahu štvorca so stranou AB znamená podľa Pytagorovej vety pre trojuholník ABC, že tento trojuholník je pravouhlý s preponou AB, takže bod C musí ležať na Tálesovej kružnici so stredom v strede prepony AB a polomerom $|AB|/2$.

Konštrukcia bodu C je teda jednoduchá. Obe spomenuté rovnobežky zrejme pretnú kružnicu nad priemerom AB v štyroch bodoch (obr. 5). Vzhľadom na to, že sa jedná o polohovú úlohu, má úloha štyri riešenia.



Obr. 5

C – II – 1

Z danej rovnosti pre $z \neq 0$ postupnými úpravami dostávame

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{z} &= \overline{z,yx}, \\ \frac{x+y}{z} &= z + \frac{y}{10} + \frac{x}{100}, \\ 100(x+y) &= (100z + 10y + x) \cdot z. \end{aligned}$$

Keďže x, y, z sú číslice, platia nerovnosti $100 \cdot (9+9) \geqq 100(x+y)$ a $(100z + 10y + x) \cdot z \geqq 100z \cdot z$; odtiaľ $18 \geqq z^2$. To znamená, že $z \in \{1, 2, 3, 4\}$, lebo hodnota $z = 0$ nie je prípustná.

Pre $z = 1$ má daná rovnosť tvar

$$\begin{aligned} 100(x+y) &= 100 + 10y + x, \qquad \text{teda} \\ 99x + 90y &= 100. \end{aligned}$$

Úvahou o deliteľnosti desiatimi zistíme, že musí byť $x = 0$. Potom ale neexistuje žiadne celé y spĺňajúce rovnosť $90y = 100$. Preto nemôže byť $z = 1$.

Pre $z = 2$ má daná rovnosť tvar

$$\begin{aligned} 100(x+y) &= (200 + 10y + x) \cdot 2, \qquad \text{teda} \\ 49x + 40y &= 200. \end{aligned}$$

Úvahou o deliteľnosti desiatimi zistíme, že musí byť $x = 0$. Potom $y = 5$, takže v tomto prípade spĺňajú danú rovnosť číslice $x = 0$, $y = 5$, $z = 2$.

Pre $z = 3$ má daná rovnosť tvar

$$\begin{aligned} 100(x+y) &= (300 + 10y + x) \cdot 3, \qquad \text{teda} \\ 97x + 70y &= 900. \end{aligned}$$

Úvahou o deliteľnosti desiatimi zistíme, že musí byť $x = 0$. Potom ale neexistuje žiadne celé y spĺňajúce rovnosť $70y = 900$. Preto nemôže byť $z = 3$.

Pre $z = 4$ má daná rovnosť tvar

$$\begin{aligned} 100(x+y) &= (400 + 10y + x) \cdot 4, \qquad \text{teda} \\ 24x + 15y &= 400. \end{aligned}$$

Tu máme $400 = 24x + 15y \leqq 24 \cdot 9 + 15 \cdot 9 = 351$, teda nemôže byť $z = 4$.

Daná rovnosť je splnená jedine pre $x = 0$, $y = 5$, $z = 2$. Naozaj platí $(0+5)/2 = 2{,}50$.

C – II – 2

K ľubovoľne zvolenému prirodzenému číslu $n > 2$ hľadáme príklad takých rôznych prirodzených čísel p, q závislých na čísle n, aby platilo

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right).$$

Po úpravách má táto rovnosť tvar

$$2pq = n(p+q), \qquad \text{čiže} \quad p(2q - n) = nq.$$

Keďže stačí nájsť jedinú dvojicu čísel p, q, je možné ju hľadať skúšaním niekoľkých jednoduchých možností v poslednej rovnici.

Keď položíme $2q - n = 1$, bude $q = (n+1)/2$ a $p = n(n+1)/2$. Tieto čísla sú prirodzené a navzájom rôzne pre ľubovoľné nepárne číslo $n > 2$.

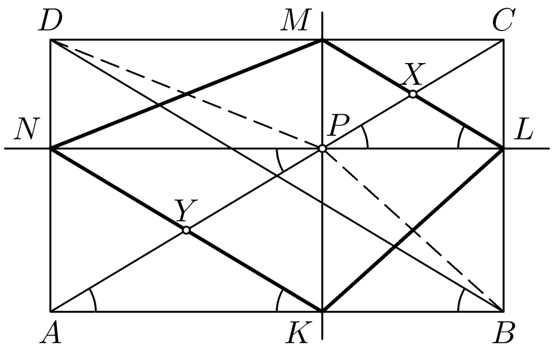
Ďalej skúsme položiť $2q - n = 2$. Získame tak $q = (n+2)/2$ a $p = n(n+2)/4$. Tieto čísla sú prirodzené a navzájom rôzne pre ľubovoľné párne číslo $n > 2$.

Pre nepárne číslo $n > 2$ teda môžeme položiť $q = (n+1)/2$ a $p = n(n+1)/2$ a pre párne číslo $n > 2$ zasa $q = (n+2)/2$ a $p = n(n+2)/4$.

C – II – 3

a) AC a BD sú uhlopriečky obdĺžnika $ABCD$, preto sú uhly ABD a BAC zhodné. AP a KN sú uhlopriečky pravouholníka $AKPN$, preto sú uhly AKN, KAP a APN

zhodné (obr. 6). PC a LM sú uhlopriečky pravouholníka $PLCM$, preto sú uhly PLM a LPC zhodné. Uhly APN a LPC sú zhodné (vrcholové uhly), preto sú zhodné aj uhly AKN, PLM a ABD. Priamky LM a KN sú teda rovnobežné s uhlopriečkou BD daného obdĺžnika, a preto sú rovnobežné aj navzájom.



Obr. 6

b) Ak X a Y sú priesečníky priamok LM a KN s uhlopriečkou AC, platí $|XY| = |XP| + |PY| = |CP|/2 + |PA|/2 = (|CP| + |PA|)/2 = |CA|/2$. Úsečka XY má teda dĺžku nezávislú na polohe bodu P. Podľa a) zviera priamka XY s priamkami KN a LM rovnaký uhol ako s priamkou BD, takže tento uhol tiež nezávisí na polohe bodu P. Preto je aj vzdialenosť priamok LM a KN nezávislá na polohe bodu P (a je jednoznačne určená veľkosťou $|XY|$ a uhlom MXP, pričom $|\sphericalangle MXP| = 2|\sphericalangle ABD|$).

c) KL a BP sú uhlopriečky pravouholníka $KBLP$, sú preto zhodné. Podobne sú MN a PD zhodné uhlopriečky pravouholníka $NPMD$, LM a PC zhodné uhlopriečky pravouholníka $PLCM$ a NK a AP zhodné uhlopriečky pravouholníka $AKPN$. Pre obvod štvoruholníka $KLMN$ tak platí

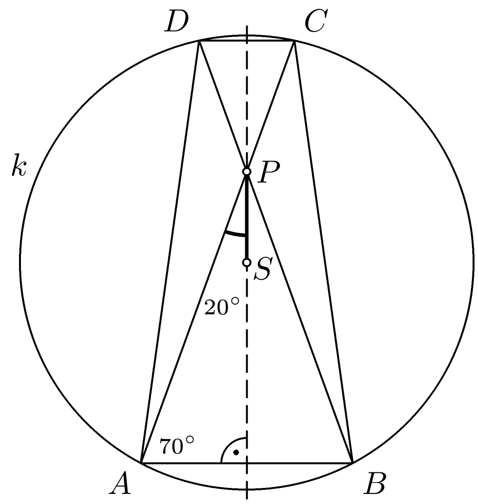
$$\begin{aligned} o &= |KL| + |LM| + |MN| + |NK| = (|KL| + |MN|) + (|LM| + |NK|) = \\ &= (|BP| + |PD|) + (|PC| + |AP|) \geqq |BD| + |AC| = 2|AC|, \end{aligned}$$

pričom sme využili trojuholníkovú nerovnosť $|BP| + |PD| \geqq |BD|$ pre trojicu bodov B, D, P.

C – II – 4

Všimnime si lichobežník $ABCD$, ktorému možno opísať kružnicu. Priamka prechádzajúca jej stredom S kolmo na obe základne AB a CD je osou súmernosti oboch tetív AB a CD, teda aj osou súmernosti celého lichobežníka $ABCD$. Jeho ramená AD a BC sú preto zhodné a priesečník P uhlopriečok AC a BD leží tiež na osi úsečiek AB a CD.

Keďže podľa zadania $|\sphericalangle BAC| = 70°$, platí $|\sphericalangle APS| = 20°$ (obr. 7).



Obr. 7

Konštrukcia. Zostrojíme úsečku SP, pričom $|SP| = d = 2\,\mathrm{cm}$, a kružnicu $k(S; 5\,\mathrm{cm})$. Bodom P vedieme polpriamky PX a PY tak, aby $|\sphericalangle SPX| = |\sphericalangle SPY| = 20°$. Priesečníky polpriamok PX a PY s kružnicou k sú body A a B. Potom priesečníky vnútier polpriamok AP a BP s kružnicou k sú body C a D.

Úloha má jediné riešenie.

Kategória B

B – I – 1

Nech x_1, x_2 sú korene prvej rovnice. Potom

$$x_1 + x_2 = -a, \qquad x_1 x_2 = b,$$

a pretože druhá rovnica má korene $1/x_1$ a $1/x_2$, platí

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -(2a+1), \qquad \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = 2b + 1.$$

Platí teda $1/b = 2b + 1$, z čoho dostaneme kvadratickú rovnicu $2b^2 + b - 1 = 0$, ktorá má korene $b = -1$ a $b = 1/2$.

Pre $b = -1$ máme

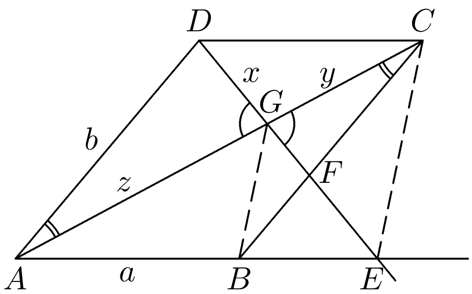
$$-(2a+1) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-a}{-1},$$

čo je pre neznámu a lineárna rovnica s riešením $a = -1/3$.

Podobne pre $b = 1/2$ dostávame $-(2a+1) = -2a$, táto rovnica však nemá riešenie. Skúškou (treba overiť, že korene sú reálne) sa presvedčíme, že dvojica $a = -1/3$, $b = -1$ je (jediným) riešením úlohy.

B – I – 2

Z obr. 8 vidno, že trojuholníky AGD a CGF sú podobné podľa vety uu. Príslušný pomer



Obr. 8

podobnosti k je rovný hľadanému pomeru $|AG| : |GC|$. Ak teda označíme $b = |AD|$, $x = |DG|$ a $y = |CG|$, platí $|GF| = x/k$ a $|CF| = b/k$, odkiaľ

$$|FB| = |BC| - |FB| = b - \frac{b}{k} = (k-1)\frac{b}{k}$$

a

$$|DF| = |DG| + |GF| = x + \frac{x}{k} = (k+1)\frac{x}{k}.$$

Z podobnosti trojuholníkov BEF a CDF dostávame

$$|EF| = \frac{|DF| \cdot |BF|}{|CF|} = \frac{k^2-1}{k} \cdot x.$$

Z rovnosti obsahov trojuholníkov BEF a CGF vyplýva

$$|FB| \cdot |FE| = |FC| \cdot |FG|,$$

odkiaľ po dosadení vyjde

$$\frac{k-1}{k} \cdot b \cdot \frac{k^2-1}{k} \cdot x = \frac{b}{k} \cdot \frac{x}{k}.$$

Teda $k^3 - k^2 - k + 1 = 1$, a pretože $k \neq 0$, dostávame pre hľadané k kvadratickú rovnicu $k^2 - k - 1 = 0$. Úlohe vyhovuje jej kladný koreň $k = (1+\sqrt{5})/2$.

Iné riešenie. Označme $|AG| = z$, $|GC| = y$. Pretože trojuholníky BEF a CGF majú rovnaký obsah, majú rovnaký obsah aj trojuholníky GBE a GBC. Preto platí $EC \parallel BG$. Z podobností trojuholníkov

$$ABG \sim AEC, \quad DFC \sim EFB, \quad CFE \sim BFG \quad \text{a} \quad AEC \sim ABG$$

postupne vyplýva

$$\frac{z}{y} = \frac{|AG|}{|GC|} = \frac{|AB|}{|BE|} = \frac{|DC|}{|BE|} = \frac{|FC|}{|BF|} = \frac{|CE|}{|BG|} = \frac{|AC|}{|AG|} = \frac{z+y}{z}.$$

Z výslednej rovnosti $z/y = 1 + y/z$ dostávame

$$\left(\frac{z}{y}\right)^2 - \frac{z}{y} - 1 = 0,$$

a pretože $z/y > 0$, platí

$$\frac{z}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

B – I – 3

V každom kroku sa počet hromádok zmenší o dva. Aby vznikla jedna hromádka, musí byť na začiatku nepárny počet hromádok, teda $k = 2m + 1$. Na zmenšenie počtu hromádok o $2m$ potrebujeme m krokov. Pri každom pribudne jeden kameň, a preto je výsledný počet kameňov

$$p = 1 + 2 + 3 + \ldots + (2m+1) + m = \frac{(2m+1)(2m+2)}{2} + m = 2m^2 + 4m + 1.$$

Číslo m má jeden z tvarov $m = 3n$, $m = 3n+1$, $m = 3n+2$. V prvom prípade $p = 18n^2 + 12n + 1 = 3(6n^2 + 2n) + 1$, v druhom $18n^2 + 24n + 7 = 3(6n^2 + 8n + 2) + 1$ a v treťom $p = 18n^2 + 36n + 17 = 3(6n^2 + 12n + 5) + 2$. Žiadne z týchto čísel nie je deliteľné tromi.

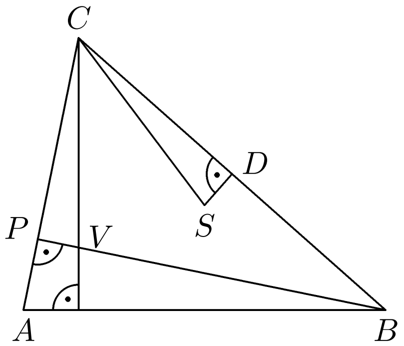
Poznámka. Stačí overiť, že p nie je deliteľné tromi pre $m = 0$, $m = 1$ a $m = 2$ [návodná úloha 1].

B – I – 4

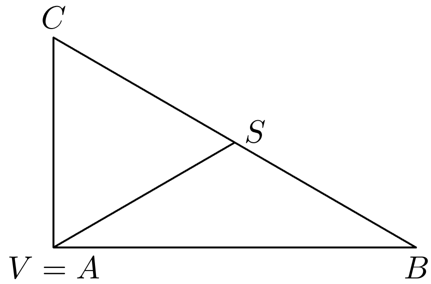
Nech napríklad $|AC| < |BC|$. Predpokladajme najskôr, že trojuholník ABC je ostrouhlý. Označme D stred strany BC a P pätu výšky z vrcholu B na stranu AC (obr. 9). Platí $|CP| = |BC| \cdot \cos 60^\circ = |BC|/2 = |CD|$, $|\sphericalangle CPV| = |\sphericalangle CDS| = 90^\circ$, $|\sphericalangle CVP| = |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CSD|$ (obvodový uhol a polovica stredového). Zo zhodnosti trojuholníkov CPV a CDS vyplýva $|CV| = |CS|$, $|\sphericalangle PCV| = |\sphericalangle DCS|$. Trojuholník VSC je teda rovnoramenný a os uhla ACB je tak aj osou uhla VCS a súčasne osou strany VS.

Ak je trojuholník ABC pravouhlý (obr. 10), je trojuholník VSC rovnostranný a os uhla VCS je aj osou strany VS.

Ak je trojuholník ABC tupouhlý, dokážeme tvrdenie úlohy rovnako ako v prípade ostrouhlého trojuholníka s tým rozdielom, že bude platiť $|\sphericalangle CVP| = |\sphericalangle CSD| = 180^\circ - |\sphericalangle CAB|$.



Obr. 9



Obr. 10

B – I – 5

Každé reálne číslo x môžeme zapísať v tvare $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, kde $\lfloor x \rfloor$ je *celá časť* a $\{x\}$ tzv. *zlomková časť* čísla x. Zrejme platí $0 \leqq \{x\} < 1$, pričom $\{x\} = 0$ práve vtedy, keď

x je celé. Odtiaľ vyplýva, že $\lfloor x \rfloor \leqq x < \lfloor x \rfloor + 1$, pričom rovnosť $\lfloor x \rfloor = x$ platí práve vtedy, keď x je celé. Tieto nerovnosti často používame pri riešení úloh s celou časťou. Keď označíme $\lfloor x \rfloor = k$, dostaneme z danej rovnice po odstránení zlomku a roznásobení

$$7kx - 5x = 5kx + 20k - 7x - 28$$

a odtiaľ

$$x = \frac{10k - 14}{k + 1}. \tag{1}$$

Pretože $k = \lfloor x \rfloor$, musí platiť

$$k \leqq \frac{10k - 14}{k + 1} < k + 1.$$

Každou z nerovníc vyriešime samostatne:

$$0 \geqq \frac{k(k+1) - (10k - 14)}{k + 1} = \frac{(k-7)(k-2)}{k+1}, \qquad k \in (-\infty, -1) \cup \langle 2, 7 \rangle;$$
$$0 < \frac{(k+1)^2 - (10k - 14)}{k + 1} = \frac{(k-3)(k-5)}{k+1}, \qquad k \in (-1, 3) \cup (5, \infty).$$

Pretože k je celé, máme $k \in \{2, 6, 7\}$. Rovnica má teda tri riešenia, ktoré dostaneme dosadením do vzťahu (1): $x_1 = 2$, $x_2 = 46/7$, $x_3 = 7$.

Poznámky. Niektoré ďalšie vlastnosti celej časti: Ak k je celé, tak $\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$.

Ak $\{x\} + \{y\} < 1$, platí $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$; ak $\{x\} + \{y\} \geqq 1$, platí $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Nech k je prirodzené číslo, $k > 1$. Ku každému reálnemu číslu x existuje práve jedno $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ také, že $\{x\} \in \langle (i-1)/k, i/k)$. Potom $k\lfloor x \rfloor + i - 1 \leqq kx < k\lfloor x \rfloor + i$, a preto $\lfloor kx \rfloor = k\lfloor x \rfloor + i - 1$.

B – I – 6

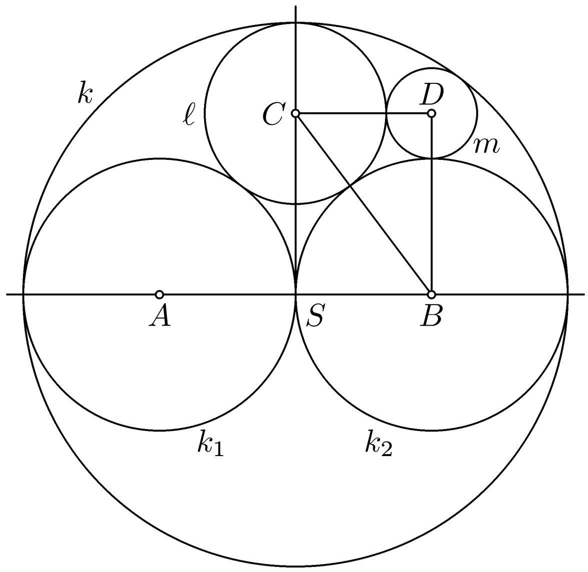
Označme S, A, B, C, D stredy kružníc k, k_1, k_2, ℓ, m a x, y polomery kružníc ℓ a m. Bod C leží na priamke, ktorá prechádza bodom S a je kolmá na AB (obr. 11). Z pravouhlého trojuholníka BCS máme podľa Pytagorovej vety

$$\left(\frac{r}{2} + x\right)^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + (r - x)^2$$

a odtiaľ $x = r/3$. Označme P, Q päty kolmíc z bodu D na priamky AB a SC a $u = |SP|$, $v = |SQ|$. Ak $u \neq r/2$, tak BPD je pravouhlý trojuholník a podľa Pytagorovej vety

$$\left(\frac{r}{2} + y\right)^2 = v^2 + \left(u - \frac{r}{2}\right)^2. \tag{1}$$

Táto rovnosť platí aj v prípade $u = r/2$.



Obr. 11

Podobne z pravouhlého trojuholníka QCD (keď $Q \neq C$) alebo porovnaním protiľahlých strán obdĺžnika (keď $Q = C$) dostaneme

$$\left(\frac{r}{3} + y\right)^2 = u^2 + \left(v - \frac{2r}{3}\right)^2. \tag{2}$$

Navyše z pravouhlého trojuholníka SPD máme

$$(r - y)^2 = u^2 + v^2. \tag{3}$$

Odčítaním rovností (3) a (2) dostaneme $4r^2/3 - 8ry/3 = 4vr/3$, teda $v = r - 2y$. Podobne odčítaním rovností (3) a (1) vyjde $r^2 - 3ry = ur$ a odtiaľ $u = r - 3y$. Dosadením do (3) a úpravou postupne dostaneme

$$\begin{aligned}(r - y)^2 &= (r - 3y)^2 + (r - 2y)^2,\\ r^2 - 8ry + 12y^2 &= 0,\\ (r - 6y)(r - 2y) &= 0.\end{aligned}$$

Odtiaľ vyplýva, že $y = r/2$ alebo $y = r/6$. Polomer $r/2$ má kružnica k_1, polomer $r/6$ kružnica m znázornená na obr. 11. Každá z týchto dvoch kružníc sa dotýka kružníc k, k_2 a ℓ požadovaným spôsobom.

B – S – 1

Ak v každom kroku zvolíme kôpku s najväčším počtom kameňov, budeme postupne odoberať kôpky s 54, 53, 52, … kameňmi a po 53. kroku zostane na stole jediná kôpka s jedným kameňom.

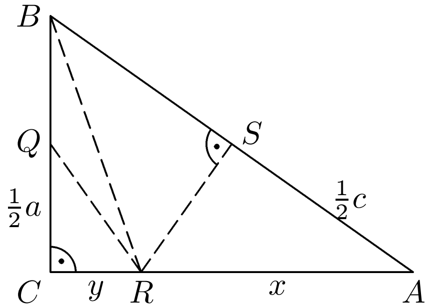
Dokážeme, že pri ľubovoľnom postupe zostane v poslednej kôpke jediný kameň. Ukážeme totiž, že po každom kroku, po ktorom na stole zostáva aspoň jedna kôpka, tvoria počty kameňov v jednotlivých kôpkach vždy *celú* množinu $\{1, 2, \dots, n\}$ pre nejaké prirodzené n (nevylučujeme však, že k niektorým číslam existuje viac kôpok s daným počtom kameňov). To teda znamená, že na stole je vždy aspoň jedna kôpka s práve jedným kameňom.

Na začiatku tvoria počty kameňov v kôpkach množinu $\{1, 2, \dots, 54\}$. Predpokladajme, že po určitom počte krokov tvoria počty kameňov v jednotlivých kôpkach množinu $\{1, 2, \dots, n\}$ $(n \geqq 2)$. Ak teraz zvolíme kôpku s n kameňmi alebo kôpku s jedným kameňom, budú v ďalšom kroku počty kameňov v kôpkach tvoriť množinu $\{1, 2, \dots, n-1\}$. Ak zvolíme kôpku s m kameňmi, kde $m \notin \{1, n\}$, budú počty kameňov v ďalšom kroku tvoriť množinu $\{1, 2, \dots, m-1\} \cup \{1, 2, \dots, n-m\} = \{1, 2, \dots, p\}$, kde $p = \max\{m-1, n-m\}$. Tým je tvrdenie o počte kameňov v jednotlivých kôpkach dokázané.

Odpoveď. Posledná kôpka bude bez ohľadu na zvolený postup vždy obsahovať jediný kameň.

B – S – 2

Podľa Pytagorovej vety je v pravouhlom trojuholníku rovnosť $a^2 : b^2 = 1 : 2$ splnená práve vtedy, keď $b^2 : c^2 = 2 : 3$. Požadovanú ekvivalenciu teda stačí dokázať len pre jednu z rovností $a^2 : b^2 = 1 : 2$, $b^2 : c^2 = 2 : 3$.



Obr. 12

Trojuholníky ASR a ACB (obr. 12) majú spoločný uhol pri vrchole A a zhodujú sa v pravých uhloch ASR a ACB, takže sú podobné podľa vety *uu*. Odtiaľ vyplýva rovnosť

$$\frac{|AR|}{|AS|} = \frac{|AB|}{|AC|},$$

čiže

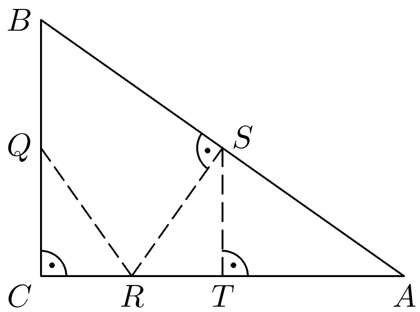
$$x = |AR| = \frac{|AB| \cdot |AS|}{|AC|} = \frac{c^2}{2b}. \tag{1}$$

Podľa Pytagorovej vety máme $|RS|^2 = |AR|^2 - |AS|^2 = x^2 - c^2/4$ a $|RQ|^2 = |QC|^2 + |CR|^2 = a^2/4 + (b-x)^2 = a^2/4 + b^2 - 2bx + x^2$, takže $|RQ| = |RS|$ práve vtedy, keď

$a^2/4+c^2/4+b^2 = 2bx$, čo po dosadení z (1) a $a^2 = c^2 - b^2$ po úprave dáva $3b^2/4 = c^2/2$, čiže $b^2 : c^2 = 2 : 3$. Tým je požadovaná ekvivalencia dokázaná.

Iné riešenie. Podľa Pytagorovej vety platí (obr. 12) $|BR|^2 = |BC|^2 + |CR|^2 = a^2 + y^2$, $|RS|^2 = |BR|^2 - |BS|^2 = a^2 + y^2 - c^2/4$, $|RQ|^2 = |QC|^2 + |CR|^2 = a^2/4 + y^2$. Rovnosť $|RQ| = |RS|$ teda platí práve vtedy, keď $a^2 + y^2 - c^2/4 = a^2/4 + y^2$, čiže $3a^2 = c^2$. V pravouhlom trojuholníku je táto rovnosť ekvivalentná s rovnosťou $3b^2 = 2c^2$, čiže $a^2 : b^2 : c^2 = 1 : 2 : 3$.

Iné riešenie. Označme T stred strany AC (obr. 13). Pretože $|QC| = |ST|$ a $|\sphericalangle QCR| = |\sphericalangle STR| = 90°$, sú trojuholníky QCR a STR zhodné práve vtedy, keď $|RQ| = |RS|$ a zároveň práve vtedy, keď $|RC| = |RT|$. Rovnosť $|RQ| = |RS|$ je teda ekvivalentná s tým, že bod R je stred úsečky CT, t. j. $x = |RA| = 3b/4$. Z podobnosti



Obr. 13

trojuholníkov ABC a ARS máme (rovnako ako v prvom riešení)

$$x = \frac{c^2}{2b},$$

takže $|RQ| = |RS|$ práve vtedy, keď

$$\frac{3b}{4} = \frac{c^2}{2b}, \quad \text{čiže} \quad 3b^2 = 2c^2.$$

V pravouhlom trojuholníku je to podľa Pytagorovej vety ekvivalentné s rovnosťou $3a^2 = c^2$, čiže $a^2 : b^2 : c^2 = 1 : 2 : 3$.

B – S – 3

Výraz $\lfloor x/(1-x) \rfloor$ je celé číslo, preto aj

$$\frac{\lfloor x \rfloor}{1 - \lfloor x \rfloor} = \frac{1}{1 - \lfloor x \rfloor} - 1$$

je celé, čo znamená, že $1 - \lfloor x \rfloor \in \{-1, 1\}$, čiže $\lfloor x \rfloor \in \{0, 2\}$.

Nech $\lfloor x \rfloor = 0$. Potom $0 \leqq x < 1$ a daná rovnica má tvar

$$\left\lfloor \frac{x}{1-x} \right\rfloor = 0,$$

takže je splnená práve vtedy, keď $0 \leqq x/(1-x) < 1$, čo je vzhľadom na predpoklad $1 - x > 0$ ekvivalentné s nerovnosťami $0 \leqq x < 1/2$. V tomto prípade danej rovnici vyhovujú všetky x z intervalu $\langle 0, 1/2)$.

Nech $\lfloor x \rfloor = 2$. Potom $2 \leqq x < 3$ a daná rovnica má tvar

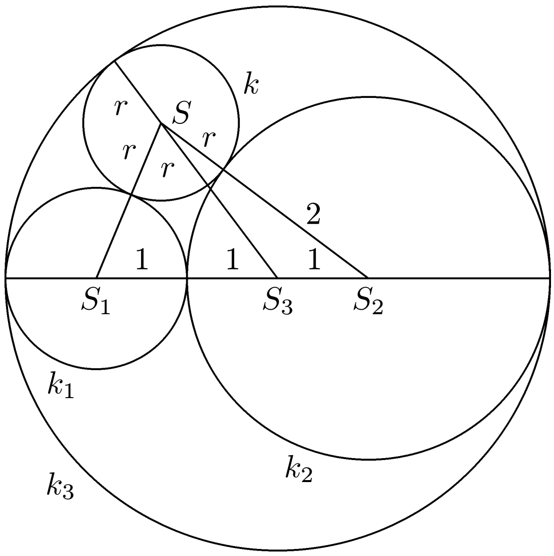
$$\left\lfloor \frac{x}{1-x} \right\rfloor = -2,$$

takže je splnená práve vtedy, keď $-2 \leqq x/(1-x) < -1$. To je vzhľadom na predpoklad $2 \leqq x$ (a z neho vyplývajúcu nerovnosť $1 - x < 0$) ekvivalentné s nerovnosťami $-2 + 2x \geqq x > -1 + x$, čiže $x \geqq 2$. V tomto prípade danej rovnici vyhovujú všetky x z intervalu $\langle 2, 3)$.

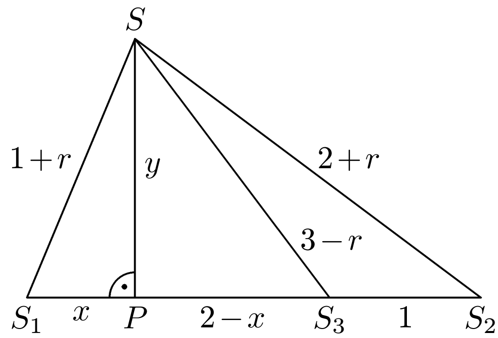
Záver. Všetky riešenia danej rovnice tvoria množinu $\langle 0, 1/2) \cup \langle 2, 3)$.

B – II – 1

Pretože sa súčet priemerov kružníc k_1 a k_2 rovná priemeru kružnice k_3, ležia ich stredy S_1, S_2 a S_3 na priamke. Existujú dve zhodné kružnice, ktoré spĺňajú podmienky úlohy, a sú súmerne združené podľa priamky S_1S_2. Označme k jednu z nich (obr. 14), S jej stred a r zodpovedajúci polomer.



Obr. 14



Obr. 15

Pre veľkosti strán trojuholníka S_1S_2S platí $|S_1S| = 1 + r$, $|S_2S| = 2 + r$, $|S_1S_2| = 3$ a $|S_3S| = 3 - r$. Pre bod S_3 zároveň platí $|S_3S_1| = 2$ a $|S_3S_2| = 1$. Keď označíme P

pravouhlý priemet bodu S na priamku S_1S_2 (obr. 15) a $x = |S_1P|$, $y = |SP|$, môžeme podľa Pytagorovej vety písať

$$\begin{aligned}(1+r)^2 &= x^2 + y^2,\\ (2+r)^2 &= (3-x)^2 + y^2,\\ (3-r)^2 &= (2-x)^2 + y^2.\end{aligned}$$

Odčítaním prvej rovnice od druhej dostaneme $3 + 2r = 9 - 6x$, čiže $2r = 6 - 6x$. Odčítanie prvej rovnice od tretej dá $8-8r = 4-4x$, čiže $2r = 1+x$. Porovnaním oboch dôsledkov vyjde rovnica $6 - 6x = 1 + x$, odkiaľ $x = 5/7$, $r = 3 - 3x = 6/7$.

Poznámka. So znalosťou kosínusovej vety sa zaobídeme bez pomocného bodu P. Keď napíšeme kosínusové vety pre trojuholníky S_1S_3S a S_1S_2S, dostaneme dve rovnice

$$\begin{aligned}(3-r)^2 &= 4 + (1+r)^2 - 2\cdot 2(1+r)\cos\omega,\\ (2+r)^2 &= 9 + (1+r)^2 - 2\cdot 3(1+r)\cos\omega,\end{aligned}$$

kde $\omega = |\sphericalangle S_2S_1S|$. Po úprave a vyjadrení $(1+r)\cos\omega$ z oboch rovníc dostaneme rovnicu $2r-1 = 1 - r/3$, z ktorej vyplýva $r = 6/7$.

B – II – 2

Označme p počet účastníkov ankety vrátane Jožka a j počet hlasov pre Šatana. Na celých 7 % sa zaokrúhlia čísla z intervalu $\langle 6{,}5\,\%; 7{,}5\,\%)$, čiže $\langle 0{,}065; 0{,}075)$. Pred Jožkovým hlasovaním mal Šatan $j-1$ hlasov a po ňom j hlasov. Musí preto platiť

$$0{,}065 \leqq \frac{j-1}{p-1} < 0{,}075, \quad 0{,}065 \leqq \frac{j}{p} < 0{,}075.$$

Pretože z nerovnosti $0 < j < p$ vyplýva $(j-1)/(p-1) < j/p$, stačí riešiť dve nerovnice

$$0{,}065 \leqq \frac{j-1}{p-1} \quad \text{a} \quad \frac{j}{p} < 0{,}075. \tag{1}$$

Prvá z nich je ekvivalentná s nerovnicou $0{,}065p - 0{,}065 + 1 \leqq j$ a druhá s nerovnicou $j < 0{,}075p$, preto musí platiť $0{,}065p + 0{,}935 < 0{,}075p$, odkiaľ vyplýva $p > 93{,}5$. Pretože p je celé číslo, dostávame $p \geqq 94$. Musíme však ešte zistiť, pre ktoré najmenšie $p \geqq 94$ existuje celé číslo j, ktoré vyhovuje nerovniciam (1). Z podmienky $p \geqq 94$ dostaneme $j \geqq 0{,}065 \cdot 94 + 0{,}935 = 7{,}045$, a teda $j \geqq 8$. Z nerovnice $j < 0{,}075p$ potom máme $p > 320/3$, čiže $p \geqq 107$. Pretože $0{,}065\cdot 107 + 0{,}935 < 8$, je dvojica $j = 8$, $p = 107$ riešením sústavy (1), takže $p = 107$ je najmenší možný počet ľudí, ktorí v ankete hlasovali.

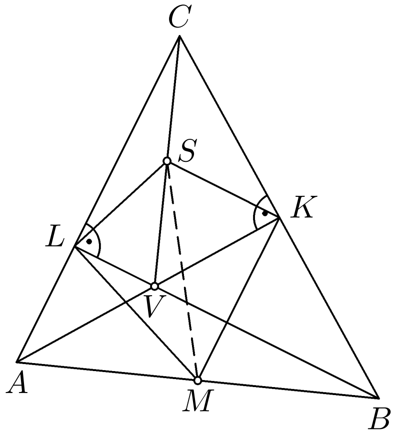
Iné riešenie. Nerovnice $0{,}065p + 0{,}935 \leqq j < 0{,}075p$, ekvivalentné s nerovnicami (1), upravíme na tvar

$$\frac{j}{0{,}075} < p \leqq \frac{j - 0{,}935}{0{,}065},$$

čo dáva podmienku $0{,}065j < 0{,}075j - 0{,}075 \cdot 0{,}935$, čiže $j > 7{,}5 \cdot 0{,}935 > 7$, takže $j \geqq 8$. Z nerovnosti $p > j/0{,}075$ tak dostávame nerovnosť $p \geqq 107$. Teraz stačí overiť, že $p = 107$ vyhovuje pre $j = 8$ aj druhej podmienke, t. j. že platí $107 \leqq (8 - 0{,}935)/0{,}065$.

B – II – 3

Označme S stred úsečky CV (obr. 16). Body K a L ležia na Tálesovej kružnici s priemerom AB, takže $|ML| = |MK|$. Body K a L zároveň ležia aj na Tálesovej kružnici s priemerom CV, takže $|SL| = |SK|$. Trojuholníky SLM a SKM sú teda zhodné (sss), takže $|\sphericalangle SML| = |\sphericalangle SMK|$, čiže os uhla LMK prechádza stredom S úsečky VC.



Obr. 16

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Po dvoch bodoch oceňte odvodenie každej z rovností $|ML| = |MK|$ a $|SL| = |SK|$, zostávajúce dva body dajte za dokončenie dôkazu (argumentovať možno napr. tiež tým, že oba trojuholníky LKM a LKS sú rovnoramenné, a teda $LMKS$ je deltoid).

B – II – 4

Danú sústavu rovníc prepíšeme na ekvivalentný tvar

$$\begin{aligned} y &= \lfloor x \rfloor - \alpha, \\ z &= 2\lfloor y \rfloor - \alpha, \\ x &= 3\lfloor z \rfloor - \alpha, \end{aligned} \tag{1}$$

pričom α sme označili číslo 2004/2005 z intervalu $(0, 1)$. Zo sústavy (1) vyplývajú postupne rovnosti

$$\begin{aligned} \lfloor y \rfloor &= \lfloor x \rfloor - 1, \\ \lfloor z \rfloor &= 2\lfloor y \rfloor - 1 = 2\lfloor x \rfloor - 3, \\ \lfloor x \rfloor &= 3\lfloor z \rfloor - 1 = 6\lfloor x \rfloor - 10. \end{aligned}$$

Z poslednej rovnice dostávame $\lfloor x \rfloor = 2$ a zo zostávajúcich dvoch rovníc dopočítame

$\lfloor y \rfloor = \lfloor z \rfloor = 1$. Dosadením do (1) tak máme

$$x = 3 - \frac{2004}{2005} = 2 + \frac{1}{2005}, \quad y = 2 - \frac{2004}{2005} = 1 + \frac{1}{2005}, \quad z = 2 - \frac{2004}{2005} = 1 + \frac{1}{2005}.$$

Vyšli necelé čísla x, y a z, ktoré majú práve také celé časti, aké sme dosadzovali do pravých strán rovností (1). Tak sme zároveň urobili skúšku (ktorú však možno urobiť aj priamym dosadením do pôvodnej sústavy). Uvedená trojica je (jediným) riešením danej úlohy.

KATEGÓRIA A

A – I – 1

Zistíme najskôr, ako vyzerajú všetky konečné neprázdne množiny M prirodzených čísel s (kľúčovou) vlastnosťou zo záveru zadania. Až potom posúdime, ktoré z týchto množín sú malé a určíme počet tých z nich, ktoré sú zostavené z čísel od 1 do 100.

Nech M je teda ľubovoľná konečná neprázdna množina prirodzených čísel s vlastnosťou: ak $x, y \in \mathsf{M}$ a $x \neq y$, tak aj $|x - y| \in \mathsf{M}$. Predpokladajme, že M má práve k prvkov a usporiadajme ich podľa veľkosti od najmenšieho čísla po najväčšie:

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_k.$$

V prípade $k = 1$ spĺňa množina $\mathsf{M} = \{x_1\}$ danú vlastnosť triviálne, predpokladajme preto ďalej, že $k > 1$. Potom číslo $x_2 - x_1 = |x_2 - x_1|$ podľa posudzovanej vlastnosti patrí do M a je menšie ako x_2, takže sa musí rovnať číslu x_1. Z rovnosti $x_2 - x_1 = x_1$ dostávame $x_2 = 2x_1$. Analogicky platí, že čísla $x_3 - x_2$, $x_3 - x_1$ sú dve čísla z M, ktoré sú menšie ako x_3. Pritom $x_3 - x_2 < x_3 - x_1$, takže musí platiť $x_3 - x_2 = x_1$ a $x_3 - x_1 = x_2$. To spolu s dokázanou rovnosťou $x_2 = 2x_1$ vedie k záveru, že $x_3 = x_1 + x_2 = 3x_1$. V rovnakých úvahách môžeme pokračovať a získavať rovnosti $x_4 = 4x_1, \ldots, x_k = kx_1$. Formálne možno tieto rovnosti dokázať indukciou: ak platí rovnosť $x_n = nx_1$ pre niektoré n, $1 \leqq n < k$, tak úvahou o n číslach

$$x_{n+1} - x_n < x_{n+1} - x_{n-1} < \ldots < x_{n+1} - x_1,$$

ktoré podľa posudzovanej vlastnosti patria do M a sú menšie ako x_{n+1}, prichádzame k záveru, že $x_{n+1} - x_n = x_1$, odkiaľ $x_{n+1} = x_n + x_1 = nx_1 + x_1 = (n + 1)x_1$. Dôkaz indukciou je hotový. Ak označíme $x_1 = m$, vyplýva z našich úvah, že skúmaná k-prvková množina M má nutne tvar

$$M = \{m, 2m, 3m, \ldots, km\}. \tag{1}$$

Na druhej strane je zrejmé, že taká množina M má požadovanú vlastnosť, nech sú prirodzené čísla m a k vybrané akokoľvek.

Množina M zapísaná v (1) má k prvkov, pričom najmenší z nich je číslo m. Podľa zadania úlohy je taká množina malá práve vtedy, keď platí nerovnosť $k < m$. Zároveň je jasné, že taká množina M je podmnožinou množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ práve vtedy, keď platí nerovnosť $km \leqq 100$. Našou úlohou je teda nájsť počet všetkých dvojíc prirodzených čísel k, m, pre ktoré platí $k < m$ a $km \leqq 100$. Ako býva pri riešení podobných kombinatorických úloh zvykom, hľadaný počet určíme, keď vyhovujúce dvojice (k, m) vhodne rozdelíme do menších skupín a určíme počty dvojíc v jednotlivých skupinách. V našej úlohe sa ponúka jednak rozdelenie do skupín dvojíc (k, m) s rovnakou hodnotou k, jednak rozdelenie do skupín dvojíc (k, m) s rovnakou hodnotou m. (To zodpovedá tomu, že pôvodné objekty (množiny M vyhovujúce úlohe) rozdelíme do skupín buď podľa počtu ich prvkov, alebo podľa veľkosti ich najmenších prvkov.)

Uveďme oba výpočty. Kvôli tomu označme $p(k)$, $q(m)$ počty vyhovujúcich dvojíc (k, m) s daným k, resp. s daným m. Uvedomme si, že z nerovností $k < m$ a $km \leqq 100$ vyplývajú odhady $1 \leqq k \leqq 9$ a $2 \leqq m \leqq 100$, ktoré naznačujú, že výpočet pomocou hodnôt $p(k)$ bude menej náročný ako výpočet pomocou hodnôt $q(m)$.

Pri pevnom k sú vyhovujúce čísla m určené nerovnosťami $k + 1 \leqq m \leqq 100/k$. Dosadením jednotlivých hodnôt k zistíme, že $p(1) = 99$, $p(2) = 48$, $p(3) = 30$, $p(4) = 21$, $p(5) = 15$, $p(6) = 10$, $p(7) = 7$, $p(8) = 4$ a $p(9) = 2$. Hľadaný celkový počet je teda rovný

$$99 + 48 + 30 + 21 + 15 + 10 + 7 + 4 + 2 = 236.$$

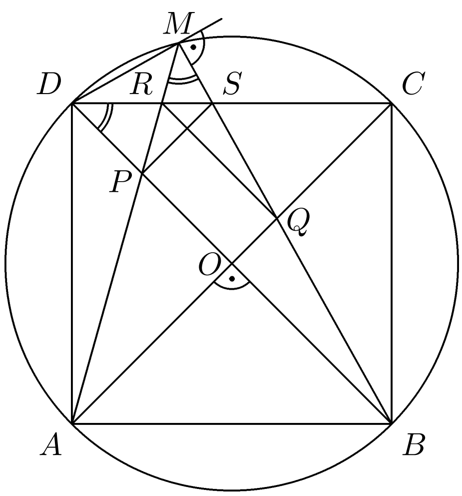
Naopak, pri pevnom m je číslo k ohraničené takto: $1 \leqq k \leqq \min\{m - 1, 100/m\}$. Odtiaľ vypočítame, že $q(2) = 1$, $q(3) = 2$, $q(4) = 3, \ldots$, $q(9) = 8$, $q(10) = q(11) = 9$, $q(12) = 8$, $q(13) = q(14) = 7$, $q(15) = q(16) = 6$, $q(17) = \ldots = q(20) = 5$, $q(21) = \ldots = q(25) = 4$, $q(26) = \ldots = q(33) = 3$, $q(34) = \ldots = q(50) = 2$, $q(51) = \ldots = q(100) = 1$. Hľadaný počet je teda rovný

$$1 + 2 + \ldots + 8 + 2 \cdot 9 + 8 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 8 \cdot 3 + 17 \cdot 2 + 50 = 236.$$

Pri výpočte jednotlivých hodnôt $q(m)$ je výhodné si uvedomiť, že pre každé prirodzené $m \leqq 10$ platí nerovnosť $m - 1 < 100/m$, zatiaľ čo pre každé $m \geqq 11$ platí opačná nerovnosť $m - 1 > 100/m$.

A – I – 2

Označme O stred daného štvorca $ABDC$ (obr. 17). Pretože bod M leží na spomenutom oblúku, má uhol AMB veľkosť rovnú polovici veľkosti stredového (pravého) uhla AOB, teda 45°. Pretože rovnakú veľkosť má vo štvorci $ABCD$ uhol BDC, je pod uhlom 45°



Obr. 17

z bodov D, M vidno tú istú úsečku PS. Pretože navyše oba body D, M ležia v rovnakej polrovine s hraničnou priamkou PS, je $PSMD$ tetivový štvoruholník. Jeho vnútorný uhol DMS je pravý (bod M totiž leží na Tálesovej kružnici nad priemerom BD), takže je pravý aj vnútorný uhol DPS. Tak sme dokázali, že $PS \perp BD$. Zrejme podobne vieme ukázať, že $QR \perp AC$. Z posledných dvoch vzťahov už vyplýva, že $PS \perp QR$ (lebo $AC \perp BD$).

A – I – 3

Úpravou rovníc doplnením na štvorce

$$(x-a)^2 = a^2 - b, \qquad (y+a)^2 = a^2 - b \tag{1}$$

(alebo priamym použitím známeho vzorca s diskriminantom) zisťujeme, že dané rovnice majú v obore $\mathbb{R}$ korene práve vtedy, keď celé čísla a, b spĺňajú podmienku $a^2 - b \geqq 0$. Tieto korene potom tvoria dvojice

$$\begin{aligned}\{x_1, x_2\} &= \bigl\{a + \sqrt{a^2-b}, a - \sqrt{a^2-b}\bigr\},\\ \{y_1, y_2\} &= \bigl\{-a + \sqrt{a^2-b}, -a - \sqrt{a^2-b}\bigr\}.\end{aligned}$$

Teraz stojíme pred otázkou, ako efektívne (t.j. bez stereotypného opakovania navzájom podobných výpočtov) určiť všetky štyri hodnoty výrazu $V = x_1y_1 - x_2y_2$. Ten možno zapísať neurčitým spôsobom ako

$$\bigl(a \pm \sqrt{a^2-b}\bigr)\bigl(-a \pm \sqrt{a^2-b}\bigr) - \bigl(a \pm \sqrt{a^2-b}\bigr)\bigl(-a \pm \sqrt{a^2-b}\bigr),$$

pričom pri prvom a treťom výskyte znaku $\pm$, rovnako ako pri druhom a štvrtom, vyberáme navzájom opačné znamienka. Naznačíme tri možné prístupy. (Celá diskusia bude síce dlhšia, ako keby sme vypísali výpočet všetkých štyroch rôznych výrazov, ale o to nám v komentári nejde.)

(i) Ak zvolíme pevne označenie x_1, x_2, y_1, y_2, stačí vypočítať dve hodnoty $V_1 = x_1y_1 - x_2y_2$, $V_2 = x_1y_2 - x_2y_1$, ostatné dve hodnoty sú k nim opačné čísla $V_3 = x_2y_2 - x_1y_1 = -V_1$ a $V_4 = x_2y_1 - x_1y_2 = -V_2$. Oddelený výpočet oboch hodnôt V_1, V_2 však nie je nutný, ako ihneď uvidíme.

(ii) Výber znamienok pre čísla x_1 a y_1 možno zapísať v tvare $x_1 = a + \varepsilon\sqrt{a^2-b}$ a $y_1 = -a + \delta\sqrt{a^2-b}$, pričom koeficienty ε a δ sú čísla z množiny $\{-1, 1\}$. Potom $x_2 = a - \varepsilon\sqrt{a^2-b}$, $y_2 = -a - \delta\sqrt{a^2-b}$ a stačí urobiť jediný výpočet so všeobecnými ε, δ (pre stručnosť zápisu označíme ešte $c = \sqrt{a^2-b}$):

$$\begin{aligned}x_1y_1 - x_2y_2 &= (a+\varepsilon c)(-a+\delta c) - (a-\varepsilon c)(-a-\delta c) =\\ &= \bigl(-a^2 - \varepsilon ac + \delta ac + \varepsilon\delta c^2\bigr) - \bigl(-a^2 + \varepsilon ac - \delta ac + \varepsilon\delta c^2\bigr) =\\ &= -2a(\varepsilon - \delta)c.\end{aligned}$$

Pretože $\varepsilon - \delta$ nadobúda hodnoty -2, 0 a 2, hodnoty výrazu $V = x_1y_1 - x_2y_2$ sú práve čísla $4a\sqrt{a^2-b}$, 0 a $-4a\sqrt{a^2-b}$.

(iii) Výber znamienok pre čísla x_1 a y_1 môžeme vyriešiť zápismi $x_1 = a + u$ a $y_1 = -a+v$, pričom u a v sú reálne čísla spĺňajúce rovnosti $u^2 = v^2 = a^2 - b$. (Dodajme, že čísla u, v sú vlastne základy druhých mocnín v rovniciach (1), alebo tiež čísla $\varepsilon\sqrt{a^2-b}$, $\delta\sqrt{a^2-b}$ z predchádzajúceho odstavca.) Potom platí $x_2 = a - u$, $y_2 = -a - v$ a

$$V = x_1y_1 - x_2y_2 = (a+u)(-a+v) - (a-u)(-a-v) = -2a(u-v).$$

Pretože hodnoty $u - v$ pri podmienke $u^2 = v^2 = a^2 - b$ sú $-2\sqrt{a^2-b}$, 0 a $2\sqrt{a^2-b}$, prichádzame k rovnakému záveru ako v (ii).

Po výpočte hodnôt výrazu V zisťujeme, že rovnosť $x_1y_1 - x_2y_2 = 4k$ nastane práve vtedy, keď $4k \in \{-4a\sqrt{a^2-b}, 0, 4a\sqrt{a^2-b}\}$. Pretože k je prirodzené číslo, platí $a \neq 0$ a posledná podmienka je ekvivalentná s rovnosťou

$$k = |a|\sqrt{a^2-b}, \tag{2}$$

ktorá je rozkladom čísla k na súčin dvoch činiteľov, ktoré musia byť tiež prirodzené čísla. (Číslo $\sqrt{a^2-b}$ je rovné zlomku $k/|a|$, takže je to číslo racionálne, a teda číslo celé.) Preto môžeme všetky celočíselné riešenia (a, b) rovnice (2) ľahko popísať: vezmeme ľubovoľný rozklad $k = m \cdot n$ daného čísla k na dva (kladné) činitele m, n a z rovností $|a| = m$ a $\sqrt{a^2-b} = n$ jednoducho určíme obe vyhovujúce dvojice (a, b):

$$a = \pm m, \quad b = m^2 - n^2. \tag{3}$$

Teraz už máme všetko pripravené na riešenie otázok pôvodnej úlohy.

Časť a). Pretože pre činitele m, n z ľubovoľného rozkladu $k = m \cdot n$ platí $m \leqq k$ a $n \geqq 1$, vyplýva zo vzťahu (3) odhad $b \leqq m^2 - 1$. Pritom rovnosť nastane, keď zvolíme $m = k$ a $n = 1$. Pre dané k je teda najväčšia hodnota b rovná $b_{\max} = k^2 - 1$.

Časť b). Pre $k = 2\,004$ existuje práve 12 usporiadaných dvojíc (m, n), pre ktoré $2\,004 = m \cdot n$, lebo všetkých rozkladov čísla 2 004 na dva činitele (keď nezohľadníme ich poradie) je práve šesť: $1 \cdot 2\,004 = 2 \cdot 1\,002 = 3 \cdot 668 = 4 \cdot 551 = 6 \cdot 334 = 12 \cdot 167$. Pretože môžeme dvoma spôsobmi zvoliť znamienko čísla a vo vzťahu (3), hľadaný počet dvojíc (a, b) je rovný dvojnásobku počtu dvojíc (m, n), teda číslu $2 \cdot 12 = 24$.

Časť c). Našou úlohou je určiť súčet čísel b z dvojíc (a, b) určených vzťahmi (3), keď dvojice (m, n) prebiehajú všetkými rozkladmi $k = m \cdot n$ daného čísla k. Ak $m = n$, podľa (3) platí $b = 0$, preto môžeme uvažovať len také dvojice činiteľov (m, n), v ktorých $m \neq n$, a zoskupiť ich do párov (m, n) a (n, m). Pretože v každom páre pre súčet príslušných hodnôt b platí $(m^2 - n^2) + (n^2 - m^2) = 0$ (ako pre jednu, tak pre druhú voľbu znamienka čísla a), je hľadaný súčet čísel b zo všetkých uvažovaných dvojíc (a, b) rovný nule (pre každé pevné k).

A – I – 4

Označme c, d diferenciu prvej, resp. druhej z daných aritmetických postupností. Pretože podľa zadania platí $y_1 = x_1$, majú členy oboch postupností všeobecné vyjadrenia

$$x_i = x_1 + (i-1)c \quad \text{a} \quad y_i = x_1 + (i-1)d$$

pre každý index i. Rozdiel $x_i^2 - y_i^2$ možno preto upraviť na tvar

$$\begin{aligned} x_i^2 - y_i^2 &= \bigl(x_1^2 + 2x_1(i-1)c + (i-1)^2c^2\bigr) - \bigl(x_1^2 + 2x_1(i-1)d + (i-1)^2d^2\bigr) = \\ &= 2x_1(i-1)(c-d) + (i-1)^2(c^2-d^2). \end{aligned}$$

Pre index k podľa zadania úlohy platia rovnosti

$$53 = 2x_1(k-1)(c-d) + (k-1)^2(c^2-d^2), \tag{1}$$

$$78 = 2x_1(k-2)(c-d) + (k-2)^2(c^2-d^2), \tag{2}$$

$$27 = 2x_1k(c-d) + k^2(c^2-d^2). \tag{3}$$

Tieto rovnosti alebo ich násobky teraz vhodne navzájom sčítame. Aby sme sa zbavili členov s x_1, odčítame od dvojnásobku rovnosti (1) súčet rovností (2) a (3). Pri člene $2x_1(c-d)$ tak zostane koeficient $2(k-1)-(k-2+k)=0$. Pretože $2\cdot 53-(78+27)=1$ a $2(k-1)^2-(k-2)^2-k^2=-2$, dostaneme spomenutou kombináciou jednoduchú rovnosť $1=-2(c^2-d^2)$, z ktorej určíme $c^2-d^2=-1/2$. To dosadíme do rovností (2) a (3), ktoré tak prejdú na tvar

$$78 = 2x_1(k-2)(c-d) - \frac{1}{2}(k-2)^2, \tag{4}$$

$$27 = 2x_1k(c-d) - \frac{1}{2}k^2. \tag{5}$$

Členov s x_1 sa opäť zbavíme, keď od k-násobku rovnosti (4) odčítame $(k-2)$-násobok rovnosti (5). Získanú rovnicu s neznámou k potom vyriešime:

$$\begin{aligned} 78k - 27(k-2) &= -\frac{1}{2}(k-2)^2\cdot k + \frac{1}{2}k^2\cdot(k-2), \\ 51k + 54 &= -\frac{1}{2}(k^3-4k^2+4k) + \frac{1}{2}(k^3-2k^2), \\ 0 &= k^2 - 53k - 54, \\ 0 &= (k+1)(k-54). \end{aligned}$$

Pretože index k je prirodzené číslo, platí nutne $k=54$. Tým je úloha vyriešená.

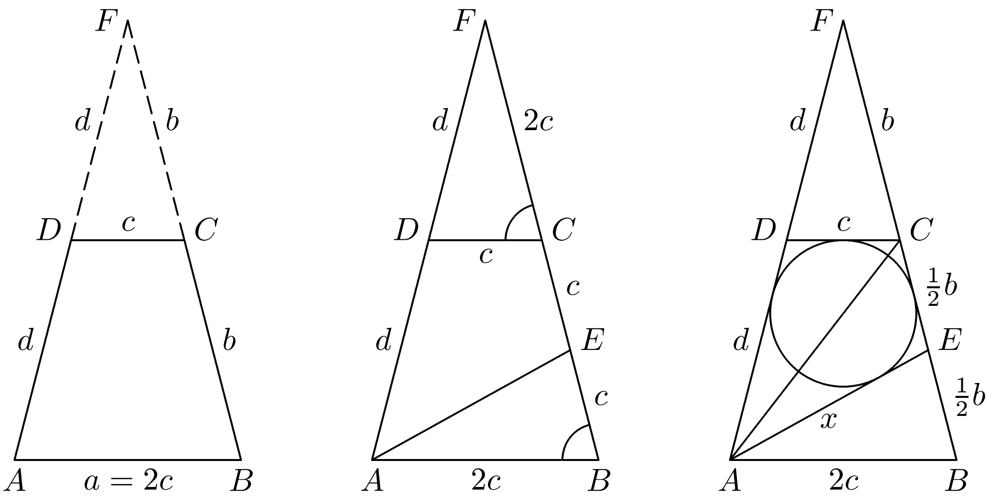
Dodajme, že zadanie úlohy nevyžaduje skúmať, či pre nájdenú (jedinú) hodnotu indexu k dvojica postupností spĺňajúcich podmienky úlohy existuje. Pre zaujímavosť uveďme, že takých dvojíc postupností je dokonca nekonečne veľa. Je nutné a stačí, aby ich spoločný prvý člen x_1 a diferencie c, d spĺňali podmienky $c^2-d^2=-1/2$ a $x_1(c-d)=55/4$. Vyplýva to jednoducho z ktorejkoľvek z rovností (1) až (3) po dosadení hodnôt $k=54$ a $c^2-d^2=-1/2$.

A – I – 5

Označme zvyčajným spôsobom a, b, c, d dĺžky strán daného lichobežníka. Podľa zadania platí rovnosť $a=2c$, ktorá znamená, že základňa CD je strednou priečkou trojuholníka

ABF, pričom F je priesečník ramien BC a AD predĺžených za vrchol C resp. D (obr. 18). Preto platí aj $|CF| = b$ a $|DF| = d$.

V prvej časti riešenia predpokladajme, že $|AB| = |BC|$, čiže $2c = b$ (obr. 19). Potom $|CF| = b = 2c$ a $|EB| = |EC| = b/2 = c$, takže trojuholníky ABE a FCD sú zhodné podľa vety *sus* (ich strany dĺžok $2c$ a c zvierajú súhlasné uhly určené priamkou BC medzi rovnobežkami AB a CD). Zo zhodnosti tretích strán AE a FD potom vyplýva rovnosť $|AE| = d$. Tak prichádzame k záveru, že strany štvoruholníka $AECD$ majú dĺžky d, c, c, d. Je to teda dotyčnicový štvoruholník (dokonca deltoid, prípadne kosoštvorec).



Obr. 18 Obr. 19 Obr. 20

V druhej časti riešenia predpokladajme, že štvoruholník $AECD$ je dotyčnicový, takže podľa známej vety pre dĺžky jeho strán platí rovnosť $|AE| + |CD| = |EC| + |AD|$, čiže $x + c = b/2 + d$, pričom $x = |AE|$ (obr. 20). Odtiaľ vyjadríme dĺžku x, s ktorou budeme ďalej pracovať, v tvare

$$x = \frac{b}{2} - c + d. \tag{1}$$

Všimnime si teraz, že úsečky CD, AC a AE delia trojuholník ABF na štyri trojuholníky s rovnakým obsahom. (Podrobnejšie: z $|AD| = |DF|$, $|BC| = |CF|$ a $|BE| = |EC|$ vyplýva sled rovností $S_{ADC} = S_{CDF} = S_{ACF}/2 = S_{ABC}/2 = S_{ABE} = S_{ACE}$.) Preto pre obsahy štvoruholníka $AECD$ a trojuholníka AEF platí $S_{AECD} : S_{AEF} = 2 : 3$. Tieto dva mnohouholníky však majú spoločnú vpísanú kružnicu, takže v rovnakom pomere $2 : 3$ musia byť aj ich odvody (pripomeňme, že obsah mnohouholníka s obvodom o a vpísanou kružnicou s polomerom ϱ je rovný $o \cdot \varrho/2$). Pretože tieto obvody majú vyjadrenia

$$o_{AECD} = x + \frac{b}{2} + c + d, \quad o_{AEF} = x + \frac{3b}{2} + 2d,$$

platí $(x + b/2 + c + d) : (x + 3b/2 + 2d) = 2 : 3$. Odtiaľ ľahko vyjadríme neznámu x ako

$$x = \frac{3b}{2} - 3c + d. \tag{2}$$

Porovnaním (1) a (2) dostaneme rovnosť $b = 2c$, čiže $b = a$. Tým je rovnosť $|AB| = |BC|$ dokázaná.

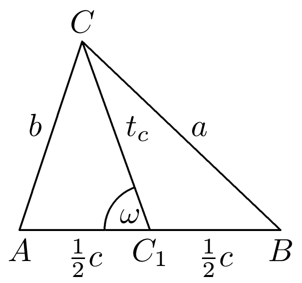
Iné riešenie. (Podľa *Pavla Novotného.*) Pripomeňme najskôr vyjadrenie dĺžok ťažníc trojuholníka pomocou dĺžok jeho strán: vo všeobecnom trojuholníku ABC pri zvyčajnom označení platí vzťah

$$4t_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2. \tag{1}$$

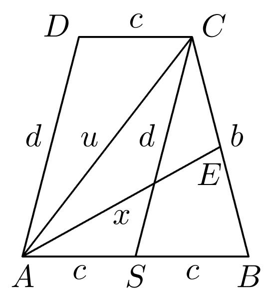
Odvodenie (1) je jednoduché: stačí sčítať rovnosti

$$b^2 = \left(\frac{1}{2}c\right)^2 + t_c^2 - ct_c\cos\omega, \quad a^2 = \left(\frac{1}{2}c\right)^2 + t_c^2 + ct_c\cos\omega,$$

ktoré platia podľa kosínusovej vety pre trojuholníky ACC_1 a BCC_1, pričom C_1 je stred strany AB a $\omega = |\sphericalangle AC_1C|$ (obr. 21).



