52. ROČNÍK
MATEMATICKEJ
OLYMPIÁDY
NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

Správa o riešení úloh zo súťaže konanej v školskom roku 2002/2003

44. MEDZINÁRODNÁ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA
15. MEDZINÁRODNÁ OLYMPIÁDA V INFORMATIKE

S pomocou spolupracovníkov spracovali
RNDr. Karel Horák, CSc., doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.,
Mgr. Vladimír Koutný, Mgr. Peter Novotný, Mgr. Michal Forišek
a členovia Úlohovej komisie MO.

ISBN 80–8072–022–3

Obsah

O priebehu 52. ročníka matematickej olympiády

V školskom roku 2002/03 prebehol už 52. ročník MO, pod ktorú patria dve olympiády: matematická s kategóriami Z4-9 pre základné školy a kategóriami A, B, C pre stredné školy a informatická, ktorá je v rámci MO označovaná ako kategória P. Uskutočnili sa všetky plánované súťažné akcie vo všetkých kategóriách, a to navzdory organizačným problémom, ktoré na úrovni ministerstva školstva stále neboli vyriešené a pretrvávajú už dávno a tiež navzdory tomu, že počnúc dňom 16. 1. 2003 boli na zasadnutí ministra školstva s predsedami VÚC a KÚ všetky postupové súťaže zrušené v dôsledku nedostatku financií a nejasností okolo toku peňazí. Našťastie tie kolá súťaže, ktoré sú v MO najohrozenejšie (v januári a februári) prebehli vplyvom zotrvačnosti; inak by pri striktnom dodržaní Organizačného poriadku MO neuskutočnenie jedného kola spôsobilo nemožnosť usporiadať kolo nadväzné, a ako sa neskôr ukázalo, SR by nebola získala 1 zlatú, 1 striebornú a 5 bronzových medailí na dvoch veľmi významných medzinárodných olympiádach.

Cieľom MO je vyhľadávanie žiakov talentovaných v matematike, prebúdzanie a podpora ich záujmu o ňu, rozvíjanie ich matematických schopností a ich usmerňovanie a vedenie k samostatnej tvorivej činnosti. Pestovanie matematiky je však ťažká drina, takže vzhľadom na stále sa rozširujúcu ponuku iných atraktívnych súťaží a možností sebarealizácie bude asi čoraz ťažšie v budúcnosti udržať masovosť MO. Vyvrcholením súťaže je príprava na reprezentáciu Slovenskej republiky a účasť na medzinárodných súťažiach, najmä na Medzinárodnej matematickej olympiáde (IMO) a Medzinárodnej informatickej olympiáde (IOI).

Aj v tomto ročníku boli úlohy vo všetkých kolách MO v Českej republike a na Slovensku rovnaké. MO prebehla vo všetkých krajoch a okresoch SR. Personálne obsadenie SK MO bolo v 52. ročníku súťaže nasledovné:

doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., FPEDaS ŽU Žilina, predseda SK MO,
RNDr. Oliver Ralík, FPV UKF Nitra, podpredseda SK MO,
doc. RNDr. Gabriela Andrejková, CSc., PF UPJŠ Košice,
RNDr. Andrej Blaho, FMFI UK Bratislava,
RNDr. Monika Dillingerová, FMFI UK Bratislava,
Michal Forišek, FMFI UK Bratislava,
Mgr. Juraj Földes, FMFI UK Bratislava,
doc. RNDr. Jozef Fulier, CSc., FPV UKF Nitra,
Vladimír Koutný, FMFI UK Bratislava,
doc. RNDr. Božena Mihalíková, CSc., PF UPJŠ Košice,
prof. RNDr. Jozef Moravčík, CSc., FPV ŽU Žilina,
Martin Potočný, FMFI UK Bratislava,
doc. RNDr. Vladislav Rosa, CSc., Slovenská štátna inšpekcia,
Ivan Lukáč, IUVENTA Bratislava,

Mgr. Milan Demko, PhD., PedF PU Prešov,
RNDr. Zuzana Frková, Gymnázium Grösslingová Bratislava,
RNDr. Mária Lucká, CSc., PF TU Trnava,
RNDr. Tomáš Madaras, PhD., PF UPJŠ Košice,
doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc., FPEDaS ŽU Žilina,
RNDr. Eva Oravcová, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
RNDr. Soňa Pavlíková, CSc., TU Trenčín,
prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc., FPV UKF Nitra.

V priebehu 52. ročníka MO sa uskutočnili tri zasadnutia SK MO. Zamerali sa na obsahové a organizačné zabezpečenie MO, finančné pokrytie súťaže, ďalšie aktivity (korešpondenčné semináre, sústredenia a pod.), ako aj na pokračovanie partnerskej spolupráce s českou Ústřední komisí MO pri príprave súťažných úloh a termínovom zabezpečení prebiehajúceho i ďalšieho ročníka MO. Hostiteľom májového zasadnutia úlohových komisií bola v tomto ročníku Žilina, novembrové zasadnutie prebehlo v Bílovci. Úlohy MO sú prevažne pôvodné; za zadaním každej súťažnej úlohy v ďalšom texte v zátvorke uvádzame meno autora (resp. navrhovateľa) úlohy.

Organizácia súťaže zostala v 52. ročníku MO zachovaná: pre žiakov základných škôl bola rozdelená do šiestich kategórií Z4 – Z9 určených žiakom 4. až 9. ročníka ZŠ a odpovedajúcich ročníkov osemročných gymnázií. Pre žiakov stredných škôl a im odpovedajúcich ročníkov viacročných gymnázií bola súťaž organizovaná v štyroch kategóriách C, B, A a P. Kategória C bola určená pre študentov prvých ročníkov, kategória B pre študentov druhých ročníkov a kategória A pre študentov tretích a štvrtých ročníkov stredných škôl. Kategória P, zameraná na úlohy z programovania a matematickej informatiky, bola určená žiakom všetkých ročníkov stredných škôl. Talentovaní žiaci mohli po súhlase svojho učiteľa matematiky súťažiť aj vo vyššej vekovej kategórii. Týkalo sa to aj žiakov ZŠ, ktorí tiež mohli súťažiť v niektorej z kategórií A, B, C a P.

Súťaž v každej z kategórií pozostáva z niekoľkých postupových kôl, pričom v kategórii Z4 je najvyšším kolom školské kolo, v kategóriách Z5 – Z8 je to okresné kolo, v kategóriách Z9, C a B sa súťaž končí krajským kolom a v kategóriách A i P olympiáda vyvrcholila celoštátnym kolom.

Celoštátne kolo (CKMO) sa na rozdiel od väčšiny iných súťaží koná „bez rozdielu váh“, teda jedno pre matematiku (A) a jedno pre informatiku (P). Celoštátne kolo má totiž okrem určenia akéhosi absolútneho víťaza ten účel, aby bolo možné vybrať reprezentačné družstvá na medzinárodnú matematickú olympiádu (IMO) a medzinárodnú informatickú olympiádu (IOI) a pre informatikov aj na stredoeurópsku informatickú olympiádu (CEOI). Aby sa šetrilo na cestovnom, konajú sa celoštátne kolá v kategóriách A aj P tesne za sebou v tom istom meste, lebo nemálo študentov si vybojuje právo účasti na oboch celoštátnych kolách. Tento rok prebehlo CKMO v Prešove s účasťou 40 žiakov v kategórii A a 24 žiakov v kategórii P, pričom výber sa uskutočnil na základe poradia zostaveného po celoštátnej koordinácii bodových hodnotení z jednotlivých krajov. K úspešnému priebehu CKMO značnou mierou prispel Mgr. Milan Demko, PhD., predseda KKMO Prešovského kraja a jeho veľmi schopný tým organizátorov. Pre výber reprezentačných družstiev sú veľmi dôležité tzv. výberové sústredenia pred IMO, IOI a CEOI, ktorých sa zúčastní širší výber zostavený na základe výsledkov CKMO. Na týchto sústredeniach 5 dní riešia žiaci úlohy a bojujú o definitívne miesto v družstve SR. Tento model jednak umožňuje skvalitniť výber a jednak slúži ako výborný tréning pre nádejných reprezentantov. Významnú úlohu v príprave zohráva modelové súťažné stretnutie pred IMO resp. IOI medzi družstvami ČR, Poľska a SR, ktoré je striedavo v týchto krajinách. Trojstretnutie už „kopíruje" IMO resp. IOI, lebo súťaží sa za rovnakých podmienok, ako na medzinárodnej olympiáde. Viac o výberových sústredeniach a trojstretnutí nájde záujemca v samostatnej kapitole. Na 44. IMO v Tokiu, ktorej sa zúčastnilo 457 žiakov z 82 krajín, získali naši šiesti žiaci 4 bronzové medaile a v neoficiálnej súťaži družstiev skončili na 35. mieste, o dva body za 34. ČR. Na 15. IOI v USA, ktorej sa zúčastnilo 269 žiakov zo 68 krajín, získali naši štyria žiaci 1 zlatú, 1 striebornú a 1 bronzovú medailu, jeden žiak ostal tesne za medailou. Týmto podujatiam sú venované samostatné kapitoly v tejto ročenke.

Súčasťou celoročnej prípravy na MO sú aj rôzne korešpondenčné semináre (KS) a sústredenia na okresnej a krajskej úrovni. Aj v tomto ročníku prebiehalo niekoľko KS s celoslovenskou pôsobnosťou:

Korešpondenčný matematický seminár (KMS),
Seminár talentovaných riešiteľov obľubujúcich matematiku (STROM),
Korešpodenčný seminár z programovania (KSP).

Stručná informácia o týchto aktivitách spolu s kontaktnými adresami je uvedená v samostatnej kapitole.

Veľa faktov a zaujímavostí o MO a príbuzných aktivitách nájde čitateľ na internetových stránkach. Z mnohých vyberáme aspoň nasledovné:

http://www.iuventa.sk – archív zadaní a riešení, výsledkové listiny, adresár krajských predsedov SK MO, organizačný poriadok MO;
http://matematika.webpark.sk – archív zadaní, poradí a riešení MO;
http://pppnnn.webpark.sk/mo.htm – aktuálne dokumenty, najmä pre žilinský kraj;
http://www.ksp.sk/mop – archív kategórie P;
http://home.pf.jcu.cz/~mo – česká stránka o MO;
http://imo.math.ca – informácie o medzinárodných matematických olympiádach.

Vojtech Bálint

Výsledky celoštátneho kola, kategória A

Víťazi

1.	Tomáš VÁŇA	3 G M.R.Štefánika, Žiar n/H.	7	7	7	7	7	0	35
	Jakub ZÁVODNÝ	3 G Grösslingová, Bratislava	7	7	6	6	7	2	35
3.	Michal BURGER	3 G Grösslingová, Bratislava	7	7	7	2	7	3	33
4.	František SIMANČÍK	2 G Grösslingová, Bratislava	7	7	1	7	7	1	30
5.	Péter KOLTAI	4 G H. Selyeho, Komárno	7	1	7	6	7	0	28
6.	Hana BUDÁČOVÁ	3 G B.S.Timravy, Lučenec	6	7	1	7	3	1	25
7.	Miroslav ŠTOLC	3 G Párovská, Nitra	6	7	1	0	7	1	22
8.	Jaroslav KNEBL	1 G A. Bernoláka, Námestovo	6	5	0	5	5	0	21
	Samuel PERES	3 G Nám.sv.Štefana, Dun. Streda	7	7	0	0	6	1	21

Ďalší úspešní riešitelia

10.	Róbert BIRKUS	3 G Z. Kodálya, Galanta	7	0	1	4	7	0	19
11.	Katarína KITTANOVÁ	3 G Hubeného, Bratislava	1	6	1	0	5	5	18
12.	Szilvia BAGÓCSI	3 G H. Selyeho, Komárno	0	2	0	7	7	1	17
13.	Peter AUGUSTÍN	3 G M.R.Štefánika, N. Mesto n/V	6	1	1	1	7	0	16
	Lucia KOMENDOVÁ	3 G J.G.Tajovského, B. Bystrica	7	1	0	0	7	1	16
15.	Jakub TEKEĽ	3 G Jura Hronca, Bratislava	1	0	7	4	2	0	14
16.	Michal KESELY	2 G Párovská, Nitra	6	3	0	0	3	0	12
17.	Jozef BODNÁR	2 G N. padlých hrdinov, Fiľakovo	5	2	0	1	2	1	11
	Katarína KVAŠŇÁKOVÁ	3 G Konštantínova, Prešov	5	2	0	3	1	0	11
	Michal RJAŠKO	4 G Dr. Daxnera, Vranov n/T	3	0	0	1	7	0	11

Ostatní riešitelia

20.	Marcel BENO	3 G Grösslingová, Bratislava	1	2	0	0	7	0	10
	Ján BORSÍK	4 G Poštová, Košice	6	0	0	0	4	0	10
	Michal ĎURIŠ	2 G Grösslingová, Bratislava	7	0	0	0	3	0	10
	Tomáš GREŠLÍK	3 G P. Horova, Michalovce	2	1	0	0	7	0	10
	Peter RAKYTA	3 G H. Selyeho, Komárno	7	2	0	0	1	0	10
	Peter TAR	3 G Grösslingová, Bratislava	6	3	0	0	1	0	10
	Mirko ZIBOLEN	2 G V.P.Tótha, Martin	7	0	0	1	2	0	10
27.	Peter HUDÁK	4 G Alejová, Košice	7	0	0	0	1	1	9
	Marek JANČUŠKA	3 G Párovská, Nitra	5	0	1	0	2	1	9
	Pavel LACKO	3 G Hradná, Liptovský Hrádok	6	0	0	0	3	0	9

30.	Stanislava SOJÁKOVÁ	2 G Jura Hronca, Bratislava	0	4	0	0	4	0	8
31.	László MARÁK	4 G H. Selyeho, Komárno	5	0	0	0	2	0	7
	Martin VAVROVIČ	4 G Párovská, Nitra	0	0	5	0	1	1	7
33.	Miroslav BALÁŽ	3 G Jura Hronca, Bratislava	1	0	0	0	4	0	5
	Martin LYSÍK	3 G J.G.Tajovského, B. Bystrica	1	1	0	0	3	0	5
	Tomáš MARCINKO	3 G Alejová, Košice	2	0	0	0	3	0	5
	Peter PEREŠÍNI	1 G J.G.Tajovského, B. Bystrica	0	0	0	2	3	0	5
	Milan ŠATKA	4 G Hradná, Liptovský Hrádok	1	0	0	0	4	0	5
38.	Martin FIALA	3 G Grösslingová, Bratislava	0	1	1	1	1	0	4
39.	Rastislav OĽHAVA	1 G Alejová, Košice	0	0	1	0	2	0	3
	Andor PATHÓ	3 G H. Selyeho, Komárno	1	1	0	0	1	0	3

Úspešnosť jednotlivých úloh je zaznamenaná v tabuľke.

Počet bodov	**Spolu**	**Číslo úlohy**					
		1.	2.	3.	4.	5.	6.
7 bodov	40	12	7	4	4	13	0
6 bodov	13	8	1	1	2	1	0
5 bodov	10	4	1	1	1	2	1
4 body	7	0	1	0	2	4	0
3 body	12	1	2	0	1	7	1
2 body	16	2	5	0	2	6	1
1 bod	45	7	7	9	5	7	10
0 bodov	97	6	16	25	23	0	27
Priemer	2,47	4,28	2,48	1,2	1,75	4,55	0,58

Výsledky celoštátneho kola, kategória P

Víťazi

1.	Peter PEREŠÍNI	1 G J.G.Tajovského, B. Bystrica	10	8	6	2	8	34
2.	Jakub ZÁVODNÝ	3 G Grösslingová, Bratislava	10	10	5	2	6	33
3.	Michal BURGER	3 G Grösslingová, Bratislava	10	10	6	0	5	31
4.	František SIMANČÍK	2 G Grösslingová, Bratislava	8	6	3	3	10	30
5.	Jakub KOVÁČ	3 G Jura Hronca, Bratislava	10	5	10	1	1	27

Ďalší úspešní riešitelia

6.	Marek JANČUŠKA	3 G Párovská Nitra	9	6	10	0	–	25
	Jaroslav KLÍMA	4 G Jura Hronca, Bratislava	10	1	2	3	9	25
	Rastislav LENHARDT	3 G Jura Hronca, Bratislava	8	2	6	3	6	25
9.	Marek LUDHA	3 G J.G.Tajovského, B. Bystrica	10	6	2	3	3	24
10.	Miroslav BALÁŽ	3 G Jura Hronca, Bratislava	4	9	7	2	0	22
	Lukáš POLÁČEK	3 G Modra	10	7	5	–	0	22
12.	Anton ŠTEFÁNEK	3 G Jura Hronca, Bratislava	10	5	0	1	4	20

Ostatní riešitelia

13.	Milan ŠATKA	4 G Liptovský Hrádok	8	7	0	4	0	19
14.	Jakub TEKEĽ	3 G Jura Hronca, Bratislava	9	7	0	1	–	17
	Peter ČERNO	2 G Ľ. Štúra, Trenčín	8	1	6	2	–	17
16.	Martin DOBIAŠ	4 G Ľ. Štúra, Trenčín	6	1	1	0	8	16
17.	Andrej MIKULÍK	3 G Grösslingová, Bratislava	8	7	0	–	–	15
18.	Juliana LIPKOVÁ	4 G Jura Hronca, Bratislava	1	4	1	0	8	14
19.	Martin REJDA	3 G Grösslingová, Bratislava	3	5	0	2	0	10
20.	Tomáš LABUDA	3 G Grösslingová, Bratislava	3	5	1	–	0	9
	Michal ĎURIŠ	2 G Grösslingová, Bratislava	5	3	1	0	0	9
22.	Ján BORSÍK	3 G Poštová, Košice	4	4	0	0	–	8
23.	Peter NADANYI	4 G Tvrdošín	3	0	0	3	1	7
24.	Tomáš MIKUŠ	4 G Jura Hronca, Bratislava	6	0	0	–	0	6

Výsledky krajských kôl

Z príslušného kraja a v príslušnej kategórii A, B, C, P a Z9 sú uvedení všetci, resp. aspoň prvých 10 úspešných riešiteľov. V kategóriách B, C, Z9, ak nie je uvedené inak, sú všetci žiaci študentmi 2., resp. 1., resp. 9. ročníka. Gymnáziá so zameraním na matematiku, študijný odbor 01 sú tieto:

Gymnázium Grösslingová, Bratislava,
Gymnázium Párovská, Nitra,
Gymnázium Veľká Okružná, Žilina,
Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica,
Gymnázium Alejová, Košice,
Gymnázium Poštová, Košice.

Kraj Bratislava

Kategória A

1.	Michal BURGER	3, Gymnázium Grösslingová
2.	Jakub ZÁVODNÝ	3, Gymnázium Grösslingová
3.	František SIMANČÍK	2, Gymnázium Grösslingová
4.	Michal DURIŠ	2, Gymnázium Grösslingová
5.	Miroslav BALÁŽ	2, Gymnázium Jura Hronca
	Katarína KITTANOVÁ	3, Gymnázium Hubeného
7.	Pavol CVIK	4, Gymnázium Jura Hronca
	Peter TAR	3, Gymnázium Grösslingová
9.	Jakub TEKEĽ	3, Gymnázium Jura Hronca
1O.	Marcel BENO	2, Gymnázium Grösslingová
1O.	Stanislava SOJÁKOVÁ	2, Gymnázium Jura Hronca
	Martin FIALA	3, Gymnázium Grösslingová
	Juliana LIPKOVÁ	4, Gymnázium Jura Hronca
	Mária ŠOLTÉSOVÁ	3, Gymnázium Grösslingová

Kategória B

1.	František SIMANČÍK	Gymnázium Grösslingová
	Matej VITÁSEK	Gymnázium Grösslingová
3.	Michal ĎURIŠ	Gymnázium Grösslingová
	Stanislava SOJÁKOVÁ	Gymnázium Jura Hronca

5.	Pavel STRUHÁR	Gymnázium Jura Hronca
6.	Zuzana LABUDOVÁ	Gymnázium Grösslingová
7.	Juraj KARABÍNOS	Gymnázium Grösslingová
	Zuzana TRNOVCOVÁ	Gymnázium Jura Hronca
9.	Michal GONDÁR	Gymnázium Grösslingová
10.	Emília ABSOLONOVÁ	Gymnázium Grösslingová
	Viktor KUBINEC	Gymnázium Grösslingová
	Ján RUMAN	Gymnázium Grösslingová

Kategória C

1.	Andrej BORSUK	Gymnázium Grösslingová
2.	Jakub IMRIŠKA	Gymnázium Jura Hronca
3.	Michal KOVÁČ	Gymnázium Grösslingová
4.	Jozef MINÁR	Gymnázium Grösslingová
	Jakub ŽITNAY	Gymnázium Grösslingová
6.	Michal MÁJEK	Gymnázium Grösslingová
	Soňa OTHMANOVÁ	Gymnázium Grösslingová
	Filip POLÁSEK	Gymnázium Grösslingová
9.	Milan BRATKO	Gymnázium Pankúchova
	Matúš KUBÍK	Gymnázium Grösslingová
	Martin SEDLÁK	Gymnázium Jura Hronca

Kategória Z9

1.	Petra STRAPÁČOVÁ	ZŠ Košická
	Michal SZABADOS	SPMTD Teplická
3.	Ivana KOVÁČOVÁ	Gymnázium Grösslingová, 8r.
	Tomás KOVAČOVSKÝ	ZŠ Majerníkova
	Magdaléna MACKOVIČOVÁ	ZŠ Zohor
	Peter STAS	ZŠ Prokofievova
	Jakub ZELMAN	ZŠ Ostredkova
8.	Katarína POKORNÁ	Gymnázium Grösslingová, 8r.
	Anna ZAHORANOVÁ	ZŠ Jelačičová
10.	Ladislav MARSÍK	Gymnázium Grösslingová, 8r.

Kategória P

1.	Michal BURGER	Gymnázium Grösslingová
2.	Jakub ZÁVODNÝ	Gymnázium Grösslingová
3.	Miroslav BALÁŽ	Gymnázium Jura Hronca
4.	Juliana LIPKOVÁ	Gymnázium Jura Hronca

5.	Andrej MIKULÍK	Gymnázium Grösslingová
6.	Tomáš MIKUŠ	Gymnázium Jura Hronca
	Lukáš POLÁČEK	Gymnázium K. Štúra, Modra
8.	Jakub TEKEĽ	Gymnázium Jura Hronca
	Anton ŠTEFÁNEK	Gymnázium Jura Hronca
10.	Jaroslav KLÍMA	Gymnázium Jura Hronca
	Martin REJDA	Gymnázium Grösslingová
	František SIMANČÍK	Gymnázium Grösslingová
	Michal ĎURIŠ	Gymnázium Grösslingová

Kraj Nitra

Kategória A

1.	Péter KOLTAI	4, Gymnázium H. Selyeho maď., Komárno
2.	Szilvia BAGÓCSI	3, Gymnázium H. Selyeho maď., Komárno
	Andor PATHÓ	3, Gymnázium H. Selyeho maď., Komárno
	Martin VAVROVIČ	4, Gymnázium Párovská, Nitra
5.	Marek JANČUŠKA	3, Gymnázium Párovská, Nitra
	László MARÁK	4, Gymnázium H. Selyeho maď., Komárno
7.	Michal KESELY	2, Gymnázium Párovská, Nitra
	Peter RAKYTA	3, Gymnázium H. Selyeho maď., Komárno
	Miroslav ŠTOLC	3, Gymnázium Párovská, Nitra
10.	Zoltán BÁN	3, Gymnázium H. Selyeho maď., Komárno
	László FEKETE	3, Gymnázium H. Selyeho maď., Komárno
	Katalin KALOCSÁNYI	3, Gymnázium H. Selyeho maď., Komárno
	Martin MOLNÁR	3, Gymnázium Levice
	Gábor PATHÓ	3, Gymnázium Párovská, Nitra
	Róbert PATHÓ	3, Gymnázium Párovská, Nitra

Kategória B

1.	Petr ZAJÍČEK	Gymnázium H. Selyeho maď., Komárno
2.	Michal KESZELY	Gymnázium Párovská, Nitra
3.	Matej PIVOLUSKA	Gymnázium Levice
4.	Szabolcs CSÉFALVAY	Gymnázium H. Selyeho maď., Komárno
	András MORAUSZKI	Gymnázium maď., Želiezovce
6.	Daniel ŠRANKO	Gymnázium sv. Cyrila a Metoda, Nitra
7.	Milan KURILLA	Gymnázium Párovská, Nitra
	Erik NAGY	Gymnázium Šaľa
9.	Marcel KRČAH	Gymnázium Párovská, Nitra
	Péter MÁTYÁS	Gymnázium H. Selyeho maď., Komárno

	Viktor SEGEDA	Gymnázium Párovská, Nitra
	Anikó VARGA	Cirkevné G. Marianum maď., Komárno

Kategória C

1.	Krisztián KACZ	Gymnázium H. Selyeho maď., Komárno
2.	Marek STRAŇÁK	Gymnázium Golianova, Nitra
3.	Miroslav HOTÁK	Gymnázium Levice
4.	Mátyás BERTA	Gymnázium H. Selyeho maď., Komárno
	Gergely KAJTÁR	Gymnázium H. Selyeho maď., Komárno
6.	Gábor SZCS	Gymnázium H. Selyeho maď., Komárno
	Slavomír TAKÁČ	Gymnázium Nové Zámky
8.	Monika BAKAOVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
	Zoltán GRÓF	Gymnázium H. Selyeho maď., Komárno
	Hieu PHAM VAN	Gymnázium Šurany
	Vojtech ZAŤKO	ZŠ Komenského Komárno

Kategória Z9

1.	Juraj CVIK	Gymnázium Levice
	Zoltán ÉDES	ZŠ maď., Marcelová
3.	Róbert PAVLOVIČ	ZŠ Veľký Ďur
4.	Rastislav FARKAŠ	Gymnázium Levice
	Matúš KOTRY	Gymnázium Párovská, Nitra
6.	Monika BALÁZSOVÁ	ZŠ maď., Kolárovo
	Martin GAJDOŠECH	ZŠ Adyho, Štúrovo
	Linda ŠKANDÍKOVÁ	ZŠ Alexyho, Nitra
	Zuzana TATÁROVÁ	ZŠ Tekovské Lužany
10.	Miroslav GAJDOŠEK	ZŠ Na Hôrke, Nitra

Kategória P

1.	Marek JANČUŠKA	Gymnázium Párovská, Nitra
2.	Petr ZAJÍČEK	Gymnázium H. Selyeho maď., Komárno
3.	Miroslav ŠTOLC	Gymnázium Párovská, Nitra
4.	László MARÁK	Gymnázium H. Selyeho maď., Komárno
	Martin MOLNÁR	SPŠ Levice
6.	Michal ZAJÍČEK	SOUs Šurany
7.	Pavol SZÓRÁD	Gymnázium sv. Cyrila a Metoda, Nitra
	Alexander VOLF	Gymnázium Nové Zámky
	Martin ŠUŠKA	Gymnázium Levice
10.	Peter GOGA	Gymnázium Topoľčany
11.	Juraj PORUBSKÝ	Gymnázium sv. Cyrila a Metoda, Nitra

Kraj Trnava

Kategória A

1.	Robert BIRKUS	3, Gymnázium Štvrť SNP, maď., Galanta
	Sámuel PERES	3, Gymnázium Nám. sv. Štefana, Dunajská Streda
3.	László MAKKY	3, Gymnázium Nám. sv. Štefana, Dunajská Streda
4.	Filip URMINSKÝ	4, Gymnázium Komenského, Hlohovec
5.	Tomáš MIKLÁNEK	3, Gymnázium J. Hollého, Trnava

Kategória B

1.	Marta LUNGOVÁ	Gymnázium Skalica
	Ondrej MARKO	Gymnázium Komenského, Hlohovec
3.	Katarína BACHRATÁ	Gymnázium Štvrť SNP, maď., Galanta
	Jozef SKOČÍK	Gymnázium Komenského, Hlohovec

Kategória C

1.	Zoltán NÉMETH	Gymnázium Štvrť SNP, maď., Galanta
2.	István ESTÉLYI	Gymnázium Štvrť SNP, maď., Galanta
3.	Lucia CIBULKOVÁ	Gymnázium Komenského, Hlohovec
	Peter CSONGA	Gymnázium Nám. sv. Štefana, Dunajská Streda
	Juraj PEŠKA	Gymnázium Komenského, Hlohovec
6.	Peter GER	Gymnázium Nám. sv. Štefana, Dunajská Streda
7.	István SZENTANDRÁSI	Gymnázium Štvrť SNP, maď., Galanta
8.	Ivan HUJSI	Gymnázium J. Hollého, Trnava
9.	Michal DANIŠKA	Gymnázium Komenského, Hlohovec
	Štefan KONCZ	Gymnázium Komenského, Hlohovec
	Dóra LAKATOSOVÁ	Gymnázium Bratislavská, maď., Veľký Meder

Kategória Z9

1.	Viktória NAGY	ZŠ maď., Okoč
2.	Tomáš BZDUŠEK	Gymnázium Piešťany
3.	Mária DOMONKOS	ZŠ B. Bartóka maď., Veľký Meder
	Juraj NIŽNAN	Gymnázium J. Hollého, Trnava
	Mária POLÁČKOVÁ	ZŠ Komenského, Sereď
	Katarína ŠENIGLOVÁ	ZŠ Školská, Holíč
7.	Katarína HRÍBIKOVÁ	ZŠ A. Merici, Trnava

	András LENDVAY	Gymnázium Á. Vámberyho, Dunajská Streda
	Dušan ŠVANCARA	ZŠ Kľačany
	Michal VAŠÍČEK	ZŠ Atómová, Trnava

Kategória P

1.	Lukáš HRÍBIK	Gymnázium A. Merici, Trnava
2.	Michal DOBIŠ	Gymnázium J. Hollého, Trnava
3.	Marek CIFRA	Gymnázium A. Merici, Trnava
	Adam ŠKORVAGA	Gymnázium J. Hollého, Trnava

Kraj Trenčín

Kategória A

1.	Peter AUGUSTÍN	Gymnázium M.R.Štefánika, Nové Mesto n/V.
2.	Barbora GÁBELOVÁ	Gymnázium Púchov

Kategória B

1.	Peter ČERNO	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
2.	Jakub LACHKÝ	Gymnázium Dubnica n/Váhom
	Igor CHALÁS	Gymnázium Prievidza
4.	Lenka ŠOŠOVIČKOVÁ	Gymnázium Dubnica n/Váhom
5.	Marian GRMAN	Gymnázium Púchov
	Jozef GLASNÁK	Piaristické gymnázium Trenčín

Kategória C

1.	Peter ŠTACKO	Gymnázium V.B.Nedožerského, Prievidza
2.	Michal SIVÁK	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
3.	Peter ZÁMEČNÍK	Gymnázium M.R.Štefánika, Nové Mesto n/V.
4.	Michal BABIAR	Gymnázium Dubnica n/Váhom
5.	Jana VRÁBELOVÁ	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
6.	Milan KVAK	SPŠ Bánovce n/Bebravou
7.	Martin HUBA	Piaristické gymnázium Prievidza
	Marek KOMOROVSKÝ	Gymnázium Dubnica n/Váhom
	Lukáš ČERNO	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
10.	Jana KUNOVSKÁ	Gymnázium Považská Bystrica
	Michal ZEMKO	SPŠ Dubnica n/Váhom
	Denis SKIBICKIJ	SPŠ Bánovce n/Bebravou

Lukáš ZENKA	Gymnázium M.R.Štefánika, Nové Mesto n/V.

Kategória Z9

1. Peter DIŽO	Gymnázium Partizánske
2. Rudolf VIDO	ZŠ sv.Jozefa, Nové Mesto n/Váhom
Tatiana MITANOVÁ	ZŠ Veľkomoravská, Trenčín
Tomáš GREGOR	ZŠ Zlatníky
5. Matúš IGLARČÍK	ZŠ Rastislavova, Prievidza
Ľubica KRAUSKOVÁ	ZŠ P.J.Šafárika, Prievidza
Darina LACKOVÁ	ZŠ Dlhé Hony, Trenčín
8. Michaela SUNEGOVÁ	ZŠ Gorazdova, Bánovce n/Bebravou
Lukáš BLAHÚT	ZŠ CIII, Dubnica n/Váhom
Andrej ŠIMO	ZŠ Nedožery-Brezany

Kategória P

1. Peter ČERNO	Gymnázium Ľ. Štúra Trenčín
2. Martin DOBIAŠ	Gymnázium Ľ. Štúra Trenčín
3. Martin MOCKO	Gymnázium Myjava
Matej ŠVEC	Gymnázium Myjava
5. Jozef HOPKO	Gymnázium Prievidza
6. Lukáš ČERNO	Gymnázium Ľ. Štúra Trenčín
7. Juraj BLAHO	Gymnázium Považská Bystrica
Ondrej ŠEVCE	Gymnázium Prievidza

Kraj Žilina

Kategória A

1. Jaroslav KNEBL	1, Gymnázium A. Bernoláka, Námestovo
2. Milan ŠATKA	4, Gymnázium Liptovský Hrádok
3. Pavel LACKO	3, Gymnázium Liptovský Hrádok
4. Mirko ZIBOLEN	4, Gymnázium V. Paulinyho–Tótha, Martin
Juraj TEKEL	4, Gymnázium M.M.Hodžu, Liptovský Mikuláš
6. Vlasta POLIAČKOVÁ	3, Gymnázium Veľká okružná, Žilina
Peter ČERMÁK	3, Gymnázium M.M.Hodžu, Liptovský Mikuláš

Kategória B

1. Jaroslav KNEBL	Gymnázium A. Bernoláka, Námestovo

2.	Daniel BOŽIK	Gymnázium M.M.Hodžu, Liptovský Mikuláš
3.	Matúš STÁŇA	Gymnázium M.M.Hodžu, Liptovský Mikuláš
	Peter ŠEPITKA	Gymnázium V. Paulinyho–Tótha, Martin
5.	Miroslav JAGOŠ	Gymnázium Varšavská, Žilina
6.	Peter PIJÁK	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
	Matej FABŠÍK	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
	Andrea TINAJOVÁ	Gymnázium V. Paulinyho–Tótha, Martin
9.	Martin BABKA	Gymnázium Liptovský Hrádok
	Ján PALGUTA	Gymnázium Sučany

Kategória C

1.	Oto MACKA	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
2.	Alenka BACHRATÁ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
3.	Tomáš KAPIČÁK	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
	Marcela HRDÁ	Gymnázium Turčianske Teplice
5.	Matej DUNÍK	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
	Jozef CIBÍČEK	Gymnázium Sučany
7.	Roman BUKOVÝ	Gymnázium P.O.Hviezdoslava, Dolný Kubín
8.	Lenka TROJÁKOVÁ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
	Ivan POLÁK	Gymnázium Sučany
10.	Jozef JÁNOŠÍK	Gymnázium Varšavská, Žilina

Kategória Z9

1.	Ján PEPRNÍK	ZŠ Hliny VII, Žilina
2.	Veronika HEGLASOVÁ	Gymnázium Varšavská, Žilina
	Igor JANIC	ZŠ Hliny VII, Žilina
4.	Tomáš MASNÝ	Gymnázium Varšavská, Žilina
5.	Jozef MIČETA	ZŠ Veľké Rovné
	Richard SUROVIAK	ZŠ Matúškova, Dolný Kubín
7.	Radka BOŠANSKÁ	Gymnázium J. Lettricha, Martin
	Juraj FUZIA	Gymnázium Námestovo
	František JAGELKA	ZŠ A. Bernoláka, Martin
	Antónia LISÁ	ZŠ Bobrovec
	Štefan PONIŠTIAK	ZŠ Komenského, Čadca
	Jana SEKEROVÁ	Gymnázium Ružomberok

Kategória P

1.	Milan ŠATKA	Gymnázium Liptovský Hrádok
2.	Peter NADANYI	Gymnázium Tvrdošín
3.	Martin KOVÁČIK	Gymnázium Čadca

4. Ján PALENČÁR	Gymnázium Martin
5. Martin WINDISCH	Gymnázium Vrútky
6. Ján DOJČÁR	Gymnázium Turčianske Teplice
7. Lukáš BELEŠ	Gymnázium Čadca
8. Lukáš ŠPALEK	Gymnázium Čadca

Kraj Banská Bystrica

Kategória A

1. Lucia KOMENDOVÁ	3, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
2. József BODNÁR	2, Gymnázium Fiľakovo
Hana BUDÁČOVÁ	3, Gymnázium B.S.Timravy, Lučenec
4. Tomáš VÁŇA	3, Gymnázium M.R.Štefánika, Žiar nad Hronom
5. Peter PEREŠÍNI	1, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
6. Martin LYSÍK	3, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
7. Iveta KOTMANOVÁ	3, Gymnázium B.S.Timravy, Lučenec

Kategória B

1. Jozef BODNÁR	2, Gymnázium Fiľakovo
2. Miroslav CICKO	2, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
3. Silvia BALÁŽOVÁ	2, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
Peter PEREŠÍNI	1, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
Adam ŠTEFÁNIK	2, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
6. Martin ZÁCHENSKÝ	2, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
7. Adela KIŠOVÁ	3, Evanjelické gymnázium Tisovec
Vladimír KOVÁČ	2, Gymnázium Ľ. Štúra, Zvolen
Andrej NEMČEK	2, OŠG Tr.SNP 54, Banská Bystrica
Jana ŠIŠLÁKOVÁ	2, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica

Kategória C

1. Peter PEREŠÍNI	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
2. Zuzana PÔBIŠOVÁ	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
Maroš RAUČINA	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
4. Tamás MOLNÁR	Gymnázium Fiľakovo
5. Ján MIKULÁŠ	Gymnázium B.S.Timravy, Lučenec
6. Ondrej BUDÁČ	Gymnázium B.S.Timravy, Lučenec
7. Igor MAJERČÍK	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
Michal TAKÁCS	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica

9.	Klaudia KONÔPKOVÁ	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
10.	Tomáš KÁN	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
	Jakub UKROP	Gymnázium Ľ. Štúra, Zvolen

Kategória Z9

1.	Michal SUDOLSKÝ	9, ZŠ Radvanská, Banská Bystrica
	Maroš KUCBEL	8, ZŠ Školská 10, Krupina
3.	Martin SKABA	9, ZŠ Radvanská, Banská Bystrica
4.	Filip SIMONFY	9, ZŠ Trieda SNP, Banská Bystrica
	Miriama BAGAČKOVÁ	9, ZŠ Centrum 1, Hnúšťa
	Tibor STRAČINA	9, ZŠ Hodruša-Hámre
7.	Zuzana GAVOROVÁ	9, ZŠ Golianova, Banská Bystrica
	Jakub PIVOLUSKA	9, ZŠ Očová
9.	Viliam STIEFEL	9, ZŠ Golianova, Banská Bystrica
	Ondrej MIKULÁŠ	8, Gymnázium B.S.Timravy, Lučenec
	Štefan GALKO	9, ZŠ Škultétyho, Tornaľa
	Peter SLUKA	7, IX. ZŠ, Zvolen

Kategória P

1.	Marek LUDHA	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
2.	Peter PEREŠÍNI	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
3.	Miroslav CICKO	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
4.	Ondrej BUDÁČ	Gymnázium B.S.Timravy, Lučenec
5.	Matej VINCE	Gymnázium B.S.Timravy, Lučenec
6.	Michal BEŇO	Gymnázium Kremnica

Kraj Košice

Kategória A

1.	Ján BORSÍK	Gymnázium Poštová, Košice
2.	Peter HUDÁK	Gymnázium Alejová, Košice
3.	Rastislav OĽHAVA	Gymnázium Alejová, Košice
4.	Tomáš GREŠLÍK	Gymnázium Pavla Horova, Michalovce
	Tomáš MARCINKO	Gymnázium Alejová, Košice
	Maroš VRANEC	Gymnázium Alejová, Košice