Obr. 21



Obr. 22

V danom lichobežníku $ABCD$ (v ktorom platí $a = 2c$) uvažujme okrem stredu E ramena BC ešte stred S základne AB a označme $x = |AE|$ a $u = |AC|$ (obr. 22). Pretože $|AS| = |SB| = a/2 = c$, je $ASCD$ rovnobežník, teda $|CS| = d$. Teraz podľa vzťahu (1) vyjadríme dĺžky ťažníc AE a CS trojuholníka ABC:

$$4x^2 = 2u^2 + 2(2c)^2 - b^2 \quad \text{a} \quad 4d^2 = 2u^2 + 2b^2 - (2c)^2.$$

Vzájomným odčítaním týchto rovností vylúčime veličinu u a dostaneme

$$4(x^2 - d^2) = 3(4c^2 - b^2), \quad \text{čiže} \quad 4(x - d)(x + d) = 3(2c - b)(2c + b).$$

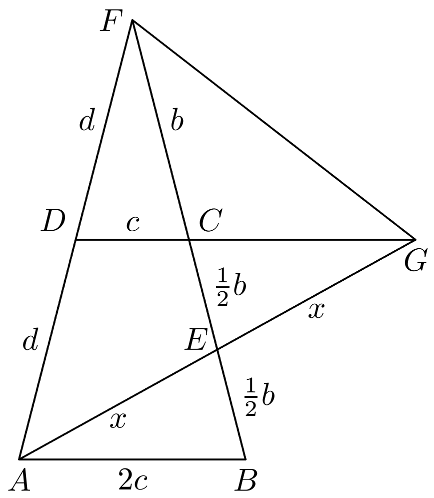
Odtiaľ vyplýva, že znamienko rozdielu $x - d$ je vždy rovnaké ako znamienko rozdielu $2c - b$. Ukážme, že z tohto poznatku vyplýva celé riešenie našej úlohy. Použijeme k tomu známe kritérium pre dotyčnicové štvoruholníky: štvoruholník $AECD$ je dotyčnicový práve vtedy, keď sa rovnajú oba súčty dĺžok jeho protiľahlých strán, t. j. práve vtedy, keď $x + c = d + b/2$.

Ak $b = 2c$, tak podľa nášho poznatku $x = d$, a teda $AECD$ je deltoid (pripadne kosoštvorec). (Rovnosť $x + c = d + b/2$ vtedy platí dokonca sčítanec po sčítanci.)

Ak $b > 2c$, tak podľa nášho poznatku $x < d$, a teda $x+c < d+b/2$, takže štvoruholník $AECD$ nie je dotyčnicový.

Ak $b < 2c$, tak podľa nášho poznatku $x > d$, a teda $x+c > d+b/2$, takže štvoruholník $AECD$ nie je dotyčnicový.

Iné riešenie. V lichobežníku $ABCD$, v ktorom platí $a = 2c$, uvažujme okrem stredu E ramena BC a priesečníku F predĺžených ramien BC, AD ešte priesečník G priamok AE, CD (obr. 23). Ľahko vysvetlíme, že úsečky EF a DG sú ťažnice troju-



Obr. 23

holníka AFG (a bod C jeho ťažisko). Ak platí rovnosť $b = 2c$, sú tieto ťažnice zhodné, a preto je trojuholník AFG rovnoramenný so základňou FG, teda $AECD$ je deltoid (alebo kosoštvorec). Ak sa naopak štvoruholníku $AECD$ dá vpísať kružnica, je táto kružnica vpísaná aj obom trojuholníkom AEF a ADG, ktoré majú zhodné obsahy (rovné vždy polovici obsahu trojuholníka AFG). Potom sa však musia rovnať aj ich obvody, čo pre dĺžku $x = |AE| = |EG|$ dáva rovnicu

$$x + \frac{3b}{2} + 2d = 2x + 3c + d,$$

z ktorej vychádza vyjadrenie neznámej x v tvaru (2) z prvého riešenia. Rovnako ako tam potom dôjdeme k rovnosti $b = 2c$.

Nad obr. 23 možno uvažovať aj takto: štvoruholník $AECD$ bude dotyčnicový práve vtedy, keď splynú kružnice vpísané trojuholníkom AEF a ADG. Tieto trojuholníky majú totožné ramená vnútorných uhlov pri spoločnom vrchole A, takže ich vpísané kružnice splynú práve vtedy, keď budú mať zhodné polomery. To je však ekvivalentné s tým, že oba trojuholníky majú rovnaký obvod (vždy totiž majú rovnaký obsah). Pretože spoločná časť hraníc trojuholníkov AEF a ADG je tvorená lomenou čiarou EAD, rovnajú sa ich obvody práve vtedy, keď platí rovnosť $|DF|+|FE| = |DG|+|GE|$. Pretože $DE \parallel FG$, je z úvahy o elipse s ohniskami D, E jasné, že odvodená rovnosť nastane práve vtedy, keď úsečky DE a FG majú spoločnú os súmernosti (a $AECD$ je potom deltoid, prípadne kosoštvorec).

A – I – 6

V prvej časti riešenia predpokladajme, že $f : \langle 0,+\infty) \to \langle 0,+\infty)$ je ľubovoľná z hľadaných funkcií. Keď dosadíme do danej rovnice hodnotu $y = 1$ a číslo $x \geqq 0$ ponecháme ľubovoľné, dostaneme

$$f\bigl(xf(1)\bigr)f(1) = f\Bigl(\frac{x}{x+1}\Bigr).$$

Vzhľadom na to, že podľa podmienky b) platí $f(1) = 0$, posledná rovnosť znamená, že

$$f\Bigl(\frac{x}{x+1}\Bigr) = 0 \quad \text{pre každé } x \geqq 0.$$

Vidíme, že funkcia f nadobúda hodnoty nula vo všetkých bodoch definičného oboru, ktoré možno vyjadriť v tvare zlomku $x/(x+1)$ s vhodným $x \geqq 0$. Každý taký zlomok určite leží v intervale $\langle 0,1)$. Naopak, pre každé reálne číslo $t \in \langle 0,1)$ má zrejme rovnica $t = x/(x+1)$ nezáporné riešenie $x = t/(1-t)$.

Zistený poznatok spolu s podmienkou c) zo zadania úlohy vedie k záveru, že rovnosť $f(t) = 0$ platí práve vtedy, keď $t \in \langle 0,1\rangle$. Aby sme určili (kladnú) hodnotu $f(t)$ pre pevné $t > 1$, budeme uvažovať dve rovnice s takým parametrom t a neznámou x:

$$f\bigl(x\,f(t)\bigr)f(t) = 0 \qquad \text{a} \qquad f\Bigl(\frac{xt}{x+t}\Bigr) = 0.$$

Pretože podľa zadania úlohy sa ľavé strany oboch rovníc rovnajú (zvoľme $y = t$ v danej funkcionálnej rovnici) a $f(t) > 0$, musia mať obe rovnice rovnaké množiny riešení. Pre prvú z nich je táto množina určená sústavou nerovníc $0 \leqq x\,f(t) \leqq 1$, takže tvorí interval $\langle 0, 1/f(t)\rangle$. Druhá rovnica je ekvivalentná so sústavou nerovníc $0 \leqq xt/(x+t) \leqq$ $\leqq 1$, ktorej riešenia (vzhľadom na $x+t > 0$) tvoria interval $\langle 0, t/(t-1)\rangle$. Z totožnosti oboch intervalov vyplýva rovnosť

$$\frac{1}{f(t)} = \frac{t}{t-1}, \quad \text{čiže} \quad f(t) = \frac{t-1}{t}.$$

Našli sme hodnotu $f(t)$ pre každé $t > 1$. Môžeme teda zhrnúť, že hľadaná funkcia f musí mať tvar

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leqq t \leqq 1), \\ \dfrac{t-1}{t} & (t > 1). \end{cases}$$

V druhej časti riešenia ukážeme, že funkcia f určená ostatným predpisom má naozaj vlastnosť a) zo zadania úlohy (vlastnosti b) a c) sú zrejmé). Rovnosti oboch strán

$$L = f\bigl(x\,f(y)\bigr)f(y), \quad P = f\Bigl(\frac{xy}{x+y}\Bigr)$$

danej funkcionálnej rovnice dokážeme v každom zo štyroch prípadov rozlíšených podľa možných hodnôt premennej y a zlomku $xy/(x+y)$:

$$\text{(i)}\quad y = 0 \ (\text{a } x > 0), \qquad \text{(ii)}\quad 0 < y \leqq 1,$$

$$\text{(iii)}\quad y > 1 \text{ a } \frac{xy}{x+y} \leqq 1, \qquad \text{(iv)}\quad y > 1 \text{ a } \frac{xy}{x+y} > 1.$$

Prípad (i). Z $y = 0$ vyplýva $f(y) = 0$ a $xy/(x+y) = 0$, takže tiež $f(xy/(x+y)) = 0$, teda $L = P = 0$.

Prípad (ii). Z $0 < y \leqq 1$ vyplýva $xy/(x+y) < 1$, takže opäť $L = P = 0$.

Prípad (iii). Z $y > 1$ a $xy/(x+y) \leqq 1$ vyplýva $x \leqq y/(y-1)$, takže vzhľadom na hodnotu $f(y) = (y-1)/y$ platí nerovnosť $xf(y) \leqq 1$, teda opäť $L = P = 0$.

Prípad (iv). Z $y > 1$ a $xy/(x+y) > 1$ vyplýva $x > y/(y-1)$, takže vzhľadom na hodnotu $f(y) = (y-1)/y$ platí nerovnosť $xf(y) > 1$, teda

$$L = \frac{x \cdot \dfrac{y-1}{y} - 1}{x \cdot \dfrac{y-1}{y}} \cdot \frac{y-1}{y} = \frac{xy - x - y}{xy},$$

$$P = \frac{\dfrac{xy}{x+y} - 1}{\dfrac{xy}{x+y}} = \frac{xy - x - y}{xy}.$$

Rovnosť $L = P$ je tak dokázaná vo všetkých prípadoch.

A – S – 1

Zaoberajme sa otázkou, pre ktoré celočíselné aritmetické postupnosti $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ existujú indexy $i, j \in \{1, 2, \dots, 10\}$ také, že $a_i = 1$ a $a_j = 2\,005$. Zdôraznime, že ak taká dvojica indexov (i, j) existuje, potom je jediná, pretože v nekonštantnej aritmetickej postupnosti sa každé číslo vyskytuje najviac raz.

Predpokladajme, že uvedené indexy i a j poznáme a pomocou nich vyjadrime prvý člen a_1 a diferenciu d príslušnej postupnosti. Pretože všeobecný člen aritmetickej postupnosti má vyjadrenie $a_k = a_1 + (k-1)d$, dostávame sústavu rovníc

$$a_i = a_1 + (i-1)d = 1 \qquad \text{a} \qquad a_j = a_1 + (j-1)d = 2\,005,$$

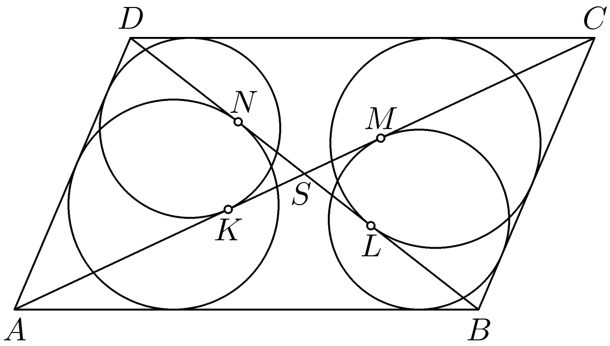
ktorú ľahko vyriešime vzhľadom na neznáme a_1, d:

$$d = \frac{2\,004}{j-i} \quad \text{a} \quad a_1 = 1 - \frac{2\,004(i-1)}{j-i}.$$

Také hodnoty a_1, d sú celé čísla práve vtedy, keď je prirodzené číslo $|j-i|$ deliteľom čísla $2\,004$, takže $|j-i|$ musí byť jedno z čísel 1, 2, 3, 4 alebo 6 (z podmienky $i, j \in \{1, 2, \dots, 10\}$ totiž vyplýva $|j-i| < 10$ a číslo $2\,004$ iné jednomiestne delitele nemá). Hľadaný počet postupností je preto rovný počtu dvojíc indexov (i, j) vybraných z množiny $\{1, 2, \dots, 10\}$, pre ktoré platí $|j - i| \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Takých dvojíc (i, j) je postupne $2\cdot 9$, $2\cdot 8$, $2\cdot 7$, $2\cdot 6$ a $2\cdot 4$, takže všetkých postupností je $18+16+14+12+8 = 68$.

A – S – 2

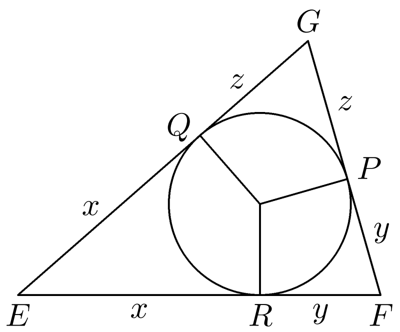
Rovnobežník $ABCD$ je stredovo súmerný podľa priesečníka S uhlopriečok AC, BD (obr. 24). Preto sú podľa stredu S súmerne združené trojuholníky ACD a CAB, a teda aj ich vpísané kružnice a zodpovedajúce si body dotyku K a M. To isté platí aj pre



Obr. 24

dvojicu bodov L a N. Prichádzame tak k záveru, že $KLMN$ je rovnobežník. (Možnosti $K = M = S$ alebo $L = N = S$ vylučuje podmienka $|AB| > |BC|$, ktorá zabezpečuje, že spomenuté trojuholníky nie sú rovnoramenné so základňou AC alebo BD, takže vpísané kružnice sa nedotýkajú týchto strán v ich strede.)

Uvedená úvaha o stredovej súmernosti však nestačí na dôkaz toho, že rovnobežník $KLMN$ je obdĺžnik, t. j. že má zhodné uhlopriečky KM a LN. Na to musíme urobiť výpočet založený na známych vzťahoch, ktoré vyjadrujú vzdialenosti vrcholov všeobecného trojuholníka od bodov dotyku vpísanej kružnice pomocou dĺžok strán tohto trojuholníka (obr. 25).



Obr. 25

$$x = |ER| = |EQ| = \frac{|EF| + |EG| - |FG|}{2},$$
$$y = |FP| = |FR| = \frac{|FG| + |FE| - |EG|}{2},$$
$$z = |GP| = |GQ| = \frac{|GF| + |GE| - |EF|}{2}.$$

Pripomeňme, že tieto vzťahy možno odvodiť zo sústavy rovníc

$$x + y = |EF|, \quad y + z = |FG|, \quad x + z = |EG|.$$

Vráťme sa k našej úlohe a v danom štvoruholníku $ABCD$ označme ešte dĺžky $a = |AB| = |CD|$, $b = |BC| = |AD|$, $e = |AC|$ a $f = |BD|$. Podľa vzťahov uvedených vedľa obr. 2 platia rovnosti

$$|AK| = \frac{e + b - a}{2} = |CM| \qquad \text{a} \qquad |BL| = \frac{f + b - a}{2} = |DN|.$$

Z predpokladu úlohy $a > b$ preto vyplýva $|AK| < e/2 = |AS|$, takže bod K leží medzi bodmi A a S a má od stredu S vzdialenosť

$$|KS| = |AS| - |AK| = \frac{e}{2} - \frac{e + b - a}{2} = \frac{a - b}{2}.$$

Podobne vyjde, že body L, M, N ležia postupne na úsečkách BS, CS, DS a platia rovnosti $|LS| = |MS| = |NS| = (a - b)/2$. To spolu znamená, že štvoruholník $KLMN$ má zhodné uhlopriečky, ktoré se navzájom rozpoľujú, a teda je to obdĺžnik. (Keby to bol štvorec, muselo by platiť $KM \perp LN$, teda $AC \perp BD$, čo je v spore s tým, že $a \neq b$.)

Dodajme, že v predchádzajúcom odstavci sme podali úplné riešenie, ktoré nevyžaduje úvahy o stredovej súmernosti z úvodného odstavca.

A – S – 3

Po vydelení (kladným) číslom $k+1/k$ a úprave zlomkov dostaneme ekvivalentnú sústavu nerovníc

$$\frac{k^2(k-2)}{k^2+1} \leqq x \leqq \frac{k^3(k+3)}{k^2+1}. \tag{1}$$

Pre $k = 1$ má táto sústava tvar $-1/2 \leqq x \leqq 2$, takže má v celých číslach práve tri riešenia, čo je menej ako $(1 + 1)^2 = 4$. Teda $k = 1$ nevyhovuje. Dosadením hodnôt $k = 2$, $k = 3$ ľahko zistíme, že obe vyhovujú. Pokúsme sa preto zistiť, či okrem $k = 1$ nebudú vyhovovať všetky hodnoty.

Aby sme určili, medzi ktorými celými číslami ležia oba zlomky z (1), vydelíme najskôr (so zvyškom) mnohočleny z ich čitateľov mnohočlenom z menovateľa.

$$\begin{aligned} &(k^3 - 2k^2) : (k^2 + 1) = k - 2, && \text{zvyšok } -k + 2,\\ &(k^4 + 3k^3) : (k^2 + 1) = k^2 + 3k - 1, && \text{zvyšok } -3k + 1. \end{aligned}$$

Oba výsledky delenia dosadíme do (1).

$$k - 2 - \frac{k-2}{k^2+1} \leqq x \leqq k^2 + 3k - 1 - \frac{3k-1}{k^2+1}. \tag{2}$$

Ak pre „zvyškové členy“ z oboch krajných výrazov budú platiť nerovnosti

$$0 \leqq \frac{k-2}{k^2+1} < 1 \qquad \text{a} \qquad 0 < \frac{3k-1}{k^2+1} \leqq 1, \tag{3}$$

budú riešeniami sústavy (1) práve tie celé čísla x, pre ktoré platí $k-2 \leqq x \leqq k^2+3k-2$. Takých x je

$$(k^2+3k-2)-(k-2)+1=(k+1)^2,$$

čo je práve počet uvedený v zadaní úlohy.

Ľahko zdôvodníme, že nerovnosti (3) platia pre každé $k \geqq 2$. Vtedy totiž máme $0 \leqq k-2 < k+1 < k^2+1$, odkiaľ vyplýva ľavá časť (3). Pravá časť (3) je zrejmá pre každé $k \geqq 3$ (lebo vtedy $0 < 3k-1 \leqq k^2-1 < k^2+1$); pre $k=2$ platí $3k-1=5=k^2+1$, takže v (3) úplne napravo nastane rovnosť.

Záver. Hľadanými k sú všetky prirodzené čísla väčšie ako 1.

Poznámka. Presný počet celých čísel x, ktoré ležia v intervale (1), nemožno určit len z *dĺžky* tohto intervalu, lebo ani táto dĺžka, ani žiadny z krajných bodov intervalu nie je celé číslo. Nie je ťažké overiť ekvivalentnými úpravami, že pre dĺžku intervalu (1) pri každom $k > 2$ platia nerovnosti

$$(k+1)^2-1 < \frac{k^3(k+3)}{k^2+1} - \frac{k^2(k-2)}{k^2+1} < (k+1)^2. \tag{4}$$

Z nich však vyplýva iba to, že počet celých čísel v intervale (1) je rovný buď číslu $(k+1)^2-1$, alebo číslu $(k+1)^2$. K presnému určeniu tohto počtu sa zdá byť nevyhnutné určiť najmenšie celé číslo $(k-2)$ a najväčšie celé číslo (k^2+3k-2), ktoré v danom intervale ležia.

A – II – 1

Po vynásobení kladným číslom $4(a+1)(b+1)(c+1)$ postupnými ekvivalentnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}
4a(c+1)+4b(a+1)+4c(b+1) &\geqq 3(a+1)(b+1)(c+1),\\
4(ac+c)+4(ab+b)+4(bc+c) &\geqq 3(ab+a+b+1)(c+1),\\
4(ab+ac+bc+a+b+c) &\geqq 3(abc+ab+ac+bc+a+b+c+1),\\
ab+ac+bc+a+b+c &\geqq 3(abc+1).
\end{aligned}$$

Pretože $abc = 1$, dostaneme po dosadení do pravej strany poslednej nerovnosti nerovnosť

$$ab+ac+bc+a+b+c \geqq 6. \tag{1}$$

Ak ešte dosadíme do ľavej strany $ab=1/c$, $ac=1/b$ a $bc=1/a$, dostaneme nerovnosť

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(c+\frac{1}{c}\right) \geqq 6,$$

ktorá platí, lebo hodnota každej zátvorky na ľavej strane je aspoň 2. Pre každé $t > 0$ je totiž splnená nerovnosť $t + t^{-1} \geqq 2$, v ktorej nastane rovnosť práve vtedy, keď $t = 1$. (Tento známy fakt možno zdôvodniť napr. úpravou nerovnosti $(\sqrt{t} - \sqrt{t^{-1}})^2 \geqq 0$, alebo sa možno odvolať na nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom dvoch navzájom prevrátených čísel.) Zároveň vidíme, že rovnosť v nerovnosti (1), a teda aj v nerovnosti z textu úlohy, nastane práve vtedy, keď platí $a = b = c = 1$. Tým je riešenie celej úlohy ukončené.

Poznámka. Dodajme, že za predpokladu $abc = 1$ nerovnosť (1) vyplýva priamo z nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom šestice čísel ab, ac, bc, a, b, c:

$$\frac{ab + ac + bc + a + b + c}{6} \geqq \sqrt[6]{ab \cdot ac \cdot bc \cdot a \cdot b \cdot c} = \sqrt{abc} = 1.$$

A – II – 2

Keď odčítame od prvej rovnice druhú, dostaneme postupnými úpravami

$$(xy + xz + x) - (yz + xy + y) = (y^2 + z^2 - 5) - (z^2 + x^2 - 5),$$
$$(x - y)z + x - y = (y - x)(y + x),$$
$$(x - y)(x + y + z + 1) = 0.$$

Analogicky odvodíme rovnosti

$$(y - z)(x + y + z + 1) = 0 \quad \text{a} \quad (x - z)(x + y + z + 1) = 0. \tag{1}$$

Vo všetkých troch odvodených rovnostiach vystupuje činiteľ $x + y + z + 1$. Rozlíšime preto, či je rovný nule, alebo nie.

A. Nech $x + y + z + 1 = 0$. Potom môžeme pôvodnú sústavu rovníc prepísať na

$$x \cdot (-x) = y^2 + z^2 - 5, \quad y \cdot (-y) = z^2 + x^2 - 5, \quad z \cdot (-z) = x^2 + y^2 - 5.$$

Vidíme, že sústava je ekvivalentná s jedinou rovnicou $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, ktorá (vzhľadom k nezápornosti druhých mocnín) má v obore celých čísel iba také riešenia, že trojica (x^2, y^2, z^2) je (až na poradie) trojicou $(4, 1, 0)$, takže (x, y, z) je permutácia niektorej z trojíc $(\pm 2, \pm 1, 0)$. Znamienka čísel x, y, z ľahko určíme z podmienky $x + y + z + 1 = 0$ – vyhovuje jedine trojica $(-2, 1, 0)$ a ľubovoľná jej permutácia. V prípade A teda dostávame práve šesť riešení danej sústavy.

B. Nech $x + y + z + 1 \neq 0$. Potom z rovníc odvodených v úvode riešenia vyplýva, že platí $x = y = z$. Daná sústava je teda ekvivalentná s jedinou rovnicou $x(2x + 1) = 2x^2 - 5$, ktorej vyhovuje iba $x = -5$. V prípade B preto máme jediné riešenie $x = y = z = -5$.

Dodajme, že v prvej časti riešenia sme mohli pôvodnú sústavu rovníc upraviť aj na tvar

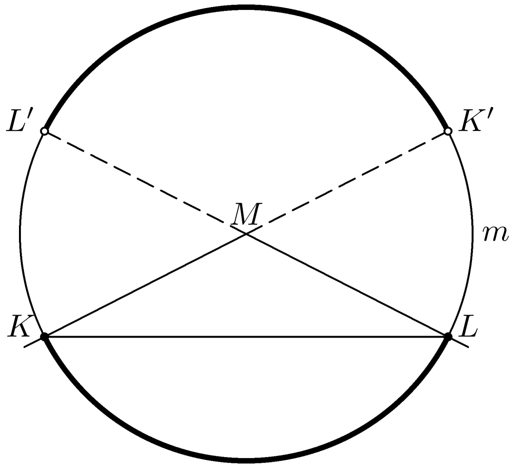
$$x^2 + y^2 + z^2 - 5 = x(x + y + z + 1) = y(x + y + z + 1) = z(x + y + z + 1). \tag{2}$$

Odtiaľ opäť dostávame, že platí buď $x + y + z + 1 = 0$, alebo $x = y = z$.

Odpoveď. Sústava má sedem riešení – trojicu $(-5, -5, -5)$, trojicu $(-2, 1, 0)$ a jej ľubovoľnú permutáciu.

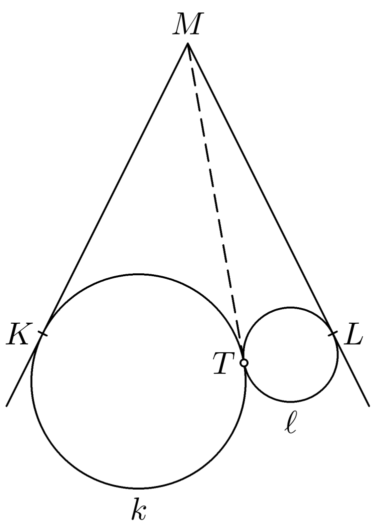
A – II – 3

Ukážeme, že hľadanú množinu tvoria body K a L a ďalej vnútorné body kratšieho oblúka KL kružnice $m(M, |MK|)$ a oblúka $K'L'$ súmerne združeného s oblúkom KL v stredovej súmernosti podľa stredu M (obr. 26).



Obr. 26

Dokážme najskôr, že priamka MT (obr. 27) je (vnútornou) spoločnou dotyčnicou kružníc k a ℓ. Pripusťme, že priamka MT pretne kružnicu k v bodoch T, T_1 a kružnicu ℓ



Obr. 27

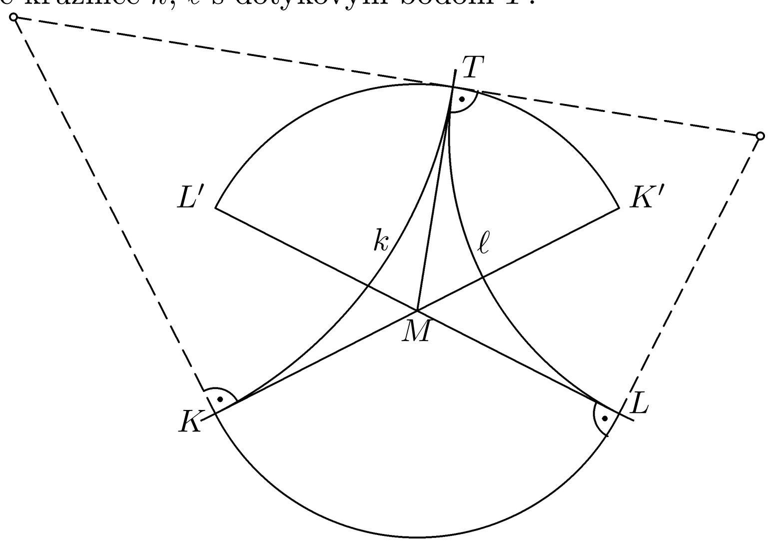
v bodoch T, T_2. Pre mocnosti bodu M (je to bod dotyčnice, preto leží vo vonkajšej oblasti každej z oboch kružníc k a ℓ) k obom kružniciam platí

$$|MT| \cdot |MT_1| = |MK|^2 = |ML|^2 = |MT| \cdot |MT_2|,$$

odkiaľ $|MT_1| = |MT_2|$. Pretože oba body T_1, T_2 ležia na polpriamke MT, vyplýva odtiaľ $T_1 = T_2$. Obe kružnice k a ℓ však majú spoločný jediný bod, takže $T_1 = T_2 = T$. Preto je MT spoločná dotyčnica oboch kružníc a navyše $|MT| = |MK| = |ML|$, bod T teda leží na kružnici $m(M, |MK|)$.

Pretože priamka MT obe kružnice oddeľuje, neležia body K a L vnútri tej istej polroviny určenej priamkou MT. Priamka MT pretína stranu KL trojuholníka KLM, a preto bod T leží na jednom z kratších oblúkov KL, $K'L'$ kružnice m.

Ak je naopak T ľubovoľný vnútorný bod jedného z týchto oblúkov (obr. 28), ležia konvexné uhly KMT a LMT na opačných stranách spoločného ramena MT. Z rovností $|MK| = |MT|$ a $|ML| = |MT|$ potom vyplýva, že do spomenutých uhlov možno vpísať kružnice tak, aby sa dotkli ramien príslušného uhla v bodoch K a T, resp. L a T. To sú vyhovujúce kružnice k, ℓ s dotykovým bodom T.



Obr. 28

Ak $T = K$, vyhovuje ľubovoľná kružnica k dotýkajúca sa priamky MK v bode K a ležiaca v polrovine MKL' a kružnica ℓ dotýkajúca sa ramien uhla KML v bodoch K a L (tá je určená jednoznačne). Analogicky zostrojíme vyhovujúce kružnice k a ℓ pre bod $T = L$.

Bod K' ani bod L' do hľadanej množiny patriť nemôžu, pretože K' leží na dotyčnici KM k ľubovoľnej z kružníc k a analogicky bod L' leží na dotyčnici LM k ľubovoľnej z kružníc ℓ.

A – II – 4

Označme x a y hľadané čísla, pričom $x > y$. Pretože $p = x - y$ je prvočíslo a pre najväčší spoločný deliteľ d čísel x a y platí $d \mid (x - y)$, čiže $d \mid p$, platí buď $d = p$, alebo $d = 1$.

Keby platilo $d = p$, mali by sme $y = kp$ a $x = y + p = (k + 1)p$ pre vhodné prirodzené k, takže súčin xy by sa rovnal číslu $k(k + 1)p^2$. To ale nie je druhá mocnina prirodzeného čísla (ďalej stručnejšie „štvorec“) pre žiadne k, lebo číslo $k(k+1)$ nie je nikdy štvorec.[1] Preto nutne $d = 1$, takže čísla x a y sú nesúdeliteľné. Ich súčin xy je potom štvorcom jedine v prípade, keď oba činitele sú štvorce, teda $x = u^2$ a $y = v^2$ pre vhodné $u, v \in \mathbb{N}$, $u > v$, odkiaľ $p = x - y = (u-v)(u+v)$. Taký rozklad prvočísla p na súčin má jediné možné činitele $u - v = 1$ a $u + v = p$. Odtiaľ jednoducho vyplývajú rovnosti $u = (p+1)/2$ a $v = (p-1)/2$, z ktorých pre súčet $s = x+y$ získame vyjadrenie

$$s = x + y = u^2 + v^2 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 = \frac{p^2+1}{2}.$$

Dekadický zápis čísla s podľa zadania končí číslicou 3, takže zápis čísla p^2+1 (rovného číslu $2s$) končí číslicou 6. Zápis čísla p^2 preto končí číslicou 5, je teda násobkom piatich, čo nastane jedine pre prvočíslo $p = 5$. Dosadením tejto hodnoty do odvodených vzťahov dostaneme $u = 3$, $v = 2$, $x = 9$ a $y = 4$. Skúška je triviálna: $9 - 4 = 5$, $9 + 4 = 13$, $9 \cdot 4 = 6^2$.

Odpoveď. Podmienkam úlohy vyhovuje jediná dvojica čísel 9 a 4.

A – III – 1

Označme c, resp. d diferencie hľadaných postupností. Z vyjadrenia $x_i = x_1 + (i-1)c$ a $y_i = x_1 + (i-1)d$ dostaneme pre každé i rovnosť

$$x_i y_i = x_1^2 + (i-1)x_1(c+d) + (i-1)^2 cd.$$

Budeme sa teda zaoberať otázkou, kedy pre niektorý index $k > 1$ platia rovnosti

$$x_1^2 + (k-2)x_1(c+d) + (k-2)^2 cd = 42, \tag{1}$$
$$x_1^2 + (k-1)x_1(c+d) + (k-1)^2 cd = 30, \tag{2}$$
$$x_1^2 + kx_1(c+d) + k^2 cd = 16. \tag{3}$$

Keď odčítame od dvojnásobku rovnosti (2) súčet rovností (1) a (3), dostaneme po úprave rovnosť $cd = -1$. Keď odčítame od rovnosti (3) rovnosť (2), získame vzťah

$$x_1(c+d) + (2k-1)cd = 14,$$

z ktorého po dosadení hodnoty $cd = -1$ dôjdeme k rovnosti

$$x_1(c+d) = 2k - 15. \tag{4}$$

Dosadením tohto výsledku do rovnice (3) dostaneme vzťah

$$x_1^2 + k(2k-15) - k^2 = 16,$$

[1] Platí totiž $k^2 < k(k+1) < (k+1)^2$, takže číslo $k(k+1)$ leží medzi dvoma susednými štvorcami. Iné vysvetlenie možno založiť na tom, že čísla k, $k+1$ sú navzájom nesúdeliteľné, takže by obe museli byť štvorcami líšiacimi sa o 1. Také štvorce však neexistujú.

z ktorého vyjadríme x_1^2 ako kvadratickú funkciu indexu k:

$$x_1^2 = 16 - k(2k - 15) + k^2 = 16 + 15k - k^2 = (k + 1)(16 - k).$$

Pretože $x_1^2 \geqq 0$ a $k > 1$, vyplýva z posledného vzťahu odhad $k \leqq 16$. V prípade $k = 16$ však vychádza $x_1 = 0$ a rovnosť (4) tak prejde na tvar $0(c + d) = 2$, čo nie je možné. Pre $k = 15$ dostaneme $x_1^2 = 16$, takže $x_1 = \pm 4$. Pre $x_1 = 4$ (a $k = 15$) z (4) vyplýva $c + d = 15/4$, čo spolu s rovnosťou $cd = -1$ vedie k záveru, že $\{c, d\} = \{4, -1/4\}$. To znamená, že obe postupnosti sú (až na poradie) určené vzťahmi

$$x_i = 4 + (i - 1)4 \quad \text{a} \quad y_i = 4 - \frac{i - 1}{4} \quad \text{pre každé } i. \tag{5}$$

Pre takú dvojicu postupností naozaj platí

$$x_{14}y_{14} = 56 \cdot \tfrac{3}{4} = 42, \quad x_{15}y_{15} = 60 \cdot \tfrac{1}{2} = 30 \quad \text{a} \quad x_{16}y_{16} = 64 \cdot \tfrac{1}{4} = 16.$$

Podobne pre druhú možnú hodnotu $x_1 = -4$ dostaneme postupnosti, ktorých členy sú opačné k členom postupností (5), teda postupnosti

$$x_i = -4 - (i - 1)4 \quad \text{a} \quad y_i = -4 + \frac{i - 1}{4} \quad \text{pre každé } i. \tag{6}$$

Odpoveď. Najväčšia hodnota indexu k je 15 a všetky vyhovujúce postupnosti sú (až na možnú zámenu poradia vo dvojici) určené vzťahmi (5) a (6).

A – III – 2

Najprv v závislosti od daného čísla m ($1 \leqq m \leqq 47$) vyjadríme, koľko množín X popísanej vlastnosti má najmenší prvok rovný zvolenému číslu m. Na to vydelíme číslo 47 číslom m so zvyškom,

$$47 = qm + r \quad (q \geqq 1,\ 0 \leqq r < m),$$

a ukážeme, že existuje práve $(q + 1)^r q^{m-1-r}$ vyhovujúcich množín X s najmenším prvkom m. Pretože každá taká množina X je podmnožinou množiny

$$\mathsf{T}_m = \{m, m + 1, \dots, 47\},$$

rozdelíme množinu T_m na najviac m skupín čísel tak, aby sa čísla v rovnakej skupine navzájom líšili o násobky čísla m. Dostaneme tak q-prvkovú skupinu

$$\mathsf{P}_0 = \{m, 2m, \dots, qm\},$$

v prípade $r > 0$ ďalších r skupín s q prvkami

$$\mathsf{P}_i = \{m + i, 2m + i, \dots, qm + i\} \quad (1 \leqq i \leqq r),$$

a v prípade $r < m-1$ a $q > 1$ ešte $m-r-1$ skupín s $q-1$ prvkami

$$\mathsf{P}_i = \{m+i, 2m+i, \dots, (q-1)m+i\} \quad (r+1 \leqq i \leqq m-1).$$

Vo všeobecnosti možno povedať, že každú skupinu P_i tvoria práve tie čísla z T_m, ktoré pri delení číslom m dávajú zvyšok i; ako sme uviedli, niektoré z týchto m skupín $\mathsf{P}_0, \dots, \mathsf{P}_{m-1}$ môžu byť prázdne.

Množina $\mathsf{X} \subseteq \mathsf{T}_m = \mathsf{P}_0 \cup \mathsf{P}_1 \cup \ldots \cup \mathsf{P}_{m-1}$ s najmenším prvkom m má zrejme požadovanú vlastnosť práve vtedy, keď obsahuje celú skupinu P_0 a zároveň pre každé $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ buď neobsahuje žiadny prvok z P_i, alebo obsahuje všetky prvky z P_i *od určitého prvku počnúc.* Pre každú z r skupín $\mathsf{P}_1, \dots, \mathsf{P}_r$ tak máme $q+1$ možností a pre každú z $m-r-1$ skupín $\mathsf{P}_{r+1}, \dots, \mathsf{P}_{m-1}$ máme q možností, ako vybrať prvky pre X. Pretože tieto výbery môžeme kombinovať nezávisle, je počet množín X naozaj rovný číslu $(q+1)^r q^{m-1-r}$. (Platí to aj pre prípady $r = 0$, $r = m-1$ alebo $q = 1$, keď niektoré zo skupín P_i sú prázdne.)

Teraz zistíme, kedy pre neúplný podiel q a zvyšok r z rovnosti $47 = qm + r$ platí

$$(q+1)^r q^{m-1-r} = 2^{15}. \tag{1}$$

V prípade $q = 1$ dostávame z (1) rovnosť $2^r = 2^{15}$, odkiaľ $r = 15$, a z rovnosti $47 = m + r$ potom vychádza $m = 32$.

V prípade $q > 1$ musí byť v rovnici (1) jedna z mocnín $(q+1)^r$, q^{m-1-r} rovná 2^{15} a druhá rovná jednej, teda musí mať nulový exponent. Rozoberieme teraz možné hodnoty $q > 1$ v rastúcom poradí a pri každej z nich overíme, či príslušné riešenie rovnice (1) spĺňa podmienku $47 = qm + r$:

a) $q = 2^1$, $m-1-r = 15$ a $r = 0$. Potom $m = 16$ a $qm + r = 32$ – nevyhovuje.

b) $q = 2^3 - 1$, $r = 5$ a $m-1-r = 0$. Potom $m = 6$ a $qm + r = 47$ – vyhovuje.

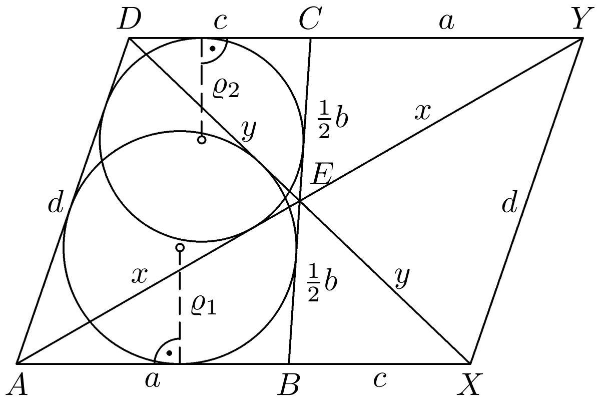
c) $q = 2^3$, $m-1-r = 5$ a $r = 0$. Potom $m = 6$ a $qm + r = 48$ – nevyhovuje.

Z podmienky $47 = qm + r$ vyplýva, že najväčšie možné hodnoty q sú 47 (pre $m = 1$) a 23 (pre $m = 2$). Zostávajúce možnosti ($q = 2^5 - 1$, $q = 2^5$, $q = 2^{15} - 1$, $q = 2^{15}$) už preto nie je nutné detailne preberať.

Odpoveď. Hľadané hodnoty m sú dve: $m = 6$ a $m = 32$.

A – III – 3

Označme $x = |AE|$, $y = |DE|$ a doplňme lichobežník $ABCD$ na rovnobežník $AXYD$ tak, aby bod E bol priesečníkom jeho uhlopriečok AY a DX (obr. 29). Zrejme platí $|AX| = |DY| = a + c$, $|AY| = 2x$ a $|DX| = 2y$.



Obr. 29

Označme ϱ_1 (resp. ϱ_2) polomer kružnice vpísanej dotyčnicovému štvoruholníku $ABED$ (resp. $AECD$), ktorá je zároveň vpísaná trojuholníku AXD (resp. AYD). Pre dĺžky strán týchto štvoruholníkov podľa známeho kritéria platia rovnosti

$$a + y = \frac{b}{2} + d = c + x,$$

čiže

$$a + y = c + x, \tag{1}$$

takže oba štvoruholníky majú rovnaký obvod. Trojuholníky AXD a AYD majú zasa rovnaký obsah (rovný $S_{AXYD}/2$, teda rovný S_{ABCD}). Pomer $\varrho_1 : \varrho_2$ sa preto rovná jednak pomeru obsahov $S_{ABED} : S_{AECD}$, jednak pomeru obvodov $o_{AYD} : o_{AXD}$ (tie sme zapísali v opačnom poradí ako príslušné polomery). Oba tieto pomery teraz vyjadríme a potom porovnáme (v označuje výšku lichobežníka $ABCD$):

$$\frac{S_{ABED}}{S_{AECD}} = \frac{S_{ABCD} - S_{CDE}}{S_{ABCD} - S_{ABE}} = \frac{\frac{1}{2}(a+c)v - \frac{1}{2}c \cdot \frac{1}{2}v}{\frac{1}{2}(a+c)v - \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}v} = \frac{2a+c}{a+2c},$$

$$\frac{o_{AYD}}{o_{AXD}} = \frac{2x + (a+c) + d}{2y + (a+c) + d}.$$

Spolu s (1) tak pre neznáme x, y dostávame sústavu lineárnych rovníc

$$\frac{2a+c}{a+2c} = \frac{2x+a+c+d}{2y+a+c+d} \qquad \text{a} \qquad x - y = a - c,$$

ktorá má pri podmienke $a \neq c$ (zaručenej tým, že $ABCD$ je *licho*bežník) jediné riešenie

$$x = \frac{3a+c-d}{2} \qquad \text{a} \qquad y = \frac{a+3c-d}{2}. \tag{2}$$

Dosadením (2) do rovnosti (1) dostaneme prvý dokazovaný vzťah $3(a+c) = b + 3d$. S jeho pomocou možno (2) prepísať do tvaru

$$x = a + \frac{b}{6} \qquad \text{a} \qquad y = c + \frac{b}{6}.$$

S týmto vyjadrením dĺžok x, y využijeme kosínusové vety pre trojuholníky ABE, CDE k výpočtu kosínusu uhla ABE resp. DCE:

$$\cos|\sphericalangle ABE| = \frac{a^2 + (\frac{1}{2}b)^2 - (a + \frac{1}{6}b)^2}{2a \cdot \frac{1}{2}b} = \frac{2b}{9a} - \frac{1}{3},$$
$$\cos|\sphericalangle DCE| = \frac{c^2 + (\frac{1}{2}b)^2 - (c + \frac{1}{6}b)^2}{2c \cdot \frac{1}{2}b} = \frac{2b}{9c} - \frac{1}{3}.$$

Pretože sa uhly ABE a DCE dopĺňajú do $180°$, je súčet ich kosínusov rovný nule:

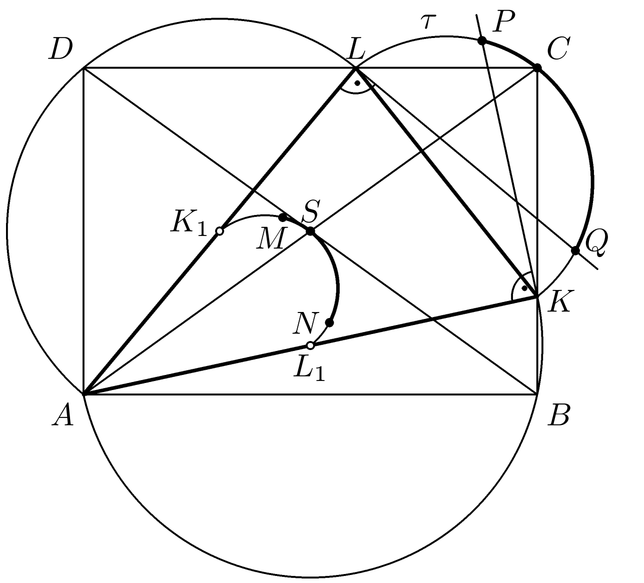
$$\left(\frac{2b}{9a} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2b}{9c} - \frac{1}{3}\right) = 0.$$

Odtiaľ už jednoduchou úpravou dostaneme druhý dokazovaný vzťah

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{3}{b}.$$

A – III – 4

Označme K_1 stred strany AL a L_1 stred strany AK. Ukážeme, že hľadanou množinou bodov S je oblúk MN, ktorý je časťou polkružnice zostrojenej nad priemerom K_1L_1 v polrovine opačnej k polrovine K_1L_1A, pritom krajné body M, N spomenutého oblúka sú určené podmienkami $ML_1 \perp AK$ a $NK_1 \perp AL$ (obr. 30).



Obr. 30

Pretože priesečník S uhlopriečok AC, BD je stredom úsečky AC, množinu všetkých bodov S dostaneme, keď najprv určíme množinu vrcholov C a tú potom zobrazíme v rovnoľahlosti so stredom A a koeficientom $1/2$. Pretože uhol KCL je pravý (nemôže byť ani $C = K$, ani $C = L$) a priamka KL body A a C oddeľuje, leží bod C na polkružnici τ zostrojenej nad priemerom KL v polrovine opačnej k polrovine KLA. Ktoré body $C \in \tau$ sú skutočne vrcholy vyhovujúcich pravouholníkov $ABCD$? Zrejme práve tie, pre ktoré polpriamky CK a CL pretnú analogicky zostrojené polkružnice nad priemermi AK a AL (v bodoch, ktoré budú vrcholmi B a D). Sú to body oblúka $PQ \subset \tau$, ktorého krajné body P, Q sú určené podmienkami $PK \perp AK$ a $QL \perp AL$. Hľadaná množina bodov S je preto obrazom oblúka PQ v spomenutej rovnoľahlosti, takže to je naozaj oblúk MN opísaný v úvode riešenia (body M, N sú obrazmi bodov P a Q, lebo bod L_1 je obrazom bodu K a bod K_1 je obrazom bodu L).

A – III – 5

V prvej časti riešenia predpokladajme, že prvá z daných kvadratických rovníc má korene u, v a druhá z nich má korene u, v^{-1}. Potom platia vzťahy

$$p = -(u+v), \quad q = uv, \quad r = -\Big(u + \frac{1}{v}\Big), \quad s = u \cdot \frac{1}{v}. \tag{1}$$

Po ich dosadení do jednotlivých strán rovností, ktoré máme dokázať, dostaneme

$$\begin{aligned}
pr &= (u+v)\Big(u+\frac{1}{v}\Big) &&= \frac{(u+v)(uv+1)}{v},\\
(q+1)(s+1) &= (uv+1)\Big(\frac{u}{v}+1\Big) &&= \frac{(uv+1)(u+v)}{v},\\
p(q+1)s &= -(u+v)(uv+1)\cdot\frac{u}{v} &&= -\frac{(u+v)(uv+1)u}{v},\\
r(s+1)q &= -\Big(u+\frac{1}{v}\Big)\Big(\frac{u}{v}+1\Big)\cdot uv &&= -\frac{(uv+1)(u+v)u}{v},
\end{aligned}$$

takže vidíme, že naozaj platia rovnosti

$$pr = (q+1)(s+1) \quad \text{a} \quad p(q+1)s = r(s+1)q. \tag{2}$$

Všimnime si ešte, že rovnako platia rovnosti

$$-\frac{ps}{s+1} = \frac{(u+v)\cdot\dfrac{u}{v}}{\dfrac{u}{v}+1} = u \qquad \text{a} \qquad -\frac{p}{s+1} = \frac{u+v}{\dfrac{u}{v}+1} = v,$$

ktoré nám naznačujú, ako postupovať pri dôkaze opačnej implikácie.

V druhej časti riešenia predpokladajme, že čísla p, q, r, s spĺňajú rovnosti (2) a navyše platí $q \neq -1$ a $s \neq -1$. Z prvej rovnosti (2) potom vyplýva $p \neq 0$ a $r \neq 0$, takže rovnosti (2) možno upraviť na tvar

$$\frac{p}{s+1} = \frac{q+1}{r} \quad \text{a} \quad \frac{ps}{s+1} = \frac{rq}{q+1}. \tag{3}$$

Definujme reálne čísla u, v pomocou vzťahov

$$u = -\frac{ps}{s+1} \quad \text{a} \quad v = -\frac{p}{s+1}. \tag{4}$$

Potom platí $v \neq 0$ a podľa (4) možno rovnako písať

$$u = -\frac{rq}{q+1} \quad \text{a} \quad v = -\frac{q+1}{r}. \tag{5}$$

Ak overíme, že čísla u, v spĺňajú všetky štyri vzťahy (1), bude to znamenať, že (u, v) a (u, v^{-1}) sú dvojice koreňov kvadratických rovníc z textu úlohy a riešenie úlohy bude hotové. Podľa (4) a (5) je ale overenie vzťahov (1) ľahké:

$$\begin{aligned} -(u+v) &= \frac{ps}{s+1} + \frac{p}{s+1} = p, \\ uv &= \frac{-rq}{q+1} \cdot \frac{-(q+1)}{r} = q, \\ -\Big(u + \frac{1}{v}\Big) &= \frac{rq}{q+1} + \frac{r}{q+1} = r, \\ u \cdot \frac{1}{v} &= \frac{-ps}{s+1} \cdot \frac{-(s+1)}{p} = s. \end{aligned}$$

A – III – 6

Ukážeme, že požadovaným spôsobom nemožno ofarbiť pätnásticu čísel

$$\underbrace{5, 4, 3, 2, 1}_{\text{I}}, \underbrace{9, 8, 7, 6}_{\text{II}}, \underbrace{12, 11, 10}_{\text{III}}, \underbrace{14, 13}_{\text{IV}}, \underbrace{15}_{\text{V}},$$

pod ktorou sme vyznačili rozdelenie na päť skupín susedných čísel (tvoriacich klesajúce postupnosti).

Pripusťme, že uvedenú pätnásticu sme zapísali štyrmi farbami tak, že čísla s rovnakou farbou tvoria monotónne postupnosti. V skupine I je päť čísel, dve z nich preto majú rovnakú farbu; pretože tvoria klesajúcu postupnosť, farbu týchto dvoch čísel nemá žiadne z čísel skupín II až V. V nich sú teda iba čísla troch farieb; farbu dvoch čísel zo skupiny II nemá žiadne z čísel skupín III až V, v ktorých sú teda iba čísla dvoch farieb. Ešte jedným opakovaním predchádzajúcej úvahy zistíme, že čísla 14, 13 a 15 zo skupín IV a V sú jednej farby, a to je spor.

Iné riešenie. Ukážeme, že požadovaným spôsobom nemožno ofarbiť pätnásticu čísel

$$\underbrace{6, 9, 4, 5, 8, 7}_{\text{I}}, \underbrace{1, 3, 2}_{\text{II}}, \underbrace{13, 15, 14}_{\text{III}}, \underbrace{10, 12, 11}_{\text{IV}},$$

pod ktorou sme vyznačili rozdelenie na štyri skupiny susedných čísel.

Pripusťme, že uvedenú pätnásticu sme zapísali štyrmi farbami tak, že čísla s rovnakou farbou tvoria monotónne postupnosti. Vyskúšaním možno ľahko overiť, že v skupine I musia byť použité aspoň 3 farby. Zrejme v každej zo skupín II, III a IV musia byť použité aspoň 2 farby. Z Dirichletovho princípu potom vyplýva, že niektorá farba je použitá v troch skupinách. A to je spor, pretože neexistuje monotónna postupnosť troch čísel, z ktorých je každé v inej skupine.

Prípravné sústredenia pred IMO

Pred medzinárodnou matematickou olympiádou (IMO) sa každoročne koná jedno výberové a jedno prípravné sústredenie pre najlepších riešiteľov tretieho kola kategórie A. Po výberovom sústredení SK MO vyberie 6 najlepších študentov do reprezentačného družstva Slovenska a určí jedného náhradníka.

Na výberovom sústredení pred IMO sa zúčastnilo 13 súťažiacich, najúspešnejších riešiteľov tretieho kola MO kategórie A. Sústredenie sa konalo v dňoch 24. – 30. 4. 2005 v Bratislave. Úlohy zadávali lektori z FMFI UK Bratislava:

Martin Potočný, úlohy 1 – 3,
Ján Mazák, úlohy 4 – 7,
Mgr. Tomáš Jurík, úlohy 8 – 10,
Mgr. Peter Novotný, úlohy 11 – 13,
Tomáš Váňa, úlohy 14 – 17.

Každý deň študenti riešili sériu troch či štyroch úloh pri podobných podmienkach ako na IMO. V poobedňajších hodinách sa konal spoločný rozbor úloh s lektorom. Na konci sústredenia sa získané body za jednotlivé dni sčítali a s prihliadnutím na výsledky tretieho kola MO bolo vybrané šesťčlenné družstvo pre účasť na IMO.

Výsledky sústredenia:

Ondrej Budáč	44,5
Michal Burger	31
František Simančík	29
Peter Černo	28,5
Jakub Závodný	27,5
Jozef Bodnár	25
Tamás Mészáros	22,5
Andrej Borsuk	21,5
Jaroslav Knebl	19,5
István Estélyi	18
Peter Perešíni	18
Michal Ďuriš	11
Stanislava Sojáková	10,5

Poradie po zohľadnení výsledkov CKMO:

1.	*Ondrej Budáč*	78,5
2.	*Michal Burger*	66
3.	*Jakub Závodný*	60,5
4.	*František Simančík*	57
5.	*Peter Černo*	52,5
6.	*Jozef Bodnár*	49
7.	*Tamás Mészáros*	46,5
8.	*Andrej Borsuk*	44,5
9.	*Jaroslav Knebl*	42,5
10.	*István Estélyi*	41
	Peter Perešíni	41
12.	*Michal Ďuriš*	33
13.	*Stanislava Sojáková*	32,5

Druhé sústredenie sa konalo v dňoch 12. – 18. 6. 2005 v Bratislave. Sústredenie bolo zamerané obzvlášť na prípravu šesťčlenného reprezentačného družstva. Lektormi boli:

Mgr. Tomáš Jurík, (Nerovnosti),
Mgr. Juraj Földes, (Teória čísel),
Martin Potočný, (Kombinatorika),
Ján Mazák, (Geometria),
Mgr. Peter Novotný, (Funkcionálne rovnice).

Zadania súťažných úloh výberového sústredenia pred IMO

1. Daná je priamka p a kružnica k, ktorá s ňou nemá spoločný bod. Nech AB je jej priemer kolmý na p, pričom B je bližšie k p ako A. Vyberieme ľubovoľný bod $C \neq A, B$ na k. Priamka AC pretína priamku p v bode D. Priamka DE je dotyčnicou k v bode E, pričom B a E sú na tej istej strane AC. Priamka BE pretína p v bode F a priamka AF pretína k v $G \neq A$. Nech H je obraz bodu G v súmernosti podľa priamky AB. Dokážte, že H leží na priamke CF.

2. Nech a, b, c sú kladné reálne čísla, pre ktoré platí $ab + bc + ca = 1$. Dokážte nerovnosť
$$\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} \leqq \frac{1}{abc}.$$
Kedy nastáva rovnosť?

3. Nech A je matica typu $n \times n$ a nech X_i je množina koeficientov v i-tom riadku a Y_j je množina koeficientov v j-tom stĺpci (pre všetky $1 \leqq i, j \leqq n$). Maticu A nazveme *zlatá*, ak $X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ sú rôzne množiny. Nájdite najmenšie n také, že existuje zlatá matica typu 2005×2005 s množinou koeficientov $\{1, 2, \ldots, n\}$.

4. Reálne čísla x, y, z spĺňajú vzťahy
$$x + y + z = 4,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 6.$$
Aké hodnoty môže nadobúdať x?

5. Daná je tabuľka 25×100. Allan a Bob hrajú takúto hru: Hráč, ktorý je na ťahu, nakreslí trojuholník s vrcholmi v stredoch políčok tabuľky. Žiadne dva nakreslené trojuholníky nesmú mať spoločný bod. V ťahoch sa hráči pravidelne striedajú. Prehráva ten, čo je na ťahu, ale už nemôže nakresliť žiaden ďalší trojuholník. Allan začína. Má niektorý z hráčov víťaznú stratégiu?

6. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Nech P, N sú päty jeho výšok z vrcholov A, B. Nech K, L sú priesečníky osí uhlov BAC, ABC s protiľahlými stranami. Nech O je stred opísanej kružnice a I stred vpísanej kružnice trojuholníka ABC. Dokážte, že body N, P, I sú kolineárne práve vtedy, keď body L, K, O sú kolineárne.

7. Nájdite všetky prirodzené čísla n také, že $n \mid 3^n - 2^n$.

8. Nech P je konvexný mnohouholník. Dokážte, že existuje konvexný šesťuholník, ktorý je vpísaný do P a obsahuje aspoň 75% jeho obsahu.

9. Majme tri postupnosti $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $(z_2, z_3, \ldots, z_{2n})$ kladných reálnych čísel, pričom platí

$$z_{i+j} \geqq x_i y_j, \quad \text{pre všetky } 1 \leqq i, j \leqq n.$$

Označme $M = \max\{z_2, z_3, \ldots, z_{2n}\}$. Dokážte nerovnosť

$$\left(\frac{M + z_2 + z_3 + \cdots + z_{2n}}{2n}\right)^2 \geqq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \cdot \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}.$$

10. Nech $f(k)$ označuje počet prirodzených čísel n s vlastnosťami
i) $0 \leqq n < 10^k$, t. j. číslo n má v desiatkovom zápise práve k číslic (nuly na začiatku sú povolené);
ii) číslice čísla n môžu byť poprehadzované tak, že výsledné číslo bude deliteľné číslom 11 bezo zvyšku.

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo m platí $f(2m) = 10f(2m-1)$.

11. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktoré spĺňajú rovnosť

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y$$

pre každú dvojicu reálnych čísel x, y.

12. Pre dané prirodzené číslo $n > 1$ označme s_n súčin všetkých takých kladných celých čísel x menších ako n, že n je deliteľom čísla $x^2 - 1$. (Máme teda $s_2 = 1$, $s_3 = 1 \cdot 2$, $s_4 = 1 \cdot 3$, ...) Pre každé $n > 1$ určte zvyšok s_n po delení číslom n.

13. Daný je trojuholník ABC. Označme postupne P, Q, R päty kolmíc spustených z vrcholov A, B, C na osi vonkajších uhlov trojuholníka pri vrcholoch C, A, B. Označme d priemer kružnice opísanej trojuholníku PQR. Dokážte, že $d^2 = \varrho^2 + s^2$, pričom ϱ je polomer kružnice vpísanej do trojuholníka ABC a s je polovica obvodu trojuholníka ABC.

14. Označme $p(k)$ najväčší nepárny deliteľ prirodzeného čísla $k \geqq 1$. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$\frac{2}{3}n < \sum_{k=1}^{n} \frac{p(k)}{k} < \frac{2}{3}(n+1).$$

15. Políčka šachovnice $n \times n$, kde $n \geqq 3$, sú zafarbené na čierno a bielo klasickým spôsobom. V jednom ťahu môžeme vybrať štvorec 2×2 a zmeniť farbu všetkých jeho políčok na opačnú. Nájdite všetky n také, že po konečnom počte popísaných ťahov vieme zafarbiť šachovnicu tak, že všetky políčka majú rovnakú farbu.

16. Nech O je stred kružnice opísanej ostrouhlému trojuholníku ABC, v ktorom platí $\beta < \gamma$. Priamka AO pretína stranu BC v bode D. Stredy kružníc opísaných trojuholníkom ABD a ACD označme postupne E a F. Bod G leží na priamke AB tak, že bod A je vnútorným bodom úsečky BG a platí $|AG| = |AC|$. Bod H leží na priamke AC tak, že bod A je vnútorným bodom úsečky CH a platí $|AH| = |AB|$. Dokážte, že štvoruholník $EFGH$ je obdĺžnik práve vtedy, keď $\gamma - \beta = 60°$.

17. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ spĺňajúce $f(1) > 0$ a rovnosť $f(m^2 + n^2) = f(m)^2 + f(n)^2$ pre všetky m, n z $\mathbb{N}_0$.

5. česko–slovensko–poľské stretnutie

Zwardoń, 19. – 23. 6. 2005

V rámci záverečnej prípravy pred IMO sa uskutočnilo po piaty krát prípravné stretnutie medzi družstvami Českej republiky, Poľska a Slovenska. Jednotlivé krajiny reprezentovali šestice študentov, ktorí si vybojovali vo svojich krajinách účasť na 46. IMO v Mexiku.

Súťaž sa uskutočnila 20.–22. 6. 2005 v poľskom turistickom stredisku Zwardoń nachádzajúcom sa bezprostredne pri slovenskej hranici v horskom prostredí v tieni Kysuckých Beskýd. Všetky tri reprezentačné družstvá pricestovali na miesto konania už v nedeľu 19. júna. Organizácia a priebeh súťaže zostali nezmenené z predchádzajúcich ročníkov, prispôsobená je štýlu III. kola našej MO a podmienkam IMO. Súťažiacim boli počas dvoch dní predložené dve trojice súťažných úloh. Za každú správnu úlohu mohli získať najviac 7 bodov, t. j. celkove 42 bodov (rovnako ako na IMO). Na každú trojicu úloh mali súťažiaci vymedzené 4,5 hodiny čistého času.

Prehľad výsledkov:

Por.	Meno	Štát	1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$
1.	Michał Pilipczuk	Poľsko	7	7	2	7	7	6	36
2.	*František Simančík*	Slovensko	7	6	1	2	7	7	30
3.	*Michal Burger*	Slovensko	7	7	1	2	7	5	29
4.	Pavel Kocourek	Česká rep.	7	0	7	7	2	5	28
	Tomasz Kulczyński	Poľsko	7	7	2	0	7	5	28
6.	Tomasz Warszawski	Poľsko	7	6	1	2	4	7	27
7.	František Konopecký	Česká rep.	7	0	7	0	7	3	24
	Marek Pechal	Česká rep.	7	0	1	5	7	4	24
9.	*Ondrej Budáč*	Slovensko	7	0	2	0	7	7	23
10.	Jaromír Kuben	Česká rep.	6	0	7	2	0	7	22
11.	*Jozef Bodnár*	Slovensko	2	3	1	2	7	5	20
	Wojciech Śmietanka	Poľsko	6	6	1	7	0	0	20
13.	Nadbor Drozd	Poľsko	7	0	1	0	7	4	19
	Jakub Závodný	Slovensko	7	0	2	2	7	1	19
15.	Jakub Opršal	Česká rep.	7	0	1	2	7	0	17
16.	*Peter Černo*	Slovensko	7	0	2	2	0	0	11
17.	Piotr Achinger	Poľsko	1	0	1	2	6	0	10
18.	Jaroslav Hančl	Česká rep.	1	0	0	0	3	0	4

Štát	1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$
Česká rep.	35	0	23	16	26	19	119
Poľsko	35	26	8	18	31	22	140
Slovensko	37	16	9	10	35	25	132

Opravu riešení zabezpečila medzinárodná porota, ktorú tvorili *Dr. Waldemar Pompe* a *Mgr. Adam Osękowski* z Poľska, *Ján Mazák* a *Mgr. Peter Novotný* zo Slovenska a *RNDr. Karel Horák, CSc.*, *doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.* a *RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.* z Českej republiky.

Stretnutie plní najmä prípravnú funkciu, študenti majú možnosť zažiť „medzinárodnú“ súťaž, pritom náročnosťou sú zadané úlohy oveľa bližšie k úlohám IMO ako úlohy z predošlých kôl MO. Naši študenti podali očakávaný výsledok, pochváliť treba najmä *Františka Simančíka* a *Michala Burgera.*

Poľskí organizátori pripravili okrem pravidelnej súťaže aj súťaž družstiev, tzv. *Matematický súboj*, ktorý prebiehal v stredu 22. júna po vyhlásení výsledkov súťaže jednotlivcov. Nebojovali pritom proti sebe jednotlivé národné družstvá, ale všetkých 18 účastníkov sa rozdelilo na dve skupiny, ktoré stáli proti sebe. V každej skupine boli študenti zo všetkých troch krajín. Cieľom bolo vyriešiť čo najviac z 11 úloh a v rámci skupiny si navzájom vysvetliť riešenia, ktoré sa potom prezentovali podľa dopredu stanovených pravidiel.

Kvôli súboju sa stretnutie o jeden deň predĺžilo a domov účastníci cestovali až ráno vo štvrtok 23. júna. V budúcom roku sa spoločné prípravné stretnutie uskutoční na Slovensku.

Zadania úloh 5. česko–slovensko–poľského stretnutia

Úloha 1.
Nech n je dané prirodzené číslo. V obore nezáporných reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc

$$x_1 + x_2^2 + x_3^3 + \dots + x_n^n = n,$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

s neznámymi $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Úloha 2.
Konvexný štvoruholník $ABCD$ je vpísaný do kružnice so stredom O a opísaný kružnici so stredom I. Uhlopriečky AC a BD sa pretínajú v bode P. Dokážte, že body O, I a P ležia na jednej priamke.

Úloha 3.
Určte všetky prirodzené čísla $n \geqq 3$, pre ktoré sa polynóm

$$P(x) = x^n - 3x^{n-1} + 2x^{n-2} + 6$$

dá vyjadriť ako súčin dvoch polynómov, ktoré majú kladné stupne a celočíselné koeficienty.

Úloha 4.
Rozdeľme $n \geqq 1$ označených guliek medzi deväť osôb A, B, C, D, E, F, G, H, I. Určte, koľkými spôsobmi ich môžeme rozdeliť za podmienky, že osoba A dostane rovnaký počet guliek ako osoby B, C, D, E spolu.

Úloha 5.
Daný je konvexný štvoruholník $ABCD$. Určte množinu všetkých bodov P ležiacich vnútri štvoruholníka $ABCD$, pre ktoré platí

$$S_{PAB} \cdot S_{PCD} = S_{PBC} \cdot S_{PDA},$$

pričom S_{XYZ} označuje obsah trojuholníka XYZ.

Úloha 6.
Nájdite všetky dvojice celých čísel (x, y), ktoré spĺňajú rovnosť

$$y(x + y) = x^3 - 7x^2 + 11x - 3.$$

Riešenia úloh 5. česko–slovensko–poľského stretnutia

Úloha 1.
Predpokladajme, že $x_1, x_2, \dots, x_n$ sú riešením zadanej sústavy. Premiestnením všetkých členov na ľavú stranu a odčítaním druhej rovnice od prvej dostaneme

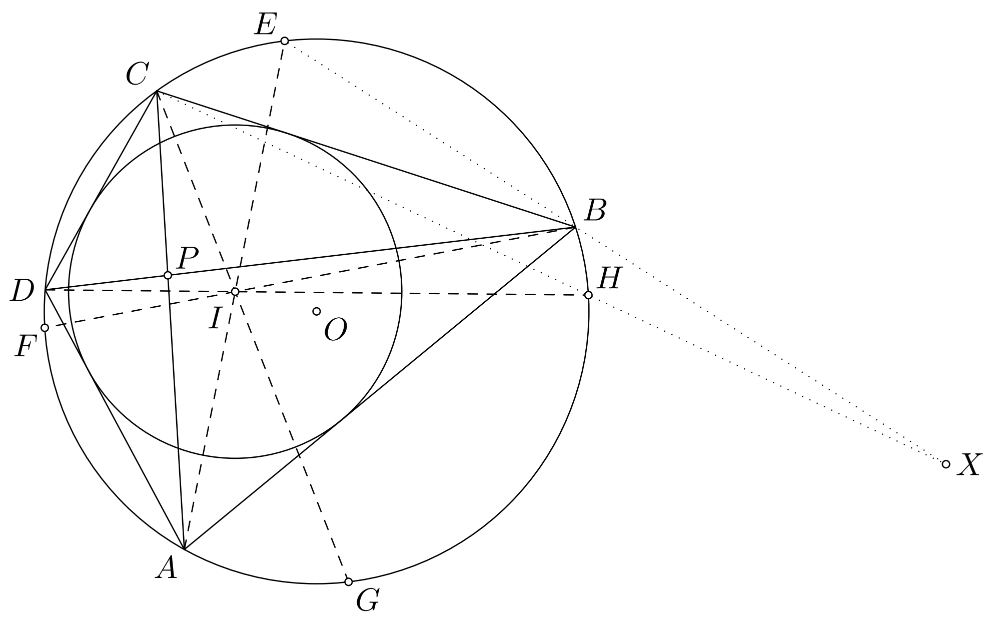
$$\begin{aligned} 0 &= x_1 + x_2^2 + x_3^3 + \dots + x_n^n - n - \left(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n - \tfrac{1}{2}n(n+1)\right) = \\ &= (x_2^2 - 2x_2 + 2 - 1) + (x_3^3 - 3x_3 + 3 - 1) + \dots + (x_n^n - nx_n + n - 1). \qquad (1) \end{aligned}$$

Podľa nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom pre $k \geqq 2$ a $x \geqq 0$ platí

$$x^k + k - 1 = x^k + 1 + 1 + \dots + 1 \geqq k \cdot \sqrt[k]{x^k} = kx,$$

pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x = 1$. Každá zo zátvoriek v (1) je teda nezáporná a súčet týchto zátvoriek bude nulový len v prípade, keď $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 1$. Z prvej rovnice sústavy potom nutne vyplýva, že $x_1 = 1$. Skúškou ľahko overíme, že uvedená n-tica je (jediným) riešením.

Úloha 2.
Označme priesečníky priamok AI, BI, CI, DI s kružnicou opísanou štvoruholníku $ABCD$ postupne E, F, G, H (obr. 31). Keďže priamky AI, BI, CI, DI sú osi príslušných vnútorných uhlov štvoruholníka $ABCD$, priamky EG a FH sú priemery kružnice opísanej štvoruholníku $ABCD$ a teda sa pretínajú v bode O. Označme X priesečník priamok EB a CH. Podľa Pascalovej vety pre „šesťuholník“ $ACHDBE$ ležia body P, X a I na jednej priamke. Podobne podľa Pascalovej vety pre „šesťuholník“ $GCHFBE$ ležia na jednej priamke body O, X a I. Preto ležia na jednej priamke aj body O, I a P, čo sme chceli dokázať.

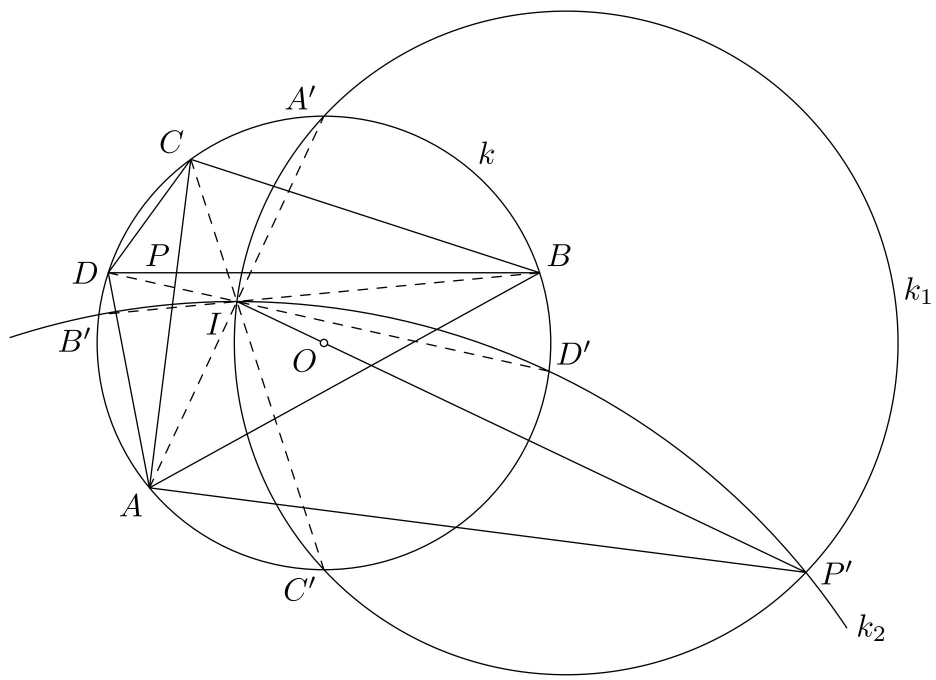


Obr. 31

Iné riešenie. (Podľa *Františka Simančíka.*) Body E, F, G, H z predošlého riešenia označme A', B', C', D' a kružnicu opísanú štvoruholníku $ABCD$ označme k. Z mocnosti bodu I ku k máme

$$|IA| \cdot |IA'| = |IB| \cdot |IB'| = |IC| \cdot |IC'| = |ID| \cdot |ID'|.$$

Preto existuje taká kružnicová inverzia ψ so stredom I, že zobrazenie $\varphi \equiv \mathcal{S}_I \circ \psi$ zobrazí



Obr. 32

body A, B, C, D v tomto poradí na body A', B', C', D' (pričom $\mathcal{S}_I$ je stredová súmernosť so stredom v bode I). Označme $\varphi(P) = P'$. Stačí ukázať, že body O, I a P' ležia na jednej priamke (keďže priamky PI a $P'I$ sú totožné). Zobrazenie φ zobrazí priamku AC do kružnice k_1 prechádzajúcej bodmi A', C', I a priamku BD do kružnice k_2 prechádzajúcej bodmi B', D', I (obr. 32). Bod P' je preto druhým priesečníkom kružníc k_1, k_2 (rôznym od I).

Priamka $P'I$ je chordálou kružníc k_1, k_2. Stačí teda ukázať že bod O má ku kružniciam k_1, k_2 rovnakú mocnosť. Avšak už v prvom riešení sme ukázali, že $A'C'$ a $B'D'$ sú priemery kružnice k, ktorej stredom je O. Preto mocnosť bodu O ku k_1 aj ku k_2 má hodnotu $r^2 = |OA'| \cdot |OC'| = |OB'| \cdot |OD'|$, kde r je veľkosť polomeru kružnice k. Teda O naozaj leží na chordále $P'I$.

Úloha 3.
Ľahko overíme, že pre $n = 3$ platí

$$x^3 - 3x^2 + 2x + 6 = (x + 1)(x^2 - 4x + 6).$$

Ak by sme pre $n = 4$ mali

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 6 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d),$$

porovnaním koeficientov by sme dostali

$$a + c = -3, \qquad ac + b + d = 2, \qquad bd = 6.$$

Z prvej rovnosti vyplýva, že a a c majú rôznu paritu. Preto z druhej rovnosti vyplýva, že b a d majú rovnakú paritu. To je v spore s treťou rovnosťou.

Predpokladajme ďalej, že $n \geqq 5$. Nech platí

$$P(x) = Q(x)R(x), \tag{1}$$

pričom

$$\begin{aligned} Q(x) &= a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \\ R(x) &= b_{n-k}x^{n-k} + b_{n-k-1}x^{k-1} + \cdots + b_1 x + b_0, \end{aligned}$$

sú polynómy s celočíselnými koeficientmi a $a_k = b_{n-k} = \pm 1$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $k \leqq \lfloor n/2 \rfloor < n - 2$ (pretože $n \geqq 5$). Porovnaním koeficientov na oboch stranách v (1) získame rovnosti

$$\begin{aligned} a_0 b_0 &= 6, \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 &= 0, \\ &\vdots \\ a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_{k-1} b_1 + a_k b_1 &= 0. \end{aligned}$$

Teraz indukciou dokážeme, že a_0 delí $a_1, a_2, \dots, a_k$. Predpokladajme, že sme toto tvrdenie dokázali pre $a_1, a_2, \dots, a_\ell$. Máme

$$0 = a_0(a_0b_{\ell+1} + a_1b_\ell + \dots + a_\ell b_1 + a_{\ell+1}b_0) = a_0^2b_{\ell+1} + a_0a_1b_\ell + \dots + a_0a_\ell b_1 + 6a_{\ell+1},$$

a teda

$$6a_{\ell+1} = -(a_0^2b_{\ell+1} + a_0a_1b_\ell + \dots + a_0a_\ell b_1).$$

Vieme, že všetky sčítance na pravej strane sú deliteľné členom a_0^2, preto aj ľavá strana je ním deliteľná a nutne $a_0 \mid a_{\ell+1}$.

Ale keďže $a_k = \pm 1$, dostávame $a_0 = \pm 1$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $a_0 = 1$; potom $b_0 = 6$.

Teraz zopakujeme rovnaké argumenty na koeficienty polynómu R. Dostaneme, že $b_0 = 6$ delí $b_1, b_2, \dots, b_{n-3}$ (ak je to potrebné, položíme $b_\ell = 0$ pre $\ell > n-k$). Dostaneme tak spor ($b_{n-k} = \pm 1$) okrem prípadu, keď $n - k > n - 3$. Zostali tak dva prípady.

Prípad $k = 2$. Porovnaním koeficientov pri x^{n-2} v (1) máme

$$a_0b_{n-2} + a_1b_{n-3} + a_2b_{n-4} = 2.$$

Z predošlého vieme, že na ľavej strane sú okrem prvého člena všetky deliteľné šiestimi, t. j. sú párne, zatiaľ čo prvý člen je rovný ± 1. Tým dostávame spor.

Prípad $k = 1$. Úloha sa tak zjednodušuje na nájdenie celočíselných koreňov polynómu P; ľahko možno nahliadnuť, že ak n je párne, také korene neexistujú, zatiaľ čo pre n nepárne máme $P(-1) = 0$.

Preto podmienky zadania spĺňajú práve nepárne čísla n.

Úloha 4.

Uvažujme polynóm

$$\begin{aligned}(x+2)^{2n} &= (x^2+4x+4)^n = \\ &= (x^2+x+x+x+x+1+1+1+1)\cdots(x^2+x+x+x+x+1+1+1+1)\end{aligned}$$

a predstavme si, že sme roznásobili zátvorky a získali 9^n sčítancov. Ukážeme, že existuje bijektívne zobrazenie medzi sčítancami x^n a rozdeleniami spĺňajúcimi podmienky zadania.

Majme ľubovoľné rozdelenie guliek. Ak k-tu guľku dostane A, zvolíme z k-tej zátvorky x^2. Ak ju dostane B, C, D, resp. E, zvolíme z k-tej zátvorky prvú, druhú, tretiu, resp. štvrtú jednotku. A ak ju dostane F, G, H, resp. I, zvolíme z k-tej zátvorky prvý, druhý, tretí, resp. štvrtý člen x. Ak teraz vynásobíme členy, ktoré sme zvolili, vidíme, že výsledok je rovný x^n práve vtedy, keď A dostane rovnaký počet guliek ako B, C, D, E spolu.

Počet vyhovujúcich rozdelení je teda rovnaký ako koeficient pri x^n v polynóme $(x + {} + 2)^{2n}$, t. j.

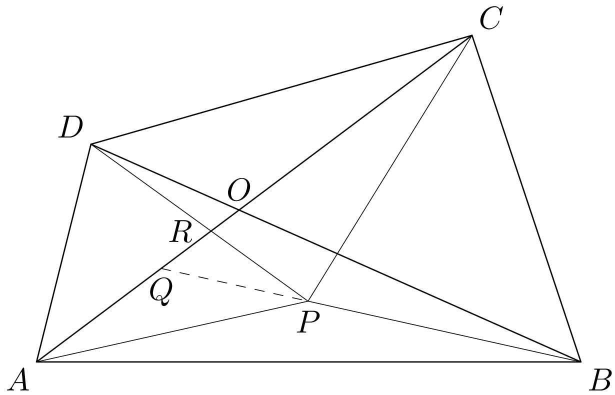
$$\binom{2n}{n} \cdot 2^n.$$

Úloha 5.
Ak P leží na niektorej z uhlopriečok, povedzme na AC, tak

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PBC}} = \frac{|AP|}{|PC|} = \frac{S_{PDA}}{S_{PCD}},$$

teda rovnosť zo zadania platí. Dokážeme, že pre body P ležiace vnútri štvoruholníka $ABCD$ mimo uhlopriečok zadaná rovnosť neplatí.

Označme O priesečník uhlopriečok a bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že P leží vnútri trojuholníka ABO (obr. 33). Označme ešte Q priesečník priamok BP a AC



Obr. 33

a R priesečník priamok DP a AC. Potom ľahko možno odvodiť rovnosti

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PBC}} = \frac{|AQ|}{|QC|} \qquad \text{a} \qquad \frac{S_{PDA}}{S_{PCD}} = \frac{|AR|}{|RC|}.$$

Keďže $Q \neq R$, skúmaná rovnosť nemôže platiť.

Odpoveď. Hľadanou množinou bodov P sú vnútorné body uhlopriečok AC a BD.

Úloha 6.
Vynásobením uvažovanej rovnice štyrmi a jednoduchou úpravou dostaneme ekvivalentnú rovnicu

$$\begin{aligned}(2y+x)^2 &= 4x^3 - 27x^2 + 44x - 12 = (x-2)(4x^2-19x+6) = \\ &= (x-2)\big[(x-2)(4x-11)-16\big].\end{aligned} \tag{1}$$

Výraz na pravej strane musí byť štvorcom. Preto $(x-2) = ks^2$ pre nejaké $k \in \in \{-2,-1,1,2\}$ a $s \in \mathbb{N}$ (totiž ak pre nejaké prvočíslo p a nezáporné celé číslo m je $(x-2)$ deliteľné výrazom p^{2m+1}, ale nie výrazom p^{2m+2}, tak máme $p \mid (x-2)(4x - - 11) - 16$, teda $p \mid 16$ a $p = 2$).

Rozoberieme osobitne tri prípady.

Prípad $k = \pm 2$. Z (1) máme $4x^2 - 19x + 6 = \pm 2u^2$ pre nejaké celé číslo u, z čoho úpravou dostaneme

$$(8x-19)^2 - 265 = \pm 32u^2.$$

Túto rovnosť však nespĺňajú žiadne celé čísla x, u, pretože ľavá strana dáva po delení piatimi zvyšok 0, 1 alebo 4, zatiaľ čo pravá strana dáva zvyšok 0, 2 alebo 3. Jedinou možnosťou je teda zvyšok 0, avšak v takom prípade by pravá strana bola deliteľná číslom 25 a ľavá strana nie.

Prípad $k = 1$. Potom $4x^2 - 19x + 6 = u^2$ pre nejaké celé číslo u, odkiaľ po vynásobení šestnástimi po úprave dostaneme

$$265 = (8x - 19)^2 - 16u^2 = (8x - 19 - 4u)(8x - 19 + 4u).$$

Ľahko overíme, že $x = 6$ je jediná možnosť, pre ktorú dostaneme vyhovujúce riešenie pôvodnej rovnice (stačí uvažovať všetky možné rozklady $265 = 1 \cdot 265 = 5 \cdot 53 = \ldots$ a brať do úvahy fakt, že $x - 2 = s^2$). Po dosadení do (1) tak získame dvojice $(6, 3)$ a $(6, -9)$.

Prípad $k = -1$. Podobne ako v predošlom prípade máme $4x^2 - 19x + 6 = -u^2$, odkiaľ

$$265 = (8x - 19)^2 + (4u)^2.$$

Overíme všetky možnosti. Pre $u = 0, 1, 2$ nezískame žiadne riešenie. Pre $u = 3$ dostaneme $(8x - 19)^2 = 121 = 11^2$, z čoho $x = 1$; získame tak dvojice $(1, 1)$, $(1, -2)$. Napokon pre $u = 4$ máme $(8x - 19)^2 = 9 = 3^2$, t. j. $x = 2$, odkiaľ získame dvojicu $(2, -1)$.

Zadanú rovnosť spĺňajú dvojice $(6, 3)$, $(6, -9)$, $(1, 1)$, $(1, -2)$ a $(2, -1)$.

46. Medzinárodná matematická olympiáda

V dňoch 8. – 19. júla 2005 sa v Méride (Mexiko, štát Yucatán) uskutočnil už 46. ročník Medzinárodnej matematickej olympiády (IMO). Zúčastnil sa jej rekordný počet 513 súťažiacich z rekordného počtu 91 štátov. Slovensko reprezentovali

Jozef Bodnár, Gymnázium Nám. padlých hrdinov, Fiľakovo, 4. ročník,
Ondrej Budáč, Gymnázium B. S. Timravy, Lučenec, 3. ročník,
Michal Burger, Gymnázium Grösslingová, Bratislava, 4. ročník,
Peter Černo, Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín, 4. ročník,
František Simančík, Gymnázium Grösslingová, Bratislava, 4. ročník,
Jakub Závodný, Gymnázium Grösslingová, Bratislava, 4. ročník.

Delegáciu SR viedol *doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.*, predseda Slovenskej komisie MO (vedúci katedry KMaHI na fakulte PEDAS ŽU v Žiline), pedagogický vedúci bol *Ján Mazák* (študent FMFI UK Bratislava) a mimoriadne účinne pri oprave úloh pomohol vo funkcii observera aj *Mgr. Peter Novotný* (doktorand na FMFI UK Bratislava).

Obr. 34

Výsledky družstva SR sú uvedené v tabuľke. **Všetci naši súťažiaci získali medailu** (obr. 34, zľava postupne *J. Bodnár*, *J. Závodný*, *O. Budáč*, *F. Simančík*, *P. Černo*, *M. Burger*). To evokuje drobné zamyslenie, čo by sa stalo, keby sa nejaká 6-členná športová výprava vrátila so 6 individuálnymi medailami. To by bolo slávy: rozhlasová relácia na pokračovanie, televízny seriál, ...

Meno	1	2	3	4	5	6	Súčet	Cena
Jozef Bodnár	7	7	0	7	0	2	23	striebro
Ondrej Budáč	7	1	0	7	7	2	24	striebro
Michal Burger	1	7	0	7	7	7	29	striebro
Peter Černo	6	1	0	7	2	0	16	bronz
František Simančík	0	7	1	7	7	2	24	striebro
Jakub Závodný	7	1	0	7	0	0	15	bronz

Šestica úloh, ktorú medzinárodná jury pozostávajúca z vedúcich všetkých zúčastnených krajín hlasovaním vybrala, nepatrila medzi najťažšie. Chýbala najmä veľmi ťažká úloha a tak až 16 súťažiacich z 11 krajín získalo plný počet, t. j. 42 bodov (na predchádzajúcich deviatich IMO dosiahli plný počet vždy najviac štyria, v roku 1995 ich bolo 14). Býva zvykom zoradiť trojicu úloh každého súťažného dňa podľa obtiažnosti od najľahšej. To sa tento rok nepodarilo, prvá úloha bola náročnejšia ako druhá. Je to však daň za demokratické hlasovanie.

Naši študenti výborne zvládli štvrtú úlohu (veľmi ľahká teória čísel) a veľmi dobre si poradili aj s prvou (stredne ťažká geometria). Viac bodov mohli získať najmä v druhej úlohe (ľahká teória čísel). Tretiu (ťažká nerovnosť) z našich nevyriešil nikto, avšak na nej stroskotala väčšina krajín. Práve za ňu získal špeciálnu cenu *Iurie Boreico* z Moldavska (jeden zo 16 absolútnych víťazov), ktorému sa ju podarilo vyriešiť neočakávaným a veľmi elementárnym spôsobom. Jeho riešenie je uvedené aj v tejto Ročenke. Všetci naši si zaslúžia pochvalu, najväčšiu *Michal Burger*, ktorý druhý súťažný deň vyriešil všetky tri úlohy a ku zlatej medaile mu chýbalo len viac šťastia pri prvej úlohe.

IMO je súťaž jednotlivcov, ale býva zvykom sledovať aj *neoficiálne* poradie družstiev. V tomto sme skončili so 131 bodmi na veľmi dobrom 20. mieste, pričom zo štátov Európskej únie nás predbehli len Maďarsko, Nemecko, Veľká Británia a Česká republika. Takže znovu sme predbehli krajiny s možno najslávnejšou matematickou tradíciou (Francúzsko, Taliansko, Grécko). A nielen tie… Poradie krajín na čele nebolo žiadnou novinkou: Čína (235 bodov z 252 možných), USA, Rusko. Výsledky jednotlivých krajín možno nájsť v tabuľke (čísla v zátvorke sú uvedené za krajinami, ktoré mali na IMO menší počet účastníkov). Pre získanie podrobnejších informácií môžeme odporučiť adresu *http://erdos.fciencias.unam.mx.*

Tradičný jednodenný výlet sa síce vinou *Emily* značne skrátil (o tejto dáme bude ešte pár riadkov nižšie), ale predsa len sme videli *Chichén Itzá*. Samozrejme, súťažiaci toho videli oveľa viac, ale my, vedúci, chodíme na IMO pracovať.

Záver IMO skomplikoval hurikán *Emily*, ktorý (alebo ktorá? – kto sa má v tom vyznať) podľa predpovedí na CNN mal dosiahnuť stupeň 5 a mal byť najsilnejším v karibskej oblasti od roku 1860, pričom Mérida mala byť na hlavnom ťahu. Keď sa prvý raz objavila správa, že budeme v strede hurikánu, tak otrlejší z nás sa potešili a chystali sa fotiť – vtedy mala *Emily* stupeň 3. Keď ale CNN zverejnila svoju informáciu

Por.	Štát	Z	S	B	∑	Por.	Štát	Z	S	B	∑
1.	Čína	5	1	0	235	47.	Holandsko	0	0	2	62
2.	USA	4	2	0	213		Lotyšsko	0	0	2	62
3.	Rusko	4	2	0	212	49.	Azerbajdžan	0	0	2	59
4.	Irán	2	4	0	201	50.	Grécko	0	0	2	58
5.	Južná Kórea	3	3	0	200	51.	Írsko	0	1	0	55
6.	Rumunsko	4	1	1	191	52.	Kuba (5)	0	0	3	54
7.	Tchaj-wan	3	2	1	190	53.	Litva	0	0	1	53
8.	Japonsko	3	1	2	188	54.	Macedónsko	0	0	2	50
9.	Maďarsko	2	3	1	181	55.	Bosna a Hercegovina	0	0	2	49
	Ukrajina	2	2	2	181		Fínsko	0	0	2	49
11.	Bulharsko	2	3	1	173		Slovinsko	0	1	0	49
12.	Nemecko	1	3	2	163	58.	Kirgizstan	0	0	2	46
13.	Veľká Británia	1	3	2	159		Španielsko	0	0	1	46
14.	Singapur	0	4	2	145	60.	Albánsko	0	1	0	44
15.	Vietnam	0	3	3	143	61.	Švédsko	0	0	0	42
16.	Česká republika	1	2	2	139	62.	Južná Afrika	0	0	0	39
17.	Hongkong	1	3	1	138	63.	Macao	0	0	1	38
18.	Bielorusko	1	3	1	136		Rakúsko	0	0	0	38
19.	Kanada	1	2	2	132	65.	Kostarika	0	0	0	37
20.	Slovensko	0	4	2	131		Uruguaj	0	0	1	37
21.	Moldavsko	1	2	2	130	67.	Srí Lanka	0	0	1	32
	Turecko	0	4	1	130	68.	Filipíny	0	0	0	30
23.	Thajsko	0	4	2	128	69.	Portugalsko	0	0	0	27
24.	Taliansko	0	2	4	120	70.	Salvádor	0	0	0	25
25.	Austrália	0	0	6	117	71.	Island	0	0	1	23
26.	Kazachstan	0	2	3	112	72.	Maroko	0	0	0	18
27.	Kolumbia	0	2	2	105		Turkmenistan (4)	0	0	1	18
	Poľsko	0	1	5	105	74.	Ekvádor	0	0	1	17
29.	Peru	0	0	6	104	75.	Malajzia	0	0	0	15
30.	Izrael (4)	0	2	3	99	76.	Cyprus	0	0	0	14
31.	Mexiko	0	0	4	91	77.	Trinidad a Tobago	0	0	0	13
32.	Francúzsko	0	0	4	83	78.	Paraguaj	0	0	0	12
33.	Arménsko	0	0	5	82	79.	Pakistan	0	0	0	11
	Brazília	1	0	1	82	80.	Tunisko (4)	0	0	0	9
	Chorvátsko	0	1	2	82	81.	Portoriko	0	0	0	8
36.	India	0	1	1	81	82.	Guatemala (4)	0	0	0	6
37.	Gruzínsko	0	0	4	80	83.	Lichtenštajnsko (4)	0	0	0	4
38.	Nový Zéland	0	1	2	77	84.	Bangladéš	0	0	0	3
39.	Srbsko a Čierna Hora	0	0	3	75		Kuvajt	0	0	0	3
40.	Belgicko	0	1	1	74		Luxembursko (3)	0	0	0	3
	Nórsko	0	0	2	74		Saudská Arábia	0	0	0	3
42.	Indonézia	0	0	3	70		Tadžikistan (4)	0	0	0	3
	Švajčiarsko	0	1	1	70	89.	Mozambik	0	0	0	2
44.	Dánsko	0	0	4	69	90.	Bolívia (3)	0	0	0	0
45.	Estónsko	0	0	3	68		Venezuela (3)	0	0	0	0
46.	Argentína	0	1	2	65						

o stupni 5, tak sme sa (tí najotrlejší) začali zamýšľať nad tým, ako sa to bude dať vyfotiť tak, aby sme potom ešte mohli dať urobiť aj fotky. Lebo rekordný hurikán je veľmi fotogenický, ale sranda to byť nemusí. Taká rozzúrená *Emily* dokáže kadečo... Mexičania nás tých starostí zbavili – všetko a všade bolo olepené, pozatvárané – aj my. Dokonca nás nepustili ani na prízemie hotela – odtiaľ bolo všetko pohyblivé odpratané, ešte aj veľké fotely...

Nakoniec však bolo všetko ináč. Pred dosiahnutím polostrova Yucatán sa jadro hurikánu rozdelilo na tri časti a *Emily* zoslabla na stupeň 2. Bol to teda taký silnejší vánok s rýchlosťou okolo 170 km/h, ktorý polámal zopár tenkých paliem hrúbky okolo 20 cm, porozhadzoval neporiadok (ten je nielen u nás), zhodil niekoľko malých kvetináčov pred hotelom (asi tak štvrťtonových) a tento vánok zhodil jedno malé lietadlo na jeden dom. Nekonalo sa však očakávané *poletovanie* leguánov a inej hávede, ktorá sa za normálnych okolností premiestňuje *plazením.* Polostrov Yucatán je v podstate obrovský takmer rovný prales, ktorý namiesto nadmorskej výšky má skoro podmorskú hĺbku, takže *Emily* stupňa 5 by nám možno predviedla prehľad jeho zvieracích obyvateľov. Keďže však *Emily* prišla do Méridy ráno v deň vyhlásenia výsledkov, tak výsledky sa vyhlasovali v neskorších večerných hodinách, v náhradných priestoroch a záverečný banket sa nekonal. Škoda, niektoré mexické jedlá sú naozaj výborné.

Dovolíme si aj touto cestou v mene SKMO poďakovať firme CASIO, ktorá v rámci sponzorovania poskytla našej výprave olympijské tričká.

Mimoriadnu vďaku vyslovujeme Oddeleniu služieb medzinárodnej spolupráce MŠ SR (Masicová, Fischerová, Jenisová) za starostlivo pripravenú účasť slovenskej reprezentácie na IMO, ako aj za rýchle vyriešenie problémov pred naším odletom do Mexika, ktoré vznikli odrieknutím letu na poslednú chvíľu a bolo treba hľadať náhradné riešenie. Veľkú pružnosť prejavila pani Jenisová aj pri riešení problému pri ceste nazad, keď podstatná časť družstva zmeškala let z Mexiko City do Európy vinou domácej leteckej spoločnosti *Mexicana.* Dámy, ďakujeme!

Určite ešte stojí za zmienku, že najmä tá časť obyvateľov Mexika, ktorá je potomkami Olmékov, Mayov, Toltékov a Aztékov, bola k nám úplne super. Gracias!

Vojtech Bálint, Peter Novotný

Appendix. Burger, Simančík a Závodný (spolu s Petrom Perešínim z Gymnázia J. G. T. v Banskej Bystrici) získali neskôr zlaté medaily na IOI, o čom nájdete pár riadkov na iných stránkach tejto Ročenky a navyše Jakub Závodný získal na 36. Medzinárodnej fyzikálnej olympiáde v Salamanke (Španielsko, 350 súťažiacich zo 72 krajín) striebornú medailu, pričom ku zlatej mu chýbal len povestný kúsok šťastia.

Zadania úloh IMO

Úloha 1.
Na stranách rovnostranného trojuholníka ABC je zvolených šesť bodov: body A_1, A_2 na strane BC, body B_1, B_2 na strane CA a body C_1, C_2 na strane AB. Tieto body sú vrcholmi konvexného šesťuholníka $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ s rovnako dlhými stranami. Dokážte, že priamky A_1B_2, B_1C_2 a C_1A_2 sa pretínajú v jednom bode.

(Rumunsko)

Úloha 2.
Nech $a_1, a_2, \ldots$ je postupnosť celých čísel s nekonečným počtom kladných členov a s nekonečným počtom záporných členov. Predpokladajme, že pre každé prirodzené číslo n čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ po delení číslom n dávajú n rôznych zvyškov. Dokážte, že každé celé číslo sa v postupnosti vyskytuje práve raz.

(Holandsko)

Úloha 3.
Nech x, y a z sú kladné reálne čísla také, že $xyz \geqq 1$. Dokážte, že

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geqq 0.$$

(Južná Kórea)

Úloha 4.
Uvažujme postupnosť $a_1, a_2, \ldots$ definovanú vzťahom

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Určte všetky kladné celé čísla, ktoré sú nesúdeliteľné s každým členom postupnosti.

(Poľsko)

Úloha 5.
Nech $ABCD$ je daný konvexný štvoruholník s rovnako dlhými stranami BC a AD, ktoré nie sú rovnobežné. Nech body E a F ležia postupne vnútri strán BC a AD tak, že $|BE| = |DF|$. Priamky AC a BD sa pretínajú v bode P, priamky BD a EF v bode Q, priamky EF a AC v bode R. Uvažujme všetky trojuholníky PQR určené meniacou sa polohou bodov E a F. Ukážte, že kružnice opísané týmto trojuholníkom majú spoločný bod rôzny od P.

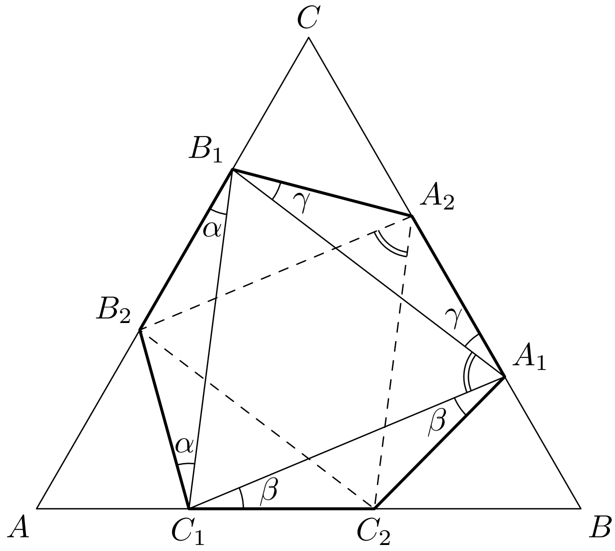
(Poľsko)

Úloha 6.
V matematickej súťaži bolo súťažiacim zadaných 6 úloh. Každú dvojicu úloh vyriešili viac ako 2/5 súťažiacich. Nikto nevyriešil všetkých 6 úloh. Dokážte, že práve 5 úloh vyriešili aspoň dvaja súťažiaci.

(Rumunsko)

Riešenia úloh IMO

Úloha 1.
(Podľa *Jakuba Závodného.*) Označme vnútorné uhly pri základniach rovnoramenných trojuholníkov $C_1B_1B_2$, $A_1C_1C_2$, $B_1A_1A_2$ postupne α, β, γ (obr. 35). Dopočítaním uhlov



Obr. 35

do 180° postupne pri bode C_2, v trojuholníku C_2BA_1 a v rovnoramennom trojuholníku $A_2C_2A_1$ dostaneme

$$|\sphericalangle BC_2A_1| = 2\beta, \qquad |\sphericalangle C_2A_1B| = 120^\circ - 2\beta, \qquad |\sphericalangle C_2A_2A_1| = 60^\circ - \beta.$$

Podobne

$$|\sphericalangle CA_2B_1| = 2\gamma, \qquad |\sphericalangle A_2B_1C| = 120^\circ - 2\gamma, \qquad |\sphericalangle B_1A_2B_2| = 60^\circ - \gamma.$$

Preto

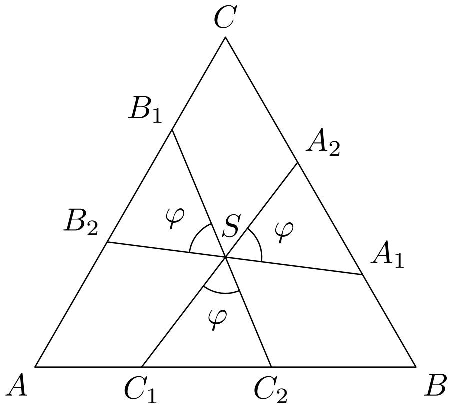
$$\begin{aligned} |\sphericalangle B_1A_1C_1| &= 180^\circ - (120^\circ - 2\beta) - \beta - \gamma = 60^\circ + \beta - \gamma, \\ |\sphericalangle B_2A_2C_2| &= 180^\circ - 2\gamma - (60^\circ - \gamma) - (60^\circ - \beta) = 60^\circ + \beta - \gamma, \end{aligned}$$

čiže $|\sphericalangle B_1A_1C_1| = |\sphericalangle B_2A_2C_2|$. Zrejme rovnakým spôsobom možno odvodiť aj rovnosti

$$|\sphericalangle C_1B_1A_1| = |\sphericalangle C_2B_2A_2| \qquad \text{a} \qquad |\sphericalangle A_1C_1B_1| = |\sphericalangle A_2C_2B_2|.$$

Trojuholníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ sú teda podobné. Uvažujme (jednoznačne určené) podobné zobrazenie, ktoré zobrazí prvý z týchto trojuholníkov na druhý. Možno ho dostať zložením otočenia okolo stredu S o uhol φ a rovnoľahlosti s tým istým stredom S

a koeficientom k (používame známe tvrdenie, že taký rozklad na dve zobrazenia s rovnakým stredom existuje). Trojuholníky SA_1A_2, SB_1B_2, SC_1C_2 sú navzájom podobné,

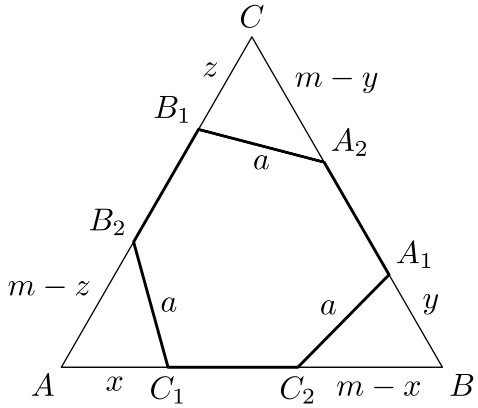


Obr. 36

pretože pri vrchole S majú rovnaký uhol (obr. 36) a navyše $|SA_2| : |SA_1| = |SB_2| : |SB_1| = |SC_2| : |SC_1| = k$. Podľa zadania však $|A_1A_2| = |B_1B_2| = |C_1C_2|$, uvedené trojuholníky sú tak zhodné a majú zhodné výšky z vrcholu S. Z toho vyplýva, že S má rovnakú vzdialenosť od všetkých strán trojuholníka ABC a je to nutne stred vpísanej kružnice (stredy pripísaných kružníc ľahko vylúčime). No z odvodenej zhodnosti máme aj $|SA_1| = |SB_1| = |SC_1|$ a keďže trojuholník ABC je rovnostranný (so stredom S), je kvôli symetrii rovnostranný aj trojuholník $A_1B_1C_1$.

Teraz už ľahko dokážeme zadané tvrdenie. Štvoruholník $C_1A_1B_1B_2$ je deltoid ($|C_1A_1| = |A_1B_1|$ a $|B_1B_2| = |B_2C_1|$), takže jeho uhlopriečka A_1B_2 je zároveň osou úsečky B_1C_1. Podobne je B_1C_2 osou úsečky C_1A_1 a C_1A_2 osou úsečky A_1B_1. Vidíme, že zadané tri priamky sú osami strán trojuholníka $A_1B_1C_1$, pretínajú sa teda v jednom bode.

Iné riešenie. (Podľa *Ondreja Budáča.*) Označme a dĺžku strany šesťuholníka $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$. Položme $|AB| - a = m$. Ďalej nech $|AC_1| = x$, $|BA_1| = y$, $|CB_1| = z$. Potom $|BC_2| = m - x$, $|CA_2| = m - y$, $|AB_2| = m - z$ (obr. 37). Použitím kosínusovej



Obr. 37

vety v trojuholníkoch AC_1B_2 a BA_1C_2 (keďže $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$) dostaneme

$$a^2 = x^2 + (m-z)^2 - x(m-z) = y^2 + (m-x)^2 - y(m-x).$$

Po roznásobení zátvoriek a úprave získame

$$m(-2z + x + y) = (y - z)(y + z + x).$$

Zrejme analogicky vieme dostať (použitím kosínusovej vety pre trojuholníky AC_1B_2 a CB_1A_2) rovnosť

$$(x - y)(x + y + z) = m(-2y + z + x).$$

Po vynásobení uvedených dvoch rovností, vykrátení nenulových činiteľov m a $(x+y+z)$, roznásobení a následnými úpravami obdržíme

$$\begin{aligned}
(x-y)(-2z+x+y) &= (y-z)(-2y+z+x),\\
x^2 - y^2 - 2zx + 2yz &= -2y^2 - z^2 + xy + 3yz - zx,\\
x^2 + y^2 + z^2 &= xy + yz + zx,\\
\tfrac{1}{2}\left[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right] &= 0.
\end{aligned}$$

Na ľavej strane ostatnej rovnosti máme súčet nezáporných výrazov, ktorý je nulový len v prípade, že všetky tri sčítance sú nulové. Nutne teda $x = y = z$, čiže trojuholník $A_1B_1C_1$ je rovnostranný (kvôli symetrii). Zadané tvrdenie už teraz dokážeme rovnakým spôsobom, ako v závere prvého riešenia.

Úloha 2.
Zrejme žiadne číslo sa v postupnosti nevyskytuje viac ako raz. Ak by totiž pre $i < j$ bolo $a_i = a_j$, pre každé $n \geqq j$ by medzi číslami $a_1, a_2, \dots, a_n$ boli aj a_i, a_j a dávali by ten istý zvyšok po delení n. Navyše pre každé prirodzené číslo n je rozdiel ľubovoľných dvoch čísel spomedzi $a_1, a_2, \dots, a_n$ nanajvýš $n-1$, lebo v opačnom prípade by sme mali indexy $i < j \leqq n$ také, že $m = |a_i - a_j| \geqq n$ a medzi číslami $a_1, a_2, \dots, a_m$ by boli dve s rovnakým zvyškom po delení m.

Uvažujme množinu $\mathsf{M} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ pre ľubovoľné prirodzené n. Ak c je najmenšie a d najväčšie číslo z M, tak z uvedeného vyplýva, že $d - c \geqq n - 1$ (keďže všetky prvky M sú rôzne) a zároveň $d - c \leqq n - 1$ (keďže $c, d \in \mathsf{M}$). Nutne teda $d - c = n - 1$ a množina M pozostáva zo všetkých celých čísel nachádzajúcich sa medzi c a d.

Nech x je ľubovoľné celé číslo. Keďže zadaná postupnosť má nekonečne veľa kladných aj záporných členov a všetky jej členy sú rôzne, existuje index i taký, že $a_i < x$ a zároveň index j taký, že $x < a_j$. Pre $n = \max\{i, j\}$ sú medzi číslami $a_1, a_2, \dots, a_n$ okrem iných všetky celé čísla medzi a_i a a_j, teda aj x.

Úloha 3.
(Podľa *Iurieho Boreica.*) Keďže

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} - \frac{x^5 - x^2}{x^3(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{x^2(y^2 + z^2)(x^3 - 1)^2}{x^3(x^5 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \geqq 0$$

(a podobná nerovnosť platí pre zlomky, ktoré dostaneme cyklickou zámenou premenných), stačí namiesto zadanej nerovnosti dokázať nerovnosť

$$\frac{x^5 - x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)} + \frac{y^5 - y^2}{y^3(x^2+y^2+z^2)} + \frac{z^5 - z^2}{z^3(x^2+y^2+z^2)} \geqq 0, \tag{1}$$

ktorá je ekvivalentná s nerovnosťou

$$\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\left(x^2 - \frac{1}{x} + y^2 - \frac{1}{y} + z^2 - \frac{1}{z}\right) \geqq 0.$$

Z podmienky $xyz \geqq 1$ máme $1/x \leqq yz$, $1/y \leqq zx$, $1/z \leqq xy$, pre výraz v zátvorke preto platí

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{1}{x} + y^2 - \frac{1}{y} + z^2 - \frac{1}{z} &\geqq x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \\ &= \tfrac{1}{2}\left[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right] \geqq 0. \end{aligned}$$

Tým je nerovnosť (1) dokázaná.

Iné riešenie. Prvý zlomok na ľavej strane vieme upraviť na tvar

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5+y^2+z^2} = \frac{x^5+y^2+z^2 - (x^2+y^2+z^2)}{x^5+y^2+z^2} = 1 - \frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}$$

a podobne možno prepísať aj zvyšné zlomky. Zadaná nerovnosť je preto ekvivalentná s nerovnosťou

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2} + \frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2} + \frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2} \leqq 3.$$

Použitím Cauchy-Schwarzovej nerovnosti a podmienky $xyz \geqq 1$ dostaneme

$$(x^5+y^2+z^2)(yz+y^2+z^2) \geqq \left(x^{5/2}(yz)^{1/2} + y^2 + z^2\right)^2 \geqq (x^2+y^2+z^2)^2,$$

čiže

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2} \leqq \frac{yz+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

Analogické nerovnosti platia aj pre ďalšie dva zlomky, preto

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2} + \frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2} + \frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2} \leqq 2 + \frac{yz+zx+xy}{x^2+y^2+z^2} \leqq 3,$$

čo sme chceli dokázať. Využili sme (podobne ako v závere prvého riešenia) známy fakt, že $x^2+y^2+z^2 \geqq yz+zx+xy$.

Úloha 4.

Ukážeme, že každé prvočíslo p má v danej postupnosti svoj násobok. Keďže $a_2 = 48$ je násobkom dvoch aj troch, stačí uvažovať $p > 3$. V takom prípade z malej Fermatovej vety máme (všetky kongruencie uvažujeme modulo p) $2^{p-1} \equiv 1$, $3^{p-1} \equiv 1$, a teda aj $6^{p-1} \equiv 1$. Odtiaľ

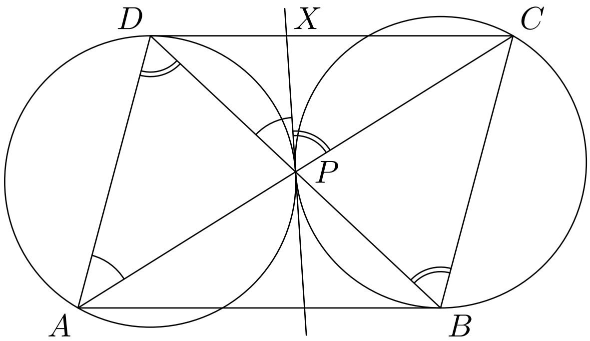
$$6a_{p-2} = 6 \cdot 2^{p-2} + 6 \cdot 3^{p-2} + 6 \cdot 6^{p-2} - 6 = 3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6^{p-1} - 6 \equiv 3 + 2 + 1 - 6 = 0,$$

čiže $6a_{p-2}$ je násobkom p a keďže $p > 3$, nutne $p \mid a_{p-2}$.

Jediné kladné číslo, ktoré je nesúdeliteľné so všetkými členmi danej postupnosti, je 1.

Úloha 5.

(Podľa *Františka Simančíka.*) Uvažujme kružnice opísané trojuholníkom BCP a ADP. Predpokladajme, že sa v bode P dotýkajú a že ich spoločná dotyčnica vedená týmto

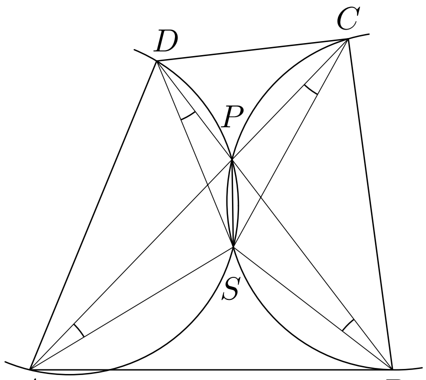


Obr. 38

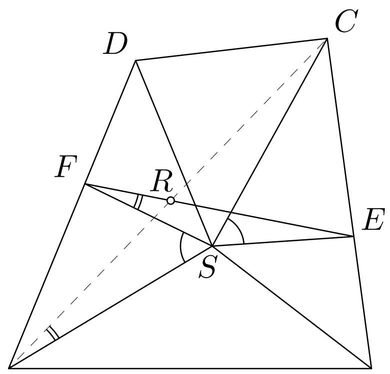
bodom pretína stranu CD v bode X (obr. 38). Z rovnosti obvodového a úsekového uhla pri tetivách DP a CP dostávame $|\sphericalangle DAP| = |\sphericalangle DPX|$ a $|\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle CPX|$. Navyše

$$|\sphericalangle CPX| = 180° - |\sphericalangle APD| - |\sphericalangle DPX| = |\sphericalangle DAP| + |\sphericalangle PDA| - |\sphericalangle DPX| = |\sphericalangle PDA|.$$

Teda $|\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle PDA|$ a strany BC a AD sú rovnobežné (rovnajú sa príslušné striedavé uhly), čo je v rozpore so zadaním úlohy. Uvažované kružnice sa preto nedotýkajú a pretínajú sa okrem bodu P ešte v bode, ktorý označíme S. Keďže $|BC| = |AD|$ a $|\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle APD|$, tak tieto kružnice majú rovnaké polomery a všetky obvodové uhly prislúchajúce spoločnej tetive PS majú rovnakú veľkosť (obr. 39). Z toho vyplýva,



Obr. 39



Obr. 40

že trojuholníky CAS a BDS sú rovnoramenné, čiže $|SA| = |SC|$, $|SB| = |SD|$. Takže trojuholníky SAD a SCB sú zhodné podľa vety sss a keďže $|EC| = |AF|$, sú zhodné aj trojuholníky SAF a SCE. Odtiaľ $|\sphericalangle ASF| = |\sphericalangle CSE|$ a teda $|\sphericalangle FSE| = |\sphericalangle ASC|$ a rovnoramenné trojuholníky FSE a ASC sú podobné. Preto $|\sphericalangle SFE| = |\sphericalangle SAC| = |\sphericalangle SAR|$ a štvoruholník $ASRF$ je tetivový (obr. 40).

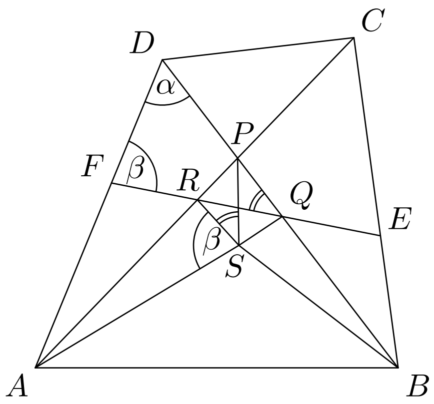
Označme $|\sphericalangle ADB| = \alpha$, $|\sphericalangle DFE| = \beta$. V tetivovom štvoruholníku $ASRF$ máme $|\sphericalangle ASR| = 180° - |\sphericalangle AFR| = \beta$. V tetivovom štvoruholníku $ASPD$ zasa $|\sphericalangle ASP| = 180° - \alpha$, t. j.

$$|\sphericalangle RSP| = 180° - \alpha - \beta.$$

Rovnako však z trojuholníka FQD máme

$$|\sphericalangle RQP| = 180° - \alpha - \beta.$$

Spolu $|\sphericalangle RSP| = |\sphericalangle RQP|$ a štvoruholník $PRSQ$ je tetivový (obr. 41). Bod S preto leží na kružnici opísanej trojuholníku PQR. Keďže poloha bodu S nezávisí na voľbe bodov E, F, úloha je vyriešená.



Obr. 41

Úloha 6.

Označme n počet všetkých súťažiacich a N počet všetkých vyriešených dvojíc úloh (pre každého súťažiaceho do N započítame každú dvojicu úloh, ktorú vyriešil, t. j. ak vyriešil r úloh, do N započítame $\binom{r}{2}$). Každú z 15 dvojíc vyriešili viac ako 2/5 všetkých súťažiacich, čiže aspoň $(2n+1)/5$ súťažiacich, preto

$$N \geqq 15 \cdot \frac{2n+1}{5} = 6n + 3. \tag{1}$$

Predpokladajme, že 5 úloh vyriešilo k účastníkov. Každý z nich vyriešil 10 dvojíc úloh, zatiaľ čo každý zo zvyšných $n-k$ účastníkov vyriešil nanajvýš 6 dvojíc úloh, takže

$$N \leqq 10k + 6(n-k) = 6n + 4k.$$

Z uvedených dvoch odhadov je zrejmé, že $k \geqq 1$. Ak by navyše $(2n+1)/5$ nebolo celé číslo, každú dvojicu úloh by vyriešilo aspoň $(2n+2)/5$ účastníkov a prvý odhad by mal tvar $N \geqq 6n + 6$, čo by viedlo k nerovnosti $k \geqq 2$ a úloha by bola vyriešená. Podobne, ak by niektorý účastník vyriešil menej ako 4 úlohy, vyriešil by nanajvýš 3 dvojice úloh a druhý odhad by mal tvar $N \leqq 6n + 4k - 3$, čo spolu s (1) takisto dáva $k \geqq 2$.

Ostáva teda vylúčiť prípad, že $2n + 1$ je deliteľné piatimi, jeden účastník (nazvime ho *víťaz*) vyriešil 5 úloh a každý iný účastník vyriešil práve 4 úlohy. Predpokladajme, že taká situácia nastala. V takom prípade $N = 6n+4$ (víťaz vyriešil 10 dvojíc úloh, zvyšní účastníci po 6 dvojíc úloh). Máme tak jednu dvojicu úloh (nazvime ju *špeciálna*), ktorú vyriešilo práve $(2n+1)/5+1$ účastníkov a 14 dvojíc úloh, ktoré vyriešilo práve $(2n+1)/5$ účastníkov (inak by sme pri odhade (1) dostali buď $N \geqq 6n + 5$ alebo $N = 6n + 3$, čo je v rozpore s práve odvodenou hodnotou N).

Nazvime úlohu, ktorú víťaz nevyriešil, *ťažká*. Označme M počet vyriešených dvojíc úloh, z ktorých jedna je ťažká. Pre každú z piatich dvojíc obsahujúcich ťažkú úlohu máme buď $(2n + 1)/5$ alebo $(2n + 1)/5 + 1$ účastníkov, ktorí obe úlohy z dvojice vyriešili. Takže $M = 2n + 1$ alebo $M = 2n + 2$ (druhá možnosť nastane, ak špeciálna dvojica obsahuje ťažkú úlohu). Na druhej strane, ak ťažkú úlohu vyriešilo m účastníkov, tak $M = 3m$, pretože každý z nich vyriešil okrem ťažkej úlohy práve 3 ďalšie. Spolu dostávame, že $2n + 1 \equiv 0$ alebo $2 \pmod 3$.

Zvoľme teraz ľubovoľnú úlohu u, ktorá nie je ťažká a nie je ani v špeciálnej dvojici (také sú aspoň tri). Označme L počet vyriešených dvojíc úloh, z ktorých jedna je u. Zrejme $L = 2n + 1$ (každú z piatich dvojíc úloh obsahujúcich u vyriešilo práve $(2n + 1)/5$ účastníkov). Na druhej strane, ak úlohu u okrem víťaza vyriešilo ešte ℓ ďalších účastníkov, tak $L = 3\ell + 4$ (víťaz okrem u vyriešil 4 ďalšie úlohy, t. j. vyriešil 4 dvojice obsahujúce u, ostatných ℓ vyriešilo 3 dvojice obsahujúce u). Dostávame $2n + 1 \equiv 1 \pmod 3$, čo je v spore s predchádzajúcimi možnosťami.

Zadania súťažných úloh

Kategória P

Archív zadaní Matematickej olympiády, kategórie P sa nachádza na WWW stránke http://www.ksp.sk/mop.

P – I – 1

Kleofáš sa rozhodol, že začne vo veľkom podnikať a otvorí si veľkopráčovňu. Každý, kto príde, si bude môcť za pár korún prenajať práčku (ak bude nejaká voľná), vyperie si v nej svoje prádlo a spokojne sa vráti domov. Malá anketa medzi priateľmi ukázala, že záujem o takúto práčovňu by bol vskutku veľký. Čoskoro chudák Kleofáš úplne stratil predstavu, koľko vlastne práčok potrebuje kúpiť, aby vystačili pre všetkých zákazníkov. A preto sa obrátil na vás s prosbou o pomoc.

Súťažná úloha

Na vstupe je počet zákazníkov, ktorých Kleofáš očakáva počas jedného dňa. O každom vie, kedy príde a na ako dlho si chce práčku prenajať. Jednotliví zákazníci nie sú uvedení v žiadnom konkrétnom poradí.

Vašou úlohou je zistiť, koľko najmenej práčok Kleofáš potrebuje mať, aby si každý zákazník mohol v okamihu príchodu prenajať jednu práčku na požadovanú dobu. Okrem zistenia potrebného počtu práčok by mal váš program aj vytvoriť zoznam, podľa ktorého bude Kleofáš prideľovať práčky prichádzajúcim zákazníkom.

Formát vstupu Prvý riadok vstupného súboru `pracky.in` obsahuje prirodzené číslo $N \leq 10\,000$ – počet zákazníkov. Na každom z nasledujúcich N riadkov sú informácie o jednom zákazníkovi: čas t_i, kedy príde a doba d_i, na ktorú si chce prenajať práčku. Môžete predpokladať, že t_i a d_i sú celé čísla od 1 do 1 000 000 000. Zákazníkom priradíme čísla od 1 do N v poradí, v akom sú uvedení na vstupe.

Formát výstupu Prvý riadok výstupného súboru `pracky.out` má obsahovať jediné číslo P – najmenší počet práčok, ktoré Kleofášovi stačia. Tieto práčky očíslujeme číslami od 1 do P. Na nasledujúcich N riadkoch výstupného súboru majú byť čísla $a_1, \ldots, a_N$, kde a_i je číslo práčky, ktorú dostane pridelenú i-ty zákazník.

Príklad

pracky.in	pracky.out
4	3
1000 1000	2
1900 900	1
1500 700	3
2000 500	2

P – I – 2

Na nemenovanom internáte onedlho prebehnú každoročné preteky švábov. Preteky prebiehajú na prekážkovej dráhe, ktorá obsahuje zákernosti ako krájač na vajíčka a misku cukru. Šváby sú na trať vypúšťané v minútových intervaloch. Aby sa ich dalo rozoznať, každý dostane na chrbát kartičku s časom, kedy štartoval (teda prvý šváb dostane číslo 0, druhý 1, atď.). Organizátorov pretekov by zaujímalo, ako veľmi sa im šváby počas cvičného preteku zamiešali, aby vedeli, či netreba zväčšiť interval medzi štartujúcimi.

Rozhodli sa preto, že spočítajú počet takých dvojíc švábov, ktoré dobehli v opačnom poradí ako vybehli (t.j. šváb s vyšším číslom dobehol skôr ako šváb s nižším číslom). Ale keďže švábov je na dotyčnom internáte neuveriteľne veľa, potrebujú pomoc počítača.

Súťažná úloha

Váš program dostane na vstupe počet švábov N a poradie, v ktorom dobehli (t.j. nejakú permutáciu čísel od 0 do $N-1$). Na výstup má vypísať počet dvojíc, ktoré si vymenili poradie.

Formát vstupu Prvý riadok vstupného súboru `preteky.in` obsahuje prirodzené číslo N ($1 \leq N \leq 30\,000$) – počet švábov. Na druhom riadku je uvedených N navzájom rôznych čísel od 0 do $N-1$, medzi každými dvoma číslami je práve jedna medzera.

Formát výstupu Výstupný súbor `preteky.out` má obsahovať jediný riadok a na ňom jediné číslo – počet dvojíc švábov, ktoré dobehli v opačnom poradí ako vybehli.

Príklad

preteky.in	preteky.out
5 1 0 4 2 3	3

P – I – 3

Fylogenetika je odbor biológie študujúci vývojové vzťahy medzi organizmami. Často používanou metódou je porovnávanie genómov. V tejto úlohe sa budeme zaoberať veľmi zjednodušenou verziou tohto problému.

Genóm budeme mať uložený ako reťazec pozostávajúci z písmen '`A`', '`C`', '`G`' a '`T`'. Budeme predpokladať, že vývoj druhu prebieha tak, že na začiatok alebo na koniec genómu sa pridajú nové gény – to je samozrejme veľké zjednodušenie (rozumej: úplný nezmysel). Na vstupe dostanete genómy niekoľkých organizmov a úlohou je nájsť medzi nimi všetky dvojice predok – potomok, t.j. také, že genóm predka je súvislým podreťazcom genómu potomka.

Formát vstupu Vstupný textový súbor `fylogen.in` obsahuje niekoľko reťazcov zložených z písmen '`A`', '`C`', '`G`' a '`T`', reprezentujúcich genómy jednotlivých organizmov. Organizmy sú očíslované $1, 2, \ldots, n$; na i-tom riadku sa nachádza genóm i-teho organizmu. Môžete predpokladať, že reťazcov je najviac 50, každý z nich má najviac 50 znakov a žiadne dva reťazce nie sú rovnaké.

Formát výstupu Výstupný textový súbor `fylogen.out` obsahuje zoznam všetkých dvojíc predok – potomok. Každý riadok súboru popisuje jednu z týchto dvojíc a pozostáva z čísla predka nasledovaného číslom potomka. Dvojice môžu byť vypísané v ľubovoľnom poradí, nesmú sa však opakovať.

Príklad

fylogen.in	fylogen.out
ATAT	1 2
CATATG	1 3
CATATGA	1 4
CATATGG	2 3
	2 4

P – I – 4

Študijný text – ALIK

Aritmeticko-logická integerová kalkulačka (skratka Alik) je výpočtové zariadenie pracujúce s W-bitovými celými číslami v rozsahu 0 až $2^W - 1$ vrátane; v ďalšom texte pod *číslami* rozumieme vždy takéto čísla. Budeme ich obvykle zapisovať v dvojkovej sústave hrubým písmom a na začiatok dvojkového zápisu vždy doplníme príslušný počet núl, aby počet číslic (bitov) bol presne W. Väčšinou tiež nebudeme rozlišovať mezi číslom a jeho dvojkovým zápisom, takže i-tym bitom čísla budeme rozumieť i-ty bit jeho dvojkového zápisu (bity číslujeme zprava doľava od 0 po $W - 1$).

Pamäť stroja tvorí 26 *registrov* pomenovaných a až z. Každý register vždy obsahuje jedno číslo.