Kategória B

1.	Ján NIŽŇANSKÝ	Gymnázium Alejová, Košice
	Dušan PETRIČKO	Gymnázium Poštová, Košice
	Marek REGEC	Gymnázium Poštová, Košice
	Rastislav RUSINKO	Gymnázium Alejová, Košice
5.	Václav SKŘIVÁNEK	Gymnázium Poštová, Košice
6.	Jozef BÁŠTI	Gymnázium maď., Kuzmányho 6, Košice
	Mikuláš ĽAŠ	Gymnázium Alejová, Košice
	Tomáš UHRÍN	Gymnázium Pavla Horova, Michalovce
9.	Adrián KOVÁČ	Gymnázium Pavla Horova, Michalovce
	Lenka KOVALČINOVÁ	Gymnázium Poštová, Košice
	Elena ĎURÁNOVÁ	Gymnázium P.J.Šafárika, Rožňava

Kategória C

1.	Tomáš DZURŇÁK	Gymnázium Školská, Spišská Nová Ves
2.	Rastislav OĽHAVA	Gymnázium Alejová, Košice
	Peter KOBAN	Gymnázium Alejová, Košice
4.	Dárius GÁL	Gymnázium Poštová, Košice
5.	Jakub BERAN	Gymnázium Alejová, Košice
	Tatiana JÁNOŠOVÁ	Gymnázium Krompachy
7.	Miloš ŠIMURDA	Gymnázium Ľ. Štúra, Michalovce
	Ondrej PAŠUTH	Gymnázium Pavla Horova, Michalovce
9.	Martin KRAVEC	Gymnázium Pavla Horova, Michalovce
	Peter BAŠISTA	Gymnázium Pavla Horova, Michalovce
	Zuzana MOLNÁROVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
	Slávka BERTOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice

Kategória Z9

1.	Peter BERTA	POH Veľké Kapušany
2.	Alexander TILL	ZŠ L. Novomeského 2, Košice
	Jozef JANOVSKÝ	OG Alejová, Košice
	Martin ČURNEK	OG Alejová, Košice
5.	Tomáš HUDÁK	ZŠ Škultétyho, Košice
	Lukáš JUSKO	ZŠ Exnárova, Košice
	Katarína HRICOVÁ	ZŠ Levočská, Spišská Nová Ves
8.	Jozef JIRÁSEK	Gymnázium sv. T. Akvinského, Košice
	Ján JERGUŠ	Gymnázium Alejová, Košice
	Beáta KANDRÍKOVÁ	ZŠ sv. J. Krstiteľa, Spišské Vlachy

Kategória P

1.	Ján BORSÍK	Gymnázium Poštová, Košice
2.	Michal REPOVSKÝ	Gymnázium Trebišov
3.	Tomáš DZURŇÁK	Gymnázium Školská, Spišská Nová Ves
	Martin ĽUDVÍK	Gymnázium Školská, Spišská Nová Ves
5.	Marián BALOG	Gymnázium Pavla Horova, Michalovce
6.	Jozef JIRÁSEK	Gymnázium sv. T. Akvinského, Košice
	Jaroslav PROKOP	Gymnázium Poštová, Košice
8.	Filip LEGÉNY	Gymnázium M.R.Štefánika, Košice

Kraj Prešov

Kategória A

1.	Katarína KVAŠŇÁKOVÁ	3, Gymnázium Konštantínova, Prešov
	Michal RJAŠKO	4, Gymnázium Vranov nad Topľou

Kategória B

1.	Anton REPKO	Gymnázium sv. Mikuláša, Prešov
2.	Miroslav ONTKOVIČ	SPŠE Plzenská, Prešov
3.	Matúš TEJIŠČÁK	Gymnázium Konštantínova, Prešov
4.	Pavel MICHLÍK	Gymnázium Kukučínova, Poprad
5.	Anna BAROŠOVÁ	Gymnázium D. Tatarku, Poprad
6.	Martin BEKESS	Gymnázium D. Tatarku, Poprad
	Ján ŠIMA	Gymnázium T. Vansovej, Stará Ľubovňa
8.	Štefan ČELLÁR	Gymnázium J.A.Raymana, Prešov
	Lukáš GAMRÁT	Gymnázium L. Svobodu, Humenné
	Pavol MACKO	Gymnázium Vranov nad Topľou

Kategória C

1.	Matúš FEDÁK	Gymnázium T. Vansovej, Stará Ľubovňa
2.	Adam SEMANKO	Gymnázium L. Stöckela Bardejov
3.	Tomáš KAŠČÁK	Gymnázium J.A.Raymana, Prešov
4.	Ján DUPEJ	Gymnázium Stropkov
	Radoslav KRIVÁK	Gymnázium J.A.Raymana, Prešov
6.	Mária KASARDOVÁ	Gymnázium Stropkov
7.	Jana KAPRAĽOVÁ	Gymnázium Snina
	Pavol PITOŇÁK	Gymnázium Kukučínova, Poprad

9. František KAČMARIK	Gymnázium J.A.Raymana, Prešov
Michal PRUSÁK	Gymnázium J.A.Raymana, Prešov
Lukáš RADVANSKÝ	Gymnázium L. Stöckela Bardejov

Kategória Z9

1. Zuzana VIKARSKÁ	Gymnázium D. Tatarku, Poprad
2. Vladimír BOŽA	ZŠ Ul. Mieru, Svit
Vlasta MARIAKOVÁ	ZŠ Tatranská Štrba
4. Beáta BABIAKOVÁ	ZŠ Spišská Stará Ves
Anton TKÁČIK	ZŠ Ľubotice, Prešov
6. Jana RYBKOVÁ	ZŠ Francisciho, Poprad
7. Katarína DŽURŇÁKOVÁ	ZŠ Haligovce
Ľubomír FEDORCO	Gymnázium L. Svobodu, Humenné
Marián GABORČÍK	ZŠ Dr. Fischera, Kežmarok
Ján GEROČ	ZŠ Tajovského, Poprad
Beáta CHLEBOVCOVÁ	ZŠ 29. augusta, Poprad
Mária ŠPAKOVÁ	Gymnázium P.O.Hviezdoslava, Kežmarok

Kategória P

1. Martin CHOMA	Gymnázium Stará Ľubovňa
2. Michal RJAŠKO	Gymnázium Vranov nad Topľou
Jaroslav SOPOLIGA	Gymnázium Svidník
4. Peter GREŠKOVIČ	Gymnázium Svidník

Zadania súťažných úloh

Kategória C

C – I – 1

Z piatich jednotiek, piatich dvojok, piatich trojok, piatich štvoriek a piatich pätiek zostavte päť navzájom rôznych päťmiestnych čísel tak, aby ich súčet bol čo najväčší.

(J. Šimša)

C – I – 2

Je daný trojuholník ABC s ostrými vnútornými uhlami pri vrcholoch A a B. Označme Q priesečník ťažnice AD s výškou CP a E pätu kolmice z bodu D na stranu AB. Ďalej nech R je taký bod na polpriamke opačnej k PC, že $|PR| = |CQ|$. Dokážte, že priamky AD a RE sú rôznobežné a že ich priesečník leží na kolmici k priamke AB prechádzajúcej bodom B.

(J. Švrček)

C – I – 3

Predpokladajme, že každá z dvoch bánk A a B bude mať počas nasledujúcich dvoch rokov stálu ročnú úrokovú mieru. Keby sme uložili $5/6$ našich úspor v banke A a zvyšok v banke B, vzrástli by naše úspory po jednom roku na 67 000 Sk a po dvoch rokoch na 74 900 Sk. Keby sme však uložili $5/6$ našich úspor v banke B a zvyšok v banke A, vzrástli by naše úspory po jednom roku na 71 000 Sk. Na akú čiastku by sa v takom prípade zvýšili naše úspory po dvoch rokoch?

(J. Šimša)

C – I – 4

Zostrojte lichobežník $ABCD$ s výškou 3 cm a zhodnými stranami BC, CD a DA, pre ktorý platí: Na základni AB existuje bod E taký, že úsečka DE má dĺžku 5 cm a delí lichobežník na dve časti s rovnakými obsahmi.

(E. Kováč)

C – I – 5

K prirodzenému číslu m zapísanému rovnakými číslicami sme pripočítali štvormiestne prirodzené číslo n. Získali sme štvormiestne číslo s opačným poradím číslic ako má číslo n. Určte všetky také dvojice čísel m a n.

(J. Zhouf)

C – I – 6

V rovine je daná priamka p a kružnica k. Zostrojte taký trojuholník ABC, aby k bola kružnicou jemu vpísanou, aby jej stred ležal v jednej štvrtine jeho ťažnice na stranu AB a aby vrchol C ležal na priamke p. Urobte diskusiu o počte riešení v závislosti na vzájomnej polohe priamky p a kružnice k.

(P. Černek)

C – S – 1

Ak od ľubovoľného aspoň dvojmiestneho prirodzeného čísla odtrhneme číslicu na mieste jednotiek, dostaneme číslo o jednu číslicu „kratšie“. Nájdite všetky pôvodné čísla, ktoré sa rovnajú absolútnej hodnote rozdielu druhej mocniny „kratšieho“ čísla a druhej mocniny odtrhnutej číslice.

(J. Zhouf)

C – S – 2

Na strane CD štvorca $ABCD$ je zvolený bod E tak, že uhol DAE má veľkosť $30°$. Bod P je pätou kolmice vedenej bodom B na priamku AE, bod Q pätou kolmice vedenej bodom C na priamku BP. Rozhodnite, či je obsah lichobežníka $PQCE$ menší ako tretina obsahu štvorca $ABCD$.

(L. Boček)

C – S – 3

Z piatich jednotiek, piatich dvojok, piatich trojok, piatich štvoriek a piatich pätiek zostavíme päť päťmiestnych čísel, ktoré sa čítajú odpredu rovnako ako odzadu (napr. 32 223), a potom tieto čísla sčítame. Akú najmenšiu a akú najväčšiu hodnotu môže mať výsledný súčet?

(J. Šimša)

C – II – 1

Nájdite najmenšie prirodzené číslo n, pre ktoré je súčin

$$2\,003 \cdot 2\,004 \cdot 2\,005 \cdot \ldots \cdot (2\,003 + n)$$

deliteľný všetkými dvojmiestnymi prvočíslami.

(J. Šimša)

C – II – 2

V rovine je daná úsečka AP. Zostrojte pravidelný šesťuholník $ABCDEF$ tak, aby bod P bol stredom jeho strany DE.

(J. Švrček)

C – II – 3

Keby Karol požičal jednému známemu p tisíc Sk s úrokom p % a druhému známemu q tisíc Sk s úrokom q %, kde p a q sú celé čísla, priniesli by mu obe pôžičky taký istý zisk, ako keby jednej osobe požičal celkovú čiastku s úrokom $(p + 2{,}4)$ %. Keby požičal jednému známemu p tisíc Sk s úrokom $2p$ % a druhému známemu q tisíc Sk s úrokom $2q$ %, priniesli by mu tieto pôžičky rovnaký zisk, ako keby jednej osobe požičal celkovú čiastku s úrokom $(p + 5{,}8)$ %. Určte čísla p a q.

(J. Šimša, J. Zhouf)

C – II – 4

Určte dĺžku ramien rovnoramenného lichobežníka so základňami dĺžok 10 a 12 tak, aby dĺžky všetkých jeho strán aj uhlopriečok boli vyjadrené celými číslami.

(P. Černek)

Kategória B

B – I – 1

Palindrómom rozumieme prirodzené číslo, ktoré sa číta rovnako odpredu aj odzadu, napr. 16 261. Nájdite najväčší štvormiestny palindróm, ktorého druhá mocnina je tiež palindrómom.

(E. Kováč)

B – I – 2

Nájdite všetky trojice reálnych čísel (x, y, z) vyhovujúcich sústave rovníc

$$x^3 + y^3 = 9z^3,$$
$$x^2y + y^2x = 6z^3.$$

(J. Zhouf)

B – I – 3

Je daný trojuholník so stranami dĺžok a, b, c a obsahom S. Dokážte, že rovnosť $2c^2 = |a^2 - b^2|$ platí práve vtedy, keď existuje trojuholník so stranami dĺžok a, b, $2c$ a obsahom $2S$.

(P. Černek)

B – I – 4

Krokom budeme rozumieť nahradenie usporiadanej trojice celých čísel (p, q, r) trojicou

$(r + 5q, 3r - 5p, 2q - 3p)$. Rozhodnite, či existuje celé číslo k také, že z trojice $(1, 3, 7)$ vznikne po konečnom počte krokov trojica $(k, k + 1, k + 2)$.

(P. Černek)

B – I – 5

V rovine je daný pravouhlý lichobežník $ABCD$ s dlhšou základňou AB a pravým uhlom pri vrchole A. Kružnica k_1 zostrojená nad stranou AD ako priemerom a kružnica k_2, ktorá prechádza vrcholmi B, C a dotýka sa priamky AB, majú vonkajší dotyk v bode P. Dokážte, že uhly CPD a ABC sú zhodné.

(J. Švrček)

B – I – 6

V karteziánskej sústave súradníc Ouv znázornite množinu všetkých bodov $[u, v]$, kde $u > 0$, pre ktoré má rovnica

$$|x^2 - ux| + vx - 1 = 0$$

s neznámou x práve tri rôzne reálne riešenia.

(J. Šimša)

B – S – 1

Nájdite najväčšie päťmiestne prirodzené číslo, ktoré je deliteľné číslom 101 a ktoré sa číta odpredu rovnako ako odzadu.

(J. Šimša)

B – S – 2

Je daný konvexný štvoruholník $ABCD$. Označme P priesečník jeho uhlopriečok a Q priesečník spojníc stredov jeho protiľahlých strán. Ak bod Q leží na uhlopriečke BD, je bod P stredom uhlopriečky AC. Dokážte.

(E. Kováč)

B – S – 3

Koľko rôznych výsledkov môžeme dostať, ak sčítame každé dve z daných piatich rôznych prirodzených čísel? Pre každý možný počet uveďte príklad takej pätice čísel.

(P. Černek)

B – II – 1

Určte najväčší počet po sebe idúcich päťmiestnych prirodzených čísel, medzi ktorými nie je žiadny palindróm (t. j. číslo, ktoré sa číta odpredu rovnako ako odzadu).

(J. Šimša)

B – II – 2

V rovine je daný pravouhlý trojuholník ABC. Nech K je ľubovoľný bod prepony AB. Kružnica zostrojená nad úsečkou CK ako nad priemerom pretne odvesny BC a CA vo vnútorných bodoch, ktoré označíme postupne L a M. Rozhodnite, pre ktorý bod K má štvoruholník $ABLM$ najmenší možný obsah.

(J. Švrček)

B – II – 3

Určte všetky reálne čísla p, pre ktoré má rovnica

$$(x-1)^2 = 3|x| - px$$

práve tri rôzne riešenia v obore reálnych čísel.

(J. Šimša)

B – II – 4

V rovine je daný pravouhlý lichobežník $ABCD$ s dlhšou základňou AB a pravým uhlom pri vrchole A. Označme k_1 kružnicu zostrojenú nad stranou AD ako nad priemerom a k_2 kružnicu, ktorá prechádza bodmi B, C a dotýka sa priamky AB. Ak majú kružnice k_1, k_2 vonkajší dotyk v bode P, je priamka BC dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku CDP. Dokážte.

(J. Švrček)

Kategória A

A – I – 1

Postupnosť celých čísel $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ s prvým členom $x_1 = 1$ spĺňa podmienku

$$x_n = \pm x_{n-1} \pm \cdots \pm x_1$$

s vhodnou voľbou znamienok „+“ a „−“ pre ľubovoľné $n > 1$, napríklad $x_2 = -x_1$, $x_3 = -x_2 + x_1$, $x_4 = x_3 - x_2 - x_1$, … Pre dané n určte všetky možné hodnoty x_n.

(J. Földes)

A – I – 2

Na priamke p sú dané rôzne body A, B, C v tomto poradí, kde $|AB| = 1$ a $|BC| = h$. Uvažujme kružnice k_A, k_B, k_C, ktoré sa dotýkajú priamky p postupne v bodoch A, B, C. Kružnice k_A, k_B majú pritom vonkajší dotyk v bode P a kružnice k_B, k_C majú vonkajší dotyk v bode Q. Určte všetky také hodnoty polomeru kružnice k_B, pre ktoré je trojuholník BPQ rovnoramenný.

(J. Zhouf)

A – I – 3

Určte všetky možné hodnoty výrazu

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2},$$

kde a, b, c sú dĺžky strán trojuholníka.

(P. Kaňovský)

A – I – 4

Určte všetky prirodzené čísla $n > 1$ také, že v niektorej číselnej sústave so základom $z \geqq 5$ platí nasledovné kritérium deliteľnosti: Trojmiestne číslo $(abc)_z$ je deliteľné číslom n práve vtedy, keď je číslom n deliteľné číslo $c + 3b - 4a$.

(P. Černek)

A – I – 5

V rovine sú dané tri rôzne body K, L, M, ktoré v tomto poradí ležia na priamke. V tejto rovine nájdite množinu všetkých vrcholov C štvorcov $ABCD$ takých, že bod K leží na strane AB, bod L na uhlopriečke BD a bod M na strane CD.

(J. Šimša)

A – I – 6

Hráči A a B hrajú na doske zloženej zo šiestich polí očíslovaných $1, 2, \dots, 6$ nasledujúcu hru. Na začiatku je umiestnená na pole s číslom 2 figúrka a potom sa hádže bežnou hracou kockou. Ak padne číslo deliteľné tromi, posunie sa figúrka na pole s číslom o jedna menším, inak na pole s číslom o jedna väčším. Hra končí víťazstvom hráča A (resp. B), ak sa dostane figúrka na pole s číslom 1 (resp. 6). S akou pravdepodobnosťou zvíťazí hráč A?

(P. Černek)

A – S – 1

Hovoríme, že tri navzájom rôzne prirodzené čísla tvoria súčtovú trojicu, ak súčet prvých dvoch z nich sa rovná tretiemu číslu. Zistite, aký najväčší počet súčtových trojíc sa môže nachádzať v množine dvadsiatich prirodzených čísel.

(P. Černek)

A – S – 2

V rovine sú dané kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ tak, že $S_2 \in k_1$ a $r_1 > r_2$. Spoločné dotyčnice oboch kružníc sa dotýkajú kružnice k_1 v bodoch P a Q. Dokážte, že priamka PQ sa dotýka kružnice k_2.

(J. Földes)

A – S – 3

Zistite, pre ktoré reálne čísla p majú rovnice

$$x^3 + x^2 - 36x - p = 0,$$
$$x^3 - 2x^2 - px + 2p = 0$$

spoločný koreň.

(P. Černek)

A – II – 1

Nájdite základy z všetkých číselných sústav, v ktorých je štvormiestne číslo $(1001)_z$ deliteľné dvojmiestnym číslom $(41)_z$.

(P. Černek)

A – II – 2

Vnútri strany AB daného ostrouhlého trojuholníka ABC nájdite bod S tak, aby trojuholník SXY, kde X a Y sú postupne stredy kružníc opísaných trojuholníkom ASC a BSC, mal najmenší možný obsah.

(P. Černek)

A – II – 3

V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\log_x(y + z) = p,$$
$$\log_y(z + x) = p,$$
$$\log_z(x + y) = p$$

s neznámymi x, y, z a nezáporným celočíselným parametrom p.

(J. Švrček)

A – II – 4

Postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ s prvým členom $x_1 = 1$ spĺňa pre každé $n > 1$ podmienku

$$x_n = x_{n-1}^{\pm 1} + x_{n-2}^{\pm 1} + \ldots + x_1^{\pm 1}$$

s vhodnou voľbou znamienok „+“ a „−“ v exponentoch mocnín.

a) Rozhodnite, či niektorý člen takej postupnosti musí byť väčší ako 1 000.

b) Zistite najmenšiu možnú hodnotu člena $x_{1\,000\,000}$.

c) Dokážte, že nerovnosť $x_n < 4$ nemôže platiť pre deväť členov x_n takej postupnosti.

(J. Földes)

A – III – 1

V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$x^2 - xy + y^2 = 7,$$
$$x^2y + xy^2 = -2.$$

(J. Földes)

A – III – 2

Vnútri strán BC, CA, AB daného trojuholníka ABC zvolíme postupne body D, E, F tak, aby sa úsečky AD, BE, CF preťali v jednom bode, ktorý označíme G. Ak je možné štvoruholníkom $AFGE$, $BDGF$, $CEGD$ vpísať kružnice, z ktorých každé dve majú vonkajší dotyk, potom je trojuholník ABC rovnostranný. Dokážte.

(M. Tancer)

A – III – 3

Postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ s prvým členom $x_1 = 1$ spĺňa pre každé $n > 1$ podmienku

$$x_n = \pm(n-1)x_{n-1} \pm (n-2)x_{n-2} \pm \ldots \pm 2x_2 \pm x_1$$

s vhodnou voľbou znamienok „+“ a „−“. Rozhodnite, či je možné, aby nerovnosť $x_n \neq 12$ platila len pre konečne veľa indexov n.

(P. Černek)

A – III – 4

V rovine je daný tupý uhol AKS. Zostrojte trojuholník ABC tak, aby jeho strana BC ležala na priamke KS, aby bod S bol jej stredom a bod K jej priesečníkom s osou protiľahlého uhla BAC.

(P. Leischner)

A – III – 5

Ukážte, že v číselnej sústave s ľubovoľným základom $z \geqq 3$ existujú dvojmiestne čísla A a B, ktoré sa líšia len poradím svojich číslic a majú túto vlastnosť: Kvadratická rovnica

$x^2 - Ax + B = 0$ má v obore reálnych čísel dvojnásobný koreň. Dokážte tiež, že pre daný základ z je taká dvojica A, B jediná. Napríklad v desiatkovej sústave ($z = 10$) sú to jedine čísla $A = 18$ a $B = 81$.

(J. Šimša)

A – III – 6

Ak súčin kladných čísel a, b, c je rovný 1, potom platí

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqq a + b + c.$$

Dokážte.

(P. Kaňovský)

Riešenia súťažných úloh

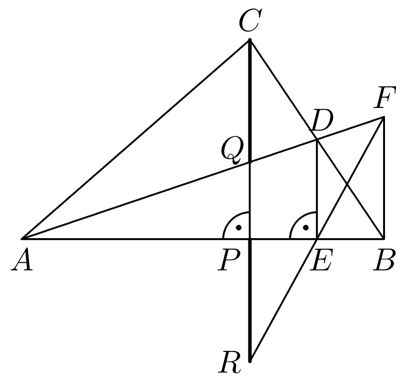
Kategória C

C – I – 1

Najväčší možný súčet by vytvorila pätica čísel 54 321, 54 321, 54 321, 54 321, 54 321. Keďže majú byť čísla navzájom rôzne, pokúsime sa zmeniť túto päticu tak, aby sa nenarušilo trojčíslie 543, t. j. aby zmena súčtu bola čo najmenšia. Tak ale budú ešte dve z piatich čísel rovnaké, pretože z číslic 1, 2 je možné zostaviť iba štyri rôzne dvojčíslia 11, 12, 21, 22. Zmeníme preto jedno trojčíslie 543 na 542 tak, že zameníme číslicu 2 číslicou 3 na mieste desiatok. Rovnako tak na mieste jednotiek nemôže byť všetkých päť jednotiek, pretože by posledné trojčíslie najmenej troch päťmiestnych čísel bolo 321. Vymeníme preto číslicu 1 z miesta jednotiek s číslicou 2 z miesta stoviek a to preto, aby zmena súčtu pätice čísel bola čo najmenšia. Po týchto výmenách môžu byť posledné dvojčíslia piatich čísel tieto: 31, 22, 21, 21, 11, alebo 31, 21, 21, 21, 12, alebo 32, 21, 21, 21, 11. Snažíme sa teraz rozmiestniť tieto dvojčíslia za trojčíslia 543, 543, 543, 543, 542. Zistíme, že vyhovuje iba prvá pätica dvojčíslí. Hľadaná pätica päťmiestnych čísel s najväčším možným súčtom je 54 331, 54 322, 54 321, 54 311, 54 221.

C – I – 2

Zo zadania vieme, že $|PR| = |CQ|$, preto aj $|QR| = |CP|$ (obr. 1). Úsečka DE je strednou priečkou trojuholníka CPB, preto $|DE| = |CP|/2$, a teda tiež $|DE| = |QR|/2$.



Obr. 1

Pretože $DE \parallel QR$, nemôžu byť úsečky RE a QD rovnobežné (inak by bol $REDQ$ rovnobežník a platilo by $|DE| = |QR|$). Preto sa priamky RE a QD pretínajú v bode, ktorý je na obrázku označený ako F, a úsečka DE je strednou priečkou trojuholníkov CPB a QRF, ktorých strany CP a QR ležia na jednej priamke. Preto je vzdialenosť bodov F a B od priamky CR rovnaká, čiže priamky CR a FB sú rovnobežné, a teda priamka FB je (rovnako ako priamka CR) kolmá na priamku AB.

C – I – 3

Nech naše pôvodné úspory sú x Sk a nech ročná úroková miera v banke A (resp. v banke B) je $p\,\%$ (resp. $q\,\%$), t.j. vklad v banke A (resp. v banke B) narastie po jednom roku a-krát (resp. b-krát), kde $a = 1 + p/100$ a $b = 1 + q/100$. Podľa zadania platí

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{6}\cdot x\right)\cdot a + \left(\frac{1}{6}\cdot x\right)\cdot b &= 67\,000,\\ \left[\left(\frac{5}{6}\cdot x\right)\cdot a\right]\cdot a + \left[\left(\frac{1}{6}\cdot x\right)\cdot b\right]\cdot b &= 74\,900,\\ \left(\frac{1}{6}\cdot x\right)\cdot a + \left(\frac{5}{6}\cdot x\right)\cdot b &= 71\,000, \end{aligned}$$

a po úprave

$$\begin{aligned} 5\cdot\frac{xa}{6} + \frac{xb}{6} &= 67\,000,\\ 5\cdot\frac{xa}{6}\cdot a + \frac{xb}{6}\cdot b &= 74\,900,\\ \frac{xa}{6} + 5\cdot\frac{xb}{6} &= 71\,000. \end{aligned}$$

Keď označíme $u = xa/6$ a $v = xb/6$, prejdú prvá a tretia rovnica na sústavu

$$\begin{aligned} 5u + v &= 67\,000,\\ u + 5v &= 71\,000, \end{aligned}$$

z ktorej vychádza $u = 11\,000$ a $v = 12\,000$. Pretože $a = 6u/x$ a $b = 6v/x$, dá sa druhá rovnica sústavy zapísať ako

$$\frac{5}{6}\cdot x\cdot\frac{36u^2}{x^2} + \frac{1}{6}\cdot x\cdot\frac{36v^2}{x^2} = 74\,900,$$

alebo aj

$$\frac{30u^2 + 6v^2}{x} = 74\,900,$$

odkiaľ pre $u = 11\,000$ a $v = 12\,000$ vychádza $x = 60\,000$, preto

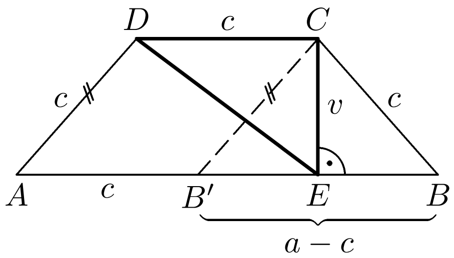
$$\begin{aligned} a &= \frac{6u}{x} = \frac{66\,000}{60\,000} = 1{,}1,\\ b &= \frac{6v}{x} = \frac{72\,000}{60\,000} = 1{,}2. \end{aligned}$$

Hľadaná čiastka je preto rovná

$$\left(\frac{1}{6}\cdot x\cdot a^2+\frac{5}{6}\cdot x\cdot b^2\right)\ \text{Sk}=(10\,000\cdot 1{,}1^2+50\,000\cdot 1{,}2^2)\ \text{Sk}=$$
$$=84\,100\ \text{Sk}.$$

C – I – 4

Rozbor: Ak označíme $|AB|=a$, $|CD|=c$ a výšku lichobežníka v (obr. 2), môžeme pre



Obr. 2

jeho obsah S písať

$$S=\frac{1}{2}(a+c)v.$$

Obsah trojuholníka AED je podľa zadania rovný

$$\frac{|AE|\cdot v}{2}=\frac{1}{2}\cdot S=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(a+c)v,$$

odkiaľ vyplýva, že $|AE|=(a+c)/2$ (t. j. úsečka AE má dĺžku rovnakú ako stredná priečka lichobežníka $ABCD$). Pretože bod E leží na úsečke AB, platí

$$|EB|=|AB|-|AE|=a-\frac{1}{2}(a+c)=\frac{1}{2}(a-c),$$

takže $a>c$. Ak označíme B' bod úsečky AB, pre ktorý $|AB'|=c$, bude $|B'B|=$ $=a-c$, a pretože hľadaný lichobežník $ABCD$ je rovnoramenný, je rovnoramenný aj trojuholník $B'BC$, takže stred E úsečky $B'B$ je zároveň pätou výšky z vrcholu C na základňu AB (obr. 2). Pomocou Pytagorovej vety vypočítame, že

$$c=\sqrt{|DE|^2-v^2}=\sqrt{5^2-3^2}\ \text{cm}=4\ \text{cm}.$$

Popis konštrukcie:
1. $\triangle DEC$; $|DC|=4\ \text{cm}$, $|CE|=3\ \text{cm}$, $|\sphericalangle ECD|=90°$;
2. p; $p\parallel CD$, $E\in p$;

3. $k(D, 4\,\text{cm})$, $l(C, 4\,\text{cm})$;
4. A; $A \in p \cap k$, uhol ADC je tupý;
5. B; $B \in p \cap l$, uhol BCD je tupý.

Úloha má jediné riešenie.

C – I – 5

Nech číslo $n = \overline{abcd} = 1\,000a + 100b + 10c + d$, kde $a, b, c, d \in \{0, 1, \dots, 9\}$, $a \neq 0$. Číslo $m + n$ je štvormiestne, preto je číslo m najviac štvormiestne. Rozoberieme jednotlivé prípady podľa počtu číslic m.

1. Číslo m je jednomiestne, t. j. $m = \overline{x} = x$, kde $x \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Podľa zadania úlohy jednak

$$m + n = 1\,000a + 100b + 10c + d + x,$$

jednak

$$m + n = 1\,000d + 100c + 10b + a.$$

Odtiaľ postupne dostaneme

$$1\,000a + 100b + 10c + d + x = 1\,000d + 100c + 10b + a,$$
$$x = 999(d - a) + 90(c - b).$$

Pravá strana poslednej rovnosti je deliteľná deviatimi, preto môže byť jedine $x = 9$. Po dosadení tejto hodnoty do rovnosti a vykrátení deviatimi vychádza

$$1 = 111(d - a) + 10(c - b),$$
$$10(b - c) + 1 = 111(d - a).$$

Z nerovností $-9 \leqq b - c \leqq 9$ vyplýva $-89 \leqq 10(b - c) + 1 \leqq 91$. Medzi číslami -89 a 91 je jediný násobok 111, a to číslo 0. Rovnosť $10(b - c) + 1 = 0$ však nie je splnená. Žiadne jednomiestne číslo m teda nie je riešením danej úlohy.

2. Číslo m je dvojmiestne, t. j. $m = \overline{xx} = 10x + x = 11x$, kde $x \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Analogicky ako v predchádzajúcom prípade môžeme postupne písať

$$1\,000a + 100b + 10c + d + 11x = 1\,000d + 100c + 10b + a,$$
$$11x = 999(d - a) + 90(c - b).$$

Pravá strana poslednej rovnosti je deliteľná deviatimi, preto môže byť jedine $x = 9$. Potom

$$11 = 111(d - a) + 10(c - b),$$
$$10(b - c) + 11 = 111(d - a).$$

Tu máme $-79 \leqq 10(b - c) + 11 \leqq 101$, odkiaľ vyplýva jediná možnosť $10(b - c) + 11 = 0$, ktorá však neplatí pre žiadne číslice b, c. Žiadne dvojmiestne číslo m teda nie je riešením danej úlohy.

3. Číslo m je trojmiestne, t. j. $m = \overline{xxx} = 100x + 10x + x = 111x$, kde $x \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Opäť môžeme písať

$$\begin{aligned} 1\,000a + 100b + 10c + d + 111x &= 1\,000d + 100c + 10b + a, \\ 111x &= 999(d-a) + 90(c-b), \\ 37x &= 333(d-a) + 30(c-b). \end{aligned}$$

Pravá strana poslednej rovnosti je deliteľná tromi a číslo 37 nie je deliteľné tromi, preto musí byť $x = 3$, alebo $x = 6$, alebo $x = 9$.

Nech $x = 3$. Potom

$$\begin{aligned} 37 &= 111(d-a) + 10(c-b), \\ 10(b-c) + 37 &= 111(d-a). \end{aligned}$$

Tu máme $-53 \leqq 10(b-c) + 37 \leqq 127$, odkiaľ buď $10(b-c) + 37 = 0$, alebo $10(b-c) + 37 = 111$. Ani jedna z posledných dvoch rovností však nie je splnená pre žiadne číslice b, c.

Nech $x = 6$. Potom

$$\begin{aligned} 74 &= 111(d-a) + 10(c-b), \\ 10(b-c) + 74 &= 111(d-a). \end{aligned}$$

Tu máme $-16 \leqq 10(b-c) + 74 \leqq 164$, odkiaľ buď $10(b-c) + 74 = 0$, alebo $10(b-c) + 74 = 111$. Ani jedna z posledných dvoch rovností však nie je splnená pre žiadne číslice b, c.

Nech $x = 9$. Potom

$$\begin{aligned} 111 &= 111(d-a) + 10(c-b), \\ 10(b-c) &= 111(d-a-1). \end{aligned}$$

Tu máme $-90 \leqq 10(b-c) \leqq 90$, odkiaľ jedine $10(b-c) = 0$ a $111(d-a-1) = 0$, t. j. jedine $c - b = 0$ a $d - a = 1$. Riešením danej úlohy sú teda čísla $n \in \{\overline{1\,bb2}, \overline{2\,bb3}, \overline{3\,bb4}, \overline{4\,bb5}, \overline{5\,bb6}, \overline{6\,bb7}, \overline{7\,bb8}, \overline{8\,bb9}\}$ pre $b \in \{0, 1, \dots, 9\}$, t. j. celkom 80 čísel. Číslo m je rovné 999.

4. Číslo m je štvormiestne, t. j. $m = \overline{xxxx} = 1\,111x$, kde $x \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Opäť môžeme písať

$$1\,111x = 999(d-a) + 90(c-b).$$

Opäť môže byť jedine $x = 9$, čo dáva rovnosť

$$10(b-c) + 1\,111 = 111(d-a).$$

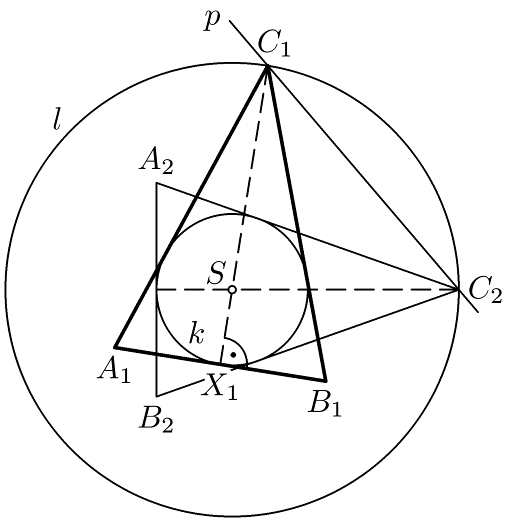
Platí jednak $10(b-c) + 1\,111 \geqq 1\,111 - 90 = 1\,021$, jednak $111(d-a) \leqq 999$. Preto žiadne štvormiestne číslo m nie je riešením danej úlohy.

Záver: Úloha má 80 riešení, a to čísla $m = 999$ a

$$n \in \left\{\overline{1\,bb2}, \overline{2\,bb3}, \overline{3\,bb4}, \overline{4\,bb5}, \overline{5\,bb6}, \overline{6\,bb7}, \overline{7\,bb8}, \overline{8\,bb9}\right\}$$
$$\text{pre } b \in \{0, 1, \dots, 9\}.$$

C – I – 6

Rozbor: Predpokladajme, že požadovaný trojuholník ABC je zostrojený. Stred kružnice vpísanej ľubovoľnému trojuholníku leží na osiach jeho vnútorných uhlov. Podľa zadania leží stred kružnice k na ťažnici t_c trojuholníka ABC, preto os vnútorného uhla pri vrchole C splýva s ťažnicou t_c. Trojuholník ABC je teda rovnoramenný so základňou AB (obr. 3). Keď leží stred S kružnice k s polomerom r vo štvrtine ťažnice t_c, leží teda vo vzdialenosti r od strany AB a vo vzdialenosti $3r$ od vrcholu C. (Bod S nemôže mať od vrcholu C vzdialenosť $r/3$, lebo by bod C ležal vo vnútornej oblasti kružnice k, ktorá je však trojuholníku ABC vpísaná, takže body A, B, C ležia v jej vonkajšej oblasti.) Bod C je teda priesečníkom priamky p a kružnice l so stredom S a polomerom $3r$.



Obr. 3

Popis konštrukcie:
1. dané: $k(S, r)$, p;
2. $l(S, 3r)$;
3. C; $C \in p \cap l$;
4. X; $X \in \rightarrow CS$, $|XC| = 4r$;
5. x; $x \perp XC$, $X \in x$;
6. dotyčnice a, b z bodu C ku k (napr. pomocou Tálesovej kružnice nad priemerom CS);
7. A, B; $A \in x \cap b$, $B \in x \cap a$.

Diskusia pre prípad, že poradie vrcholov A, B, C je proti smeru pohybu hodinových ručičiek:

Úloha má dve riešenia $\iff$ $|Sp| < 3r$;
úloha má jedno riešenie $\iff$ $|Sp| = 3r$;
úloha nemá žiadne riešenie $\iff$ $|Sp| > 3r$.

C – S – 1

Označme hľadané číslo $10a + b$, kde a, b sú celé čísla, $a \geqq 1$, $0 \leqq b \leqq 9$. Podľa zadania má platiť

$$10a + b = |a^2 - b^2|.$$

Predpokladajme najprv, že $a \geqq b$. V tom prípade jednoduchými úpravami dostávame

$$\begin{aligned} 10a + b &= a^2 - b^2, \\ a^2 - 10a + 25 &= b^2 + b + 25, \\ (a-5)^2 &= b^2 + b + 25. \end{aligned}$$

Do poslednej rovnosti potom postupne dosadzujeme $b = 0$, $b = 1, \ldots, b = 9$ a zisťujeme, či výraz $b^2 + b + 25$ je druhou mocninou nejakého nezáporného celého čísla. Rovnici vyhovujú dvojice $b = 0$, $a = 0$; $b = 0$, $a = 10$; $b = 7$, $a = 14$.

V prípade, keď $a < b$, obdobnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} 10a + b &= b^2 - a^2, \\ a^2 + 10a + 25 &= b^2 - b + 25, \\ (a+5)^2 &= b^2 - b + 25 \end{aligned}$$

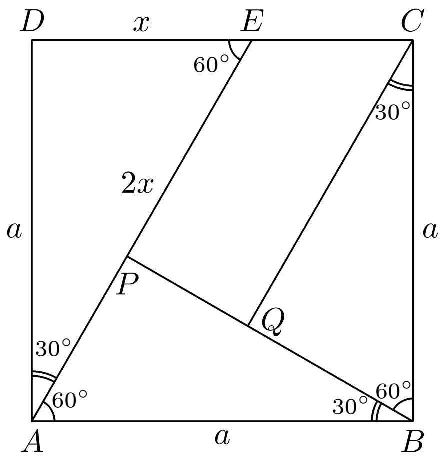
a podobne ako v prvom prípade získame dvojice $b = 0$, $a = 0$; $b = 1$, $a = 0$; $b = 8$, $a = 4$.

Záver: S prihliadnutím k podmienkam zadania sú riešením úlohy tri čísla 48, 100, 147.

C – S – 2

Označme a dĺžku strany štvorca $ABCD$. Trojuholníky AED, BAP a CBQ sú podobné podľa vety *uu*, pričom trojuholníky BAP a CBQ sú dokonca zhodné (obr. 4). Trojuholník AED je polovicou rovnostranného trojuholníka so stranou AE. Ak označíme

$|ED| = x$, tak $|AE| = 2x$.



Obr. 4

V pravouhlom trojuholníku AED platí

$$a = |AD| = \sqrt{|AE|^2 - |ED|^2} = \sqrt{4x^2 - x^2} = x\sqrt{3},$$

odkiaľ $x = \left(\sqrt{3}/3\right) a$. (Veľkosť x môžeme tiež spočítať použitím goniometrického vzorca $x : a = |ED| : |AD| = \operatorname{tg} 30^\circ = \sqrt{3}/3$.)

Trojuholníky BAP a CBQ sú polovicami rovnostranného trojuholníka so stranou a. Rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky a má výšku $\left(\sqrt{3}/2\right) a$ a jeho obsah je $\left(\sqrt{3}/4\right) a^2$. Súčet obsahov trojuholníkov AED, BAP a CBQ je teda

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} a \cdot a + \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{5\sqrt{3}}{12} a^2.$$

Keďže obsah štvorca $ABCD$ je a^2, je pomer obsahov lichobežníka $PQCE$ a štvorca $ABCD$ rovný

$$\frac{a^2 - \frac{5}{12}\sqrt{3}a^2}{a^2} = \frac{12 - 5\sqrt{3}}{12},$$

čo je číslo menšie ako 0,29.

Záver: Obsah lichobežníka $PQCE$ je menší ako tretina obsahu štvorca $ABCD$.

Pre zaujímavosť uvedieme ešte jedno riešenie, v ktorom ukážeme, že skúmaný obsah sa dá odhadnúť pomocou úvah o vzájomnej polohe vhodných bodov (bez výpočtu dĺžok a obsahu).

Iné riešenie. Pretože nás zaujímajú len pomery obsahov, môžeme predpokladať, že $ABCD$ je štvorec so stranou 1. V stredovej súmernosti podľa stredu štvorca O

prejdú body E, P a Q do bodov, ktoré označíme G, R a S (obr. 5). Z pravouhlého trojuholníka AED s uhlom 60° pri vrchole E vyplýva

$$|DE| = \frac{1}{2}|AE| > \frac{1}{2}|AD| = \frac{1}{2},$$

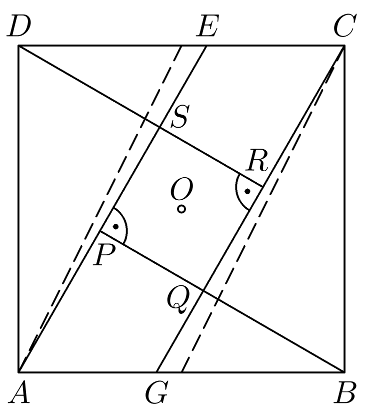
takže pre obsah rovnobežníka $AGCE$ platí nerovnosť

$$S_{AGCE} < \frac{1}{2}.$$

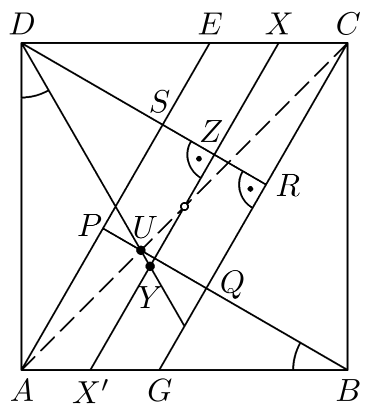
Zároveň sa zdá, že zhodné lichobežníky $RCES$ a $AGQP$ majú väčší obsah ako štvorec $PQRS$. Ak to tak naozaj je, musí byť $S_{RCES} > S_{AGCE}/3$, takže nutne platí

$$S_{PQCE} = S_{AGCE} - S_{AGQP} = S_{AGCE} - S_{RCES} < \\ < \frac{2}{3}S_{AGCE} < \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Tým bude úloha vyriešená.



Obr. 5



Obr. 6

Strana SR štvorca $PQRS$ je súčasne výškou lichobežníka $RCES$. Preto bude nerovnosť $S_{PQRS} < S_{RCES}$ dokázaná, keď overíme, že strana štvorca je kratšia ako stredná priečka lichobežníka. Tou je úsečka XZ, kde Z označuje stred úsečky SR, čo je zároveň päta výšky rovnostranného trojuholníka XYD (obr. 6). Označme U priesečník uhlopriečky AC daného štvorca s úsečkou PQ. Týmto bodom prechádza aj priamka DY, ktorá je súmerne združená s priamkou BP práve podľa osi AC, pretože $|\sphericalangle YDA| = |\sphericalangle ABP| = 30°$. To však znamená, že bod Y, ktorý je priesečníkom DU a XZ, leží mimo štvorca $PQRS$! Preto naozaj $|XZ| = |ZY| > |QR|$. Obsah lichobežníka $PQCE$ je teda menší ako tretina obsahu štvorca $ABCD$.

C – S – 3

Označme a zapíšme v desiatkovej sústave päť päťmiestnych čísel, ktoré sa čítajú spredu rovnako ako zozadu a sú zostavené z daných číslic:

$$\begin{aligned}
\overline{a_1b_1c_1b_1a_1} &= a_1\cdot 10^4 + b_1\cdot 10^3 + c_1\cdot 10^2 + b_1\cdot 10 + a_1,\\
\overline{a_2b_2c_2b_2a_2} &= a_2\cdot 10^4 + b_2\cdot 10^3 + c_2\cdot 10^2 + b_2\cdot 10 + a_2,\\
\overline{a_3b_3c_3b_3a_3} &= a_3\cdot 10^4 + b_3\cdot 10^3 + c_3\cdot 10^2 + b_3\cdot 10 + a_3,\\
\overline{a_4b_4c_4b_4a_4} &= a_4\cdot 10^4 + b_4\cdot 10^3 + c_4\cdot 10^2 + b_4\cdot 10 + a_4,\\
\overline{a_5b_5c_5b_5a_5} &= a_5\cdot 10^4 + b_5\cdot 10^3 + c_5\cdot 10^2 + b_5\cdot 10 + a_5.
\end{aligned}$$

Medzi číslicami c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 je práve jedna jednotka, práve jedna dvojka, práve jedna trojka, práve jedna štvorka a práve jedna päťka. Keby totiž na mieste stoviek uvažovaných piatich čísel chýbala napr. jednotka, musela by sa na miestach ostatných rádov vyskytovať v nepárnom počte (päťkrát), čo vzhľadom na symetriu uvažovaných čísel nie je možné. Pre súčet S uvažovaných čísel teda platí

$$\begin{aligned}
S &= \overline{a_1b_1c_1b_1a_1} + \overline{a_2b_2c_2b_2a_2} + \overline{a_3b_3c_3b_3a_3} + \overline{a_4b_4c_4b_4a_4} + \overline{a_5b_5c_5b_5a_5} =\\
&= (a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)\cdot(10^4+1) +\\
&\quad + (b_1+b_2+b_3+b_4+b_5)\cdot(10^3+10) +\\
&\quad + (c_1+c_2+c_3+c_4+c_5)\cdot 10^2 =\\
&= 10\,001\cdot(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5) + 1\,010\cdot(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5) +\\
&\quad + 100\cdot(1+2+3+4+5) =\\
&= 10\,001\cdot(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5) +\\
&\quad + 1\,010\cdot(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5) + 1\,500.
\end{aligned}$$

S ohľadom na číslice, ktoré máme k dispozícii, bude súčet S najmenší, keď bude

$$\begin{aligned}
a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 &= 1+1+2+2+3 = 9,\\
b_1+b_2+b_3+b_4+b_5 &= 5+5+4+4+3 = 21.
\end{aligned}$$

Najmenší možný súčet má teda hodnotu

$$S_{\min} = 10\,001\cdot 9 + 1\,010\cdot 21 + 1\,500 = 112\,719$$

a vznikne napr. ako súčet

$$S_{\min} = 13\,131 + 14\,241 + 24\,342 + 25\,452 + 35\,553.$$

Podobne bude súčet S najväčší, keď bude

$$\begin{aligned}
a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 &= 5+5+4+4+3 = 21,\\
b_1+b_2+b_3+b_4+b_5 &= 1+1+2+2+3 = 9.
\end{aligned}$$

Najväčší možný súčet má teda hodnotu

$$S_{\max} = 10\,001 \cdot 21 + 1\,010 \cdot 9 + 1\,500 = 220\,611$$

a vznikne napr. ako súčet

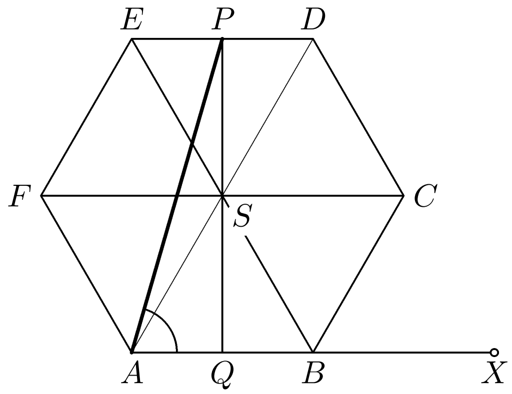
$$S_{\max} = 53\,535 + 52\,425 + 42\,324 + 41\,214 + 31\,113.$$

C – II – 1

Pre každé z dvojmiestnych prvočísiel 97, 89, 83, 79, 73, … hľadáme jeho najmenší násobok, ktorý prevyšuje číslo 2 003. Vzhľadom na to, že medzi k po sebe idúcimi celými číslami je práve jedno deliteľné k, a pretože $97 \cdot 21 = 2\,037$, $89 \cdot 23 = 2\,047$, $83 \cdot 25 = 2\,075$, $79 \cdot 26 = 2\,054$, musí byť $2\,003 + n \geqq 2\,075$, teda $n \geqq 72$. Pre také n máme zaručené, že pre každé z prvočísiel 97, 89, 83, 79 je medzi číslami 2 003, 2 004, 2 005, …, $2\,003 + n$ aspoň jedno ním deliteľné. Medzi uvedenými 73 číslami 2 003 až 2 075 je vždy aspoň jedno deliteľné prvočíslom 73, aspoň jedno deliteľné prvočíslom 71 atď. Hľadané číslo n je teda 72.

C – II – 2

V pravidelnom šesťuholníku $ABCDEF$ so stredom S, v ktorom Q je stred strany AB a P je stred strany DE, poznáme veľkosť uhla PAQ (obr. 7), pretože všetky pravidelné



Obr. 7

šesťuholníky sú navzájom podobné. V pravouhlom trojuholníku APQ teda poznáme dĺžku prepony AP a veľkosti dvoch uhlov (AQP je pravý uhol). Odtiaľ vyplýva postup *konštrukcie*:

1. úsečka AP;
2. Tálesova kružnica k nad priemerom AP;
3. polpriamka AX, ktorá zviera s úsečkou AP uhol veľkosti PAQ (ten zostrojíme pomocou ľubovoľného pravidelného šesťuholníka);

4. bod Q ako priesečník kružnice k s polpriamkou AX;
5. stred S úsečky PQ;
6. kružnica so stredom S a polomerom $|SQ|$;
7. pravidelný šesťuholník $ABCDEF$.

Úloha má dve riešenia súmerne združené podľa osi AP podľa toho, v ktorej polrovine s hraničnou priamkou AP zostrojíme polpriamku AX (bod 3 konštrukcie).

C – II – 3

V prvom prípade platí

$$1\,000p \cdot \frac{p}{100} + 1\,000q \cdot \frac{q}{100} = 1\,000(p+q) \cdot \frac{p+2{,}4}{100},$$

v druhom prípade platí

$$1\,000p \cdot \frac{2p}{100} + 1\,000q \cdot \frac{2q}{100} = 1\,000(p+q) \cdot \frac{p+5{,}8}{100}.$$

Úpravou oboch rovníc získame sústavu

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 &= (p+2{,}4)(p+q), \qquad (1)\\ 2p^2 + 2q^2 &= (p+5{,}8)(p+q). \end{aligned}$$

Pretože ľavá strana druhej rovnice je dvojnásobkom ľavej strany prvej rovnice, musí platiť

$$2(p+2{,}4)(p+q) = (p+5{,}8)(p+q).$$

Odtiaľ po vykrátení nenulovým výrazom $p+q$ vychádza $p = 1$. Dosadením tejto hodnoty napr. do rovnice (1) a po úprave získame kvadratickú rovnicu

$$q^2 - 3{,}4q - 2{,}4 = 0.$$

Pretože hľadáme celočíselné korene, prepíšeme rovnicu do tvaru

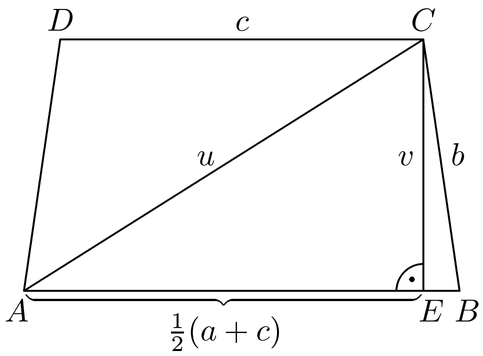
$$q(5q - 17) = 12$$

a ľahko zistíme, že medzi deliteľmi čísla 12 rovnici vyhovuje jedine $q = 4$.

C – II – 4

Označme E pätu kolmice spustenej z vrcholu C na základňu AB rovnoramenného lichobežníka $ABCD$ a jednotlivé dĺžky úsečiek označme takto (obr. 8): $|AB| = a = 12$,

$|BC| = b$, $|CD| = c = 10$, $|AC| = u$, $|CE| = v$. Potom $|BE| = (a-c)/2 = 1$, $|AE| = (a+c)/2 = 11$. Podľa Pytagorovej vety pre trojuholníky AEC a EBC môžeme teda



Obr. 8

písať

$$v^2 = u^2 - 11^2 = b^2 - 1^2, \tag{1}$$

alebo

$$u^2 - b^2 = 11^2 - 1^2 = 120.$$

Odtiaľ je vidieť, že čísla u a b sú zároveň obe párne, alebo obe nepárne, preto v rozklade

$$(u-b)(u+b) = 120 = 2 \cdot 60 = 4 \cdot 30 = 6 \cdot 20 = 10 \cdot 12$$

prichádzajú do úvahy len uvedené rozklady čísla 120 na párne činitele. Uvedeným rozkladom potom odpovedajú štyri sústavy rovníc pre neznáme u a b:

$$\begin{aligned} u-b&=2, & u-b&=4, & u-b&=6, & u-b&=10,\\ u+b&=60; & u+b&=30; & u+b&=20; & u+b&=12. \end{aligned}$$

Ich riešením (najlepšie tak, že vždy odčítame druhú rovnicu od prvej) dostaneme pre dĺžku ramena b lichobežníka $ABCD$ štyri možnosti, $b \in \{29, 13, 7, 1\}$. Z rovnosti (1) však vidíme, že musí byť $b > 1$, úlohe teda vyhovujú len prvé tri hodnoty.

Odpoveď. Možná dĺžka ramena lichobežníka je buď 7, alebo 13, alebo 29.

Kategória B

B – I – 1

Každý štvormiestny palindróm $p = \overline{abba}$ sa dá zapísať v tvare

$$p = a \cdot 1001 + b \cdot 110,$$

kde $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$ a $b \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Potom druhá mocnina čísla $\overline{abba}$ má tvar

$$\begin{aligned} p^2 &= a^2 \cdot 1\,002\,001 + 2ab \cdot 110\,110 + b^2 \cdot 12\,100 = \\ &= a^2 \cdot 10^6 + 2ab \cdot 10^5 + (b^2 + 2ab) \cdot 10^4 + \\ &\quad + (2a^2 + 2b^2) \cdot 10^3 + (b^2 + 2ab) \cdot 10^2 + 2ab \cdot 10^1 + a^2. \end{aligned}$$

Posledná číslica čísla p^2 je teda rovnaká ako posledná číslica čísla a^2.

Pre $a \geqq 4$ je číslo p^2 nutne osemmiestne. Jeho prvá číslica je rovná jednej z hodnôt c, $c+1$, $c+2$, kde c je prvá číslica dvojmiestneho čísla a^2. (Maximálny prenos z nižšieho rádu je rovný číslu 2.) Ak je ale dané číslo opäť palindróm, je jeho prvá aj posledná číslica rovnaká. Porovnaním prvej a poslednej číslice u čísel 16, 25, 36, 49, 64, 81 vidíme, že žiadne z nich nie je tvaru $\overline{c(c+2)}$, $\overline{c(c+1)}$ alebo $\overline{cc}$.

Ak $a = 3$ a $b \geqq 2$, je číslo p^2 opäť osemmiestne, jeho posledná číslica je 9 a prvá je 1, nejedná sa teda o palindróm.

Vo všetkých ostatných prípadoch je číslo p^2 sedemmiestne. Pretože a^2 je iba jednomiestne a zápis čísla p^2 je symetrický, musia byť nutne všetky tri hodnoty $2ab$, $2ab + b^2$, $2a^2+2b^2$ menšie ako 10, aby nedošlo k prenosu do vyššieho rádu. Diskutujme tri prípady:

- $a = 3$: nerovnici $2 \cdot 3^2 + 2b^2 < 10$ nevyhovuje žiadne b,
- $a = 2$: nerovnici $2 \cdot 2^2 + 2b^2 < 10$ vyhovuje iba $b = 0$,
- $a = 1$: nerovnici $2 \cdot 1^2 + 2b^2 < 10$ vyhovuje iba $b = 0$, $b = 1$.

Záver: Najväčším štvormiestnym palindrómom spĺňajúcim podmienky úlohy je číslo 2 002.

B – I – 2

Keď pripočítame k prvej rovnici trojnásobok rovnice druhej, získame rovnicu

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 27z^3.$$

Jej úpravou dostaneme

$$(x+y)^3 = (3z)^3, \qquad \text{t. j.} \qquad x + y = 3z.$$

Dosadením tohto výrazu do ľavej strany druhej rovnice sústavy dostaneme

$$x^2y + xy^2 = xy(x+y) = 3xyz, \qquad \text{t. j.} \qquad 3xyz = 6z^3.$$

Rozlíšime dva prípady.

Ak $z = 0$, je posledná rovnica splnená pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$. Z prvej rovnice sústavy získame $x^3 + y^3 = 0$, t. j. $y = -x$. Riešením je každá trojica $(t, -t, 0)$, kde t je ľubovoľné reálne číslo.

Ak $z \neq 0$, tak $xy = 2z^2$. Spolu s rovnicou $x + y = 3z$ dostávame sústavu

$$\begin{aligned} x + y &= 3z, \\ xy &= 2z^2 \end{aligned}$$

dvoch rovníc o dvoch neznámych x, y s parametrom z. Elimináciou napr. neznámej y dostaneme kvadratickú rovnicu

$$x^2 - 3zx + 2z^2 = 0.$$

Zo vzťahov medzi koreňmi a koeficientmi kvadratickej rovnice získame riešenie v tvare $x = z$, $y = 2z$ alebo $x = 2z$, $y = z$. Riešením je teda každá trojica $(t, 2t, t)$ a $(2t, t, t)$, kde t je ľubovoľné reálne číslo (rôzne od nuly).

Záver: Sústava má riešenie $(t, 2t, t)$ a $(2t, t, t)$ pre každé $t \neq 0$, $(t, -t, 0)$ pre každé t a žiadne iné riešenie nemá.

Iné riešenie. Prvú rovnicu vynásobíme dvoma a odčítame od nej trojnásobok rovnice druhej (vylúčime tak neznámu z). Získame rovnicu

$$2x^3 + 2y^3 - 3x^2y - 3xy^2 = 0.$$

Ľavú stranu rovnice postupne upravíme na tvar

$$\begin{aligned} 2(x+y)(x^2 - xy + y^2) - 3(x+y)xy &= 0, \\ (x+y)(2x^2 - 5xy + 2y^2) &= 0, \\ (x+y)(2x-y)(x-2y) &= 0. \end{aligned}$$

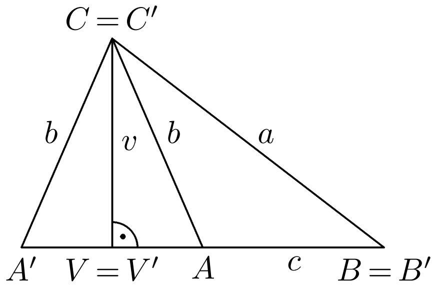
Môžu teda nastať tri prípady:

- $x + y = 0$, potom $y = -x$. Dosadením do prvej rovnice sústavy dostaneme $9z^3 = x^3 + (-x)^3 = 0$, t. j. $z = 0$.
- $2x - y = 0$, potom $y = 2x$. Dosadením do prvej rovnice sústavy dostaneme $9z^3 = x^3 + (2x)^3 = 9x^3$, t. j. $z = x$.
- $x - 2y = 0$, potom $x = 2y$. Dosadením do prvej rovnice sústavy dostaneme $9z^3 = (2y)^3 + y^3 = 9y^3$, t. j. $z = y$.

Záver: Riešením sú všetky trojice $(t, -t, 0)$, $(t, 2t, t)$ a $(2t, t, t)$, kde t je ľubovoľné reálne číslo.

B – I – 3

Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že platí $a \geqq b$. Ak je obsah trojuholníka $A'B'C'$ so stranami dĺžok a, b, $2c$ rovný dvojnásobnému obsahu trojuholníka ABC so stranami dĺžok a, b, c, sú výšky CV a $C'V'$ týchto trojuholníkov zhodné. Trojuholníky ACV a $A'C'V'$ sú teda zhodné podľa vety Ssu, preto môžeme oba trojuholníky ABC a $A'B'C'$ premiestniť tak, aby platilo $B = B'$, $C = C'$ a $V = V'$; potom už však nemôže platiť $A = A'$. Ak je poloha bodov A a A' na priamke BV? Pretože $b = |AC| = |A'C|$, je trojuholník $AA'C$ rovnoramenný a jeho základňa AA' má stred v bode V (obr. 9). Predpoklad $a \geqq b$ znamená, že $|AC| = |A'C| \leqq |BC|$, takže bod B neleží na úsečke AA';



Obr. 9

pretože $|AB| = c$ a $|A'B| = 2c$, leží bod B na polpriamke opačnej k AA' tak, že bod A je stredom úsečky $A'B$. Z pravouhlých trojuholníkov AVC a BVC vyplýva

$$v^2 = a^2 - \left(\frac{3}{2}c\right)^2,$$
$$v^2 = b^2 - \left(\frac{1}{2}c\right)^2.$$

Porovnaním pravých strán dostaneme po úprave

$$a^2 - b^2 = 2c^2.$$

Ukázali sme tak, že ak k danému trojuholníku ABC existuje trojuholník so stranami a, b, $2c$ a obsahom $2S$, tak pre dĺžky a, b, c musí byť splnená rovnosť $|a^2 - b^2| = 2c^2$.

Predpokladajme naopak, že pre veľkosti strán a, b, c trojuholníka ABC platí $|a^2 - b^2| = 2c^2$. Najprv ukážeme, že trojuholník so stranami a, b, $2c$ existuje, t. j. že platí trojuholníková nerovnosť

$$a + b > 2c > |a - b|.$$

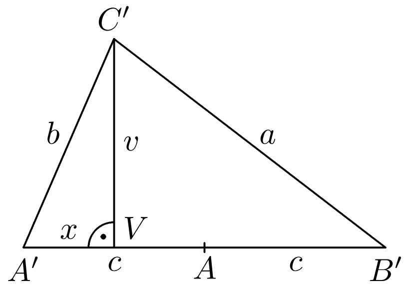
Pre trojuholník ABC platí trojuholníková nerovnosť $a + b > c > |a - b|$. Preto platí $2c > c > |a - b|$. Keď ďalej vynásobíme obe strany nerovnosti $c > |a - b|$ kladným výrazom $a + b$, obdržíme nerovnosť

$$c(a + b) > |a^2 - b^2| = 2c^2,$$

z ktorej po delení c vyplýva nerovnosť

$$a + b > 2c.$$

Predpokladajme teraz, že v trojuholníku $A'B'C'$ so stranami a, b, $2c$ platí rovnosť $2c^2 = a^2 - b^2$ (opäť bez ujmy na všeobecnosti predpokladáme, že $a > b$ – tu nemôže byť $a = b$, pretože by bolo $c = 0$). Vysvetlíme, prečo päta V výšky z vrcholu C' na stranu $A'B'$ padne dovnútra tejto strany (a nie na jej predĺženie). K tomu stačí ukázať, že trojuholník $A'B'C'$ má ostré vnútorné uhly pri vrcholoch A' aj B' (obr. 10). Uhol $A'B'C'$ je menší ako uhol $B'A'C'$, lebo predpokladáme, že $a > b$. Uhol $B'A'C'$ je



Obr. 10

ostrý práve vtedy, keď platí nerovnosť $|B'C'|^2 < |A'B'|^2 + |A'C'|^2$, čiže $a^2 < 4c^2 + b^2$. Posledná nerovnosť je ale zaručená rovnosťou $a^2 = b^2 + 2c^2$. Z pravouhlých trojuholníkov $A'VC'$ a $B'VC'$ vyplýva, že pre dĺžky $x = |A'V|$ a $v = |C'V|$ platí

$$v^2 = b^2 - x^2,$$
$$v^2 = a^2 - (2c - x)^2.$$

Porovnaním pravých strán dostaneme po úprave

$$4cx = 4c^2 - (a^2 - b^2)$$

a dosadením za $a^2 - b^2$ vyjde

$$4cx = 4c^2 - 2c^2 = 2c^2, \quad \text{t. j. } x = \frac{1}{2}c.$$

Keď označíme A (v súlade s prvou časťou) stred strany $A'B'$, platí

$$|AC'| = |A'C'| = b,$$

teda trojuholník $AB'C'$ má strany dĺžok a, b, c a obsah rovný polovici obsahu trojuholníka $A'B'C'$. Tým sme dokázali opačnú implikáciu.

Iné riešenie. Z Herónovho vzorca pre obsah S_1 trojuholníka ABC a pre obsah S_2 trojuholník $A'B'C'$ máme

$$S_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\big((a+b)^2 - c^2\big)\big(c^2 - (a-b)^2\big)},$$
$$S_2 = \frac{1}{4}\sqrt{\big((a+b)^2 - 4c^2\big)\big(4c^2 - (a-b)^2\big)}.$$

Z podmienky $S_2 = 2S_1$ vyplýva

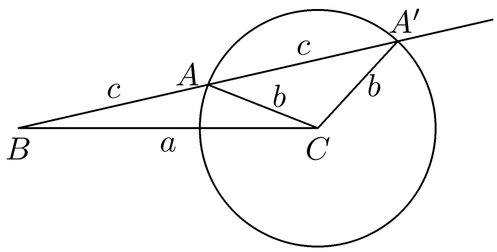
$$\big((a+b)^2 - 4c^2\big)\big(4c^2 - (a-b)^2\big) = 4\big((a+b)^2 - c^2\big)\big(c^2 - (a-b)^2\big).$$

Z tejto podmienky po úprave dostaneme

$$(a^2 - b^2)^2 = 4c^4, \quad \text{t. j.} \ \big|a^2 - b^2\big| = 2c^2.$$

Prevedené úpravy sú ekvivalentné, preto je možné celý postup obrátiť. Z rovnosti $|a^2 - b^2| = 2c^2$ vyplýva, že trojuholník $A'B'C'$ má dvakrát väčší obsah ako trojuholník ABC. Existencia trojuholníkov sa dá dokázať rovnakým postupom ako v prvom riešení.

Iné riešenie. Uvažujme úsečku BC dĺžky a ($a > b$) a kružnicu k so stredom v bode C a polomerom b (obr. 11). V rovnakej polrovine (s hraničnou priamkou BC) uvažujme



Obr. 11

body A a A', pre ktoré platí $|AB| = c$, $|A'B| = 2c$. Ak ležia body B, A a A' na jednej priamke, potom obsah trojuholníka $A'BC$ je dvojnásobkom obsahu trojuholníka ABC. Z mocnosti bodu B ku kružnici k vyplýva

$$|BA| \cdot |BA'| = 2c^2 = a^2 - b^2.$$

Ak je naopak splnená posledná rovnosť, pretne polpriamka opačná k AB kružnicu k v bode, ktorého vzdialenosť od bodu B je rovná $2c$, týmto bodom je však A'. Odtiaľ už vyplýva tvrdenie pre obsahy trojuholníkov. Existencia trojuholníkov sa dá dokázať rovnakým postupom ako v prvom riešení.

B – I – 4

Keď sčítame všetky tri čísla vzniknutej trojice, dostaneme

$$(r+5q)+(3r-5p)+(2q-3p)=4r+7q-8p=3(r+2q-3p)+(p+q+r).$$

Toto číslo dáva po delení tromi rovnaký zvyšok ako číslo $(p+q+r)$, t. j. zvyšok po delení tromi súčtu čísel v trojici zostáva rovnaký. Pre trojicu $(1,3,7)$ je zvyšok rovný dvom $(1+3+7=11=3\cdot 3+2)$. Súčet troch po sebe idúcich celých čísel je však deliteľný tromi, takže dáva zvyšok nula. Vyplýva to z rovnosti $k+(k+1)+(k+2)=3(k+1)$.

Záver: Po konečnom počte *krokov* nemôžeme z trojice $(1,3,7)$ dostať trojicu po sebe idúcich celých čísel.

Iné riešenie. Skúmajme, ako sa mení parita trojice čísel v nasledujúcich *krokoch.* Na začiatku sú všetky tri čísla nepárne. Postupne dostávame

$$(n,n,n)\to(p,p,n)\to(n,n,p)\to(n,n,n)\to\cdots$$

Pretože sa parita čísel pravidelne mení podľa danej schémy, nemôžeme z trojice nepárnych čísel dostať trojicu (p,n,p), resp. (n,p,n), ktoré reprezentujú všetky trojice po sebe idúcich čísel (za párnym číslom nasleduje nepárne a naopak).

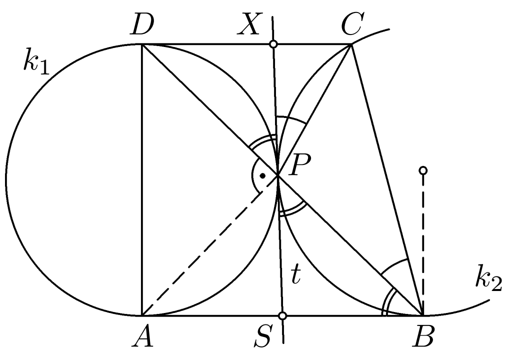
Iné riešenie. (Podľa *Miroslava Jagoša.*) Zistíme, ktorá trojica je bezprostredným predchodcom trojice $(k,k+1,k+2)$. Riešime sústavu rovníc

$$r+5q=k,\qquad 3r-5p=k+1,\qquad 2q-3p=k+2.$$

Z druhej a tretej rovnice máme $9r-10q=-2k-7$ a po pripočítaní dvojnásobku prvej rovnice dostaneme $11r=-7$, teda r nie je celé. Pretože z celočíselnej trojice vznikne opäť celočíselná trojica, vyplýva odtiaľ, že trojica $(k,k+1,k+2)$ nemôže vzniknúť po konečnom počte *krokov* zo žiadnej celočíselnej trojice, teda ani z trojice $(1,3,7)$.

B – I – 5

Pretože úsečka AD je priemerom kružnice k_1, je uhol APD pravý (obr. 12). Uvažujme



Obr. 12

spoločnú dotyčnicu t oboch kružníc prechádzajúcu bodom P. Označme postupne S a X priesečníky dotyčnice t s úsečkami AB a CD. Priamka AB je ale tiež spoločnou dotyčnicou oboch kružníc. Platí preto $|SA| = |SP| = |SB|$. Bod S je preto stredom Tálesovej kružnice zostrojenej nad stranou AB ako priemerom. Uhol APB je preto rovnako ako uhol APD pravý a bod P je teda vnútorným bodom úsečky BD. Trojuholník BPS je rovnoramenný so základňou BP, pre jeho uhly teda platí $|\sphericalangle SBP| = |\sphericalangle SPB|$. Uhol SPB má naviac rovnakú veľkosť ako uhol DPX (dvojice vrcholových uhlov). Platí preto $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle DPX|$. Súčasne však je uhol XPC uhlom úsekovým pre tetivu CP kružnice k_2. Z rovnosti obvodového a úsekového uhla máme $|\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle XPC|$. Celkovo dostávame

$$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ABP| + |\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle DPX| + |\sphericalangle XPC| = |\sphericalangle DPC|,$$

čo sme chceli dokázať.

B – I – 6

Nulové body výrazu $x^2 - ux$ sú $x = 0$ a $x = u$. Pretože podľa zadania platí $u > 0$, rozdelíme reálnu os na tri navzájom disjunktné intervaly $I_1 = (-\infty, 0)$, $I_2 = \langle 0, u\rangle$ a $I_3 = (u, \infty)$.

Na intervaloch I_1 a I_3 riešime kvadratickú rovnicu

$$x^2 - (u - v)x - 1 = 0. \tag{1}$$

Táto rovnica má kladný diskriminant $(u - v)^2 + 4$, a teda dva rôzne reálne korene

$$x_1 = \frac{u - v - \sqrt{(u - v)^2 + 4}}{2},$$
$$x_2 = \frac{u - v + \sqrt{(u - v)^2 + 4}}{2}.$$

Pretože $\sqrt{(u - v)^2 + 4} > |u - v|$, platí $x_1 < 0$ a $x_2 > 0$. Znamená to, že číslo x_1 je vždy riešením rovnice (1), lebo $I_1 = (-\infty, 0)$, zatiaľ čo číslo x_2 je riešením rovnice (1) práve vtedy, keď platí $x_2 \in I_3$, čiže $x_2 > u$.

Na intervale I_2 riešime kvadratickú rovnicu

$$x^2 - (u + v)x + 1 = 0.$$

Táto rovnica má diskriminant $D = (u + v)^2 - 4$ a prípadné reálne korene

$$x_3 = \frac{u + v - \sqrt{(u + v)^2 - 4}}{2},$$
$$x_4 = \frac{u + v + \sqrt{(u + v)^2 - 4}}{2}.$$

Zo zadania vyplýva, že aspoň jeden z koreňov x_3, x_4 musí byť riešením rovnice (1) (ležiacim v intervale I_2). Preto hlavne musí byť diskriminant D nezáporný, z čoho vyplýva podmienka $|u+v| \geqq 2$. Pretože naviac $\sqrt{(u+v)^2-4} < |u+v|$, majú oba korene x_3, x_4 rovnaké znamienko ako súčet $u+v$. Spolu to znamená, že musí platiť $u+v \geqq 2$ (v prípade $u+v \leqq -2$ by totiž žiadne z čísel x_3, x_4 neležalo v I_2). Za podmienky $u+v \geqq 2$ ale platí $0 < x_3 \leqq x_4$, takže zo zadania vyplýva, že v intervale $I_2 = \langle 0, u\rangle$ leží číslo x_3 (a prípadne aj číslo x_4).

Z doterajších úvah vyplýva, že našou úlohou je odpovedať na otázku, kedy za podmienok

$$u > 0 \quad \text{a} \quad u+v \geqq 2 \tag{2}$$

nastane niektorý z týchto prípadov:
a) $x_2 \notin I_3$, $\{x_3, x_4\} \subset I_2$, $x_3 \neq x_4$;
b) $x_2 \in I_3$, $x_3 = x_4 \in I_2$;
c) $x_2 \in I_3$, $x_3 \in I_2$, $x_4 \notin I_2$.

a) Zistíme, kedy sú splnené jednotlivé podmienky, ktoré tento prípad vymedzujú (pre lepší prehľad ich v texte uvádzame čiernymi bodmi).

• $x_2 \notin I_3$, čiže $x_2 \leqq u$. Po úprave získame nerovnosť

$$\sqrt{(u-v)^2+4} \leqq u+v,$$

ktorej pravá strana je podľa (2) kladná, takže obe strany môžeme umocniť na druhú. Po ďalšej jednoduchej úprave dostaneme podmienku $uv \geqq 1$. Preto platí

$$x_2 \notin I_3 \quad \Longleftrightarrow \quad uv \geqq 1.$$

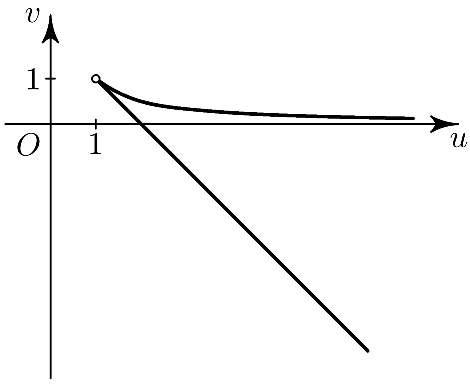
• $\{x_3, x_4\} \subset I_2$. Ako vieme, za podmienok (2) platí $0 < x_3 \leqq x_4$, stačí preto iba skúmať nerovnosť $x_4 \leqq u$, čiže $\sqrt{(u+v)^2-4} \leqq u-v$. Posledná nerovnosť môže platiť jedine vtedy, keď $u \geqq v$. Potom po umocnení strán skúmanej nerovnosti a následnej úprave dostaneme podmienku $uv \leqq 1$. Preto platí

$$\{x_3, x_4\} \subset I_2 \quad \Longleftrightarrow \quad u \geqq v \ \wedge \ uv \leqq 1.$$

• $x_3 \neq x_4$. Zo skoršieho odvodenia podmienky $u+v \geqq 2$ je jasné, že rovnosť $x_3 = x_4$ nastane práve vtedy, keď $u+v = 2$. Za podmienok (2) teda platí

$$x_3 \neq x_4 \quad \Longleftrightarrow \quad u+v > 2.$$

Zhrnieme teraz všetky podmienky pre skúmaný prípad a). Z nerovností $uv \geqq 1$ a $uv \leqq 1$ vyplýva $uv = 1$, čiže $v = 1/u$. Zostávajúce podmienky majú potom tvar $u \geqq 1/u$ a $u + 1/u > 2$ a sú zrejme obe splnené práve vtedy, keď $u > 1$. Hľadané body $[u,v]$ v prípade a) teda tvoria časť hyperboly $v=1/u$ určenú obmedzením $u>1$ (obr. 13).



Obr. 13

b) Z predchádzajúceho rozboru prípadu a) vyplýva, že za podmienok (2) platia ekvivalencie

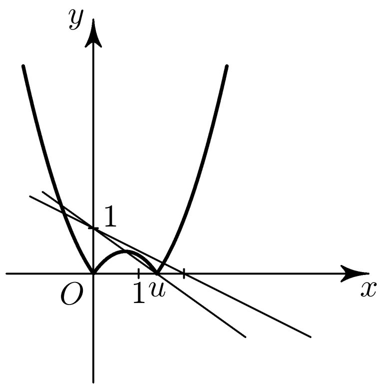
$$x_2 \in I_3 \iff uv < 1, \quad x_4 \in I_2 \iff u \geqq v \ \wedge \ uv \leqq 1,$$
$$x_3 = x_4 \iff u + v = 2.$$

Vidíme, že v prípade b) musí platiť $v = 2-u$. Vtedy majú zostávajúce podmienky tvar $(2-u)u < 1$ a $u \geqq 2-u$ a sú zrejme obe splnené práve vtedy, keď $u > 1$. Hľadané body $[u,v]$ v prípade b) teda tvoria polpriamku určenú rovnicou $v = 2-u$ a obmedzením $u > 1$.

c) Podmienka $x_3 \in I_2$ sa dá vyjadriť nerovnosťou $x_3 \leqq u$, ktorá je ekvivalentná s nerovnosťou $\sqrt{(u+v)^2-4} \geqq v-u$. Tá je splnená triviálne, pokiaľ $u \geqq v$. Ako sme ale ukázali skôr, v prípade $u \geqq v$ platí nielen $x_3 \in I_2$, ale aj $x_4 \in I_2$, čo prípad c) vylučuje. V prípade c) teda nutne platí $u < v$ a z nerovnosti $\sqrt{(u+v)^2-4} \geqq v-$ $-u$ po umocnení a úprave dostaneme podmienku $uv \geqq 1$. Ako ale vieme, z poslednej nerovnosti vyplýva $x_2 \notin I_3$, takže prípad c) nemôže nikdy nastať.

Záver: Množinou všetkých bodov vyhovujúcich zadaniu je časť hyperboly $v = 1/u$ a časť priamky $v = 2-u$, v oboch prípadoch časti určené podmienkou $u > 1$.