Alik se riadi programom, čo je postupnosť priraďovacích príkazov typu *register* := = *výraz*, kde *výraz* môže obsahovať konštanty (čísla zapísané v dvojkovej sústave), registre, zátvorky a nasledujúce operátory (grécke písmená označujú podvýrazy):

- $\boxed{\alpha + \beta \text{ (priorita 4)}}$ sčíta čísla α a β. Ak je výsledok viac ako $2^W - 1$, číslice vyšších rádov odreže. Inak povedané, počíta súčet modulo 2^W.
- $\boxed{\alpha - \beta \text{ (priorita 4)}}$ odčíta od čísla α číslo β. Ak je $\alpha < \beta$, spočíta $2^W + \alpha - \beta$, teda rozdiel modulo 2^W.
- $\boxed{\neg\,\alpha \text{ (priorita 9)}}$ spočíta bitovú negáciu čísla α, čo je číslo, ktorého i-ty bit je $\mathbf{0}$ práve vtedy, keď i-ty bit čísla α sa rovná $\mathbf{1}$, a naopak.
- $\boxed{\alpha \wedge \beta \text{ (priorita 8)}, \alpha \vee \beta, \alpha \oplus \beta \text{ (priorita 7)}}$ bitové operácie: *and, or* a *xor*. Vyhodnocujú sa tak, že sa i-ty bit výsledku spočíta z i-teho bitu čísla α a i-teho bitu čísla β podľa nasledujúcich tabuliek:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{0} \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0} & \mathbf{0} \vee \mathbf{0} = \mathbf{0} & \mathbf{0} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \wedge \mathbf{1} = \mathbf{0} & \mathbf{0} \vee \mathbf{1} = \mathbf{1} & \mathbf{0} \oplus \mathbf{1} = \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0} & \mathbf{1} \vee \mathbf{0} = \mathbf{1} & \mathbf{1} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \wedge \mathbf{1} = \mathbf{1} & \mathbf{1} \vee \mathbf{1} = \mathbf{1} & \mathbf{1} \oplus \mathbf{1} = \mathbf{0} \end{array}$$

- $\boxed{\alpha << \beta \text{ (priorita 2)}}$ posunie číslo α o β bitov doľava, teda doplní na jeho koniec β núl a odreže prvých β bitov, aby bol výsledok opäť W-bitový.
- $\boxed{\alpha >> \beta \text{ (priorita 2)}}$ posunie číslo α o β bitov doprava, teda doplní na jeho začiatok β núl a odreže posledných β bitov, aby bol výsledok opäť W-bitový.

Ak zátvorky neurčia inak, vyhodnocujú sa operátory s vyššiou prioritou pred operátormi s nižšou prioritou. V rámci rovnakej priority sa vyhodnocuje zľava doprava (s výnimkou operátora $\neg$, ktorý je unárny, a teda sa musí vyhodnocovať zprava doľava).

Príklad

Ako fungujú operátory; predpokladáme $W = 4$:

$$
\begin{aligned}
a + b \wedge c + d &= (a + (b \wedge c)) + d \\
\mathbf{0101} + \mathbf{1110} &= \mathbf{0011} \\
\mathbf{0001} - \mathbf{1111} &= \mathbf{0010} \\
\mathbf{0101} \wedge \mathbf{0011} &= \mathbf{0001} \\
\mathbf{0101} \vee \mathbf{0011} &= \mathbf{0111} \\
\mathbf{0101} \oplus \mathbf{0011} &= \mathbf{0110}
\end{aligned}
$$

Ako vyrobiť pomocou $<<$ postupnosť jednotiek:

$$(\mathbf{1} << \mathbf{11}) - \mathbf{1} = \mathbf{1000} - \mathbf{1} = \mathbf{0111}$$

Ako získať z čohokoľvek samé jednotky:

$$a \vee \neg a = \mathbf{1111}$$

Výpočet prebieha takto: Najprv sa do registra x nastaví vstup (vždy jedno číslo) a do ostatných registrov nuly. Potom sa vykonajú všetky príkazy *register* := *výraz* v poradí, v akom sú v programe uvedené, pričom sa vždy najskôr vyhodnotí *výraz* na pravej strane a až potom sa jeho výsledok uloží do *registra*, takže vo vnútri výrazu je ešte možné pracovať s pôvodnou hodnotou registra. Po dokončení posledného príkazu sa hodnota v registri y interpretuje ako výsledok výpočtu. Hodnoty v ostatných registroch môžu byť ľubovoľné.

Veľkosť vstupu zadefinujeme ako počet bitov N, ktoré potrebujeme na reprezentáciu vstupu. Naše programy budú často potrebovať registre, do ktorých možno uložiť čísla väčšie ako $2^N - 1$. Počet bitov, ktoré potrebujeme na reprezentáciu týchto čísel budeme volať *veľkosť registra* W. Samozrejme, vždy musí platiť $W \geq N$.

Nie vždy je možné použiť ten istý program pre všetky možné veľkosti vstupu N. V závisloti od N a W je napríklad potrebné zmeniť hodnoty pomocných konštánt v programe, počet opakovaní niektorých operácií v programe a podobne. Preto pri riešení úloh pre každú hodnotu N musíme popísať:

- veľkosť registrov W, ktorú program bude používať, v závislosti od N
- ako pre každú konkrétnu hodnotu N zostaviť program, ktorý funguje pre všetky vstupy veľkosti N

Časovou zložitosťou programu v závislosti od N budeme rozumieť počet inštrukcií, ktoré potrebujeme pre danú veľkosť vstupu. Veľkosť registra W v závislosti od N budeme nazývať *pamäťovou zložitosťou* (keďže počet registrov je obmedzený na 26, veľkosť registra skutočne určuje množstvo pamäte). Tak ako pri časovej a pamäťovej zložitosti bežných programov, pri odhadoch budeme zanedbávať multiplikatívne konštanty (môžeme teda používať O-notáciu). Budeme však vyžadovať, aby **veľkosť registra W bola polynomiálne závislá od veľkosti vstupu** N (t.j. existuje konštanta k, pre ktorú $W \leq N^k$ pre všetky $N \geq 2$).

Pri riešení úloh budeme chcieť, aby časová zložitosť vygenerovaných programov v závislosti na N bola čo najmenšia. Medzi rovnako rýchlymi programami je potom lepší ten s menšou pamäťovou zložitosťou.

Príklad 1: Zostrojte program pre ALIK, ktorý dostane na vstupe nenulové číslo a vráti výsledok 1 práve vtedy, ak je toto číslo mocninou dvojky, inak vráti nulu.

Riešenie: Najprv si všimnime, že mocniny dvojky sú práve čísla, ktoré obsahujú práve jeden jednotkový bit. Sledujme chovanie nasledujúceho jednoduchého programu.

Vo všetkých ukážkových programoch budeme v ľavom stĺpci uvádzať jednotlivé príkazy a v pravom stĺpci všeobecný tvar spočítanej hodnoty pre ľubovoľné N. Ak sa nejaká číslica alebo skupina číslic opakuje viackrát, označíme opakovanie exponentom. Teda $\mathbf{0}^8$ je osem núl, $(\mathbf{01})^3$ je skratka za **010101**. Gréckymi písmenami budeme označovať bližšie neurčené skupiny bitov.

$$
\begin{array}{ll}
 & x = \alpha\mathbf{10}^i \\
a := x - 1 & a = \alpha\mathbf{01}^i \\
b := x \wedge a & b = \alpha\mathbf{00}^i
\end{array}
$$

Číslo v registri a sa od x vždy líši tým, že najpravejšia **1** sa zmení na **0** a všetky **0** vpravo od nej sa zmenia na **1**. Preto $b = x \wedge a$ sa musí od x líšiť práve prepísaním najpravejšej **1** na **0**. (To preto, že bity naľavo od tejto **1** sú stále rovnaké a $\alpha \wedge \alpha = \alpha$, kým vo zvyšku čísla sa vždy *and*uje **0** s **1**, čo dá nulu.) A keďže mocniny dvojky sú práve čísla, v ktorých dvojkovom zápise je práve jedna **1**, spočíta náš program v b nulu práve vtedy, ak je x mocnina dvojky (alebo nula, čo sme ale zakázali).

Zostáva teda vyriešiť, ako z nuly spraviť požadovanú jednotku a z nenuly nulu. K tomu si zavedieme operáciu $r := \mathit{if}(s, t, u)$, ktorá bude realizovať podmienku: ak $s \neq 0$, priradí $r := t$, inak $r := u$. Spravíme to jednoduchým trikom: rozšírime si registre o jeden pomocný bit vľavo, nastavíme v r tento bit na jednotku a sledujeme, či sa zmenšením vzniknutého čísla o jednotku tento bit zmení na nulu alebo nie:

$$
\begin{array}{ll}
v := s \vee \mathbf{10}^N & v = \mathbf{1}r \\
v := v - 1 & v = \mathbf{1}r' \text{ (ak } r \neq 0\text{), inak } \mathbf{01}^N \\
v := v \wedge \mathbf{10}^N & v = \mathbf{10}^N \text{ alebo } \mathbf{00}^N \\
v := v >> N & v = \mathbf{0}^N\mathbf{1} \text{ alebo } \mathbf{0}^N\mathbf{0} \\
v := v - 1 & v = \mathbf{0}^{N+1} \text{ alebo } \mathbf{1}^{N+1} \\
r := (u \wedge v) \vee (t \wedge \neg v) & s = t \text{ alebo } u
\end{array}
$$

Stačí teda na koniec programu pridať

$$y := \mathit{if}(b, 0, 1) \qquad y = \mathbf{0} \text{ alebo } \mathbf{1}$$

a máme program, ktorý rozpoznáva mocniny dvojky v konštantnom čase a používa na to čísla s $N+1 = O(N)$ bitmi.

Ešte si ukážme, ako bude prebiehať výpočet pre dva konkrétne 8-bitové vstupy (teda $N = 8$ a $W = 9$):

	$x = \mathbf{001011000}$	$x = \mathbf{000100000}$
$a := x - 1$	$a = \mathbf{001010111}$	$a = \mathbf{000011111}$
$b := x \wedge a$	$b = \mathbf{001010000}$	$b = \mathbf{000000000}$
$v := b \vee \mathbf{100000000}$	$v = \mathbf{101010000}$	$v = \mathbf{100000000}$
$v := v - 1$	$v = \mathbf{101001111}$	$v = \mathbf{011111111}$
$v := v \wedge \mathbf{100000000}$	$v = \mathbf{100000000}$	$v = \mathbf{000000000}$
$v := v >> 8$	$v = \mathbf{000000001}$	$v = \mathbf{000000000}$
$v := v - 1$	$v = \mathbf{000000000}$	$v = \mathbf{111111111}$
$y := (\mathbf{000000001} \wedge v)$ $\vee(\mathbf{000000000} \wedge \neg v)$	$y = \mathbf{000000000}$	$y = \mathbf{000000001}$

Príklad 2: Zostrojte program pre ALIK, ktorý spočíta *binárnu paritu* vstupného čísla, teda vráti 0 nebo 1 podľa toho, či má toto číslo párny alebo nepárny počet jednotkových bitov.

Riešenie: Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že N je mocnina dvoch. Binárna parita $P(x)$ čísla $x = x_{N-1} \dots x_1 x_0$ sa podľa definície rovná $x_0 \oplus x_1 \oplus \dots \oplus x_{N-1}$. Keďže operácia $\oplus$ je asociatívna ($\alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma$) a komutatívna ($\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha$), môžeme tento vzťah preusporiadať na

$$P(x) = (x_0 \oplus x_{N/2}) \oplus (x_1 \oplus x_{N/2+1}) \oplus \dots \oplus (x_{N/2-1} \oplus x_{N-1}),$$

čo je ale parita čísla, ktoré vznikne vyxorovaním ľavej a pravej polovice čísla x. Takže výpočet parity N-bitového čísla môžeme konštantným počtom príkazov previesť na výpočet parity $N/2$-bitového čísla, ten zase na výpočet parity $N/4$-bitového čísla atď., až po $\log_2 N$ krokoch na paritu 1-bitového čísla, ktorá sa ovšem rovná číslu samotnému.

Paritu teda spočítame nasledujúcim programom. Jeho časová zložitosť tohto programu je $O(\log N)$ krokov, pamäťová zložitosť je $O(N)$ bitov.

$p := x >> N/2$	$p =$ horných $N/2$ bitov x
$q := x \wedge \mathbf{1}^{N/2}$	$q =$ dolných $N/2$ bitov x
$x := p \oplus q$	$x = N/2$-bitové číslo s paritou ako pôvodné x
$x := (x >> N/4) \oplus (x \wedge \mathbf{1}^{N/4})$	$x = N/4$-bitové číslo s rovnakou paritou (všimnite si skrátený zápis výrazu)
...	...
$x := (x >> 1) \oplus (x \wedge \mathbf{1})$	$x =$ 1-bitové číslo
$y := x$	$y = x$ (skopírovať výsledok)

Náš programovací jazyk samozrejme žiadne celé časti čísel a podobné operácie nemá, ale to vôbec nevadí, pretože ich vždy používame len na podvýrazy závisiace iba na N, takže ich v programe môžeme pre každé N uviesť ako konštanty. Napríklad pre $N = 8$ bude výpočet prebiehať takto:

$$
\begin{array}{ll}
 & x = \mathbf{00110110} \\
p := x >> 4 & p = \cdots\cdot\mathbf{0011} \\
q := x \wedge \mathbf{1111} & q = \cdots\cdot\mathbf{0110} \\
x := p \oplus q & x = \cdots\cdot\mathbf{0101} \\
x := (x >> 2) \oplus (x \wedge \mathbf{11}) & x = \cdots\cdots\mathbf{00} \\
x := (x >> 1) \oplus (x \wedge \mathbf{1}) & x = \cdots\cdots\cdot\mathbf{0} \\
y := x & y = \mathbf{00000000}
\end{array}
$$

Súťažné úlohy

a) Zostrojte program pre ALIK, ktorého výsledkom bude počet jednotkových bitov v dvojkovom zápise čísla na vstupe.

Príklad: Pre vstup $x = \mathbf{101}$ program vráti $y = \mathbf{10}$.

b) Zostrojte program pre ALIK, ktorý pre zadané číslo x vypočíta najbližšie väčšie číslo, ktoré má v dvojkovom zápise rovnaký počet jednotiek ako x. Ak také číslo neexistuje, výsledok môže byť ľubovoľný.

Príklad: Pre vstup $x = \mathbf{1010}$ program vráti $y = \mathbf{1100}$.

P – II – 1

Z Kleofáša sa stal vďaka vašej pomoci úspešný podnikateľ a jeho klientela zahŕňa bohatších a malichernejších zákaznikov. Ak totiž nejaký zo súčasných zákazníkov uvidí dvoch rôznych zákaznikov používať rovnakú práčku, nebude už túto práčovňu ďalej navštevovať – povie si: „Pochopte predsa, že nebudem prať bielizeň s ľuďmi, ktorí nemajú na to, aby si zaplatili práčku sami pre seba!“

Súťažná úloha

Na vstupe dostanete $N \leq 10\,000$ – počet zákazníkov, ktorí navštívia Kleofášovu práčovňu počas jedného dňa. Pre každého zákazníka je zadaný čas jeho príchodu a doba, na akú si chce prenajať práčku (obidve sú celé čísla medzi 1 a 1 000 000 000). Požiadavky zákazníkov nie sú uvedené v žiadnom konkrétnom poradí.

Vašou úlohou je zistiť, koľko najmenej práčok Kleofáš potrebuje, aby všetci jeho zákazníci boli úplne spokojní. Zákazník bude spokojný, ak si bude môcť prenajať práčku od okamihu príchodu na dobu, ktorú požaduje (je samozrejmé, že jednu práčku nemôžu používať dvaja rôzni zákazníci súčasne), a naviac počas doby, kedy bude prať, nebude žiadnu práčku postupne využívať viac zákazníkov.

Okrem určenia minimálneho počtu práčok musíte pre Kleofáša vytvoriť aj zoznam, podľa ktorého bude posielať zákazníkov k voľným práčkam.

Príklad

vstup	**výstup**
5 zákazníkov	Treba aspoň 3 práčky.
časy príchodu a doby:	Priradenie práčok zákazníkom:
`1000 1000`	– zákazník 1 bude pri práčke 2
`3000 2000`	– zákazník 2 bude pri práčke 3
`4500 500`	– zákazník 3 bude pri práčke 1
`1500 500`	– zákazník 4 bude pri práčke 3
`2000 2000`	– zákazník 5 bude pri práčke 2

(Všimnite si, že zákazníci 3 a 5 nemôžu dostať tú istú práčku, pretože by ich videl zákazník 2 pracovať pri rovnakej práčke.)

P – II – 2

Majme dané celé kladné číslo N, $N \geq 2$, a sústavu podmienok tvaru $x_i - x_j \neq a_{i,j}$, kde $x_1, \ldots, x_{N+1}$ sú premenné, $a_{i,j}$ sú celé čísla medzi 0 a $N-1$ a pre každú dvojicu indexov i a j, $1 \leq i < j \leq N+1$ sústava obsahuje práve jednu podmienku.

Aby nám odčítaním nemohli vzniknúť na ľavej strane niektorých podmienok záporné čísla, budeme túto sústavu riešiť modulo zadané číslo N. Teda všetky aritmetické operácie sú vykonané modulo N. Pripomeňme si, že výsledkom aritmetickej operácie vykonanej modulo N je zvyšok po delení pôvodného výsledku číslom N, napríklad $(2+3) \bmod 4 = 1$, $(2-3) \bmod 4 = 3$, $(3 \cdot 2) \bmod 5 = 1$, $(3 \cdot 4) \bmod 6 = 0$, atď. Všimnite si hlavne spôsob počítania v prípade, že je pôvodný výsledok záporný.

Nájdite algoritmus, ktorý pre zadané N a čísla $a_{i,j}$ zistí, či zadaná sústava podmienok má riešenie – teda či existujú nezáporné celé čísla $x_1, \ldots, x_{N+1}$ také, že rozdiel $x_j - x_i - a_{i,j}$ nie je deliteľný N pre žiadne i a j, $1 \leq i < j \leq N+1$. Ak sústava má riešenie, algoritmus musí tiež (jedno ľubovoľné) jej riešenie nájsť a vypísať.

Príklad 1: Pre $N = 3$ máme zadané nasledujúce podmienky:

$x_1 - x_2 \neq 1$ $\quad x_2 - x_3 \neq 2$ $\quad x_3 - x_4 \neq 0$
$x_1 - x_3 \neq 2$ $\quad x_2 - x_4 \neq 1$
$x_1 - x_4 \neq 2$

Sústava má riešenie, napr. $x_1 = x_2 = x_4 = 2$ a $x_3 = 1$.

Príklad 2: Pre $N = 2$ máme zadané nasledujúce podmienky:

$x_1 - x_2 \neq 1$ $\quad x_2 - x_3 \neq 1$
$x_1 - x_3 \neq 0$

Ak $x_1 = 0$, tak potom $x_2 = 0$ podľa prvej podmienky a $x_3 = 1$ podľa druhej podmienky. Potom ale tretia podmienka nie je splnená. Podobne, ak $x_1 = 1$, x_2 musí byť rovné 0 a x_3 rovné 1. Tretia podmienka ale opäť nie je splnená. Zadaná sústava podmienok teda nemá riešenie.

P – II – 3

Úrad pre potláčanie redundantných repetícií (zriadený Komisiou pre likvidáciu redundantných úradov) sa zaoberá odstraňovaním zbytočne opakovaných dokumentov v archívoch.

Prechádzanie archívov je samozrejme veľmi nudná práca, ktorá odvádza úradníkov od iných, omnoho zaujímavejších a iste prospešnejších využití ich pracovného času. Veľmi by ich preto potešilo, keby ste im napísali program riešiaci nasledovnú úlohu:

Súťažná úloha

Je dané prirodzené číslo k a reťazec znakov T. Nájdite súvislý podreťazec dĺžky k, ktorý sa v T najviackrát opakuje, a tiež počet jeho výskytov R. Jednotlivé výskyty tohto reťazca sa môžu čiastočne prekrývať. V prípade, že existuje viac reťazcov, ktoré sa opakujú R-krát, vypíšte ľubovoľný z nich.

Príklad

Pre $T =$ `abababa` a $k = 3$ je riešením podreťazec `aba`, opakuje sa 3-krát.

P – II – 4

Pôvodný študijný text „ALIK“ k príkladu P–II–4 možno nájsť v zadaní príkladu P–I–4 na strane **105**. *Od domáceho kola sa líši tým, že pribudli operácie násobenia, delenia a zvyšku po delení a Príklad* 3 *na tieto operácie:*

- $\boxed{\alpha * \beta \text{ (priorita 6)}}$ vynásobí dve čísla, výsledok opäť modulo 2^W.
- $\boxed{\alpha \,/\, \beta \text{ (priorita 6)}}$ vydelí číslo α číslom β; delenie nulou dá vždy výsledok 0.
- $\boxed{\alpha \,\%\, \beta \text{ (priorita 6)}}$ vráti zvyšok po delení čísla α číslom β, teda $\alpha - \beta * (\alpha \,/\, \beta)$; ak $\beta = 0$, výsledok sa rovná α.

Príklad 3: Vo vzorovom riešení úlohy P–I–4 b) sme potrebovali presunúť postupnosť jednotiek na koniec čísla, teda číslo tvaru $\mathbf{0}^i\mathbf{1}^j\mathbf{0}^k$ previesť na $\mathbf{0}^i\mathbf{0}^k\mathbf{1}^j$. To je pomocou delenia možné spraviť v konštantnom čase napríklad takto:

$$
\begin{array}{ll}
 & x = \mathbf{0}^i\mathbf{1}^j\mathbf{0}^k \\
a := x \wedge (x-1) & a = \mathbf{0}^i\mathbf{1}^{j-1}\mathbf{0}\mathbf{0}^k \text{ (pozri Príklad 1)} \\
b := x \oplus a & b = \mathbf{0}^i\mathbf{0}^{j-1}\mathbf{1}\mathbf{0}^k \\
y := x \,/\, b & b = \mathbf{0}^i\mathbf{0}^k\mathbf{1}^j
\end{array}
$$

Tu sme využili to, že delenie mocninou dvojky je možné použiť ako bitový posun doprava, ale namiesto počtu bitov, o ktoré sa má posúvať, zadáme číslo majúce **1** na pozícii, ktorá sa má po posune objaviť úplne vpravo.

Súťažná úloha

Zostrojte program pre ALIK, ktorý k zadanému číslu $x = x_{N-1} \dots x_1 x_0$ nájde zrkadlové číslo $y = x_0 x_1 \dots x_{N-1}$, t. j. číslo, ktorého dvojkový zápis vznikne zapísaním celého čísla x (vrátane prípadných núl na jeho začiatku) odzadu.

P – III – 1

Pánko Lektor je vášnivý zberateľ náhrdelníkov. Náhrdelníky, ktoré zbiera, sa navzájom líšia počtom, poradím a druhmi použitých drahých kameňov. Ako každý zberateľ, ani Lektor nechce vyhadzovať peniaze za náhrdelníky, ktoré už v zbierke má. Vymyslel si preto nasledujúce kódovanie: Každému druhu drahokamov priradil jedno písmeno abecedy. Náhrdelník teraz zapísal tak, že začal od niektorého drahokamu a napísal si kódy všetkých drahokamov v poradí, v akom sa na náhrdelníku nachádzali. Navyše si kúpil stroj, ktorý mu pre daný kód povie, či už taký náhrdelník má v zbierke alebo nie.

Klenotníci si však rýchlo všimli slabinu v jeho postupe – keď predávaný náhrdelník pootočili, prípadne ho obrátili hore nohami, jeho kód sa tým zmenil. Takto si pánko Lektor nakúpil zopár duplikátov – napríklad náhrdelník `ABCA` si kúpil aj ako `AABC` a `ACBA`.

Niet divu, že by chcel svoj stroj vylepšiť tak, aby rozoznal aj takéto situácie. Vašou úlohou bude napísať program, ktorý to dokáže.

Súťažná úloha

Program dostane na vstupe niekoľko kódov náhrdelníkov $x_1, \dots, x_N$ ($1 \leq N \leq 1\,000\,000$). O každom z nich by mal vypísať, či ho má pánko Lektor kúpiť alebo nie – podľa toho, či už predtým rovnaký náhrdelník kúpil. Ak je náhrdelník x_i rôzny od každého spomedzi náhrdelníkov $x_1, \dots, x_{i-1}$ (vrátane ich rotácii a preklápania), mal by byť i-ty riadok výstupu `Kup ho!`, inak by mal byť i-ty riadok výstupu `Ten uz mas.`

Váš program môže využívať Lektorov starý stroj ako *čiernu skrinku*, ktorá si vie pamätať množinu kódov náhrdelníkov. Na začiatku behu programu je táto množina prázdna. Vo svojom programe môžete volať funkcie `Pridaj` a `MamHo`. Prvá z nich pridá nový kód náhrdelníka do pamätanej množiny, druhá vráti `true` alebo `false` (v C/C++ 1 alebo 0) podľa toho, či sme predtým niekedy zavolali `Pridaj` s daným kódom náhrdelníka.

Hlavičky pomocných funkcií

```
int MamHo (const char *kod);                /* v C */
void Pridaj (const char *kod);
function MamHo (var kod:string):boolean;    { v Pascale }
procedure Pridaj (var kod:string);
```

Hodnotenie riešení

Pánko Lektor má nasledujúce požiadavky: Pamäťová zložitosť vášho programu **nesmie** závisieť od počtu testovaných náhrdelníkov. Časová zložitosť vášho programu by mala byť čo najnižšia.

Volania funkcií `Pridaj` a `MamHo` majú časovú zložitosť lineárnu od dĺžky reťazca `kod`.

Spomedzi dvoch programov s rovnakou časovou zložitosťou je lepší ten, ktorý potrebuje menej volaní funkcií `Pridaj` a `MamHo`.

Príklad

vstup	**výstup**
`ABCA`	`Kup ho!`
`ACBA`	`Ten uz mas.`
`AABC`	`Ten uz mas.`
`ABAC`	`Kup ho!`

P – III – 2

Nedávno bolo otvorené nové Magické Observatórium v Polomokrej chňapke (MO-P). Podnebie v Polomokrej chňapke je také polomokré, preto sa vedenie MO-P rozhodlo, že všetky svoje budovy prepojí krytými nadzemnými mostami. A aby zostalo peňazí aj na iné účely, bolo by vhodné, aby celková dĺžka týchto mostov bola najmenšia možná. Navyše kvôli častým obdobiam, kedy tam fúka silný severák, musia všetky mosty viesť zo severu na juh.

Súťažná úloha

Vašou úlohou je navrhnúť algoritmus, ktorý pre zadanú mapu areálu MO-P navrhne najlepšie možné prepojenie budov. Ak sa budovy pospájať nedajú, program by to mal zistiť a podať o tom správu.

Mapa areálu MO-P je zadaná ako štvorcová sieť s N riadkami a M stĺpcami. Budovy sú vyznačené znakmi `x`, okolité močiare bodkami. Ak dve políčka s písmenom `x` majú spoločnú hranu, patria do tej istej budovy a pracovníci MO-P medzi nimi môžu prejsť. Vašou úlohou je dokresliť do mapy čo najmenej severojužných (t.j. zvislých) mostov tak, aby sa medzi každými dvomi budovami dalo prejsť bez stúpenia do močiara. Políčka mostov sa smú používať len v severojužnom smere, t.j. prísť naň aj odísť z neho smieme len v týchto smeroch.

Pri riešení tejto úlohy (a zároveň pri jeho popise) sa sústreďte na efektívne nájdenie optimálneho prepojenia budov a na zdôvodnenie správnosti daného algoritmu.

Príklad

vstup	**výstup**
$M = 8$, $N = 5$	`..xxxxx.`
`..xxxxx.`	`...|..|x`
`.......x`	`...x..|x`
`...x...x`	`.x.x..||`
`.x.x....`	`.xxx..xx`
`.xxx..xx`	

Vysvetlenie príkladu: Areál je tvorený štyrmi budovami (znaky `x` v pravom stĺpci patria do inej budovy ako znaky `x` v prvom riadku). Keďže mosty môžeme používať len v severojužnom smere, je nutné postaviť aj most v pravom stĺpci, bez neho by jedna budova nebola pripojená.

Príklad

vstup	**výstup**
$M = 6$, $N = 5$	`xxxxxx`
`xxxxxx`	`x.|..x`
`x....x`	`x.xx.x`
`x.xx.x`	`x....x`
`x....x`	`xxxxxx`
`xxxxxx`	

Príklad

vstup	**výstup**
$M = 5$, $N = 4$	`Areal sa neda pospajat.`
`xxx..`	
`.....`	
`xxx..`	
`...xx`	

P – III – 3

Pôvodný študijný text „ALIK" k príkladu P–III–3 možno nájsť v zadaní príkladu P–I–4 na strane **105**, *jeho rozšírenie o nové operácie v zadaní príkladu P–II–4 na strane* **111**.

Súťažná úloha

Napíšte program pre ALIK-a, ktorý vypočíta dvojkový logaritmus zadaného nenulového čísla x – teda pozíciu najľavejšej jednotky, keď x zapíšeme v dvojkovej sústave. (Pozície bitov rastú sprava doľava, napravejší bit je na pozícii 0.)

Príklad

Dvojkový logaritmus dvojkového čísla **00110001** je 5, dvojkový logaritmus z **00000001** je 0.

P – III – 4

Program: `magia.pas/.c/.cpp`
Vstup: `magia.in`
Výstup: `magia.out`

Vedci v Polosuchej chňapke nedávno dospeli k prekvapivému objavu v oblasti vplyvu prešmyčiek na magické zaklínadlá. Dokázali, že ak v zaklínadle zoberieme ľubovoľné dve susedné písmená, ktoré ale nesusedia v (anglickej) abecede, môžeme ich medzi sebou vymeniť bez toho, aby to zmenilo účinky zaklínadla. Napríklad namiesto obľúbeného `abraka` môžeme použiť `arbaka`, ale už nie `baraka`. Samozrejme aj v novom zaklínadle môžeme ďalej prehadzovať dvojice písmen, takže z `abraka` môžeme postupne odvodiť nové zaklínadlá:

`abraka` → `arbaka` → `rabaka` → `rabkaa` → `rakbaa` → `rkabaa` → `krabaa`.

Všimnite si, že opačným poradím výmen vieme zo zaklínadla `krabaa` dostať pôvodné zaklínadlo `abraka`.

Dve zaklínadlá voláme *ekvivalentné*, ak ich vieme medzi sebou prevádzať postupnosťou povolených výmen písmen. Napríklad zaklínadlá `abraka` a `krabaa` sú ekvivalentné, ale `dabra` a `badar` nie.

Súťažná úloha

Napíšte program, ktorý pre zadanú dvojicu zaklínadiel určí, či sú ekvivalentné.

Formát vstupu Vstupný súbor `magia.in` obsahuje niekoľko blokov, každý z nich zodpovedá jednej dvojici zaklínadiel. Obe zaklínadlá v bloku majú rovnaký počet písmen N ($1 \leq N \leq 1\,000\,000$). Tento počet písmen je uvedený v prvom riadku každého bloku. Zvyšok bloku tvorí N riadkov, každý z nich obsahuje dve malé písmená anglickej abecedy oddelené medzerou. Prvý znak v i-tom z týchto riadkov je i-ty znak prvého zaklínadla. Podobne, druhý znak v i-tom z týchto riadkov je i-ty znak druhého zaklínadla. Vstupný súbor je ukončený riadkom obsahujúcim číslo 0.

Formát výstupu Výstupný súbor `magia.out` má obsahovať jeden riadok pre každý blok vo vstupnom súbore. Tento riadok má obsahovať frázu „`su ekvivalentne`“, ak sú zaklínadlá v príslušnom bloku ekvivalentné, resp. má obsahovať frázu „`nie su ekvivalentne`“, ak ekvivalentné nie sú. (Pozor na preklepy!)

Príklad

magia.in

```
6
a k
b r
r a
a b
k a
a a
5
d b
a a
b d
r a
a r
0
```

magia.out

```
su ekvivalentne
nie su ekvivalentne
```

P – III – 5

Program: `asfalt.pas/.c/.cpp`
Vstup: `asfalt.in`
Výstup: `asfalt.out`

V Hrboľatom Zapadákove sa obyvatelia už dlho sťažovali na kvalitu ciest. Až donedávna im to nebolo nič platné. Keď sa však včera viezol vrchný cestár kočiarom do práce, kočiar nadskočil na jame a vrchný cestár si vyrazil predný zub. Čo nezmohli roky prosieb a hrozieb, zariadil jeden zub. Začala sa cestná reforma.

Vrchný cestár sa dopočul, že v susednej zemi majú akúsi novinku, ktorú volajú asfalt. Keď zistil, o čo ide, rozhodol sa dať vyasfaltovať všetky cesty.

Pri realizácii však dospeli k nepríjemnému poznatku. Všetok asfalt museli objednať zo susednej zeme. Odtiaľ im ho dodávali v obrovských sudoch. V každom sude bolo asfaltu práve na dve cesty. (Hovorili sme, že sú to obrovské barely.) Akonáhle sa ale sud otvoril, musel byť všetok asfalt okamžite použitý – bolo teda nutné vyasfaltovať dve na seba nadväzujúce cesty. Ale ako rozvrhnúť asfaltovanie tak, aby sa žiadnej skupine cestárov nestalo, že skončí s poloplným sudom v meste, z ktorého už všetky cesty vyasfaltovali? Obyvatelia mesta by asi neboli nadšení, keby im tam všetok ten asfalt zostal sedieť uprostred námestia. Preto sa rozhodli obrátiť sa na vás so žiadosťou o pomoc.

Súťažná úloha

Napíšte program, ktorý pre zadanú mapu krajiny (popis ciest medzi mestami v nej) rozhodne, či sa cesty dajú vyasfaltovať podľa popísaných pravidiel. Ak áno, vypíše jednu z možností, na ktorú dvojicu ciest použiť ktorý sud asfaltu.

Formát vstupu V prvom riadku vstupného súboru `asfalt.in` sú dve celé čísla N a M ($1 \leq N \leq 100\,000$, $1 \leq M \leq 500\,000$) oddelené medzerou. N je počet miest v krajine a M je počet ciest medzi nimi. Mestá sú očíslované od 1 do N. Nasleduje M riadkov, každý z nich popisuje jednu cestu – obsahuje medzerou oddelené čísla dvoch miest, ktoré daná cesta spája.

Môžete predpokladať, že medzi každými dvoma mestami sa dá prejsť po cestách (ak nie priamo, tak cez iné mestá).

Takisto môžete predpokladať, že medzi každou dvojicou miest vedie najviac jedna cesta a že každá cesta spája dve rôzne mestá.

Formát výstupu Ak sa celá krajina nedá vyasfaltovať, bude výstupný súbor `asfalt.out` obsahovať jediný riadok s textom „`Cesty sa nedaju vyasfaltovat.`“ V opačnom prípade bude obsahovať $M/2$ riadkov, ktoré budú popisovať postup asfaltovania. Každý z týchto riadkov bude popisovať použitie jedného sudu – bude obsahovať tri čísla miest oddelené medzerami. Asfaltovanie príslušným sudom má začať v prvom z týchto miest a pokračovať cez druhé z nich do tretieho. Každú cestu treba vyasfaltovať práve raz.

Príklad

asfalt.in	**asfalt.out**

`3 3`
`1 2`
`2 3`
`3 1`
	`Cesty sa nedaju vyasfaltovat.`

Príklad

asfalt.in	**asfalt.out**

`5 8`
`1 5`
`1 4`
`1 3`
`1 2`
`3 2`
`3 4`
`4 5`
`4 2`
	`5 1 4`
	`5 4 3`
	`4 2 3`
	`3 1 2`

Riešenia súťažných úloh

Kategória P

P – I – 1

Najskôr určíme potrebný počet práčok. Predstavme si, že celý deň prebehne a každý zákazník bude v práčovni práve počas doby, na ktorú chcel mať prenajatú práčku. Nech K je najväčší počet zákazníkov, ktorí boli naraz v práčovni. Zjavne potrebujeme aspoň K práčok, lebo každý z nich jednu potrebuje. Neskôr ukážeme, že K práčok aj stačí. Teraz sa ale zamyslime nad tým, ako určiť K.

Budeme simulovať príchody a odchody zákazníkov a zároveň si pamätať, koľko ich je v aktuálnom okamihu v práčovni. *Udalosťou* nazveme príchod alebo odchod zákazníka. Každý zákazník nám teda spôsobí dve udalosti. Takto získané udalosti utriedime podľa času, kedy nastanú. Následne ich v tomto poradí budeme spracúvať, pričom ak spracovaná udalosť je príchod, zvýšime si pamätaný počet zákazníkov v práčovni, ak je to odchod, počet zákazníkov znížime.

Ak v rovnakom čase niekto príde a zároveň niekto odíde, môžu použiť tú istú práčku. Preto udalosti, ktoré nastanú v tom istom čase, zoradíme tak, aby sme najskôr spracovali všetky odchody (uvoľnia sa práčky, ubudnú zákazníci v práčovni) a až potom príchody, ktoré v danom okamihu nastali.

Takto spočítame číslo K. Teraz ukážeme, že K práčok vieme naozaj priradiť zákazníkom, a teda že K je naozaj riešením našej úlohy. Znova spustíme simuláciu príchodov a odchodov zákazníkov, pričom si o každej práčke pamätáme, či je momentálne voľná alebo nie. Spracovanie odchodov je triviálne – uvoľníme príslušnú práčku. Všimnime si teraz ľubovoľný príchod zákazníka. V danom okamihu je v práčovni najviac $K-1$ iných zákazníkov (lebo on je najviac K-ty), a teda aspoň jedna práčka je voľná. Túto mu priradíme a zapamätáme si, že je už obsadená.

Zjavne takto každému zákazníkovi priradíme práčku, a teda K práčok stačí.

Ukážeme si ešte zopár trikov, ako vyššie uvedený algoritmus zrýchliť a zjednodušiť.

Budeme počas jednej simulácie udalostí počítať K aj priraďovať práčky zákazníkom. Začneme s práčovňou bez práčok (t.j. $K = 0$). Pri príchode zákazníka ho skúsime umiestniť k neobsadenej práčke. Ak sú všetky práčky obsadené, zvýšime K a umiestnime ho k novej (K-tej) práčke. Zjavne aktuálne K je najväčší počet zákazníkov, ktorí boli naraz v práčovni do daného okamihu. Preto na konci dostaneme správnu hodnotu K a zároveň správne priradenie práčok zákazníkom.

Aby sme vedeli rýchlo uvoľniť práčku, budeme si pre každého zákazníka v práčovni pamätať, ktorú práčku používa. Aby sme vedeli rýchlo priradiť voľnú práčku novému zákazníkovi, budeme si čísla voľných práčok pamätať napríklad v zásobníku. (Teda pamätáme si počet voľných práčok V a v prvých V políčkach nejakého poľa si pamätáme ich čísla.)

Zostáva určiť časovú a pamäťovú zložitosť výsledného algoritmu. Udalostí je $O(N)$, práčok tiež, všetko potrebné si teda vieme pamätať v lineárne veľkej pamäti. Utriediť udalosti vieme použitím nejakého klasického triediaceho algoritmu v čase $O(N \log N)$. Na spracovanie jednej udalosti nám stačí konštantný čas, preto prechod všetkými udalosťami zvládneme v čase $O(N)$. Výsledná časová zložitosť je teda $O(N \log N)$.

P – I – 2

Našou úlohou je zistiť pre danú permutáciu $a_1, \ldots, a_N$ počet takých dvojíc (a_i, a_j), kde $i < j$ a $a_i > a_j$ (teda väčšie číslo je uvedené pred menším). Takúto dvojicu voláme *inverzia*.

Ak by nám stačil čas kvadratický od N, jednoducho vyskúšame všetky dvojice prvkov a pre každú sa pozrieme, či sú dotyčné prvky v správnom poradí alebo nie. Ukážeme si myšlienky dvoch riešení, ktoré pracujú v čase $O(N \log N)$.

Prvé riešenie bude prvky permutácie spracúvať priebežne. Vždy, keď prečíta ďalší prvok permutácie, pripočíta k počtu inverzií tie, ktoré nám práve pribudli. Potrebujeme teda vedieť rýchlo povedať, koľko väčších čísel ako to práve prečítané sme už videli.

Jednou možnosťou je pamätať si počty prečítaných čísel ležiacich vo vhodne zvolených intervaloch. Predpokladajme pre jednoduchosť, že N je mocnina dvoch. (V opačnom prípade ho zväčšíme na najbližšiu väčšiu mocninu dvoch, časovú zložitosť nám to nepokazí.) Budeme si pamätať, koľko spomedzi doteraz prečítaných čísel ležalo v intervale $[N/2, \ldots, N-1]$, koľko v $[N/4, \ldots, N/2-1]$ a $[N/2, \ldots, 3N/4-1]$, a tak ďalej.

Na začiatku sú všetky pamätané počty samozrejme nulové. Keď prečítame nejaké číslo, pozrieme sa, či je v intervale $[0, \ldots, N/2-1]$. Ak áno, pripočítame k počtu inverzii počet dovtedy prečítaných čísel z intervalu $[N/2, \ldots, N-1]$ a pokračujeme s testovaním na intervale $[0, \ldots, N/2-1]$. Ak nie, tak zvýšime počet čísel v intervale $[N/2, \ldots, N-1]$ a pokračujeme s testovaním na ňom. Vo všeobecnosti sa na intervale pozrieme, či je práve prečítané číslo z jeho prvej polovice alebo nie. Ak áno, zväčšíme počet inverzii o počet prečítaných čísel z druhej polovice, ak nie, zväčšíme počet čísel v druhej polovici. Takto pokračujeme, kým sa nedostaneme k intervalu dĺžky 1.

Takto pre každé číslo spočítame počet nových inverzií a zároveň správne upravíme pamätané počty prečítaných čísel. Keďže pri každom kroku sa dĺžka uvažovaného intervalu zmenší na polovicu, krokov bude $\log_2 N$, a teda na spracovanie jedného čísla potrebujeme čas $O(\log N)$.

V **druhom riešení** upravíme algoritmus MergeSort tak, aby okrem utriedenia danej permutácie spočítal aj jej počet inverzií. Predstavme si teda, že vstupnú permutáciu rozdelíme na dve približne rovnaké časti. Každú z nich rekurzívnym volaním utriedime a zároveň v nej spočítame počet inverzii. Ostáva nám zarátať tie inverzie, pri ktorých je prvé číslo v prvej polovici a druhé v druhej. Tie spočítame pri spájaní oboch utriedených postupností do jednej.

Máme teda dve utriedené postupnosti a chceme ich spojiť do jednej. Samotné spájanie vyzerá tak, že zakaždým porovnáme ich prvé prvky a ten menší presunieme na koniec práve vytváranej výslednej postupnosti. Ako spočítať počet hľadaných inverzii? Vždy, keď sme vybrali číslo z druhej postupnosti, vieme, že je menšie od všetkých čísel prvej postupnosti, ktoré sme ešte nevybrali. S každým z nich tvorí inverziu.[1] Preto k počtu inverzii prirátame aktuálnu veľkosť prvej postupnosti.

Obe uvedené riešenia majú zjavne časovú zložitosť $O(N \log N)$ a pamäťovú zložitosť $O(N)$.

P – I – 3

Najprv si zadefinujme niektoré pojmy a značenia. Pojmy *slovo* a *reťazec* budú v nasledujúcom texte znamenať to isté – konečnú postupnosť znakov z nejakej konečnej abecedy (v našom prípade '`A`', '`C`', '`G`' a '`T`'). Napríklad `AAA` a `GGAGCTG` sú reťazce. Špeciálny prípad reťazca je prázdny reťazec, t.j. taký, ktorý neobsahuje žiadne znaky. Budeme ho označovať λ. *Dĺžka* reťazca je počet jeho znakov. Dĺžku reťazca v budeme označovať $|v|$. Teda napríklad $|\texttt{AAA}| = 3$, $|\lambda| = 0$. Ak u a v sú reťazce, označíme uv ich *zreťazenie.* Teda pre $u = \texttt{AGG}$ a $v = \texttt{CCT}$ je $uv = \texttt{AGGCCT}$.

Počiatočnému úseku reťazca budeme vravieť jeho *prefix.* Teda slovo u je prefixom slova v, ak existuje reťazec w taký, že $uw = v$. Koncový úsek reťazca budeme nazývať jeho *sufix.* Každé slovo je svojim vlastným prefixom aj sufixom (pre $w = \lambda$). Prefix alebo sufix slova v je *netriviálny,* ak sa nerovná v.

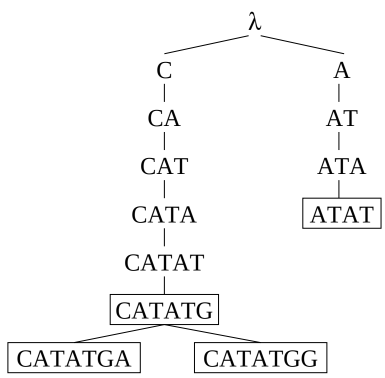
Podreťazec reťazca v je ľubovoľný súvislý úsek znakov z v – teda w je podreťazec v, ak w je sufixom nejakého prefixu slova v.

Teraz sa môžeme pustiť do riešenia úlohy. Zadané reťazce označme s_1, s_2, …, s_n. S bude súčet ich dĺžok, teda $S = |s_1| + |s_2| + \ldots + |s_n|$. Zo slov $s_1, \ldots, s_n$ zostavíme *vyhľadávací automat.* Vyhľadávací automat je štruktúra, umožňujúca v lineárnom čase pre ľubovoľný reťazec t určiť všetky slová s_i, ktoré sa vyskytujú ako podreťazec v t. Keď budeme toto vedieť spraviť, riešenie úlohy je jednoduché – tento postup vykonáme postupne pre $t = s_1$, $t = s_2$, …, $t = s_n$, čím zistíme postupne predkov prvého, druhého, …, n-tého organizmu. Časová zložitosť bude $O(S + \text{čas na konštrukciu automatu} + \text{dĺžka výstupu})$.

Zostáva vytvoriť taký automat. Vyhľadávací automat sa skladá z dvoch častí – *trie* postaveného z reťazcov $s_1, \ldots, s_n$ a takzvanej *spätnej funkcie.*

Popis trie začneme príkladom – na obrázku vpravo je trie pre reťazce zo vzorového vstupu v zadaní.

Trie je strom, ktorého vrcholy zodpovedajú všetkým prefixom reťazcov $s_1, \ldots, s_n$. Ak má niekoľko reťazcov s_i rovnaký začiatok, zodpovedá tomuto spoločnému prefixu iba jeden vrchol. Synovia vrcholu zodpovedajúceho reťazcu w sú vrcholy zodpovedajúce reťazcom wx, kde x je znak abecedy, v našom prípade '`A`', '`C`', '`G`' alebo '`T`'. Každý vrchol má teda najviac štyroch synov, ale môže mať aj menej, ak žiadne zo slov $s_1, \ldots, s_n$ nezačína na wx. Koreň stromu zodpovedá prázdnemu reťazcu.



Obr. 42

[1] Tu je vhodné si uvedomiť, že bez ohľadu na to, kde presne tie čísla pôvodne boli, určite tvorili inverziu aj v pôvodnej, neutriedenej permutácií. A naopak, žiadna takáto inverzia sa nám nemohla stratiť a všetky nájdeme.

Niektoré vrcholy trie zodpovedajú slovám z s_i – napríklad vrcholy, ktoré nemajú žiadnych synov, ale môžu to byť aj vnútorné vrcholy trie, ak je niektoré zo slov prefixom iného. Ostatné vrcholy budeme nazývať *pomocné.*

O slove budeme vravieť, že je *reprezentované* v trie, ak je to jedno zo slov $s_1, \dots, s_n$, pre ktoré sme trie postavili. O slove budeme vravieť, že sa v trie *nachádza*, ak mu zodpovedá nejaký vrchol trie (môže byť aj pomocný). Každé slovo, ktoré je v trie reprezentované, sa v ňom samozrejme aj nachádza, opačné tvrdenie však vo všeobecnosti neplatí. Vo zvyšku textu budeme občas ztotožňovať vrcholy trie so slovami, ktoré im zodpovedajú. Ak napríklad budeme mať funkciu, ktorá vrcholu trie zodpovedajúcemu slovu v priradí vrchol zodpovedajúci inému slovu w, budeme občas pre zjednodušenie vravieť, že táto funkcia priraďuje slovu v slovo w.

V každom vrchole trie budeme mať smerníky na jeho štyroch synov. Niektorí synovia nemusia existovať, v tom prípade bude príslušný smerník `nil`. Okrem toho bude vrchol obsahovať hodnotu typu `boolean`, ktorá určuje, či vrchol zodpovedá nejakému slovu reprezentovanému v trie, alebo či je iba pomocný.

Či sa v trie nachádza určité slovo, môžeme jednoducho zistiť v čase lineárnom od dĺžky tohto slova: Začneme v koreni. Z neho sa posunieme do syna zodpovedajúceho prvému písmenu slova, z tohoto syna ďalej po hrane zodpovedajúcej druhému písmenu, atď. Ak narazíme na `nil` skôr, ako prídeme na koniec slova, toto slovo sa v trie nevyskytuje. Keď dôjdeme do vrcholu, ktorý zodpovedá zadanému slovu, môžeme ešte zistiť, či je toto slovo v trie reprezentované, t.j. či príznak vrcholu, do ktorého sme prišli, je `true`.

Podobne môžeme trie vytvoriť – postupujeme analogicky ako pri vyhľadávaní, ale keď „vypadneme“ z trie (t.j. narazíme na `nil`), začneme stavať novú cestu. Tento postup bude trvať $O(S)$ spolu pre všetky reťazce.

Ďalej si definujeme *spätnú funkciu* f, ktorá každému vrcholu trie priradí nejaký iný vrchol, zodpovedajúci kratšiemu slovu (preto spätná). Pre vrchol w bude $f(w)$ definované ako vrchol v taký, že v je najdlhší netriviálny sufix w nachádzajúci sa v trie. Funkciu môžeme reprezentovať tak, že pre každý vrchol v trie si uložíme smerník na vrchol $f(v)$.

Jednoduchý spôsob, ako spätnú funkciu spočítať, je tento: Vezmeme slovo w a zahodíme z neho prvé písmeno. Ak sa slovo v, ktoré takto dostaneme, nachádza v trie, je $f(w) = v$. Inak z v znovu zahodíme prvé písmeno a postup opakujeme, až kým hodnotu spätnej funkcie neurčíme – to sa určite stane, lebo v najhoršom prípade sa zastavíme na prázdnom reťazci. Pre vzorový vstup $f(\mathtt{ATA}) = f(\mathtt{CA}) = f(\mathtt{CATATGA}) = \mathtt{A}$, $f(\mathtt{ATAT}) = f(\mathtt{CAT}) = \mathtt{AT}$, $f(\mathtt{CATA}) = \mathtt{ATA}$, $f(\mathtt{CATAT}) = \mathtt{ATAT}$, $f(\mathtt{A}) = f(\mathtt{C}) = f(\mathtt{AT}) = f(\mathtt{CATATG}) = f(\mathtt{CATATGG}) = \lambda$.

Význam funkcie f je tento: Nech máme nejaký text a chceme zistiť, ktoré slová nachádzajúce sa v trie končia na zadanej pozícii v tomto texte. Navyše nech vieme, že s je najdlhšie také slovo. Potom $f(s)$ je druhé najdlhšie, $f(f(s))$ tretie najdlhšie, atď., dokážeme ich teda v lineárnom čase vypísať (a naviac zoradené podľa dĺžky). To sa nám bude hodiť, pretože pri hľadaní pomocou automatu si budeme pamätať pre každú pozíciu v texte vždy práve toto slovo s (presnejšie vrchol v trie, ktorý mu zodpovedá).

Vyššie popísaný triviálny postup ako spočítať f zaberie čas $O(S^3)$ – pre každý z najviac S vrcholov by sme museli vyhľadať rádovo S reťazcov, ktorých dĺžka môže byť až S. Samozrejme by sme to chceli zvládnuť rýchlejšie. K tomu použijeme postup založený na dynamickom programovaní. Funkciu f budeme postupne počítať od najkratších slov po dlhšie. Pre jednopísmenové slová je $f(x) = \lambda$. Uvažujme teraz slovo wx, kde x je jeho posledné písmeno. Označme $v = f(wx)$. Vieme, že v musí byť nejaký sufix wx, teda v končí na x (ak nie je prázdne), teda $v = v'x$ pre nejaké slovo v', ktoré je sufixom w. Teraz využijeme to, čo sme ukázali v predchádzajúcom odstavci – všetky sufixy w, ktoré sa nachádzajú v trie, sú $f(w)$, $f(f(w))$, atď. Nás zrejme zaujíma najdlhší z nich, ktorý sa dá rozšíriť o písmeno x tak, aby sa výsledné slovo nachádzalo v trie. Algoritmus na určenie $f(wx)$ teda funguje takto:

Označme $w' = f(w)$, túto hodnotu už máme spočítanú. Ak sa $w'x$ nachádza v trie, máme $f(wx) = w'x$, lebo w' je najdlhší sufix w v trie a teda $f(wx)$ nemôže byť dlhší. Ak sa $w'x$ v trie nenachádza, vyskúšame $w'' = f(w')$ a takto pokračujeme, až kým buď nenájdeme hodnotu pre $f(wx)$, alebo nedorazíme k prázdnemu reťazcu – potom $f(wx) = \lambda$. Testovanie, či $w'x$ je v trie, zvládneme v konštantnom čase, lebo poznáme vrchol v trie zodpovedajúci reťazcu w'.

Aká je časová zložitosť tohto postupu? Pri stanovovaní f pre jeden vrchol sa nám môže stať, že funkciu f budeme musieť použiť až S-krát. Na prvý pohľad by sa teda mohlo zdať, že časová zložitosť bude $O(S^2)$. Všimnime si však, že toto sa nám nemôže stať príliš často: slovo $f(wx)$ bude len o jedna dlhšie, než slovo $w^{''\cdots'}$, ku ktorému sme dospeli pri vracaní sa, teda oproti $f(w)$ môže byť nanajvýš o jedna dlhšie. Na to, aby sme sa mohli vracať o k hladín teda najprv musíme spraviť aspoň k krokov, v ktorých sa nevraciame vôbec a teda ich zvládneme v konštantnom čase. Táto úvaha nie je velkom presná, nie je však ťažké domyslieť všetky detaily. Spolu sa teda budeme vracať najviac S krát a časová zložitosť bude $O(S)$.

Vráťme sa ešte k motivácii definície funkcie f. Povedali sme, že $f(s)$, $f(f(s))$, atď. sú všetky sufixy slova s nachádzajúce sa v trie. Vôbec sme však nerozlišovali, či sú to pôvodne zadané slová, ktoré sú v trie reprezentované, alebo iba nejaké ich prefixy – teda pomocné vrcholy, ktoré žiadne z pôvodne zadaných slov nereprezentujú. Samozrejme niekde medzi nimi sú aj všetky slová, ktoré nás zaujímajú, ale mohlo by sa stať, že „balastu“ okolo bude veľa a jeho preskakovanie nám zhorší časovú zložitosť.

Preto ešte spočítame funkciu f', ktorá pre vrchol v vráti najdlhší reťazec u rôzny od v taký, že u je reprezentované v trie a dá sa k nemu dostať z v pomocou spätnej funkcie. Táto funkcia bude robiť presne to, čo chceme – $f'(v)$, $f'(f'(v))$, atď. sú práve všetky slová z pôvodnej množiny, končiace na danej pozícii. Spočítať f' pre všetky vrcholy trie je jednoduché – postupujeme od najkratších slov a využijeme to, že $f'(v) = f(v)$ ak $f(v)$ je reprezentované v trie a $f'(v) = f'(f(v))$ inak. Tento výpočet vyžaduje čas $O(S)$.

Tým sme dokončili konštrukciu automatu. Zostáva ešte vysvetliť, ako takto získaný automat použiť. Ako sme povedali v úvode, automat nám umožňuje rýchlo nájsť pre ľubovoľný text všetky slová s_i, ktoré sú jeho podreťazcom. Označme prehľadávaný text t.

Pre každý prefix u zadaného textu (slova) t by sme chceli nájsť najdlhší sufix u, ktorý sa nachádza v trie (potom môžeme s použitím funkcie f' jednoducho nájsť všetky s_i, ktoré sú sufixom u). Tieto sufixy postupne spočítame pre prefix t dĺžky 0, 1, 2, atď. Označme $l(i)$ hľadaný sufix pre prefix dĺžky i.

Prefix t dĺžky 0 je prázdne slovo a teda $l(0) = \lambda$.

Predpokladajme, že sme už spočítali l pre dĺžku i a $l(i) = s$. Nech písmeno na $(i+1)$-

vej pozícii v t je x. Potom $l(i+1)$ má byť najdlhší reťazec nachádzajúci sa v trie, ktorý sa vyskytuje ako podreťazec t končiaci na pozíci $i+1$, teda $l(i+1)$ musí končiť na x. $l(i+1)$ teda môžeme zapísať ako rx pre nejaký reťazec r, ktorý sa tiež nachádza v trie. Navyše r musí byť sufix s. Prejsť cez všetky sufixy s už vieme – stačí prezrieť s, $f(s)$, $f(f(s))$, atď. Mezi nimi hľadáme najdlhší, ktorý sa dá rozšíriť o x tak, aby sme zostali v trie. Všimnime si, že najdlhší taký sufix musí byť prvý, na ktorý narazíme.

Toto opakujeme, až kým nespracujeme celý reťazec t. Podobný postup sme použili pri konštrukcii spätnej funkcie, preto nás asi neprekvapí, že aj tu dosiahneme lineárnu časovú zložitosť: s sa posunie smerom od koreňa najviac $|t|$-krát (v každom kroku o jedna), teda smerom ku koreňu sa môžeme pohnúť tiež najviac $|t|$-krát. Celková časová zložitosť je teda $O(t)$.

Pre každý prefix u textu si naviac označíme slová zo zadania, ktoré sú jeho sufixy. Ako sme už uviedli, sú to práve slova $f'(s)$, $f'(f'(s))$, atď., plus prípadne slovo s, ak je jedným zo zadaných slov. Chceli by sme, aby nám na vypisovanie výstupu stačila časová zložitosť O(dĺžka výstupu). To by sa nám mohlo pokaziť, ak by sa nejaké slovo r v textu vyskytovalo veľakrát – potom totiž budeme veľakrát zbytočne prechádzať postupnost slov $f'(r)$, $f'(f'(r))$, ... To ľahko napravíme tak, že len čo narazíme na označené slovo, ďalej sa už funkciou f' vracať nebudeme – vieme totiž, že všetky ďalšie slová, ku ktorým by sme sa takto mohli dostať, sme už vypísali, keď sme tu boli prvý krát. Takto každé vypísané slovo navštívime práve raz, a teda dosiahneme požadovanú časovú zložitosť.

Celková zložitosť riešenia zadanej úlohy je $O(S +$ dĺžka výstupu$)$. To je zjavne optimálne, pretože minimálne musíme načítať vstup a vypísať výsledok. Pamäťová zložitosť je $O(S)$.

P – I – 4

Časť a)

Úlohu budeme riešiť podobne ako Príklad 2 zo študijného textu postupným prevádzaním na stále jednoduchšie problémy. Bez ujmy na všeobecnosti budeme predpokladať, že veľkosť vstupu N je mocnina dvojky (keby nebola, doplníme vstup nulami, čím sa výsledok evidentne nezmení a N sa maximálne zdvojnásobí).

Výpočet rozdelíme na fázy, pričom na konci i-tej fázy budú bity registra y rozdelené na bloky dĺžky 2^i bitov a v každom bloku bude uložený počet jednotkových bitov v príslušnom bloku vstupu. Také číslo sa iste do 2^i bitov vojde, pretože $2^i > i$ pre každé i. Hodnotu registra y na konci i-tej fázy označme y_i.

Počiatočné y_0 sa rovná vstupu x, pretože každý bit obsahuje počet jednotiek v sebe samom. Pre $i = \log_2 N$ dostaneme požadovaný výsledok, lebo y_i sa bude skladať z jediného bloku, v ktorom bude uložený počet jednotiek v celom vstupnom čísle. Stačí teda vyriešiť, ako z y_i spočítať y_{i+1}: Každý *veľký blok* v y_{i+1} obsahuje súčet dvoch *malých blokov* polovičnej veľkosti v y_i, ktoré ležia na mieste hornej, resp. dolnej polovice veľkého bloku. Preto stačí posunúť vyšší z malých blokov na pozíciu nižšieho a oba sčítať. To môžeme spraviť pre všetky veľké bloky naraz nasledujúcim programom: (b_j tu znamená jednotlivé malé bloky veľkosti $b = 2^i$, B_j sú výsledné veľké bloky veľkosti $B = 2b = 2^{i+1}$)

$$
\begin{array}{ll}
 & y = b_0 b_1 \dots b_{N/b-1} = y_i \\
p := y \wedge (\mathbf{0}^b\mathbf{1}^b)^{N/B} & p = \mathbf{0}^b b_1 \mathbf{0}^b b_3 \dots \mathbf{0}^b b_{N/b-1} \\
q := (y >> b) \wedge (\mathbf{0}^b\mathbf{1}^b)^{N/B} & q = \mathbf{0}^b b_0 \mathbf{0}^b b_2 \dots \mathbf{0}^b b_{N/b-2} \\
y := p + q & y = \quad B_0 \;\; B_1 \dots \quad B_{N/B-1} = y_{i+1}
\end{array}
$$

Jednu fázu vykonáme v konštantnom čase. Celý program preto beží v čase $O(\log N)$ s registrami dĺžky $O(N)$.

Ukážka výpočtu pre vstup dĺžky 8:

$$
\begin{array}{ll}
 & x = \mathbf{0\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,1} \\
y := x & y = \mathbf{0|1|1|1|1|1|0|1} = y_0 \\
p := y \wedge \mathbf{01010101} & p = \;\cdot\; \mathbf{1}|\cdot\; \mathbf{1}|\cdot\; \mathbf{1}|\cdot\; \mathbf{1} \\
q := (y >> 1) \wedge \mathbf{01010101} & q = \;\cdot\; \mathbf{0}|\cdot\; \mathbf{1}|\cdot\; \mathbf{1}|\cdot\; \mathbf{0} \\
y := p + q & y = \mathbf{0\,1|1\,0|1\,0|0\,1} = y_1 \\
p := y \wedge \mathbf{00110011} & p = \;\cdot\;\cdot\; \mathbf{1\,0}|\cdot\;\cdot\; \mathbf{0\,1} \\
q := (y >> 2) \wedge \mathbf{00110011} & q = \;\cdot\;\cdot\; \mathbf{0\,1}|\cdot\;\cdot\; \mathbf{1\,0} \\
y := p + q & y = \mathbf{0\,0\,1\,1|0\,0\,1\,1} = y_2 \\
p := y \wedge \mathbf{00001111} & p = \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\; \mathbf{0\,0\,1\,1} \\
q := (y >> 4) \wedge \mathbf{00001111} & q = \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\; \mathbf{0\,0\,1\,1} \\
y := p + q & y = \mathbf{0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,0} = y_3
\end{array}
$$

Časť b)

Nech zadané číslo x, ku ktorému máme nájsť najbližšie vyššie číslo y s rovnakým počtom jednotiek, obsahuje aspoň jednu jednotku (ak nie, hľadané y neexistuje a môžeme vrátiť ľubovoľný výsledok). Ak nájdeme v x posledný súvislý úsek jednotiek (môže to byť aj jediná jednotka), musí pred ním byť $\mathbf{0}$ (v opačnom prípade je x najvyššie číslo s daným počtom jednotiek a y opäť neexistuje). Číslo x sa teda dá zapísať v tvare $\alpha\mathbf{01}^k\mathbf{0}^l$.

Ukážeme, že hľadané číslo y sa rovná číslu $q = \alpha\mathbf{10}^{l+1}\mathbf{1}^{k-1}$:

- q obsahuje rovnaký počet jednotiek ako x.

- $q > x$ – pre každé α, β, γ, kde β a γ majú rovnakú dĺžku, totiž platí $\alpha\mathbf{1}\beta > \alpha\mathbf{0}\gamma$.

- Medzi x a q už žiadne číslo s rovnakým počtom jednotiek nie je – každé číslo medzi totiž musí buď vzniknúť z x zvýšením časti $\mathbf{0}^l$, čím by pribudli jednotky navyše, alebo z q znížením časti $\mathbf{1}^{k-1}$, a vtedy by jednotiek ubudlo.