Iné riešenie. Rovnicu možno riešiť tiež graficky. Skúmame, kedy budú mať grafy funkcií $f(x) = |x^2 - ux|$ a $g(x) = 1 - vx$ práve tri spoločné body (obr. 14). Graf funkcie f



Obr. 14

je zložený z časti paraboly, grafom funkcie g je priamka prechádzajúca bodom $[0, 1]$. Aby táto priamka mala s grafom $f(x)$ spoločné práve tri body, musí byť buď dotyčnicou paraboly na intervale $(0, u)$ (potom $u+v = 2$, odvodenie je analogické ako v predchádzajúcom riešení – pomocou diskriminantu), alebo musí prechádzať bodom $[u, 0]$ a súčasne pretínať graf funkcie f vo vnútornom bode intervalu $(0, u)$. Keď dosadíme súradnice bodu $[u, 0]$ do rovnice priamky g, dostaneme $0 = 1 - vu$, t. j. $uv = 1$. Rovnako ako v predchádzajúcom riešení musí platiť $u > 1$, čo môžeme overiť nájdením druhého priesečníku priamky s parabolou.

B – S – 1

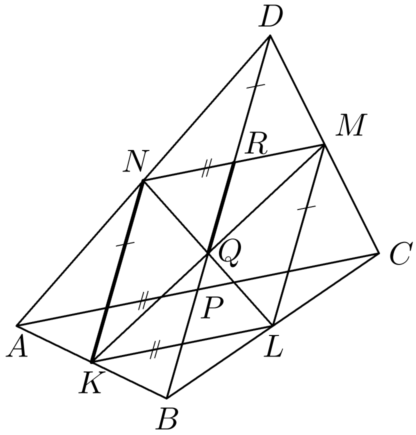
Ľubovoľné z uvažovaných päťmiestnych čísel má v desiatkovej sústave zápis tvaru $\overline{abcba}$. Jeho rozvinutím a úpravou získame rovnosť

$$\overline{abcba} = 10\,001a + 1\,010b + 100c = 101(99a + 10b + c) + 2a - c.$$

Odtiaľ vyplýva, že skúmané číslo je deliteľné 101 práve vtedy, keď $2a - c = 0$ (pre ľubovoľné číslice a, c totiž iste platí $|2a - c| < 101$). Z rovnosti $2a = c$ vyplýva $a \leqq 4$, a pretože hľadáme čo najväčšie také číslo, zvolíme jeho prvú číslicu $a = 4$, ktorej odpovedá číslica $c = 8$. Pretože číslica b nemá na deliteľnosť číslom 101 vplyv, zvolíme ju čo najväčšiu: $b = 9$. Hľadané číslo je teda 49 894.

B – S – 2

Stredy strán štvoruholníka $ABCD$ označme K, L, M, N podľa obr. 15. Pretože úsečky



Obr. 15

KL a MN sú postupne stredné priečky trojuholníkov ABC a ACD, platí $KL \parallel AC \parallel MN$. Obdobne platí $LM \parallel BD \parallel KN$, takže $KLMN$ je rovnobežník a bod Q rozpoľuje úsečku KM. Všimnime si teraz trojuholník KMN. Stredom Q jeho strany KM prechádza podľa predpokladu úlohy uhlopriečka BD, ktorá je, ako vieme, rovnobežná s druhou stranou KN. Preto aj stred R tretej strany MN leží na uhlopriečke BD. Pretože úsečka MN je rovnoľahlá s úsečkou CA podľa stredu D, rozpoľuje uhlopriečka BD nielen úsečku MN (v bode R), ale aj úsečku AC (v odpovedajúcom bode P).

B – S – 3

Dané prirodzené čísla označme podľa veľkosti $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$. Pretože platí

$$x_1 + x_2 < x_1 + x_3 < x_1 + x_4 < x_1 + x_5 < x_2 + x_5 < x_3 + x_5 < x_4 + x_5,$$

je medzi všetkými súčtami $x_i + x_j$ aspoň sedem rôznych hodnôt. Nevypísané zostali iba tri z možných súčtov, a to súčty $x_2 + x_3$, $x_2 + x_4$ a $x_3 + x_4$. Preto pre počet p možných hodnôt uvažovaných súčtov platí $7 \leqq p \leqq 10$. Pre každú z hodnôt $p \in \{7, 8, 9, 10\}$ uvedieme príklad päťprvkovej množiny M_p prirodzených čísel, pre ktorú uvažované súčty nadobúdajú práve p rôznych hodnôt (ich množinu označíme S_p):

$$\begin{aligned} M_7 &= \{1, 2, 3, 4, 5\}, & S_7 &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}; \\ M_8 &= \{1, 2, 3, 4, 6\}, & S_8 &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}; \\ M_9 &= \{1, 2, 3, 4, 7\}, & S_9 &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}; \\ M_{10} &= \{1, 2, 3, 5, 8\}, & S_{10} &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13\}. \end{aligned}$$

B – II – 1

Medzi 109 po sebe idúcimi päťmiestnymi číslami

$$10\,902,\ 10\,903, \dots, 10\,999,\ 11\,000, \dots, 11\,009,\ 11\,010$$

nie je žiadny palindróm (je možné uviesť aj iné vyhovujúce príklady 109 päťmiestnych čísel, my sme vypísali skupinu najmenších z nich). Najmenší a najväčší päťmiestny palindróm sú čísla 10 001 a 99 999; pred číslom 10 001 je len jedno päťmiestne číslo, za číslom 99 999 už dokonca žiadne také číslo nie je. Ukážeme teraz, že za každým päťmiestnym palindrómom x, $x \neq 99\,999$, nasleduje päťmiestny palindróm $x + 100$ alebo $x+110$ alebo $x+11$. Skutočne, ak $x = \overline{abcba}$, tak v prípade $c \neq 9$ je palindrómom číslo $x + 100 = \overline{ab(c+1)ba}$, v prípade $c = 9 \neq b$ je palindrómom číslo $x + 110 = \overline{a(b+1)0(b+1)a}$ a v prípade $c = b = 9$ (keď nutne $a \neq 9$) je palindrómom číslo $x+11 = \overline{(a+1)000(a+1)}$.

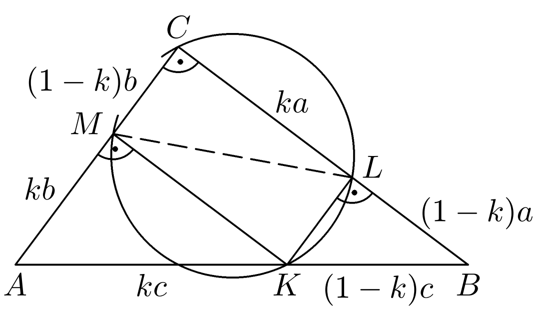
Odpoveď. Hľadaný najväčší počet čísel je rovný 109.

B – II – 2

Pretože uhly KLC, KMC a LCM sú pravé (obr. 16), je štvoruholník $KLCM$ pravouholník a trojuholníky AKM a KBL sú podobné s trojuholníkom ABC. Označme ako obyčajne $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ a položme $|AK| = kc$, kde $0 < k < 1$. Potom však $|KB| = (1-k)c$ a zo spomenutej podobnosti trojuholníkov dostávame vyjadrenie $|AM| = kb$, $|LC| = |KM| = ka$, $|BL| = (1-k)a$ a $|MC| = |KL| = (1-k)b$. Preto platí

$$\begin{aligned} S_{ABLM} = S_{ABC} - S_{LMC} &= \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}\cdot ka \cdot (1-k)b = \\ &= \frac{1}{2}ab(1-k+k^2) = \frac{1}{2}ab\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) \geqq \\ &\geqq \frac{1}{2}ab\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{4}S_{ABC}, \end{aligned}$$

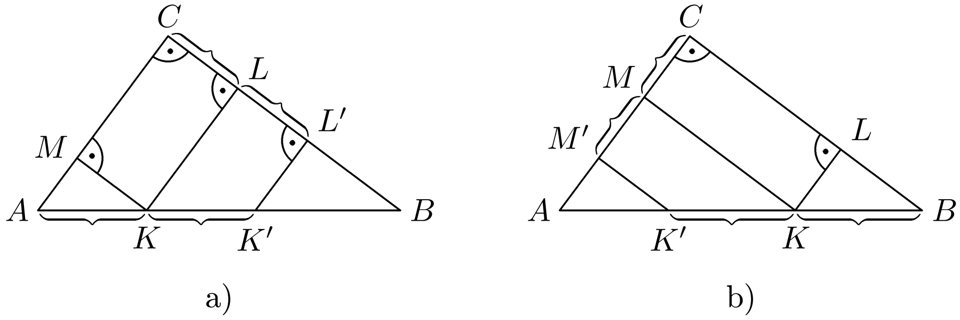
pričom rovnosť $S_{ABLM} = \frac{3}{4}S_{ABC}$ nastane práve vtedy, keď $k = 1/2$, teda práve vtedy, keď je bod K stredom prepony AB.



Obr. 16

Iné riešenie. Štvoruholník $ABLM$ má minimálny obsah práve vtedy, keď má maximálny obsah trojuholník LMC, ktorý je „polovicou" pravouholníka $KLCM$. Stačí preto ukázať, že obsah S_{KLCM} je maximálny práve vtedy, keď je bod K stredom prepony AB (keď zrejme $S_{KLCM} = S_{ABC}/2$). Ak je bod K vybraný tak, že $|AK| <$ $< |AB|/2$, je úsečka KL strednou priečkou lichobežníka $AK'L'C$, ktorý má o $S_{K'L'B}$ menší obsah ako trojuholník ABC (obr. 17a), takže platí

$$S_{KLCM} = \frac{1}{2} S_{AK'L'C} < \frac{1}{2} S_{ABC}.$$



Obr. 17

Ak naopak $|AK| > \frac{1}{2}|AB|$, využijeme obdobný lichobežník $BK'M'C$ (obr. 17b) a usúdime, že platí

$$S_{KLCM} = \frac{1}{2} S_{BK'M'C} < \frac{1}{2} S_{ABC}.$$

Tým je tvrdenie o maximálnom obsahu S_{KLCM} dokázané.

Odpoveď. Štvoruholník $ABLM$ má najmenší možný obsah práve vtedy, keď bod K leží uprostred prepony AB.

B – II – 3

Aj keď danú úlohu možno riešiť názorne geometrickou úvahou o vzájomnej polohe paraboly $y = (x-1)^2$ a lomenej čiary $y = 3|x| - px$, dáme najprv prednosť čisto algebraickému postupu. Daná rovnica zrejme nemá riešenie $x = 0$. Po odstránení absolútnej hodnoty a jednoduchej úprave dostaneme rovnice

$$x^2 + (p+1)x + 1 = 0 \qquad \text{pro } x < 0, \tag{1}$$

$$x^2 + (p-5)x + 1 = 0 \qquad \text{pro } x > 0. \tag{2}$$

Pretože každá kvadratická rovnica má najviac dva rôzne korene, hľadáme všetky tie čísla p, pre ktoré má jedna z rovníc (1), (2) jeden koreň a druhá dva rôzne korene (a to vždy predpísaných znamienok). Všimnime si, že pre každé $q \in \mathbb{R}$ majú reálne korene $x_{1,2}$ rovnice $x^2 + qx + 1 = 0$ (ak vôbec existujú) rovnaké znamienko, ktoré je opačné ako znamienko čísla q; platí totiž $x_1x_2 = 1$ a $x_1 + x_2 = -q$. Pre rovnice (1), (2) tak hlavne dostávame podmienky

$$p + 1 > 0 \quad \text{a} \quad p - 5 < 0, \quad \text{čiže} \quad p \in (-1, 5).$$

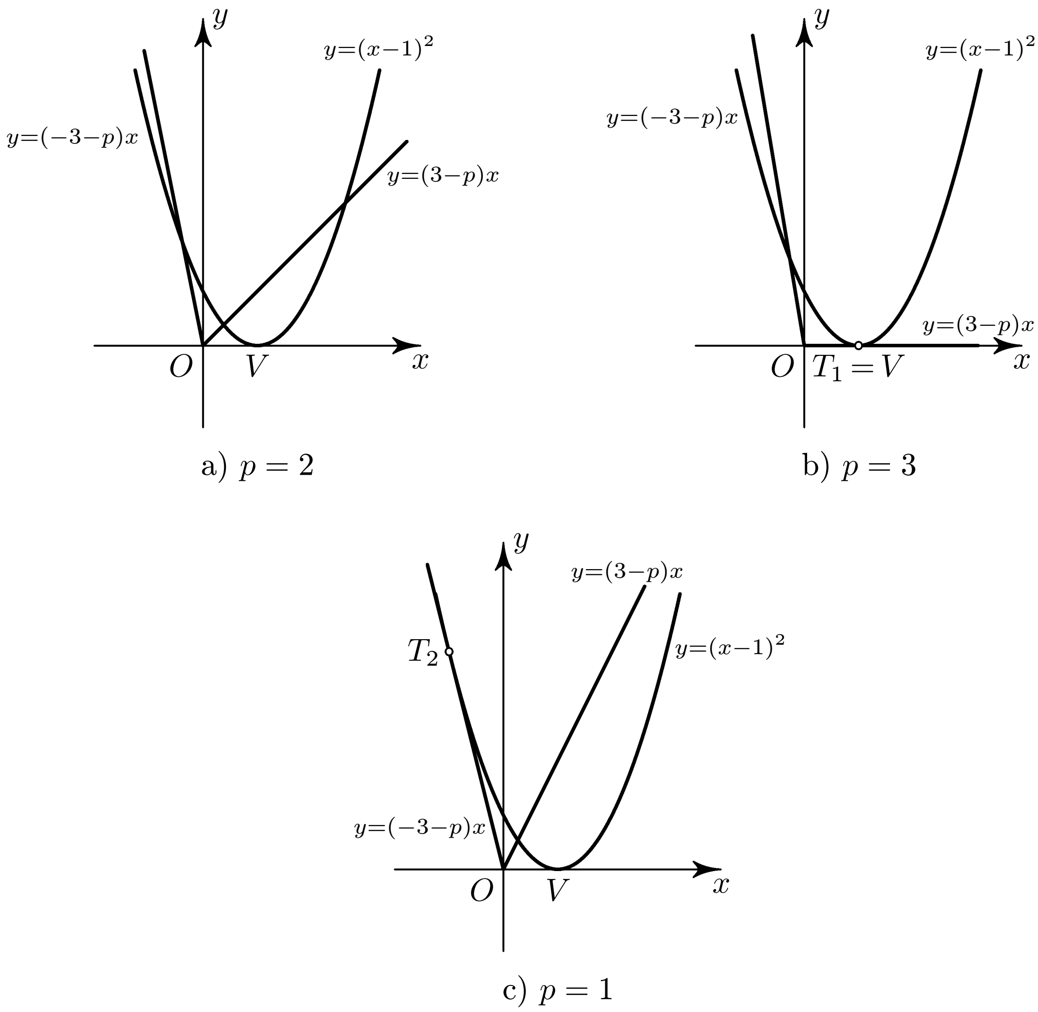
Okrem toho už len požadujeme, aby pre diskriminanty oboch rovníc

$$D_1 = (p + 1)^2 - 4, \quad D_2 = (p - 5)^2 - 4$$

platilo buď $D_1 = 0$ a $D_2 > 0$, alebo $D_1 > 0$ a $D_2 = 0$. Rovnosť $D_1 = 0$ platí iba pre $p \in \{-3, 1\}$, rovnosť $D_2 = 0$ iba pre $p \in \{3, 7\}$. Z týchto štyroch hodnôt ležia v intervale $(-1, 5)$ iba čísla $p = 1$ a $p = 3$, pričom pre $p = 1$ vychádza $D_2 = 12 > 0$, pre $p = 3$ zasa $D_1 = 12 > 0$.

Odpoveď. Hľadané hodnoty sú $p = 1$ a $p = 3$.

Iné riešenie. Grafom funkcie $y = (x - 1)^2$ je parabola s vrcholom $V[1, 0]$, grafom funkcie $y = 3|x| - px$ je lomená čiara tvorená ramenami niektorého uhla s vrcholom $O[0, 0]$ (obr. 18a pre $p = 2$). Oba grafy majú spoločné tri body práve vtedy,

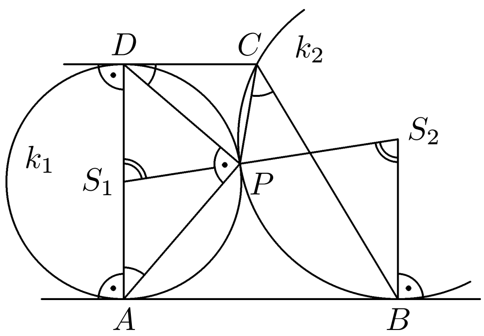


Obr. 18

keď jedno z ramien spomenutého uhla je dotyčnicou paraboly a druhé je jej „sečnicou“. Pretože skúmaná parabola nemá dotyčnicu rovnobežnú s osou y, môžeme rovnice oboch dotyčníc prechádzajúcich bodom $[0,0]$ hľadať v tvare $y = kx$. Ako je známe, smernica k sa určí z podmienky, že rovnica $kx = (x-1)^2$ má dvojnásobný koreň, teda nulový diskriminant. Ten má vyjadrenie $(k+2)^2 - 4$, takže hľadané hodnoty sú $k_1 = 0$, $k_2 = -4$ a odpovedajúce body dotyku $T_1 = V[1,0]$ a $T_2[-1,4]$. Z rovníc pre smernice dotykových ramien skúmaných uhlov $3 - p = 0$ a $-3 - p = -4$ nájdeme riešenie $p_1 = 3$ a $p_2 = 1$ a ľahko sa presvedčíme, že druhé rameno je v oboch prípadoch skutočne sečnicou paraboly (obr. 18b pre $p = 3$ a obr. 18c pre $p = 1$).

B – II – 4

Označme S_1 a S_2 stredy uvažovaných kružníc (obr. 19). Obe úsečky S_1A a S_2B sú kolmé na priamku AB, sú teda rovnobežné a striedavé uhly PS_2B a PS_1D zhodné.



Obr. 19

Podľa vety o obvodových a striedavých uhloch preto platí

$$|\sphericalangle PCB| = \frac{1}{2}|\sphericalangle PS_2B| = \frac{1}{2}|\sphericalangle PS_1D| = |\sphericalangle PAD|.$$

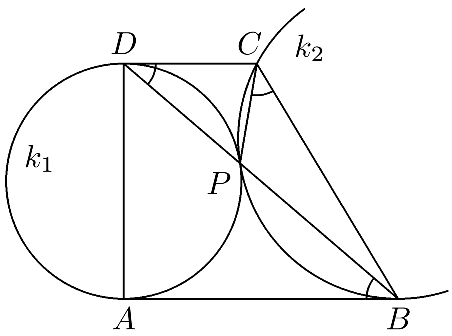
Oba uhly APD a ADC sú však pravé, takže

$$|\sphericalangle PAD| = 90^\circ - |\sphericalangle ADP| = |\sphericalangle CDP|.$$

Spolu dostávame, že uhly PCB a CDP sú zhodné, čo podľa vety o obvodovom a úsekovom uhle znamená, že priamka BC je dotyčnicou ku kružnici opísanej trojuholníku CDP.

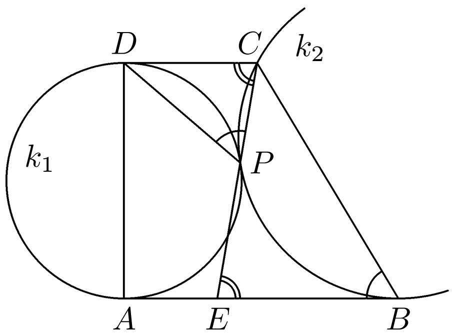
Iné riešenie. V rovnoľahlosti so stredom P, v ktorej kružnica k_1 prejde na kružnicu k_2, musí dotyčnica CD kružnice k_1 prejsť na rovnobežnú dotyčnicu AB kružnice k_2, pritom sa bod dotyku D zobrazí do bodu dotyku B. Bod P preto leží na uhlopriečke BD (obr. 20). Odtiaľ vyplýva zhodnosť striedavých uhlov CDP a PBA (medzi rovnobežkami AB a CD). Uhol PBA je ale úsekový uhol medzi tetivou BP

a dotyčnicou AB kružnice k_2, je teda zhodný s príslušným obvodovým uhlom PCB. Uhly CDP a PCB sú preto zhodné, čo sme potrebovali dokázať (ako v závere predchádzajúceho riešenia).



Obr. 20

Poznámka. Podľa úlohy B–I–5 sú zhodné uhly ABC a CPD (obr. 21). Pretože



Obr. 21

sú zhodné aj striedavé uhly PEB a PCD, kde E je priesečník polpriamky CP so stranou AB, možno požadovanú zhodnosť uhlov CDP a PCB odvodiť z trojuholníkov BCE a PDC.

Kategória A

A – I – 1

Vypíšme, aké hodnoty môžu nadobúdať prvé členy uvedenej postupnosti. Dostaneme

$$x_1 = 1, \quad x_2 \in \{-1, 1\}, \quad x_3 \in \{-2, 0, 2\}, \quad x_4 \in \{-4, -2, 0, 2, 4\},$$
$$x_5 \in \{-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8\}.$$

Všimnime si, že všetky členy, ktoré sme vypísali, sú celé čísla. Ďalej je zrejmé, že pre $i > 2$ je každý člen x_i párne číslo. (Ďalšie pozorovanie je, že ak nájdeme postupnosť, pre ktorú $x_i = a$ pre nejaké číslo a a dané $i > 1$, tak existuje aj postupnosť, pre ktorú $x_i = -a$.)

Zistime, akú najväčšiu a akú najmenšiu hodnotu môže nadobúdať číslo x_n (v závislosti od n). Označme a_i najväčšiu hodnotu, ktorú môže nadobúdať člen x_i. Pretože postupností dĺžky i spĺňajúcich dané vlastnosti je len konečný počet, maximum a_i existuje a je zrejme kladné. K číslu a_i musí pre každé $i > 1$ existovať postupnosť $x_1, \ldots, x_{i-1}$, pre ktorú platí

$$a_i = \pm x_{i-1} \pm \ldots \pm x_1 \leqq |x_{i-1}| + \ldots + |x_1| \leqq a_{i-1} + \ldots + a_1. \tag{1}$$

Vieme, že $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$. Pomocou predchádzajúceho vzťahu dokážme, že $a_i = 2^{i-2}$ pre každé $i > 1$. Dôkaz urobíme matematickou indukciou vzhľadom na i.

1^0 Tvrdenie platí pre $i = 1$ ($a_1 = 1$) a $i = 2$ ($a_2 = 1$).

2^0 Predpokladajme, že tvrdenie platí pre každé k, $2 \leqq k \leqq i - 1$, a dokážme, že tvrdenie platí aj pre $k = i$. Z odhadu (1), indukčného predpokladu a vzorca pre súčet geometrického radu dostaneme

$$a_i \leqq a_{i-1} + \ldots + a_1 = 2^{i-3} + \ldots + 2 + 1 + 1 = \frac{2^{i-2} - 1}{2 - 1} + 1 = 2^{i-2}.$$

Uvažujme postupnosť $x_1 = 1$ a $x_i = x_{i-1} + \ldots + x_1$ pre každé $i > 1$. V tomto prípade bude podľa predchádzajúceho platiť $x_i = 2^{i-2}$, takže $a_i = 2^{i-2}$ pre každé $i > 1$.

Podobne dokážeme, že najmenšia hodnota, akú môže x_n nadobudnúť, je -2^{n-2}.

Zistili sme, že pre každé $n > 1$ leží člen x_n ľubovoľnej uvažovanej postupnosti v množine $\{-2^{n-2}, -2^{n-2} + 2, -2^{n-2} + 4, \ldots, 2^{n-2}\}$, ktorú označíme M_n. Dokážme nakoniec, že x_n môže pre $n > 1$ nadobúdať ľubovoľnú hodnotu z množiny M_n.

Voľme znamienka nasledujúcim spôsobom: $x_i = x_{i-1} + \ldots + x_1$ pre $i < n$. Pre takú postupnosť platí $x_i = 2^{i-2}$ pre $1 < i < n$. Dokážme, že v rovnosti $x_n = \pm 2^{n-3} \pm \pm 2^{n-2} \pm \ldots \pm 1 \pm 1$ možno znamienka vybrať tak, aby sa hodnota x_n rovnala ľubovoľne zvolenému číslu z množiny M_n. Dôkaz urobíme opäť matematickou indukciou.

1^0 Tvrdenie platí pre $n = 2$ ($-1 = -x_1$ a $1 = +x_1$, lebo $x_1 = 1$) a $n = 3$ ($-2 = -1-1$, $0 = -1+1$, $2 = 1+1$).

2^0 Predpokladajme, že tvrdenie platí pre $k \leqq n-1$, kde $n \geqq 4$. Dokážme tvrdenie pre $k = n$. Zvoľme ľubovoľné číslo a z množiny M_n. Dokážeme, že existuje taká voľba znamienok + a −, že $a = \pm 2^{n-3} \pm 2^{n-4} \pm \ldots \pm 1 \pm 1$. Rozoberieme dve možnosti.

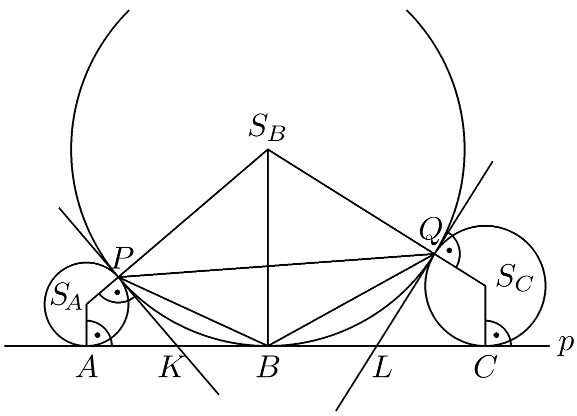
1. $a \geqq 0$. Pretože $a \in M_n$, je $a - 2^{n-3}$ párne celé číslo z intervalu $\langle -2^{n-3}, 2^{n-3} \rangle$, a teda $a - 2^{n-3} \in M_{n-1}$. Z indukčného predpokladu vyplýva, že existuje voľba znamienok + a − taká, že $a - 2^{n-3} = \pm 2^{n-4} \pm 2^{n-5} \pm \ldots \pm 1 \pm 1$. Potom $a = 2^{n-3} \pm 2^{n-4} \pm 2^{n-5} \pm \pm \ldots \pm 1 \pm 1$, čo sme chceli dokázať.

2. $a < 0$. Podobne ako v predchádzajúcom prípade dokážeme, že a sa dá napísať v tvare $a = -2^{n-3} \pm 2^{n-4} \pm 2^{n-5} \pm \ldots \pm 1 \pm 1$.

Tým sme dokázali, že všetky hodnoty x_n tvoria práve množinu M_n.

A – I – 2

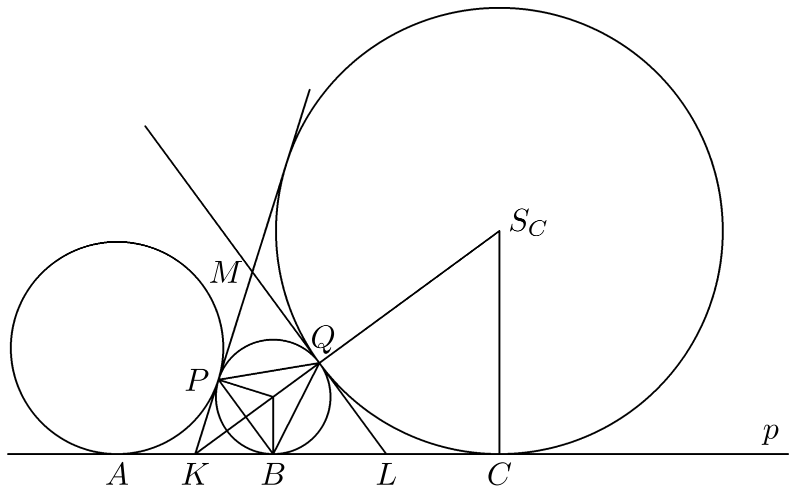
Keď zvolíme veľkosť $r_B > 0$ polomeru kružnice k_B, sú už tým obe ďalšie kružnice k_A, k_C určené. K ich zostrojeniu využijeme základné vlastnosti dotyčníc kružníc. Predpokladajme, že kružnice k_A, k_B, k_C majú vlastnosti popísané v zadaní. Ak označíme napr. K priesečník vnútornej spoločnej dotyčnice kružníc k_A a k_B (v bode P ich vonkajšieho dotyku) s priamkou p, ktorá je spoločnou vonkajšou dotyčnicou všetkých troch kružníc, musia byť $|KA| = |KP|$ a $|KB| = |KP|$ (obr. 22). To znamená, že bod K je stredom úsečky AB a súčasne bod P leží na Tálesovej kružnici nad priemerom AB. Keď poznáme bod P, ľahko už zostrojíme kružnicu k_A, o ktorej vieme, že sa dotýka priamky p v bode A. Analogicky zostrojíme kružnicu k_C.



Obr. 22

Máme zistiť, pre ktoré hodnoty r_B je trojuholník BPQ rovnoramenný. Pretože body dotyku P, Q kružnice k_B s oboma susednými kružnicami ležia vnútri opačných polrovín určených priamkou BS_B, sú oba uhly BPQ a BQP ostré (príslušné stredové uhly sú menšie ako 180°). Ak teda náhodou vyjde trojuholník PBQ tupouhlý, môže byť rovnoramenný, len keď $|BP| = |BQ|$. V takom prípade je ale zo súmernosti zrejmé, že $|AB| = |BC|$, t. j. $h = 1$. Trojuholník BPQ je potom rovnoramenný pre každé $r_B > 0$.

Predpokladajme ďalej, že $h \neq 1$. V takom prípade môžeme predpokladať, že trojuholník BPQ je ostrouhlý (inak podľa predchádzajúceho odstavca nemôže byť rovnoramenný). Ak je rovnoramenný, buď $|PQ| = |BQ|$, alebo $|PQ| = |BP|$. Predpokladajme, že napr. $|PQ| = |BQ|$ (ako ukážeme neskôr, druhý prípad možno riešiť využitím súmernosti). Trojuholník BPQ je súmerný podľa spojnice S_BS_C stredov oboch kružníc, ktorá prechádza bodom dotyku Q oboch kružníc a priesečníkom K dotyčníc KB, KP. Označme ešte L priesečník spoločnej vnútornej dotyčnice kružníc k_C a k_B s priamkou p (L je stred úsečky BC, obr. 23) a M priesečník oboch dotyčníc KP a LQ (ten je obrazom



Obr. 23

bodu L v uvedenej osovej súmernosti). Trojuholník KLM je teda rovnoramenný so stranami $|KL| = |KM| = (1 + h)/2$, $|ML| = 2|LQ| = h$, jeho obvod je $1 + 2h$. Veľkosť polomeru r_B vpísanej kružnice vypočítame pomocou obsahu. Pre obsah S trojuholníka KLM platí

$$S = \frac{1}{2}h\sqrt{\left(\frac{1+h}{2}\right)^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}h\sqrt{1+2h}$$

a súčasne

$$S = \frac{1}{2}r_B(1 + 2h).$$

Odtiaľ vychádza

$$r_B = \frac{h}{2\sqrt{2h+1}}. \tag{1}$$

Ak je naopak r_B dané vzťahom (1), môžeme zostrojiť rovnoramenný trojuholník KLM s ramenami KL a KM dĺžky $(1 + h)/2$ a základňou ML, $|ML| = h$, pričom jeho vpísaná kružnica k_B sa bude dotýkať ramena KL v bode B. Označme P, Q postupne body dotyku kružnice k_B so stranami KM a LM. Pretože K je stred úsečky AB, platí $|KA| = |KB| = |KP|$. To znamená, že kružnica k_A dotýkajúca sa priamky p

v bode A a prechádzajúca bodom P sa bude dotýkať kružnice k_B v bode P. Analogicky zostrojíme aj kružnicu k_C dotýkajúcu sa priamky p v bode C a prechádzajúcu bodom Q. Zo súmernosti trojuholníka KLM podľa priamky KQ vyplýva, že $|PQ| = |BQ|$. Tým je prvý prípad vyriešený.

V prípade rovnosti $|PQ| = |BP|$ môžeme postupovať úplne rovnako. Jednoduchšie ale bude, keď zmeníme mierku pôvodného obrázku v pomeru $1 : h$, takže bude $|AB| = h' = 1/h$, $|BC| = 1$. Keď naviac vymeníme označenie bodov A a C, tak sa z rovnosti $|BP| = |PQ|$ stane rovnosť $|BQ| = |PQ|$. Podľa predchádzajúceho potom pre veľkosť polomeru $r'_B = (1/h)r_B$ dostaneme

$$\frac{1}{h}r_B = r'_B = \frac{h'}{2\sqrt{2h'+1}} = \frac{\frac{1}{h}}{2\sqrt{2\frac{1}{h}+1}},$$

t. j.

$$r_B = \frac{h}{2\sqrt{2h+h^2}}. \tag{2}$$

Alebo sme mohli riešiť úlohu o niečo všeobecnejšie za predpokladu $|AB| = a$, $|BC| = b$, potom by sme namiesto vzťahu (1) dostali

$$r_B = \frac{b\sqrt{a^2+2ab}}{2(a+2b)}. \tag{1'}$$

Pre $a = 1$, $b = h$ vyjde za predpokladu $|PQ| = |BQ|$ pôvodný vzťah (1), zatiaľ čo pre $|PQ| = |BP|$ vymeníme označenie bodov A, C (a tým aj bodov P, Q) a do vzťahu (1′) dosadíme $a = h$, $b = 1$. Dostaneme tak vzťah (2).

Záver: Pre $h = 1$ je trojuholník BPQ rovnoramenný pre ľubovoľné $r_B > 0$. Pre $h \neq 1$ je trojuholník BPQ rovnoramenný pre r_B určené vzťahom (1) ($|PQ| = |BQ|$) alebo pre r_B určené vzťahom (2) ($|PQ| = |BP|$).

A – I – 3

Najprv ukážeme, že žiadna hodnota skúmaného výrazu V nie je menšia ako 1. Použijeme nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom ($x + y \geqq 2\sqrt{xy}$) pre všetky dvojice kladných čísel x, y z množiny $\{a^4, b^4, c^4\}$.

$$V = \frac{a^4+b^4+c^4}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(a^4+b^4)+(b^4+c^4)+(c^4+a^4)}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2} \geqq$$
$$\geqq \frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2} = 1.$$

Teraz ukážeme, že každá hodnota V je menšia ako 2. Z Herónovho vzorca pre obsah S trojuholníka so stranami a, b, c vieme, že

$$S^2 = s(s-a)(s-b)(s-c),$$

kde $s = (a + b + c)/2$. Po dosadení za s a roznásobení dostaneme

$$0 < 16S^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2.$$

Odtiaľ

$$a^4 + b^4 + c^4 < 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2, \quad \text{t. j.} \quad \frac{a^4 + b^4 + c^4}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} < 2.$$

Zhrňme výsledok úvah prvých dvoch odstavcov. Zistili sme, že $V \in \langle 1, 2)$. Ukážme, že všetky hodnoty V zaplnia celý interval $V \in \langle 1, 2)$. Zvolíme ľubovoľnú hodnotu $k \in \in \langle 1, 2)$ a nájdeme trojuholník, pre ktorý má výraz V hodnotu k. Uvažujme trojuholník so stranami a, 1, 1, ktorý podľa trojuholníkovej nerovnosti existuje práve vtedy, keď $0 < a < 2$. Zistíme, pre ktoré a platí $V = k$, preto vyriešime rovnicu

$$\frac{a^4 + 2}{2a^2 + 1} = k \tag{1}$$

s neznámou a. Po substitúcii $a^2 = b$ dostaneme kvadratickú rovnicu $b^2 - 2kb + 2 - k = 0$ s neznámou b. Jej diskriminant je rovný $D = 4k^2 - 4(2 - k) = 4(k^2 + k - 2)$. Na to, aby mala rovnica riešenie, musí byť diskriminant nezáporný, teda musí platiť $k^2 + k - 2 \geqq 0$. Táto nerovnosť je splnená pre $k \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 1, \infty)$, teda aj pre uvažované $k \in \langle 1, 2)$. Potrebujeme ešte dokázať, že skúmaná rovnica má aspoň jeden koreň b v intervale $(0, 4)$, lebo $b = a^2$ a $a \in (0, 2)$. Všimnime si, že pre oba korene $b_{1,2}$ platí

$$\begin{aligned} b_{1,2} = \frac{2k \pm 2\sqrt{k^2 + k - 2}}{2} &= k \pm \sqrt{k^2 + k - 2} \leqq \\ &\leqq k + \sqrt{k^2 + k - 2} < k + \sqrt{k^2} = 2k < 4, \end{aligned}$$

pričom sme využili nerovnosť $k < 2$. Na druhej strane pre koreň b_1 (so znamienkom + pred $\sqrt{D}$) platí

$$b_1 = k + \sqrt{k^2 + k - 2} \geqq k > 0.$$

Tým sme ukázali, že $0 < b_1 < 4$. Existuje teda číslo $a = \sqrt{b_1}$ spĺňajúce rovnicu (1).

Iné riešenie. Opakovaným dosadzovaním dĺžok strán konkrétnych trojuholníkov dospejeme k hypotéze, že $1 \leqq V < 2$. Dokazujme najprv dolný odhad $1 \leqq V$, ktorý je ekvivalentný s nerovnosťou

$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \leqq a^4 + b^4 + c^4.$$

Je to bikvadratická nerovnica s premennou a, takže po substitúcii $a^2 = t$ dostaneme kvadratickú nerovnicu

$$0 \leqq t^2 - t(b^2 + c^2) + b^4 + c^4 - b^2c^2. \tag{2}$$

Jej diskriminant je $D = (b^2 + c^2)^2 - 4(b^4 + c^4 - b^2c^2) = -3(b^4 + c^4 - 2b^2c^2) = -3(b^2 - c^2)^2 \leqq 0$. Pretože naviac je koeficient pri t^2 na pravej strane (2) kladný, je nerovnica (2) splnená pre všetky reálne čísla b, c a t. Tým je nerovnosť $V \geqq 1$ dokázaná.

Prejdeme k nerovnosti $V < 2$. Danú nerovnicu prenásobme kladným menovateľom, dostaneme

$$2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) > a^4 + b^4 + c^4.$$

Je to opäť bikvadratická nerovnica s premennou a. Po substitúcii $t = a^2$ prejde nerovnica do tvaru $t^2 - 2t(b^2 + c^2) + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 < 0$. Jej diskriminant je $D = 4(b^2 + c^2)^2 - 4(b^4 + c^4 - 2b^2c^2) = 16b^2c^2$. Pretože koeficient pri t^2 je kladný, je riešením tejto nerovnice interval určený nerovnosťami

$$\frac{2(b^2 + c^2) - \sqrt{D}}{2} < t < \frac{2(b^2 + c^2) - \sqrt{D}}{2},$$

čiže

$$(b - c)^2 < t < (b + c)^2.$$

Tieto nerovnosti platia, pretože $t = a^2$ a $|b - c| < a < b + c$ podľa trojuholníkových nerovností. Tým je nerovnosť $V < 2$ dokázaná.

Že hodnoty V zaplnia celý interval $\langle 1, 2)$, dokážeme rovnako ako v prvom riešení.

Iný dôkaz nerovnosti $V < 2$. Vyjdeme z trojuholníkovej nerovnosti $|a - b| < c < a + b$. Po umocnení na druhú a následnej úprave dostaneme $-2ab < c^2 - a^2 - b^2 < 2ab$, t. j. $|c^2 - a^2 - b^2| < 2ab$. Po ďalšom umocnení na druhú dostaneme

$$c^4 + b^4 + a^4 - 2c^2a^2 - 2c^2b^2 + 2a^2b^2 < 4a^2b^2,$$

čiže

$$c^4 + b^4 + a^4 < 2c^2a^2 + 2c^2b^2 + 2a^2b^2.$$

Odtiaľ už vyplýva, že $V < 2$.