Ako ale číslo q skonštruovať? Najprv postupom podobným ako v Príklade 1 spočítame niekoľko pomocných hodnôt:

$$
\begin{array}{ll}
 & x = \alpha\mathbf{01}^{k-1}\mathbf{10}^{l} \\
a := x - 1 & a = \alpha\mathbf{01}^{k-1}\mathbf{01}^{l} \\
b := x \vee a & b = \alpha\mathbf{01}^{k-1}\mathbf{11}^{l} \\
c := x \wedge a & c = \alpha\mathbf{01}^{k-1}\mathbf{00}^{l} \\
d := b + 1 & d = \alpha\mathbf{10}^{k-1}\mathbf{00}^{l} \\
e := c \oplus d & e = \ \ \mathbf{11}^{k-1}\mathbf{00}^{l} = \mathbf{1}^{k}\mathbf{0}^{l+1} \\
f := (e-1) \wedge e & f = \ \ \mathbf{1}^{k-1}\mathbf{0}^{l+2}
\end{array}
$$

Teraz by stačilo jednotky v f posunúť k pravému okraju čísla a skombinovať s jednotkami v d a dostali by sme žiadané číslo q. Operácia $>>$ to ale sama o sobe nedokáže, lebo posunutie nemáme dané počtom bitov, ale podmienkou „prvá jednotka sa dotkne okraja“.

Znovu na to pôjdeme postupným zjednodušovaním problému a budeme bez ujmy na všobecnosti predpokladať, že N je mocnina dvojky. Fázy tentokrát očíslujeme odzadu: od $\log_2 N$-tej po nultú. V i-tej fáze zariadime, aby f končilo na menej než 2^i núl. Opäť v počiatočnej fáze nemáme čo na práci a v koncovej dostaneme očakávaný výsledok. Ostatné fázy budú fungovať takto: dostaneme f, ktoré končí na najviac 2^{i+1} núl a potrebujeme ho posunúť doprava tak, aby končilo na najviac 2^i núl. Stačí sa teda pozrieť, či je najnižších 2^i bitov nulových, a ak áno, f posunúť doprava o 2^i miest. To sa dá spraviť napríklad pomocou konštrukcie $r := \mathit{if}(s,t,u)$ z Príkladu 1:

$$
\begin{array}{ll}
g := f \wedge \mathbf{1}^{2^i} & g = \text{dolných } 2^i \text{ bitov } f_{i+1} \\
h := \mathit{if}(g, 0, 2^i) & h = \text{o koľko posúvame} \\
f := f >> h & f = \text{výsledok } i\text{-tej fázy } f_i
\end{array}
$$

Po poslednej fáze zakončíme:

$$
\begin{array}{ll}
 & d = \alpha\mathbf{10}^{k-1}\mathbf{00}^{l} \\
 & f = \ \ \mathbf{00}^{l+1}\mathbf{1}^{k-1} \\
y := d \vee f & y = \alpha\mathbf{10}^{l+1}\mathbf{1}^{k-1}
\end{array}
$$

a sme hotoví. Trvalo to celkovo $O(\log N)$ krokov (konštantný počet na inicializáciu, na koncový výpočet y a tiež na každú fázu). Potrebovali sme registre s $O(N)$ bitmi.

Príklad výpočtu pre $N = 8$:

$$
\begin{array}{ll}
 & x = \mathbf{10111000} \\
a := x - 1 & a = \mathbf{10110111} \\
b := x \vee a & b = \mathbf{10111111} \\
c := x \wedge a & c = \mathbf{10110000} \\
d := b + 1 & d = \mathbf{11000000} \\
e := c \oplus d & e = \mathbf{01110000} \\
f := (e - 1) \wedge e & f = \mathbf{01100000} = f_3 \\
g := f \wedge \mathbf{00001111} & g = \cdot\cdot\cdot\cdot\mathbf{0000} \\
h := \mathit{if}(g, 0, 2^2) & h = \mathbf{00000100} \\
f := f >> h & f = \mathbf{00000110} = f_2 \\
g := f \wedge \mathbf{00000011} & g = \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\mathbf{10} \\
h := \mathit{if}(g, 0, 2^1) & h = \mathbf{00000000} \\
f := f >> h & f = \mathbf{00000110} = f_1 \\
g := f \wedge \mathbf{00000001} & g = \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\mathbf{0} \\
h := \mathit{if}(g, 0, 2^0) & h = \mathbf{00000001} \\
f := f >> h & f = \mathbf{00000011} = f_0 \\
y := d \vee f & y = \mathbf{11000011}
\end{array}
$$

P – II – 1

Pri riešení tejto úlohy použijeme riešenie úlohy P-I-1 z domáceho kola. Jedinou zmenou oproti domácemu kolu je podmienka, že žiadny zákazník v dobe, keď bude prať, neuvidí dvoch rôznych zákazníkov používať tú istú práčku.

Inak povedané, práčka, ktorú používal zákazník Cyril, môže byť použitá až v momente, keď zo salónu odíde posledný zákazník, ktorý pral prádlo súčasne s Cyrilom. Povedzme, že zo všetkých zákazníkov, ktorí prali prádlo zároveň s Cyrilom, je Metod ten, ktorý odíde zo salónu najneskôr. Potom práčku, ktorú používal Cyril, môže použiť ďalší zákazník až po odchode Metoda zo salónu.

Toto pozorovanie využijeme tak, že z pôvodných zákaziek vytvoríme nové zákazky, ktoré budeme nazývať „tieňové“. Tieňová zákazka zákazníka A bude rovnaká ako pôvodná zákazka zákazníka A, ak je v dobe jeho odchodu salón prázdny. Ak tomu tak nie je, koniec tieňovej zákazky zákazníka A bude čas, kedy zo salónu odíde posledný zákazník, ktorý pral prádlo zároveň so zákazníkom A.

Riešenie úlohy s pôvodnými zákazkami a podmienkou, že žiadny zákazník v dobe, keď bude prať, neuvidí dvoch rôznych zákazníkov používať tú istú práčku, je rovnaké ako riešenie úlohy s tieňovými zákazkami bez tejto podmienky. Tieňové zákazky držia nejaké práčky „obsadené“ až do doby, kým ich môže Borivoj znovu použiť. K nájdeniu riešenia úlohy s tieňovými zákazkami sa potom dá použiť riešenie domáceho kola.

Pri riešení úlohy budeme postupovať tak, že zo zadaných zákaziek vytvoríme tieňové. Takto vytvorenú úlohu potom vyriešime ako v domácom kole. Tieňové zákazky vytvoríme nasledovným postupom. Ako v domácom kole vytvoríme udalosti príchodu a odchodu pre každého zákazníka. Tieto udalosti zotriedime (udalosti odchodu pred príchodmi, ktoré nastanú v rovnaký čas). Zotriedené udalosti raz prejdeme (podľa vzrastajúceho času) a budeme si udržovať dobu T, kedy zo salónu odíde posledný zákazník, ktorý je v salóne práve prítomný. Dobu T vieme ľahko udržovať tak, že kedykoľvek narazíme na príchod nejakého zákazníka, novú hodnotu T zistíme ako maximum jej minulej hodnoty a doby, kedy chce spracovávaný zákazník zo salónu odísť.

Prechod zotriedených udalostí bude prebiehať tak, že keď narazíme na

- *príchod* zákazníka A, upravíme dobu T.
- *odchod* zákazníka A, vytvoríme tieňovú zákazku pre zákazníka A, ktorej príchod nastavíme na príchod zákazníka A a odchod na dobu T (ktorá je v tej chvíli väčšia alebo rovná dobe, kedy chcel zo salónu odísť posledný zákazník A).

Tento prechod sa dá uskutočniť v lineárnom čase, avšak triedenie udalostí nám zaberie čas $O(N \log N)$. Na uloženie zadaných zákaziek, tieňových zákaziek a zotriedených udalostí budeme potrebovať $O(N)$ pamäti. Druhá časť riešenia, algoritmus z domáceho kola, má rovnakú časovú zložitosť ako práve popísané vytvorenie tieňových zákaziek, a tak je celková časová zložitosť nášho riešenia $O(N \log N)$ a pamäťová $O(N)$.

P – II – 2

Najskôr zavedieme substitúciu $x_i = y_i + a_{i,N+1}$ pre i, $1 \le i \le N$, a $x_{n+1} = y_{N+1}$. Napríklad pre sústavu z prvého príkladu v zadaní úlohy po substitúcii dostaneme:

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &\neq 0 \\ y_1 - y_3 &\neq 0 \\ y_1 - y_4 &\neq 0 \\ y_2 - y_3 &\neq 1 \\ y_2 - y_3 &\neq 0 \\ y_3 - y_4 &\neq 0 \end{aligned}$$

Pre sústavu z druhého príkladu po substitúcii dostaneme:

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &\neq 2 = 0 \pmod 2 \\ y_1 - y_3 &\neq 0 \\ y_2 - y_3 &\neq 0 \end{aligned}$$

Novozískaná sústava podmienok má riešenie práve vtedy, keď ho mala tá pôvodná: Keď x_i, $1 \le i \le N+1$, rieši pôvodnú sústavu, potom riešenie novej sústavy podmienok je $y_i = x_i - a_{i,N+1}$ pre $i \le N$ a $y_{N+1} = x_{N+1}$; naopak, z riešenia novej sústavy získame riešenie pôvodnej sústavy pričítaním hodnôt $a_{i,N+1}$.

Všimnime si, že všetky podmienky, v ktorých sa vyskytuje y_{N+1}, majú pravú stranu 0:

$$y_i - y_{N+1} = (x_i - a_{i,N+1}) - x_{N+1} = (x_i - x_{N+1}) - a_{i,N+1} \neq a_{i,N+1} - a_{i,N+1} = 0$$

Pozrime sa bližšie na novozískanú sústavu podmienok. Ak sú všetky pravé strany rovné nule, znamená to, že všetky neznáme $y_1, \ldots, y_{N+1}$ musia byť navzájom rôzne. Pretože ale existuje iba N čísel s rôznymi zvyškami po delení N, sústava podmienok nemá riešenie. Vzápätí ukážeme, že ak nie sú všetky pravé strany rovné nule, potom nová sústava podmienok, a teda aj tá pôvodná, majú riešenie.

Označme $a'_{i,j}$ pravú stranu podmienky, ktorej ľavá strana je $y_i - y_j$. Predpokladajme, že $a'_{i,j} \neq 0$ pre nejaké i a j. Pretože $a'_{i,N+1} = 0$, z voľby y_i musí platiť $1 \leq i < j \leq N$. Položme $y_i = y_j = 0$. Pretože $a'_{i,j} \neq 0$, podmienka $y_i - y_j \neq a'_{i,j}$ je tým zjavne splnená. Teraz zvolíme hodnoty ostatných neznámych postupne od y_1 po y_N tak, aby všetky podmienky, ktoré ich obsahujú, boli splnené. V okamihu, keď volíme hodnotu neznámej y_k, $1 \leq k \leq N$, $k \neq i, j$, tak sa neznáma y_k vyskytuje v najviac $N-1$ podmienkach s ostatnými neznámymi, ktorých hodnotu sme už zvolili. Pretože každá podmienka zakazuje priradenie práve jedného z čísel $0, \ldots, N-1$ neznámej y_k, je spolu zakázaných najviac $N-1$ hodnôt a dá sa y_k nejaká hodnota priradiť.

Ostáva zvoliť hodnotu y_{N+1}. Po prevedení našej substitúcie boli pravé strany všetkých N podmienok, v ktorých sa y_{N+1} vyskytuje, rovné nule. Teda hodnota y_{N+1} musí byť rôzna od hodnôt $y_1, \ldots y_N$. Pretože $y_i = y_j$, majú neznáme $y_1, \ldots, y_N$ najviac $N-1$ rôznych hodnôt a preto sa dá y_{N+1} priradiť (aspoň) jedna z hodnôt $0, \ldots, N-1$.

Naše doterajšie úvahy vedú priamočiaro ku kvadratickému algoritmu, ktorý rieši zadanú úlohu. Najskôr prevedieme substitúciu popísanú v prvom odseku. Ak sú všetky pravé strany po substitúcii rovné 0, nová i pôvodná sústava podmienok nemá riešenie. V opačnom prípade nájdeme riešenie novej sústavy podmienok postupom popísaným v predchádzajúcich dvoch odsekoch. Riešenie pôvodnej sústavy ľahko získame aplikáciou substitúcie inverznej k prvej substitúcii. Časová aj pamäťová zložitosť nášho algoritmu je kvadratická, tj. $O(N^2)$.

P – II – 3

1. riešenie:

Najskôr si ukážeme jednoduché riešenie pracujúce v čase $O(kn)$, založené na priehradkovom triedení (RadixSort). Ako také triedenie funguje? Keď chceme zotriediť m reťazcov $s_1, \ldots, s_m$ dĺžky l, najskôr ich zotriedime podľa posledného písmena, potom podľa predposledného (pričom ak sa predposledné písmeno zhoduje, zachováme poradie podľa posledného písmena) atď. až podľa prvého písmena. Triedenie podľa i-teho písmena (tomu budeme hovoriť jeden *prechod*) robíme tak, že si založíme priehradky indexované písmenami, jednotlivé reťazce (resp. ich čísla) rozmiestnime do priehradok podľa toho, aké je ich i-te písmeno a nakoniec priehradky prejdeme od najmenšieho písmena k najväčšiemu a reťazce z nich vyzbierame.

Každý prechod bude trvať $O(m)$ [čas závisí i na veľkosti abecedy, pretože musíme prejsť i prázdne priehradky, ale to pre nás bude konštanta, ktorá sa „schová do O-čka“], prechodov je l, takže triedením strávime spolu čas $O(lm)$.

Aby sme vyriešili našu úlohu, nájdeme v zadanom reťazci všetky podreťazce dĺžky k (tých je $n-k+1$), zotriedime ich RadixSortom a potom v zotriedenom zozname nájdeme najdlhší úsek tvorený rovnakými podreťazcami. Všimnime si, že pri triedení podreťazcov si nemusíme pamätať celé podreťazce, ale stačia ich začiatky vo „veľkom“ reťazci. Takto všetko zvládneme v čase $O(kn)$ a pamäti $O(n)$.

Ešte jedna poznámka k implementácii: aby sme zbytočne neplytvali pamäťou, neukladáme jednotlivé priehradky ako oddelené polia, ale všimneme si, že všetky priehradky spolu obsahujú len n prvkov, takže ich naskladáme do jedného n-prvkového poľa, len si v druhom pamätáme, kde priehradka začína. Z vyzbieraných hodnôt z priehradok sa potom stane len skopírovanie jedného poľa do druhého.

2. riešenie:

Existuje algoritmus, ktorý zadanú úlohu rieši v čase $O(n)$, kde n je dĺžka textu T, je však pomerne komplikovaný – je potrebné vybudovanie a prechod tzv. sufixového stromu pre text T. Ak by sme sa uspokojili s časom $O(n \log n)$, vystačíme si aj s jednoduchšou dátovou štruktúrou, ktorou je sufixové pole. Obe tieto riešenia však rozhodne presahujú rámec tejto súťaže a neočakávali sme, že spomenuté dátové štruktúry viete použiť, tobôž že ich v priebehu súťaže vymyslíte.

Aj nasledujúce riešenie je dosť trikové a využíva netriviálne výsledky. Opäť, nepredpokladáme samozrejme, že by ste tieto techniky mali poznať, či dokonca aktívne používať – všetky tieto riešenia už uvádzame skôr pre zaujímavosť a prípadne ako inšpiráciu pre záujemcov o tento obor.

3. riešenie:

Podrobnejšie si ukážeme pomerne jednoduchý *randomizovaný* algoritmus, t.j. algoritmus používajúci pri výpočte náhodné čísla, ktorý bude pracovať v čase $O(n)$ aspoň v priemernom prípade. Tým je myslené, že ak budeme mať smolu na to, aké čísla nám padajú z generátoru náhodných čísel, môže to trvať dlhšie, ale vo väčšine prípadov nám (nezávisle na vstupných dátach) dá výsledok v čase $O(n)$.

Náš randomizovaný algoritmus bude fungovať tak, že najprv riešenie „uhádne“, overí si, že uhádnuté riešenie je naozaj správne a ak nebude, celý postup zopakuje. Takýto algoritmus, samozrejme, nemusí nikdy skončiť, ale my si dokážeme, že uhádnuté riešenie bude správne s pravdepodobnosťou aspoň $1/2$, takže v priemernom prípade budeme potrebovať najviac dva pokusy. Ako hľadanie, tak overovanie budú zaberať čas $O(n)$, takže túto časovú zložitosť bude mať v priemere i celý algoritmus.

Najprv si rozmyslime, že ak uhádneme, že sa nejaký reťazec dĺžky k opakuje v texte l-krát, môžeme si ľahko overiť, že tomu tak skutočne je. K tomu použijeme riešenie úlohy z domáceho kola – zostrojíme si vyhľadávací automat pre tento podreťazec, prejdeme s ním text a spočítame počet jeho výskytov, tj. počet prechodov akceptačným stavom. To nám zaberie čas $O(n)$ – v čase $O(k)$ zostrojíme automat, v čase $O(n)$ prejdeme text automatom a $k < n$.

Fáza hľadania funguje takto: Najskôr si zvolíme hashovaciu funkciu. To je nejaká funkcia h, zobrazujúca reťazce dĺžky k na celé čísla medzi 0 a $p-1$ (hodnotu p si zvolíme neskôr). Samozrejme sa nám môže stať, že dva reťazce zobrazíme na rovnaké číslo (tomu hovoríme kolízia), avšak ak bude hashovacia funkcia dobrá, nebude sa to stávať často. Teraz každý podreťazec textu T dĺžky k zobrazíme touto funkciou a spočítame počet reťazcov, ktoré sa zobrazia na jedno číslo. Z týchto počtov si vezmeme ten najväčší a vrátime jeden z prípadne viacerých reťazcov, ktoré sa na príslušné číslo zobrazili. Ak tento reťazec nekolidoval so žiadnym iným, vyhrali sme, pretože všetky ostatné reťazce (aj keď sme niektoré kvôli kolíziám nedokázali od seba odlíšiť) nie sú častejšie. Ak kolidoval, odhalí to kontrola.

Ostáva domyslieť detaily tak, aby sme všetko zvládli v lineárnom čase:

Nájdenie najčastejšej hodnoty hashovacej funkcie: Poslúži nám opäť RadixSort: každé číslo si zapíšeme v tvare $a_3n^3 + a_2n^2 + a_1n + a_0$, kde a_i sú menšie ako n (to nie je nič iné ako zápis čísla v sústave so základom n) a budeme ho triediť ako reťazec $a_3a_2a_1a_0$ nad n-prvkovou abecedou. Ako už vieme, RadixSort takéto triedenie zvládne v čase $O(n)$.

Počítanie hashovacej funkcie musíme urobiť šikovne (v skutočnosti toto je hlavný trik celého riešenia, zbytok sú len technické detaily), inak by sme tu potrebovali čas nk alebo väčší. Trik je v tom, že si zvolíme takú hashovaciu funkciu, aby sme (pre slovo w dĺžky $k-1$, a písmená s a t) dokázali $h(ws)$ spočítať so znalosťou $h(tw)$ v konštantnom čase. Potom ak budeme hashovacie funkcie počítať postupne od začiatku a posúvať sa vždy o jedno písmeno, spotrebujeme skutočne čas len $O(n)$.

Hashovaciu funkciu si zvolíme takto: p bude náhodne zvolené prvočíslo medzi $kn^3/2$ a kn^3,

$$h(s_k s_{k-1} \dots s_1) = \left(\sum_{i=1}^{k} 256^{i-1} s_i \right) \bmod p$$

(predpokladáme, že abeceda [alebo skôr ASCIIceda] má 256 znakov).

Výraz v zátvorke si označíme $X(s)$. $X(s)$, samozrejme, môže byť väčšie ako je rozsah čísla reprezentovaného v počítači, avšak modulovanie p sa dá pri jeho výpočte vykonávať priebežne, takže nemôže pretiecť. Postupné počítanie funkcie h je potom jednoduché, lebo zrejme $h(ws) = (256 \cdot h(tw) - (256^k \bmod p)t + s) \bmod p$.

Ľahko nahliadneme, že pravdepodobnosť, že dôjde ku kolízii, je menšia ako 1/2: aby dvom rôznym reťazcom s_1 a s_2 bola priradená rovnaká hodnota, musel by rozdiel $X(s_1) - X(s_2)$ byť deliteľný p. Veľkosť tohto rozdielu je najviac 256^k, teda ho delí najviac $8\log_2 k$ rôznych prvočísel (každé z nich má veľkosť aspoň 2 a keby ich bolo viac, ich súčin by musel byť väčší ako 256^k). Rôznych reťazcov je najviac n, teda ich dvojíc je najviac $n^2/2$ a „zlých“ prvočísel najviac $4kn^2$. Pomerne triviálny výsledok teórie čísel hovorí, že počet prvočísel medzi $kn^3/2$ a kn^3 je približne $\frac{kn^3}{2\log kn^3}$, teda pravdepodobnosť, že sa trafíme do zlého prvočísla je menšia ako $\frac{8\log kn^3}{n} \le \frac{8\log n^4}{n} = \frac{32\log n}{n}$, čo je menej ako 1/2 pre $n \ge 381$ – v skutočnosti sú uvedené odhady pomerne hrubé, takže táto pravdepodobnosť je ešte podstatne menšia.

Ostáva jediný technický detail – ako nájsť náhodné prvočíslo. To sa dá spraviť v čase $O(\log^d n)$, kde d je nejaká konštanta, avšak nie je to úplne triviálne. Miesto toho v programe volíme iba náhodné číslo v danom intervale; do prvočísla sa trafíme s pravdepodobnosťou približne $1/\log n$, teda časová zložitosť sa tým zhorší najviac na $O(n \log n)$.

P – II – 4

Túto úlohu by sme mohli riešiť podobne ako úlohy z minulého kola v čase $O(\log N)$ s $O(N)$-bitovými číslami – stačí si všimnúť, že otočenie čísla dĺžky N sa dá spraviť prehodením jeho polovíc (čo zvládneme na konštantný počet operácii) a následným otočením oboch polovíc (čo môžeme spraviť súčasne). Pre $N = 8$ by to vyzeralo takto:

$$
\begin{array}{rr}
 & x = x_7x_6x_5x_4x_3x_2x_1x_0 \\
a := x \wedge \mathbf{11110000} & a = x_7x_6x_5x_4\,\mathbf{0\ 0\ 0\ 0} \\
b := x \wedge \mathbf{00001111} & b = \ \mathbf{0\ 0\ 0\ 0}\,x_3x_2x_1x_0 \\
y := (a >> 4) \vee (b << 4) & y = x_3x_2x_1x_0x_7x_6x_5x_4 \\
a := y \wedge \mathbf{11001100} & a = x_3x_2\,\mathbf{0\ 0}\,x_7x_6\,\mathbf{0\ 0} \\
b := y \wedge \mathbf{00110011} & b = \ \mathbf{0\ 0}\,x_1x_0\,\mathbf{0\ 0}\,x_5x_4 \\
y := (a >> 2) \vee (b << 2) & y = x_1x_0x_3x_2x_5x_4x_7x_6 \\
a := y \wedge \mathbf{10101010} & a = x_1\,\mathbf{0}\,x_3\,\mathbf{0}\,x_5\,\mathbf{0}\,x_7\,\mathbf{0} \\
b := y \wedge \mathbf{01010101} & b = \ \mathbf{0}\,x_0\,\mathbf{0}\,x_2\,\mathbf{0}\,x_4\,\mathbf{0}\,x_6 \\
y := (a >> 1) \vee (b << 1) & y = x_0x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7
\end{array}
$$

Keď však využijeme násobenie a delenie, zvládneme to na konštantný počet operácii, aj keď budeme potrebovať čísla dĺžky $O(N^2)$.

Náš algoritmus bude založený na tom, že zadané číslo $x = x_{N-1}\dots x_0$ najprv N-krát skopírujeme (to sa dá spraviť pomocou násobenia), potom i-tu kópiu nahradíme číslom, ktoré bude na i-tom mieste obsahovať x_{N-1-i} a všade inde nuly. Následne všetky kópie sčítame (k tomu môžeme opäť použiť násobenie, ale my si ukážeme pekný trik so zvyškom po delení).

Kopírovanie bude vyzerať takto: číslo x vynásobíme číslom $(\mathbf{0}^{N-1}\mathbf{1})^{N+1}$, čím získame číslo $(x_{N-1}\dots x_0)^{N+1}$, teda $N+1$ kópii zadaného čísla. Tento výsledok si tiež môžeme predstaviť rozdelený na N úsekov dĺžky $N+1$: najnižší úsek bude obsahovať čísla $x_0x_{N-1}\dots x_0$, ten nad ním $x_1x_0x_{N-1}\dots x_1$ atď. Teda i-ty úsek zdola (počítané od nuly) bude mať na najnižšom mieste x_i.

Každý úsek vyplníme hodnotou jeho najnižšieho bitu. K tomu stačí úsek upraviť do tvaru $\mathbf{1}\mathbf{0}^{N-1}x_i$ (použijeme $\wedge$ a $\vee$) a odčítať od neho jednotku. Ak x_i bolo $\mathbf{1}$, výjde $\mathbf{1}\mathbf{0}^N$, inak dôjde k prenosu a dostaneme $\mathbf{0}\mathbf{1}^N$. V každom prípade sa na najvyššom mieste objaví x_i a na ostatných $\neg\, x_i$, čo jedným *xor*om opravíme na x_i všade. Naviac nemohlo dôjsť k prenosu mimo úsek, takže sa úseky navzájom neovplyvňujú, a preto môžeme túto operáciu spraviť pre všetky úseky súčasne.

Teraz stačí vhodným *and*ovaním v každom úseku ponechať x_i na pozícii, na ktorej má vo výsledku skončiť, ostatné výskyty x_i vynulovať a všetky úseky sčítať. Sčítanie môžeme spraviť pekným trikom: ak máme v registri r uložené číslo tvaru $t_1\dots t_z$, kde t_i sú k-bitové čísla a sčítame $r\,\%(2^k-1)$, vyjde $(t_1+\dots+t_z)\,\%(2^k-1)$. V našom prípade naviac vieme, že $t_1+\dots+t_z < 2^k-1$, pretože sčítame $(N+1)$-bitové úseky s N-bitovým výsledkom a tak sa modulo na výsledku neprejaví a dostaneme priamo hľadaný súčet.

Prečo modulo 2^k-1 funguje ako súčet blokov môžeme vidieť z toho, ako by sa choval „školský“ algoritmus pre delenie čísel na papieri, ale tiež to môžeme ľahko dokázať indukciou: pre $z = 1$ trik určite funguje; keď už vieme, že funguje pre $z-1$ a chceme dokázať, že funguje i pre z, všimneme si, že:

$$t_1 \dots t_z \,\%(2^k-1) = \Big((t_1 \dots t_{z-1}) \cdot 2^k + t_z\Big) \,\%(2^k-1) =$$

$$= \Big(\underbrace{\Big(t_1 \dots t_{z-1} \,\%(2^k-1)\Big)}_{\text{indukčný predpoklad}} \cdot \underbrace{\Big(2^k \,\%(2^k-1)\Big)}_{=1} + t_z \Big) \,\%(2^k-1),$$

čo je spolu $(t_1 + \ldots + t_z)\,\%(2^k-1)$, presne, ako sme chceli.

Na všetky výpočty sme potrebovali registre dĺžky $N \cdot (N+1) = O(N^2)$. Operácii bolo konštantne veľa. Ostáva už len program:

	$x = x_{N-1} \dots x_0$
$y := x * (\mathbf{0}^{N-1}\mathbf{1})^{N+1}$	$y = (x_{N-1} \dots x_0)^{N+1}$
	$= (x_{N-1} \dots x_0 x_{N-1}) \dots (x_1 x_0 x_{N-1} \dots x_1)(x_0 x_{N-1} \dots x_0)$
$y := y \wedge (\mathbf{0}^N\mathbf{1})^N$	$y = (\mathbf{0}^N x_{N-1}) \dots (\mathbf{0}^N x_1)(\mathbf{0}^N x_0)$
$y := y \vee (\mathbf{1}\mathbf{0}^N)^N$	$y = (\mathbf{1}\mathbf{0}^{N-1} x_{N-1}) \dots (\mathbf{1}\mathbf{0}^{N-1} x_1)(\mathbf{1}\mathbf{0}^{N-1} x_0)$
$y := y - (\mathbf{0}^N\mathbf{1})^N$	$y = (x_{N-1}(\neg x_{N-1})^N) \dots (x_0(\neg x_0)^N)$
$y := y \oplus (\mathbf{0}\mathbf{1}^N)^N$	$y = (x_{N-1}^{N+1}) \dots (x_0^{N+1})$
$y := y \wedge (\mathbf{0}^N\mathbf{1})(\mathbf{0}^{N-1}\mathbf{1}\mathbf{0}) \dots (\mathbf{0}\mathbf{1}\mathbf{0}^{N-1})$	$y = (\mathbf{0}^N x_{N-1})(\mathbf{0}^{N-1} x_{N-2}\mathbf{0}) \dots (\mathbf{0}\mathbf{0} x_1 \mathbf{0}^{N-2})(\mathbf{0} x_0 \mathbf{0}^{N-1})$
$y := y \,\%\, \mathbf{1}^{N+1}$	$y = \mathbf{0} x_0 x_1 \dots x_{N-1}$

P – III – 1

Na vyriešenie tejto úlohy zjavne stačí vedieť priradiť náhrdelníkom nové kódy tak, aby náhrdelníky, ktoré sa líšia len rotáciou alebo preklopením mali rovnaký kód. Potom už stačí len ukladať do stroja tieto nové kódy.

Jedno takéto kódovanie vieme ľahko definovať: Napíšeme si všetky možné kódy daného náhrdelníka a za jeho nový kód vyberieme ten z nich, ktorý je lexikograficky najmenší.

Zostáva teda vymyslieť, ako čo najrýchlejšie pre zadaný reťazec tento kód nájsť. Zjavne stačí vedieť riešiť úlohu bez preklápania, teda vybrať lexikograficky najmenšiu spomedzi všetkých rotácií daného reťazca R. (Tento postup potom použijeme na pôvodný reťazec, na jeho zrkadlový obraz a vyberieme menšie z oboch riešení.)

Nech r je dĺžka zadaného reťazca R. Jeho lexikograficky najmenšiu rotáciu označíme R_{min}.

Existujú štandardné stringologické algoritmy, pomocou ktorých vieme rýchlo nájsť lexikograficky najmenšiu rotáciu daného reťazca – vieme napríklad v čase $O(r)$ zostrojiť pre daný reťazec tzv. sufixový strom, prípadne v čase $O(r.\log r)$ jednoduchším algoritmom tzv. sufixové pole. Tieto dátové štruktúry však presahujú rámec tohto textu.

Ukážeme si iné riešenie, ktoré nájde lexikograficky najmenšiu rotáciu daného reťazca v čase $O(r)$.

Predstavme si, že R napíšeme na kružnicu. Všetky podreťazce budeme teda uvažovať cyklicky – napr. podreťazec, ktorý začína $(r-2)$. písmenom a má dĺžku 4, končí prvým písmenom reťazca R.

Budeme postupne zostrojovať množiny „kandidátov“ S_l (kde l je číslo od 0 do r). Prvkami týchto množín budú úseky reťazca R, určené budú svojim začiatkom a dĺžkou. Ak o nich budeme niekedy hovoriť ako o reťazcoch, myslíme tým reťazce tvorené príslušnými písmenami reťazca R.

Naše množiny S_l budú spĺňať nasledujúce podmienky:

1. Všetky úseky v S_l majú dĺžku najviac l. Úseky dĺžky l voláme *aktívne*, ostatné *neaktívne*. Množinu aktívnych úsekov v S_l označíme S'_l. V programe si aktívne úseky pamätáme oddelené od neaktívnych.

   Úseky v S_l môžu mať dĺžku 0. Presnejšie, úsek dĺžky 0 je na každej pozícii, ktorá nie je obsiahnutá v žiadnom neprázdnom úseku.

2. Každý reťazec v S_l je prefixom hľadaného slova R_{min} (teda je zhodný s jeho začiatkom). Ak niektorý úsek v S_l nie je aktívny, tak po pridaní nasledujúceho písmena v R dostaneme reťazec, ktorý už nie je prefixom R_{min}.

   Úseky v S'_l sú práve všetky úseky dĺžky l, ktoré zodpovedajú prefixom R_{min} dĺžky l.

3. Žiadne dva úseky v S_l sa neprekrývajú, ani na seba bezprostredne nenadväzujú. Budeme si ich pamätať v poradí, v akom v R začínajú.

Na začiatku nech S_0 je množina všetkých úsekov dĺžky 0, všetky budú aktívne. Táto množina zjavne spĺňa požadované vlastnosti.

Ak už máme zostrojenú množinu S_l, nasledujúcu množinu zostrojíme takto:

- Nájdeme najmenšie písmeno c, ktoré nasleduje za niektorým úsekom z S'_l. Všetky úseky z S'_l, za ktorými nasleduje c, o jedno (toto) písmeno predĺžime. Neaktívne úseky nezmeníme. Takto upravenú množinu nazveme X.

- X zjavne spĺňa prvú podmienku, kladenú na S_{l+1}. Takisto druhá podmienka je splnená – reťazce, ktoré doteraz boli aktívne, ale nepredĺžili sme ich, sa zjavne na nasledujúcej pozícii líšia od R_{min}. Ak teda X spĺňa aj tretiu podmienku, položíme $S_{l+1} = X$ a máme zostrojenú ďalšiu množinu.

- Čo ale ak X tretiu podmienku nespĺňa? Úseky v X sa nemôžu prekrývať – totiž úseky v S_l sa neprekrývali ani na seba nenadväzovali. Jediné, čo sa teda mohlo stať, je že niektoré úseky v X na seba nadväzujú.

  Ak na seba postupne (cyklicky) nadväzujú všetky aktívne úseky, je reťazec R periodický s periódou $l+1$. V tomto prípade začiatkom najmenšej rotácie je každý začiatok aktívneho úseku a môžeme skončiť beh algoritmu.

  Uvedomte si, že táto situácia skôr či neskôr nastane. V najhoršom prípade (ak R je aperiodický, a teda má len jednu najmenšiu rotáciu) zostrojíme časom množinu S_n, ktorá bude obsahovať jediný aktívny úsek nadväzujúci sám na seba.

- Zostáva nám teda vyriešiť prípad, ak niektoré aktívne úseky v X na seba nenadväzujú. Neaktívny úsek nemôže nadväzovať na úsek, ktorý nasleduje za ním, lebo sme ho nepredĺžili. Takže v X nám tretiu podmienku kazí niekoľko postupností na seba nadväzujúcich aktívnych úsekov, pričom niektoré tieto postupnosti môžu ešte byť ukončené neaktívnym úsekom. Každú takúto postupnosť úsekov spojíme do jedného úseku. Takto dostaneme novú množinu Y. Nech je dĺžka najdlhšieho z týchto nových úsekov q. Potom tvrdíme, že $Y = S_q$.

  Nami zostrojená množina zjavne spĺňa prvú a tretiu podmienku kladenú na S_q. Pozrime sa podrobnejšie na platnosť druhej podmienky:

  Nech aktívny úsek v X zodpovedá reťazcu s. Potom každý neaktívny úsek je prefixom s (z druhej podmienky pre X), a teda ak je $w = ss \dots sn$ aktívny reťazec v Y, je ľubovolný iný reťazec $w' = ss' \dots sn'$ v Y jeho prefixom – pretože n' je prefix s a ak w aj w' obsahujú rovnaký počet úsekov s, n musí byť aspoň tak dlhé ako n' a n' je teda prefix n.

  Prefix R_{min} dĺžky q musí byť w, pretože R nemá podreťazec dĺžky $(l+1)$ menší než s ani podreťazec dlžky $|n|$ menší než n vďaka druhej podmienke pre X. Akýkoľvek úsek v Y kratší ako q sa na nasledujúcej pozícii líši od w – inak by podľa druhej podmienky pre X mal byť aspoň o túto pozíciu dlhší. Každý úsek R zodpovedajúci w je v Y aktívny, pretože všetky jeho podúseky zodpovedajúce s aj n museli byť v X vďaka druhej podmienke.

  Teda aj druhá podmienka je splnená, čím sme ukázali, že naozaj $Y = S_q$ a opäť sa nám podarilo zostrojiť novú množinu úsekov.

Tento postup opakujeme, až kým niekedy v jeho treťom kroku neskončíme. To sa nutne musí stať, pretože každým opakovaním konštrukcie predĺžime aktívne reťazce aspoň o jeden znak.

Správnosť algoritmu bola ukázaná v popise. Časová zložitosť je $O(r)$. To nahliadneme týmto spôsobom:

- V prvom kroku konštrukcie novej množiny sú dva prípady – písmeno nasledujúce po danom úseku je buď c alebo nie je. V prvom prípade sa toto písmeno stane súčasťou daného úseku a už sa naň nikdy nepozrieme – to sa môže stať len r krát, raz pre každé písmeno. V druhom prípade úsek prestane byť aktívny – to sa úseku stane nanajvýš raz, nové úseky vznikli len na začiatku konštrukcie a bolo ich r, teda aj toto sa stane nanajvýš r krát počas celého behu programu.

- Operácie v ďalších krokoch robíme len s úsekmi, ktoré sú tou dobou aktívne – to sú ale vždy práve úseky, ktoré sme v predchádzajúcom kroku o písmeno predĺžili.Všetky tieto kroky vieme urobiť v čase lineárnom od počtu momentálne aktívnych úsekov. Preto v každom z týchto krokov urobíme rádovo rovnako práce ako v jemu predchádzajúcom prvom kroku – a teda aj v týchto krokoch vykonáme dokopy najviac lineárne veľa operácií.

Pamäťová zložitosť je tiež $O(r)$, pretože v lineárnom čase nestihneme viac pamäte použiť.

P – III – 2

Ukážeme si riešenie s časovou zložitosťou $O(NM)$, kde N a M sú rozmery mapy areálu MO. Riešenie si najprv popíšeme všeobecne a až v druhej časti sa zameriame na to, ako dosiahnuť časovú zložitosť $O(NM)$.

V mape si najskôr určíme jednotlivé budovy, ktoré sa v areáli MO nachádzajú. Budovy si očíslujeme a každý štvorček `x` nahradíme číslom budovy, do ktorej patrí. Potom si všimneme budovu číslo 1 a pozrieme sa na dĺžky mostov, ktoré môžu z tejto budovy viesť. Všimnite si, že ak si zvolíme políčko na okraji budovy a smer, tak je dĺžka mostu (i budova, do ktorej by viedol) už jednoznačne určená. Zo všetkých týchto mostov vezmeme najkratší a ten do mapy pridáme. Tým spojíme budovu číslo 1 s budovou číslo i. Teraz sa pozrime na všetky možné mosty, ktoré by sme mohli viesť z budovy číslo 1 alebo z budovy číslo i do ostatných budov a najkratšiu z nich pridajme do mapy.

Všeobecne, keď B je množina budov, ktoré sme už vzájomne prepojili pomocou mostov, pridáme najkratší možný most z niektorej budovy v množine B do niektorej z ostatných budov. Ak je takých mostov viac, pridáme ľubovoľný z nich. Algoritmus skončí, keď sme už všetky budovy vzájomne prepojili, alebo sa žiadna budova nedá mostom k už prepojeným budovám pripojiť (v takom prípade vypíšeme vhodnú správu).

[Pre znalcov dodávame, že to nie je nič iné ako Primov-Jarníkov algoritmus na hľadanie minimálnej kostry grafu.]

Ďalej si rozmyslíme, že ak sa nám podarí prepojiť všetky budovy, tak je nami nájdené riešenie optimálne. Nech $M = \{m_1, \dots, m_k\}$ je množina mostov, ktoré obsahuje nami nájdené riešenie a predpokladajme, že most m_i bol pridaný do riešenia ako i-ty. Pre spor teraz predpokladajme, že v optimálnom riešení M' je súčet dĺžok mostov je menší než súčet dĺžok mostov z množiny M. Naviac zvoľme za M' také optimálne riešenie, ktoré obsahuje ako podmnožinu čo najväčšiu počiatočnú podpostupnosť $m_1, \dots, m_l$, t.j. $\{m_1, \dots, m_l\} \subseteq M'$ a l je maximálne možné. Pretože $M \neq M'$, musí platiť $l < k$.

Nech B je množina budov, ktoré sú vzájomne prepojené mostami $m_1, \dots, m_l$ a nech j je číslo budovy, do ktorej vedie z množiny B most m_{l+1}. Pretože mosty z množiny M' prepojujú všetky budovy, existuje cesta z množiny budov B do budovy číslo j používajúca mosty z M'. Všimnime si najkratšiu takú cestu $m'_1, \dots, m'_{l'}$. Z voľby mostu m_{l+1} plynie, že most m'_1 nie je kratší ako most m_{l+1}. Nahraďme teraz v M' most m_{l+1} mostom m'_1. Súčet dĺžok mostov sa týmto krokom nezvýšil. Naviac všetky budovy sú stále prepojené: namiesto mostu m'_1 sa dá použiť cesta tvorená mostami $m_{l+1}, m'_{l'}, \dots, m'_2$. To je ale spor s voľbou množiny M' ako optimálneho riešenia, ktoré obsahuje čo najväčšiu počiatočnú podpostupnosť $m_1, \dots, m_l$. Nami nájdené riešenie M je teda optimálne.

Zamerajme sa ešte na to, ako práve popísaný algoritmus implementovať, aby sme dosiahli časovú zložitosť $O(NM)$. Rospoznanie jednotlivých budov ľahko zvládneme v čase $O(NM)$ – mapu postupne prechádzame a v okamžiku, keď narazíme na políčko `x`, prehľadáme (do hĺbky alebo do šírky) v mape oblasť tvorenú touto budovou a všetky políčka `x` nahradíme číslom práve nájdenej budovy. Tento krok zrejme vyžaduje čas $O(NM)$, lebo každé políčko mapy navštívime najviac dvakrát (prvýkrát pri prechode mapou a druhýkrát pri označovaní budovy).

Teraz spustíme druhú fázu algoritmu, v ktorej budeme budovy medzi sebou prepájať mostami. Označme K celkový počet budov. Aby sme mohli rýchlo rozpoznať, ktoré budovy sme už vzájomne prepojili, budeme používať pomocné pole veľkosti K, kde si pre každú budovu uložíme, či je už s budovou číslo 1 spojená, alebo nie je. Z každého okrajového políčka budovy číslo 1 vyšleme súčasne lúče (hore a dolu): v prvom kroku sa lúče nachádzajú na políčkach susediacich priamo s budovou číslo 1 (viď obrázok), v druhom kroku sú vo vzdialenosti 2, atď. Ak lúč narazí na budovu s číslom 1 či opustí mapu, už ho ďalej nepredlžujeme. Takto postupujeme, kým prvý lúč nenarazí na inú budovu. Povedzme, že táto budova má číslo i. Zrejme dráha, ktorú lúč urazil, zodpovedá najkratšiemu možnému mostu z budovy číslo 1 do inej budovy. Tento most pridáme do mapy a budovy najvzájom prepojíme.

```
......   ......   ......   ...↑↑.   ......   ......   ......
.ii...   .ii...   .ii↑↑.   .ii||.   .ii...   .ii...   .ii...
......   ...↑↑.   ...||.   ...||.   ......   .↑↑...   .|....
...xx.   ...xx.   ...xx.   ...xx.   .↑↑xx.   .||xx.   .|.xx.
....x.   ...↓x.   ...↑x.   .↑↑.x.   .||.x.   .||.x.   .|..x.
....x.   ...↑x.   .↑↑↓x.   .||.x.   .||.x.   .||.x.   .|..x.
...xx.   .↑↑xx.   .||xx.   .||xx.   .||xx.   .||xx.   .|.xx.
.xxx..   .xxx↓.   .xxx..   .xxx..   .xxx..   .xxx..   .xxx..
```

Obr. 43: Lúče putujúce v mape – zobrazenie po jednotlivých krokoch

Potom vyšleme lúče z budovy číslo i a budeme ich predlžovať, kým nenarazíme na inú budovu, alebo ich dĺžka nebude rovnaká ako dĺžka lúčov vyslaných z budovy číslo 1. V okamžiku, keď dĺžka lúčov vyslaných z budovy číslo i dosiahne dĺžku lúčov vyslaných z budovy číslo 1, začneme predlžovať súčasne lúče vyslané z budovy číslo 1 a zároveň i tie, vyslané z budovy číslo i. Ak však najskôr narazíme na inú budovu, povedzme s číslom i', pripojíme ju mostom k budove číslo i. Z budovy číslo i' vyšleme lúče, kým nenarazíme na inú budovu, alebo ich dĺžka nedosiahne dĺžku lúčov vyslaných z budovy číslo i. V prvom prípade vyšleme lúče z novo-pripojenej budovy, v druhom prípade začneme spoločne predlžovať lúče z budov číslo i a i', kým nedosiahnu dĺžku lúčov vyslaných z budovy číslo 1 (alebo nenarazíme na nepripojenú budovu). Všeobecne, keď narazíme na novú budovu, prerušíme predlžovanie súčasných lúčov a vyšleme lúče z novej budovy. Predlžovanie lúčov obnovíme v okamžiku, keď dĺžka lúčov z novej budovy bude rovnaká ako dĺžka lúčov, ktorých predlžovanie sme prerušili. Všimnite si, že v jednom okamihu môže byť prerušené predlžovanie až K rôznych množín lúčov.

Je zrejmé, že vyššie popísaným postupom pripojíme mostom vždy budovu, ktorú vieme spojiť s už prepojenými budovami najkratším mostom. Pretože každé políčko na mape navštívi každý lúč najviac dvakrát (raz lúč „letiaci“ smerom hore, raz smerom dolu), spotrebuje druhá fáza nášho algoritmu čas iba $O(NM)$. Samotné lúče si budeme udržovať v poli dĺžky $2NM$ zotriedené zostupne podľa ich dĺžky a vždy budeme predlžovať prvý najkratší lúč, ktorý sa v poli nachádza (aby sme udržali lúče utriedené zostupne). Aby sme sa vyhli zbytočnému prechádzaniu tohoto pomocného poľa, budeme si naviac udržovať odkazy na pozíciu lúčov, ktorých predlžovanie sme prerušili. Zoznam lúčov by sme tiež mohli udržovať v spájanom zozname. Pamäťová zložitosť práve popísaného riešenia je, rovnako ako jeho časová zložitosť, $O(NM)$.

P – III – 3

Najskôr si ukážeme riešenie v konštantnom čase s kvadraticky veľkými registrami. Použijeme pri tom triky z príkladov v zadaní a zo vzorových riešení minulých kôl. Hodiť sa nám bude najmä násobenie, ktorým vieme naraz vytvoriť viacero kópií daného bloku bitov a zvyšok po delení, ktorým naopak dokážeme veľa kópií sčítať do jedného bloku.

Využijeme aj operáciu typu $x \wedge (x-1)$ pre nájdenie najnižšieho jednotkového bitu. Keďže by sme však potrebovali nájsť bit najvyšší, číslo si najskôr obrátime (na to nám konštantný čas a kvadratický priestor stačí – viď riešenie krajského kola); potom nájdeme najnižšiu jednotku (tejto funkcií budeme hovoriť *Low1*) a odčítame od veľkosti vstupu.

Funkciu *Low1* naprogramujeme nasledovne: vypočítame $(x \vee (x-1)) \oplus x$, čím sa nám objavia jednotky práve na mieste núl vpravo od poslednej jednotky a zvyšok čísla bude nulový. Hľadaná hodnota je teda počet týchto jednotiek. Ten zistíme tak, že násobením vhodnou konštantou vytvoríme N kópií čísla, v každej kópii *and*om vynulujeme všetky bity okrem jedného (v nultej kópii nultého, v prvej prvého atď.), číslo, ktoré vznikne pomyselne prerozdelíme na bloky veľkosti o 1 väčšie, čiže všetky nevynulované bity budú najnižšími bitmi bloku, a tie môžeme operáciou modulo $\mathbf{1}^{N+1}$ ľahko sčítať. To už sme tiež raz použili v riešení krajského kola, ale pre osvieženie pamäti si nakreslime, ako to bude vyzerať:

x_3	x_2	x_1	x_0	x_3	x_2	x_1	x_0	x_3	x_2	x_1	x_0	x_3	x_2	x_1	x_0					(N kópií bloku veľkosti N)
x_3	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	x_2	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	x_1	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	x_0					(bity, ktoré chceme sčítať)
x_3	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	x_2	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	x_1	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	x_0					(bloky veľkosti $N+1$)

Program bude veľmi jednoduchý:

$$
\begin{array}{ll}
 & x = \mathbf{0}^i\mathbf{1}\alpha \\
a := \mathit{Mirror}_N(x) & a = \beta\mathbf{1}\mathbf{0}^i \quad \text{(zrkadlenie } N\text{-bitového čísla)} \\
y := a \vee (a-1) & y = \beta\mathbf{1}\mathbf{1}^i \\
y := y \oplus x & y = \mathbf{0}^{N-i}\mathbf{1}^i \\
y := y * (\mathbf{0}^{N-1}\mathbf{1})^N & y = (\mathbf{0}^{N-i}\mathbf{1}^i)^N \\
\multicolumn{2}{l}{y := y \wedge (\mathbf{1}\mathbf{0}^{N-1})(\mathbf{0}\mathbf{1}\mathbf{0}^{N-2})\dots(\mathbf{0}^{N-2}\mathbf{1}\mathbf{0})(\mathbf{0}^{N-1}\mathbf{1})} \\
 & y = (\mathbf{0}^N)\dots(\mathbf{0}^N)(\mathbf{0}^{N-i}\mathbf{1}\mathbf{0}^{i-1})\dots(\mathbf{0}^{N-1}\mathbf{1}) \\
 & \quad = (\mathbf{0}^{N+1})^{N-i}(\mathbf{0}^N\mathbf{1})^i \\
y := y \,\%\, \mathbf{1}^{N+1} & y = i = \mathit{Low1}(a) \\
y := N-1-y & y = \mathit{Log}(x)
\end{array}
$$

My sa, samozrejme, s kvadratickou pamäťou neuspokojíme a zredukujeme ju na lineárnu. Urobíme to tak, že si vstup rozdelíme na rádovo $\sqrt{N}$ blokov veľkosti rádovo $\sqrt{N}$, každý blok skomprimujeme do jedného bitu (ktorý bude jednotkový, ak sa vnútri bloku vyskytuje aspoň jedna jednotka) a spočítame logaritmus takéhoto čísla použitím vyššie uvedeného algoritmu (naše číslo má len $\sqrt{N}$ bitov, vzhľadom k čomu máme v N-bitovom registri k dispozícii kvadraticky veľký priestor). Logaritmus nám povie, v ktorom bloku se nachádza najľavejšia jednotka a pre tento blok spustíme spomínaný algoritmus znovu, čím dopočítame, kde presne jednotka je.

Ostáva vyriešiť, ako presne kompresiu spraviť a ako sa vyrovnať s tými hodnotami

N, ktoré nie sú druhými mocninami. Za veľkosť bloku zvolíme $b = \lceil\sqrt{N}\rceil + 1$ a vstup rozdelíme na $b-1$ blokov (keďže $b\cdot(b-1) \geq (\sqrt{N}+1)\cdot\sqrt{N} > N$, musíme na začiatok pridať ešte pár núl, ktoré nám neovplyvnia výsledok). Použijeme pracovné registre o $b^2 = O(N)$ bitoch.

Ak nastavíme najvyšší bit každého bloku na **1** a od každého bloku odčítame jednotku, zmenia sa najvyššie bity na **0** práve v blokoch, ktoré boli (až na najvyšší bit) celé nulové, inde ostane **1**. Potom pri*or*ujeme pôvodne najvyššie bity, takže pre každý blok teraz máme **1** alebo **0** podľa toho, či obsahoval jednotku alebo nie. Tieto bity už stačí len presunúť k sebe, k čomu použijeme opäť pomyselné prerozdelenie blokov a modulo. Obrázok popisuje situáciu pre 3 bloky o štyroch bitoch:

z_2	**0**	**0**	**0**	z_1	**0**	**0**	**0**	z_0	**0**	**0**	**0**	(pre každý blok jeden bit)
0	**0**	**0**	z_2	**0**	**0**	**0**	z_1	**0**	**0**	**0**	z_0	(posun doprava)
0	**0**	**0**	z_2	**0**	**0**	**0**	z_1	**0**	**0**	**0**	z_0	(prerozdelíme bloky po $b-1$)
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	z_2	z_1	z_0	(modulo $\mathbf{1}^{b-1}$)

Program bude vyzerať takto:

	$x = \beta_{b-2} \dots \beta_0$ (bloky po b bitoch)
$z := x \vee (\mathbf{1}\mathbf{0}^{b-1})^{b-1}$	$z = (\mathbf{1}\dots)\dots(\mathbf{1}\dots)$
$z := ((z-(\mathbf{0}^{b-1}\mathbf{1})^{b-1})\vee x)\wedge(\mathbf{1}^{b-1}\mathbf{0})^{b-1}$	
	$z = (z_{b-2}\mathbf{0}^{b-1})\dots(z_0\mathbf{0}^{b-1})$ (skomprimované bloky)
$z := z >> b-1$	$z = (\mathbf{0}^{b-1}z_{b-2})\dots(\mathbf{0}^{b-1}z_0)$
$z := z \,\%\, \mathbf{1}^{b-1}$	$z = z_{b-2}\dots z_0$
$i := Log(z)$	$i =$ *číslo bloku s najvyššou jednotkou*
$r := (x >> (b*i)) \wedge \mathbf{1}^b$	$r =$ *blok s najvyššou jednotkou*
$j := Log(r)$	$j =$ *pozícia najvyššej jednotky v bloku*
$y := b*i+j$	$y =$ *pozícia jednotky v pôvodnom čísle*

Tento program počíta dvojkový logaritmus stále v konštantnom čase a stačia mu lineárne veľké pracovné registre.

Poznámka: Doplňovanie čísla na dĺžku práve $b\cdot(b-1)$ alebo prevod úlohy na úlohu zrkadlovú vám môžu právom pripadať ako „besné“ triky, ktoré sa nedajú v obmedzenom čase súťaže vymyslieť. Úloha je ale riešiteľná i bez nich, samozrejme za cenu dlhšieho programu a ošetrovania rôznych okrajových prípadov, čomu sme sa chceli v tomto vzorovom riešení vyhnúť.

P – III – 4

Jednotlivým písmenám v zaklínadle priradíme čísla zľava doprava podľa nasledujúceho magického receptu:

- Písmeno α, dostane číslo 1, ak sa pred ním v zaklínadle nevyskytuje iné písmeno α, ani písmená α^- a α^+, kde $\alpha^\pm$ je písmeno v abecede tesne pred/za písmenom

α. Napríklad písmeno c dostane číslo 1, ak sa pred ním v zaklínadle nevyskytuje žiadne z písmen b, c, d.

- V opačnom prípade písmenu α priradíme maximum z čísel priradených písmenám α^-, α a α^+, ktoré sa pred ním vyskytujú v zaklínadle, zväčšené o 1. Napríklad písmeno c dostane číslo 4, ak sa pred ním vyskytuje písmeno b s číslom 3 a žiadne z písmen c a d.

V našom algoritme bude kľúčové nasledujúce pozorovanie:

Tvrdenie: Dve zaklínadlá sú ekvivalentné práve vtedy, keď čísla priradené každému z písmen $a \dots z$ tvoria rovnakú postupnosť.

Skôr ako si toto tvrdenie dokážeme, demonštrujme si jeho platnosť na zaklínadlách zo zadania úlohy:

```
121314   111234
abraka   krabaa
```

Postupnosti čísel priradených písmenám a, b, k a r sú nasledujúce: 134, 2, 1 a 1. Podľa tvrdenia, ktoré sme zatiaľ nedokázali, sú preto obe zaklínadlá ekvivalentné.

```
11213   12131
dabra   badar
```

Čísla priradené písmenu a v prvom zaklínadle tvoria postupnosť 13, zatiaľ čo v druhom tvoria postupnosť 23. Zaklínadlá teda podľa nášho tvrdenia nie sú ekvivalentné.

Teraz si vyššie uvedené tvrdenie dokážeme:

Dôkaz: Ak v zaklínadle vymeníme dve susedné písmená, ktoré nie sú v abecede tesne vedľa seba, čísla priradené týmto písmenám se nezmenia. Teda v ekvivalentných zaklínadlách musia byť postupnosti čísel priradených každému z písmen rovnaké.

Obrátenú implikáciu, t.j., že ak čísla priradené každému z písmen $a \dots z$ tvoria rovnakú postupnosť, tak sú obe zaklínadlá ekvivalentné, dokážeme indukciou od dĺžky zaklínadla. Tvrdenie zrejme platí pre jedno- a dvojpísmenové zaklínadlá. Predpokladajme teraz, že obe zaklínadlá sú tvorené aspoň troma písmenami. Všimnime si v prvom zaklínadle písmeno, ktoré má priradené najväčšie číslo, ak je takých viac, tak to z nich, ktoré je prvé v abecede. Označme ho α. Podobne v druhom zaklínadle nájdeme písmeno β. Pretože postupnosti čísel priradených rovnakým písmenám sú zhodné v oboch zaklínadlách, musí platiť $\alpha = \beta$.

Pretože α je písmeno v prvom zaklínadle s najväčším číslom, nenasleduje za ním už žiadne z písmen α^-, α a α^+, a môžeme ho teda postupnosťou výmien premiestniť na koniec zaklínadla. Podobne môžeme na koniec druhého zaklínadla premiestniť písmeno β. Keďže výmeny dvoch susedných písmen, ktoré nie sú v abecede tesne vedľa seba, nemenia čísla priradené jednotlivým písmenám, sú postupnosti čísel priradených jednotlivým písmenám v oboch nových zaklínadlách zhodné. Táto vlastnosť ostane zachovaná i po odobratí písmen α a β. Na takto získané kratšie zaklínadlá použijeme indukčný predpoklad. Pretože sú skrátené zaklínadlá ekvivalentné, sú ekvivalentné i zaklínadlá s písmenami α a β na konci, a teda i pôvodné zaklínadlá.

Práve dokázané tvrdenie nám dáva návod, ako otestovať, či sú dve zaklínadlá ekvivalentné. Najskôr podľa vyššie uvedených pravidiel priradíme každému písmenu v zaklínadlách číslo a potom skontrolujeme, či sa postupnosti čísel priradených rovnakým písmenám zhodujú. Aby sme sa pri tejto kontrole vyhli viacnásobnému prechodu zadanými zaklínadlami, pri priraďovaní čísel si zároveň vytvoríme postupnosti pre jednotlivé písmená. Naviac, aby sme sa vyhli (pomalej) dynamickej alokácií pamäti, budeme si v pomocnom poli uchovávať odkazy na nasledujúce rovnaké písmeno v zadanom zaklínadle. Časová i pamäťová zložitosť takéhoto algoritmu je pre dvojicu N-písmenových zaklínadiel $O(N + A)$, kde A je počet písmen, ktoré sa môžu v zaklínadlách vyskytovať (v našom prípade $A = 26$).

P – III – 5

Úlohu si najskôr preformulujeme do reči teórie grafov: máme daný graf G a chceme zistiť, či (a ako) sa dajú jeho hrany rozdeliť do dvojíc tak, aby hrany v každej dvojici mali spoločný vrchol. Úloha zrejme nemá riešenie, ak je hrán nepárny počet. V ostatných prípadoch ukážeme, ako nájdeme hľadané rozdelenie.

Budeme graf prehľadávať do hĺbky a vždy pred návratom z každého vrcholu spravíme nasledujúce: Vezmeme všetky doposiaľ nespárované hrany susediace s aktuálnym vrcholom. Ak je hrán nepárny počet, vynecháme hranu vedúcu k otcovi (tá musí byť doposiaľ nespárovaná). Teraz máme párny počet hrán a môžeme ich teda ľubovoľne spárovať. Po spárovaní hrán môžeme ukončiť spracovanie aktuálneho vrcholu a vrátiť sa k otcovi. Týmto spôsobom sa nám muselo podariť spárovať všetky hrany, pretože pri každom vrchole sme nechali nespárovanú nanajvýš jednu hranu – ale tá viedla k otcovi a bola nutne spárovana pri spracovávaní otca.

Uvedomte si, že ani pri poslednom spracovávanom vrchole problém nastať nemohol. Teoreticky by mohla nastať situácia, v ktorej by neexistovala hrana, ktorú by sme mohli vynechať, ak by nám v tomto vrchole zostal nepárny počet nespárovaných hrán. Všetkých hrán však bol párny počet a aj po spárovaní niektorých hrán je počet nespárovaných hrán naďalej párny. Preto nám v poslednom vrchole musel zostať párny počet hrán, ktoré ľahko spárujeme. Algoritmus má časovú aj pamäťovú zložitosť $O(M+N)$, kde N je počet vrcholov grafu G a M je počet jeho hrán.

12. Stredoeurópska informatická olympiáda

Dvanásty ročník Stredoeurópskej olympiády v informatike (CEOI 2005) sa konal v dňoch 28.júla - 4.augusta 2005 v Sarospataku v Maďarsku. Zúčastnilo sa viac než 50 súťažiacich z Chorvátska, Českej republiky, Nemecka, Maďarska, Poľska, Rumunska a Slovenska, ale aj Bosny a Hercegoviny, Estónska, Francúzska, Španielska, Holandska a Portugalska, ktorí boli pozvaní ako hostia. Našu krajinu reprezentovali Peter Perešíni (3. ročník, Gym. J. G. Tajovského Banská Bystrica), Daniel Bundala (3. ročník, Gym. J. Hronca Bratislava), Matúš Petruľák (4. ročník, Gym. Grösslingová Bratislava) a Jakub Imriška (3. ročník, Gym. J. Hronca Bratislava). Výpravu sprevádzali doc. RNDr. Gabriela Andrejková, CSc. (členka SK MO, z PF UPJŠ) a Juliana Lipková (členka SK MO, z FMFI UK).

Súťaž sa skladala z dvoch súťažných dní. Každý deň súťažiaci riešili tri úlohy algoritmického charakteru. Plný počet bodov (600 bodov) nezískal nikto, víťazovi, Dan Ionut Fechete z Rumunska, chýbalo vyriešiť za plný počet bodov príklad z názvom Service, s ktorým sa popasil iba jeden súťažiaci. Ďalšie priečky obsadzovali poliaci, ktorým sa na CEOI (a nielen tam) veľmi darilo. Naši súťažiaci si znovu užili trochu smoly, takže miestam „pod čiarami“ sa nevyhli. Získali sme 3 bronzové medajly. Výsledky našich súťažiacich sú uvedené v nasledujúcej tabuľke:

Meno	Body za úlohy						Body	Medaila
	Dep	Key	Ser	Fen	Net	Tic		
Peter Perešíny	43	90	0	55	95	6	289	bronzová
Daniel Bundala	13	90	21	85	15	45	269	bronzová
Matúš Petruľák	26	100	5	65	0	15	211	bronzová
Jakub Imriška	7	5	38	0	40	79	169	-

Súčasťou neodborného programu bola obhliadka mesta Sarospatak, výlet na ranč a obhliadka keramikárne, spojená s výrobou vlastného hrnčeka. Zorganizovali nám tiež športové hry, rôzne umelecké aktivity ako napríklad prácu s hrnčiarkym kruhom, výrobu rôznych píšťal a podobných nástrojov. Kedže sme boli v tokajskej oblasti, nechýbala ani návšteva pivnice s ochutnávkou vína. Súťažiaci si tiež krátili čas navštevovaním miestneho preplneného kúpaliska alebo večerným „gitarovaním“ a spievaním.

Budúcoročná Stredoeurópska olympiáda v informatike sa bude konať v Chorvátsku. Uvidíme, či sa im podarí vyrobiť aspoň rovnako kvalitné úlohy, ako boli v Maďarsku. Dúfajme. A rovnako dúfajme, že naši reprezentanti im ukážu, čo vedia.