Poznámky. Všimnime si, že podobné trojuholníky majú rovnakú hodnotu výrazu V. Skutočne, ak a, b, c sú strany trojuholníka, sú ka, kb, kc pre každé reálne $k > 0$ stranami podobného trojuholníka a platí

$$\frac{(ka)^4 + (kb)^4 + (kc)^4}{(ka)^2(kb)^2 + (ka)^2(kc)^2 + (kb)^2(kc)^2} = \frac{a^4 + b^4 + c^4}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}.$$

To znamená, že bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $c = 1$. Máme teda skúmať obor hodnôt výrazu

$$\frac{a^4 + b^4 + 1}{a^2b^2 + a^2 + b^2}$$

za predpokladu $|a - b| < 1 < a + b$, čo zjednodušuje a sprehľadňuje výpočty.

V druhej časti riešenia sme mali zistiť obor hodnôt funkcie $f(a) = (a^4 + 2)/(2a^2 + 1)$. Zrejme $f(1) = 1$ a $f(0) = 2$. Zo spojitosti funkcie f vyplýva, že na intervale $(0, 1\rangle$ nadobúda všetky hodnoty z intervalu $\langle 1, 2)$.

Dôkladným rozborom uvedených dôkazov zistíme, že nerovnosť $V \geqq 1$ platí pre všetky reálne čísla a, b, c, z ktorých aspoň dve sú nenulové.

A – I – 4

Pretože $(abc)_z$ je číslo $az^2 + bz + c$, máme zistiť, kedy všeobecne platí ekvivalencia $n \mid c + 3b - 4a$, práve vtedy, keď $n \mid az^2 + bz + c$. V nej sú a, b, c ľubovoľné číslice pri základe z, t. j. čísla z množiny $\{0, 1, \dots, z-1\}$. Všimnime si, že $z - 1 \geqq 4$, lebo predpokladáme, že $z \geqq 5$.

Keď zvolíme $a = b = c = 1$, dostaneme, že $n \mid 0$ práve vtedy, keď $n \mid z^2 + z + 1$. Pretože nula je deliteľná každým celým číslom, musí platiť $n \mid z^2 + z + 1$. Keď zvolíme $a = 1$, $b = 0$ a $c = 4$, dostaneme, že $n \mid 0$ práve vtedy, keď $n \mid z^2 + 4$. Podobnou úvahou ako vyššie zistíme, že $n \mid z^2 + 4$. Ak nejaké číslo delí dve čísla, musí deliť aj ich najväčší spoločný deliteľ, teda $n \mid \mathrm{nsd}(z^2 + 4, z^2 + z + 1)$. Tento spoločný deliteľ nájdeme pomocou Euklidovho algoritmu.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{nsd}(z^2+4, z^2+z+1) = \\
&\quad = \mathrm{nsd}\bigl(z^2+4, z^2+z+1-(z^2+4)\bigr) = \mathrm{nsd}(z^2+4, z-3) = \\
&\quad = \mathrm{nsd}\bigl(z^2+4-z(z-3), z-3\bigr) = \mathrm{nsd}(4+3z, z-3) = \\
&\quad = \mathrm{nsd}\bigl(4+3z-3(z-3), z-3\bigr) = \mathrm{nsd}(13, z-3).
\end{aligned}$$

Zistili sme, že $n \mid 13$. Pretože $n > 1$, nutne $n = 13$. Ak má niektoré n požadovanú vlastnosť, je to nutne číslo $n = 13$. Dokážme, že číslo 13 skutočne danú vlastnosť má. Odvodená nutná podmienka $n \mid \mathrm{nsd}(13, z-3)$ je pre $n = 13$ splnená napr. pre $z = 16$. Daná ekvivalencia má potom tvar $13 \mid c + 3b - 4a$ práve vtedy, keď $13 \mid a \cdot 16^2 + b \cdot 16 + c$. Dokážeme silnejšiu vlastnosť, že totiž čísla $a \cdot 16^2 + b \cdot 16 + c$ a $c + 3b - 4a$ dávajú po delení trinástimi rovnaký zvyšok, teda že ich rozdiel je deliteľný trinástimi.

$$(a \cdot 16^2 + b \cdot 16 + c) - (c + 3b - 4a) = 260a + 13b = 13(20 + b).$$

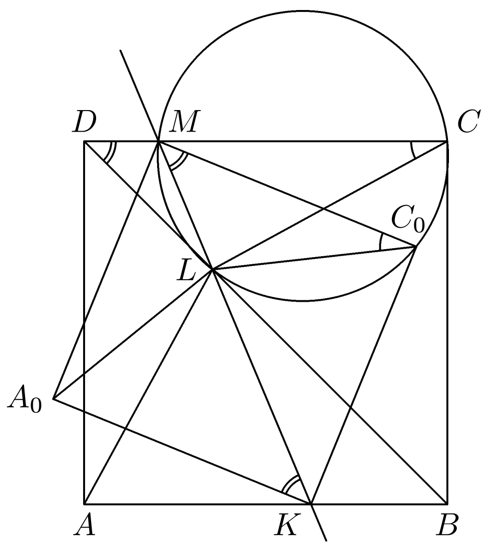
Úloha má jediné riešenie $n = 13$.

Poznámka. Podobne ako v závere riešenia môžeme dokázať, že uvedené kritérium deliteľnosti pre $n = 13$ platí aj v ľubovoľnej číselnej sústave so základom $z = 13k + 3$.

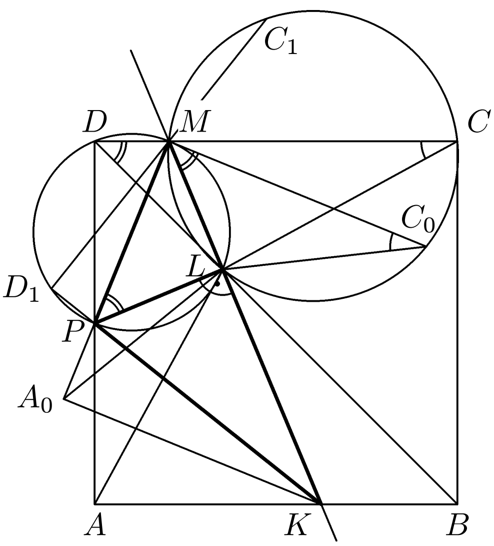
A – I – 5

Ak je $ABCD$ ľubovoľný štvorec, ktorý spĺňa podmienky úlohy, bude rovnakým podmienkam vyhovovať aj štvorec, ktorý dostaneme osovou súmernosťou podľa priamky MK. Hľadaná množina bude teda osovo súmerná podľa tejto priamky a nám stačí určiť tú jej časť, ktorá leží v jednej z oboch polrovín s hraničnou priamkou MK.

Okrem ľubovoľného štvorca $ABCD$, ktorý spĺňa podmienky úlohy, uvažujme štvorec $A_0B_0C_0D_0$ s uhlopriečkou $B_0D_0 = KM$ ($B_0 \equiv K$, $D_0 \equiv M$), pričom vrchol C_0



Obr. 24



Obr. 25

leží v rovnakej polrovine ohraničenej priamkou KM ako vrchol C štvorca $ABCD$ (obr. 24). (Vrchol C_0 zrejme rovnako patrí do hľadanej množiny.)

Pretože trojuholníky KLB a MLD sú podobné podľa vety uu, delí bod L uhlopriečky oboch štvorcov v rovnakom pomere

$$|BL| : |LD| = |KL| : |LM| = \text{konst.}$$

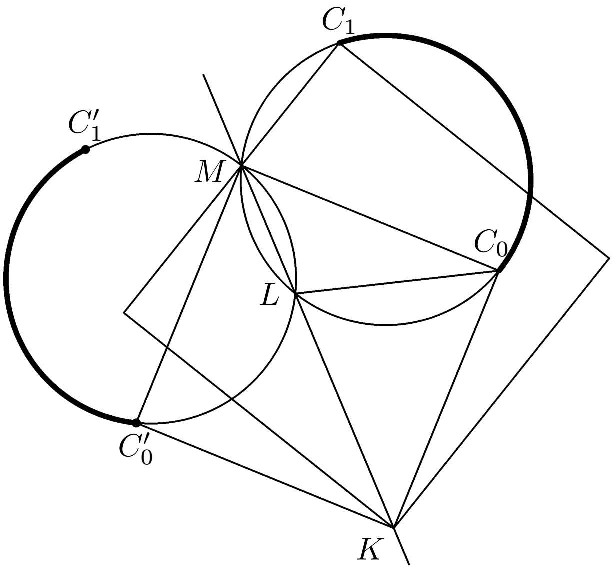
Veľkosť uhla LCD ($|\sphericalangle LCD| = |\sphericalangle LC_0M|$) je určená polohou bodu L na úsečke MK, má teda konštantnú veľkosť, takže bod C leží na rovnakom oblúku γ kružnice opísanej trojuholníku LC_0M nad tetivou LM ako bod C_0. Naviac kružnica opísaná trojuholníku A_0KL je zhodná s kružnicou opísanou trojuholníku C_0ML, pretože v jednej z nich vidno tetivu A_0L z bodu K pod uhlom 45° a v druhej tetivu C_0L zhodnej dĺžky pod rovnakým uhlom z bodu M.

Pretože bod M leží na strane CD, zrejme $|\sphericalangle LMC| \geqq |\sphericalangle LDC| = 45°$ (pokiaľ $M \neq D$, je to vonkajší uhol trojuholníka DML, ktorý má pri vrchole D uhol 45°). Pretože uhol LMC_0 meria práve 45°, leží bod C na časti oblúka γ medzi bodmi C_0 a M.

Ďalej si všimnime, že vrchol D štvorca $ABCD$ leží na oblúku, z ktorého vidno úsečku LM pod uhlom 45° v polrovine opačnej ku KMC. Zostrojme bod P (obr. 25), ktorý leží na priesečníku priamky AD a kolmice na priamku MK v bode L. Body M, D, L a P ležia na Tálesovej kružnici s priemerom MP, a pretože $|\sphericalangle MPL| = |\sphericalangle MDL| = 45°$, je trojuholník MPL rovnoramenný pravouhlý. To znamená, že bod P je jednoznačne určený polohou bodu L na úsečke MK. (Bod P vznikne otočením bodu M okolo stredu L o 90°, pretože bod L ako bod uhlopriečky BD má od priamok CD a DA rovnakú vzdialenosť, priamka DA je teda v spomenutom otočení obrazom priamky CD; odtiaľ taktiež vyplýva rovnosť $|LM| = |LP|$.)

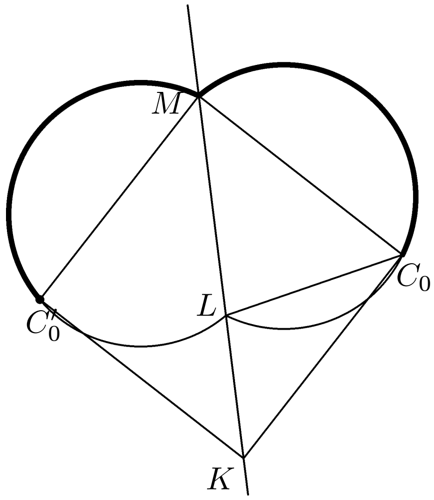
Bod D preto musí ležať na oblúku δ Tálesovej polkružnice nad priemerom MP v polrovine opačnej k PML, súčasne ale polpriamka DP (ktorá obsahuje vrchol A) nesmie pretnúť úsečku LK. Odtiaľ vyplýva, že vrchol D môže ležať len v tej časti spomenutej polkružnice nad priemerom MP, ktorá leží v polrovine PKL. Pritom je zrejmé, že priamka PK túto polkružnicu pretne v ďalšom bode rôznom od P práve vtedy, keď $|KL| > |LM|$ (pre $|KL| = |LM|$ bude KP dotyčnicou kružnice nad priemerom MP). Keď označíme v takom prípade D_1 priesečník KP s polkružnicou δ a C_1 priesečník polpriamky D_1M s oblúkom γ, je zrejmé, že vrchol C padne do časti C_0C_1 oblúka γ. V opačnom prípade, t.j. pre $|KL| \leqq |LM|$, vyplnia zrejme vrcholy C celú časť C_0M oblúka γ.

Naozaj. Zvoľme ľubovoľný bod C na časti C_0C_1 oblúka γ v prvom prípade, resp. na C_0M v druhom prípade. Priamka CM pretne oblúk δ v bode, ktorý označíme D. Vrchol A potom zostrojíme ako priesečník polpriamky DP s Tálesovou kružnicou nad priemerom PK (v prvom prípade máme zaručené, že bude ležať v polrovine PKA_0, a nie v opačnej). Pretože, ako už vieme, sú kružnice opísané trojuholníkom LC_0M a LA_0K zhodné, zistíme ľahko z príslušných obvodových uhlov, že $|\sphericalangle DAL| = |\sphericalangle DCL|$, takže trojuholníky DAL a DCL sú zhodné, teda $|DA| = |DC|$. Pretože polpriamka DL pretína úsečku MK v bode L, pretne polpriamka AK polpriamku DL v bode B za bodom K, pričom trojuholník DAB je rovnoramenný pravouhlý. $ABCD$ je teda štvorec, ktorý spĺňa podmienky úlohy.



Obr. 26

Záver: Hľadanou množinou vrcholov C štvorcov $ABCD$ je pre $|ML| < |LK|$ oblúk C_0C_1 kružnice opísanej trojuholníku MLC_0 a oblúk s ním osovo súmerný podľa danej priamky MK (obr. 26), pre $|ML| \geqq |LK|$ je to oblúk C_0M rovnakej kružnice a oblúk s ním osovo súmerný podľa priamky MK (obr. 27).



Obr. 27

A – I – 6

Označme p_i pravdepodobnosť, že vyhrá hráč A, pričom figúrka stojí na i-tom políčku. Dostaneme sústavu rovníc

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}p_3, \\ p_3 &= \frac{1}{3}p_2 + \frac{2}{3}p_4, \\ p_4 &= \frac{1}{3}p_3 + \frac{2}{3}p_5, \\ p_5 &= \frac{1}{3}p_4. \end{aligned}$$

Postupným dosadzovaním z jednej rovnice do druhej dostaneme riešenie $p_2 = 15/31$. Pretože na začiatku stojí figúrka na políčku číslo 2, je pravdepodobnosť výhry hráča A rovná $15/31$. Podobným spôsobom zostavíme a vyriešime systém rovníc pre hráča B a dostaneme tak, že hráč B vyhrá s pravdepodobnosťou $16/31$. Pravdepodobnosť remízy je teda 0. Tým je úloha vyriešená.

A – S – 1

Pre ľubovoľne vybraných dvadsať prirodzených čísel

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{20}$$

odhadneme, koľko medzi nimi môže byť súčtových trojíc, teda trojíc $\{x_i, x_j, x_k\}$ spĺňajúcich podmienky $1 \leqq i < j < k \leqq 20$ a $x_i + x_j = x_k$, a to najprv pri pevnom indexe

$k \in \{3, 4, \ldots, 20\}$. Nech sú to trojice $\{x_{i_1}, x_{j_1}, x_k\}$, $\{x_{i_2}, x_{j_2}, x_k\}$, $\ldots$, $\{x_{i_p}, x_{j_p}, x_k\}$. Potom čísla

$$x_{i_1}, x_{j_1}, x_{i_2}, x_{j_2}, \ldots, x_{i_p}, x_{j_p}$$

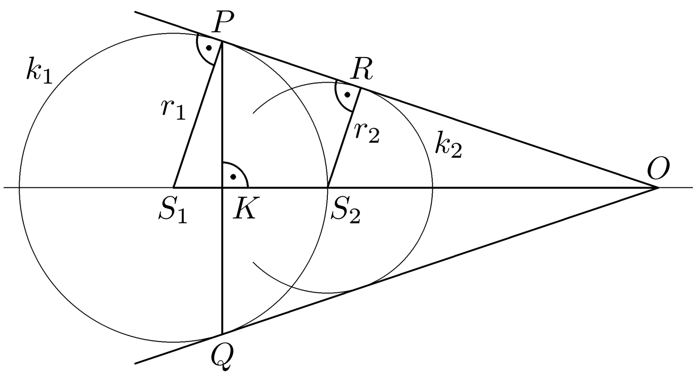
sú navzájom rôzne a všetky ležia v množine $\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\}$, takže pre ich počet $2p$ platí odhad $2p \leqq k-1$, odkiaľ $p \leqq \lfloor (k-1)/2 \rfloor$ (kde $\lfloor a \rfloor$ značí celú časť čísla a). Preto počet všetkých súčtových trojíc nemôže byť číslo väčšie ako súčet

$$\sum_{k=3}^{20} \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor = 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + \ldots + 9 + 9 = 90.$$

Príklad množiny $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$ ukazuje, že počet 90 súčtových trojíc je dosiahnuteľný, lebo pri každom $k \in \{3, 4, \ldots, 20\}$ môžeme za číslo i vybrať ľubovoľné číslo z množiny $\{1, 2, \ldots, \lfloor (k-1)/2 \rfloor\}$; odpovedajúce celé číslo $j = k - i$ potom skutočne spĺňa nerovnosti $i < j < k$, takže $\{i, j, k\}$ je súčtová trojica ležiaca v M.

A – S – 2

Zo súmernosti spoločných dotyčníc vyplýva, že body dotyku P a Q sú súmerne združené podľa priamky S_1S_2, takže platí $PQ \perp S_1S_2$. Priamka PQ preto bude dotyčnicou ku kružnici k_2, keď ukážeme, že priesečník K priamok PQ a S_1S_2 leží na kružnici k_2 (obr. 28). Označme ešte O priesečník oboch dotyčníc s priamkou S_1S_2 a R bod dotyku



Obr. 28

dotyčnice PO s kružnicou k_2. Z podobných pravouhlých trojuholníkov S_1OP a S_2OR vyplýva pomer

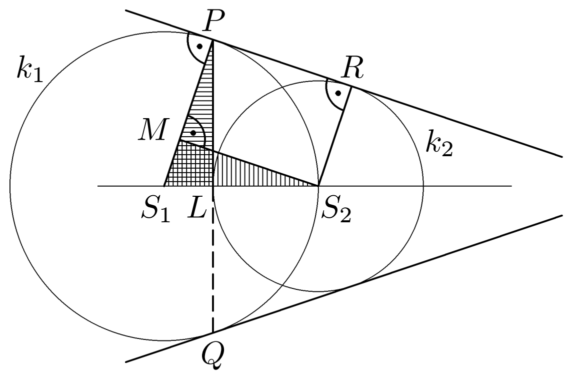
$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{|S_1P|}{|S_2R|} = \frac{|S_1O|}{|S_2O|} = \frac{|S_1O|}{|S_1O| - r_1}, \quad \text{odkiaľ} \quad |S_1O| = \frac{r_1^2}{r_1 - r_2}.$$

Z Euklidovej vety o odvesne S_1P trojuholníka S_1OP preto vyplýva, že

$$r_1^2 = |S_1P|^2 = |S_1K| \cdot |S_1O| = |S_1K| \, \frac{r_1^2}{r_1 - r_2},$$

teda $|S_1K| = r_1 - r_2$, a preto $|S_2K| = |S_1S_2| - |S_1K| = r_1 - (r_1 - r_2) = r_2$. To znamená, že bod K skutočne leží na kružnici k_2 a dôkaz tvrdenia je hotový.

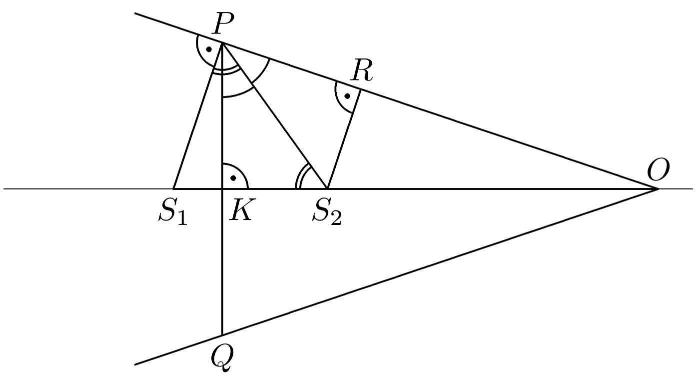
Iné riešenie. Označme L priesečník kružnice k_2 s úsečkou S_1S_2, M pätu kolmice spustenej z bodu S_2 na úsečku S_1P a R bod dotyku kružnice k_2 s tou spoločnou dotyčnicou, ktorá prechádza bodom P (obr. 29). Pretože S_2RPM je pravouholník, platí $|MP| = |S_2R| = r_2$, a preto $|S_1M| = |S_1P| - |MP| = r_1 - r_2$. Rovnakú dĺžku $r_1 - r_2$



Obr. 29

má tiež úsečka S_1L, lebo $r_1 = |S_1S_2|$ a $r_2 = |S_2L|$. Trojuholníky S_1MS_2 a S_1LP majú teda zhodné uhly pri vrchole S_1 aj priľahlé strany, sú preto zhodné podľa vety *sus*. Platí teda nielen $S_1M \perp S_2M$, ale aj $S_1L \perp PL$. Bod L však leží na kružnici k_2, takže priamka PL je jej dotyčnicou, ktorá s ohľadom na súmernosť prechádza taktiež bodom Q. Dôkaz je skončený.

Iné riešenie. Označme O priesečník oboch dotyčníc, K pätu kolmice z bodu P na OS_1 (vzhľadom na súmernosť oboch dotyčníc podľa spojnice S_1S_2 je to priesečník PQ s OS_1) a R pätu kolmice z bodu S_2 na OP (obr. 30). Pretože $|S_1P| = |S_1S_2| = r_1$,



Obr. 30

platí $|\sphericalangle S_1PS_2| = |\sphericalangle S_1S_2P|$, preto

$$|\sphericalangle S_2PK| = 90^\circ - |\sphericalangle S_1S_2P| = \\ = 90^\circ - |\sphericalangle S_1PS_2| = |\sphericalangle S_2PR|,$$

takže pravouhlé trojuholníky KS_2P a RS_2P sa zhodujú v prepone S_2P a priľahlom uhle pri vrchole P. Preto $|S_2K| = |S_2R|$ a kružnica so stredom S_2 a polomerom $r_2 = |S_2R|$ sa dotýka spojnice PQ v bode K.

A – S – 3

Ľavú stranu druhej rovnice upravíme na súčin.

$$x^3 - 2x^2 - px + 2p = x^2(x-2) - p(x-2) = (x-2)(x^2-p).$$

Pre spoločný koreň x oboch rovníc teda platí $x = 2$ alebo $x^2 = p$. V prvom prípade po dosadení do prvej rovnice dostaneme

$$2^3 + 2^2 - 36 \cdot 2 - p = 0, \quad \text{čiže} \quad p = -60;$$

v druhom prípade môžeme prvú rovnicu zjednodušiť na tvar $x^3 - 36x = 0$, odkiaľ vyplýva $x = 0$ alebo $x = \pm 6$, a preto z podmienky $p = x^2$ vychádza $p = 0$ resp. $p = 36$.

Dodajme, že po nájdení rozkladu ľavej strany druhej rovnice sme mohli vypísať jej korene $x_1 = 2$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{p}$ a po ich postupnom dosadení do prvej rovnice určiť hľadané hodnoty $p = -60$, $p = 0$ a $p = 36$.

Iné riešenie. Z prvej rovnice ľahko vyjadríme $p = x^3 + x^2 - 36x$ a dosadením do druhej rovnice dostaneme rovnicu

$$x^3 - 2x^2 - (x^3 + x^2 - 36x)x + 2(x^3 + x^2 - 36x) = 0.$$

(bez parametra p), ktorú musí spĺňať spoločný koreň oboch pôvodných rovníc. Po úprave dostaneme rovnicu $x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 72x = 0$, ktorej korene ľahko určíme (sú to totiž celé čísla) napríklad postupným rozkladom

$$x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 72x = x[x^2(x-2) - 36(x-2)] = x(x-2)(x^2-36) = \\ = x(x-2)(x-6)(x+6).$$

Vidíme, že spoločným koreňom musí byť jedno z čísel $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 6$, $x_4 = -6$. Keď ich dosadíme do pôvodných rovníc, ihneď zistíme príslušné hodnoty p; sú to čísla 0, -60 a 36 (posledné zodpovedá obom koreňom $x_{3,4} = \pm 6$).

Iné riešenie. Spoločné korene mnohočlenov

$$P_1(x) = x^3 + x^2 - 36x - p, \quad P_2(x) = x^3 - 2x^2 - px + 2p$$

(ak vôbec existujú) sú korene mnohočlena, ktorý je najväčším spoločným deliteľom mnohočlenov P_1 a P_2. Nájdeme ho Euklidovým algoritmom postupného delenia zo zvyškom. V prvých dvoch krokoch dostaneme ako zvyšky mnohočleny

$$P_3(x) = P_1(x) - P_2(x) = 3x^2 + (p-36)x - 3p,$$
$$P_4(x) = P_2(x) - \left(\frac{x}{3} + \frac{30-p}{9}\right) P_3(x) = (p-36)\left(\frac{(p-30)x}{9} - \frac{p}{3}\right).$$

V prípade, keď $p = 36$, je algoritmus skončený; najväčší spoločný deliteľ je vtedy rovný $P_3(x) = 3x^2 - 3 \cdot 36 = 3(x-6)(x+6)$, takže mnohočleny P_1, P_2 majú dva spoločné korene $x = \pm 6$. Ďalej preto predpokladajme, že $p \neq 36$. Jediný kandidát na spoločný koreň mnohočlenov P_1, P_2 je koreň mnohočlena P_4, teda číslo $x = 3p/(p-30)$. Stačí iba zistiť, kedy je toto číslo koreňom mnohočlena P_3. Pretože

$$P_3\left(\frac{3p}{p-30}\right) = \frac{9p(p+60)}{(p-30)^2},$$

majú požadovanú vlastnosť iba hodnoty $p = 0$ a $p = -60$ (ktorým zodpovedá spoločný koreň $x = 0$ resp. $x = 2$).

A – II – 1

Pretože v zápise dvojmiestneho čísla vystupuje číslica 4, nutne platí $z \geqq 5$. Z rozvinutých zápisov $(1001)_z = z^3+1$ a $(41)_z = 4z+1$ vyplýva, že hľadáme práve tie prirodzené $z \geqq 5$, pre ktoré je číslo z^3+1 násobkom čísla $4z+1$. Pomocou Euklidovho algoritmu nájdeme ich najväčší spoločný deliteľ. Môžeme postupovať tak, že najprv vydelíme oba výrazy ako mnohočleny a potom sa „zbavíme“ zlomkov.

$$z^3 + 1 = \left(\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{4^2}z + \frac{1}{4^3}\right)(4z+1) + \frac{63}{4^3}, \qquad / \cdot 4^3$$
$$4^3(z^3+1) = (16z^2 - 4z + 1)(4z+1) + 63. \tag{1}$$

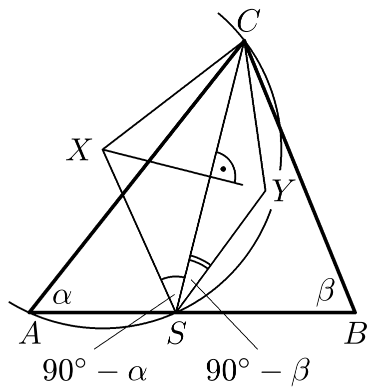
Pretože čísla 4 a $4z+1$ sú nesúdeliteľné, vidíme odtiaľ, že číslo $4z+1$ delí číslo $z^3 + 1$, práve vtedy, keď delí číslo 63, teda práve vtedy, keď $4z+1 \in \{1, 3, 7, 9, 21, 63\}$. Z podmienky $z \geqq 5$ však vyplýva $4z+1 \geqq 21$, takže $4z+1 = 21$ (rovnica $4z+1 = 63$ nemá celočíselné riešenie) a $z = 5$.

Poznámka. Rozklad (1) tiež ľahko odhalíme, keď využijeme známy vzorec $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$. Podľa neho môžeme rovno písať

$$4^3(z^3+1) = (4^3z^3+1) + 63 = (4z+1)(16z^2 - 4z + 1) + 63.$$

A – II – 2

Vnútorné uhly trojuholníka ABC označme ako zvyčajne α, β, γ. Podľa vety o obvodovom a stredovom uhle v kružnici opísanej trojuholníku ASC platí (obr. 31)



Obr. 31

$|\sphericalangle SXC| = 2\alpha$, takže uhol pri základni SC rovnoramenného trojuholníka SCX má veľkosť $|\sphericalangle XSC| = (180^\circ - 2\alpha)/2 = 90^\circ - \alpha$ (využili sme predpoklad, že α je ostrý uhol). Analogicky sa odvodí rovnosť $|\sphericalangle YSC| = 90^\circ - \beta$. Pretože uhly pri vrcholoch A a C trojuholníka ASC sú ostré, je stred X vnútorným bodom uhla ASC; podobne je stred Y vnútorným bodom uhla BSC. Preto možno vyjadriť veľkosť uhla XSY ako súčet veľkostí uhlov XSC a YSC.

$$|\sphericalangle XSY| = |\sphericalangle XSC| + |\sphericalangle YSC| = (90^\circ - \alpha) + (90^\circ - \beta) = \gamma.$$

Ak označíme ešte $\omega = |\sphericalangle ASC|$, potom pre polomery kružníc opísaných trojuholníkom ASC a BSC platia vzťahy

$$|SX| = \frac{|AC|}{2\sin\omega} \quad \text{a} \quad |SY| = \frac{|BC|}{2\sin(180^\circ - \omega)} = \frac{|BC|}{2\sin\omega},$$

ktoré spolu so skôr určenou veľkosťou uhla XSY vedú k nasledujúcej závislosti medzi obsahmi S_{SXY} a S_{ABC} trojuholníkov SXY a ABC:

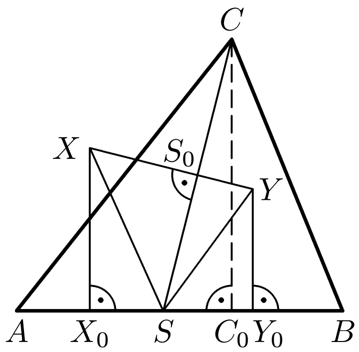
$$S_{SXY} = \frac{|SX| \cdot |SY| \cdot \sin|\sphericalangle XSY|}{2} = \frac{|AC| \cdot |BC| \cdot \sin\gamma}{8\sin^2\omega} = \frac{S_{ABC}}{4\sin^2\omega}.$$

Odtiaľ vyplýva nerovnosť $S_{SXY} \geqq S_{ABC}/4$, pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď $\sin\omega = 1$, čiže $\omega = 90^\circ$. Obsah trojuholníka SXY je preto najmenší práve vtedy, keď je bod S pätou výšky z vrcholu C na stranu AB. (Táto päta je vnútorným bodom strany AB vďaka podmienke, že trojuholník ABC je ostrouhlý.)

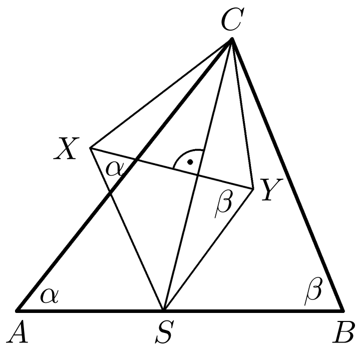
Iné riešenie. Spojnica XY stredov oboch opísaných kružníc pretína spoločnú tetivu CS v jej stredu S_0 a kolmé priemety X_0, Y_0 bodov X, Y na stranu AB sú stredmi úsečiek AS, SB (obr. 32). Preto $|X_0Y_0| = |AB|/2$ a pre obsah trojuholníka SXY platí

$$\begin{aligned} S_{SXY} &= \frac{1}{2}|XY| \cdot |S_0S| \geqq \frac{1}{2}|X_0Y_0| \cdot |S_0S| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}|AB| \cdot \frac{1}{2}|CS| \geqq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}|AB| \cdot |CC_0| = \frac{1}{4}S_{ABC}, \end{aligned}$$

kde CC_0 je výška trojuholníka ABC. Rovnosť v prvej z predchádzajúcich dvoch nerovností nastane práve vtedy, keď $XY \parallel AB$, t. j. práve vtedy, keď $CS \perp AB$, čiže $S = C_0$. A práve vtedy prejde na rovnosť aj druhá nerovnosť.



Obr. 32



Obr. 33

Iné riešenie. Priesečníky C a S kružníc opísaných trojuholníkom ASC a BSC sú súmerne združené podľa priamky XY, takže pre veľkosť uhla SXY platí (obr. 33)

$$|\sphericalangle SXY| = \frac{1}{2}|\sphericalangle SXC| = \frac{1}{2} \cdot 2|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BAC|,$$

podobne $|\sphericalangle SYX| = |\sphericalangle ABC|$. Preto sú trojuholníky SXY a CAB podobné podľa vety *uu*, takže ich obsahy S_{SXY} a S_{ABC} sú pomocou koeficientu podobnosti $k = |XS| : : |AC|$ zviazané rovnosťou $S_{SXY} = k^2 S_{ABC}$. Pretože úsečka AC je tetivou kružnice s polomerom $|XS|$, platí nerovnosť $|AC| \leqq 2|XS|$, čiže $k \geqq 1/2$; rovnosť $k = 1/2$ pritom nastane len vtedy, keď je strana AC priemerom kružnice opísanej trojuholníku ASC, čo je ekvivalentné s podmienkou $CS \perp AB$. Tým je dokázaná nerovnosť $S_{SXY} \geqq S_{ABC}/4$ aj nájdená podmienka, kedy nastane rovnosť.

A – II – 3

Rovnice danej sústavy majú zmysel len vtedy, keď sú čísla x, y, z kladné a rôzne od 1. Pre také čísla x, y, z (iné ďalej neuvažujeme) dostávame odlogaritmovaním ekvivalentnú sústavu rovníc

$$y + z = x^p, \quad z + x = y^p, \quad x + y = z^p. \tag{1}$$

Ukážeme najprv, že v obore $M = (0, 1) \cup (1, \infty)$ je každé riešenie sústavy (1) tvorené trojicou rovnakých čísel. Využijeme na to známy poznatok, že pre $p \geqq 0$ je funkcia $f(t) = t^p$ na množine kladných čísel t neklesajúca (presnejšie rastúca pre $p > 0$ a konštantná pre $p = 0$). Predpokladajme naopak, že pre niektoré riešenie (x, y, z) platí napríklad $x < y$. Odpočítaním prvých dvoch rovníc z (1) dostaneme $y - x = x^p - - y^p$. Z predpokladu $x < y$ ale vyplýva $x^p \leqq y^p$, takže $y - x > 0$ a zároveň $x^p - y^p \leqq 0$, čo je v spore s predchádzajúcou rovnosťou. Podobne odvodíme spor aj v prípade, keď

$x > y$, a v prípadoch, keď $x \neq z$ resp. $y \neq z$ (sústava (1) je totiž v neznámych x, y, z symetrická).

Sústava (1) sa preto redukuje na rovnicu $x + x = x^p$, ktorú máme riešiť v obore $M = (0,1) \cup (1,\infty)$. Pretože $x \neq 0$, dostávame po delení číslom x ekvivalentnú rovnicu $2 = x^{p-1}$. Táto rovnica nemá riešenie pre $p = 1$, pre $p = 0$ má jediné riešenie $x = 1/2$, pre prirodzené $p \geqq 2$ má jediné riešenie $x = 2^{1/(p-1)}$, ktoré možno pre $p \geqq 3$ zapísať ako $x = \sqrt[p-1]{2}$. (Čísla $1/2$ aj $2^{1/(p-1)}$ zrejme patria do M.)

Odpoveď. Daná sústava má pre $p = 0$ jediné riešenie $x = y = z = 1/2$, pre $p = 1$ nemá riešenie, pre prirodzené $p \geqq 2$ má jediné riešenie $x = y = z = 2^{1/(p-1)}$.

A – II – 4

Na úvod si všimneme, že v dôsledku rovnosti $x_1 = 1$ platí

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1^{\pm 1} = 1^{\pm 1} = 1, \\ x_3 &= x_2^{\pm 1} + x_1^{\pm 1} = 1^{\pm 1} + 1^{\pm 1} = 2. \end{aligned} \tag{1}$$

Pretože pre každé $x > 0$ sú obe čísla x^{+1}, x^{-1} kladné, vyplýva odtiaľ jednoducho matematickou indukciou, že nerovnosť $x_n \geqq 1$ je splnená pre každé n. Ale ak $x \geqq 1$, potom $0 < x^{-1} \leqq x^1$, a preto pre každé $n \geqq 4$ platia odhady

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{x_4} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1}} \leqq x_n \leqq 1 + 1 + 2 + x_4 + \ldots + x_{n-1}, \tag{2}$$

ktoré využijeme vo všetkých troch častiach riešenia.

a) Dokážeme (sporom), že existuje k, pre ktoré $x_k > 10^3$. Predpokladajme naopak, že pre každé k platí opačná nerovnosť $x_k \leqq 10^3$. Z ľavej nerovnosti v (2) potom pre každé $n > 4$ vyplýva odhad

$$x_n \geqq \frac{5}{2} + \underbrace{10^{-3} + 10^{-3} + \ldots + 10^{-3}}_{(n-4)\text{ krát}} = \frac{5}{2} + (n-4) \cdot 10^{-3}.$$

Odtiaľ ale vyplýva, že $x_n > 10^3$ pre každé $n > 10^6 + 4$, čo je spor.

b) Dokážeme najskôr, že z pravých nerovností v (2) vyplýva odhad $x_n \leqq 2^{n-2}$ pre každé $n \geqq 2$. Využijeme indukciu. Pre $n = 2$ aj pre $n = 3$ platí podľa (1) rovnosť $x_n = 2^{n-2}$; nech $n \geqq 4$ a nech pre všetky $k \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$ platí $x_k \leqq 2^{k-2}$, potom z (2) dostávame

$$x_n \leqq 1 + (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-3}) = 1 + (2^{n-2} - 1) = 2^{n-2}.$$

Tým je dôkaz indukciou ukončený. Keď dosadíme odhady $x_n \leqq 2^{n-2}$ do ľavej nerovnosti v (2), vyjde nám pre hodnotu x_{10^6} dolný odhad

$$x_{10^6} \geqq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{10^6-3}} = 3 - \frac{1}{2^{10^6-3}}.$$

To spolu s príkladom vyhovujúcej postupnosti

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + x_{n-2} + \ldots + x_1 \quad (n \in \{2, 3, \ldots, 10^6 - 1\}), \\ x_{10^6} &= x_{10^6-1}^{-1} + x_{10^6-2}^{-1} + \ldots + x_2^{-1} + x_1^{-1}, \end{aligned}$$

v ktorej $x_n = 2^{n-2}$ pre každé $n \in \{2, 3, \ldots, 10^6 - 1\}$ a $x_{10^6} = 3 - 2^{3-10^6}$, ukazuje, že najmenšia možná hodnota člena x_{10^6} je rovná $3 - 2^{3-10^6}$.

c) Predpokladajme, že nerovnosť $x_n < 4$ platí okrem troch hodnôt $n \in \{1, 2, 3\}$ ešte pre niektoré ďalšie n, ktoré označíme $n_4, n_5, n_6, \ldots$ tak, že $4 \leqq n_4 < n_5 < n_6 < \ldots$ (zatiaľ ešte nevieme, či ide o konečnú alebo nekonečnú postupnosť). Ukážme, že pre každé také n_k sú vo všetkých exponentoch príslušnej rovnosti

$$x_{n_k} = 1 + 1 + 2^{\pm 1} + x_4^{\pm 1} + x_5^{\pm 1} + \ldots + x_{n_k-1}^{\pm 1}$$

vybrané znamienka „mínus“. Pre mocninu $2^{\pm 1}$ je to zrejmé, lebo $x_{n_k} < 4$; z rovnakej nerovnosti ďalej vyplýva, že znamienko v exponente ktorejkoľvek mocniny $x_j^{\pm 1}$ $(4 \leqq \leqq j \leqq n_k - 1)$ musí byť vybrané tak, aby platilo

$$x_j^{\pm 1} < 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}.$$

Táto nerovnosť však môže byť splnená iba so znamienkom „mínus“, lebo podľa (2) máme $x_j \geqq 5/2$. Tým je tvrdenie o výbere znamienok dokázané. Porovnaním dvoch za sebou idúcich rovností

$$\begin{aligned} x_{n_k} &= \frac{5}{2} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} + \ldots + \frac{1}{x_{n_k-1}}, \\ x_{n_{k+1}} &= \frac{5}{2} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} + \ldots + \frac{1}{x_{n_k-1}} + \frac{1}{x_{n_k}} + \ldots + \frac{1}{x_{n_{k+1}-1}} \end{aligned}$$

dostaneme pre všetky $k \geqq 4$ nerovnosti

$$x_{n_{k+1}} \geqq x_{n_k} + \frac{1}{x_{n_k}},$$

ktoré s prihliadnutím k tomu, že funkcia $f(t) = t + 1/t$ je na intervale $t \in \langle 1, \infty)$ rastúca a že $x_{n_4} \geqq 2{,}5$, vedú postupne k odhadom

$$\begin{gathered} x_{n_5} \geqq f(2{,}5) = 2{,}9, \quad x_{n_6} \geqq f(2{,}9) > 3{,}24, \quad x_{n_7} > f(3{,}24) > 3{,}54, \\ x_{n_8} > f(3{,}54) > 3{,}82, \quad x_{n_9} \geqq f(3{,}82) > 4{,}08. \end{gathered}$$

Posledná nerovnosť je ale v spore s podmienkou $x_{n_k} < 4$ určujúcou výber indexov n_k. Preto nerovnosť $x_n < 4$ nemôže platiť pre deväť indexov n.