Juliana Lipková, FMFI UK

Zadania úloh 12. Stredoeurópskej informatickej olympiády

Preusporiadanie skladu

Počet bodov: 100 bodov
Dostupná pamäť: 64 MB
Maximálny čas behu: 2s

Spoločnosť vlastní N obchodov, pričom každý predáva M rôznych druhov slimákov. Spoločnosť má veľký sklad, v ktorom sa slimáky balíčkujú predtým, než sú prevezené do obchodov. Každý obchod dostáva rovnaké množstvo z každého druhu slimákov. Preto spoločnosť balíčkuje určitý počet slimákov daného druhu do konzerv a označuje túto konzervu identifikačným číslom. Identifikačné čísla sú od 1 do M. Teda na konci balíčkovania je v sklade $M \cdot N$ konzerv a práve N konzerv je označených jedným identifikačným číslom.

Pretože sklad je úzky, konzervy sú usporiadané v jednom rade. Kvôli zrýchleniu distribúcie sa manažér rozhodol preusporiadať konzervy v sklade. Keďže slimáky sú odvážané do každého obchodu práve jedným nákladiakom a každý nákladiak vezie práve jednu konzervu z každého druhu, vhodné usporiadanie konzerv v sklade je nasledujúce. Prvých M konzerv v rade musí byť označených rôznymi identifikačnými číslami, druhých M konzerv v rade musí byť označených rôznymi identifikačnými číslami, atď. Nanešťastie je len jediné voľné miesto pre konzervu, a to na konci radu. Preto sa preusporiadanie musí robiť takto: zdvihne sa konzerva a prenesie sa na voľné miesto. Po skončení preusporiadania musí byť voľné miesto znovu na konci radu.

Cieľom je zminimalizovať počet presunov potrebných na preusporiadanie.

Súťažná úloha

Vašou úlohou je napísať program, ktorý vypočíta minimálny počet presunov potrebných na preusporiadanie a určí postupnosť presunov, pomocou ktorej ho možno dosiahnuť.

Formát vstupu Prvý riadok vstupu (textový súbor `depot.in`) obsahuje dve celé čísla N a M. N $(1 \le N \le 400)$ je počet obchodov a M $(1 \le M \le 400)$ je počet druhov slimákov. Druhý riadok obsahuje $N \cdot M$ celých čísel, ktoré určujú identifikačné čísla konzerv na začiatku. Identifikačné číslo produktu $x (1 \le x \le M)$ sa nachádza v riadku práve N-krát.

Formát výstupu Prvý riadok výstupu (textový súbor `depot.out`) by mal obsahovať práve jedno celé číslo S, minimálny počet presunov, ktorý je potrebný na preusporiadanie konzerv (Podúloha A).

Nasledujúcich S riadkov popisuje proces preusporiadania (Podúloha B). Každý riadok obsahuje dvojicu celých čísel x, y. Dvojica x, y popisuje presun: konzerva z pozície x sa presunie na pozíciu y. Pozícia je identifikovaná číslami od 1 do $N \cdot M + 1$; na začiatku je voľná pozícia $N \cdot M + 1$ (nie je na nej žiadna konzerva). Presun z x na y je možný len vtedy, ak je pozícia y voľná. Po presune z x na y bude pozícia x uvoľnená. Ak je viacej možností, vypíše ľubovoľnú z nich. Ak riešite iba podúlohu A, môžete vypísať len prvý riadok.

Príklad

Súbor depot.in	Súbor depot.out
`5 6`	`8`
`4 1 3 1 6 5 2 3 2 3 5 6 2 1 4 5 6 4 1 3 2 4 5 5`	`9 31`
`1 2 3 4 6 6`	`18 9`
	`10 18`
	`4 10`
	`31 4`
	`30 31`
	`24 30`
	`31 24`

Viackľúčové triedenie

Počet bodov: 100 bodov
Dostupná pamäť: 10 MB
Maximálny čas behu: 6s

Majme tabuľku pozostávajúcu z riadkov a stĺpcov. Stĺpce sú očíslované od 1 po C. Pre zjednodušenie položky v tabuľke sú reťazce tvorené písmenami malej abecedy.

1	2	3
ananás	remeň	slávik
ananás	gauč	sádra
puška	gauč	slávik
banán	zlato	slávik
banán	brada	rota

Tabuľka 1

1	2	3
banán	brada	rota
ananás	gauč	sádra
puška	gauč	slávik
ananás	remeň	slávik
banán	zlato	slávik

Tabuľka 2

1	2	3
ananás	gauč	sádra
ananás	remeň	slávik
banán	brada	rota
banán	zlato	slávik
puška	gauč	slávik

Tabuľka 3

Na takýchto tabuľkách je definovaná operácia $Sort(k)$: $Sort(k)$ utriedi riadky tabuľky v poradí podľa hodnôt v stĺpci k (poradie stĺpcov sa nezmení). Triedenie je **stabilné**, teda riadky, ktoré majú rovnaké hodnoty v stĺpci k, zostávajú vo svojom originálnom poradí. Napríklad aplikáciou $Sort(2)$ na tabuľku 1 dostaneme tabuľku 2.

Budeme sa zaoberať postupnosťami takýchto triediacich operácií. Tieto operácie sú postupne aplikované na tú istú tabuľku. Napríklad aplikáciou postupnosti $Sort(2); Sort(1)$ na tabuľku 1 dostaneme tabuľku 3.

Dve postupnosti triediacich operácií sú **ekvivalentné**, ak pre ľubovoľnú tabuľku majú rovnaký efekt. Napríklad postupnosť $Sort(2); Sort(2); Sort(1)$ je ekvivalentná s postupnosťou $Sort(2); Sort(1)$. Avšak nie je ekvivalentná s postupnosťou $Sort(1); Sort(2)$, pretože efekt pri jej aplikácii na tabuľku 1 je rozdielny.

Súťažná úloha

Daná je postupnosť triediacich operácií. Napíšte program, ktorý určí najkratšiu ekvivalentnú postupnosť.

Formát vstupu Prvý riadok vstupu (textový súbor `keys.in`) obsahuje dve celé čísla C a N. C ($1 \leq C \leq 1\,000\,000$) je počet stĺpcov a N ($1 \leq N \leq 3\,000\,000$) je počet triediacich operácií. Druhý riadok obsahuje N celých čísel k_i, ($1 \leq k_i \leq C$), ktoré definujú postupnosť triediacich operácií $Sort(k_1); \ldots; Sort(k_N)$.

Formát výstupu Prvý riadok výstupu (textový súbor `keys.out`) by mal obsahovať práve jedno celé číslo M, dĺžku najkratšej postupnosti triediacich operácií, ktorá je ekvivalentná so vstupnou postupnosťou (Podúloha A).

Druhý riadok obsahuje presne M celých čísel reprezentujúcich túto najkratšiu postupnosť (Podúloha B). Ak riešite len podúlohu A, môžete vynechať druhý riadok.

Príklad

Súbor keys.in	**Súbor keys.out**
`4 6`	`3`
`1 2 1 2 3 3`	`1 2 3`

Služba „Prídeme až k Vám“

Počet bodov: 100 bodov
Dostupná pamäť: 64 MB
Maximálny čas behu: 3s

Spoločnosť poskytuje služby pre svoje pobočky v rôznych mestách. Spoločnosť má troch zamestnancov, ktorí vybavujú službu „Prídeme až k Vám“. Ak sa žiadosť objaví na nejakom mieste, jeden zo zamestnancov sa musí presunúť zo svojej aktuálnej pozície na pozíciu žiadosti (ak sa tam žiaden zamestnanec nenachádza) tak, aby žiadosť bola splnená. Na každú žiadosť sa môže presunúť iba jeden zamestnanec, medzi žiadosťami sa zamestnanci nepohybujú a na žiadnom mieste nesmie byť nikdy viac zamestnancov súčasne. Presun zamestnanca z miesta p na miesto q stojí zadanú cenu $C(p, q)$. Funkcia ceny nie je nutne symetrická, ale cena nepresunutia je 0, čiže $C(p, p) = 0$. Spoločnosť musí uspokojovať žiadosti na striktnom princípe „Kto prv príde, ten prv melie“. Cieľom je minimalizovať celkovú cenu za službu pre danú postupnosť žiadostí.

Súťažná úloha

Vašou úlohou je napísať program, ktorý rozhodne, kedy sa má ktorý zamestnanec presunúť na vybavenie žiadostí tak, aby celková cena za službu bola čo najmenšia.

Formát vstupu Prvý riadok textového súboru `service.in` obsahuje dve celé čísla L a N. L ($3 \leq L \leq 200$) je počet miest a N ($1 \leq N \leq 1\,000$) je počet žiadostí. Miesta sú označené celými číslami od 1 do N. Každý z nasledujúcich L riadkov obsahuje L nezáporných celých čísel. j-te číslo v riadku $i + 1$ vyjadruje cenu $C(i, j)$, ktorá je menšia ako 2 000. Posledný riadok obsahuje N celých čísel, postupnosť žiadostí. Žiadosť je identifikovaná číslom miesta, kde sa žiadosť objavila. Na začiatku sa zamestnanci 1, 2, 3 nachádzajú na miestach 1, 2 a 3 v tomto poradí.

Formát výstupu Prvý riadok textového súboru `service.out` by mal obsahovať jediné celé číslo M, minimálnu celkovú cenu za poskytovanie služby pre danú postupnosť žiadostí (Podúloha A). Druhý riadok by mal obsahovať práve N celých čísel. i-te číslo je indentifikátor zamestnanca (1, 2 alebo 3), ktorý bude obsluhovať i-tu žiadosť (Podúloha B). V prípade, že má úloha viac riešení, môžete vypísať ľubovoľné z nich. Ak riešite len podúlohu A, môžete vynechať druhý riadok.

Príklad

Súbor service.in
```
5 9
0 1 1 1 1
1 0 2 3 2
1 1 0 4 1
2 1 5 0 1
4 2 3 4 0
4 2 4 1 5 4 3 2 1
```

Súbor service.out
```
5
1 2 1 2 2 1 3 1 3
```

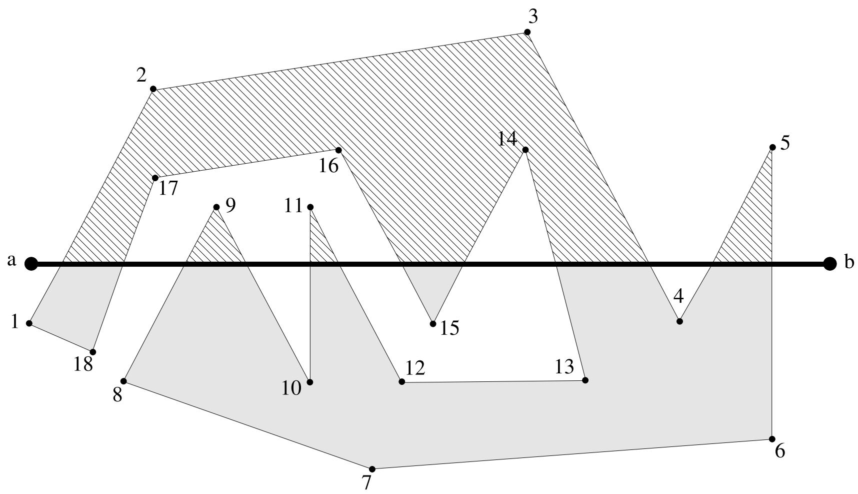
Elektrický plot

Počet bodov: 100 bodov
Dostupná pamäť: 64 MB
Maximálny čas behu: 3s

Starý farmár McDonald (u nás známy ako J. Hraško) vlatní veľké pastvisko, ktoré je ohraničené elektrickým plotom. Plot pozostáva z kolíkov a priamočiarych segmentov drôtov, pričom kažý segment spája dva susedné kolíky. Plot sa obvykle nekríži, t.j. žiadny drôtový segment nekríži iný drôtový segment. McDonald bol informovaný, že bude vybudovaná nová priamočiara cesta a bude prechádzať cez jeho pastvisko. Išiel na pole a zbadal, že už boli postavené dva kolíky označujúce koncové body cesty **a** a **b**. Zbadal, že čiara cesty rozdeľuje vnútornú časť jeho pastviska na niekoľko disjunktných oblastí.

McDonald chce určiť koľko oblastí vznikne na každej z oboch strán cesty. Zistí, že žiadny kolík plota nestojí na ceste. Naviac, ak drôtový segment sa pretne s cestou, tak prienik leží medzi koncovými bodmi cesty **a** a **b**.

Nanešťastie, McDonald nemá žiadny prostriedok na meranie vzdialeností medzi kolíkmi. Môže len pozorovať orientáciu kolíkov, t. j. môže ísť k ľubovoľnému kolíku **p** (aj ku kolíkom označujúcim cestu), pozerá sa smerom ku kolíku **q** a môže vidieť, či tretí kolík **r** stojí naľavo alebo napravo alebo či všetky tri kolíky sú kolineárne. Našťastie, McDonald má svoj laptop so sebou (ako obvykle), takže môže robiť všetky potrebné výpočty.



Obr. 44

Súťažná úloha

Napíšte program, ktorý vypočíta počet disjunktných oblastí na ľavej a na pravej strane plánovanej cesty po rozdelení pastviska touto cestou.

Knižnica Na zodpovedanie Vašich otázok je vytvorená knižnica `lookup` s troma operáciami:

- `GetN` je potrebné zavolať raz na začiatku, je bez argumentov; vráti $\mathbf{N}$, počet kolíkov. `GetN` musí byť volaná pred prvým volaním `Drift`. Pre počet kolíkov v plote $\mathbf{N}$ platí $3 \le \mathbf{N} \le 100\,000$.

- `Drift` je volaná s troma argumentami, ktoré predstavujú označenia kolíkov. Funckia `Drift(x,y,z)` vracia $\mathbf{1}$, ak kolík $\mathbf{z}$ stojí na ľavej strane pri pozeraní sa od kolíka $\mathbf{x}$ ku kolíku $\mathbf{y}$, vracia $-\mathbf{1}$, ak kolík $\mathbf{z}$ stojí napravo a vracia $\mathbf{0}$, ak tri kolíky $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ a $\mathbf{z}$ sú kolineárne. Kolíky plota sú označené číslami od $\mathbf{1}$ po $\mathbf{N}$, kolíky na koncoch cesty sú označené $\mathbf{N+1}$ a $\mathbf{N+2}$. Segmenty drôtov plota spájajú kolíky označené číslami $\mathbf{i}$ a $(\mathbf{i} \bmod \mathbf{N}) + 1$. `Drift` vráti $\mathbf{0}$ aj vtedy, keď aspoň dva argumenty sú rovnaké.

- `Answer` bude volaná jedenkrát na konci; odosiela riešenie a vlastne ukončí Váš program. `Answer` má dva celočíselné argumenty. Prvým argumentom musí byť počet disjunktných oblastí na ľavej a druhým argumentom počet disjunktných oblastí na pravej strane.

  (`Drift(a,b,p)` vráti $\mathbf{1}$ alebo $-\mathbf{1}$, ak kolík stojí na ľavej alebo na pravej strane cesty.)

Inštrukcie pre programátorov v Pascale

Je potrebné použiť príkaz

```
uses lookup;
```

vo Vašom zdrojovom kóde. Deklarácie funkcií v Pascale:

```
function GetN: longint;

function Drift(x, y, z: longint): integer;

procedure Answer(x, y: longint);
```

Inštrukcie pre programátorov v C/C++

Použite direktívu

```
#include "lookup.h"
```

vo Vašom zdrojovom kóde, vytvorte projektový súbor v adresári úlohy a pridajte súbory `fence.c (fence.cpp)`, `lookup.h` a `lookup.o` do tohoto projektu a potom *skompilujte* a/alebo *vytvorte* Váš program. (Použitím Dev-C++ IDE, vybrať Project/Project Options/Files menu, vybrať súbor `lookup.o`, zrušiť „include in compilation“ a nastaviť „include in linking“).

Príkaz pre kompiláciu:

```
gcc/g++ -O2 -static -o fence fence.c lookup.o -lm
```

Deklarácie funkcií v C/C++ :

```
long GetN(void);

int Drift(long x, long y, long z);

void Answer(long left, long right);
```

Experimentovanie

Poskytneme Vám nástroj, ktorý obsahuje knižnice pre WinXP a Linux. Skopírujte si vhodné knižnice do Vášho adresára pre úlohu.

Nástroj obsahuje generátor testov `testgener`, ktorý vytvára súbor `fence.in` obsahujúci správny náhodný vzorový vstup. `testgener` potrebuje celočíselný vstupný parameter, **N**, aproximujúci počet kolíkov v plote. Ak $N < 300$, tak `testgener` tiež vytvorí postskriptový súbor `fence.ps`, ktorý zobrazuje tvar plota (môžete ho zobraziť pomocou gsview alebo iným prehliadačom). Generované testovacie dáta sa pravdepodobne líšia pre párne a nepárne **N**; pokúste sa im porozumieť. Upozornenie: `testgener` nemôže generovať všetky možné vstupy.

Riešenie odoslané funkciou `Answer` bude zapísané do súboru `fence.out`.

Môžete vytvoriť aj svoj vlatný vstup v textovom súbore `fence.in`. Prvý riadok musí obsahovať štyri celé čísla, súradnice koncových bodov cesty.

Druhý riadok musí obsahovať **N**, počet kolíkov v plote. Každý z nasledujúcich **N** riadkov musí obsahovať dvojicu celých čísel, $x\ y\,(-20\,000 \leq x, y \leq 20\,000)$; dvojica v riadku $\mathbf{i+2}$ definuje súradnice kolíku označeného **i**.

Kritické Sieťové Prepojenia

Počet bodov: 100 bodov
Dostupná pamäť: 64 MB
Maximálny čas behu: 3s

Bola raz jedna krajina. V tej krajine bola dedina. A v tej dedine bola sieť. Komunikačná sieť. A keby len obyčajná komunikačná sieť… Táto sieť pozostávala z množiny počítačov a obojsmerných káblov medzi nimi[2]. Je známe, že vyhľadávacia sieť je súvislá, čiže existuje cestička medzi každou dvojicou počítačov. Niektoré počítače poskytujú služby typu **A** všetkým ostatným počítačom, zatiaľ čo niektoré poskytujú službu typu **B**. Niektoré počítače môžu poskytovať oba typy služieb (**A** aj **B**). Každý počítač musí mať prístup k obom typom služieb.

Ak sa nejaký kábel preruší, môže sa stať, že niektorá služba sa stane nedostupnou pre niektoré počítače. Kábel s touto vlastnosťou sa nazýva Kritické Sieťové Prepojenie.

Súťažná úloha

Vašou úlohou je napísať program, ktorý zistí počet Kritických Sieťových Prepojení (Podúloha A) a počítače, ktoré sú týmito káblami spojené (Podúloha B).

Formát vstupu Prvý riadok textového súboru `net.in` obsahuje štyri celé čísla N, M, K a L. N ($1 \leq N \leq 100\,000$) je počet počítačov v sieti, M ($1 \leq M \leq 1\,000\,000$) je počet káblov, K ($1 \leq K \leq N$) je počet počítačov, ktoré poskytujú službu **A** a L je počet počítačov, ktoré poskytujú službu **B**. Počítače sú identifikované číslami od 1 do N. Druhý riadok obsahuje K celých čísel, čísla počítačov, ktoré poskytujú službu **A**. Tretí riadok obsahuje L celých čísel, čísla počítačov, ktoré poskytujú službu **B**. Každý z nasledujúcich M riadkov obsahuje dvojicu celých čísel p q ($1 \leq p, q \leq N, p \neq q$); p a q sú čísla počítačov, medzi ktorými vedie kábel. Medzi každou dvojicou počítačov je najviac jeden kábel.

Formát výstupu Prvý riadok textového súboru `net.out` by mal obsahovať jediné celé číslo S, počet Kritických Sieťových Prepojení v sieti (Podúloha A). Každý z nasledujúcich S riadkov by mal obsahovať dvojicu celých čísel p q ($1 \leq p, q \leq N$), ktoré definujú Kritické Sieťové Prepojenie (Podúloha B). Kritické Sieťové Prepojenia môžete vypísať v ľubovoľnom poradí a v každom riadku môžete vypísať tiež čísla počítačov (koncové body káblov) v ľubovoľnom poradí.

[2]a iných nedôležitých vecí dôležitých pre počítačovú sieť

Príklad

Súbor net.in		**Súbor net.out**
`9 10 3 4`	`1 5`	`3`
`2 4 5`	`5 6`	`3 2`
`4 9 8 3`	`6 7`	`5 6`
`1 2`	`6 8`	`7 9`
`4 1`	`7 9`	
`2 3`	`8 7`	
`4 2`		

Predaj lístkov

Počet bodov: 100 bodov
Dostupná pamäť: 64 MB
Maximálny čas behu: 0.5s

Predajňa lístkov predáva vstupenky na koncert. Namiesto predávania jednosedadlových lístkov, predáva zväzok lístkov na fixný počet za sebou idúcich sedadiel. Predajňa dostala mnoho objednávok. Objednávka na jeden zväzok sedadiel určuje najmenšie číslo sedadla v zväzku.

Zistilo sa, že predajňa nemôže vyhovieť všetkým objednávkam. Naviac, ak rezervuje sedadlá presne tak, ako je uvedené v objednávke, potom veľa sedadiel ostane prázdnych. Preto sa predajňa rozhodla aplikovať nasledovnú stratégiu na rezervovanie miest a cenu lístkov. Ak je objednávka akceptovaná a rezervované miesta sú presne tie, ktoré si zákazník vyžiadal, zaplatí tento zákazník celú cenu (2 groše za zväzok). Ak je objednávka akceptovaná, ale rezervované miesta sa líšia od vyžiadaných (na aspoň jednej pozícii), zákazník zaplatí polovičnú cenu (1 groš za zväzok).

Cieľom je samozrejme maximalizovať celkový príjem.

Súťažná úloha

Vašou úlohou je napísať program, ktorý spočíta najväčší možný príjem, ktorý možno dosiahnuť (Podúloha A) a nájde miesta na rezerváciu pre vybrané objednávky (Podúloha B), vďaka ktorým predajňa dosiahne tento príjem.

Formát vstupu Prvý riadok textového súboru `ticket.in` obsahuje 2 celé čísla M a L. M ($1 \leq M \leq 30\,000$) je počet sedadiel a L ($1 \leq L \leq 100$) je počet za sebou idúcich sedadiel v jednom zväzku. Sedadlá sú očíslované od 1 do M. Druhý riadok obsahuje jedno celé číslo N ($1 \leq N \leq 100\,000$), počet objednávok. Tretí riadok obsahuje N celých čísel definujúcich objednávky. i-te číslo v riadku z ($1 \leq z \leq M - L + 1$) znamená, že i-ty zákazník žiada zväzok sedadiel začínajúci na sedadle z a končiaci na sedadle $z + L - 1$.

Formát výstupu Prvý riadok textového súboru `ticket.out` by mal obsahovať jedno celé číslo S, najväčší možný príjem (Podúloha A). Druhý riadok by mal obsahovať jedno celé číslo Q, počet akceptovaných objednávok. Naledujúcich Q riadkov popisuje rezervované miesta (Podúloha B). Každý riadok by mal obsahovať dvojicu celých čísel x y.

Dvojica x y znamená, že zákazník dostane sedadlá, začínajúce sedadlom s číslom y. Tieto riadky musia byť utriedené vzostupne podľa čísla sedadla.

Ak existuje viacero riešení, Váš program by mal vypísať ľubovoľné z nich.

Príklad

Súbor ticket.in

```
20 3
7
4 2 10 9 16 15 17
```

Súbor ticket.out

```
9
6
4 1
1 4
2 7
3 10
6 13
5 16
```

17. Medzinárodná informatická olympiáda

V dňoch 18. až 25. augusta sa v poľskom Nowom Sączi konala už v poradí sedemnásta Medzinárodná olympiáda v informatike. Zúčastnilo sa jej okolo 270 súťažiacich z celého sveta. Našu krajinu tento rok reprezentovali štyria gymnazisti. Netradične až troch zástupcov malo gymnázium na Grösslingovej ulici v Bratislave. Boli to Michal Burger, František Simančík a Jakub Závodný. Štvrtým reprezentantom bol Peter Perešíni z Gymnázia J. G. Tajovského v Banskej Bystrici. Výpravu sprevádzali RNDr. Andrej Blaho (podpredseda Slovenskej komisie Matematickej olympiády pre kategóriu P) a Mgr. Michal Forišek (člen SK MO, predseda úlohovej komisie pre kategóriu P, obaja z Fakulty matematiky, fyziky a informatiky UK).

Súťaž sa skladala z dvoch súťažných dní. Každý deň súťažiaci riešili tri úlohy algoritmického charakteru. Úlohy boli ľahšie ako sa čakalo od domáceho Poľska, ktoré v tejto oblasti nesporne patrí ku svetovej špičke. Štyrom súťažiacim sa podarilo získať plný počet bodov, a tak sa stať absolútnymi víťazmi tohoto ročníka IOI.

Na výsledku slovenského tímu sa odrazilo to, že všetci štyria súťažiaci mali za sebou viacero skúseností na medzinárodných súťažiach v rôznych predmetových olympiádach. Všetci štyria si z Poľska priniesli domov zlaté medaily. (Zlatých medailistov bolo 24, podobný úspech sa tento rok podaril už len Číne a Rusku.) Spolu z výsledkom z roku 1998 ide o najvýraznejší úspech slovenskej reprezentácie, a všetkým štyrom súťažiacim aj touto cestou gratulujeme.

Výsledky našich súťažiacich sú zhrnuté v nasledujúcej tabuľke:

Meno	Body za úlohy						Body	Medaila
	Gar	Mea	Mou	Bir	Rec	Riv		
Michal Burger	100	100	76	100	100	100	576	zlatá
Jakub Závodný	100	100	76	100	100	60	536	zlatá
František Simančík	100	100	50	100	100	50	500	zlatá
Peter Perešíni	95	100	76	100	75	50	496	zlatá

Súčasťou neodborného programu bola okrem iného plavba na pltiach po Dunajci, či prehliadka soľnej bane Wieliczka.

Budúcoročná medzinárodná olympiáda sa bude konať v roku 2006 v mexickej Meride. Veríme, že na nej slovenské družstvo nadviaže na tohtoročný úspech.

Mgr. Michal Forišek, FMFI UK

Zadania úloh 17. Medzinárodnej informatickej olympiády

Záhradka

Dostupná pamäť: 32 MB
Maximálny čas behu: 0.5s

Bajtazár má najkrajšiu záhradu široko-ďaleko, možno dokonca v celej Bajtázii. Rastie mu v nej n veľkých krásnych ruží. Prišla ale sezóna žiab a slimákov, ktoré rady žerú ruže a lezú za nimi do záhrad. Dá sa síce proti ním brániť pravidelnými postrekmi okenou, ale Bajtazárova záhrada je priveľká. Bajtazár si uvedomil, že sám ju proti tomuto nájazdu neubráni. Rozhodol sa preto, že najme dvoch záhradníkov. Každý z nich dostane na starosť jednu obdĺžnikovú časť záhrady. Tieto oblasti sa nesmú prekrývať a v každej z nich musí byť presne k ruží.

Bajtazár chce samostatne oplotiť každú z týchto dvoch oblastí. Plot je ale drahý, preto by naň chcel použiť čo najmenej metrov pletiva. Vašou úlohou bude zistiť, koľko metrov pletiva mu stačí na uskutočnenie jeho zámerov.

Záhrada je obdĺžnik, l metrov dlhý a w metrov široký. Je rozdelená na $l \times w$ štvorcových parciel, každá z nich má rozmery $1m \times 1m$. Každú parcelu vieme jednoznačne popísať jej súradnicami (x, y), kde $1 \leq x \leq l$ a $1 \leq y \leq w$. Na každej parcele môže rásť ľubovoľne veľa ruží.

Obdĺžnikové oblasti, ktoré máte zvoliť, musia mať strany rovnobežné so stranami záhrady a ich hranica nesmie pretínať žiadnu parcelu. Oblasť je teda jednoznačne určená súradnicami parciel v jej dvoch protiľahlých rohoch. Ak teda uvažujeme obdĺžnikovú oblasť, ktorej rohové parcely majú súradnice (l_1, w_1), (l_1, w_2), (l_2, w_1), (l_2, w_2), pričom platí $1 \leq l_1 \leq l_2 \leq l$ a $1 \leq w_1 \leq w_2 \leq w$, potom platí:

- Oblasť obsahuje práve tie parcely (x, y), pre ktoré platí $l_1 \leq x \leq l_2$ a $w_1 \leq y \leq w_2$.
- Obvod oblasti v metroch je $2(l_2 - l_1 + 1) + 2(w_2 - w_1 + 1)$.

Zvolené dve oblasti sa nesmú prekrývať. Môžu sa dotýkať stranou, ale keďže každú treba oplotiť samostatne, plot tým neušetríte.

Súťažná úloha

Napíšte program, ktorý

- načíta zo štandardného vstupu rozmery záhrady, celkový počet ruží, počet ruží v každej z hľadaných oblastí a pozície jednotlivých ruží.
- vypočíta, aký najmenší súčet obvodov môžu mať dve obdĺžnikové oblasti, ktoré obsahujú správny počet ruží a neprekrývajú sa.
- vypíše výsledok na štandardný výstup.

Formát vstupu V prvom riadku vstupu sú dve celé čísla l a w ($1 \leq l, w \leq 250$) oddelené medzerou – rozmery záhrady. V druhom riadku sú dve celé čísla n a k ($2 \leq n \leq 5\,000$, $1 \leq \leq k \leq n/2$) oddelené medzerou – počet ruží v záhrade a počet ruží, ktoré musí obsahovať každá z hľadaných oblastí.

Nasleduje n riadkov, i-ty z nich obsahuje súradnice parcely, na ktorej rastie i-ta ruža – dve celé čísla l_i, w_i ($1 \leq l_i \leq l$, $1 \leq w_i \leq w$) oddelené medzerou. Na jednej parcele môže rásť aj viac ruží.

V 50% sád testovacích dát bude pre rozmery záhrady platiť $l, w \leq 40$.

Formát výstupu Na štandardný výstup vypíšte práve jeden riadok. Ak úloha má riešenie, vypíšte jediné celé číslo – minimálny dosiahnuteľný súčet obvodov dvoch zvolených oblastí. Ak neexistuje žiadna vyhovujúca dvojica oblastí, vypíšte slovo „NO“ (bez úvodzoviek).

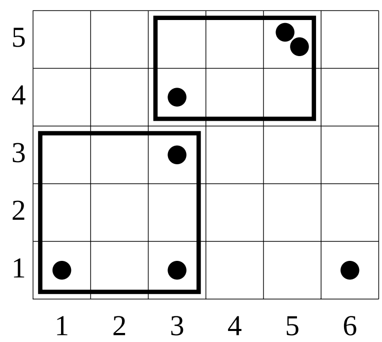
Príklad

Štandardný vstup

```
6 5
7 3
3 4
3 3
6 1
1 1
5 5
5 5
3 1
```

Štandardný výstup

```
22
```



Obr. 45

Postupnosti

Dostupná pamäť: 16 MB
Maximálny čas behu: 5s

Predpokladajme, že máme danú neklesajúcu postupnosť $s_1, \ldots, s_{n+1}$ ($s_i \leq s_{i+1}$ pre $1 \leq i \leq n$). Postupnosť $m_1, \ldots, m_n$ definovanú vzťahom $m_i = \frac{1}{2}(s_i + s_{i+1})$, pre $1 \leq \leq i \leq n$, budeme nazývať postupnosť priemerov postupnosti $s_1, \ldots, s_{n+1}$. Napríklad, postupnosť priemerov pre postupnosť $1, 2, 2, 4$ je postupnosť $1.5, 2, 3$. Všimnite si, že prvkami postupnosti priemerov môžu byť desatinné čísla. Táto úloha však bude pracovať len s postupnosťami priemerov, ktorých prvkami sú len celé čísla.

Úlohou je pre danú neklesajúcu postupnosť n celých čísel $m_1, \ldots, m_n$ vypočítať počet neklesajúcich postupností $n + 1$ celých čísel $s_1, \ldots, s_{n+1}$, pre ktoré je daná postupnosť $m_1, \ldots, m_n$ jej postupnosťou priemerov.

Súťažná úloha

Napíšte program, ktorý

- načíta zo štandardného vstupu neklesajúcu postupnosť celých čísel,
- vypočíta počet neklesajúcich postupností, pre ktoré je zadaná postupnosť jej postupnosťou priemerov,
- vypíše odpoveď na štandardný výstup.

Formát vstupu Prvý riadok štandardného vstupu obsahuje jedno celé číslo n ($2 \leq n \leq 5\,000\,000$). Zvyšných n riadkov obsahuje postupnosť $m_1, \ldots, m_n$. Presnejšie, v $i+1$ riadku je hodnota m_i ($0 \leq m_i \leq 1\,000\,000\,000$). Môžete predpokladať, že v 50% testovacích prípadov platí $n \leq 1\,000$ a $0 \leq m_i \leq 20\,000$.

Formát výstupu Váš program by mal vypísať na štandardný výstup práve jedno celé číslo – počet neklesajúcich celočíselných postupností, pre ktoré je vstupná postupnosť postupnosťou priemerov.

Príklad

Štandardný vstup	**Štandardný výstup**

`3`
`2`
`5`
`9`
	`4`

Zrejme platí, že existujú štyri neklesajúce celočíselné postupnosti, pre ktoré je $2, 5, 9$ ich postupnosťou priemerov. Tieto postupnosti sú:

- $2, 2, 8, 10$
- $1, 3, 7, 11$
- $0, 4, 6, 12$
- $-1, 5, 5, 13$

Horský park

Dostupná pamäť: 256 MB
Maximálny čas behu: 3s

Magistrát mesta Blatislavy sa rozhodol, že keď sa už Horský park volá Horský park, bude tam stáť zábavný park. Hlavnou atrakciou bude, ako inak, horská dráha. Táto bude výnimočná tým, že bude virtuálna, aby sa ju dalo často meniť. Cestujúci dostanú na hlavy virtuálne helmy, do ruky vrecko s pukancami (alebo napríklad žabami, každému podľa jeho chuti) a špeciálne kreslo ním bude triasť podľa aktuálneho tvaru trate.

Stavebným blokom použitým pri výrobe virtuálnej dráhy je virtuálna koľajnica. Naša dráha sa bude skladať z n takýchto koľajníc, pospájaných jedna za druhou. Začiatok trate je vždy vo výške 0. Technik Bajtazár ju vie meniť tak, že nastaví hodnotu *stúpania* na nejakom jej úseku (niekoľkých po sebe nasledujúcich koľajniciach). Stúpania a klesania mimo tohto úseku sa nezmenia. Každá takáto zmena zároveň zmení výšku, v ktorej sa nachádza časť trate za zmeneným úsekom. Na obrázkoch na konci zadania vidíte príklad, kedy technik postupne spravil dve nastavenia.

Po tejto virtuálnej dráhe chodí virtuálny vláčik. Ten začína na začiatku trate a má dosť energie na to, aby sa dostal do výšky h. To znamená, že kým je vláčik vo výške nepresahujúcej h, ide ďalej.

Na vstupe dostanete postupnosť jázd vláčika a nastavení trate v poradí, v akom sa udiali v priebehu dňa. Pre každú jazdu vláčika vypočítajte, ako ďaleko sa dostal (po vtedy aktuálnej trati).

Interne si simulátor pamätá trať ako postupnosť n *stúpaní*, jedno pre každú virtuálnu koľajnicu. Číslo d_i predstavuje zmenu výšky pri prejdení po i-tej koľajnici. Inými slovami, ak po prejdení $i-1$ koľajníc sme vo výške h, po prejdetí i koľajníc budeme vo výške $h+d_i$.

Na začiatku sú všetky virtuálne koľajnice vodorovné, t.j. všetky $d_i = 0$. Každé nastavenie trate je zadané tromi číslami: a, b a D. Menený úsek trate tvoria koľajnice od a-tej po b-tu, vrátane. *Stúpanie* na každej z týchto koľajníc bude odteraz D. Formálne, na D sa zmenia hodnoty d_i pre $a \leq i \leq b$.

Každé pustenie vláčika je určené jediným číslom h, udávajúcim maximálnu výšku, do ktorej vie vyjsť.

Súťažná úloha

Napíšte program, ktorý

- načíta zo štandardného vstupu postupnosť, ktorá bude obsahovať (v ľubovoľnom poradí) nastavenia trate a jazdy vláčika,
- pre každú jazdu vláčika vypočíta, koľko koľajníc prešiel,
- vypíše výsledky na štandardný výstup.

Formát vstupu V prvom riadku vstupu je jedno celé číslo n ($1 \leq n \leq 1\,000\,000\,000$) – počet virtuálnych koľajníc, ktoré tvoria trať. Nasleduje niekoľko riadkov, každý z nich obsahuje buď nastavenie trate alebo jazdu vláčika. Posledný riadok signalizuje koniec vstupu. Presnejšie, každý z týchto riadkov má jeden z nasledujúcich tvarov:

- Ak je to popis nastavenia trate, začína písmenom 'I' (information), nasledujú celé čísla a, b a D oddelené medzerami. Platí $1 \leq a \leq b \leq n$ a $-1\,000\,000\,000 \leq D \leq$ $\leq 1\,000\,000\,000$.
- Ak je to jazda vláčika, začína písmenom 'Q' (question), nasleduje celé číslo h oddelené medzerou. Platí $0 \leq h \leq 1\,000\,000\,000$.

- Ak nenastal ani jeden z predchádzajúcich prípadov, riadok obsahuje jediný znak 'E' (end) a týmto riadkom vstup končí.

Môžete predpokladať, že v žiadnom okamihu výška žiadneho bodu trate neprekročí 1 000 000 000 ani neklesne pod nulu.

Vstup obsahuje nanajvýš 100 000 riadkov. V 50% testovacích vstupov bude platiť $n \leq 20\,000$ a budú obsahovať nanajvýš 1 000 riadkov.

Formát výstupu Na štandardný výstup vypíšte pre každú jazdu vláčika jeden riadok a v ňom jedno celé číslo – počet koľajníc, ktoré vláčik pri svojej jazde celé prešiel.

Ak vláčik vie prísť až na koniec trate, správna odpoveď je n.

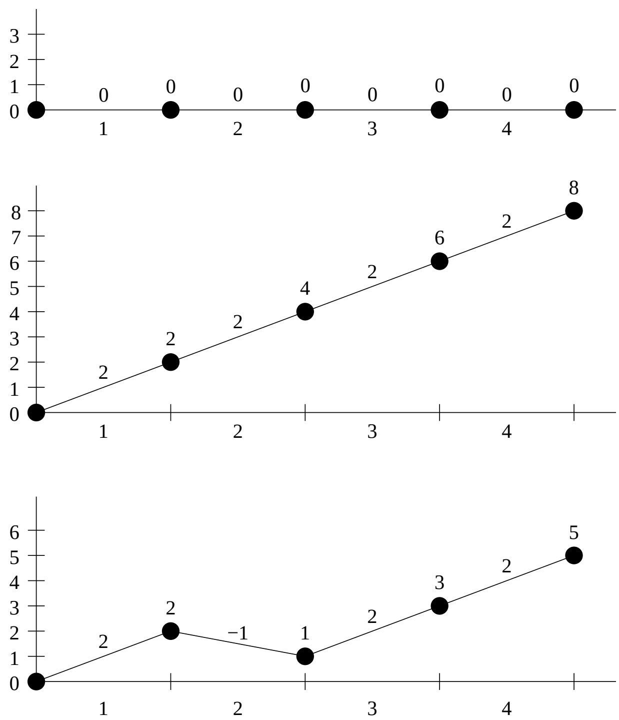
Príklad

Štandardný vstup

```
4
Q 1
I 1 4 2
Q 3
Q 1
I 2 2 -1
Q 3
E
```

Štandardný výstup

```
4
1
0
3
```



Obr. 46

Pohľad na trať na začiatku a po spracovaní každého nastavenia. Čísla nad bodkami udávajú výšku, čísla nad úsečkami *stúpanie* danej koľajnice.

Narodeniny

Dostupná pamäť: 32 MB
Maximálny čas behu: 2s

Dnes má Bajtazár narodeniny. Na jeho narodeninovej oslave bude presne n detí (Bajtazár je jedno z nich). Deti sú očíslované od 1 po n. Bajtazárovi rodičia pripravili veľký okrúhly stôl a okolo neho rozmiestnili n stoličiek. Počas toho, ako deti prichádzajú, si okamžite sadajú za stôl. Dieťa s číslom 1 si sadne na ľubovoľné miesto. Potom si dieťa s číslom 2 sadne po jeho ľavej strane. Ďalšie dieťa (s číslom 3) si sadne vedľa neho, atď. Nakoniec si dieťa s číslom n sadne na posledné voľné miesto medzi deťmi s číslami 1 a $n-1$.

Bajtazárovi rodičia poznajú tieto deti veľmi dobre a teda vedia, že niektoré z nich budú veľmi hlučné, ak by sedeli blízko vedľa seba. Preto sa rodičia rozhodli presadiť deti do prijateľnejšieho poradia. Takéto poradie môže byť popísané permutáciou $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (p_1, p_2, …, p_n sú rôzne celé čísla od 1 do n) – dieťa p_1 by malo sedieť medzi p_n a p_2, dieťa p_i (pre $i = 2, 3, \ldots, n-1$) by malo sedieť medzi p_{i-1} a p_{i+1}, a dieťa p_n by malo sedieť medzi p_{n-1} a p_1.

Predpokladajme, že všetky deti už prišli a posadali si ku stolu. Keďže rodičia chcú presadiť deti do navrhnutého poradia, každé dieťa bude treba posunúť po obvode stola buď vľavo alebo vpravo o niekoľko miest. Každému dieťaťu teda musia povedať, ktorým smerom a o koľko miest sa má posunúť. Potom na daný povel všetky deti naraz vstanú, presunú sa k správnej stoličke a sadnú si.

Táto presádzacia procedúra zrejme urobí z narodeninovej oslavy malý zmätok. Veľkosť zmätku je rovná najväčšej vzdialenosti, ktorú muselo niektoré z detí prejsť. Deti môžu byť presadené mnohými spôsobmi. Rodičia sa teda rozhodli vybrať ten, ktorý spôsobí čo najmenší zmätok.

Súťažná úloha

Napíšte program, ktorý

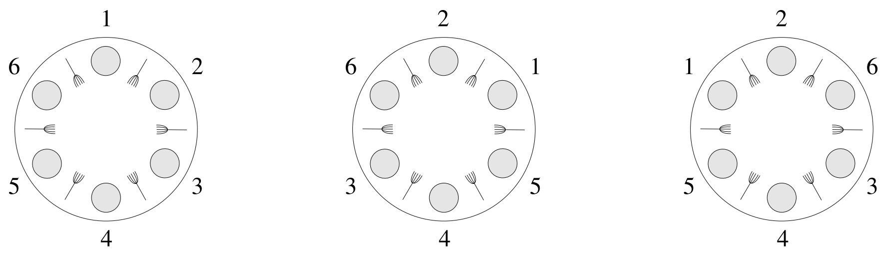
- prečíta zo štandardného vstupu počet detí a permutáciu, ktorá určuje navrhované poradie detí,
- vypočíta najmenšiu možnú veľkosť zmätku,
- vypíše výsledok na štandardný výstup.

Formát vstupu Prvý riadok štandardného vstupu obsahuje jedno celé číslo n ($1 \leq n \leq 1\,000\,000$). Druhý riadok obsahuje n celých čísel $p_1, p_2, \ldots, p_n$, ktoré sú oddelené medzerami. Čísla $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sú permutáciou množiny $1, 2, \ldots, n$ a popisujú navrhované poradie detí. Môžete predpokladať, že v 50% testových prípadov číslo n nepresiahne 1 000.

Formát výstupu Jediný výstupný riadok na štandardnom výstupe bude obsahovať jediné celé číslo: najmenšiu možnú veľkosť zmätku pri presádzaní detí.

Príklad

Štandardný vstup	Štandardný výstup
6 3 4 5 1 2 6	2



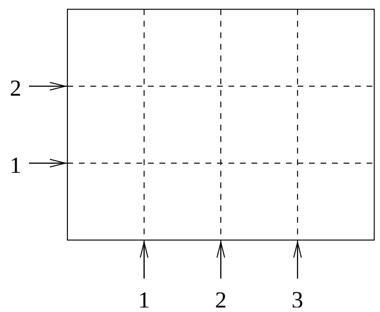
Obr. 47

Obrázok vľavo ukazuje počiatočné rozsadenie detí. Obrázok v strede zobrazuje výsledok nasledujúceho presádzania: deti s číslami 1 a 2 sa posunú o jedno miesto, deti s číslami 3 a 5 sa posunú o dve miesta a deti s číslami 4 a 6 nemenia svoje miesta. Podmienky navrhovaného poradia sú splnené, nakoľko 3 sedí medzi 6 a 4, 4 sedí medzi 3 a 5, 5 sedí medzi 4 a 1, 1 sedí medzi 5 a 2, 2 sedí medzi 1 a 6 a 6 sedí medzi 2 a 3. Existuje aj ďalšie možné záverečné rozsadenie detí, zobrazené je na pravom obrázku. Ani v jednom z týchto dvoch prípadov sa žiadne z detí nepresúvalo o viac ako 2 miesta.

Hra s čokoládou

Dostupná pamäť: 32 MB
Maximálny čas behu: 14s[3]

Keď nám po výlete v batohu zvýši tabuľka čokolády rozmerov $x \times y$, môžeme sa s ňou zahrať nasledujúcu hru. Hru hrajú dvaja hráči, ktorí striedavo ťahajú. Ťah predstavuje rozlomenie čokolády podľa niektorej vodorovnej alebo zvislej linky.



Obr. 48: Možnosti prelomenia čokolády rozmerov 4×3.

Po rozlomení hráč menšiu časť čokolády odloží nabok a s väčšou sa hrá ďalej. (Časti čokolády porovnávame podľa ich plochy. V prípade, že sú obe časti rovnaké, hráč jednu odloží a s druhou sa pokračuje.) Hráč, ktorý nemôže ťahať (lebo už zostala len jedna kocka čokolády) prehráva.

Porazený hráč dostane tú jednu kocku, ktorá mu zostala, víťazovi pripadne odložený zvyšok čokolády. To už ale nie je dôležité... Vašou úlohou je totiž napísať program, ktorý bude hrať túto hru proti našej knižnici.

[3]Môžete predpokladať, že počas vyhodnocovania nebude knižnica na svoje ťahy potrebovať viac ako 4 s.

Knižnica obsahuje funkcie `dimension_x()` a `dimension_y()`. Vždy, keď ste na ťahu, pomocou nich zistíte aktuálne rozmery čokolády.

Na začiatku hry sú oba rozmery čokolády od 1 do 100 000 000, aspoň jeden z nich je väčší ako 1. V 50% hier bude dokonca každý z rozmerov najviac 25.

Okrem už spomínaných funkcií obsahuje knižnica aj funkciu `cut(dir, position)`. Jej volaním oznamujete knižnici svoje ťahy. Parameter `dir` udáva smer rezu – môže nadobúdať hodnoty `horizontal` a `vertical`. Parameter `position` udáva zodpovedajúcu súradnicu rezu (viď obrázok). Ak teda napríklad robíme horizontálny rez, musí platiť 1 ≤`position`≤`dimension_y()`−1.

Váš program ťahá ako prvý. Pri každom zavolaní funkcie `cut` sa váš ťah zaznamená a knižnica potiahne za druhého hráča. Nové hodnoty, ktoré vám teraz vrátia funkcie `dimension_x()` a `dimension_y()`, predstavujú rozmery čokolády po vašom ťahu a ťahu knižnice.

Akonáhle váš program vyhrá, prehrá alebo spraví nekorektný ťah (napr. zavolá funkciu `cut` s nekorektnými parametrami), bude automaticky ukončený. Svoj program teda píšte tak, aby nikdy neskončil.

Môžete predpokladať, že pre každú hru, ktorú bude váš program hrať počas vyhodnocovania, existuje vyhrávajúca stratégia.

Váš program nesmie čítať ani zapisovať žiadne súbory, nesmie používať štandardný vstup a výstup a nesmie sa snažiť modifikovať pamäť, ktorá mu nepatrí. Porušenie týchto pravidiel môže viesť k diskvalifikácii.

Skúšanie Aby ste si mohli vyskúšať komunikáciu vášho programu s knižnicou, dostanete ukážkovú knižnicu – súbory `preclib.pas`, `creclib.c` a `creclib.h`. V tejto knižnici je implementovaná triviálna stratégia. Ak chcete, môžte si ich upraviť a otestovať svoje riešenie aj proti lepšiemu súperovi. Počas vyhodnocovania vášho riešenia bude použitá iná knižnica, napísaná autormi úlohy.

Keď si dáte otestovať svoj program pomocou príslušnej voľby na webe, bude skompilovaný s pôvodnou knižnicou, ktorú ste dostali. Vstupný súbor, ktorý pri tomto testovaní tiež posielate, by mal obsahovať dva riadky a v každom z nich jedno celé číslo – rozmery čokolády, s ktorou sa chcete hrať (knižnica si ich prečíta).

Ak počas ladenia zmeníte knižnicu `preclib.pas`, prekompilujete ju príkazom `ppc386 -O2 preclib.pas`. Tým dostanete súbory `preclib.o` a `preclib.ppu`. Tieto treba umiestniť do adresára, v ktorom sa nachádza váš program.

Ak zmeníte knižnicu `creclib.c`, umiestnite súbory `creclib.c` a `creclib.h` do adresára, v ktorom sa nachádza váš program.

Nemeňte interface súboru `preclib.pas` ani súbor `creclib.h`.

Máte k dispozícií aj dva ukážkové programy, ktoré túto knižnicu používajú: `prec.pas` a `crec.c`. Skompilujete ich nasledovne:

```
gcc -O2 -static crec.c creclib.c -lm
g++ -O2 -static crec.c creclib.c -lm
ppc386 -O2 -XS prec.pas
```

Všetky potrebné súbory si môžete stiahnuť z `http://contest/`.

Knižnica Knižnica teda obsahuje nasledujúce veci:

- **FreePascal** (`preclib.ppu`, `preclib.o`)

```
type direction = (vertical, horizontal);
function dimension_x(): longint;
function dimension_y(): longint;
procedure cut(dir: direction; position: longint);
```

Váš program `rec.pas` musí obsahovať:
`uses preclib;`

- **GNU C/C++** (`creclib.h`, `creclib.c`)

```
typedef enum __direction {vertical, horizontal} direction;
int dimension_x();
int dimension_y();
void cut(direction dir, int position);
```

Váš program (`rec.c` alebo `rec.cpp`) musí obsahovať:
`#include "creclib.h"`

Príklad komunikácie Nasleduje príklad priebehu hry s čokoládou 4×3. Pre túto čokoládu existuje vyhrávajúca stratégia pre prvého hráča.

Váš program zavolá:	**Čo sa stane:**
`dimension_x()`	funkcia vráti 4
`dimension_y()`	funkcia vráti 3
`cut(vertical, 1)`	váš ťah sa zaznamená, knižnica má čokoládu 3×3, potiahne a vyrobí z nej čokoládu 3×2
`dimension_x()`	funkcia vráti 3
`dimension_y()`	funkcia vráti 2
`cut(horizontal, 1)`	váš ťah sa zaznamená, knižnica má čokoládu 3×1, potiahne a vyrobí z nej čokoládu 2×1
`dimension_x()`	funkcia vráti 2
`dimension_y()`	funkcia vráti 1
`cut(vertical, 1)`	váš ťah vyrobil čokoládu 1×1, váš program vyhral a knižnica ho automaticky ukončí.

Rieky

Dostupná pamäť: 32 MB
Maximálny čas behu: 1s

Riečna sieť v Bajtázii má zaujímavý tvar. Malé riečky sa zlievajú do väčších, väčšie do ešte väčších, až sa nakoniec zo všetkých stane veľká rieka a tá sa v Bajtislave vlieva do mora. Rieky sa nevetvia, takže z každého miesta je cesta dole prúdom k moru jednoznačne určená.

Pri riekach sa nachádza n drevorubačských dedín. V Bajtislave je veľká píla, ku ktorej zo všetkých dedín splavujú všetky stromy, ktoré zotnú. Keďže ale takýto transport stromov je drahý a namáhavý, rozhodol sa kráľ Bajtáš, že v k dedinách postaví nové píly. Tieto dediny teda nebudú splavovať stromy vôbec, stromy z ostatných dedín budú spracované na prvej píle po prúde.

Kráľovi úradníci vedia, koľko stromov sa ročne vytne v každej dedine. Vašou úlohou je rozhodnúť, aká je minimálna cena transportu všetkých vyťatých stromov (pri správnej voľbe dedín, v ktorých postaviť nové píly).

Predpokladajte, že prepraviť jeden strom jeden kilometer po rieke stojí jeden cent.

Súťažná úloha

Napíšte program, ktorý

- načíta zo štandardného vstupu počet dedín, počet nových píl, počet stromov zoťatých v každej dedine a popis riečnej siete,
- vypočíta najmenšiu dosiahnuteľnú cenu transportu stromov,
- vypíše výsledok na štandardný výstup.

Formát vstupu V prvom riadku vstupu sú dve celé čísla n a k ($2 \leq n \leq 100, 1 \leq k \leq 50$ a $k \leq n$) oddelené medzerou – počet dedín (okrem Bajtislavy) a počet nových píl, ktoré treba postaviť. Dediny sú očíslované od 1 do n, Bajtislava má číslo 0.

Nasleduje n riadkov, i-ty z nich popisuje i-tu dedinu. Obsahuje tri medzerami oddelené celé čísla w_i, v_i a d_i, kde:

- w_i je počet stromov, ktoré sa v tejto dedine vyťažia ($0 \leq w_i \leq 10\,000$)
- v_i je číslo najbližšej dediny (alebo Bajtislavy) dole po prúde ($0 \leq v_i \leq n$)
- d_i je vzdialenosť po rieke z i do v_i v kilometroch ($1 \leq d_i \leq 10\,000$)

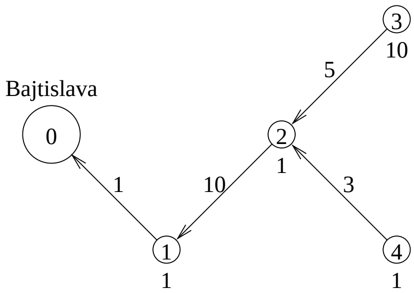
Môžete predpokladať, že celková cena splavenia všetkých stromov z dedín do Bajtislavy neprekročí 2 000 000 000 centov. V 50% sád testovacích dát bude platiť $n \leq 20$.

Formát výstupu Na štandardný výstup vypíšte práve jeden riadok a v ňom jediné celé číslo – najmenšiu dosiahnuteľnú cenu transportu stromov v centoch.

Príklad

Štandardný vstup	**Štandardný výstup**

`4 2`
`1 0 1`
`1 1 10`
`10 2 5`
`1 2 3`
	`4`



Obr. 49

Na obrázku je znázornená situácia zo vstupného súboru. Čísla dedín sú uvedené v krúžkoch. Čísla pod krúžkami predstavujú počet zoťatých stromov. Čísla nad šípkami udávajú vzdialenosť v kilometroch, šípky ukazujú dole prúdom.

Optimálne riešenie tohto príkladu je postaviť píly v dedinách 2 a 3.

Korešpondenčný seminár SK MO

Korešpondenčný seminár Slovenskej komisie Matematickej olympiády (KS SK MO) vznikol už pred 30 rokmi (vtedy ešte ako federálny seminár) preto, aby bolo umožnené venovať individuálnu starostlivosť aj tým študentom, ktorí nenavštevovali triedy so zameraním na matematiku. Neskôr vzniklo veľké množstvo iných matematických korešpondenčných seminárov, a aj počet škôl so zameraním na matematiku stúpol, KS SK MO sa preto začal zameriavať na zlepšenie prípravy všetkých študentov, ktorí preukázali svoje schopnosti v predchádzajúcich ročníkoch MO. Keďže úlohy tohto seminára svojou náročnosťou prevyšovali akúkoľvek inú matematickú súťaž pre stredoškolákov, seminár bol dôležitou súčasťou prípravy aj na medzinárodnú matematickú olympiádu.

Za ostatné roky sa udiali v stredoškolských seminároch zmeny, o ktorých sa možno dočítať v predošlých ročenkách. V súčasnosti plní úlohu pôvodného KS SK MO kategória GAMA seminára KMS, ktorý organizujú študenti FMFI UK v Bratislave a ktorý je oficiálnym seminárom SK MO.

KS SK MO má každý rok šesť sérií a v každej sérii 5 úloh.

Celkové poradie KS SK MO 2004/2005

1. *Ondrej Budáč*, 3. ročník, Gymnázium B. S. Timravy, Lučenec, 219 bodov
2. *František Simančík*, 4. ročník, Gymnázium Grösslingová, Bratislava, 212 bodov
3. *Jaroslav Knebl*, 3. ročník, Gymnázium A. Bernoláka, Námestovo, 124 bodov
4. *Stanislava Sojáková*, 4. ročník, Gymnázium Jura Hronca, Bratislava, 114 bodov
5. *Jozef Bodnár*, 4. ročník, Gymnázium Nám. padlých hrdinov, Fiľakovo, 97 bodov

Uvádzame všetky úlohy tohto ročníka súťaže spolu s riešeniami, často študentskými. Úlohy boli vyberané najmä z národných olympiád či iných súťaží.

Zadania súťažných úloh KS SK MO

Prvá séria

1.1 V piesku na Dunajskej pláži sú napísané čísla 19 a 82. Každý deň prejde okolo nich kajakár Rúža a s číslami urobí jednu z troch možných zmien: obe čísla zvýši o jedna, obe čísla umocní na druhú, alebo jedno z čísel zvýši o jedna a druhé umocní na druhú. Môže sa stať, že jedného dňa budú obe čísla rovnaké?

1.2 Daný je konečný počet štvorcov, pričom súčet ich obsahov je 1/2. Ukážte, že ich je možné umiestniť do štvorca so stranou 1 tak, aby sa neprekrývali.

1.3 Daná je postupnosť $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ prirodzených čísel, pričom a_1 nie je deliteľné piatimi a pre každé prirodzené číslo $n \geqq 1$ platí $a_{n+1} = a_n + b_n$, kde b_n je číslica na mieste jednotiek čísla a_n. Dokážte, že postupnosť a_n obsahuje nekonečne veľa mocnín dvojky.

1.4 Nájdite prirodzené čísla a, b tak, aby výraz

$$\frac{b}{4}\sqrt{\frac{2a-b}{2a+b}}$$

bol čo najväčším prvočíslom.

1.5 Kružnice k_1 a k_2 sa navzájom dotýkajú zvonka v bode A a súčasne sa obe dotýkajú zvnútra kružnice k v bodoch A_1 a A_2. Bod P je jeden z priesečníkov spoločnej vnútornej dotyčnice k_1 a k_2 s kružnicou k. Nakoniec, body B_i sú druhé priesečníky priamok PA_i s kružnicou k_i $(i = 1, 2)$. Dokážte, že priamka B_1B_2 sa dotýka oboch kružníc k_1, k_2.

Druhá séria

2.1 Ukážte, že v euklidovskej rovine neexistujú 4 body také, že vzdialenosť medzi každými dvoma bodmi je nepárne prirodzené číslo.

2.2 V trojrozmernom priestore je daných n bodov $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tak, že každé tri z nich tvoria trojuholník s jedným uhlom väčším ako $120°$. Dokážte, že je možné pospájať všetky tieto body do lomenej čiary $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}$ tak, aby každé dve susedné hrany lomenej čiary tvorili uhol väčší ako $120°$.

2.3 Nájdite všetky reálne riešenia $(x_1, \dots, x_5)$ sústavy nerovníc

$$\begin{aligned}
(x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) &\leqq 0,\\
(x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) &\leqq 0,\\
(x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) &\leqq 0,\\
(x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) &\leqq 0\\
(x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) &\leqq 0.
\end{aligned}$$

(Južná Afrika, 1996)

2.4 Nájdite všetky prvočísla p, q, pre ktoré je zlomok

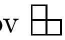
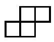
$$\frac{(5^p - 2^p)(5^q - 2^q)}{pq}$$

celým číslom.

2.5 Kružnicu vpísanú trojuholníku ABC označme k a body jej dotyku so stranami BC a AC postupne D_1 a E_1. Na stranách BC a AC zvolíme body D_2 a E_2 tak, aby $|CD_2| = |BD_1|$ a $|CE_2| = |AE_1|$, bod P je priesečník úsečiek AD_2 a BE_2. Kružnica k pretína úsečku AD_2 v dvoch bodoch, ten bližšie k bodu A označíme Q. Ukážte, že platí $|AQ| = |D_2P|$.

(USA, 2001)

TRETIA SÉRIA

3.1 Štvorec s rozmermi 99×99 je celý pokrytý dlaždičkami tvarov ,  a . Žiadne dve dlaždičky sa neprekrývajú a žiadna nevyčnieva von. Dlaždičky môžu byť aj pootáčané. Dokážte, že dlaždičiek tvaru  je aspoň 199.

(Quantum, 1993)

3.2 Rasťo má na papieri napísaných 26 rôznych čísel z množiny $\{1, 2, \dots, 100\}$. Ukážte, že sa z nich dá vybrať niekoľko (aspoň jedno) tak, že ich súčin bude štvorec (t. j. druhá mocnina celého čísla).

(Rakúsko-poľské stretnutie, 2003)

3.3 V ostrouhlom trojuholníku ABC platí $|AC| < |AB|$. Body O, H, P sú postupne stred kružnice opísanej trojuholníku ABC, ortocentrum trojuholníka ABC a päta výšky z vrcholu C na stranu AB. Nech kolmica cez bod P na priamku OP pretína priamku AC v bode Q. Dokážte, že uhly PHQ a BAC majú rovnakú veľkosť.

(Irán, 1997)

3.4 Nech p je prvočíslo tvaru $4k+1$. Dokážte, že rovnica $x^2 - py^2 = -1$ má aspoň jedno riešenie (x, y) v celých číslach.

(Irán, 2004)

3.5 Ľubovoľný n-uholník P leží v rovine. Jeho strany sú označené $1, 2, \ldots, n$. Nech $S = s_1, s_2, s_3, \ldots$ je konečná alebo nekonečná postupnosť, pričom $s_i \in$ $\in \{1, 2, \ldots, n\}$. Budeme preklápať mnohouholník P takto: najprv ho preklopíme okolo hrany s číslom s_1 (takže P v novej polohe je osovo súmerný s P v pôvodnej polohe podľa strany s_1), potom okolo hrany s číslom s_2 a tak ďalej.

a) Dokážte, že existuje nekonečná postupnosť S taká, že keď podľa nej budeme preklápať P, tak každý bod v rovine bude aspoň raz zakrytý mnohouholníkom P.

b) Dokážte, že postupnosť S požadovaná v časti a) nemôže byť periodická.

c) Nech P je pravidelný päťuholník s polomerom opísanej kružnice rovným 1. Nech D je ľubovoľný kruh s polomerom 1,00001 v rovine päťuholníka. Existuje konečná postupnosť S taká, že keď popreklápame P podľa S, bude päťuholník P celý ležať vnútri kruhu D?

(Irán, 2004)

Štvrtá séria

4.1 Marťanská kocka modrej neznámej hmoty so stranou 10 sa skladá z $10 \times 10 \times$ $\times\, 10$ kocočiek. Každá kocočka má svoje súradnice (postupne od vrcholovej kocočky $(1, 1, 1)$ po vrcholovú kocočku $(10, 10, 10)$) a je na začiatku zafarbená striebornou farbou. Mačiatka Pa a Pi sa hrajú nasledujúcu hru. Začína Pa a potom sa striedajú v ťahoch. Mačiatko, ktoré je na ťahu, si vyberie striebornú kocočku, ktorá má najväčší súčet súradníc (v prípade, že je takých kocočiek viac, môže si vybrať ľubovoľnú z nich) a prefarbí ju zo striebornej na zlatú. Navyše môže ľubovoľne prefarbiť (na zlatú či na striebornú) každú kocočku okrem vybranej, ktorú pretína alebo ktorej sa dotýka úsečka spájajúca stred vybranej kocočky so stredom kocočky $(1, 1, 1)$. Prehrá mačiatko, ktoré nebude môcť urobiť svoj ťah. Pre ktoré z mačiatok existuje víťazná stratégia?

(Rastislav Lenhardt)

4.2 Zistite, pre ktoré kladné celé čísla n sa dajú čísla $1, 2, \ldots, n$ napísať v takom poradí, že pre každé dve čísla sa ich aritmetický priemer nebude rovnať žiadnemu z čísel napísaných medzi nimi.

(Matematické obzory, 1977)

4.3 Nech a, b, c, $a+b-c$, $b+c-a$, $a+c-b$, $a+b+c$ je sedem rôznych prvočísel. Súčet nejakých dvoch z čísel a, b, c je 1 000. Označme najväčšie, resp. najmenšie zo spomínaných siedmich čísel M, resp. m. Nájdite najväčšiu možnú hodnotu čísla $M-m$.

(Bielorusko, 1998)

4.4 Nech ABC je ostrouhlý trojuholník vpísaný do kružnice so stredom O. Nech M, N sú body na priamke AC také, že $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC}$. Nech D je päta kolmice z bodu M na priamku BC, E päta kolmice z bodu N na priamku AB. Nech O' je stred kružnice opísanej trojuholníku BED. Dokážte, že ortocentrum trojuholníka ABC leží na kružnici opísanej trojuholníku BED. Dokážte, že stred úsečky AN a bod B sú súmerne združené podľa stredu úsečky OO'.

(Vietnam, 2003)

4.5 Pre ľubovoľné prirodzené číslo $n > 1$ označme s_n počet takých permutácií $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ prvých n prirodzených čísel, že

$$1 \leqq |a_k - k| \leqq 2 \qquad \text{pre všetky } k = 1, 2, \dots, n.$$

Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla $n > 6$ platí

$$7s_{n-1} < 4s_n < 8s_{n-1}.$$

(Vietnam, 2003)

Piata séria

5.1 Nech AB je priemer kružnice k a O je jej stred. Vnútri úsečky AB zvoľme bod C. Uvažujme iba jeden z oblúkov AB, kolmica na AB cez bod C pretína tento oblúk v bode D. Kružnica vpísaná do útvaru CBD (t. j. dotýkajúca sa kratšieho oblúka BD a úsečiek CB a CD) sa dotýka úsečky AB v bode J.

a) Dokážte, že $|AD| = |AJ|$.

b) Dokážte, že DJ je osou uhla CDB.

(Pi Mu Epsilon, 1988)

5.2 Kružnica k_1 sa v bode T zvonka dotýka kružnice k_2. Na k_2 uvažujme ľubovoľný bod P neležiaci na spojnici stredov oboch kružníc. Bodom P vedieme dotyčnice ku k_1, ktoré sa jej dotknú v bodoch A a B. Priamky AT, BT pretnú k_2 znovu postupne v bodoch C, D. Priamka CD pretne dotyčnicu ku k_2 vedenú bodom P v bode M. Určte množinu všetkých možných polôh bodu M, keď meníme polohu bodu P.

(Vietnam, 2003)

5.3 Nájdite všetky prosté funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$f(f(n)) \leqq \frac{n + f(n)}{2}.$$

(Rumunsko, 2004)

5.4 Nech $n > 1$ je prirodzené číslo a X je množina s n prvkami. Nech $A_1, A_2, \dots, A_{101}$ sú podmnožiny množiny X také, že zjednotenie ľubovoľných 50 z nich má viac ako $50n/51$ prvkov. Dokážte, že z týchto podmnožín sa dajú vybrať tri také, že každé dve z nich majú aspoň jeden spoločný prvok.

(Rumunsko, 2004)

5.5 Nech m a n sú prirodzené čísla. Dokážte, že ak m je nepárne, tak číslo

$$\frac{1}{3^m n} \sum_{k=0}^{m} \binom{3m}{3k} (3n-1)^k$$

je celé.

(Rumunsko, 2004)

Šiesta séria

6.1 Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktoré spĺňajú rovnosť

$$f(y + zf(x)) = f(y) + xf(z)$$

pre každú trojicu reálnych čísel x, y, z.

6.2 Nájdite všetky dvojice celočíselných parametrov (p, q), pre ktoré má rovnica

$$x^3 - y^3 = pxy + q$$

s neznámymi x, y nekonečne veľa riešení v obore celých čísel.

6.3 Nech O je vnútorný bod trojuholníka ABC. Priamky OA, OB, OC pretínajú strany trojuholníka po rade v bodoch A_1, B_1, C_1 (po rade rôznych od bodov A, B, C). Nech R_1, R_2, R_3, R sú polomery kružníc opísaných postupne trojuholníkom OBC, OCA, OAB, ABC. Dokážte, že

$$\frac{|OA_1|}{|AA_1|}R_1 + \frac{|OB_1|}{|BB_1|}R_2 + \frac{|OC_1|}{|CC_1|}R_3 \geqq R.$$

(Rumunsko, 2004)

6.4 Nech a, b, c sú také reálne čísla, že polynóm $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ má tri reálne korene (nie nutne rôzne). Dokážte, že platí

$$12ab + 27c \leqq 6a^3 + 10(a^2 - 2b)^{3/2}.$$

Kedy nastáva rovnosť?

(Vietnam, 2002)

6.5 V rovine trojuholníka ABC je daný bod O a kružnica k prechádzajúca bodom O tak, že priamky OA, OB a OC pretínajú kružnicu k po rade v bodoch P, Q, R, rôznych od O. Body K, L, M (v tomto poradí) sú druhé priesečníky kružnice k s kružnicami opísanými trojuholníkom BOC, AOC, AOB, rôzne od bodu O. Dokážte, že priamky PK, QL, RM prechádzajú jedným bodom.

(Rumunsko, 2004)

Riešenia súťažných úloh KS SK MO

Prvá séria

1.1 Predstavme si, že stojíme na pláži práve v deň, keď sú obe čísla po prvý raz rovnaké. Aká bola posledná operácia, ktorú Rúža urobil? Do úvahy prichádza jediná, a to, že jedno z čísel zvýšil o jedna a druhé umocnil na druhú. Ak by urobil inú povolenú operáciu, čísla na pláži by boli rovnaké už predošlý deň. To ale neboli.

Predošlý deň boli na brehu čísla x a x^2-1. Dnes, po vykonaní operácie plus jedna s jedným a umocnenie na druhú s druhým číslom, zmenil ich Rúža obe na x^2 (x je prirodzené číslo). Pozrime sa teraz bližšie na to, ako mohlo vzniknúť číslo x^2-1. To sme dostali z 19 alebo z 82 tým, že sme ho postupne umocňovali na druhú a zväčšovali o jedna. Najbližšia druhá mocnina menšia ako x^2-1 je $(x-1)^2$. Teda po dosiahnutí čísla $(x-1)^2$ sme už určite pridávali len jednotky (neumocňovali sme viac), kým sme nedosiahli číslo x^2-1. Koľko dní sme to robili? Toľko, koľko sme pridali jednotiek, čiže $x^2-1-(x-1)^2=2x-2$. Druhé číslo malo včera hodnotu x a vieme, že každým dňom sa zväčšilo aspoň o jedna, čiže pred $2x-2$ dňami muselo byť určite menšie ako 19.

Čo z toho vyplýva? Že číslo x^2-1 bolo doteraz vždy iba zväčšované o jedna a nikdy nedosiahlo hodnotu najbližšieho menšieho štvorca. Teraz potrebujeme zistiť, ktoré z čísel 19 a 82 to bolo.

Predpokladajme, že je to číslo 19. Uvedomme si, že ak by sa k číslu 19 stále pripočítavala jednotka a k číslu 82 by sa pridala jednotka alebo by sa umocnilo na druhú, ich rozdiel by sa nikdy nezmenšoval. Teda nikdy nebudú rovnaké.

Čo ak by 82 bolo to číslo, čo sa stále zväčšuje o jedna? Potom nech po k dňoch prvýkrát umocníme číslo upravované postupne z 19. Máme číslo $(19+k)^2=361+ 38k+k^2$ a číslo $82+k+1$, čo je číslo určite menšie a nikdy to druhé „nedobehne“ postupným pridávaním jednotiek.

Týmto sme došli k záveru, že čísla na pláži nebudú nikdy rovnaké.

Poznámka. Úloha je náročná tým, že sa na ňu treba pozrieť netradične – odzadu. Pokusy cez rôzne parity a iné zvyšky po delení či skúmanie rozdielov a iné invarianty nevedú k riešeniu.

1.2 Ukladajme štvorce v poradí od najväčšieho po najmenší. Najväčší štvorec položíme do ľavého dolného rohu (jeho výšku označme h_1). Potom ukladáme štvorce do riadku vpravo od neho, až kým nejaký štvorec netrčí von. Tento prečnievajúci štvorec (jeho výšku si označíme h_2) uložíme na nový riadok, teda na predĺženú hornú stranu najväčšieho štvorca minulého riadku. Na tento riadok ukladáme aj ďalšie štvorce, kým sa dá. Potom pokračujeme v ďalšom riadku, atď. Výšku vedúceho (t. j. najväčšieho) štvorca posledného riadku označíme h_k.

Úloha sa nám teda redukuje na dôkaz, že $h_1 + h_2 + \cdots + h_k = h \leqq 1$. S týmto označením vieme plochu S, ktorú zaberajú naše štvorce, ohraničiť zdola

$$S \geqq h_1^2 + (1-h_1)h_2 + (1-h_1)h_3 + \cdots + (1-h_1)h_k,$$

pričom prvé dva sčítance sú za prvý riadok a každý ďalší sčítanec reprezentuje jeden riadok. (Môže sa zdať, že sme do pokrytej plochy zarátali aj konce riadkov, ktoré nemusia byť vždy pokryté, ale my tam rátame vedúci štvorec nasledujúceho riadku, ktorý inde v súčte zarátaný nie je.) Z k-teho riadku rátame len prvý štvorec. Teda máme

$$h_1^2 + (1-h_1)(h-h_1) \leqq S = \frac{1}{2}.$$

Keďže $1 - h_1$ nie je nula, predošlá nerovnosť je ekvivalentná s nerovnosťou

$$h \leqq \frac{\frac{1}{2} - h_1^2}{1-h_1} + h_1.$$

Po čiastočnom vydelení dostávame

$$h \leqq h_1 + 1 - \frac{\frac{1}{2}}{1-h_1} + h_1$$

a poslednou sériou úprav dostávame konečný tvar

$$h \leqq 3 - \left(2 - 2h_1 + \frac{1}{2-2h_1}\right),$$

z ktorého vidíme (keďže $t + 1/t \geqq 2$ pre všetky kladné t), že súčet výšok uložených štvorcov je menší ako jedna, takže sa zmestia do jednotkového štvorca.

1.3 Zo zadania vyplýva, že $b_1 \neq 0$, $b_1 \neq 5$. Keďže $b_n \equiv (b_{n-1} + b_{n-1}) \pmod{10}$, ľahko si možno všimnúť, že už člen b_2 musí byť párny a rovnako celá postupnosť $\{b_n\}_{n=2}^{\infty}$ bude obsahovať len párne čísla a navyše bude periodická s periódou $\{2, 4, 8, 6\}$ dĺžky 4. Preto pre $n \geqq 2$ bude platiť $a_{n+4} = a_n + 2 + 4 + 8 + 6 = a_n + 20$ a teda $a_{n+4s} = a_n + 20s$.

Tiež vieme, že v postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ určite existuje a_n také, že $a_n = 10r + 2$ a teda $a_{n+1} = 10r + 4$. Z týchto dvoch za sebou idúcich členov postupnosti musí byť práve jeden deliteľný číslom 4, označme tento člen a_m. Teda $a_m = 4l$, pričom $5 \nmid l$ a podľa už dokázaného tvrdenia $a_{m+4s} = a_m + 20s = 4(l + 5s)$. Teda l máme pevne dané, ale nech zvolíme akékoľvek $s \in \mathbb{N}$, číslo $4(l + 5s)$ sa bude určite vyskytovať v našej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Stačí nám teda ukázať, že medzi číslami tvaru $(l + 5s)$ (a teda aj medzi číslami tvaru $4(l + 5s)$) je nekonečne veľa mocnín dvojky.

To ale nie je až taký problém. Pozrime sa bližšie na to, aké zvyšky po delení piatimi dávajú postupne jednotlivé mocniny dvojky. Po vypísaní prvých pár členov vidíme, že tvoria periodickú postupnosť $\{1, 2, 4, 3, \ldots\}$ s periódou 4, čo možno dokázať jednoduchou matematickou indukciou. To znamená, že nech dáva číslo l akýkoľvek zvyšok po delení piatimi z množiny $\{1, 2, 3, 4\}$ (vieme, že $5 \nmid l$), existuje nekonečne veľa mocnín dvojky, ktoré dávajú rovnaký zvyšok. No a keďže l je nejaké konečné číslo, existuje určite aj nekonečne veľa mocnín dvojky, ktoré dávajú po delení piatimi rovnaký zvyšok ako l a navyše sú väčšie ako l. Tieto všetky vieme zapísať v tvare $(l + 5s)$ a teda ich štvornásobok sa podľa predošlých úvah nachádza v postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Tým je naše tvrdenie dokázané.

1.4 Aby bol vôbec výraz v zadaní prvočíslo, musí byť v prvom rade prirodzené číslo. Teda $\sqrt{(2a-b)/(2a+b)}$ musí byť kladné racionálne číslo. Čiže $\sqrt{(2a-b)/(2a+b)} = x/y$, kde x a y sú nesúdeliteľné prirodzené čísla. Umocnením dostávame $(2a-b)/(2a+b) = (x^2)/(y^2)$. Z toho máme

$$2a - b = kx^2, \qquad 2a + b = ky^2$$

pre nejaké prirodzené číslo k. Úpravou dostaneme

$$a = \tfrac{k}{4}(x^2 + y^2), \qquad b = \tfrac{k}{2}(y^2 - x^2).$$

Keď teraz prepíšeme pôvodný výraz zo zadania, vidíme, že sa značne zjednodušil. Máme zistiť, aké najväčšie prvočíslo môže byť výraz $k(y^2 - x^2)x/(8y)$. Z podmienok stanovených na x a y vyplýva, že $k = dy$ pre nejaké prirodzené d. Skúmajme teda, kedy sa výraz $d(y^2 - x^2)x/8$ bude rovnať prvočíslu p. Môžu nastať 2 možnosti; keďže x a y sú nesúdeliteľné, buď sú obe nepárne, alebo je jedno z nich párne a druhé nepárne.

Keď x aj y sú nepárne, tak $y^2 - x^2$ je deliteľné ôsmimi (premyslite si prečo). A teda nám ostáva zistiť, kedy je $d(y^2 - x^2)x/8$ prvočíslo. Stačí preskúmať tri možnosti:

$$\begin{aligned} &d = 1, \quad x = 1, \quad (y^2 - x^2)/8 = p;\\ &d = 1, \quad (y^2 - x^2)/8 = 1, \quad x = p;\\ &d = p, \quad (y^2 - x^2)/8 = 1, \quad x = 1. \end{aligned}$$

Prvá ani druhá možnosť nemá také riešenie, aby výsledné a a b boli prirodzené, tretej vyhovuje jedine $x = 1$, $y = 3$, $d = 2$, $p = 2$ (d musí byť párne, aby sme dostali a prirodzené). Tomu zodpovedajú $k = 6$, $a = 15$, $b = 24$.

Ak x a y majú rôznu paritu, musí platiť $k(y^2 - x^2)x = 8p$. Avšak $y^2 - x^2$ je nepárne a väčšie ako 1, teda $y^2 - x^2 = p$. Preskúšaním možností, aby $kx = 8$ a výsledné a aj b boli prirodzené, dostávame dve riešenia:

$$\begin{aligned} &x = 1,\ y = 2,\ d = 8,\ p = 3, \quad \text{čomu zodpovedajú} \quad k = 16,\ a = 20,\ b = 24;\\ &x = 2,\ y = 3,\ d = 4,\ p = 5, \quad \text{čomu zodpovedajú} \quad k = 12,\ a = 39,\ b = 30. \end{aligned}$$

Porovnaním riešení oboch prípadov vidíme, že výraz zo zadania je najväčšie prvočíslo pre $a = 39$ a $b = 30$, konkrétne

$$\frac{30}{4}\sqrt{\frac{2 \cdot 39 - 30}{2 \cdot 39 + 30}} = 5.$$

1.5 Nech S_1, S_2 sú po rade stredy kružníc k_1, k_2. Najprv si uvedomme, že dokazované tvrdenie je ekvivalentné s rovnosťou $|\sphericalangle S_1B_1B_2| = 90° = |\sphericalangle B_1B_2S_2|$. Dokážeme iba prvú z uvedených rovností (druhá sa dokazuje analogicky) a to pomocou vzťahu

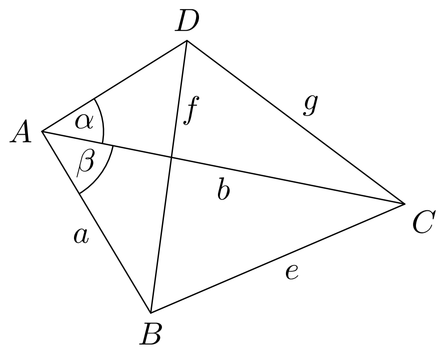
$$|\sphericalangle S_1B_1B_2| = 180° - |\sphericalangle A_1B_1S_1| - |\sphericalangle PB_1B_2|. \qquad (1)$$

Teraz ukážeme, že trojuholník PA_1A_2 je podobný s trojuholníkom PB_2B_1. To ide pomerne ľahko: z mocnosti bodu P ku kružniciam k_1, k_2 máme $|PA_1|\cdot|PB_1| = |PA|^2 = |PA_2| \cdot |PB_2|$, teda $|PA_1|/|PA_2| = |PB_2|/|PB_1|$ a uhol pri vrchole P je spoločný, čo podľa vety *sus* stačí. Označme $|\sphericalangle A_1A_2P| = \alpha$, z podobnosti máme $|\sphericalangle PB_1B_2| = \alpha$. Využime teraz, že kružnice k a k_1 sú rovnoľahlé so stredom v bode A_1. Vďaka tomu $|\sphericalangle A_1S_1B_1| = |\sphericalangle A_1SP| = 2\cdot\alpha$, kde S je stred kružnice k. Trojuholník $A_1S_1B_1$ je rovnoramenný, teda $|\sphericalangle A_1B_1S_1| = 90° - \alpha$. Teraz zostáva už len dosadiť do (1).

Poznámka. Úloha sa dá pomerne jednoducho vyriešiť aj použitím *kružnicovej inverzie.*

DRUHÁ SÉRIA

2.1 (Podľa *Ondreja Budáča.*) Budeme dokazovať sporom. Nech máme v rovine 4 body a medzi nimi nepárne celočíselné vzdialenosti. Pozrime sa na to, ako to bude vyzerať. Najprv si uvedomíme, že žiadne tri z týchto bodov nemôžu ležať na jednej priamke. Ak by sa totiž také tri našli (nech sú označené X, Y, Z v tomto poradí na priamke), potom $|XY|+|YZ| = |XZ|$, teda súčet dvoch nepárnych čísel by bol nepárne číslo, čo je spor. Takisto žiadne dva body zo štvorice nesplývajú (inak by ich vzdialenosť bola 0, čo je párne číslo). Takže body sú vrcholmi štvoruholníka (nie nutne konvexného). Určite



Obr. 50

v tomto štvoruholníku existuje vrchol, pri ktorom má uhol veľkosť menšiu než 180°. Označme ho A a ostatné vrcholy označme štandardne B, C a D. Ďalej označme $|AB| = a$, $|AC| = b$, $|AD| = c$, $|BC| = e$, $|BD| = f$, $|CD| = g$, $|\sphericalangle CAD| = \alpha$ a $|\sphericalangle BAC| = \beta$ (obr. 50). Teraz skúsme napísať kosínusové vety pre trojuholníky ACD, ABC a ABD a vyjadriť z nich kosínusy uhlov α, β a $\alpha+\beta$. Po chvíli úprav zistíme, že

$$\cos\alpha = \frac{c^2+b^2-g^2}{2bc}, \qquad \cos\beta = \frac{a^2+b^2-e^2}{2ab}, \qquad \cos(\alpha+\beta) = \frac{a^2+c^2-f^2}{2ac}.$$

Kosínus súčtu uhlov vieme prepísať podľa súčtového vzorca v tvare

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Tento vzťah upravíme, aby sme v ňom nemali sínusy. Po preusporiadaní a umocnení dostaneme

$$(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta) = \cos^2\alpha\cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha+\beta).$$

Tu už poznáme všetko, takže dosadíme a vyjde

$$\begin{aligned}&4a^2b^2c^2 - a^2(c^2+b^2-g^2)^2 - c^2(a^2+b^2-e^2)^2 =\\ &= b^2(a^2+c^2-f^2) - (c^2+b^2-g^2)(a^2+b^2-e^2)(a^2+c^2-f^2).\end{aligned}$$

Teraz prichádza chvíľa, keď využijeme, že čísla a, b, c, e, f, g sú nepárne prirodzené čísla. Vo vzťahu, ktorý sme dostali, máme iba štvorce týchto čísel. Vieme, že štvorce nepárnych čísel dávajú po delení štyrmi zvyšok 1. Skúsme to použiť a zistiť, aký zvyšok dáva pravá a ľavá strana našej rovnosti. Zistíme, že ľavá dáva zvyšok 2 a pravá dáva zvyšok 0. To je hľadaný spor, takže sme hotoví.

2.2 (Podľa *Kataríny Škrovinovej.*) Na úvod dokážeme dve pomocné tvrdenia.

Tvrdenie 1 (*trojuhlová nerovnosť*). Nech A, B, C, D sú 4 rôzne body v trojrozmernom priestore. Potom

$$|\sphericalangle ADB| + |\sphericalangle BDC| \geqq |\sphericalangle ADC|, \tag{1}$$

pričom uvažujeme konvexné uhly.

Dôkaz. Označme polpriamky DA, DB, DC postupne a, b, c. Keď ležia všetky 4 body v jednej rovine, buď a, b, c patria do jednej polroviny, alebo nepatria. Oba tieto prípady môžeme ľahko nakresliť a tiež ľahko pre ne zdôvodniť nerovnosť (1). Zaujímavejšia a nie až tak zrejmá je situácia, keď A, B, C, D neležia v jednej rovine. Ak uhol ADC nie je najväčší spomedzi tých troch uhlov, potom (1) zrejme platí. Nech je najväčší z nich. Na polpriamke AC zvoľme bod X tak, aby $|\sphericalangle CDX| = |\sphericalangle CDB|$. Ďalej sme predpokladali, že $|\sphericalangle ADC| > |\sphericalangle CDB|$, preto bod X bude zároveň vnútorným bodom úsečky AC. Na polpriamke DB zvolíme bod Y tak, aby $|DX| = |DY|$. Vidíme, že trojuholníky YDC a XDC sú zhodné podľa vety *sus*, preto aj $|YC| = |XC|$. Z trojuholníkovej nerovnosti v trojuholníku AYC dostaneme

$$|AX| + |XC| = |AC| < |AY| + |YC|.$$

Teda $|AX| < |AY|$ a tiež $|\sphericalangle ADX| < |\sphericalangle ADY|$. K poslednej nerovnosti s uhlami stačí pripočítať $|\sphericalangle CDX| = |\sphericalangle CDY|$ a máme dokázaný vzťah (1).

Tvrdenie 2. Nech A, B, C, D sú 4 rôzne body v trojrozmernom priestore. Potom

$$|\sphericalangle ADB| + |\sphericalangle BDC| + |\sphericalangle ADC| \leqq 360^\circ, \tag{2}$$

pričom uvažujeme konvexné uhly.

Dôkaz. Prípad, keď všetky štyri body ležia v jednej rovine, možno vyšetriť jednoducho. Nech A, B, C, D neležia v jednej rovine. Označme ϱ takú rovinu, ktorú polpriamky a, b, c pretínajú postupne v troch rôznych bodoch K, L, M a navyše kolmý priemet P bodu D do ϱ leží vo vnútri trojuholníka KLM. Taká rovina vždy existuje. Napríklad každá rovina pretínajúca polpriamku DT a kolmá na ňu je vyhovujúca, pričom T je vnútorný bod štvorstenu $ABCD$. Všimnime si uhly KDL a KPL. Keďže KD je prepona pravouhlého trojuholníka KDP, platí $|KD| > |KP|$. Podobne aj $|LD| > |LP|$. Trojuholníky KDL a KPL majú spoločnú stranu KL. Ďalšie dve strany sú v prvom z nich vždy väčšie, ako im prislúchajúce strany v druhom trojuholníku, preto $|\sphericalangle KPL| > |\sphericalangle KDL|$ (vyplýva to napr. z kosínusovej vety – stačí napísať ju pre stranu KL pre oba trojuholníky a porovnať). Obdobným postupom sa dopracujeme aj k nerovnostiam $|\sphericalangle LPM| > |\sphericalangle LDM|$ a $|\sphericalangle MPK| > |\sphericalangle MDK|$. Avšak $|\sphericalangle KPL|+|\sphericalangle LPM|+|\sphericalangle MPK| = 360°$. Odtiaľ už nie je problém dopracovať sa k (2).

Poďme teraz dokázať tvrdenie zo zadania. Dá sa dokazovať aj matematickou indukciou. Nasledujúci postup nám však dá lepšiu predstavu o tom, ako sú body v priestore rozmiestnené. Nebudeme sa zaoberať degenerovanými prípadmi, keď $n < 3$. Keď $n = 3$, potom do lomenej čiary vyberieme ramená uhla väčšieho ako $120°$ v trojuholníku $A_1A_2A_3$. V ďalšom budeme uvažovať $n \geqq 4$.

Nech body $A_1, \dots, A_n$ vyhovujú podmienke v zadaní. V každom trojuholníku $A_iA_jA_k$ je jeden uhol väčší ako $120°$ a zvyšné dva zrejme menšie ako $60°$, lebo súčet uhlov v trojuholníku je $180°$. Označme B_1 a B_n dva najvzdialenejšie body spomedzi $A_1, \dots, A_n$. Zrejme nemôžu byť tri také body, lebo tie by tvorili rovnostranný trojuholník s uhlami rovnými $60°$, čo vedie k sporu. V ďalšom odstavci ukážeme, že B_1 ani B_n nemôžu byť vrcholmi uhla väčšieho ako $120°$.

V každom trojuholníku B_1B_nK je najdlhšia strana B_1B_n, preto najväčší uhol bude oproti nej, t. j. pri vrchole K. Nech sú teraz K, L dva body spomedzi $A_1, \dots, A_n$ rôzne od B_1 a B_n. Už vieme, že $|\sphericalangle B_1KB_n| > 120°$ a $|\sphericalangle B_1LB_n| > 120°$. Preto $|\sphericalangle KB_1B_n| < 60°$ a $|\sphericalangle LB_1B_n| < 60°$. Z toho a z trojuhlovej nerovnosti pre body K, B_n, L a B_1 vyplýva

$$120° > |\sphericalangle KB_1B_n| + |\sphericalangle B_nB_1L| \geqq |\sphericalangle KB_1L|. \tag{3}$$

Lenže potom musí nutne byť $|\sphericalangle KB_1L| < 60°$. Rovnako by sme postupovali pre trojuholníky KLB_n.

Uvažujme ďalej K, L také dva body spomedzi $A_1, \dots, A_n$ rôzne od B_1, pre ktoré platí $|B_1K| = |B_1L|$. Potom je trojuholník KLB_1 rovnoramenný so základňou KL. Uhly pri základni sú rovnaké, teda nutne menšie ako $120°$. Naposledy sme však ukázali, že aj $|\sphericalangle KB_1L| < 120°$, takže predpoklad $|B_1K| = |B_1L|$ bol nesprávny. Preto môžeme ostatné body okrem B_1 a B_n označiť $B_2, \dots, B_{n-1}$ tak, že

$$|B_1B_i| < |B_1B_j|, \qquad \text{pre } 1 < i < j \leqq n. \tag{4}$$

Uvedomme si, že podobná situácia je z pohľadu bodu B_n: pre $1 \leqq j < i < n$ platí $|B_nB_i| < |B_nB_j|$. Keď k tomu pridáme skutočnosť, že pre $2 \leqq i \leqq n-1$ nemôže byť bod B_i príliš vzdialený od priamky B_1B_n (lebo $|\sphericalangle B_1B_iB_n| > 120°$ – treba si uvedomiť, ako vyzerá množina všetkých bodov X v priestore, pre ktoré platí $|\sphericalangle B_1XB_n| > > 120°$), vyjde nám, že body $B_1, \dots, B_n$ sa nachádzajú s nie veľkým rozptylom od priamky B_1B_n približne za sebou, keď sa pozeráme v smere od B_1 k B_n. Preto je prirodzené predpokladať, že hľadaná vyhovujúca lomená čiara bude práve $B_1, \dots, B_n$. Na to musíme dokázať, že vo všetkých trojuholníkoch $B_iB_{i+1}B_{i+2}$, $1 \leqq i \leqq n-2$, platí $|\sphericalangle B_iB_{i+1}B_{i+2}| > 120°$.

Ak $i = 1$, potom zo (4) vieme, že $|B_1B_2| < |B_1B_3|$, a teda $|\sphericalangle B_1B_2B_3| > |\sphericalangle B_1B_3B_2|$. Z (3) zasa vieme, že $|\sphericalangle B_2B_1B_3| < 120°$, preto nutne $|\sphericalangle B_1B_2B_3| > 120°$. Podobnú situáciu, ale z druhej strany, máme pre $i = n+2$.

Nech teraz $1 < i < n-2$. Uvažujme body B_1, B_i, B_{i+1} a B_{i+2}. Určite platí $|\sphericalangle B_1B_iB_{i+1}| > 120°$. V trojuholníku $B_1B_iB_{i+1}$ je $|B_1B_i| < |B_1B_{i+1}|$, čiže opäť $|\sphericalangle B_1B_iB_{i+1}| > |\sphericalangle B_1B_{i+1}B_i|$. A ďalej zasa z (3) vyplýva $|\sphericalangle B_iB_1B_{i+1}| < 120°$. Preto väčší ako $120°$ môže byť jedine uhol $|\sphericalangle B_1B_iB_{i+1}|$. Obdobne aj $|\sphericalangle B_1B_iB_{i+2}| > 120°$. Podľa tvrdenia 2 máme $|\sphericalangle B_1B_iB_{i+1}| + |\sphericalangle B_1B_iB_{i+2}| + |\sphericalangle B_{i+1}B_iB_{i+2}| \leqq 360°$. Veľkosti prvých dvoch uhlov už vieme, preto nutne $|\sphericalangle B_{i+1}B_iB_{i+2}| < 120°$.

Už sme skoro na konci s dôkazom. Uvedomme si, že vďaka tomu, že prípady $i = 1$ a $i = n+2$ sme ošetrili zvlášť, sú teraz body B_i, resp. B_{i+2} rôzne od B_1, resp. B_n. Preto môžeme postup z predošlého odstavca použiť aj na body B_n, B_i, B_{i+1} a B_{i+2} a dostaneme $|\sphericalangle B_{i+1}B_{i+2}B_i| < 120°$. Z toho je už zrejmé, že $|\sphericalangle B_iB_{i+1}B_{i+2}| > 120°$, čo sme chceli dokázať.

2.3 (Podľa *Františka Simančíka* a *Ondreja Budáča*.) Všimnime si, že zadaná sústava nerovníc je cyklická. Môžu nastať dva prípady: aspoň jedno z x_i je nulové, alebo všetky x_i sú nenulové.

Prípad 1. Predpokladajme, že aspoň jedno z x_i je nenulové. Keďže máme cyklickú sústavu, bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $x_5 = 0$. Potom z prvej nerovnice dostaneme $x_1^2x_2^2 \leqq 0$, teda aspoň jedno z x_1, x_2 je nulové. Analogicky z tretej nerovnice $x_3^2x_4^2 \leqq 0$, teda aspoň jedno z x_3, x_4 je nulové. Teda môžu nastať štyri možnosti.

Ak $x_1 = x_3 = 0$, tak z piatej nerovnice $x_2^2x_4^2 \leqq 0$, teda aspoň jedno z x_2, x_4 je nulové.

Ak $x_1 = x_4 = 0$, tak z druhej nerovnice $x_2^2x_3^2 \leqq 0$, teda aspoň jedno z x_2, x_3 je nulové.

Ak $x_2 = x_3 = 0$, tak z druhej nerovnice $x_1^2x_4^2 \leqq 0$, teda aspoň jedno z x_1, x_4 je nulové.

Ak $x_2 = x_4 = 0$, tak z druhej nerovnice $x_1^2x_3^2 \leqq 0$, teda aspoň jedno z x_1, x_3 je nulové.

Vidíme, že v každom prípade dostaneme aspoň štyri nuly, a to znamená, že najviac jedno x_i je nenulové. Keď dosadíme do sústavy tieto nuly, tak v každej nerovnici bude aspoň jeden činiteľ nulový, teda nerovnosti budú splnené. Takže sme dostali riešenia typu $(0,0,0,0,t)$, $(0,0,0,t,0)$, $(0,0,t,0,0)$, $(0,t,0,0,0)$, $(t,0,0,0,0)$, pričom $t \in \mathbb{R}$. Samozrejme, pre $t = 0$ tieto riešenia splývajú.

Prípad 2. Predpokladajme, že všetky x_i sú nenulové. Po sčítaní nerovníc a menšej úprave dostaneme

$$\begin{aligned}&x_1^2(x_3-x_5)^2+x_1^2(x_2-x_4)^2+x_2^2(x_1-x_4)^2+x_2^2(x_3-x_5)^2+x_3^2(x_2-x_5)^2+\\&+x_3^2(x_1-x_4)^2+x_4^2(x_2-x_5)^2+x_4^2(x_1-x_3)^2+x_5^2(x_1-x_3)^2+x_5^2(x_2-x_4)^2\leqq 0.\end{aligned}$$

Zrejme súčet štvorcov je nulový práve vtedy, keď sú všetky štvorce nulové. Lenže každý sčítanec je v tvare $x_i^2(x_j-x_k)^2$, kde $i\neq j\neq k\neq i$, a keďže $x_i\neq 0$, musí platiť $x_j=x_k$. To ale znamená, že $x_3=x_5$, $x_2=x_4$, $x_1=x_4$, $x_2=x_5$, atď., čiže do úvahy prichádza iba riešenie typu $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5\neq 0$. Keď ho dosadíme do sústavy nerovníc, presvedčíme sa o tom, že je vyhovujúce.

Tým je úloha vyriešená.

2.4 Najprv dokážme pomocné tvrdenie. Nech r je prvočíslo. Potom 5^r-2^r je deliteľné prvočíslom r práve vtedy, keď $r=3$.

Dôkaz. Ak $r=3$, tak skutočne $5^3-2^3=117=3^2\cdot 13$. Na druhej strane, číslo 5^r-2^r nie je pre žiadne prirodzené číslo r deliteľné dvoma ani piatimi. A ak je r prvočíslo rôzne od 2 a 5, tak $(r,2)=(r,5)=1$, t. j. podľa malej Fermatovej vety platí $1\equiv 2^{r-1}\equiv 5^{r-1}$ (mod r). Následne, ak má r deliť 5^r-2^r, tak

$$0\equiv 5^r-2^r=5\cdot 5^{r-1}-2\cdot 2^{r-1}\equiv 5\cdot 1-2\cdot 1=3 \pmod r,$$

z čoho $3\mid r$, jediné vyhovujúce prvočíslo je teda $r=3$.

Vráťme sa k pôvodnej úlohe. Rozoberme najprv špeciálne hodnoty p, q. Rovnako ako v dôkaze pomocného tvrdenia, 5^n-2^n nie je pre žiadne prirodzené číslo n deliteľné dvoma ani piatimi, takže p ani q nemôže byť 5 ani 2. Preverme ešte možnosť $p=3$ (prvočísla v zadaní môžeme vymeniť, možnosť $q=3$ nemusíme rozoberať). Potom máme zistiť, pre ktoré prvočísla q je zlomok

$$\frac{(5^3-2^3)\,(5^q-2^q)}{3\cdot q}=\frac{3^2\cdot 13\,(5^q-2^q)}{3\cdot q}=\frac{3\cdot 13\,(5^q-2^q)}{q}$$

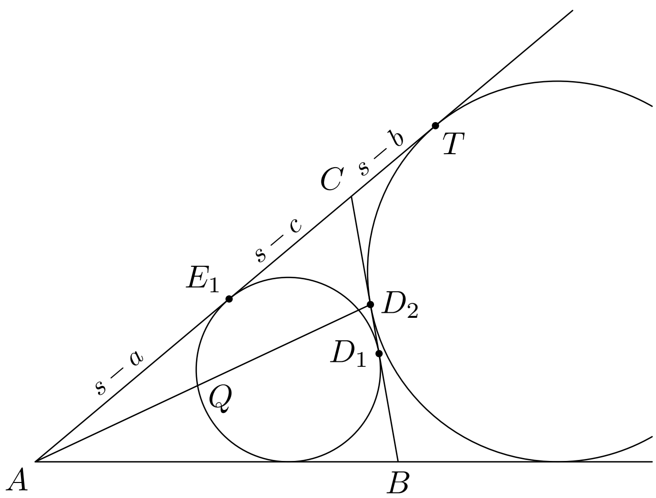
celým číslom. Prvočíslo q má deliť čitateľa, musí teda deliť jedného z troch činiteľov. Podľa pomocného tvrdenia ostávajú iba možnosti $q=3$ alebo $q=13$. Obe vyhovujú, riešeniami sú dvojice $(3,3)$, $(3,13)$, $(13,3)$. Iné už nebudú.

Ostal prípad $p,q>5$. Vďaka symetrii môžeme predpokladať, že $q>p$. Podľa pomocného tvrdenia stačí uvažovať iba možnosť $p\mid 5^q-2^q$. Z malej Fermatovej vety máme $p\mid 5^{p-1}-2^{p-1}$. Číslo q je prvočíslo väčšie ako p, preto q a $p-1$ sú nesúdeliteľné (premyslite si prečo). Potom podľa známeho tvrdenia existujú také prirodzené čísla a, b, že $aq-b(p-1)=1$. Na záver označme k zvyšok po delení čísla 5^q prvočíslom p, t. j. $k\equiv 5^q\equiv 2^q$ (mod p). Ďalším použitím malej Fermatovej vety dostávame

$$\begin{aligned}3&=5\cdot 1^b-2\cdot 1^b\equiv 5\cdot 5^{b(p-1)}-2\cdot 2^{b(p-1)}=\\&=5^{b(p-1)+1}-2^{b(p-1)+1}=5^{aq}-2^{aq}\equiv k^a-k^a=0 \pmod p,\end{aligned}$$

čo nespĺňa žiadne prvočíslo $p>5$.

2.5 Je dobré pamätať si o vpísanej kružnici jednu vec. Jej dotykové body delia strany na úseky, ktorých dĺžku vieme pomocou dĺžok strán jednoducho vyjadriť. Konkrétne, ak označíme $s = (a + b + c)/2$ (kde a, b, c je zvyčajné označenie dĺžok strán trojuholníka ABC), tak (v súlade s označením v zadaní) máme $|AE_1| = s - a$ a $|CD_1| = |CE_1| = s - c$. Zo zadaných rovností $|CD_2| = |BD_1|$ a $|CE_2| = |AE_1|$ pritom ľahko dostaneme $|BD_2| = |CD_1|$ a $|AE_2| = |CE_1|$ (stačí si nakresliť obrázok). Využitím predošlého preto $|BD_2| = |AE_2| = s - c$. Teraz si musíme spomenúť, že aj dĺžky úsekov od vrcholov k dotykovým bodom pripísaných kružníc majú podobný tvar. Presnejšie, ak X je bod, v ktorom sa kružnica pripísaná k strane BC dotýka tejto strany, tak platí $|BX| = s - c$. Bod D_2 je teda práve tým dotykovým bodom X. (Rovnako aj E_2 je dotykový bod kružnice pripísanej k strane AC, ale to potrebovať nebudeme.)

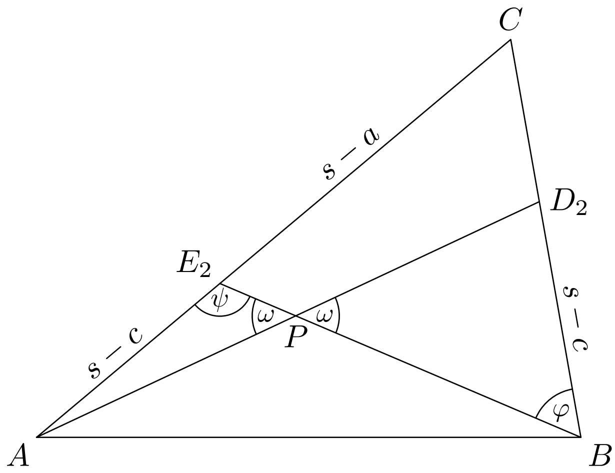


Obr. 51

Obohatení o cenné informácie celú situáciu nakreslíme (obr. 51). Označme T bod, v ktorom sa kružnica pripísaná k strane BC dotýka predĺženia strany AC. Posledný krát použijeme vedomosti o dĺžkach úsekov dotyčníc a uvedomíme si, že $|CT| = s - b$. Nemožno si nevšimnúť, že obe sledované kružnice na obrázku sú rovnoľahlé v rovnoľahlosti so stredom A (je to priesečník ich spoločných vonkajších dotyčníc). Taktiež vidno, že v tejto rovnoľahlosti sa bod Q zobrazí do bodu D_2 a bod E_1 do bodu T. Zaujíma nás dĺžka úsečky AQ, preto napíšme, čo pre ňu dostaneme vďaka uvedenej rovnoľahlosti. Vieme, že $|AQ| : |AD_2| = |AE_1| : |AT|$, takže

$$|AQ| = \frac{|AE_1|}{|AT|} \cdot |AD_2| = \frac{s-a}{b+(s-b)}|AD_2| = \frac{s-a}{s}|AD_2|. \tag{1}$$

Venujme sa teraz vyjadreniu dĺžky úsečky D_2P. Na to budeme potrebovať niekoľko



Obr. 52

sínusových viet. Označme veľkosti uhlov ako na obr. 52. Z trojuholníkov PBD_2 a APE_2 máme

$$\frac{|D_2P|}{\sin\varphi} = \frac{s-c}{\sin\omega} = \frac{|AP|}{\sin\psi}, \qquad \text{takže} \qquad \frac{|AP|}{|D_2P|} = \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}.$$

Z trojuholníka BCE_2 zasa

$$\frac{s-a}{\sin\varphi} = \frac{a}{\sin(\pi-\psi)} = \frac{a}{\sin\psi}, \qquad \text{takže} \qquad \frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \frac{a}{s-a}.$$

Dosadením do predošlého dostaneme

$$\frac{|AP|}{|D_2P|} = \frac{a}{s-a}$$

a následne

$$\frac{|D_2P|}{|AD_2|} = \frac{|D_2P|}{|AP|+|D_2P|} = \frac{1}{\frac{|AP|}{|D_2P|}+1} = \frac{1}{\frac{a}{s-a}+1} = \frac{s-a}{s}.$$

Máme tak

$$|D_2P| = \frac{s-a}{s}|AD_2|. \tag{2}$$

Porovnaním (1) a (2) máme $|AQ| = |D_2P|$.

Poznámka. Na vyriešenie tejto úlohy je dôležité mať v hlave zakorenené vedomosti o dĺžkach úsekov dotyčníc k vpísanej a pripísanej kružnici (tieto sa dajú odvodiť pomerne jednoducho). Bez nich by sme neobjavili rovnoľahlosť a ťažko by sa nám vyjadrovala dĺžka $|AQ|$. Dĺžka $|D_2P|$ sa dá vyjadriť rôznymi spôsobmi, napríklad použitím rôznych podobností či pomocou Cevovej vety.

TRETIA SÉRIA

3.1 Túto úlohu sa môžeme pokúsiť riešiť viacerými spôsobmi. Môžeme napríklad nájsť všetky spôsoby, ako sa dá vydláždiť náš štvorec a pre každé takéto vydláždenie ukázať, že sme použili aspoň 199 dlaždičiek tvaru . Tento prístup ale nie je najšťastnejší, pretože by nám trval príliš dlho a asi by sa nám ťažko dokazovalo, že sme naozaj našli všetky vydláždenia. Iná možnosť je nájsť nejakú vlastnosť alebo vlastnosti, ktoré budú mať všetky dobré vydláždenia a pomocou týchto vlastností dokázať, čo treba.

Ako však nájsť takú vlastnosť? V úlohe vystupujú iba dlaždičky, štvorce a pokrytie dlaždičkami. Hľadaná vlastnosť by teda mohla byť nejakým vzťahom medzi štvorcom, dlaždičkami a pokrytím. Keď sa pozrieme na dlaždičky, hneď si uvedomíme, že dve z nich pokryjú vždy štyri políčka štvorca (políčko štvorca je malý štvorček 1×1) a jedna tri políčka. Snažme sa nejako využiť túto vlastnosť. Očíslujme niektoré políčka štvorca číslom 1 tak, ako ukazuje tabuľka.

1		1		
				$\dots$
1		1		
		$\vdots$		$\ddots$

Číslo 1 je v každom políčku, ktoré je v nepárnom riadku a zároveň v nepárnom stĺpci. Všimnime si, že jedna dlaždička zakryje najviac jedno políčko s číslom 1. Ľahko nahliadneme, že očíslovaných je práve $50 \cdot 50 = 50^2$ políčok. Označme x počet dlaždičiek tvaru a y počet zvyšných dlaždičiek. Potom

$$x + y \geqq 50^2.$$

Zároveň vieme, že

$$3x + 4y = 99^2.$$

(To kvôli tomu, že políčok je spolu 99^2 a zaberie tri políčka a a zaberú po štyri.) Dajme teraz naše dva vzťahy dokopy a dostaneme

$$x = 4x + 4y - 3x - 4y \geqq 4 \cdot 50^2 - 99^2 = 100^2 - 99^2 = (100 - 99) \cdot (100 + 99) = 199,$$

čo sme chceli dokázať.

3.2 Počet prvočísel v množine $\mathsf{M} = \{1, 2, \dots, 100\}$ je 25. Každé prirodzené číslo $m \in \mathsf{M}$ sa dá jednoznačne prepísať do kanonického rozkladu v tvare $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_{25}^{\alpha_{25}}$, kde p_i je i-te prvočíslo a $\alpha_i \in \{0, 1, \dots, 6\}$. Teraz priradíme každému $m \in \mathsf{M}$ binárny 25-ciferný kód $\varphi(m) = m_1 m_2 \dots m_{25}$ podľa nasledujúceho pravidla: Ak α_i je párne, tak $m_i = 0$, inak $m_i = 1$. Je zrejmé, že keď je nejaké číslo štvorcom prirodzeného čísla, každé prvočíslo sa v ňom nachádza párny počet krát, a tak jemu priradený kód pozostáva zo samých núl. Počet rôznych binárnych kódov dĺžky 25 je 2^{25}.

Označme R Rasťovu množinu 26 čísel. Taký istý kód môžeme priradiť každej podmnožine G množiny R. Označme $S(\mathsf{G})$ číslo, ktoré dostaneme ako súčin všetkých prvkov tejto podmnožiny. Kód priradený podmnožine G bude kód, ktorý priradíme číslu $S(\mathsf{G})$. Môžeme to urobiť z toho dôvodu, že v kanonickom rozklade $S(\mathsf{G})$ sa nemôže nachádzať prvočíslo väčšie ako p_{25}, lebo je to súčin prirodzených čísel menších ako 100. Množina R má $2^{26} - 1$ rôznych neprázdnych podmnožín.

Keďže počet všetkých rôznych neprázdnych podmnožín množiny R je väčší ako počet všetkých rôznych kódov, na základe Dirichletovho princípu existujú dve rôzne podmnožiny G_1, G_2 množiny R, ku ktorým je priradený taký istý kód, t. j. $\varphi(S(\mathsf{G}_1)) = \varphi(S(\mathsf{G}_2))$. Potom zrejme $S(\mathsf{G}_1) \cdot S(\mathsf{G}_2)$ je štvorec prirodzeného čísla.

Ak sú podmnožiny G_1 a G_2 disjunktné, tak $\mathsf{G}_1 \cup \mathsf{G}_2 \subseteq \mathsf{R}$ a $S(\mathsf{G}_1 \cup \mathsf{G}_2) = S(\mathsf{G}_1) \cdot S(\mathsf{G}_2)$, čo je štvorec prirodzeného čísla. Takže $\mathsf{G}_1 \cup \mathsf{G}_2$ je podmnožina množiny R, ktorá obsahuje čísla, ktorých súčin dáva štvorec.

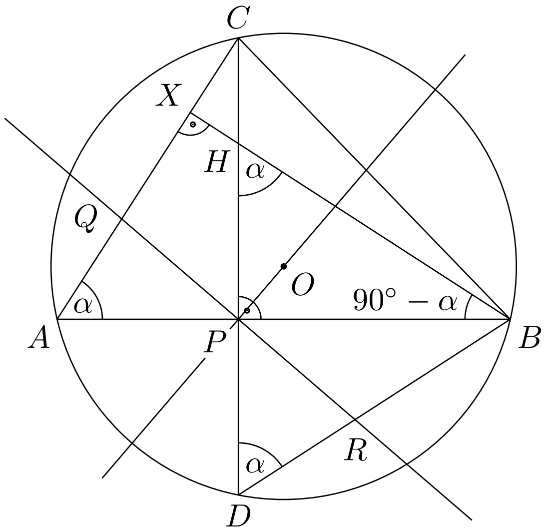
Ak G_1, G_2 nie sú disjunktné, tak $\mathsf{G}_1 \cap \mathsf{G}_2 = \{x_1, \dots, x_k\}$ pre nejaké $k \geqq 1$. Nech $\mathsf{G} = (\mathsf{G}_1 \cup \mathsf{G}_2) \setminus (\mathsf{G}_1 \cap \mathsf{G}_2)$, potom

$$S(\mathsf{G}) = \frac{S(\mathsf{G}_1) \cdot S(\mathsf{G}_2)}{x_1^2 \cdots x_k^2},$$

keďže sme spoločné prvky škrtli aj zo súčinu $S(\mathsf{G}_1)$ aj z $S(\mathsf{G}_2)$. Zrejme $S(\mathsf{G}_1) \cdot S(\mathsf{G}_2)$ je štvorec prirodzeného čísla, a keďže $x_1^2 \cdots x_k^2 \mid S(\mathsf{G}_1) \cdot S(\mathsf{G}_2)$, tak aj $S(\mathsf{G})$ je štvorec prirodzeného čísla. V tomto prípade je G tá hľadaná podmnožina, ktorej súčin prvkov dáva štvorec.

Tým je úloha vyriešená.

3.3 (Podľa *Františka Simančíka.*) Označme k kružnicu opísanú trojuholníku ABC, D druhý priesečník výšky CP s kružnicou k a X pätu výšky z bodu B na stranu AC. Ďalej nech R je priesečník priamky QP s úsečkou DB. Uhol BAC označme α (obr. 53).



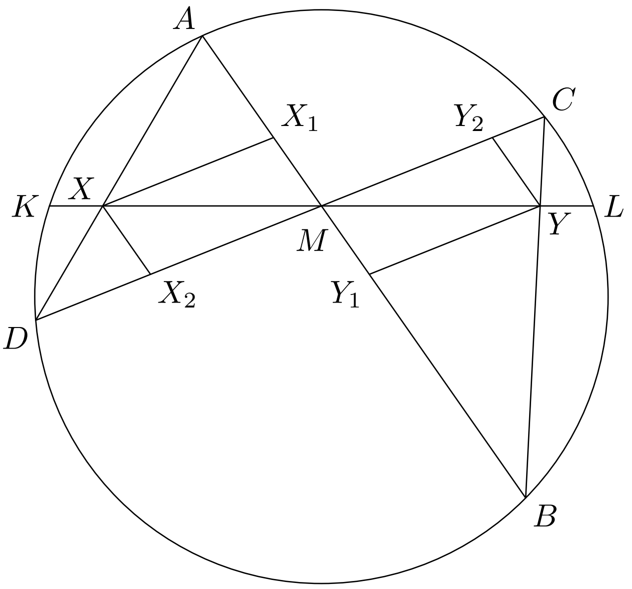
Obr. 53

V trojuholníku XBA je uhol AXB pravý (BX je výška na AC), preto $|\sphericalangle XBA| = |\sphericalangle HBA| = 90° - |\sphericalangle XAB| = 90° - \alpha$. V trojuholníku PHB podobne $|\sphericalangle HPB| = 90°$, preto $|\sphericalangle PHB| = 90° - |\sphericalangle PBH| = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$. Uhly CAB a CDB sú obvodové uhly kružnice k nad tým istým oblúkom CB, teda $|\sphericalangle CDB| = |\sphericalangle CAB| = \alpha$. Teraz si všimnime trojuholník HDB. Uhly HDB a DHB majú veľkosť α, preto je tento trojuholník rovnoramenný. Úsečka BP je kolmá na úsečku HD (lebo CP je výška na AB), čiže to bude výška na základňu v rovnoramennom trojuholníku HDB, teda zároveň aj ťažnica a bude platiť $|HP| = |DP|$. Ešte si všimnime, že uhly DPR a QPH sú vrcholové, čiže platí $|\sphericalangle DPR| = |\sphericalangle QPH|$.

Keď sa teraz bližšie pozrieme na to, čo sme zatiaľ zistili, vidíme, že by bolo pekné, keby sa nám ešte podarilo dokázať rovnosť $|PQ| = |PR|$. Tým by sme vlastne dokázali, že trojuholníky QPH a RPD sú zhodné (podľa vety *sus*), a teda aj rovnosť $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle PDR| = |\sphericalangle PHQ|$, čo je cieľom úlohy.

Skúsme túto rovnosť dokázať. V našom prípade naozaj platí, čo sa dalo ukázať napríklad analyticky, alebo elegantnejšie využitím vety, ktorá sa v anglickej literatúre nazýva *The Butterfly theorem*.

Vezmime kružnicu ℓ a nejakú jej tetivu, ktorej priesečníky s danou kružnicou označíme K, L. Teraz zostrojme dve ľubovoľné tetivy AB a CD prechádzajúce stredom M tetivy KL, pričom A, C ležia v tej istej polrovine určenej priamkou KL (presne tento prípad nastáva aj v našom príklade). Potom AD pretína KL v bode X, BC pretína KL v bode Y a bod M je stredom úsečky XY. A dôkaz? Najprv zostrojme cez body



Obr. 54

X a Y rovnobežky s AB a CD. Priesečníky s AB označme X_1, Y_1 a priesečníky s CD označme X_2, Y_2 (obr. 54). Ďalej nech $|KM| = |ML| = a$, $|XM| = x$ a $|YM| = y$. Teraz si všimnime, že v obrázku máme veľa podobných trojuholníkov, treba to využiť. Vidíme, že trojuholníky XMX_1 a YMY_1 sú podobné, teda $x/y = |XX_1|/|YY_1|$. Podobne dostaneme $x/y = |XX_2|/|YY_2|$ (z podobnosti trojuholníkov XMX_2 a YMY_2). Taktiež platí, že trojuholníky AXX_1 a CYY_2 sú podobné, teda $|XX_1|/|YY_2| = |AX|/|CY|$. Podobne dostaneme $|XX_2|/|YY_1| = |DX|/|BY|$ (z podobnosti trojuholníkov DXX_2 a BYY_1).

Teraz pomocou toho, čo sme dostali, vyjadríme podiel

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{|XX_1| \cdot |XX_2|}{|YY_1| \cdot |YY_2|} = \frac{|AX| \cdot |DX|}{|CY| \cdot |BY|}.$$

Z mocnosti bodov X a Y ku kružnici ℓ vyplýva $|AX| \cdot |DX| = |KX| \cdot |XL|$ a $|BY| \cdot$ $\cdot |CY| = |KY| \cdot |LY|$. Preto

$$\frac{|AX| \cdot |DX|}{|CY| \cdot |BY|} = \frac{(a-x) \cdot (a+x)}{(a-y) \cdot (a+y)} = \frac{a^2 - x^2}{a^2 - y^2}.$$

Z toho vidíme, že $x = y$, čo sme chceli dokázať.

3.4 (Podľa *Ondreja Budáča*.) V riešení využijeme nasledovné známe tvrdenie: Pre každé prirodzené číslo n, ktoré nie je štvorec, má *Pellova rovnica* $x^2 - ny^2 = 1$ nekonečne veľa riešení v celých číslach. (Dôkaz tohto tvrdenia možno nájsť v mnohých knižkách venujúcich sa elementárnej teórii čísel.)

Nech (a, b) je najmenšie netriviálne riešenie rovnice $x^2 - py^2 = 1$ (rôzne od $(1, 0)$). Ľahko nahliadneme, že a musí byť nepárne a b párne (pri párnom a by pb^2 muselo dávať zvyšok 3 po delení štyrmi, čo nie je možné). Označme teda $a = 2k + 1$ a $b = 2m$, kde k a m sú prirodzené čísla. Dostávame

$$\begin{aligned} a^2 - 1 &= pb^2, \\ (a-1)(a+1) &= pb^2, \\ 2k(2k+2) &= p(2m)^2, \\ k(k+1) &= pm^2. \end{aligned}$$

Čísla k a $k+1$ sú nesúdeliteľné, preto práve jedno z nich je deliteľné p. V prvočíselnom rozklade čísla m^2 má každé prvočíslo párny exponent a pre každé z týchto prvočísel s párnym exponentom platí, že je ním deliteľné práve jedno z čísel k, $k+1$. Teraz už vieme, že jedno z týchto čísel je štvorcom a druhé je p-násobkom štvorca. Existujú teda dve také prirodzené čísla c a d, že buď $k = c^2$ a $k+1 = pd^2$, alebo $k = pc^2$ a $k+1 = d^2$. V prvom prípade platí $c^2 - pd^2 = -1$. čiže sme dokázali, že existujú prirodzené čísla, ktoré sú riešením rovnice zo zadania. Druhý prípad možno poľahky doviesť k sporu s predpokladom, že riešenie (a, b) rovnice $x^2 - py^2 = 1$ bolo najmenšie.

3.5 Najprv sa zamyslime nad pár drobnosťami, ktoré sa môžu hodiť pri riešení tejto či inej úlohy.

Každá konečná množina reálnych čísel má minimum. Nekonečná množina minimum mať nemusí, dokonca ani vtedy, keď je ohraničená zdola. Podobne to funguje pre maximum.

Ku každej konečnej postupnosti S, podľa ktorej preklápame mnohouholník, existuje inverzná (označme ju S^{-1}); je ňou postupnosť S napísaná odzadu. Pri nekonečnej postupnosti S nemá zmysel hovoriť o inverznej postupnosti.

Do postupnosti nemôžeme „napchať" príliš veľa členov. Predstavme si takýto postup: Vezmime si ľubovoľnú nekonečnú postupnosť S. Ak pokrýva všetky body, tak sme hotoví. Ak nie, tak ju skúsme opraviť. Pre každý nepokrytý bod nájdeme konečnú postupnosť S_i, ktorá ho pokryje. A stačí zobrať postupnosť S_i, S_i^{-1}, S; táto postupnosť už pokrýva aj ten pôvodne nepokrytý bod. Problém tohto postupu je v tom, že funguje len vtedy, keď je nepokrytých bodov konečne veľa. Čo sa stane, ak ich je nekonečne veľa? Skúste sa zamyslieť nad tým, či sa dajú usporiadať do postupnosti všetky reálne čísla.

Poďme sa pozrieť na samotné riešenie úlohy; využijeme niekoľko pekných nápadov *Ondreja Budáča*.

Lema. Pre každý mnohouholník P existuje kladné číslo ε a konečná postupnosť S_ε taká, že keď popreklápame mnohouholník P podľa postupnosti S_ε, tak budú pokryté všetky body, ktoré sú vzdialené nanajvýš ε od obvodu mnohouholníka P.

Dôkaz. Označme hrany mnohouholníka $P = A_1A_2\dots A_n$ za radom číslami $1, 2, \dots, n$. Nech A_i je ľubovoľný vrchol mnohouholníka P. Nech ε_i je kladné číslo menšie než vzdialenosť najbližšieho vrcholu mnohouholníka P od vrcholu A_i. Potom kruh so stredom A_i a polomerom ε_i vieme pokryť nejakou konečnou postupnosťou S_i, stačí $\lceil 2\pi/\varphi \rceil$ preklopení, kde φ je vnútorný uhol mnohouholníka P pri vrchole A_i. Vezmime si ľubovoľnú hranu A_iA_{i+1} mnohouholníka P (uvažujeme $A_{n+1} = A_1$). Zrejme keď mnohouholník preklopíme podľa tejto hrany, bude pokrytý pás so šírkou $\varepsilon_{i,i+1} > 0$, pričom táto šírka je rovná vzdialenosti najbližšieho vrcholu od hrany A_iA_{i+1}. Tento pás sa ťahá pozdĺž celej hrany, jediný problém môže byť v okolí vrcholov A_i, A_{i+1}, ale to nás netrápi, pretože tieto body pokryjeme spomínanými kruhmi. Vezmime teraz najmenšie z čísel $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{1,2}, \dots, \varepsilon_{n,n+1}$ a označme ho ε. Z voľby čísel ε_j vyplýva, že teraz existuje postupnosť S_ε, ktorá pokryje všetky body vzdialené od mnohouholníka P nanajvýš ε. Dostaneme ju tak, že napíšeme za radom postupnosti pre jednotlivé epsilony a za každou z nich aj zodpovedajúcu inverznú postupnosť, aby sme dostali P do pôvodnej polohy; $S = S_1S_1^{-1}S_2S_2^{-1}\dots 1122\dots nn$.

a) Vezmime množinu M bodov takých, že každý z nich sa dá pokryť konečnou postupnosťou. Táto množina je zjednotením množín pokrytých jednotlivými konečnými postupnosťami. Ak existuje v rovine bod, ktorý nepatrí do M, tak existuje aj bod, ktorý tiež nepatrí do M a pritom je vzdialený nanajvýš ε od nejakého vnútorného bodu množiny M. To je však spor s lemou, preto množina M musí obsahovať všetky body roviny. Nech $\{S_1, S_2, \dots\}$ je množina konečných postupností. Potom postupnosť $S = S_1S_1^{-1}S_2S_2^{-1}\dots$ existuje a pokrýva celú rovinu, pretože pokrýva všetky body množiny M. Postupnosť S určite vieme zostrojiť, stačí do nej pridávať postupne všetky konečné postupnosti dĺžky 1, potom postupnosti dĺžky 2,…

Uveďme aj iný dôkaz časti a). Skúsime skonštruovať hľadanú postupnosť S iným spôsobom. Vezmime číslo ε z lemy a pravouhlú sieť mrežových bodov (k, l), kde k, l sú celé čísla, pričom jednotková úsečka (určená bodmi $(0, 0)$ a $(0, 1)$) má veľkosť ε. Túto sieť môžeme zvoliť tak, aby bod $(0, 0)$ ležal vnútri mnohouholníka P. Z lemy vyplýva existencia postupnosti S_ε takej, že po vykonaní tejto postupnosti budú pokryté body $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(-1,0)$. Po pokrytí týchto bodov sa presunieme pomocou časti postupnosti S_ε do bodu $(1,0)$ a celé to zopakujeme. Potom sa posunieme do ďalšieho bodu. Takto pokračujeme ďalej, pričom sa pohybujeme po špirále, aby sme pokryli všetky mrežové body. Z lemy vyplýva, že ak mrežový bod je vnútorným bodom P, tak aj celý kruh s polomerom ε a stredom v tomto mrežovom bode vieme pokryť konečnou postupnosťou, preto sme pokryli celú rovinu, nakoľko je zjednotením týchto kruhov.

b) Nech takáto postupnosť je periodická s periódou p. Potom aj $2p$ je jej perióda, navyše párna, takže existuje taká konečná postupnosť T párnej dĺžky, že po aplikovaní T na mnohouholník P dostaneme s ním zhodný mnohouholník P'. Dvojica mnohouholníkov P, P' určuje zhodné zobrazenie, môže to byť buď otočenie, alebo posunutie (využívame, že postupnosť T má párnu dĺžku, čím vylúčime zloženie osovej súmernosti a otočenia alebo posunutia). V oboch týchto prípadoch je intuitívne jasné, prečo celú rovinu nepokryjeme, korektný dôkaz nechávame na čitateľa. Pomôže uvedomiť si, že pre každú konečnú postupnosť existuje kruh, mimo ktorého sú všetky body nepokryté.

c) Preformulujme úlohu, možno to pomôže. Na dôkaz toho, že pravidelný päťuholník P s polomerom opísanej kružnice dĺžky 1 vieme popreklápať do kruhu k s polomerom $1+\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), stačí dokázať, že jeho stred je od stredu K kruhu k vzdialený menej ako ε. Skúmajme teda stred (ťažisko) R päťuholníka P a skúsme zistiť, kam ho vieme preklápaním presunúť. Označme strany A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1 nášho päťuholníka P číslami 1, 2, 3, 4, 5. Postupnosť 2, 5 nám posunie bod R v smere strany 1 o $a(3+\sqrt{5})/2$ (a je dĺžka strany mnohouholníka). Postupnosť 2, 1, 5, 2, 1, 5 posunie bod R v smere strany 1 o $a(5+\sqrt{5})/2$. Ukážeme, že z týchto dvoch posunutí (označme ich v_1 a v_2) vieme zložiť ľubovoľne malé posunutie. Nech n je ľubovoľné prirodzené číslo. Pre $i = 1, 2, \ldots, n$ položme $m_i = iv_2 - c_iv_1$, pričom číslo $c_i \in \mathbb{N}$ volíme tak, aby platili nerovnosti $0 < m_i < v_1$ (existencia čísla c_i vyplýva z toho, že $v_1 < v_2$ a z iracionálnosti v_2/v_1). Ak pre nejaké $i \neq j$ platí $m_i = m_j$, tak z definície m_i, m_j máme

$$\begin{aligned} iv_2 - c_iv_1 &= jv_2 - c_jv_1, \\ (i-j)v_2 &= (c_i - c_j)v_1, \\ \frac{v_2}{v_1} &= \frac{c_i - c_j}{i - j}, \end{aligned}$$

to však hovorí, že v_2/v_1 je racionálne číslo, čo je spor. Preto všetky m_i sú navzájom rôzne. Rozdeľme interval $\langle 0, v_1 \rangle$ na $n-1$ rovnakých intervalov

$$\left\langle 0, \tfrac{1}{n-1}v_1 \right\rangle, \quad \left\langle \tfrac{1}{n-1}v_1, \tfrac{2}{n-1}v_1 \right\rangle, \quad \ldots, \quad \left\langle \tfrac{n-2}{n-1}v_1, v_1 \right\rangle.$$

Z Dirichletovho princípu vyplýva, že v aspoň jednom z týchto intervalov ležia aspoň dve z čísel m_i; nech sú to bez ujmy na všeobecnosti m_i a m_j. Potom vieme nejakou konečnou postupnosťou posunúť bod R v smere strany 1 o $d = |m_i - m_j| < v_1/(n-1)$. Zrejme pre všetky čísla $\varepsilon > 0$ vieme zvoliť n tak, aby bolo $d < n$.