A – III – 1

Pretože druhú rovnicu môžeme upraviť na tvar $xy(x+y) = -2$, upravme podobne aj prvú rovnicu: $(x+y)^2 - 3xy = 7$. Pre čísla $s = x+y$, $p = xy$ tak dostávame ekvivalentnú sústavu

$$\begin{aligned} s^2 - 3p &= 7, \\ sp &= -2, \end{aligned} \tag{1}$$

ktorá po vyjadrení $p = -2/s$ (zrejme nemôže byť $s = 0$) z druhej rovnice vedie na kubickú rovnicu $s^3 - 7s + 6 = 0$. Tá má celočíselné korene $s_1 = 1$, $s_2 = 2$ a $s_3 = -3$. Nájdeným hodnotám s odpovedajú tieto hodnoty súčinu $p = xy$: $p_1 = -2$, $p_2 = -1$, $p_3 = 2/3$. Čísla x, y tvoria dvojicu koreňov kvadratickej rovnice $t^2 - st + p = 0$, takže sa jedná o jednu z rovníc

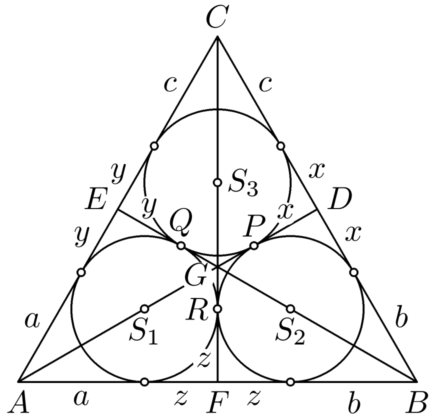
$$t^2 - t - 2 = 0, \quad t^2 - 2t - 1 = 0, \quad t^2 + 3t + \frac{2}{3} = 0.$$

Ich riešením dostaneme (všetkých) šesť riešení danej sústavy

$$\{x, y\} = \{-1, 2\}, \quad \{x, y\} = \left\{1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\right\},$$
$$\{x, y\} = \left\{\frac{-9 + \sqrt{57}}{6}, \frac{-9 - \sqrt{57}}{6}\right\}.$$

A – III – 2

Predpokladajme, že spomenuté štvoruholníky majú uvedenú vlastnosť. Zo súmernosti dotyčníc z daného bodu k danej kružnici vyplýva, že strany trojuholníka ABC sú rozdelené bodmi D, E, F a bodmi dotyku kružníc vpísaných uvažovaným štvoruholníkom na úseky dĺžok, ktoré označíme podľa obr. 34. Sú na ňom tiež vyznačené body P, Q, R vzájomného dotyku spomenutých kružníc. Naším cieľom je dokázať rovnosti $x = y = z$ a $a = b = c$.



Obr. 34

Pre úseky dotyčníc z bodu A ku kružniciam pri strane BC platia rovnosti $a + 2z = |AP| = a + 2y$, odkiaľ ihneď vyplýva $y = z$; z dôvodov symetrie teda naozaj platí $x = y = z$. (Všade ďalej budeme písať x namiesto y a z.) Všimnime si teraz trojuholníky AEG a AFG. Majú spoločnú stranu AG a zhodné strany AF a AE (dĺžky $a+x$). Tiež ich tretie strany EG a FG sú zhodné, lebo

$$|EG| = |EQ| + |QG| = x + |RG| = |FR| + |RG| = |FG|.$$

Trojuholníky AEG a AFG sú teda zhodné podľa vety *sss*, takže uhly BAD a CAD sú zhodné a polpriamka AD je osou uhla BAC. Ako vieme, os uhla trojuholníka pretína protiľahlú stranu v pomere dĺžok priľahlých strán. V našom prípade to znamená, že

$$\frac{a + 2x + b}{a + 2x + c} = \frac{b + x}{c + x}.$$

Jednoduchou úpravou dostaneme rovnosť $(b - c)(a + x) = 0$, z ktorej vidíme, že $b = c$. Z dôvodov symetrie teda platí $a = b = c$ a celý dôkaz je hotový.

Iné riešenie. Označme S_1, S_2, S_3 stredy vpísaných kružníc (obr. 34). Rovnako ako v predchádzajúcom riešení si najprv všimneme, že platí $x = y = z$ a že trojuholníky AEG a AFG sú zhodné. K tomu sme využili rovnosť $|GQ| = |GR|$, z ktorej vyplýva, že podľa vety *sss* sú zhodné aj trojuholníky S_1QG a S_1RG. Keďže $R \in S_1S_2$ a $Q \in S_1S_3$, zo súmernosti podľa osi AD teraz vyplýva, že priamky AB a S_1S_2 zvierajú rovnaký uhol ako priamky AC a S_1S_3, a pretože kolmé priemety úsečiek S_1S_2 a S_1S_3 na odpovedajúce priamky AB, resp. AC sú zhodné (majú dĺžku $2x$), platí $|S_1S_2| = |S_1S_3|$. Analogicky $|S_1S_2| = |S_2S_3|$, takže trojuholník $S_1S_2S_3$ je rovnostranný. Odtiaľ pre polomery r_1, r_2 a r_3 vpísaných kružníc vyplýva $r_1 + r_2 = r_2 + r_3 = r_3 + r_1$, čiže $r_1 = r_2 = r_3$. Kružnice sú teda zhodné, takže $AB \parallel S_1S_2$, $BC \parallel S_2S_3$ a $CA \parallel S_3S_1$ a trojuholník ABC je rovnostranný.

Poznámka. K dokončeniu predchádzajúceho dôkazu môžeme úvahu o dĺžkach úsečiek S_iS_j nahradiť úvahou o tzv. orientovaných uhloch medzi priamkami. Orientovaný uhol $\langle p, q\rangle$ priamok p, q (v tomto poradí) je uhol, o ktorý musíme v kladnom smere otočiť priamku q, aby bola rovnobežná s priamkou p. Pritom $\langle p, q\rangle = \langle q, p\rangle$ práve vtedy, keď $\langle p, q\rangle$ je násobok $90°$. Zo súmernosti podľa osí AD, BE a CF tak postupne dostávame $\langle S_1S_3, AC\rangle = \langle AB, S_1S_2\rangle = \langle S_2S_3, BC\rangle = \langle AC, S_1S_3\rangle$. Pretože obe odpovedajúce kružnice so stredmi S_1, S_3 majú spoločnú dotyčnicu AC a ležia v rovnakej polrovine určenej priamkou AC, znamená to, že S_1S_3 a AC sú rovnobežné.

A – III – 3

Pokiaľ sa nám podarí zostaviť podľa daného pravidla $(k + 3)$-člennú postupnosť

$$x_1 = 1,\ x_2,\ x_3,\ \dots,\ x_{k-1},\ x_k = x_{k+1} = x_{k+2} = x_{k+3} = 12,$$

môžeme všetky nasledujúce členy $x_{k+4}, x_{k+5}, x_{k+6}, \ldots$ definovať tak, aby sa tiež rovnali číslu 12. Skutočne, vzhľadom na matematickú indukciu stačí ukázať, ako s vytýčeným cieľom vybrať znamienka v rovnosti určujúcej člen x_{k+4}. Položme

$$\begin{aligned} x_{k+4} = {} & + 12(k+3) - 12(k+2) - 12(k+1) + 12k \pm \\ & \pm (k-1)x_{k-1} \pm (k-2)x_{k-2} \pm \ldots \pm x_1, \end{aligned}$$

pritom znamienka v druhom riadku vyberieme presne také, aké boli v súčte určujúcom člen $x_k = 12$. Potom sa súčet v druhom riadku rovná 12, takže vychádza

$$x_{k+4} = 12(k+3) - 12(k+2) - 12(k+1) + 12k + 12 = 12.$$

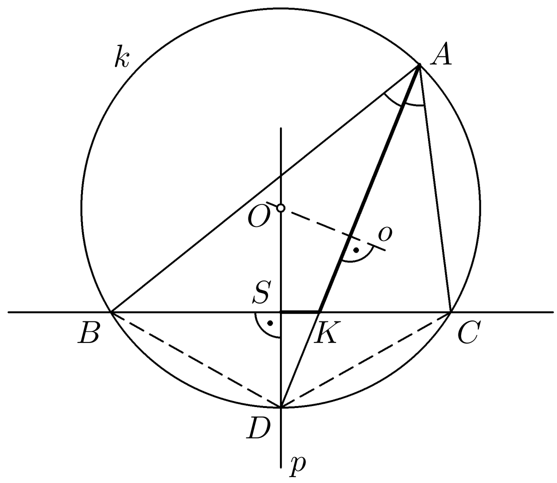
Vhodný príklad pre $k = 8$ je $x_1 = x_2 = x_3 = 1$,

$$\begin{aligned} x_4 &= 3 - 2 + 1 = 2, \\ x_5 &= 4 \cdot 2 - 3 - 2 + 1 = 4, \\ x_6 &= 5 \cdot 4 - 4 \cdot 2 - 3 - 2 - 1 = 6, \\ x_7 &= 6 \cdot 6 - 5 \cdot 4 - 4 \cdot 2 + 3 - 2 + 1 = 10, \\ x_8 &= 7 \cdot 10 - 6 \cdot 6 - 5 \cdot 4 - 4 \cdot 2 + 3 + 2 + 1 = 12, \\ x_9 &= 8 \cdot 12 - 7 \cdot 10 - 6 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 2 - 3 - 2 - 1 = 12, \\ x_{10} &= 9 \cdot 12 - 8 \cdot 12 - 7 \cdot 10 + 6 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 3 + 2 + 1 = 12, \\ x_{11} &= 10 \cdot 12 + 9 \cdot 12 - 8 \cdot 12 - 7 \cdot 10 - 6 \cdot 6 - 5 \cdot 4 + 4 \cdot 2 - 3 + 2 - 1 = 12. \end{aligned}$$

Dokázali sme, že jedna z uvažovaných postupností má iba prvých sedem členov rôznych od čísla 12.

A – III – 4

Rozbor. Predpokladajme, že trojuholník ABC má všetky požadované vlastnosti a označme D priesečník kružnice k opísanej trojuholníku ABC s polpriamkou opačnou k ramenu KA daného uhla AKS (obr. 35). Polpriamka AD rozpoľuje uhol BAC, preto sú uhly BAD a CAD zhodné, takže sú zhodné aj tetivy BD a CD kružnice k. Bod S je preto stredom základne BC rovnoramenného trojuholníka BCD, takže uhol BSD je pravý. To znamená, že bod D leží na priamke p, ktorá prechádza bodom S kolmo na dané rameno KS. Stred O kružnice k leží jednak na priamke p (osi tetivy BC), jednak na priamke o, ktorá je osou tetivy AD.



Obr. 35

Konštrukcia. Pre daný uhol AKS najprv preložíme bodom S priamku p kolmú na rameno KS. Potom zostrojíme priesečník D priamky p s polpriamkou opačnou k ramenu KA. Ďalej zostrojíme os o úsečky AD a jej priesečník s priamkou p označíme O. Konečne zostrojíme kružnicu k so stredom O a polomerom $r = |OA|$ $(= |OD|)$ a jej priesečníky s priamkou KS označíme B a C.

Dôkaz správnosti konštrukcie. Ukážeme, že zostrojený trojuholník ABC má všetky požadované vlastnosti. Z posledného kroku konštrukcie vyplýva, že body B, C ležia na priamke KS a že bod S je stredom úsečky BC. Pretože na priamke p, osi úsečky BC, leží aj bod D, platí $|BD| = |CD|$, a preto $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle CAD|$ (lebo všetky body A, B, C, D ležia na kružnici k.) Polpriamka AD je teda osou uhla BAC a bod K je jej priesečníkom s úsečkou BC.

Diskusia. Vysvetlíme, prečo pre daný tupý uhol AKS je hľadaný trojuholník ABC jediný (keď neberieme do úvahy možnosť zameniť označenie vrcholov B a C). Pretože je uhol AKS tupý, bod D z našej konštrukcie zrejme existuje a priamky p a o sú rôznobežné, takže aj bod O je určený jednoznačne. Zostáva zdôvodniť, prečo kružnica k pretne priamku KS v dvoch bodoch. Pretože bod K je vnútorným bodom základne AD rovnoramenného trojuholníka ADO, platí $|OK| < |OA| = |OD| = r$, teda bod K leží vo vnútornej oblasti kružnice k a priamka KS je nutne jej sečnicou.

A – III – 5

Hľadané dvojmiestne čísla A, B majú tvar $A = az + b$ a $B = bz + a$, kde a, b sú ich (nenulové!) číslice, takže $a, b \in \{1, 2, \ldots, z - 1\}$. Kvadratická rovnica z textu úlohy má dvojnásobný koreň x_0 práve vtedy, keď platí $2x_0 = A$ a $x_0^2 = B$. Z týchto rovností vyplýva, že číslo x_0 je kladné a celé. Vzhľadom na nerovnosť $x_0^2 = B < z^2$ (B je totiž dvojmiestne, zatiaľ čo z^2 je trojmiestne) naviac platí $x_0 < z$, odkiaľ $A = 2x_0 < 2z$, takže číslo A má ako prvú číslicu jednotku. Platí teda $a = 1$ a z rovností $2x_0 = z + b$ a $x_0^2 = bz + 1$ vylúčením x_0 dostaneme pre číslicu b kvadratickú rovnicu $(b - z)^2 = 4$ s dvoma koreňmi $b_1 = z - 2$ a $b_2 = z + 2$. Za číslicu b možno však zobrať iba prvú z nich, takže nutne $b = z - 2$.

Dokázali sme, že čísla A, B musia byť tvaru $A = z+(z-2) = 2z-2$ a $B = (z - 2)z+ +1 = (z-1)^2$; v sústave so základom z teda majú zápisy $A = \overline{1(z-2)}$ a $B = \overline{(z-2)1}$. Urobme ešte skúšku. Kvadratická rovnica $x^2 - (2z - 2)x + (z - 1)^2 = 0$ má naozaj dvojnásobný koreň $x_0 = z - 1$, lebo jej ľavá strana je rovná $(x - z + 1)^2$.

Poznámka. Kľúčovú rovnosť $a = 1$ možno odvodiť aj bez úvahy o dvojnásobnom koreni x_0 skúmanej rovnice, keď zapíšeme podmienku, že jej diskriminant $A^2 - 4B$ je rovný nule:

$$0 = A^2 - 4B = (az + b)^2 - 4(bz + a) = b^2 + 2z(a - 2)b + a(az^2 - 4).$$

Posledný výraz môže mať nulovú hodnotu len vtedy, keď je činiteľ $a - 2$ záporný, lebo $b \geqq 1$, $a \geqq 1$, $z \geqq 3$ a $az^2 - 4 \geqq 3^2 - 4 = 5$. Z nerovnosti $a - 2 < 0$ už však vyplýva $a = 1$. Pre také a dostávame rovnicu $0 = b^2 - 2zb + (z^2 - 4)$ a záver je rovnaký ako v uvedenom riešení.

A – III – 6

K daným kladným číslam a, b, c spĺňajúcim podmienku $abc = 1$ zapíšeme AG-nerovnosť pre trojicu čísel a/b, a/b a b/c.

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right) \geqq \sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}} = \sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}} = \sqrt[3]{\frac{a^3}{abc}} = a.$$

Platí teda odhad

$$\frac{2a}{3b} + \frac{b}{3c} \geqq a.$$

Z rovnakého dôvodu platia aj odhady

$$\frac{2b}{3c} + \frac{c}{3a} \geqq b \quad \text{a} \quad \frac{2c}{3a} + \frac{a}{3b} \geqq c.$$

Sčítaním týchto troch odhadov dostaneme dokazovanú nerovnosť.

Iné riešenie. Ak platí pre kladné čísla a, b, c rovnosť $abc = 1$, potom $\max\{a, b, c\} \geqq \geqq 1$ a $\min\{a, b, c\} \leqq 1$. Pretože dokazovaná nerovnosť sa nezmení, keď nahradíme trojicu (a, b, c) trojicou (b, c, a) alebo trojicou (c, a, b), budeme predpokladať, že čísla a a c sú z trojice (a, b, c) najmenšie a najväčšie (v nejakom poradí), takže platí

$$(a - 1)(1 - c) \geqq 0. \tag{1}$$

Do dokazovanej nerovnosti dosadíme $c = a^{-1}b^{-1}$ a urobíme niekoľko ekvivalentných úprav.

$$
\begin{aligned}
ab^{-1} + ab^2 + a^{-2}b^{-1} &\geqq a + b + a^{-1}b^{-1}, \quad / \cdot a^2b\\
a^3 + a^3b^3 + 1 &\geqq a^3b + a^2b^2 + a,\\
a^3b^3 - a^2b^2 - a^3b + a^3 - a + 1 &\geqq 0,\\
a^3(b^3 - b^2 - b + 1) + (a^3 - a^2)b^2 - (a - 1) &\geqq 0,\\
a^3(b-1)^2(b+1) + (a-1)(ab-1)(ab+1) &\geqq 0.
\end{aligned}
$$

Posledná nerovnosť platí, lebo $(a-1)(ab-1) = (a-1)(ab-abc) = ab(a-1)(1-c)$ a taký súčin je podľa (1) nezáporný.

Iné riešenie. Pre ľubovoľné kladné čísla A, B, C sú trojice (A^2, B^2, C^2) a (A, B, C) tzv. súhlasne usporiadané, teda platí nerovnosť

$$A^2 \cdot A + B^2 \cdot B + C^2 \cdot C \geqq A^2 \cdot B + B^2 \cdot C + C^2 \cdot A. \tag{2}$$

Dokážme (2) bezprostredne. Úpravou dostávame nerovnosť

$$(A-C)^2(A+C) + (B-C)(B^2 - A^2) \geqq 0,$$

ktorá zrejme platí, pokiaľ $B = \max\{A, B, C\}$, čo možno vždy dosiahnuť cyklickou permutáciou danej trojice čísel. Keď zvolíme v dokázanej nerovnosti (2) hodnoty $A = \sqrt[3]{a/b}$, $B = \sqrt[3]{b/c}$ a $C = \sqrt[3]{c/a}$, dostaneme nerovnosť

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqq \sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}} + \sqrt[3]{\frac{b^2}{ca}} + \sqrt[3]{\frac{c^2}{ab}},$$

z ktorej za predpokladu $abc = 1$ vyplýva dokazovaná nerovnosť.

Prípravné sústredenia pred IMO

Pred medzinárodnou matematickou olympiádou (IMO) sa každoročne koná jedno výberové a jedno prípravné sústredenie pre najlepších riešiteľov tretieho kola kategórie A. Po výberovom sústredení SK MO vyberie 6 najlepších študentov do reprezentačného družstva Slovenska a určí jedného náhradníka.

Na výberovom sústredení pred IMO sa zúčastnilo 11 súťažiacich, najúspešnejších riešiteľov tretieho kola MO kategórie A. Sústredenie sa konalo v dňoch 27. 4. – 3. 5. 2003 v Bratislave.

Každý deň študenti riešili sériu troch až štyroch úloh pri podobných podmienkach ako na IMO. V poobedňajších hodinách sa konal spoločný rozbor úloh s lektorom. Na konci sústredenia sa získané body za jednotlivé dni sčítali a s prihliadnutím na výsledky tretieho kola MO bolo vybrané šesťčlenné družstvo pre účasť na IMO.

Výsledky sústredenia:

1.	*Michal Burger*	54,5
2.	*Jakub Závodný*	42,5
3.	*Tomáš Váňa*	36
4.	*František Simančík*	34,5
5.–7.	*Péter Koltai*	34
5.–7.	*Hana Budáčová*	34
5.–7.	*Jaroslav Knebl*	34
8.	*Róbert Birkus*	25,5
9.	*Sámuel Peres*	24
10.	*Miroslav Štolc*	17,5
11.	*Katarína Kittanová*	16,5

Úlohy zadávali lektori z Bratislavy:

Peter Novotný, FMFI UK, úlohy 1 – 4,
Mgr. Richard Kollár, FMFI UK, úlohy 5 – 7,
Ján Mazák, FMFI UK, úlohy 8 – 11,
Juraj Földes, FMFI UK, úlohy 12 – 15,
Radovan Bauer, FMFI UK, úlohy 16 – 19.

Druhé sústredenie sa konalo v dňoch 9. – 14. 6. 2003 v Bratislave. Bezprostredne po ňom odcestovalo družstvo na trojstretnutie do Žiliny. Sústredenie bolo zamerané obzvlášť na prípravu šesťčlenného reprezentačného družstva. Lektormi boli študenti FMFI UK Bratislava:

Peter Novotný, (Teória čísel),
Martin Potočný, (Geometria),
Juraj Földes, (Funkcionálne rovnice, Nerovnosti, Kombinatorika).

Zadania súťažných úloh výberového sústredenia pred MMO

1. Nájdite všetky polynómy $f(x)$ s reálnymi koeficientmi také, že pre každé reálne číslo x platí

$$(x + 2003)f(x - 2002) = (x - 2001)f(x).$$

2. Ak máme usporiadanú štvoricu (x, y, z, w), tak z nej môžeme v jednom kroku vyrobiť usporiadanú štvoricu (xy, yz, zw, wx). Začali sme s usporiadanou štvoricou reálnych čísel (x_0, y_0, z_0, w_0) a po konečnom počte krokov sme dostali tú istú usporiadanú štvoricu. S akou usporiadanou štvoricou sme mohli začať?

3. Nájdite najväčšie $p \in \mathbb{R}$ také, že pre každý trojuholník so stranami a, b, c a obsahom S je splnená nerovnosť

$$a^2 + b^2 \geqq pc^2 + 3S.$$

4. Dve kružnice k_1 a k_2 majú vonkajší dotyk v bode K. Obe majú vnútorný dotyk s kružnicou k postupne v bodoch A_1 a A_2. Nech P je jeden z priesečníkov kružnice k so spoločnou dotyčnicou kružníc k_1 a k_2 vedenou bodom K. Pre $i = 1, 2$ označme B_i priesečník priamky PA_i s kružnicou k_i (rôzny od A_i). Dokážte, že priamka B_1B_2 je spoločnou dotyčnicou kružníc k_1 a k_2.

5. V ostrouhlom trojuholníku ABC označme H pätu výšky vedenej z vrcholu A. Nech P je ľubovoľný vnútorný bod trojuholníka ABC a nech D, E a Q sú po rade päty výšok z neho vedených na strany AB, AC a AH. Dokážte, že platí

$$\big||AB| \cdot |AD| - |AC| \cdot |AE|\big| = |BC| \cdot |PQ|.$$

6. Nech $a_0, a_1, a_2, \ldots$ je postupnosť kladných reálnych čísel spĺňajúca podmienku $a_{i-1}a_{i+1} \leqq a_i^2$ pre každé $i \geqq 1$. Dokážte, že pre každé $n > 1$ platí

$$\frac{a_0 + \ldots a_n}{n+1} \cdot \frac{a_1 + \ldots a_{n-1}}{n-1} \geqq \frac{a_0 + \ldots a_{n-1}}{n} \cdot \frac{a_1 + \ldots a_n}{n}.$$

7. Pre každé prirodzené číslo n nech $a_n = 0$ alebo 1, podľa toho, či je počet jednotiek v zápise čísla n v dvojkovej sústave párny (0) alebo nepárny (1). Dokážte, že neexistujú prirodzené čísla k a m také, že

$$a_{k+j} = a_{k+m+j} = a_{k+2m+j}$$

pre každé $0 \leqq j \leqq m - 1$.

8. Nájdite všetky reálne čísla x, y, pre ktoré platí

$$(x - 1)(y^2 + 6) = y(x^2 + 1),$$
$$(y - 1)(x^2 + 6) = x(y^2 + 1).$$

9. Nech n je nepárne prirodzené číslo. Šachovnica $n \times n$ má políčka zafarbené striedavo bielou a čiernou farbou, pričom rohy sú čierne. *Tromino* v tvare L je tvorené troma susediacimi políčkami. Pre aké hodnoty n je možné pokryť všetky čierne políčka šachovnice neprekrývajúcimi sa trominami? Ak je to možné, aký je minimálny počet potrebných tromín?

10. Aký ciferný súčet môže mať štvorec (t. j. druhá mocnina) celého čísla?

11. Daný je pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C, pričom $|BC| < |AC|$. Označme I stred vpísanej kružnice, O stred strany AB. Na stranách AC, AB zvoľme po rade body Q, P tak, aby platilo $|CQ| = |CB| = |BP|$. Priesečník osi uhla ACB a priamky QP označme S. Kolmica na QI prechádzajúca bodom S pretína BQ v bode R. Dokážte, že body I, R, O ležia na jednej priamke.

12. Nájdite všetky celočíselné riešenia rovnice

$$\frac{13}{x^2} + \frac{1996}{y^2} = \frac{z}{1997}.$$

13. Do štvorstena je vpísaná guľa, ktorá sa jednej steny dotýka v priesečníku výšok, druhej sa dotýka v ťažisku a tretej sa dotýka v strede vpísanej kružnice. Dokážte, že potom je štvorsten pravidelný.

14. Nájdite súčet štvorcov prvých 100 členov aritmetickej postupnosti, o ktorej viete, že súčet prvých 100 členov je -1 a súčet druhého, štvrtého, šiesteho, ... a stého člena je $+1$.

15. Nájdite všetky reálne riešenia rovnice

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x,$$

kde p je reálny parameter.

16. Fibonacciho postupnosť F_n je definovaná nasledovne: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Určte najväčší spoločný deliteľ čísel F_{2005} a F_{3005}.

17. Konečná postupnosť celých čísel $a_0, a_1, \dots, a_n$ sa nazýva kvadratická, ak pre každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí $|a_i - a_{i-1}| = i^2$.
(a) Dokážte, že pre ľubovoľné dve celé čísla b a c existuje prirodzené číslo n a kvadratická postupnosť taká, že platí $a_0 = b$ a $a_n = c$.
(b) Nájdite najmenšie prirodzené číslo n, pre ktoré existuje kvadratická postupnosť s $a_0 = 0$ a $a_n = 2004$.

18. Nech a, b sú dané prirodzené čísla, nech f je funkcia z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ taká, že platí $|f(x)| \leqq 1$ a

$$f(x + a + b) + f(x) = f(x + a) + f(x + b)$$

pre všetky $x \in \mathbb{R}$. Dokážte, že f je periodická funkcia (t. j. existuje také p, že $f(x + p) = f(x)$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$).

19. Dve kružnice k_1 a k_2 sa pretínajú v bodoch P a Q. Zvoľme si ľubovoľne body A_1, B_1 na kružnici k_1. Priamky A_1P a B_1P pretínajú kružnicu k_2 okrem bodu P v bodoch A_2, B_2 a priamky A_1B_1, A_2B_2 sa pretínajú v bode C. Dokážte, že keď meníme polohu bodov A_1, B_1, tak stredy kružníc opísaných trojuholníku A_1A_2C ležia na kružnici.

3. česko–slovensko–poľské stretnutie

Žilina, 15. – 18. 6. 2003

V rámci záverečnej prípravy pred Medzinárodnou matematickou olympiádou (IMO) sa uskutočnilo už tretie medzinárodné stretnutie medzi družstvami Českej republiky, Poľska a Slovenska (a deviate medzi družstvami ČR a SR). Jednotlivé krajiny reprezentovali šestice účastníkov, ktorí si vybojovali vo svojich krajinách postup na 44. IMO v Tokiu.

Súťaž sa uskutočnila v termíne 16. – 18. 6. 2003 v Žiline. Všetky tri reprezentačné družstvá pricestovali na miesto konania už v nedeľu večer 15. 6. Organizácia a priebeh súťaže zostal rovnaký ako v predošlých ročníkoch – je prispôsobený štýlu III. kola našej MO a podmienkam na IMO. Súťažiacim boli po dva dni predložené dve trojice súťažných úloh, pritom za každú z úloh mohli získať najviac 7 bodov, t. j. celkovo (rovnako ako na IMO) 42 bodov. Na každú trojicu úloh mali súťažiaci vyhradených 4,5 hodiny. Výsledky uvádza tabuľka.

Por.	Meno	Štát	1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$
1.–3.	Péter Koltai	Slovensko	7	7	7	7	7	7	42
	Marcin Pilipczuk	Poľsko	7	7	7	7	7	7	42
	Aleksander Zabłocki	Poľsko	7	7	7	7	7	7	42
4.	Paweł Januszewski	Poľsko	7	2	7	7	7	7	37
5.	Jan Moláček	Česká rep.	7	2	6	7	7	2	31
6.–9.	Hana Budáčova	Slovensko	7	7	1	7	7	1	30
	Vítězslav Kala	Česká rep.	7	7	7	0	7	2	30
	Pavel Kocourek	Česká rep.	7	7	0	7	7	2	30
	Tomáš Váňa	Slovensko	7	7	0	7	7	2	30
10.–11.	Michal Burger	Slovensko	7	2	0	7	7	6	29
	Kamil Duszenko	Poľsko	7	2	7	7	6	0	29
12.	Marek Krčál	Česká rep.	7	2	5	7	7	0	28
13.	Witold Rębacz	Poľsko	7	7	0	7	5	0	26
14.	Jakub Závodný	Slovensko	7	2	1	7	7	1	25
15.–16.	Jaromír Kuben	Česká rep.	7	2	7	0	7	0	23
	Michał Lasoń	Poľsko	7	2	7	0	7	0	23
17.	Pavel Čížek	Česká rep.	7	2	6	0	7	0	22
18.	František Simančík	Slovensko	7	0	0	7	7	0	21

Úlohy pre tohtoročnú súťaž sme vyberali my ako organizátori – väčšinou z úloh, ktoré prešli spoločnou česko-slovenskou úlohovou komisiou. Ich koordináciu zabezpečila medzinárodná jury, ktorú tvorili *dr. Karel Horák* a *dr. Jaroslav Švrček* z Českej republiky, *Rafal Lochowski* a *Paulina Domagalska* z Poľska a *prof. Jozef Moravčík*, *doc. Oliver Ralík* a *doc. Pavel Novotný* za Slovensko. Súťaž prebehla na pôde Žilinskej univerzity, usporiadal ju a o spokojnosť účastníkov sa staral *doc. Vojtech Bálint* zo ŽU.

Zadania úloh 3. česko–slovensko–poľského stretnutia

Úloha 1.
Nech $n \geqq 2$ je prirodzené číslo. V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} \max\{1, x_1\} &= x_2, \\ \max\{2, x_2\} &= x_3, \\ &\vdots \\ \max\{n-1, x_{n-1}\} &= (n-1)x_n, \\ \max\{n, x_n\} &= nx_1. \end{aligned}$$

Úloha 2.
Daný je ostrouhlý trojuholník ABC, v ktorom veľkosť vnútorného uhla pri vrchole B je väčšia ako $45°$. Nech D, E, F sú po rade päty výšok z vrcholov A, B, C a nech K je taký bod úsečky AF, že platí $|\sphericalangle DKF| = |\sphericalangle KEF|$. Dokážte, že

a) taký bod K vždy existuje;

b) platí rovnosť $|KD|^2 = |FD|^2 + |AF| \cdot |BF|$.

Úloha 3.
Ak pre čísla p, q, r z intervalu $\langle 2/5, 5/2 \rangle$ platí $pqr = 1$, potom existujú dva trojuholníky s rovnakým obsahom, pričom jeden má strany a, b, c a druhý má strany pa, qb, rc. Dokážte.

Úloha 4.
Daný je trojuholník ABC a v jeho vnútri bod P ležiaci na ťažnici z vrcholu C. Označme X priesečník priamky AP so stranou BC a Y priesečník priamky BP so stranou AC. Dokážte, že ak je štvoruholník $ABXY$ tetivový, potom je trojuholník ABC rovnoramenný.

Úloha 5.
Určte všetky prirodzené čísla $n \geqq 2$, pre ktoré sú všetky binomické koeficienty

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n-1}$$

párne čísla.

Úloha 6.
Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktoré pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ spĺňajú vzťah

$$f\bigl(f(x) + y\bigr) = 2x + f\bigl(f(y) - x\bigr).$$

Riešenia úloh 3. česko–slovensko–poľského stretnutia

Úloha 1.
Ukážeme najprv, že pre každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí $x_i \leqq i$. Dôkaz urobíme sporom. Predpokladajme, že $x_i > i$ pre nejaké i.

Ak $x_1 > 1$, vyplýva z poslednej rovnice danej sústavy nerovnosť $\max\{n, x_n\} = nx_1 > n$, takže $x_n > n$. Ak ďalej pre nejaké $i > 1$ platí $x_i > i$, potom $\max\{i-1, x_{i-1}\} = (i-1)x_i > (i-1)i > i-1$. Preto tiež $x_{i-1} > i-1$. Odtiaľ vyplýva, že ak nerovnosť $x_i > i$ platí pre niektoré $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, potom už platí pre každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. V takom prípade má však daná sústava tvar

$$x_1 = x_2,\ \ x_2 = 2x_3,\ \ \dots,\ \ x_{n-1} = (n-1)x_n,\ \ x_n = nx_1.$$

Vynásobením týchto rovníc dostaneme $x_1x_2\dots x_n = n!\,x_1x_2\dots x_n$, čo neplatí pre žiadne prirodzené $n \geqq 2$. Všetky x_i sú totiž kladné čísla. To je spor.

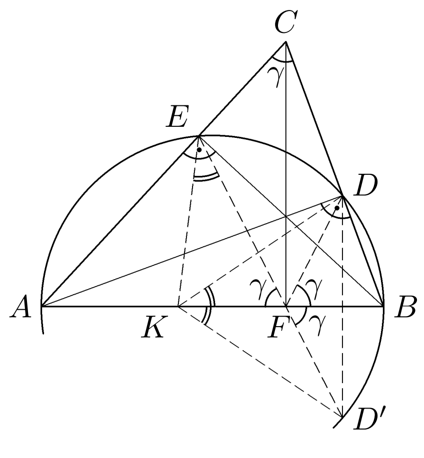
Pre všetky $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ teda $x_i \leqq i$. Preto

$$i = \max\{i, x_i\} = ix_{i+1}, \qquad \text{pričom } x_{n+1} = x_1.$$

Odtiaľ už ľahko získame jediné reálne riešenie danej sústavy

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1.$$

Úloha 2.
a) Označme veľkosti vnútorných uhlov daného trojuholníka ABC zvyčajným spôsobom a uvažujme Tálesovu kružnicu zostrojenú nad priemerom BC. Vzhľadom na to, že trojuholník ABC je ostrouhlý, ležia päty výšok E, F v polrovine BCA. Z vlastností tetivového štvoruholníka $BCEF$ vyplýva (obr. 36), že $|\sphericalangle AFE| = \gamma$ a $|\sphericalangle AEF| = \beta$. Podobne z tetivového štvoruholníka $AFDC$ vyplýva, že $|\sphericalangle DFB| = \gamma$. Ak $K = A$, potom $|\sphericalangle DKF| = |\sphericalangle DAF| = 90° - \beta$ a $|\sphericalangle KEF| = |\sphericalangle AEF| = \beta$.



Obr. 36

Ak sa bod K bude spojito pohybovať po úsečke AF od bodu A k bodu F, porastie veľkosť uhla DKF spojito od hodnoty $90°-\beta$ k hodnote γ (v ostrouhlom trojuholníku je $90°-\beta < \gamma$) a súčasne bude veľkosť uhla KEF spojito klesať, a to od veľkosti $\beta > 90°-\beta$ k hodnote $0°$. Preto na úsečke AF existuje bod K, pre ktorý platí $|\sphericalangle DKF| = |\sphericalangle KEF|$.

b) Nech D' je obraz bodu D v osovej súmernosti podľa priamky AB. Pretože $|\sphericalangle AFE| = |\sphericalangle DFB| = \gamma$, ležia body E, F a D' na jednej priamke. Priamka KD' je podľa vety o úsekovom uhle dotyčnicou kružnice k opísanej trojuholníku KFE, pretože $|\sphericalangle D'KF| = |\sphericalangle DKF| = |\sphericalangle KEF|$. Pre mocnosť bodu D' ku kružnici k platí

$$\begin{aligned} |KD'|^2 = |D'F| \cdot |D'E| = |D'F|(|D'F| + |FE|) = \\ = |D'F|^2 + |D'F| \cdot |FE|. \end{aligned} \tag{1}$$

Teraz stačí využiť rovnosti $|FD| = |D'F|$ a $|KD| = |KD'|$, ktoré vyplývajú zo súmernosti bodov D a D' podľa AB a mocnosť bodu F ku kružnici s priemerom AB, podľa ktorej

$$|EF| \cdot |FD'| = |AF| \cdot |BF|.$$

Dosadením do (1) tak dostaneme $|KD|^2 = |FD|^2 + |AF| \cdot |BF|$, čo sme chceli dokázať.

Úloha 3.

Zo zadania úlohy vyplýva, že niektoré dve z čísel p, q, r sú buď nanajvýš rovné 1, alebo sú aspoň 1. Môžeme ich preto označiť tak, že nastane jeden z nasledujúcich dvoch prípadov:

(i) $p \leqq q \leqq 1 \leqq r$,
(ii) $r \leqq 1 \leqq p \leqq q$.

(i) Položme $a = q$, $b = 1$, $c = pq$, potom platí $pa = pq = c$, $qb = q = a$, $rc = = pqr = 1 = b$. Trojuholníky, ktorých strany majú veľkosti a, b, c a pa, pb, pc, sú teda zhodné (ak existujú). Ukážeme, že trojuholník so stranami dĺžok q, 1, pq existuje. Pretože $pq \leqq q \leqq 1$, stačí overiť jedinú trojuholníkovú nerovnosť, a to $pq + q > 1$. Zo vzťahov

$$pq = \frac{1}{r} \quad \text{a} \quad r \leqq \frac{5}{2} \qquad \text{vyplýva} \qquad pq \geqq \frac{2}{5}.$$

Vzhľadom na to, že $p \leqq q$, platí tiež

$$q \geqq \sqrt{\frac{2}{5}} > \frac{3}{5}, \qquad \text{a teda} \qquad pq + q > 1.$$

(ii) Položme opäť $a = q$, $b = 1$, $c = pq$. Ukážeme, že aj v tomto prípade existuje trojuholník so stranami dĺžok q, 1, pq. Pretože teraz $pq \geqq q \geqq 1$, stačí overiť nerovnosť $pq < q + 1$. Z nerovnosti $p \leqq q$ vyplýva $\sqrt{pq} \leqq q$; stačí preto overiť silnejšiu nerovnosť $pq < \sqrt{pq} + 1$, t.j. že $t = \sqrt{pq}$ spĺňa kvadratickú nerovnosť $t^2 - t - 1 < 0$, alebo že $-3/2 < \sqrt{pq} < 5/2$. Zo vzťahov

$$pq = \frac{1}{r} \quad \text{a} \quad r \geqq \frac{2}{5} \qquad \text{vyplýva} \qquad \sqrt{pq} \leqq \sqrt{\frac{5}{2}} < \frac{5}{2},$$

a naviac $\sqrt{pq} \geqq 1$. Tým je dôkaz hotový.