Analogická úvaha sa dá spraviť aj pre posunutia v smere strany 2 a s týmto už vieme dokončiť dôkaz tvrdenia c), stačí si uvedomiť, že pre ε, ktoré je určené polomerom kruhu k, môžeme spraviť sieť bodov $(r\varepsilon, s\varepsilon)$, kde r a s sú celé čísla, $(0,0) = R$, priamka určená bodmi $(0,0)$ a $(\varepsilon, 0)$ je rovnobežná so stranou 1 a priamka určená bodmi $(0,0)$ a $(0,\varepsilon)$ je rovnobežná so stranou 2. Zrejme pre ľubovoľnú polohu bodu K je tento bod vzdialený nanajvýš ε od nejakého bodu našej siete.

Štvrtá séria

4.1 Pozrime sa na pravidlá hry, ktorú hrajú naše mačiatka a zistime, aké má táto hra zákonitosti. Pre väčšiu názornosť predpokladajme, že mačičky nemajú kocku, ale štvorec. Pokúsime sa nájsť víťaznú stratégiu takejto hry. Potom sa posnažíme zistiť, či neexistuje podobné riešenie pre kocku.

Máme teda štvorcovú sieť, ktorá má rozmery 10×10. Všetky políčka sú na začiatku strieborné. Hráč, ktorý je na ťahu, si zvolí nejaké políčko striebornej farby s najväčším súčtom súradníc. Prefarbí ho na zlato. Okrem toho môže prefarbiť (na zlato, alebo na strieborno) aj niektoré ďalšie políčka (okrem vybraného). Sú to tie, cez ktoré prechádza alebo sa ich dotýka úsečka spájajúca stred vybraného políčka a políčka so súradnicami $(1,1)$. Prehráva hráč, ktorý nemôže potiahnuť.

Všimnime si teraz, ktoré políčka majú rovnaký súčet súradníc. Vidíme, že tieto políčka ležia na úsečke rovnobežnej s jednou uhlopriečkou. Nazvime políčka, ktoré majú súčet súradníc rovný n, *n-tá vrstva*. Dôležité je uvedomiť si, že ak si hráč vyberie z n-tej vrstvy ktorékoľvek políčko, nemôže zmeniť farbu žiadnemu inému políčku v n-tej vrstve.

Pokúsme sa teraz zistiť, pri akej situácii nemá hráč, ktorý je na ťahu, šancu vyhrať. Ak ťahajúci hráč musí vyberať políčko z tretej vrstvy, kde všetky políčka ($(1,2)$, $(2,1)$) sú strieborné, tak prehrá. Predstavme si, že sme hráč, ktorý prehrá. Čím to je, že prehráme? Je to tým, že keď sme na ťahu, tak môžu nastať dve možnosti. Buď existuje aspoň jedno také strieborné políčko, ktoré nemôžeme prefarbiť (preto v tomto ťahu nevyhráme), alebo sú už všetky štvorčeky zlaté a teda nemôžeme potiahnuť (čo znamená, že sme prehrali). Nezabúdajme, že vo vrstve, z ktorej vyberáme políčko, nedokážeme prefarbiť ani viac, ani menej ako jedno políčko. Čo to ale znamená? Jednoducho to, že ak máme pred naším ťahom vždy na výber z párneho počtu políčok, tak sme v nevýhode.

Môžeme preto vyhlásiť nasledujúce tvrdenie. Hráč prehráva, ak pred každým jeho ťahom je počet políčok, z ktorých si vyberá svoj ťah, párny.

Už treba len nájsť vyhrávajúcu stratégiu. Buďme teraz mačičkou, ktorá vyhrá. Jedna možnosť, ako sa dá vyhrať táto hra, je taká, že nášho súpera budeme stále udržiavať v prehrávajúcej pozícii. Inak povedané, budeme hrať tak, aby si pri každom ťahu vyberal z párneho počtu políčok. Ktoré z mačiatok má vhodné podmienky na túto hru? Môže to byť Pa? Vyskúšajme, uvidíme.

Čo môžeme robiť ako Pa? Na začiatku prefarbíme na zlato len jedno políčko $(10,10)$. Pi bude tam, kde ho chceme mať. Po ťahu Pi budeme mať na výber nepárny počet políčok. My vo svojom ťahu prefarbíme políčka tak, že najprv prefarbíme políčko ktoré sme si vybrali (ako nám kážu pravidlá) a potom zmeníme farbu každého políčka, ktorého vrstva obsahuje nepárny počet strieborných políčok.

Vieme, že v každej vrstve môžeme prefarbiť aspoň jedno políčko. To nám zároveň stačí na to, aby sme zaručili párny počet strieborných políčok v každej vrstve. Vidíme, že po našom ťahu bude Pi opäť v prehrávajúcej situácii. Tento postup opakujeme, až kým nevyhráme.

Rovnakým spôsobom môžeme postupovať, ak sa mačiatka hrajú s kockou, ako je uvedené v zadaní. Bude stačiť, ak bude Pa udržiavať Pi v prehrávajúcej pozícii. To tiež dokáže, pretože aj v trojrozmernej verzii hry môže z každej vrstvy prefarbiť aspoň jedno políčko.

4.2 Keďže $n = 1$ a $n = 2$ sú triviálne prípady, začnime s $n = 3$. Určite nemôžeme zvoliť poradie $1, 2, 3$, ale napr. $1, 3, 2$ alebo $3, 1, 2$ a ešte iné vyhovujú. Pre $n = 4$ to môže byť napr. poradie $1, 3, 2, 4$, pre $n = 5$ vyhovuje $1, 5, 3, 2, 4$. Takto pokračujeme. S narastajúcim n je čím ďalej, tým zložitejšie len tak vypísať postupnosť, ktorá by vyhovovala.

Všimnime si napríklad, čo sa stane, keď rozdelíme čísla na párne a nepárne a preusporiadame ich tak, že párne budú v prvej polovici vytváranej postupnosti a nepárne v druhej. Keďže súčet párneho a nepárneho čísla je číslo nepárne, ich priemer nebude prirodzené číslo. Stačí sa nám teda zaoberať len vzťahmi medzi číslami v rámci týchto dvoch skupín. Toto už zaváňa dobrým nápadom (a tak trochu aj indukciou), už to len nejako dotiahnuť do konca.

Tak to s tou indukciou poďme skúsiť. Budeme ju robiť vzhľadom na n, pričom chceme dokázať, že pre ľubovoľné 2^n vieme nájsť vyhovujúcu postupnosť.

1° Pre $n = 0, 1$ vieme čísla od 1 po 2^n správne usporiadať.

2° Predpokladajme platnosť tvrdenia pre $n = k$. Ukážeme teraz platnosť pre $n = k + 1$. Nech $a_1, a_2, \dots, a_{2^k}$ je dobré usporiadanie čísel $1, 2, \dots, 2^k$ a teda pre všetky $p < q < r \leqq n$ platí $(a_p + a_r)/2 \neq a_q$. Zostrojme teraz postupnosti $2a_1, 2a_2, \dots, 2a_{2^k}$ a $(2a_1 - 1), (2a_2 - 1), \dots, (2a_{2^k} - 1)$ a zaoberajme sa postupnosťou $2a_1, 2a_2, \dots, 2a_{2^k}, (2a_1-1), (2a_2-1), \dots, (2a_{2^k}-1)$. Je zrejmé, že obsahuje všetky čísla $1, 2, \dots, 2^{k+1}$. Keďže postupnosť $a_1, a_2, \dots, a_{2^k}$ je dobre usporiadaná, budú aj postupnosti $2a_1, 2a_2, \dots, 2a_{2^k}$ a $(2a_1 - 1), (2a_2 - 1), \dots, (2a_{2^k} - 1)$ dobre usporiadané (ľahko to možno dokázať). Navyše na ľavej strane máme samé párne čísla a na pravej samé nepárne. O nich z predošlej úvahy už vieme svoje, takže môžeme povedať, že takto zostrojená postupnosť čísel $1, 2, \dots, 2^{(k+1)}$ je dobre usporiadaná.

Podarilo sa nám ukázať platnosť tvrdenia pre ľubovoľné $n = 2^k$. Postupnosť dĺžky n menšej ako 2^k dostaneme tak, že vezmeme usporiadanú postupnosť dĺžky 2^k a odstránime z nej prvky, ktoré sú väčšie ako n. Takto vzniknutá postupnosť určite spĺňa podmienky zadania. Z toho vyplýva, že zadaniu úlohy vyhovujú všetky prirodzené čísla n.

4.3 Predpokladajme, že čísla a, b, c spĺňajúce všetky podmienky zo zadania existujú; inak vôbec nemá zmysel hľadať maximum výrazu $M - m$. Súčet nejakých dvoch z čísel a, b, c je 1000. Ktoré dve čísla to sú? Záleží na tom? Keď si pozrieme ostatné podmienky kladené na čísla a, b, c, všimneme si, že sú symetrické vzhľadom na čísla a, b, c – keď vymeníme ľubovoľné z týchto dvoch čísel, nezmení sa nič, inak povedané, je to iba vecou označenia. Preto môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $a+b=1000$. Medzi tými siedmimi prvočíslami je veľa rôznych lineárnych kombinácií čísel a, b, c. Keď budeme skúmať zvyšky týchto čísel po delení nejakým malým prvočíslom, tak v takom veľkom množstve kombinácií sa ľahko stane, že zvyšok 0 sa vyskytne viackrát a to už je spor s podmienkami zo zadania (všetkých sedem uvažovaných prvočísel je rôznych). Takto vieme vylúčiť výskyt párneho prvočísla (t. j. čísla 2) medzi spomínanými siedmimi prvočíslami. Ľahko preskúmame zvyšky týchto čísel po delení tromi; netreba zabudnúť využiť, že $a+b=1000\equiv 1 \pmod 3$. Zistíme, že čísla a, b, c dávajú po delení tromi zvyšky 2, 2, 1 (v tomto poradí). Preto prvočíslo $a+b-c$ je deliteľné tromi, teda je rovné 3. Preto $c=a+b-3=997$. Keďže dvojka sa medzi našimi prvočíslami nenachádza, je minimum $m=3$. Zrejme najväčším spomedzi našich čísel je číslo $M=a+b+c=1000+997=1997$. Preto rozdiel $M-m=1997-3=1994$ pre všetky trojice čísel a, b, c, ktoré spĺňajú podmienky zo zadania. Takže aj maximálna hodnota tohto rozdielu je 1994.

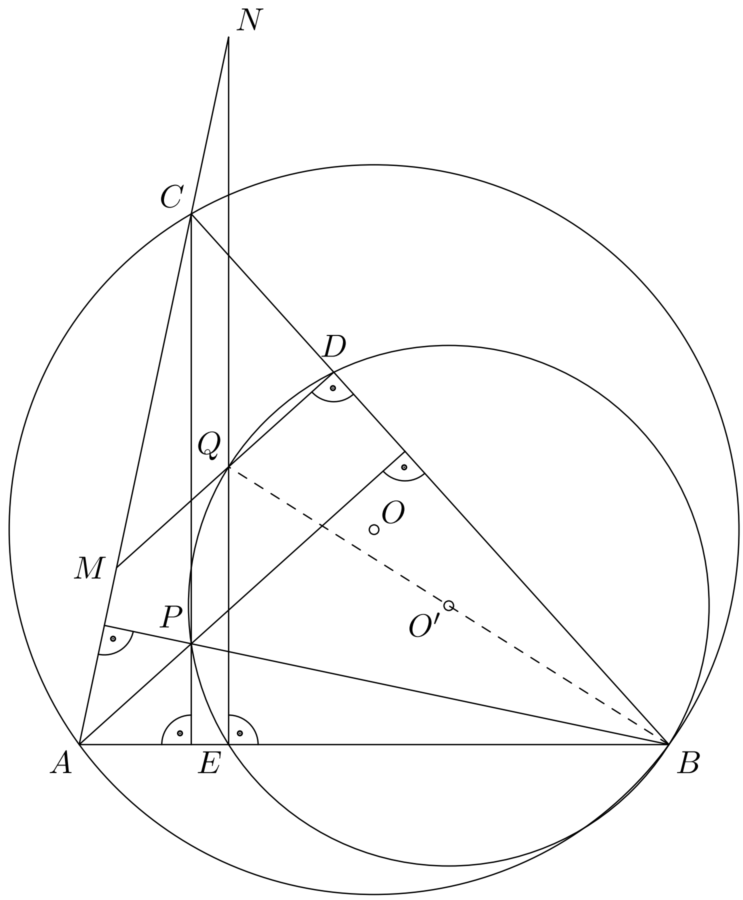
Ešte treba dokázať, že existujú čísla a, b, c, ktoré spĺňajú všetky podmienky. Vyhovuje napríklad trojica 23, 977, 997 (existujú aj iné trojice).

Iné riešenie. Máme nájsť maximum M a minimum m siedmich čísel. Mnohé z týchto čísel vieme porovnať aj bez toho, aby sme vedeli konkrétne hodnoty a, b, c. Keďže všetky podmienky kladené na čísla a, b, c sú symetrické a tieto čísla sú rôzne, môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $a>b>c$. Zrejme

$$b+c-a<a+c-b<a+b-c<a+b+c,$$
$$b+c-a<c<b<a<a+b+c,$$

preto $m=b+c-a$, $M=a+b+c$ a $M-m=2a$. Takže maximalizujeme najväčšie prvočíslo, ktoré sa nachádza medzi číslami a, b, c. Všetky tieto prvočísla sú menšie ako 1000: dve z nich preto, lebo ich súčet je 1000 a tretie preto, lebo keď ho odčítame od súčtu zvyšných dvoch (teda od čísla 1000), dostaneme kladné číslo. Najväčšie prvočíslo menšie ako 1000 je 997, teda sme ukázali, že $M-m\leqq 2\cdot 997=1994$. Čísla a, b, c, ktoré spĺňajú všetky podmienky a dosahuje sa pre ne rovnosť, nájdeme tak, ako v prvom riešení.

4.4 (Podľa *Františky Jasnej.*) Tak ako pri každej geometrickej úlohe, najdôležitejší je pekný veľký obrázok. Označme P ortocentrum trojuholníka ABC, Q priesečník priamok MD a NE (treba si uvedomiť, či a prečo vždy existuje). Vidíme, že uhly QDB a QEB sú pravé a teda body D a E ležia na Tálesovej kružnici nad priemerom QB, čiže jej stred O' je v polovici úsečky QB (obr. 55). Máme ukázať, že P leží na kružnici opísanej trojuholníku BED. Inak povedané, že uhol QPB je pravý, lebo zrejme P je rôzny od B (ak je P totožný s Q, tak niet čo dokazovať, tvrdenie platí triviálne). Vieme, že AC je kolmá na PB, teda stačí ukázať, že priamky PQ a AM sú rovnobežné. Toto už ponechávame ako cvičenie pre čitateľa. Na záver si treba uvedomiť, že celý dôkaz sa dá urobiť pre akúkoľvek polohu úsečky MN okrem prípadu, keď je táto zhodná s úsečkou AC. Vtedy je však dôkaz tvrdenia triviálny.



Obr. 55

Poďme na druhú časť. Zo zadania je zrejmé, že stred AN je aj stredom CM. Označme ho S. Bod O' je stred úsečky QB a bod O ako stred opísanej kružnice je tiež stredom priemeru prechádzajúceho bodom B, nech je to BF. Tvrdenie v zadaní platí práve vtedy, keď S je stred FQ. Hľadajme teda, kde je stred FQ. Z opísanej kružnice je zrejme FA kolmé na AB a FC kolmé na CB.

Keďže O je na osi úsečky AB a O' na osi úsečky EB, stred OO' bude ležať na osi týchto osí. Tiež vidíme, že stred FQ leží na osi priamok FA a NE, čiže na kolmici na AB prechádzajúcej stredom úsečky AE, čo nie je nič iné, než stredná priečka v trojuholníku AEN. Podobne vďaka tomu, že O leží na osi úsečky BC a O' leží na osi úsečky BD, stred FQ leží na osi priamok FC a MD, čiže na strednej priečke trojuholníka CDM. Vidíme, že stred FQ musí byť stredom AN aj stredom CM, čiže je to bod S. Tým je úloha vyriešená.

4.5 Manuálne určme niekoľko prvých členov: $s_1 = 0$, $s_2 = 1$, $s_3 = 2$, $s_4 = 4$, $s_5 = 6$. Teraz skúsme rekurentne vyjadriť s_n za predpokladu $n \geqq 6$. Takéto permutácie sa dajú jednoznačne rozdeliť na 4 disjunktné typy:

$$\begin{aligned}
a_n &= n-1 \quad \text{a zároveň} \quad a_{n-1} = n,\\
a_n &= n-1 \quad \text{a zároveň} \quad a_{n-2} = n,\\
a_n &= n-2 \quad \text{a zároveň} \quad a_{n-2} = n,\\
a_n &= n-2 \quad \text{a zároveň} \quad a_{n-1} = n.
\end{aligned}$$

Počet permutácií prvého typu je zrejme s_{n-2}, lebo každá takáto permutácia vznikne z permutácie prvých $n-2$ čísel pridaním posledných dvoch členov n, $n-1$.

Pre permutácie tretieho typu musí okrem už uvedeného jednoznačne platiť aj

$$a_{n-1} = n-3, \quad a_{n-3} = n-1.$$

Čiže týchto bude s_{n-4}.

Poľahky nahliadneme, že permutácií druhého typu bude rovnako veľa ako všetkých vyhovujúcich permutácií veľkosti $n-1$, pre ktoré platí $a_{n-2} = n-1$.

Analogicky permutácií štvrtého typu bude rovnako veľa ako všetkých vyhovujúcich permutácií veľkosti $n-1$, pre ktoré platí $a_{n-1} = n-2$.

Porovnajme súčet S takto prepísaných permutácií druhého a tretieho typu s s_{n-1}. Každá permutácia dĺžky $n-1$ prvého typu je v S zarátaná dvakrát. Podľa toho, čo sme už spomenuli vyššie, je týchto s_{n-3}. Každá permutácia dĺžky $n-1$ tretieho typu nie je v S zarátaná ani raz. Týchto je s_{n-5}. A nakoniec všetky permutácie dĺžky $n-1$ druhého a štvrtého typu sú v S zarátané práve raz. Preto

$$S = s_{n-1} + s_{n-3} - s_{n-5}.$$

Pre s_n potom dostaneme úplný rekurentný vzťah

$$\begin{aligned}
s_n &= s_{n-2} + s_{n-4} + S,\\
s_n &= s_{n-1} + s_{n-2} + s_{n-3} + s_{n-4} - s_{n-5}.
\end{aligned}$$

Jednoducho možno dokázať, že postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca. Vďaka tejto vlastnosti pre ľubovoľné $n > 6$ platí

$$\begin{gathered}
2s_{n-5} > s_{n-6},\\
s_{n-1} + s_{n-2} + s_{n-3} + s_{n-4} + s_{n-5} - s_{n-6} > s_{n-1} + s_{n-2} + s_{n-3} + s_{n-4} - s_{n-5},\\
s_{n-1} + s_{n-1} > s_n,\\
8s_{n-1} > 4s_n.
\end{gathered}$$

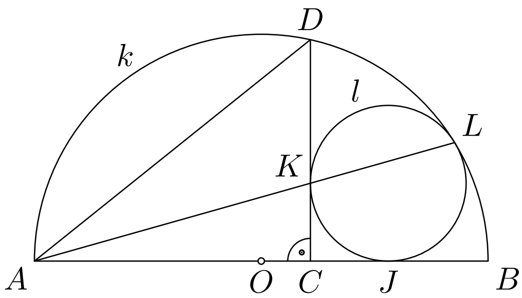
Teraz už treba dokázať iba $4s_{n-1} > 7s_{n-1}$ pre $n > 6$. Vyrátame s_7 a s_8 pomocou rekurentného vzťahu a overíme platnosť tohto tvrdenia pre $n = 7, 8$. Pre $n \geqq 9$ postupujeme nasledovne. Z rastúcosti máme

$$\begin{aligned}
s_{n-4} - s_{n-5} &> 0,\\
s_{n-1} + s_{n-2} + s_{n-3} + s_{n-4} - s_{n-5} &> s_{n-1} + s_{n-2} + s_{n-3},\\
s_n &> s_{n-1} + s_{n-2} + s_{n-3} >\\
&> s_{n-1} + \tfrac{1}{2} \cdot s_{n-1} + \tfrac{1}{4} \cdot s_{n-1} = \tfrac{7}{4} \cdot s_{n-1},\\
4s_n &> 7s_{n-1},
\end{aligned}$$

pričom sme využili platnosť už dokázaného $s_{n-3} > 1/2 \cdot s_{n-2}$. Dokázali sme teda obe nerovnosti v zadaní.

Piata séria

5.1 a) (Podľa *Jakuba Závodného.*) Označme ℓ kružnicu vpísanú do útvaru CBD a K, L po rade jej dotykové body s úsečkou CD a kružnicou k (obr. 56). Body L, K a A ležia na



Obr. 56

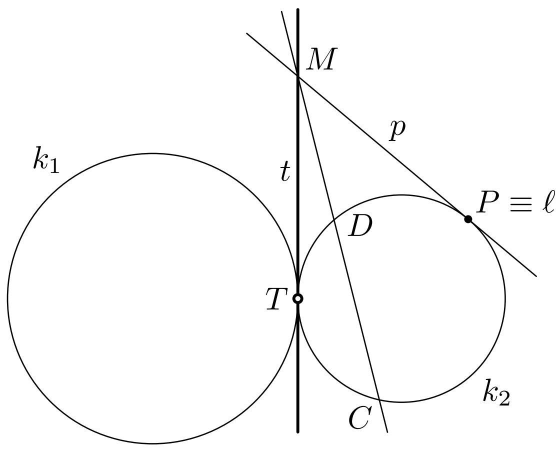
jednej priamke, lebo kružnice k a ℓ sú rovnoľahlé v rovnoľahlosti so stredom L (bod K sa v tejto rovnoľahlosti zobrazí do bodu ležiaceho na kružnici k, pričom dotyčnica v tomto bode bude rovnobežná s dotyčnicou CD kružnice ℓ, preto tento bod na k je A).

Z Tálesovej vety vyplýva, že $|\sphericalangle ALB| = |\sphericalangle KLB| = 90°$. Keďže aj uhol KCB je pravý, štvoruholník $KCBL$ je tetivový. Z mocnosti bodu A ku kružnici jemu opísanej vieme, že $|AC| \cdot |AB| = |AK| \cdot |AL|$. Z mocnosti bodu A ku ℓ vyplýva, že $|AK| \cdot |AL| = |AJ|^2$. Čiže $|AJ|^2 = |AC| \cdot |AB|$. Trojuholník ABD je pravouhlý, preto preň platí Euklidova veta o odvesne, ktorá hovorí, že $|AD|^2 = |AC| \cdot |AB|$. Takže $|AJ|^2 = |AD|^2$ a keďže $|AJ|$ a $|AD|$ sú kladné čísla, práve sme dokázali rovnosť $|AD| = |AJ|$.

b) Táto časť už bola jednoduchšia (hlavne pre tých, ktorí pri tom využili časť a)). Označme $|\sphericalangle DAB| = 2\alpha$. Už sme dokázali $|AJ| = |AD|$, teda $|\sphericalangle AJD| = |\sphericalangle ADJ| = 90° - \alpha$. Trojuholník CDJ je pravouhlý, preto $|\sphericalangle CDJ| = \alpha$. Uhol $|\sphericalangle ADB|$ je pravý, teda $|\sphericalangle JDB| = 90° - |\sphericalangle ADJ| = 90° - (90° - \alpha) = \alpha = |\sphericalangle CDJ|$. Priamka DJ je osou uhla CDB.

Poznámka. Samozrejme, prvú časť možno vyriešiť aj bez mocnosti. Stačí použiť dostatočne veľa Pytagorových viet na správne trojuholníky a niekedy elegantne, inokedy zložitejšie sa príklad dá dopočítať. Vtedy však treba dať pozor na diskusiu, pretože poradie bodov C, O, J môže byť rôzne.

5.2 Keď nakreslíme viacero obrázkov, nadobudneme pevné presvedčenie, že hľadané body M ležia na spoločnej dotyčnici kružníc k_1 a k_2 vedenej bodom T (označme ju t). Zamyslime sa preto, ako by sa to dalo dokázať. Označme p dotyčnicu ku k_2 vedenú bodom P (obr. 57). Chceme vlastne dokázať, že priamky t, CD a p sa pretínajú v jednom bode (potom totiž nutne priesečník CD a p leží na t). Dobre vieme, že t je chordálou



Obr. 57

kružníc k_1 a k_2. Ak nájdeme tretiu kružnicu ℓ takú, že CD je chordálou kružníc k_1 a ℓ a p je chordálou kružníc k_2 a ℓ, budeme hotoví. Vieme totiž, že tri chordály troch kružníc (ku každej dvojici kružníc jedna chordála) sa pretínajú v jednom bode.(Dôkaz tohto tvrdenia je veľmi jednoduchý. Stačí si uvedomiť, že chordála dvoch kružníc je množina bodov majúcich k nim rovnakú mocnosť.)

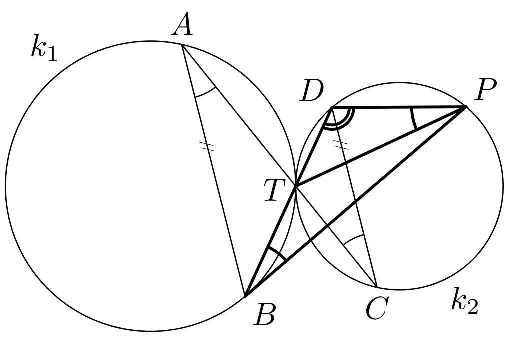
Ukážeme, že vhodnou „kružnicou“ ℓ je bod P (chápaný ako kružnica zdegenerovaná do jedného bodu). I keď to nie je klasická kružnica, všetky veci s mocnosťou fungujú. Mocnosť bodu X ku tejto „kružnici“ bude jednoducho číslo $|XP|^2$. Ľahko sa možno presvedčiť, že „chordálou“ takejto zdegenerovanej kružnice a inej klasickej kružnice je tiež priamka.

Zrejme p je chordálou kružnice k_2 a „kružnice“ P (stačí si spomenúť, že mocnosť sa počíta ako druhá mocnina vzdialenosti od dotykového bodu).

Zostáva teda overiť, že CD je chordálou kružnice k_1 a „kružnice“ P. Na to treba ukázať, že C aj D má ku kružnici k_1 rovnakú mocnosť ako ku „kružnici“ P, t. j. stačí odvodiť rovnosti

$$|CT| \cdot |CA| = |CP|^2 \qquad \text{a} \qquad |DT| \cdot |DB| = |PD|^2. \tag{1}$$

Začnime konečne úlohu riešiť. Uhly DPT a DCT sú obvodové k tetive DT kružnice k_2,



Obr. 58

sú preto rovnako veľké. Kružnice k_1 a k_2 sú rovnoľahlé so stredom rovnoľahlosti T. V tejto rovnoľahlosti sa trojuholník BAT zobrazí na trojuholník DCT, uhly DCT a BAT sú teda rovnako veľké. Uhol BAT je obvodový a uhol DBP je úsekový k tetive TB kružnice k_1, a tak aj tieto dva uhly sú rovnako veľké. Spojením predchádzajúcich troch úvah dostávame, že uhly DPT a DBP sú rovnako veľké (obr. 58). Trojuholníky DPT a DBP majú okrem týchto dvoch rovnako veľkých uhlov ešte spoločný uhol pri vrchole D, sú teda podobné. Preto

$$\frac{|PD|}{|DB|} = \frac{|DT|}{|PD|},$$

odkiaľ prenásobením dostaneme druhú rovnosť z (1). Zrejme prvú rovnosť z (1) dostaneme zopakovaním podobného postupu pre trojuholníky CPT a CAP.

Tým sme dokázali, že M leží na priamke t pre ľubovoľnú dovolenú polohu bodu P. Určite $M \neq T$, lebo cez T prechádza p len pre $P = T$ a taká poloha bodu P je v zadaní zakázaná. Každým iným bodom M' priamky t vieme viesť dotyčnicu p ku kružnici k_2 (rôznu od t), ktorá sa jej dotkne v bode P neležiacom na spojnici stredov kružníc. K tomuto bodu prislúcha nejaký bod M na priamke p a už sme dokázali, že musí ležať na t. Nutne teda $M' = M$ a preto M' do hľadanej množiny bodov patrí.

Záver. Hľadanou množinou bodov je spoločná vnútorná dotyčnica kružníc k_1 a k_2 bez bodu T.

5.3 V riešení budeme pod $f^k(n)$ rozumieť výraz

$$\underbrace{f(f(\dots f}_{k\text{-krát}}(n)\dots))$$

(špeciálne $f^0(n) = n$).

Predpokladajme, že f spĺňa podmienky zadania. Najprv dokážeme matematickou indukciou pomocné tvrdenie. Ak $f(n) < n$, tak pre všetky $k \in \mathbb{N}$ je $f^k(n) < n$.

1° Pre $k = 1$ tvrdenie platí triviálne z predpokladu tvrdenia.

2° Predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky prirodzené $l < k$, pričom $k \geqq 2$. Z nerovnosti zo zadania máme

$$f(f(f^{k-2}(n))) \leqq \frac{f^{k-2}(n) + f^{k-1}(n)}{2}.$$

Ďalej podľa indukčného predpokladu platí

$$\frac{f^{k-2}(n) + f^{k-1}(n)}{2} < \frac{n+n}{2},$$

preto aj $f^k(n) < n$.

Teraz dokážeme dve nerovnosti, z ktorých nutne vyplynie, aká funkcia musí f byť.

1. Pre všetky prirodzené n je $f(n) \geqq n$.

Dôkaz. Nech existuje $n \in \mathbb{N}$ také, že $f(n) < n$. Podľa nášho pomocného tvrdenia vieme, že všetky hodnoty, ktoré môžeme z n získať opakovaným použitím f, budú menšie ako n. Tiež vieme, že čísel menších ako n je konečne veľa (konkrétne presne n). To ale znamená (podľa Dirichletovho princípu), že existujú také čísla k, l (pričom $k < l$), že $f^k(n) = f^l(n)$. To je ale spor s injektívnosťou funkcie f, lebo $f^{l-k}(n) \neq n$.

2. Pre všetky prirodzené n je $f(n) \leqq n$.

Dôkaz. Nech existuje $n \in \mathbb{N}$ také, že $f(n) > n$. Potom z podmienky zo zadania dostávame

$$f(f(n)) \leqq \frac{f(n)+n}{2} < \frac{f(n)+f(n)}{2} = f(n).$$

Ďalej využitím predošlého tvrdenia dostávame

$$f(f(n)) \geqq f(n).$$

Má teda zároveň platiť $f(f(n)) < f(n)$ aj $f(f(n)) \geqq f(n)$, čo je zjavne spor.

Aby boli splnené obe tvrdenia, musí platiť $f(n) = n$ pre každé prirodzené n. Takto definovaná funkcia je určite prostá a tiež pre ňu platí nerovnosť zo zadania.

Odpoveď. Jedinou funkciou spĺňajúcou podmienky zadania je $f(n) = n$.

5.4 (Podľa *Ondreja Budáča.*) Najprv sa dohodnime, že slovo *podmnožina* bude označovať množinu niektorých päťdesiatich množín A_i zo zadania. Samotné tvrdenie dokážeme nepriamo. Nech je daná n-prvková množina X s podmnožinami $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_{101}$, z ktorých žiadne tri nemajú spoločný prvok. Každý prvok množiny X sa teda nenachádza v žiadnej, nachádza sa práve v jednej alebo v práve dvoch podmnožinách A_i, označme počty takýchto prvkov postupne a, b, c. Žiadny prvok sa nemôže nachádzať v troch alebo viacerých podmnožinách A_i, bol by to spor s predpokladom. Máme teda $n = a + b + c$; spočítajme teraz súčet počtov prvkov všetkých *podmnožín.* Tento súčet rozdelíme na príspevky, ktorými prispievajú prvky „typov“ a, b a c. Zrejme prvky typu a neprispievajú ničím. Každý prvok typu b je práve v jednej množine A_i, musíme ho teda započítať toľkokrát, koľko existuje *podmnožín*, ktoré obsahujú danú množinu, pretože toľko je aj zjednotení. Prvky typu c sa nachádzajú práve v dvoch množinách, rozdeľme teda *podmnožiny* obsahujúce niektorý z prvkov typu c na dve skupiny: tie, ktoré obsahujú obe množiny, v ktorých sa daný prvok nachádza, a tie, ktoré obsahujú práve jednu z týchto množín. Získali sme súčet počtov prvkov všetkých *podmnožín*, avšak tento súčet nie je menší než súčet počtov prvkov všetkých zjednotení päťdesiatich množín A_i. Keď tento výraz predelíme počtom zjednotení, dostaneme horný odhad priemerného počtu prvkov v takomto zjednotení. Teda

$$\frac{\binom{100}{49}b + \left[\binom{99}{48} + 2\binom{99}{49}\right] c}{\binom{101}{50}} = \frac{50 \cdot b}{101} + \frac{151 \cdot c}{202} < \tfrac{50}{51}(a+b+c) = \tfrac{50}{51}n.$$

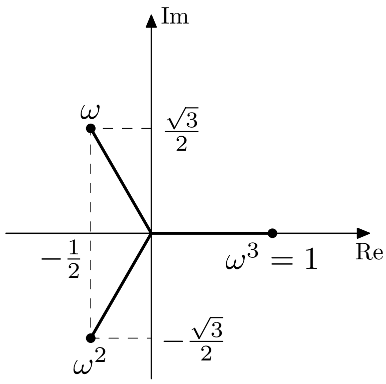
Z toho sa dá ľahko ukázať, že aspoň jedno zjednotenie obsahuje menej ako $50n/51$ prvkov, čo zakončuje dôkaz.

Poznámka. Všimnime si, že sme dokázali o niečo silnejšie tvrdenie, pretože sme využili slabší predpoklad „… obsahuje aspoň $50n/51$ prvkov“. Mimochodom, na tomto riešení sa tiež ukazuje, aké výrazné nedostatky má prirodzený jazyk pri popisovaní matematických javov a zákonitostí.

5.5 Porozmýšľajme, ako by sa výraz zo zadania dal vyjadriť bez použitia sumy. Označme $\sqrt[3]{3n-1} = q$. Všetky sčítance danej sumy sa vyskytujú aj v binomickom rozvoji výrazu $(1+q)^{3m}$. Problém je, že v tomto rozvoji sa vyskytujú aj iné (dokonca iracionálne) sčítance. Radi by sme sa ich zbavili, t. j. chceme z binomického rozvoja ponechať len každý tretí sčítanec. Keby sme chceli ponechať len každý druhý, stačilo by namiesto výrazu $(1+q)^{3m}$ použiť dlhší výraz $(1+q)^{3m} + (1-q)^{3m}$. Podobne si pomôžeme aj v našej situácii. Potrebujeme však na to komplexné čísla. Medzi nimi existuje číslo ω také, že

$$\omega^3 = 1 \qquad \text{a} \qquad 1 + \omega + \omega^2 = 0,$$

konkrétne je takým $\omega = -1/2 + (\sqrt{3}/2)i$ (dobre to vidieť na obr. 59). Vďaka nemu



Obr. 59

môžeme sumu zo zadania (presnejšie jej trojnásobok) prepísať nasledovne:

$$3\sum_{k=0}^{m} \binom{3m}{3k} (3n-1)^k = (1+q)^{3m} + (1+\omega q)^{3m} + (1+\omega^2 q)^{3m}. \tag{1}$$

Na prvý pohľad to vyzerá, že sme si veľmi nepomohli, lebo o deliteľoch pravej strany v (1) nevieme priamo niečo povedať. Uvedomme si najprv dôležitú vec. Pravá strana v (1) je súčtom $3m$-tých mocnín koreňov polynómu

$$p(x) = (x-1)^3 - q^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - (3n-1) = x^3 - 3x^2 + 3x - 3n.$$

Označme pre ďalšie úvahy uvedené korene x_1, x_2, x_3 a položme $s_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$. Podľa (1) vidíme, že našou úlohou je dokázať, že s_{3m} je pre nepárne m deliteľné číslom $3^{m+1}n$. Ľahko možno vypočítať hodnotu s_k pre malé k. Dostávame

$$s_0 = 3, \qquad s_1 = 3, \qquad s_2 = 3, \qquad s_3 = 9n, \qquad \dots \tag{2}$$

Skúsme pre jednoduchšie vyjadrenie ďalších hodnôt s_k nájsť nejaký rekurentný vzťah. Po chvíľke hrania sa dostaneme

$$\begin{aligned} s_{k+3} &= x_1^{k+3} + x_2^{k+3} + x_3^{k+3} = \\ &= (x_1^{k+2} + x_2^{k+2} + x_3^{k+2})(x_1 + x_2 + x_3) - \\ &\quad - (x_1^{k+1} + x_2^{k+1} + x_3^{k+1})(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + (x_1^k + x_2^k + x_3^k)x_1x_2x_3 = \\ &= 3s_{k+2} - 3s_{k+1} + 3ns_k. \end{aligned}$$

Pri poslednej úprave sme využili Vietove vzťahy. (Všimnime si peknú vec – koeficienty v rekurentnom vzťahu sú rovnaké ako koeficienty polynómu p, len s opačnými znamienkami. Podobne by nám to vyšlo aj pri polynóme vyššieho stupňa s väčším počtom koreňov. Je dobré do budúcnosti si to zapamätať.)

Tvrdenie už teraz veľmi jednoducho dokážeme indukciou. Z rekurentného vzťahu vidíme, že ak sú s_k, s_{k+1} a s_{k+2} deliteľné číslom 3^r, je s_{k+3} deliteľné číslom 3^{r+1}. Odtiaľ je už iba krôčik k tomu, že s_{3m} je deliteľné číslom 3^{m+1} (stačí použiť (2)). Všeobecne platí

$$3^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor + 1} \mid s_k. \tag{3}$$

Dokázať, že pre nepárne m dokonca $3^{m+1}n$ delí s_{3m}, je len o málo náročnejšie. Pomocou odvodeného rekurentného vzťahu možno totiž poľahky dostať nový rekurentný vzťah

$$s_{k+7} = 63ns_{k+2} + 9(n^2 - 3n - 3)s_{k+1} + 27n(2n + 1)s_k,$$

z ktorého vidieť (využijúc (3)), že ak je s_{3m} deliteľné číslom $3^{m+1}n$, tak s_{3m+6} je deliteľné číslom $3^{m+3}n$. Môžeme teda rozbehnúť indukciu, ktorej prvý krok máme v (2). Tým je úloha vyriešená.

Šiesta séria

6.1 (Podľa *Františka Simančíka.*) Ako sa rieši funkcionálna rovnica? Keďže rovnosť zo zadania má platiť pre všetky možné hodnoty x, y, z, na začiatok vyskúšame niekoľko špeciálnych kombinácií x, y, z. Už len treba prísť na to, čo nám pomôže najviac.

Dosaďme za (x, y, z) hodnoty $(1, 0, 0)$.

$$f(0) = f(0) + f(0), \qquad \text{čiže} \qquad f(0) = 0.$$

Funkcia $f(x) = 0$ (pre všetky reálne čísla x) je zjavne riešením našej funkcionálnej rovnice.

Nech existuje také k, že $f(k) \neq 0$. Dosaďme trojicu $(x, 0, k)$, dostaneme

$$f(kf(x)) = xf(k). \tag{1}$$

Môžeme si všimnúť, že ak pre nejaké a, b platí $f(a) = f(b)$, potom $f(kf(a)) = f(kf(b))$ a teda podľa rovnosti (1) $af(k) = bf(k)$. To je ekvivalentné s rovnosťou $a = b$, teda hľadaná funkcia je prostá.

Do (1) dosaďme $x = 1$ a dostávame $f(kf(1)) = 1 \cdot f(k)$. Odtiaľ $kf(1) = k$, čo platí len vtedy, keď $f(1) = 1$ (keďže k je nenulové).

Do rovnice zo zadania dosaďme $(x, 0, 1)$. Dostaneme

$$f(f(x)) = f(0) + xf(1) = x. \tag{2}$$

Nech $y = 0$, $x = f(z)$, potom $f(zf(f(z))) = f(z^2) = f(z)^2$, čiže $f(x) > 0$ pre všetky $x > 0$. Dosadením $x = 1$ do rovnice zo zadania získame

$$f(y + z) = f(y) + f(z). \tag{3}$$

Dosaďme teraz $z = -y$. Úpravou získame

$$\begin{aligned} f(y - y) &= f(y) + f(-y), \\ -f(y) &= f(-y). \end{aligned}$$

Vidíme, že naša funkcia je nepárna. Už vieme, že $f(x) > 0$ pre $x > 0$, teda bude platiť $f(x) < 0$ pre $x < 0$. Už sa blížime k záveru. Čím ďalej, tým viac sa funkcia začína podobať na funkciu $f(x) = x$. Už to len celé dotiahnuť.

Predpokladajme, že existuje také k, že

$$f(k) = k + l, \qquad \text{pričom } l \neq 0. \tag{4}$$

Potom postupným použitím (2), (4), (3) a (4) máme

$$k = f(f(k)) = f(k + l) = f(k) + f(l) = k + l + f(l).$$

Teda existuje l také, že $f(l)$ má opačné znamienko ako l a to je v spore s tým, čo vieme o funkcii f. Tým sme ukázali, že $f(x) = x$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$. Táto funkcia je naozaj riešením našej funkcionálnej rovnice a spolu s $f(x) = 0$ sú to jediné riešenia.

6.2 Obe neznáme v rovnici sú umocnené na tretiu. Pokúsme sa znížiť exponent aspoň pri jednej neznámej – uvidíme, či nám to nejako pomôže. Dosiahneme to substitúciou $x = y + z$. Dostaneme tak novú rovnicu s neznámymi y a z. Tá bude mať nekonečne veľa riešení v celých číslach práve vtedy, keď ich bude mať aj pôvodná rovnica (premyslite si, prečo). Úpravami novej rovnice dostávame

$$\begin{aligned} (y + z)^3 - y^3 &= p(y + z)y + q, \\ 3y^2z + 3yz^2 + z^3 &= py^2 + pyz + q, \\ (3z - p)y^2 + (3z^2 - pz)y + (z^3 - q) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Máme tak vzhľadom na neznámu y nanajvýš kvadratickú rovnicu (1). Snažme sa zistiť, pre ktoré hodnoty neznámej z bude mať táto rovnica riešenie vzhľadom na neznámu y. Pre hodnotu $z = p/3$ nadobudne rovnica tvar

$$0 \cdot y^2 + 0 \cdot y + (p/3)^3 - q = 0,$$

t. j. bude mať nekonečne veľa riešení v prípade, že $(p/3)^3 = q$ a žiadne riešenie inak.

Zaoberajme sa ďalej len hodnotou $z \neq p/3$. Vtedy je v rovnici (1) koeficient pri y^2 nenulový, takže riešenie bude môcť existovať len v prípade, že diskriminant bude nezáporný (samozrejme, celočíselné riešenie nemusí existovať ani pri nezápornom diskriminante, je to však nutná podmienka). Pre diskriminant D rovnice (1) máme

$$D = (3z^2 - pz)^2 - 4(3z - p)(z^3 - q) = -3z^4 - 2pz^3 + p^2z^2 + 12qz - 4pq.$$

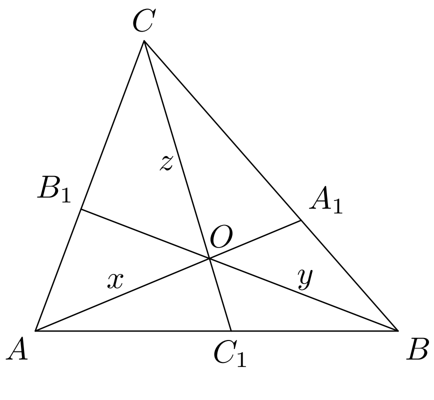
Teda D je vzhľadom na neznámu z polynóm štvrtého stupňa, pričom pri člene z^4 je záporný koeficient. Z toho priamo vyplýva, že D je nezáporný len pre konečne veľa celočíselných hodnôt z. (Stačí si spomenúť na to, ako vyzerá graf polynomickej funkcie. Samozrejme, presný dôkaz by bolo treba urobiť detailnejšie.)

Tým sme už úlohu vyriešili. Zhrňme si na záver, čo sme odvodili. V prípade, že $(p/3)^3 \neq q$, pre $z = p/3$ (bez ohľadu na to, či $p/3$ je celé číslo alebo nie) nemá rovnica (1) žiadne riešenie a pre $z \neq p/3$ je len konečne veľa celočíselných hodnôt z, pre ktoré môže mať rovnica (1) riešenie. Zároveň pre každé $z \neq p/3$ môže mať rovnica (1) s neznámou y najviac dve riešenia (je to kvadratická rovnica). Takže ak $(p/3)^3 \neq q$, existuje len konečne veľa celočíselných riešení substituovanej (a aj pôvodnej) rovnice.

V prípade, že $(p/3)^3 = q$, má rovnica (1) nekonečne veľa riešení (y, z), pričom y je ľubovoľné celé číslo a $z = p/3$ (keďže p, q sú celé a $(p/3)^3 = q$, tak aj $p/3$ je celé a teda aj z je celé). Netvrdíme, že toto sú všetky riešenia danej rovnice, stačí, že ich je nekonečne veľa. Pre pôvodnú rovnicu to znamená, že má nekonečne veľa riešení tvaru $x = y + p/3$, kde y je ľubovoľné celé číslo (presvedčte sa skúškou, že je to tak).

Hľadanými dvojicami parametrov sú preto také celočíselné dvojice (p, q), ktoré spĺňajú $(p/3)^3 = q$, t. j. dvojice $(3k, k^3)$, kde k je ľubovoľné celé číslo.

6.3 Nech a, b, c sú dĺžky strán trojuholníka ABC (ako zvyčajne) a S je jeho obsah. Označme $|AO| = x$, $|BO| = y$, $|CO| = z$. Ľahko možno odvodiť (obr. 60), že $|OA_1|/|AA_1| = S_{BCO}/S$ a podobné vzťahy platia pre ďalšie zlomky v zadanej nerovnosti. Ak navyše využijeme známy vzťah $R = abc/(4S)$ a rovnakým spôsobom



Obr. 60

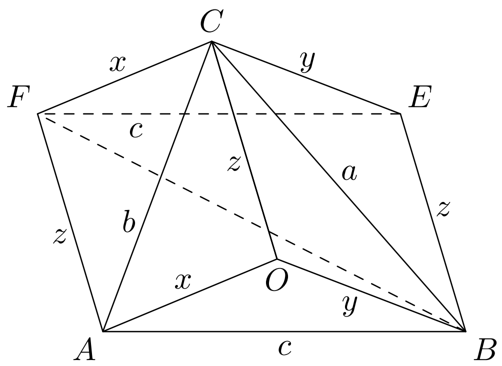
vyjadríme R_1, R_2, R_3, dokazovaná nerovnosť nadobudne tvar

$$\frac{S_{BCO}}{S} \cdot \frac{ayz}{4S_{BCO}} + \frac{S_{CAO}}{S} \cdot \frac{bzx}{4S_{CAO}} + \frac{S_{ABO}}{S} \cdot \frac{cxy}{4S_{ABO}} \geq \frac{abc}{4S}.$$

Zadaná nerovnosť je teda ekvivalentná s nerovnosťou

$$ayz + bzx + cxy \geqq abc. \tag{1}$$

Dokreslime k stranám AC a BC trojuholníky BCE a ACF tak, aby $BOCE$ a $AOCF$ boli rovnobežníky (obr. 61). Keďže $AF \parallel OC \parallel BE$ a $|AF| = |OC| = |BE|$, je aj $ABEF$



Obr. 61

rovnobežník a $|EF| = c$. Z Ptolemaiovej nerovnosti v štvoruholníku $ABCF$ vyplýva

$$cx + az \geqq b|BF|. \tag{2}$$

Podľa Ptolemaiovej nerovnosti pre štvoruholník $BECF$ zasa

$$xz + y|BF| \geqq ac. \tag{3}$$

Vynásobením nerovnosti (2) kladnou dĺžkou y, nerovnosti (3) kladnou dĺžkou b a sčítaním výsledných dvoch nerovností dostaneme

$$cxy + azy + bxz + by|BF| \geqq by|BF| + abc,$$

čo je ekvivalentné s nerovnosťou (1). Tým je úloha vyriešená.

6.4 Dokazovanú nerovnosť môžeme prepísať do tvaru

$$-6a(a^2 - 2b) \leqq -27c + 10(a^2 - 2b)^{3/2}. \tag{1}$$

Označme d, e, f korene polynómu $P(x)$. Potom pomocou Vietových vzťahov

$$\begin{aligned} a &= -(d + e + f),\\ b &= de + ef + df,\\ c &= -def \end{aligned}$$

získa nerovnosť podobu

$$6(d + e + f)(d^2 + e^2 + f^2) \leqq 27def + 10(d^2 + e^2 + f^2)^{3/2}. \tag{2}$$

Ak $d^2+e^2+f^2=0$, tak (2) zjavne platí, a navyše v nej nastáva rovnosť. Inak môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $|d| \leqq |e| \leqq |f|$ a keďže v nerovnosti sa nevyskytuje žiaden absolútny člen a všetky členy sú stupňa 3, nezáleží na veľkosti hodnôt d, e, f, ale iba na ich vzájomných pomeroch, teda ich môžeme znormovať prijatím predpokladu $d^2+e^2+f^2=9$. Tým sa nerovnosť (2) zmení na

$$2(d+e+f)-def \leqq 10. \tag{3}$$

Z našich predpokladov a použitím AG-nerovnosti potom dostávame

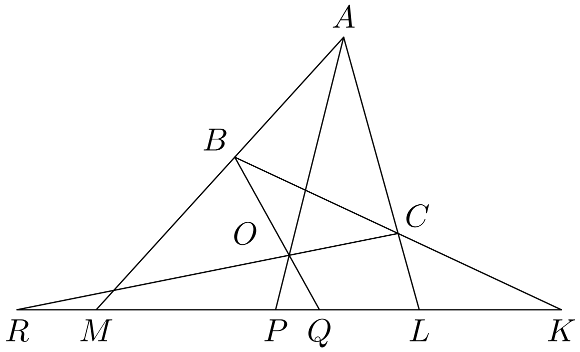
$$\begin{aligned}
[2(d+e+f)-def]^2 &= [2(d+e)+f(2-de)]^2 \leqq \\
&\leqq [(d+e)^2+f^2][4+(2-de)^2] = \qquad (4)\\
&= (9-2de)[8-4de+(de)^2] = \\
&= 2(de)^3+(de)^2-20de+72 = \\
&= (de+2)^2(2de-7)+100. \qquad (5)
\end{aligned}$$

Z uvedených predpokladov ale vyplýva, že $f^2 \geqq 3$. Preto $2de \leqq d^2+e^2 = 9-f^2 \leqq 6$, teda $(2de-7)<0$ a $(de+2)^2 \geqq 0$, čiže dostávame $(2(d+e+f)-def)^2 \leqq 100$, čím je dokázané (3) a tým aj celá nerovnosť.

Pozrime sa teraz na to, kedy nastávajú rovnosti. V (4) nastane práve vtedy, keď $(d+e)(2-de)=2f$ a (5) sa rovná 100 práve vtedy, keď $de+2=0$. Aby platila rovnosť v (3), musí navyše platiť $2(d+e+f)-def \geqq 0$. Tieto podmienky spolu s našimi pôvodnými predpokladmi nám určujú $d=-1$ a $e=f=2$. Takže keď upustíme od predpokladov $d^2+e^2+f^2=9$ a $|d| \leqq |e| \leqq |f|$, dostaneme, že v (2) nastáva rovnosť práve vtedy, keď (d,e,f) je permutáciou $(-t,2t,2t)$ pre nejaké $t \in \mathbb{R}_0^+$ a v (1) teda nastáva rovnosť práve vtedy, keď $a=-3t$, $b=0$ a $c=4t^3$, opäť pre nejaké $t \in \mathbb{R}_0^+$.

6.5 Zápis (XYZ) v riešení znamená kružnicu opísanú trojuholníku XYZ. Pre objekt X (bod, priamku, kružnicu) nech je X' jeho obraz v kružnicovej inverzii (popísanej v ďalšom texte). (To neznamená, že obraz nebudeme značiť aj inak, ako uvidíme ďalej.) Zápis $\overline{AB}$ je orientovaná veľkosť úsečky AB.

Prečítame si zadanie a skúsime si nakresliť obrázok. Na prvý pokus to akosi nejde a nakoniec usúdime, že sa s takouto úlohou skoro nič užitočné robiť nedá. Máme štyri kružnice a tri priamky prechádzajúce bodom O. Skúsme úlohu pretransformovať použitím kružnicovej inverzie so stredom v bode O. Tento bod sa síce zobrazí do nevlastného bodu roviny, ale ponechajme označenie O tomu pôvodnému (ostatné body A, B, C, …, R sú obrazy). Priamky AO, BO, CO sú samodružné. Obrazom kružnice k je priamka k', na ktorej ležia body K, L, M, P, Q, R, ktoré navyše po rade ležia na priamkach $(BOC)'$, $(AOC)'$, $(AOB)'$, AO, BO, CO (obr. 62).



Obr. 62

Podstatné je, ako sa zmení tvrdenie úlohy. Máme dokázať, že kružnice (OPK), (OQL), (ORM) majú spoločný bod rôzny od bodu O. Toto platí práve vtedy, keď majú tieto tri kružnice spoločnú chordálu. A toto dokážeme napríklad tak, že vezmeme chordálu t kružníc (OQL), (ORM) a nájdeme na nej bod, ktorý má rovnakú mocnosť ku kružniciam (OPK) a (OQL). Tento bod môžeme zvoliť ľubovoľne, ale chceme taký, o ktorom sa nám to bude ľahko dokazovať. Preto vezmeme priesečník priamky t s priamkou k' (označme ho X). Jeho mocnosť ku kružniciam (OPK) a (OQL) vieme dobre vyjadriť. Ak bod X neexistuje, zvolíme inak priamku t. Stačí dokázať, že platí $\overline{XP} \cdot \overline{XK} = \overline{XQ} \cdot \overline{XL}$, pričom z voľby bodu X vieme, že

$$\overline{XQ} \cdot \overline{XL} = \overline{XR} \cdot \overline{XM}. \tag{1}$$

Vezmime si súradnicovú sústavu na priamke k' s počiatkom X (zaujímajú nás iba vzdialenosti medzi bodmi na tejto priamke). Nech k, l, m, p, q, r sú súradnice bodov K, L, M, P, Q, R. Rovnosť (1) teda hovorí $ql = rm$. Chceme dokázať, že $pk = ql$. To zo samotného vzťahu (1) nevyplýva, potrebujeme zachytiť štruktúru mimo priamky k' a previesť ju na vzťahy medzi súradnicami skúmaných bodov.

Z Menelaovej vety pre trojuholníky OPQ, OQR, ORP a priamky AB, BC, CA dostávame

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{PM}}{\overline{QM}} \cdot \frac{\overline{QB}}{\overline{OB}} = 1, \qquad \frac{\overline{OB}}{\overline{QB}} \cdot \frac{\overline{QK}}{\overline{RK}} \cdot \frac{\overline{RC}}{\overline{OC}} = 1, \qquad \frac{\overline{OC}}{\overline{RC}} \cdot \frac{\overline{RL}}{\overline{PL}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{OA}} = 1,$$

po vynásobení $\overline{PM} \cdot \overline{QK} \cdot \overline{RL} = \overline{QM} \cdot \overline{RK} \cdot \overline{PL}$, prepísané do súradníc

$$(m-p)(k-q)(l-r) = (m-q)(k-r)(l-p). \tag{2}$$

Z rovností $ql = rm$ a (2) vyplýva $(pk - ql)(r + m - q - l) = 0$. V prípade, že $r + m = q + l$, dostávame $\{M, R\} = \{Q, L\}$ a záver je zrejmý; inak $pk = ql$ a dokázali sme, že $\overline{XP} \cdot \overline{XK} = \overline{XQ} \cdot \overline{XL}$. Tým je úloha vyriešená.

Iné korešpondenčné semináre

Okrem matematickej olympiády sú pre študentov základných aj stredných škôl počas školského roka organizované aj iné matematické súťaže. Patria medzi ne predovšetkým korešpondenčné semináre. Tieto súťaže sa v detailoch istotne líšia, avšak základné črty majú spoločné. Počas školského roka prebiehajú dve časti (letná a zimná), ktoré pozostávajú zväčša z troch sérií úloh rozosielaných riešiteľom do škôl alebo domov. Riešenia súťažiaci vypracovávajú rovnakou formou ako v MO a v určenom termíne ich odosielajú na adresu príslušného seminára, odkiaľ sa po niekoľkých dňoch až týždňoch vrátia opravené spolu so vzorovými riešeniami a výsledkovou listinou. Mladší a menej skúsení riešitelia zväčša nemusia riešiť tie najzložitejšie príklady, aby aj oni mali šancu ovplyvniť poradie na prvých miestach. Na konci oboch častí súťaže sú približne tridsiati najúspešnejší riešitelia pozývaní na týždňové sústredenie, účasť na ktorom býva často najsilnejšou motiváciou na riešenie úloh. Nie je ale možné nespomenúť, že takýto pravidelný tréning sa odráža aj na výsledkoch dosahovaných v MO, a že drvivá väčšina reprezentantov Slovenska na IMO a IOI sa aktívne zapájala do viacerých z týchto seminárov.

Nižšie uvedené korešpondenčné semináre (KS) sú určené predovšetkým študentom stredných škôl, svojím záberom pokrývajú územie celého Slovenska a často majú aj riešiteľov z Českej republiky. Je však možné, že vo svojom okolí nájdete aj menšie súťaže podobného druhu.

Korešpondenčný matematický seminár — KMS

KMS vznikol v roku 2002 spojením Bratislavského a Stredoslovenského korešpondenčného matematického seminára (BKMS a SKMS), ktoré ešte v 51. ročníku MO prebiehali samostatne. Organizovaný je študentmi FMFI UK v Bratislave.

KMS má tri kategórie. Začínajúcim a mladším riešiteľom je určená kategória ALFA, pre skúsenejších je kategória BETA. Rozdelenie do kategórií umožňuje bojovať o miesta na sústredení aj neskúseným študentom, ktorí by v príliš silnej konkurencii strácali motiváciu. Od minulého ročníka pribudol ako kategória GAMA seminár SK MO, ktorému je venovaná predchádzajúca kapitola.

KMS
OATČ KAGDM FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

e-mail: kms@kms.sk
URL: http://kms.sk

Súťaž talentovaných riešiteľov obľubujúcich matematiku — STROM

Korešpondenčný seminár STROM je pokračovateľom najstaršieho korešpondenčného seminára v bývalom Československu. Je organizovaný z PF UPJŠ v Košiciach skupinou nadšencov, väčšinou bývalých riešiteľov seminára a študentov UPJŠ. V posledných rokoch sa na organizovaní seminára okrem košickej skupiny podieľajú aj študenti FMFI UK pochádzajúci z východného Slovenska. Riešiteľskú základňu má prevažne na východnom Slovensku.

STROM
PF UPJŠ
Jesenná 5
041 54 Košice

e-mail: strom@strom.sk
URL: http://www.strom.sk

Korešpondenčný seminár z programovania — KSP

Na rozdiel od predchádzajúcich KS, je KSP súťažou v programovaní. Všetky jeho súťažné úlohy sú, podobne ako na IOI, praktické. KSP je organizovaný zanietenou skupinkou študentov FMFI UK v Bratislave, ktorí majú zároveň na starosti všetky ostatné súťaže v programovaní od COFAX-u až po MO–P. Sústredenia bývajú na jar a na jeseň.

KSP
KVI FMFI UK
Mlynská Dolina
842 48 Bratislava

e-mail: ksp@ksp.sk
URL: http://www.ksp.sk

Ak ste sa rozhodli do niektorého zo seminárov zapojiť, najrozumnejšie je požiadať o zaslanie úloh prvej série začiatkom septembra alebo začiatkom januára, prípadne si zadania a pravidlá nájsť na internete.

RNDr. Karel Horák, CSc. – Mgr. Vladimír Koutný
Mgr. Peter Novotný – doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.
Mgr. Michal Forišek – Ján Mazák – Martina Višňovská
Úlohová komisia MO

**Päťdesiatyštvrtý ročník
Matematickej olympiády
na stredných školách**

Sadzbu programom $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX a LATEX pripravili RNDr. Karel Horák, CSc.,
Mgr. Vladimír Koutný a Mgr. Peter Novotný

Zostavil: Mgr. Vladimír Koutný

Recenzoval: doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.

Grafická úprava obálky: Mgr. Vladimír Koutný

Vydal: Iuventa, Bratislava, 2006

Náklad: 500 ks

ISBN 80–8072–053–3