Úloha 4.
Označme dĺžky strán trojuholníka ABC zvyčajným spôsobom a, b, c a D stred strany AB. Z mocnosti bodu C ku kružnici opísanej štvoruholníku $ABXY$ dostaneme $|CA|\cdot|CY| = |CB|\cdot|CX|$, teda $a\cdot|CX| = b\cdot|CY|$. Z Cèvovej vety potom vyplýva

$$\frac{|AD|\cdot|BX|\cdot|CY|}{|DB|\cdot|XC|\cdot|YA|} = \frac{|BX|\cdot|CY|}{|XC|\cdot|YA|} = 1,$$

takže dosadením $a\cdot|CX| = b\cdot|CY|$ dostávame ďalej $a\cdot|BX| = b\cdot|AY|$. Sčítaním rovností

$$a\cdot|CX| = b\cdot|CY| \qquad \text{a} \qquad a\cdot|BX| = b\cdot|AY|$$

dostaneme $a^2 = b^2$, čiže $a = b$. Trojuholník ABC je teda rovnoramenný.

Iné riešenie. Ak je štvoruholník $ABXY$ tetivový, sú trojuholníky ABC a XYC podobné (uu), platí preto $a\cdot|CX| = b\cdot|CY|$. Označme S_{EFG} obsah trojuholníka EFG. Pre obsahy trojuholníkov zrejme platí

$$\frac{S_{APC}}{S_{APY}} = \frac{|AC|}{|AY|} = \frac{b}{|AY|} \qquad \text{a} \qquad \frac{S_{BPC}}{S_{BPX}} = \frac{|BC|}{|BX|} = \frac{a}{|BX|}.$$

Pretože bod P leží na ťažnici z vrcholu C trojuholníka ABC, platí tiež $S_{APC} = S_{BPC}$, čo s oboma predchádzajúcimi vzťahmi dáva

$$\frac{b}{|AY|}\,S_{APY} = \frac{a}{|BX|}\,S_{BPX}.$$

Z rovnosti obvodových uhlov AXB a AYB a ďalej z rovnosti vrcholových uhlov pri vrchole P vyplýva podobnosť trojuholníkov APY a BPX (uu). Platí teda $S_{APY} : S_{BPX} = |AY|^2 : |BX|^2$, čo v spojení s predchádzajúcim vzťahom dáva $a\cdot|BX| = b\cdot|AY|$. Ďalej pokračujeme ako v predchádzajúcom riešení.

Úloha 5.
Ukážeme, že podmienkam úlohy vyhovujú všetky prirodzené čísla n, ktoré sú mocninami čísla 2, t. j. všetky prirodzené čísla tvaru $n = 2^m$, kde m je prirodzené číslo. Pre každé $k \in \{1, 2, \ldots, 2^m - 1\}$ platí

$$\binom{2^m}{k} = \frac{2^m\cdot(2^m-1)\cdot\ldots\cdot(2^m-k+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot k}. \tag{1}$$

Ľubovoľné prirodzené číslo $r \in \{1, \ldots, k-1\}$ možno zapísať v tvare $2^\alpha l$, kde l je nepárne číslo a $\alpha < m$ je celé nezáporné číslo. Preto každý zo zlomkov

$$\frac{2^m - r}{r} = \frac{2^{m-\alpha} - l}{l}$$

má po skrátení v čitateli aj v menovateli nepárne čísla. Podobne aj číslo k možno zapísať v tvare $2^\alpha l$, preto zlomok na pravej strane rovnosti

$$\frac{2^m}{k} = \frac{2^{m-\alpha}}{l}$$

má v čitateli párne a v menovateli nepárne číslo. Súčin všetkých týchto zlomkov pre $r = 1, 2, \dots, k$ je rovný kombinačnému číslu (1), ktoré je preto párne. Tým sme dokázali, že každé kombinačné číslo tvaru (1) je párne.

Nech naopak n nie je mocninou čísla 2, t. j. $n = c \cdot 2^m$, kde $c \geqq 3$ je nepárne číslo. Ukážeme, že kombinačné číslo

$$\binom{c \cdot 2^m}{2^m} = \frac{c \cdot 2^m (c \cdot 2^m - 1) \cdot \ldots \cdot (c \cdot 2^m - 2^m + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2^m} \tag{2}$$

je nepárne. Podobne ako skôr ukážeme, že pre všetky $r \in \{1, 2, \dots, 2^m - 1\}$ má každý zo zlomkov

$$\frac{c \cdot 2^m - r}{r} \qquad \text{a tiež} \qquad \frac{c \cdot 2^m}{2^m} = c$$

po skrátení v čitateli aj v menovateli nepárne čísla. Súčin všetkých týchto zlomkov je rovný kombinačnému číslu (2), ktoré je preto nepárne.

Danej úlohe vyhovujú všetky prirodzené čísla n, ktorá sú mocninou čísla 2.

Úloha 6.

Pre každé $c \in \mathbb{R}$ je funkcia $f(x) = x + c$ riešením danej funkcionálnej rovnice (obe jej strany sú potom rovné $x + y + 2c$). Ukážeme, že iné riešenia daná rovnica nemá. Najprv dokážeme, že funkcia f je surjektívna. Voľbou $y = -f(x)$ v danej rovnici dostaneme

$$f(0) - 2x = f\left(f\bigl(-f(x)\bigr) - x\right).$$

Pretože každé reálne číslo možno vyjadriť v tvare $f(0) - 2x$, existuje pre každé $y \in \mathbb{R}$ také $z \in \mathbb{R}$, že platí $y = f(z)$. Špeciálne potom existuje $a \in \mathbb{R}$, pre ktoré platí $f(a) = 0$. Voľbou $x = a$ v danej funkcionálnej rovnici dostaneme

$$f(y) = 2a + f\bigl(f(y) - a\bigr) \qquad \text{t. j.} \qquad f(y) - a = f\bigl(f(y) - a\bigr) + a.$$

Pretože funkcia f je surjektívna, existuje pre každé $x \in \mathbb{R}$ také $y \in \mathbb{R}$, že $x = f(y) - a$. Odtiaľ vyplýva, že pre každé x reálne platí $x = f(x) + a$, t. j. $f(x) = x - a$. Tým je úloha vyriešená.

44. Medzinárodná matematická olympiáda

V dňoch 7. – 19. júla 2003 sa v Tokiu uskutočnila 44. Medzinárodná matematická olympiáda (IMO). Zúčastnilo sa jej 457 žiakov stredných škôl z 82 krajín (tri krajiny nedostali víza, viaceré dorazili až na poslednú chvíľu). Saudská Arábia a Mozambik vyslali pozorovateľov, aby sa na ďalšej IMO už aktívne zúčastnili. Každá krajina mohla ako obvykle vyslať najviac 6 súťažiach.

Slovensko reprezentovali *Hana Budáčová* z Gymnázia Boženy Slančíkovej Timravy v Lučenci, *Michal Burger* z Gymnázia Grösslingová v Bratislave, *Péter Koltai* z Gymnázia Hansa Selyeho v Komárne, *František Simančík* z Gymnázia Grösslingová v Bratislave, *Tomáš Váňa* z Gymnázia Milana Rastislava Štefánika v Žiare nad Hronom a *Jakub Závodný* z Gymnázia Grösslingová v Bratislave. Pedagogickým vedúcim družstva bol Mgr. Juraj Földes z Bratislavy, vedúcim výpravy SR bol doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc. z fakulty PEDaS ŽU v Žiline.

Pravidlá súťaže sú podobné pravidlám nášho celoštátneho kola. Vedúci družstva zabezpečí, že študenti dostanú oba súťažné dni po 3 úlohy vo svojom rodnom jazyku a pre kontrolu ešte v jednom jazyku podľa vlastného výberu, napr. v angličtine. Na vyriešenie trojice úloh majú 4,5 hodiny čistého času. Po skončení súťaže prezrú vedúci príslušnej krajiny riešenia a svoj návrh hodnotenia podľa vopred pripravených bodovacích schém obhajujú pred koordinátormi. Za správne vyriešenú úlohu môže súťažiaci získať maximálne 7 bodov.

Všetko podstatné sa odohralo v areáli Národného olympijského centra, kde sa v roku 1964 konali letné (športové) olympijské hry. Od príchodu súťažiacich až po skončenie druhého dňa súťaže 14. júla však medzinárodná jury pracovala v Makuhari, aby bola izolovaná od študentov.

Naši žiaci sa v súťaži nestratili, ich výsledky ukazuje tabuľka. Péter Koltai, Tomáš Váňa, Michal Burger a František Simančík získali bronzové medaily a ďalším dvom našim reprezentantom Jakubovi Závodnému a Hane Budáčovej chýbalo možno len trochu viac pokoja pri súťaži. Posledne menovaní dvaja naši však získali diplom *Honorary mention* – ten sa udeľuje žiakom, ktorým sa neujde medaila, ale vyriešia aspoň jednu úlohu kompletne. Naviac sme mali veľmi mladé a neskúsené družstvo, veď len Koltai je maturant a Simančík je dokonca len druhák. Aklimatizácia na 7-hodinový časový rozdiel bola veľmi krátka, ale podmienky boli rovnaké pre všetkých (samozrejme, okrem domácich a tiež nemálo súťažiacich z krajín blízko Japonska).

Meno	1	2	3	4	5	6	súčet	cena
Hana Budáčová	1	1	0	7	1	0	10	
Michal Burger	7	3	0	2	1	0	13	bronz
Péter Koltai	5	3	0	7	0	0	15	bronz
František Simančík	7	2	0	3	1	0	13	bronz
Tomáš Váňa	7	2	0	2	3	0	14	bronz
Jakub Závodný	7	1	0	3	1	0	12	

Por.	Štát	Z	S	B	$\sum$	Por.	Štát	Z	S	B	$\sum$
1.	Bulharsko	6	0	0	227	42.	Nórsko	0	1	0	62
2.	Čína	5	1	0	211	43.	Arménsko	0	0	3	61
3.	USA	4	2	0	188		Bosna a Hercegovina	0	0	2	61
4.	Vietnam	2	3	1	172	45.	JAR	0	0	3	60
5.	Rusko	3	2	1	167	46.	Španielsko	0	0	1	59
6.	Južná Kórea	2	4	0	157	47.	Macedónsko	0	0	2	54
7.	Rumunsko	1	4	1	143	48.	Švédsko	0	0	1	52
8.	Turecko	1	3	1	133	49.	Kirgizstan	0	0	2	50
9.	Japonsko	1	3	2	131		Lotyšsko	0	0	1	50
10.	Maďarsko	1	3	1	128		Taliansko	0	0	1	50
	Veľká Británia	1	2	3	128	52.	Litva	0	0	2	49
12.	Kanada	2	0	3	119		Uzbekistan	0	1	1	49
	Kazachstan	1	2	2	119	54.	Estónsko	0	0	0	47
14.	Ukrajina	1	2	3	118	55.	Fínsko	0	0	1	43
15.	India	0	4	1	115		Maroko	0	0	0	43
16.	Tchaj-wan	1	2	2	114		Nový Zéland	0	0	0	43
17.	Irán	0	3	2	112	58.	Macao	0	0	2	40
	Nemecko	1	2	1	112	59.	Rakúsko	0	0	0	38
19.	Bielorusko	1	2	2	111	60.	Peru (4)	0	0	1	37
	Thajsko	1	1	3	111		Turkmenistan (4)	0	0	1	37
21.	Izrael (5)	0	2	3	103	62.	Island	0	0	1	33
22.	Poľsko	1	2	0	102		Trinidad a Tobago	0	0	0	33
23.	Srbsko a Čierna Hora	0	3	1	101	64.	Holandsko	0	0	0	30
24.	Francúzsko	0	2	2	95	65.	Uruguaj (5)	0	0	0	29
25.	Mongolsko	0	1	3	93	66.	Dánsko (5)	0	0	0	27
26.	Austrália	0	2	2	92	67.	Malajzia (5)	0	0	0	26
	Brazília	0	1	3	92		Švajčiarsko	0	0	0	26
28.	Argentína	1	1	2	91	69.	Luxembursko (2)	0	0	1	25
	Hongkong	0	2	2	91	70.	Albánsko (4)	0	0	0	23
30.	Grécko	0	1	4	88		Cyprus	0	0	0	23
	Moldavsko	0	1	2	88		Portoriko (3)	0	0	1	23
32.	Gruzínsko	0	1	2	86	73.	Portugalsko	0	0	0	22
33.	Chorvátsko	0	0	3	80	74.	Írsko	0	0	0	21
34.	Česká republika	0	1	2	79	75.	Slovinsko	0	0	0	18
35.	Slovensko	0	0	4	77	76.	Kuba (1)	0	0	1	14
36.	Singapur	0	0	2	71	77.	Ekvádor	0	0	0	11
37.	Belgicko	0	1	1	70	78.	Venezuela (3)	0	0	0	10
	Indonézia	0	0	2	70	79.	Filipíny	0	0	0	9
39.	Kolumbia	0	0	3	67	80.	Kuvajt (3)	0	0	0	8
40.	Azerbajdžan	0	1	1	66	81.	Srí Lanka (4)	0	0	0	4
41.	Mexiko	0	0	3	64	82.	Paraguaj (1)	0	0	0	0

Absolútnymi víťazmi IMO s maximálnym počtom 42 bodov sa stali dvaja Vietnamci *Hung Viet Bao Le* a *Trong Canh Nguyen* a jeden Číňan *Yunhao Fu*, ktorý si tento úspech z Glasgowa zopakoval.

IMO je súťaž jednotlivcov, takže súťaž družstiev sa oficiálne nevyhodnocuje, ale určitý pohľad poskytuje súčet získaných bodov. SR ich získala 77 a v tomto neoficiálnom poradí skončila na 35. mieste z 82 zúčastnených krajín. Celkový počet 77 získaných bodov je dosť nízky, ale úlohy boli veľmi náročné, takže aj u iných krajín bol bodový zisk menší. Aj keď ČR získala len tri medaily (jednu striebornú a dve bronzové), v celkovom súčte nás predstihla o dva body.

Neoficiálne poradie družstiev je uvedené v tabuľke (čísla v zátvorke sú uvedené za krajinami, ktoré mali na IMO menší počet účastníkov). Z európskych krajín za nami skončili Belgicko, Nórsko, Bosna a Hercegovina, Španielsko, Macedónsko, Švédsko, Taliansko, Lotyšsko, Litva, Estónsko, Fínsko, Rakúsko, Island, Holandsko, Dánsko, Švajčiarsko, Luxembursko, Albánsko, Portugalsko, Írsko, Slovinsko (usporiadateľ IMO 2006).

Pokiaľ ide o samotné IMO, Japonci síce zvládli hlavné úlohy usporiadateľa, podmienky na prácu boli dobré, ale v detailoch bolo až nečakane veľa chýb. Neúmerné čakanie na letisku pri príchode, veľký zmätok pri ubytovaní, nemalé časové sklzy pri väčšine akcií, veľmi slabé jazykové znalosti koordinátorov (v Japonsku jav značne rozšírený), na kvalitu stravy boli síce rozdielne názory, ale obrovskú prevahu mali tie kritické… Izby pre pedagogických vedúcich boli také malé, že okrem postele, ministolíka a stoličky sa tam vošiel naozaj len ten jeden človek (žiadna skriňa, WC na chodbe spoločné).

Usporiadateľmi ďalších IMO budú Atény 2004, Mexiko 2005, Slovinsko 2006, Vietnam 2007.

Vojtech Bálint

Zadania úloh MMO

Úloha 1.
Nech A je podmnožina množiny $S = \{1, 2, \dots, 1\,000\,000\}$ obsahujúca práve 101 prvkov. Dokážte, že v S existujú čísla $t_1, t_2, \dots, t_{100}$ také, že množiny

$$A_j = \{x + t_j : x \in A\} \quad \text{pre } j = 1, 2, \dots, 100$$

sú po dvoch disjunktné. *(Brazília)*

Úloha 2.
Určte všetky dvojice prirodzených čísel (a, b) také, že

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

je prirodzené číslo. *(Bulharsko)*

Úloha 3.
Je daný konvexný šesťuholník, ktorého ľubovoľné dve protiľahlé strany majú nasledujúcu vlastnosť: vzdialenosť ich stredov je $\sqrt{3}/2$ násobok súčtu ich dĺžok. Dokážte, že všetky uhly daného šesťuholníka sú rovnaké.
(Konvexný šesťuholník $ABCDEF$ má tri dvojice protiľahlých strán: AB a DE, BC a EF, CD a FA.) *(Poľsko)*

Úloha 4.
Nech $ABCD$ je tetivový štvoruholník. Označme postupne P, Q a R päty kolmíc z bodu D na priamky BC, CA a AB. Dokážte, že $|PQ| = |QR|$ práve vtedy, keď sa osi uhlov ABC a ADC pretínajú na priamke AC. *(Fínsko)*

Úloha 5.
Nech n je prirodzené číslo a $x_1, x_2, \dots, x_n$ reálne čísla také, že $x_1 \leqq x_2 \leqq \dots \leqq x_n$.

(a) Dokážte, že

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|\right)^2 \leqq \frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2.$$

(b) Ukážte, že rovnosť platí práve vtedy, keď $x_1, x_2, \dots, x_n$ je aritmetická postupnosť. *(Írsko)*

Úloha 6.
Nech p je prvočíslo. Dokážte, že existuje prvočíslo q také, že pre žiadne celé číslo n nie je číslo $n^p - p$ deliteľné q. *(Francúzsko)*

Riešenia úloh MMO

Úloha 1.

Vytvorme množinu všetkých rozdielov $D = \{x-y : x, y \in A\}$. Pretože A má 101 prvkov, obsahuje D okrem nuly najviac $2 \cdot \binom{101}{2} = 101 \cdot 100 = 10\,100$ ďalších (kladných aj záporných) čísel. Všimnime si, že dve z uvažovaných množín A_i, A_j sú disjunktné práve vtedy, keď $x + t_i \neq y + t_j$ pre ľubovoľné $x, y \in A$, teda práve vtedy, keď $t_i - t_j \notin D$. Našou úlohou je preto vybrať čísla $t_1, t_2, \dots, t_{100} \in S$ tak, aby žiadny ich rozdiel nepadol do „zakázanej" množiny D.

Spomenutý výber urobíme induktívne. Prvé číslo t_1 vyberieme z S ľubovoľne. Predpokladajme, že sme už pre niektoré $k \leqq 99$ vybrali čísla $t_1, t_2, \dots, t_k \in S$ tak, že $t_i - t_j \notin D$ pre ľubovoľné rôzne $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ (pre $k = 1$ je to splnené triviálne). Číslo t_{k+1} musíme v S zvoliť tak, aby platilo $t_{k+1} - t_i \notin D$ pre každé $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Pre pevné i tak má číslo t_{k+1} práve toľko „zakázaných" hodnôt $t_i + d$, koľko je všetkých čísel $d \in D$. Tých je, ako vieme, najviac $1 + 101 \cdot 100 = 10\,101$. Pre všetky $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ tak celkom dostaneme najviac $k \cdot 10\,101$ zakázaných hodnôt, čo je najviac $99 \cdot 10\,101 = 999\,999$ čísel. V množine S je však 10^6 čísel, takže výber čísla t_{k+1} je možný.

Poznámka. Hodnota $|S| = 10^6$ je zbytočne veľká (v predchádzajúcom riešení sme zanedbali skutočnosť, že v množine D leží s každým číslom aj číslo opačné). Dá sa ukázať, že pre ľubovoľnú k-prvkovú podmnožinu A množiny $S = \{1, 2, \dots, n\}$ platí, že ak je m prirodzené číslo také, že

$$n > (m-1)\left(\binom{k}{2} + 1\right),$$

existujú v množine S čísla $t_1, t_2, \dots, t_m$ také, že množiny $A_j = \{x + t_j : x \in A\}$ ($j = 1, 2, \dots, m$) sú navzájom disjunktné. (Pre $k = 101$ stačí teda uvažovať množinu $S = \{1, 2, \dots, 500\,051\}$.)

Úloha 2.

(Podľa *Jana Moláčka*.) Ukážeme, že riešeniami sú práve všetky dvojice (a, b) tvaru $(8k^4 - k, 2k)$, $(k, 2k)$ a $(k, 1)$, kde $k \in \mathbb{N}$ je ľubovoľné. Hľadáme prirodzené čísla a, b, n, pre ktoré platí

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1} = n. \tag{1}$$

Rovnosť (1) možno upraviť na tvar kvadratickej rovnice

$$a^2 - 2nb^2a + n(b^3 - 1) = 0.$$

s neznámou a. Jej koreňmi sú čísla

$$a_{1,2} = nb^2 \pm \sqrt{\left(nb^2\right)^2 - n\left(b^3 - 1\right)}. \tag{2}$$

Pretože jeden z koreňov $a_{1,2}$ je rovný hľadanému prirodzenému číslu a, odmocnenec vo vzťahu (2) musí byť štvorec, teda musí mať tvar

$$\left(nb^2\right)^2 - n\left(b^3 - 1\right) = d^2 \tag{3}$$

pre vhodné celé $d \geqq 0$. Také číslo d určite existuje, ak $b = 1$ (potom $b^3 - 1 = 0$, takže $d = nb^2$). Zaoberajme sa ale najprv náročnejším prípadom, keď $b > 1$. Ukážme, že pre také b z (3) vyplývajú odhady

$$nb^2 - \frac{b+1}{2} < d < nb^2 - \frac{b-1}{2}. \tag{4}$$

Pretože oba krajné výrazy sú kladné, môžeme obe nerovnosti umocniť; po dosadení d^2 a jednoduchých algebraických úpravách dostaneme dvojicu nerovností

$$(b+1)^2 < 4n(b^2+1) \quad \text{a} \quad (b-1)^2 + 4n(b^2-1) > 0,$$

ktoré zrejme platia, lebo $n \geqq 1$ a $b > 1$. Tým sú odhady (4) dokázané.

Všimnime si teraz, že rozdiel oboch krajných výrazov v (4) je rovný 1. Pre nepárne b by sa tieto výrazy dokonca rovnali dvom po sebe idúcim prirodzeným číslam, takže by žiadne celé d spĺňajúce podmienku (4) neexistovalo. Číslo b je preto párne, teda $b = 2k$ pre vhodné $k \in \mathbb{N}$; jediné celé d vyhovujúce nerovnostiam (4) je potom tvaru

$$d = nb^2 - \frac{b}{2} = 4nk^2 - k.$$

Pre také b a d prejde rovnosť (3) do tvaru

$$(4nk^2)^2 - n(8k^3 - 1) = (4nk^2 - k)^2,$$

z ktorej ľahko vyplýva $n = k^2$; vzťahy (2) potom dávajú vyjadrenie

$$a_1 = 8k^4 - k \quad \text{a} \quad a_2 = k.$$

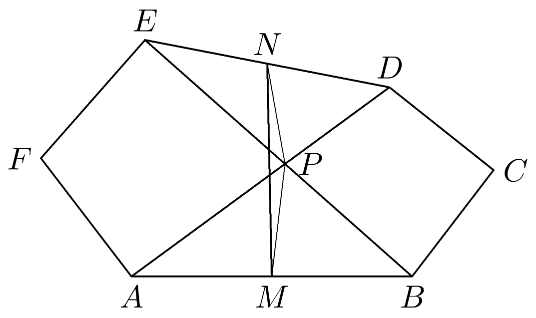
Pretože obe vypočítané hodnoty $a_{1,2}$ sú prirodzené čísla (pre každé $k \in \mathbb{N}$), dostávame dve (nekonečné) skupiny riešení $(a, b) = (8k^4 - k, 2k)$ a $(a, b) = (k, 2k)$, kde $k \in \mathbb{N}$. Zostáva rozobrať prípad, keď $b = 1$. Vtedy má zlomok zo zadania úlohy tvar

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1} = \frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2},$$

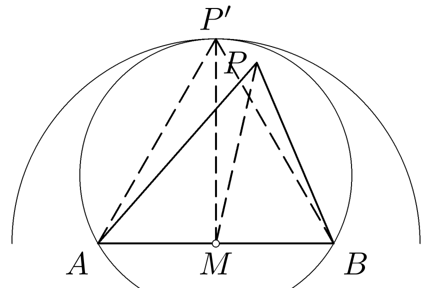
takže je rovný prirodzenému číslu práve vtedy, keď $a = 2k$ pre vhodné $k \in \mathbb{N}$. Treťou (a poslednou) skupinou riešení sú teda dvojice tvaru $(a, b) = (k, 1)$, kde $k \in \mathbb{N}$.

Úloha 3.

Označme A, B, C, D, E, F vrcholy daného šesťuholníka a uvažujme tri uhlopriečky AD,



Obr. 37



Obr. 38

BE a FC. Niektoré dve z nich nutne zvierajú uhol aspoň 60°. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že sú to uhlopriečky AD a BE. Označme P ich priesečník a M, N stredy protiľahlých strán AB a DE (obr. 37).

Pretože $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle EPD| \geqq 60°$, leží bod P vnútri kružnice opísanej rovnostrannému trojuholníku ABP' (obr. 38), takže platí $|MP| \leqq |MP'| = (\sqrt{3}/2)|AB|$ s rovnosťou práve vtedy, keď $P = P'$, čiže práve vtedy, keď je trojuholník ABP rovnostranný. Podobne odvodíme, že $|NP| \leqq (\sqrt{3}/2)|DE|$ s rovnosťou práve vtedy, keď je trojuholník DEP rovnostranný. Pre vzdialenosť stredov oboch protiľahlých strán AB, DE tak dostávame odhad

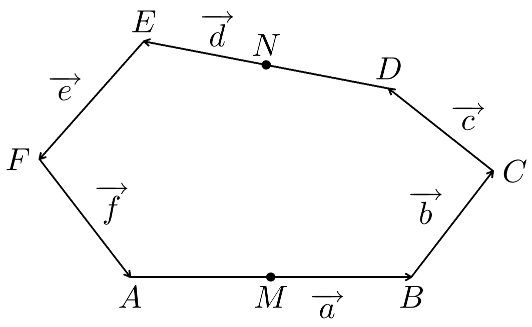
$$|MN| \leqq |MP| + |NP| \leqq \tfrac{1}{2}\sqrt{3}(|AB| + |DE|).$$

Z predpokladov úlohy teda vyplýva, že oba trojuholníky ABP a DEP sú rovnostranné a uhlopriečky AD, BE zvierajú uhol 60°.

Zostávajúca uhlopriečka CF musí s jednou z uhlopriečok AD, BE zvierať uhol aspoň 60°. Opäť môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že sa jedná napr. o uhlopriečku AD, priesečník uhlopriečok CE, AD označme Q. Úplne rovnako ako v predchádzajúcom prípade zistíme, že trojuholníky FAQ a CDQ sú rovnostranné. Keď nakoniec označíme R priesečník uhlopriečok BE a CF, ktoré podľa predchádzajúceho zvierajú nutne uhol 60°, zistíme, že aj trojuholníky BCR a EFR sú rovnostranné. Odtiaľ vyplýva tvrdenie úlohy.

Iné riešenie. Označme A, B, C, D, E, F vrcholy daného šesťuholníka a $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{BC}, \dots, \overrightarrow{f} = \overrightarrow{FA}$ vektory určené jeho stranami, pritom $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \ldots +$

$+\overrightarrow{f}=0$. Ak označíme M, N stredy protiľahlých strán AB, DE, môžeme príslušný



Obr. 39

vektor $\overrightarrow{MN}$ vyjadriť dvoma spôsobmi (obr. 39).

$$\overrightarrow{MN}=\tfrac12\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}+\tfrac12\overrightarrow{d} \quad \text{a} \quad \overrightarrow{MN}=-\tfrac12\overrightarrow{a}-\overrightarrow{f}-\overrightarrow{e}-\tfrac12\overrightarrow{d},$$

odkiaľ

$$\overrightarrow{MN}=\tfrac12(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}-\overrightarrow{e}-\overrightarrow{f}). \tag{1}$$

Podľa predpokladu platí

$$|\overrightarrow{MN}|=\frac{\sqrt3}{2}|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{d}|\geqq\frac{\sqrt3}{2}|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{d}|. \tag{2}$$

Položme $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{a}-\overrightarrow{d}$, $\overrightarrow{y}=\overrightarrow{c}-\overrightarrow{f}$, $\overrightarrow{z}=\overrightarrow{e}-\overrightarrow{b}$, z (1) a (2) tak dostaneme

$$|\overrightarrow{y}-\overrightarrow{z}|\geqq\sqrt3|\overrightarrow{x}|$$

a podobne

$$|\overrightarrow{z}-\overrightarrow{x}|\geqq\sqrt3|\overrightarrow{y}|,$$
$$|\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y}|\geqq\sqrt3|\overrightarrow{z}|.$$

Práve uvedené nerovnosti môžeme pomocou skalárnych súčinov ekvivalentne prepísať ako

$$|\overrightarrow{y}|^2-2(\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})+|\overrightarrow{z}|^2\geqq3|\overrightarrow{x}|^2,$$
$$|\overrightarrow{z}|^2-2(\overrightarrow{z},\overrightarrow{x})+|\overrightarrow{x}|^2\geqq3|\overrightarrow{y}|^2,$$
$$|\overrightarrow{x}|^2-2(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})+|\overrightarrow{y}|^2\geqq3|\overrightarrow{z}|^2.$$

Sčítaním všetkých troch nerovností vyjde

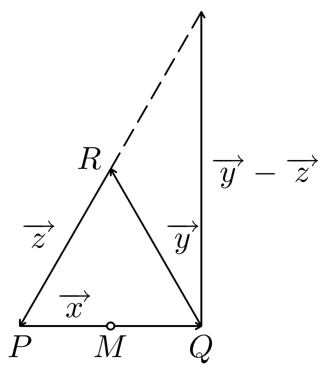
$$-|\overrightarrow{x}|^2-|\overrightarrow{y}|^2-|\overrightarrow{z}|^2-2(\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})-2(\overrightarrow{z},\overrightarrow{x})-2(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})\geqq0,$$

čiže $-|\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}+\overrightarrow{z}|^2 \geqq 0$. Odtiaľ však vyplýva, že $\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}+\overrightarrow{z}=0$ a že vo všetkých predchádzajúcich nerovnostiach platí rovnosť. Teda jednak

$$|\overrightarrow{y}-\overrightarrow{z}| = \sqrt{3}|\overrightarrow{x}|,$$
$$|\overrightarrow{z}-\overrightarrow{x}| = \sqrt{3}|\overrightarrow{y}|,$$
$$|\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y}| = \sqrt{3}|\overrightarrow{z}|,$$

jednak vďaka rovnosti v (2) a v ďalších dvoch analogických nerovnostiach aj $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{d} \parallel \overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{c} \parallel \overrightarrow{f} \parallel \overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{e} \parallel \overrightarrow{b} \parallel \overrightarrow{z}$.

Keď zostrojíme trojuholník PQR tak, že $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{RP}=\overrightarrow{z}$ (čo môžeme vďaka rovnosti $\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}+\overrightarrow{z}=0$), bude niektorý z jeho vnútorných uhlov mať veľkosť aspoň $60°$. Nech je to napr. uhol PRQ (obr. 40). Pre stred M strany PQ potom platí $|MR| = |\overrightarrow{y}-\overrightarrow{z}|/2 = \sqrt{3}|\overrightarrow{x}|/2 = \sqrt{3}|PQ|/2$, čo znamená, že trojuholník PQR je rovnostranný. Pre vnútorné uhly daného šesťuholníka to vzhľadom na dokázanú rovnobežnosť jeho protiľahlých strán s odpovedajúcimi vektormi $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ a $\overrightarrow{z}$ znamená, že všetky jeho vnútorné uhly majú veľkosť $120°$.



Obr. 40

Poznámka. Z uvedeného riešenia je zrejmé, že ľubovoľný šesťuholník spĺňajúci predpoklady úlohy dostaneme tak, že z niektorého rovnostranného trojuholníka „odrežeme“ pri každom jeho vrchole zhodný rovnostranný trojuholník.

Úloha 4.

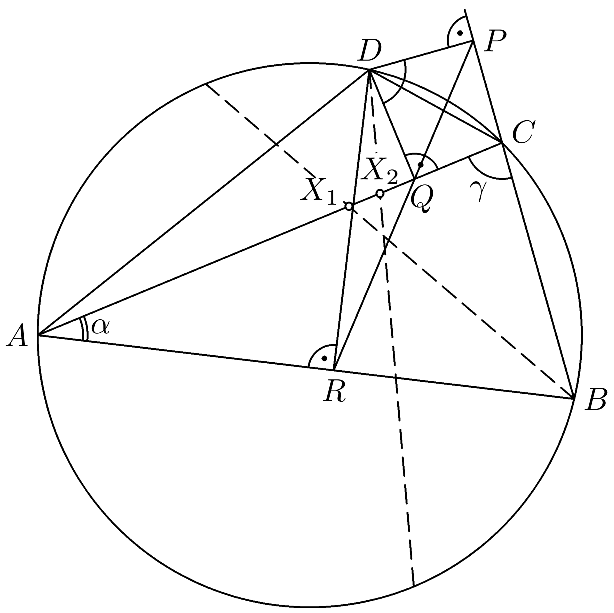
Označme po rade X_1, X_2 priesečníky osi uhla ABC a osi uhla ADC s uhlopriečkou AC daného tetivového štvoruholníka $ABCD$ (obr. 41). Zo známej vlastnosti osi uhla vyplýva jednak $|AX_1|/|CX_1| = |AB|/|CB|$ (v trojuholníku ABC), jednak $|AX_2|/|CX_2| = |AD|/|CD|$ (v trojuholníku ACD). Osi uhlov ABC a ADC sa teda pretnú na uhlopriečke AC práve vtedy, keď $X_1 = X_2$, čiže práve vtedy, keď $|AD|\cdot|CB| = |AB|\cdot|CD|$. Podľa Tálesovej vety ležia päty P a Q na kružnici s priemerom CD, takže pre veľkosť tetivy PQ tejto kružnice platí

$$|PQ| = |CD| \sin |\sphericalangle PCQ| = |CD| \sin \gamma,$$

kde $\gamma = \sphericalangle ACB$ (bez ohľadu na to, či päta P padne dovnútra strany BC alebo nie). Podobne ležia päty R a Q na kružnici s priemerom AD, takže pre veľkosť tetivy QR tejto kružnice platí

$$|QR| = |AD| \sin |\sphericalangle RAQ| = |AD| \sin \alpha,$$

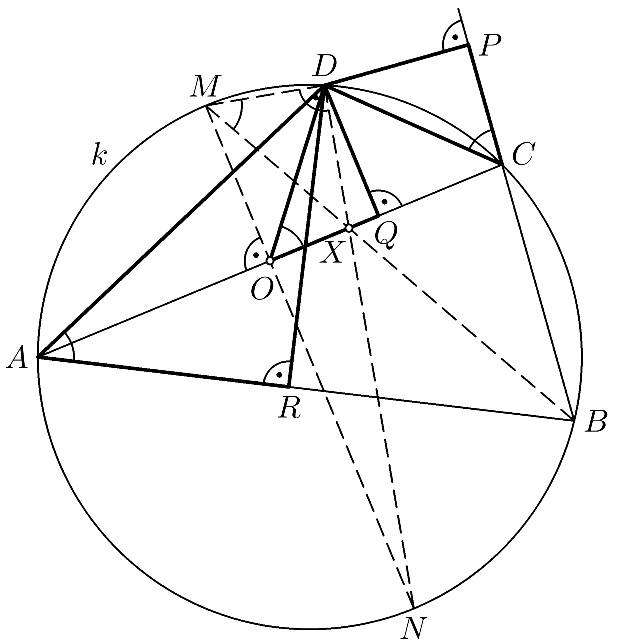
kde $\alpha = \sphericalangle BAC$. Vidíme teda, že rovnosť $|PQ| = |QR|$ je ekvivalentná s rovnosťou $|CD| \sin \gamma = |AD| \sin \alpha$, čo je podľa sínusovej vety pre trojuholník ABC ekvivalentné s rovnosťou $|AD| \cdot |CB| = |AB| \cdot |CD|$. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.



Obr. 41

Iné riešenie. (Podľa *Mareka Krčála*.) Označme M a N body, v ktorých os uhla ABC, resp. os uhla ADC pretne kružnicu k opísanú danému tetivovému štvoruholníku $ABCD$ (obr. 42). Vzhľadom na to, že každý z bodov M, N rozpoľuje príslušný oblúk AC kružnice k, je MN osou uhlopriečky AC a zároveň priemerom kružnice k. Označme O stred úsečky AC. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že uhol BAD nie je tupý (inak by sme vymenili označenie vrcholov A a C), takže päta P kolmice z bodu D na BC padne mimo úsečku BC. Z vlastností tetivového štvoruholníka vyplýva $|\sphericalangle DCP| = |\sphericalangle BAD|$ a z rovnosti obvodových uhlov nad tetivou BD rovnosť $|\sphericalangle BMD| =$

$= |\sphericalangle BAD|$. Trojuholníky ARD a CPD sú teda podobné.



Obr. 42

Predpokladajme, že priesečník X oboch spomenutých osí uhlov leží na priamke AC. Pretože MN je priemer kružnice k, podľa Tálesovej vety $|\sphericalangle XDM| = |\sphericalangle NDM| = 90°$, takže štvoruholník $OXDM$ je tetivový. Teda tiež $|\sphericalangle XOD| = |\sphericalangle XMD| = |\sphericalangle BMD|$ a vidíme, že trojuholník OQD je podobný s trojuholníkmi ARD a CPD. Uvažujme zobrazenie, ktoré vznikne zložením otočenia okolo stredu D o uhol $90° - |\sphericalangle BAD|$ a rovnoľahlosti so stredom D a koeficientom $|DR|/|DA|$. Toto zobrazenie zobrazí bod A do bodu R, bod C do bodu P a bod O do bodu Q. Pretože O je stred úsečky AC, je jeho obraz v tomto zobrazení, teda bod Q, stredom úsečky PR, ktorá je obrazom úsečky AC.

Obrátene, ak je Q stred úsečky PR, je obrazom bodu O v uvedenom zobrazení, takže trojuholník OQD je podobný s trojuholníkmi ARD a CPD (tie sú podobné vždy). Ak teraz označíme X priesečník priamky BM s uhlopriečkou AC, bude $XDMO$ tetivový, a teda veľkosť uhla XDM bude $90°$. Odtiaľ vyplýva, že bod X leží na osi ND uhla ADC.

Úloha 5.
Obe strany dokazovanej nerovnosti nezmenia hodnotu, keď od všetkých členov x_i odpočítame rovnaké číslo c. Keď vyberieme za c aritmetický priemer danej n-tice členov x_i, bude „posunutá“ postupnosť členov $x_i := x_i - c$ spĺňať podmienku

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0. \tag{1}$$

Dodajme, že spomenuté „posunutie“ zachová tiež usporiadanie čísel x_i podľa veľkosti a nezmení ani nič na tom, či dotyčná n-tica tvorila aritmetickú postupnosť alebo nie. Za predpokladu (1) upravíme oba súčty z dokazovanej nerovnosti na

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i-x_j| &= 2\sum_{1\leqq i<j\leqq n}(x_j-x_i)=\\ &=2\sum_{i=1}^{n}\bigl(\underbrace{(1+\ldots+1)}_{(i-1)\text{ krát}}-\underbrace{(1+\ldots+1)}_{(n-i)\text{ krát}}\bigr)x_i=\\ &=2\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)x_i,\\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i-x_j)^2 &= n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{n}x_j+n\sum_{j=1}^{n}x_j^2=\\ &=2n\sum_{i=1}^{n}x_i^2.\end{aligned}$$

Po dosadení a krátení štyrmi zistíme, že máme dokázať nerovnosť

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)x_i\right)^2\leqq\frac{(n^2-1)n}{3}\sum_{i=1}^{n}x_i^2. \tag{2}$$

Ukážme, že (2) je Cauchyho nerovnosť

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2\leqq\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}y_i^2 \tag{3}$$

pre n-ticu členov $y_i=2i-n-1$, $i=1,2,\ldots,n$. Naozaj, pre takú n-ticu platí

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}y_i^2&=\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)^2=4\sum_{i=1}^{n}i^2-4(n+1)\sum_{i=1}^{n}i+n(n+1)^2=\\ &=4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4(n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n(n+1)^2=\\ &=\frac{(n^2-1)n}{3}.\end{aligned}$$

Tým je dôkaz nerovnosti (2) hotový.

Ako je dobre známe, rovnosť v Cauchyho nerovnosti (2) nastane práve vtedy, keď existuje reálne číslo p, pre ktoré platí n-tica rovností

$$x_i=py_i=p(2i-n-1)\quad(i=1,2,\ldots,n). \tag{4}$$

Overme, že túto podmienku za predpokladu (1) spĺňajú práve tie konečné postupnosti $x_1, x_2, \dots, x_n$, ktoré sú aritmetické. Naozaj, Ak platia rovnosti (4), je konečná postupnosť $x_1, x_2, \dots, x_n$ aritmetická s diferenciou $2p$. Naopak, ak je postupnosť $x_1, x_2, \dots, x_n$ aritmetická a d je jej diferencia, tak pre každé $i = 1, 2, \dots, n$ platí rovnosť $x_i = x_1 + (i-1)d$ a súčet všetkých členov x_i je daný vzťahom

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{n(x_1 + x_n)}{2}.$$

Podmienka (1) preto znamená, že $x_1 + x_n = 0$, čiže $x_1 + x_1 + (n-1)d = 0$. Odtiaľ dostávame $x_1 = d(1-n)/2$, preto členy x_i majú pre každé i vyjadrenie

$$x_i = \frac{d(1-n)}{2} + (i-1)d = \frac{(1-n+2i-2)d}{2} = \frac{(2i-n-1)d}{2},$$

čo je (4) pre $p = d/2$.

Úloha 6.

Pripomeňme si najskôr vlastnosti mocnín $n^1, n^2, \dots, n^k, \dots$ pri delení prvočíslom q. Ak je n celé číslo nesúdeliteľné s q, tak $n^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$ (tzv. malá Fermatova veta), naviac množina tých prirodzených k, pre ktoré $n^k \equiv 1 \pmod{q}$, je tvorená všetkými násobkami najmenšieho z nich (čo je buď číslo $q-1$, alebo niektorý jeho deliteľ). Uvažujme preto rozklad

$$p^p - 1 = (p-1)S, \quad \text{kde } S = p^{p-1} + p^{p-2} + \ldots + p + 1, \tag{1}$$

a za „kandidáta“ na vhodné prvočíslo q vyberme niektoré z prvočísiel deliacich súčet S (neskôr upresníme, akú doplňujúcu vlastnosť prvočiniteľa q čísla S budeme ešte potrebovať a prečo také q vôbec existuje). Pretože $q \mid S$ a $S \mid (p^p - 1)$, platí $q \mid (p^p - 1)$, t. j. $p^p \equiv 1 \pmod{q}$.

Pripustime, že pre vybrané q tvrdenie úlohy neplatí, teda existuje celé n s vlastnosťou $n^p \equiv p \pmod{q}$. Umocnením tejto kongruencie na p dostaneme $n^{p^2} \equiv p^p \pmod{q}$, čo spolu s kongruenciou zo záveru predchádzajúceho odstavca znamená, že $n^{p^2} \equiv 1 \pmod{q}$. Číslo n je teda nesúdeliteľné s číslom q a podľa poznatkov pripomenutých v úvode riešenia vieme, že najmenšie prirodzené k s vlastnosťou $n^k \equiv 1 \pmod{q}$ musí byť deliteľom čísla p^2, teda jedno z čísel 1, p, p^2. Toto číslo musí byť súčasne deliteľom čísla $q-1$ (malá Fermatova veta), takže to nebude číslo p^2, pokiaľ nebude číslo p^2 deliť číslo $q-1$, teda pokiaľ $q \not\equiv 1 \pmod{p^2}$. To je práve tá doplňujúca vlastnosť prvočísla q, ktorú sme skôr spomenuli. Odložme na chvíľu dôkaz existencie takého prvočísla q a dokončime úvahy o mocninách čísla n.

Pokiaľ teda $q \not\equiv 1 \pmod{p^2}$, platí kongruencia $n^k \equiv 1 \pmod{q}$ pre $k = 1$ alebo pre $k = p$, v oboch prípadoch máme $n^p \equiv 1 \pmod{q}$. Porovnaním s kongruenciou $n^p \equiv p \pmod{q}$ potom dostaneme $p \equiv 1 \pmod{q}$, takže každá z p mocnín p^j zo súčtu S je kongruentná s číslom 1 (modulo q), takže $S \equiv p \pmod{q}$. Pretože však $q \mid S$, platí $S \equiv 0 \pmod{q}$. Porovnaním vychádza $p \equiv 0 \pmod{q}$, čo je spor s tým, že $p \equiv 1 \pmod{q}$. Preto žiadne celé n s vlastnosťou $n^p \equiv p \pmod{q}$ neexistuje, pokiaľ spĺňa prvočíslo q podmienku $q \not\equiv 1 \pmod{p^2}$. Existenciu takého prvočiniteľa q (z rozkladu čísla S) teraz dokážeme.

Určme zvyšok súčtu S pri delení číslom p^2. Pretože $p^2 \mid p^j$ $(j \geqq 2)$, platí

$$S = p^{p-1} + p^{p-2} + \ldots + p + 1 \equiv 0 + 0 + \ldots + 0 + p + 1 \pmod{p^2},$$

teda $S \equiv p+1 \not\equiv 1 \pmod{p^2}$. Odtiaľ už vyplýva, že aspoň jeden z prvočiniteľov q_j čísla $S = q_1 q_2 \ldots q_r$ nie je kongruentný s 1 (modulo p^2). (Vynásobením r kongruencií $q_j \equiv 1 \pmod{p^2}$ by sme totiž dostali $S \equiv 1 \pmod{p^2}$.)

Dôkaz je hotový a úloha vyriešená.

Zadania súťažných úloh

Kategória P

Archív zadaní Matematickej olympiády, kategórie P sa nachádza na WWW stránke http://www.ksp.sk/mop.

P – I – 1

Pán Nyi bol dvorným pestovateľom čaju cisára Tiang-tonga. Bol skutočne vyhláseným pestovateľom a jeho čajové lístky putovali nielen do blízkych šálok cisára Tianga, ale aj do ďalekých zemí za oceánom. Tajomstvo Nyiovho skvelého čaju spočívalo predovšetkým v dôkladnosti, s akou sa staral o svoje čajové kríky. Nyi bol tak dôkladný, že si o každom svojom kríku viedol záznamy. Písal si dokonca aj to, koľko vetvičiek vychádza z ktorého miesta kríka. Po smrti pána Nyia boli záznamy rozkradnuté a jeho nástupca pan Myi tak mal oveľa ťažšiu prácu. Rozhodol sa preto, že záznamy získa späť. Problém ale je, že veľa rôznych podvodníkov mu ponúka falošné záznamy. Tie však našťastie väčšinou obsahujú nezmyselné počty vetvení, a tak sa dajú ľahko odhaliť. Pána Myia ustavičné overovanie pravosti záznamu už unavuje, a preto vás požiadal, aby ste mu napísali program, ktorý mu s overovaním pomôže.

Súťažná úloha

Váš program dostane na vstup počet významných miest N na údajnom čajovníku. Významným miestom na čajovníku je buď miesto, kde sa čajovník vetví, alebo miesto, kde končí niektorá vetva čajovníku. Pretože žiadne dve vetvy čajovníku nemôžu zrásť, nemôžu vznikať „cykly“ z vetví. Ďalej je na vstupe programu zadaných N kladných celých čísel $c_1, c_2, \ldots, c_N$, kde c_i určuje počet častí kmeňa, ktoré vychádzajú z i-teho významného miesta. Na výstup program vypíše správu, či môže existovať čajovník, ktorý bude mať takéto počty vetvení.

Formát vstupu Vstupný textový súbor `caj.in` obsahuje dva riadky. Na prvom riadku je uvedené jediné celé číslo N, $1 \leq N \leq 1000$. Druhý riadok obsahuje celé čísla $c_1, c_2, \ldots, c_N$ oddelené medzerami, $1 \leq c_i \leq N-1$.

Formát výstupu Výstupný textový súbor `caj.out` obsahuje jediný riadok tvorený buď slovom `EXISTUJE` alebo slovom `NEEXISTUJE`.

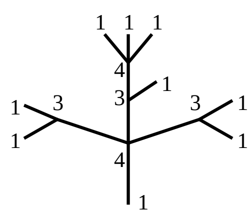
Príklad

Súbor `caj.in`
14
1 4 3 1 1 3 1 1 3 1 4 1 1 1

Súbor `caj.out`
`EXISTUJE`
(pozri obrázok)

Súbor `caj.in`
6
3 3 3 1 1 1

Súbor `caj.out`
`NEEXISTUJE`



Obr. 43

P – I – 2

Knihovníčka Milka potrebuje objednať ďalšiu skriňu s poličkami do svojej knižnice, nevie však sama spočítať jej optimálne rozmery. Milka by chcela do novej skrine umiestniť N kníh. Každá kniha má priradený jednoznačný číselný kód a tieto kódy určujú poradie kníh v skrini. Kniha s menším kódom sa má nachádzať na rovnakej alebo vyššie umiestnenej poličke ako kniha s väčším kódom. Na každej poličke majú byť knihy s menšími kódmi umiestené naľavo od kníh s väčšími kódmi. Vstupom pre váš program bude postupnosť N čísel v_i, $1 \leq i \leq N$, kde v_i je výška i-tej knihy (v poradí podľa kódov od najmenšieho po najväčší). Pre jednoduchosť predpokladajte, že všetky knihy majú rovnakú hrúbku 1 cm. Váš program by mal zo zadaných údajov spočítať nasledujúce údaje:

- Šírku skrine – označme ju s.
- Počet poličiek v skrini – označme ho p.
- Výšku w_i i-tej poličky pre každé $1 \leq i \leq p$.
- Rozmiestenie kníh do skrine s vypočítanými parametrami, ktoré rešpektuje požiadavky na poradie kníh zmienené v zadaní tohto príkladu.

Navyše, knihovníčka Milka si praje, aby skriňa bola čo najužšia a pritom aby sa vošla do miestnosti vysokej 250 cm. Rozmiestenie kníh, ktoré váš program nájde, musí teda spĺňať ešte nasledujúce podmienky:

- Výška ľubovoľnej z kníh umiestených do i-tej poličky je najviac w_i.
- Súčet hrúbok kníh umiestených do jednej poličky je najviac s cm, t.j. táto polička obsahuje najviac s kníh.
- Výška skrine, ktorá sa rovná $w_1 + \ldots + w_p + (p+1) \times 1$ cm (predpokladáme, že šírka dosiek oddeľujúcich poličky v skrini je 1 cm), nesmie presiahnuť výšku miestnosti 250 cm.
- s je najmenšie možné.

Príklad

Predpokladajme, že Milka chce do skrine umiestniť 11 kníh, ktorých výšky v poradí podľa ich kódu sú nasledujúce: 40 cm, 10 cm, 40 cm, 25 cm, 40 cm, 25 cm, 50 cm, 40 cm, 40 cm, 25 cm a 40 cm. Jedno z optimálnych riešení vyzerá takto: Skriňa bude mať šírku pre 3 knihy a spolu 4 poličky s nasledujúcimi výškami: 40 cm, 40 cm, 50 cm a 40 cm. Výška skrine je v tomto prípade 175 cm. Na každej z horných troch poličiek budú umiestnené 3 knihy, na najspodnejšej poličke budú 2 knihy.

P – I – 3

Jedna z metód spracovania textu používa nasledujúci transformačný algoritmus: Na vstupe je n-znakový reťazec $C = c_1c_2...c_n$, ktorého všetky znaky sú navzájom rôzne.

Keď presunieme prvé jeho písmeno na koniec, dostaneme zrotovaný reťazec. Reťazec $c_{k+1}c_{k+2}...c_n c_1...c_k$ budeme nazývať k-krát zrotovaný reťazec a budeme ho značiť C_k. Napríklad reťazec `eldat` je 3-krát zrotovaný reťazec `datel`.

Napíšme teraz do riadkov pod seba reťazce $C = C_0$, C_1, …, C_{n-1}. Takto dostaneme tabuľku n reťazcov. Riadky tejto tabuľky zotriedime lexikograficky (t.j. podľa abecedy). Z výslednej tabuľky si zapamätáme posledný stĺpec S a číslo riadku r, v ktorom sa po zotriedení nachádzal pôvodný reťazec. Aj keď to vyzerá dosť magicky, dvojica (S, r) nám stačí na to, aby sme vedeli jednoznačne určiť pôvodný reťazec.

Príklad transformácie

Na vstupe máme reťazec `datel`.

Pôvodná tabuľka:	Zotriedená tabuľka:
`datel`	`ateld`
`ateld`	`datel`
`telda`	`eldat`
`eldat`	`ldate`
`ldate`	`telda`

Výsledkom transformácie je teda reťazec `dltea` a číslo 2, lebo slovo `datel` je v druhom riadku zotriedenej tabuľky.

Súťažná úloha

Váš program dostane na vstupe reťazec S dĺžky n $(1 \leq n \leq 100)$ a číslo r $(1 \leq r \leq n)$. Všetky znaky reťazca S budú navzájom rôzne a (kvôli ľahšiemu načítavaniu) žiaden z nich nebude medzera. Úlohou vášho programu je nájsť reťazec C taký, aby výsledkom vyššie popísanej transformácie reťazca C bola práve dvojica (S, r). Môžete predpokladať, že taký reťazec existuje. Uvedomte si, že pri použití v praxi môžu mať spracovávané vstupy stovky kilobajtov, preto by bolo dobré, keby časové aj pamäťové nároky vášho algoritmu boli lepšie ako kvadratické.

Formát vstupu Na prvom riadku vstupného súboru `bw.in` sa nachádza reťazec S, na druhom riadku jedno celé číslo r.

Formát výstupu Výstupný súbor `bw.out` má obsahovať jediný riadok a na ňom hľadaný reťazec C.

Príklad

bw.in	**bw.out**
`dltea`	`datel`
2	

P – I – 4

Reverzibilné algoritmy

Pri hľadaní úspornejších polovodičových technológii sa zistilo, že najviac energie sa spotrebúva pri mazaní informácii. Teda optimálne sú tie výpočty, pri ktorých sa žiadne informácie nestrácajú. Takýmto výpočtom sa hovorí *reverzibilné*, lebo vďaka tejto vlastnosti môžu prebiehať obomi smermi – dá sa určiť nielen zo vstupu výstup, ale aj z výstupu vstup. Aj my sa teraz vydáme do tohoto zvláštneho symetrického sveta a preskúmame, ako sa programuje „ekologicky“.

Začneme tým najjednoduchším, čo v klasických programovacích jazykoch máme, a to priraďovacím príkazom. Tu si nič také bohužiaľ nemôžeme dovoliť, lebo by sme stratili pôvodný obsah premennej, do ktorej priradzujeme! Namiesto toho zavedieme niekoľko príkazov, ktoré budú premennú modifikovať vratne:

- `premenná += hodnota` – pripočíta hodnotu k premennej
- `premenná -= hodnota` – odpočíta hodnotu od premennej
- `premenná ^= hodnota` – prixoruje hodnotu k premennej
- `premenná =:= premenná` – vymení obsah dvoch premenných

Operácia **xor** je bitová operácia, ktorá má pre dve jednobitové čísla výsledok 1 práve vtedy, keď sú rôzne. Teda $(0 \text{ xor } 0) = (1 \text{ xor } 1) = 0$ a $(0 \text{ xor } 1) = (1 \text{ xor } 0) = 1$. Viacbitové čísla sa xorujú po bitoch – i-ty bit výsledku je i-ty bit prvého čísla **xor** i-ty bit druhého čísla. Napr. $5 \text{ xor } 14 = (0101)_2 \text{ xor } (1110)_2 = (1011)_2 = 11$. Operácia **xor** má veľa užitočných vlastností, okrem iného $(x \text{ xor } y) = (y \text{ xor } x)$, $(x \text{ xor } x) = 0$, $(x \text{ xor } 0) = x$ a $((x \text{ xor } y) \text{ xor } z) = (x \text{ xor } (y \text{ xor } z))$. Podobne sa dajú zaviesť aj bitový **and** a **or**: je $(0 \text{ and } 0) = (0 \text{ and } 1) = (1 \text{ and } 0) = 0$, $(1 \text{ and } 1) = 1$, $(0 \text{ or } 0) = 0$, $(0 \text{ or } 1) = (1 \text{ or } 0) = (1 \text{ or } 1) = 1$. Tieto operácie nás až tak nebudú zaujímať, lebo nie sú reverzibilné.

Aby sme sa vyhli problémom s pretečením (čo je potom inverzná operácia?), dohodneme sa, že budeme počítať len s nezápornými celými číslami od 0 do `maxword`. Takýmto číslam budeme odteraz hovoriť *prirodzené*. Všetky operácie budeme robiť modulo (`maxword`+1), čiže výsledkom každej z operácii na prirodzených číslach bude opäť prirodzené číslo. Navyše príkaz `-=` bude naozaj inverzný k `+=` a naopak. Príkazy `^=` a `=:=` sú zjavne inverzné samy k sebe.

Čo všetko ale môže byť `hodnota`? Iste to môže byť ľubovoľná konštanta. Takisto to môže byť ľubovoľná premenná, samozrejme okrem tej, do ktorej priradzujeme. Inak by sme mohli napísať napr. „`a -= a`“, čo zjavne nie je reverzibilné. Ešte by sme mali povoliť základné aritmetické operácie – tie samy nemusia byť reverzibilné, stačí, keď reverzibilne spracujeme ich výsledok. Každý zložitejší výraz potom môžeme prepísať na výrazy s jednou operáciou, napr. „`x ^= (a*b)+(c*d)`“rozpíšeme takto:

```
t1 += a*b;
t2 += c*d;
x ^= t1+t2;
t2 -= c*d;
t1 -= a*b;
```

Pritom `t1` a `t2` sú pomocné premenné, ktoré sú na počiatku výpočtu nulové a po dopočítaní výrazu sa opäť k nulovým vrátia, takže ich môžeme znovu použiť. Podobne sa dá rozpísať do reverzibilného tvaru výpočet ľubovoľného výrazu, takže odteraz môžeme používať aj zložené výrazy (bez toho, aby sme ich museli rozpisovať).

Trik s odpočítavaním medzivýsledkov a spúšťaním častí programu odzadu sa nám ešte môže hodiť. Zadefinujme si teda, že `undo prikaz` znamená spustiť príkaz odzadu a že `wrap prikaz1 on prikaz2` najskôr vykoná `prikaz1`, potom `prikaz2` a nakoniec `undo prikaz1`. Náš príklad s postupným výpočtom výrazu by sme teda mohli prepísať nasledovne:

```
wrap
  begin
    t1 += a*b;
    t2 += c*d;
  end
on x ^= t1+t2;
```

Podmienené príkazy `if-then-else` môžeme používať, ak zaručíme, že po vykonaní podmieneného príkazu bude pravdivosť podmienky rovnaká ako pred jeho vykonaním (napríklad preto, že žiadnu z premenných, ktoré sú v podmienke, v podmienenej časti programu nemeníme). Potom totiž vieme aj pri vykonávaní výpočtu odzadu rozhodnúť, ktorou vetvou sa má výpočet vydať.

Ťažšie to bude u cyklov. Tam si nevystačíme s nemeniacou sa podmienkou – to by cyklus buď neprebehol ani raz, alebo sa opakoval do nekonečna. My budeme používať cykly typu `for`. Tie budú reverzibilné, ak vnútri cyklu nikde nemeníme riadiacu premennú cyklu ani jej hranice. Toto nie je až také veľké obmedzenie – nesmie sa to robiť ani v niektorých obyčajných programovacích jazykoch. Navyše aby nás netrápilo, čo bolo v riadiacej premennej pred začiatkom cyklu a čo je v nej po jeho skončení, dohodneme sa, že príkaz `for` si túto premennú sám vytvorí a na konci ju zase zruší.

Príkaz `goto` pre istotu zakážeme úplne.

Procedúry môžu fungovať reverzibilne, ale musíme sa vyhnúť kopírovaniu parametrov a výsledkov. Všetky premenné preto budeme procedúre odovzdávať odkazom (v Pascale `var`, v C `*`). Lokálne premenné procedúry budú pri jej spustení nulové a procedúra ich musí pred skončením opäť uviesť do tohoto stavu. Rekurzia funguje bez problémov.

Teraz už máme všetko pripravené na to, aby sme vybudovali reverzibilný programovací jazyk. Ten náš bude príbuzný Pascalu a bude vyzerať takto:

Dátové typy K dispozícii máme typy `word` (nezáporné celé číslo), `bit` (jednobitové číslo, t.j. 0 alebo 1, používa sa aj pre pravdivostné hodnoty ako pascalovský `boolean`) a pole `array[x..y] of typ` (`x` a `y` udávajú rozmedzie indexov a okrem čísel to môžu byť aj výrazy, ktorých hodnota sa počas existencie poľa nezmení). Prvky polí môžu byť aj polia, takto získame viacrozmerné polia. Svoj vlastný typ si môžete zaviesť deklaráciou `type identifikator = typ`, napr.:

```
type boolean = bit;
type screen = array[0..199] of array[0..319] of bit;
```

Identifikátory slúžia na pomenovanie typov, premenných a procedúr a sú to ľubovoľné reťazce písmen, číslic a znakov '_', ktoré nezačínajú číslicou a nezhodujú sa s niektorým z kľúčových slov jazyka. Malé a veľké písmená sa nerozlišujú.

Procedúry sa deklarujú konštrukciou:

```
procedure identifikator ( parametre );
  (deklarácie lokálnych typov, premenných a procedúr)
begin
```

(príkazy oddelené bodkočiarkami)
`end;`

Parametre procedúry majú syntax `var meno : typ`, kde `meno` je identifikátor, ktorým sa na parameter odkazujeme vnútri procedúry. Ak je parametrov viac, oddeľujú sa pri deklarácií procedúry bodkočiarkami. Ak sú parametre rovnakého typu, môžeme zápis skracovať, napr. `procedure X(var m,n : word; var A:array[1..n] of bit);` Všetky objekty deklarované vnútri procedúry (parametre, typy, premenné aj vnorené procedúry) existujú len počas behu procedúry. Každá procedúra vidí svoje lokálne premenné a navyše aj lokálne premenné všetkých procedúr, vnútri ktorých je deklarovaná (ak sa ich názvy líšia od názvov jej lokálnych premenných). Presne rovnako to funguje v Pascale.

Premenné sú pomenované identifikátormi, musia sa vytvoriť deklaráciou `var identifikator : typ;`. Pri vstupe do procedúry, v ktorej sú deklarované, majú nulovú hodnotu (v prípade poľa: všetky jeho prvky majú nulovú hodnotu) a predtým, ako premenná na konci procedúry zanikne, musí byť jej hodnota opäť nulová. Deklaráciu viac premenných toho istého typu môžeme skrátene zapísať `var i1, i2, ..., in : typ`.

Výrazy môžu obsahovať:

- konštanty (prirodzené čísla a konštanta `maxword` – najväčšie prirodzené číslo)
- premenné
- prvky polí (`pole[vyraz]`)
- aritmetické operácie, ktorých vstupom aj výstupom sú prirodzené čísla: $+$, $-$, $*$, **div** (celá časť podielu), **mod** (zvyšok po delení), **and**, **or**, **xor** (bitové operácie, definície viď vyššie) a **not** (prehodenie nulových a jednotkových bitov) – výsledky operácii sa automaticky berú modulo (`maxword`+1)
- relačné operácie (vstupom sú dve prirodzené čísla, výstupom bitová hodnota 1, ak relácia platí a 0, ak neplatí): $<$, $>$, $=$, $<=$, $>=$, $<>$
- zátvorky

Príkazy môžu byť nasledovných druhov:

- Blok: `begin` (príkazy oddelené bodkočiarkami) `end` – spôsobí postupné vykonanie príkazov, ktoré obsahuje, v danom poradí.
- Modifikačné príkazy: `premenna += vyraz` – spôsobí vyhodnotenie výrazu a jeho pripočítanie k premennej. Pritom `premenna` môže byť aj prvok poľa indexovaný nejakým výrazom. Premenná (resp. prvok poľa), ktorú príkaz modifikuje, sa už nikde v tomto príkaze nesmie vyskytnúť. Analogicky príkazy `-=` a `^=`.
- Vymieňací príkaz: `premenna =:= premenna` – vymení obsah dvoch premenných rovnakého typu. Ak sa jedná o prvky polí, nesmie sa žiadne z týchto polí používať vo výrazoch určujúcich indexy.
- Podmienený príkaz: `if podmienka then prikaz1 else prikaz2` – vyhodnotí sa podmienka (výraz s bitovým výsledkom), ak je výsledok 1, vykoná sa `prikaz1`, inak sa vykoná `prikaz2`. Platnosť podmienky sa vykonaním príslušného príkazu nesmie zmeniť. Časť `else` sa môže vypustiť, prípadné `else` sa vzťahuje k najbližšiemu neukončenému `if`.

- Príkaz cyklu: `for var identifikator = d to h do prikaz` – založí novú premennú daného mena, daný príkaz postupne vykonáva pre túto premennú nadobúdajúcu hodnoty `d`, `d`+1 až `h` a nakoniec riadiacu premennú opäť zruší. Hranice `d` a `h` sú celočíselné výrazy, ak `d>h`, cyklus sa ani raz nevykoná. Príkaz `prikaz` musí zachovávať hodnotu riadiacej premennej aj oboch hraníc cyklu (presnejšie: môže ich modifikovať, ale na konci prechodu cyklom musia mať tú istú hodnotu ako mali na začiatku príslušného prechodu). Takisto sa dá použiť konštrukcia `h downto d` namiesto `d to h`, potom bude riadiaca premenná nadobúdať hodnoty v opačnom poradí, t.j. `h`, `h`-1, až `d`.
- Volanie procedúry: `nazov_procedury ( par1, ..., parN )` – zavolá procedúru so zadanými parametrami. Parametre môžu byť premenné alebo prvky poľa (potom ale výraz určujúci index prvku musí mať po návrate z procedúry rovnakú hodnotu ako pred vstupom do nej). Počet parametrov aj ich typy musia zodpovedať deklarácii procedúry.
- Príkaz obrátenia výpočtu: `undo príkaz` – vykoná daný príkaz „odzadu“podľa nasledujúcich pravidiel:

`undo begin`
`  p1; ...; pn`
`end`
	`begin`
	`  undo pn; ...; undo p1`
	`end`

`undo x += y`	`x -= y`
`undo x -= y`	`x += y`
`undo x ^= y`	`x ^= y`
`undo x =:= y`	`x =:= y`
`undo if x then y else z`	`if x then undo y` `  else undo z`
`undo for x = d to h do p`	`for x = h downto d do` `  undo p`
`undo P(x1; ...; xn)`	`undo` tela procedúry (`begin ... end`)
`undo undo p`	`p`

  Konštrukcia `begin p; undo p; end` teda nevykoná nič. (Aj keď počítať môže pomerne dlho.)
- Príkaz lokálneho výpočtu: `wrap prikaz1 on prikaz2` – skrátený zápis konštrukcie `begin prikaz1; prikaz2; undo prikaz1; end`.

Komentáre Čokoľvek uzavreté v zložených zátvorkách (‘`{`’ a ‘`}`’) je komentár, ktorý počítač ignoruje (ako keby namiesto neho boli medzery). Komentár nesmie obsahovať zložené zátvorky.

Hlavný program nebudeme zavádzať. Aby sme sa vyhli problémom so vstupom a výstupom, budeme všetko programovať ako procedúry. Tie dostanú ako svoje parametre premenné obsahujúce vstupné dáta a premenné, ktoré majú byť predpísaným spôsobom modifikované podľa výstupu.

Časová a pamäťová zložitosť sú definované podobne ako v klasickom programovaní: Časová zložitosť je počet vykonaných príkazov. Veľkosť pamäte využitej v danom okamihu spočítame ako súčet veľkostí všetkých lokálnych premenných (typy bit a word majú jednotkovú veľkosť, veľkosť poľa je súčet veľkostí jeho prvkov), počtu všetkých parametrov práve zavolaných procedúr a počtu práve zavolaných procedúr. Parametre sa bez ohľadu na ich typ počítajú ako jednotka, lebo sa odovzdávajú odkazom. Potom pamäťová zložitosť je maximum množstva využitej pamäte počas behu programu. Pozor! Keďže aj náš program je procedúra, jeho vstupy a výstupy sa do pamäťovej zložitosti započítavajú len ako konštanty, aj keď to môžu byť veľké polia.

Príklad 1

Procedúra na prehodenie obsahu dvoch premenných (ktorá vlastne ukazuje, že príkaz `=:=` vieme odvodiť pomocou ostatných príkazov). Časová aj pamäťová zložitosť sú konštantné, teda $O(1)$.

```
procedure Vymen(var x,y : word);
begin        { x = X, y = Y (X,Y sú pôv. hodnoty) }
  x ^= y;    { x = X xor Y, y = Y }
  y ^= x;    { x = X xor Y, y = Y xor (X xor Y) = X }
  x ^= y     { x = (X xor Y) xor X = Y, y = X }
end;
```

Príklad 2

Procedúra na výpočet maxima zo zadaných `n` čísel. Dané je pole `X` celých čísel a premenná `max`, ku ktorej máme hľadané maximum pripočítať. To dokážeme takto: najskôr predpočítame pole `M`, kde `M[i]` bude maximum spomedzi čísel `X[1]` až `X[i]`. Potom pripočítame `M[n]` ku `max` a nakoniec `M[i]` opäť vyprázdnime. Časová aj pamäťová zložitosť sú lineárne, teda $O(n)$.

```
procedure Maximum(var n:word; var X:array [1..n] of word;
                  var max:word);
var M:array [0..n] of word;
begin
  wrap for var i=1 to n do
         if X[i]>M[i-1] then
           M[i] += X[i]
         else
           M[i] += M[i-1]
  on max += M[n];
end;
```

Súťažná úloha

Napíšte reverzibilnú procedúru `Najdi(var n:word; var X:array[1..n] of word; var co, kde:word)`. Táto procedúra má za úlohu zistiť, či sa v `n`-prvkovom poli `X` vyskytuje hodnota `co` a ak áno, prirátať k premennej `kde` pozíciu jej výskytu, teda také `i`, že `X[i]=co`. Naviac viete, že pole `X` je usporiadané vzostupne, t.j. pre každé `i`, `j`, `i<j`, platí `X[i]<X[j]`. Preto sa hodnota `co` vyskytuje v poli najviac raz. Snažte sa, aby vaše riešenie malo čo najmenšiu časovú a pamäťovú zložitosť.

P – II – 1

Spoločnosť pre výskum mimozemského života zistila, že náš vesmír v minulosti obývala mimoriadne vyspelá civilizácia, ktorú naši vedci nazvali Tvorcovia hviezd. Ich technická vyspelosť im totiž umožňovala tvoriť nové hviezdy. Tvorcovia hviezd mali silne rozvinutý zmysel pre symetriu, preto nové hviezdy stavali stredovo súmerne okolo bodu, kde kedysi stála ich rodná planéta, kým sa nezrazila s kométou. Vedci, ktorí s touto teóriou prišli, by jej radi dodali trochu vierohodnosti. Zistili, ktoré hviezdy podľa nich stvorila táto mimozemská civilizácia. Teraz by potrebovali overiť, či tieto hviezdy naozaj ležia stredovo súmerne okolo nejakého bodu. (Skutočnú pozíciu, kde sa kedysi nachádzala ich domáca planéta, nepoznajú.) Keďže hviezd je vcelku dosť, rozhodli sa vedci použiť výpočtovú techniku.

Súťažná úloha

Vašou úlohou je napísať pre nich program, ktorý dostane na vstupe počet hviezd N a súradnice týchto N hviezd. Súradnice hviezdy i sú tri celé čísla x_i, y_i, z_i. Ak sú hviezdy rozmiestnené stredovo súmerne okolo nejakého bodu, mal by váš program vypísať súradnice tohto bodu. Ak takýto bod neexistuje, váš program by mal o tom podať správu.

Hovoríme, že hviezdy sú rozmiestnené stredovo súmerne okolo bodu S, ak pre každú hviezdu H existuje hviezda H' taká, že S je stredom úsečky HH'. Niektorá hviezda môže ležať aj priamo v bode S.

Pre účely tejto úlohy na chvíľu zabudnite na fyziku a predpokladajte, že hviezdy sa nepohybujú `:-)`.

Príklad

Vstup	Výstup
$N = 6$ $[0, 1, -1], [2, 0, 1], [4, 0, 3],$ $[0, 4, 1], [4, 3, 5], [2, 4, 3]$	$[2, 2, 2]$ *(Zodpovedajú si dvojice hviezd 1-5, 2-6, 3-4.)*
$N = 4$ $[0, 0, 0], [5, 0, 0], [2, 1, 0],$ $[2, -1, 0]$	`STRED NEEXISTUJE`

P – II – 2

Knihovníčka Milka potrebuje objednať ďalšiu skriňu s poličkami do svojej knižnice, nevie však sama spočítať jej optimálne rozmery. Keďže ste jej minule pomohli, rovno sa obrátila na vás. Do novej skrine by chcela umiestniť N kníh. Tentokrát jej však nezáleží na tom, v akom poradí ich do skrine umiestni. Samozrejme aj táto skriňa musí vôjsť do 250 cm vysokej miestnosti a Milka chce, aby bola najužšia možná.

Súťažná úloha

Váš program dostane na vstupe počet kníh N a ich výšky $v_1, \ldots, v_N$ v centimetroch. Každá z kníh má hrúbku 1 cm. Z týchto údajov by váš program mal spočítať najmenšiu možnú šírku skrine s a popísať jednu takto širokú skriňu, presnejšie:

- počet jej poličiek p
- výšky jednotlivých poličiek $w_1, \ldots, w_p$
- rozmiestnenie kníh na poličky tejto skrine

Samozrejme musia platiť nasledovné veci:

- výška každej z kníh v i-tej poličke je najviac w_i
- na každej poličke je najviac s kníh
- výška skrine $p + 1 + \sum_{i=1}^{p} w_i$ je najviac 250 (hrúbka dosky medzi poličkami je 1 cm)

Príklad

Predpokladajme, že Milka má 13 kníh, z ktorých 9 má výšku 50 cm, zvyšné 4 majú výšku 40 cm. Najužšia možná skriňa má šírku 3. Jedna takáto skriňa vyzerá nasledovne: Má 5 poličiek, štyri z nich majú výšku 50 cm a jedna 41 cm. (Výška tejto skrine je 247 cm.) Na prvých dvoch poličkách sú po tri 50 cm vysoké knihy, na tretej sú dve 50 cm vysoké knihy a jedna 40 cm, na štvrtej jedna 50 cm a jedna 40 cm vysoká a na poslednej piatej sú posledné dve 40 cm vysoké knihy. Všimnite si, že existujú aj nižšie vhodné skrine s rovnakou šírkou.

P – II – 3

Jedna z metód spracovania textu používa nasledujúci transformačný algoritmus: Na vstupe je n-znakový reťazec $C = c_1 c_2 \ldots c_n$, ktorého všetky znaky sú navzájom rôzne. Keď presunieme prvé jeho písmeno na koniec, dostaneme zrotovaný reťazec. Reťazec $c_{k+1} c_{k+2} \ldots c_n c_1 \ldots c_k$ budeme nazývať k-krát zrotovaný reťazec a budeme ho značiť C_k. Napríklad reťazec `eldat` je 3-krát zrotovaný reťazec `datel`.

Napíšme teraz do riadkov pod seba reťazce $C = C_0$, C_1, …, C_{n-1}. Takto dostaneme tabuľku n reťazcov. Riadky tejto tabuľky zoradíme lexikograficky (t.j. podľa abecedy). Z výslednej tabuľky si zapamätáme posledný stĺpec S a číslo riadku r, v ktorom sa po zoradení nachádzal pôvodný reťazec. Aj keď to vyzerá dosť magicky, dvojica (S, r) nám stačí na to, aby sme vedeli jednoznačne určiť pôvodný reťazec.

Príklad transformácie

Na vstupe máme reťazec `abraka`.

Pôvodná tabuľka:	Zotriedená tabuľka:
`abraka`	`aabrak`
`brakaa`	`abraka` ←
`rakaab`	`akaabr`
`akaabr`	`brakaa`
`kaabra`	`kaabra`
`aabrak`	`rakaab`

Výsledkom transformácie je teda reťazec `karaab` a číslo 2, lebo slovo `abraka` je v druhom riadku zoradenej tabuľky.

Súťažná úloha

Váš program dostane na vstupe reťazec S dĺžky n ($1 \leq n \leq 10\,000$) a číslo r ($1 \leq r \leq$ $\leq n$). Tento reťazec bude tvorený malými písmenkami anglickej abecedy. **Na rozdiel od domáceho kola sa v ňom to isté písmenko môže vyskytnúť aj viackrát.** Ak programujete v Pascale, môžete predpokladať, že sa vám celý reťazec vôjde do premennej typu `string`. Úlohou vášho programu je nájsť taký reťazec C, aby výsledkom vyššie popísanej transformácie reťazca C bola práve dvojica (S, r). Môžete predpokladať, že taký reťazec C existuje. Bolo by dobré, keby časové aj pamäťové nároky vášho algoritmu boli lepšie ako kvadratické od n.

Príklad

Vstup	**Výstup**
`karaab` `2`	`abraka`

P – II – 4

Študijný text „Reverzibilné algoritmy“ k príkladu P-II-4 možno nájsť v zadaní príkladu P-I-4 na strane **115**.

V hlavnom meste nemenovaného štátu S sídli inštitúcia I. Za dlhé roky svojej existencie sa inštitúcia I tak rozrástla, že dnes má N ($N > 1$) miestností (očíslovaných od 1 do N) plných byrokratov. A ako to už býva, byrokrati si medzi sebou radi posielajú listy, tlačivá, doklady, obežníky, potvrdenia, overené kópie, lístky na obed a kopu iných dôležitých materiálov. Preto si na štátne náklady dali postaviť potrubnú poštu.

Potrubná pošta je tvorená sieťou rúr. Každá rúra vedie z jednej kancelárie do druhej a za pomoci stlačeného vzduchu sa ňou (len jedným smerom, aby nedošlo ku kolíziám) dajú posielať zásielky. V inštitúcii I v miestnosti N sedí riaditeľka R a v miestnosti 1 sedí lenivec L. Lenivec L mal už dávno riaditeľke zaniesť dôležitú faktúru, ale bol lenivý, tak si radšej počkal, kým postavia potrubnú poštu. Teraz by chcel vedieť, či už ňou vie poslať riaditeľke spomínanú faktúru. (Nemusí ju posielať priamo, faktúra môže počas svojej cesty prejsť ľubovoľne veľa rúrami.) Je však lenivý zistiť si to, preto táto milá úloha pripadne vám.

Súťažná úloha

Úlohou je napísať *reverzibilnú* procedúru `Skumaj(var N:word; var A:array[1..N] of array[1..N] of bit; var D: word)`, ktorá dostane ako vstup počet budov N a maticu A, popisujúcu sieť rúr. (Ak z miestnosti i vedie rúra do miestnosti j, je $A[i][j] = 1$, inak $A[i][j] = 0$.) Ak sa dá poslať pošta z miestnosti 1 do miestnosti N, mala by táto procedúra zistiť, najmenej koľkými rúrami pošta po ceste prejde a tento počet pripočítať k premennej

D. Ak sa pošta z miestnosti 1 do miestnosti N nedá poslať, procedúra by nemala zmeniť obsah premennej D.

Váš program by mal mať čo najmenšiu **pamäťovú** zložitosť, pričom ale jeho časová zložitosť musí byť polynomiálna od N.

Príklad

Vstup	**Výstup**
$N = 4$	$D = 2$
rúry: $1 \to 3$, $2 \to 4$, $3 \to 2$, $3 \to 4$	*(Najkratší spôsob poslania pošty je cez*
$D = 0$	*2 rúry:* $1 \to 3 \to 4$.*)*

P – III – 1

V hračkárstve Drobec a otec prebehla veľká súťaž „O najkrajšiu hračku“. Úlohou detí bolo nakresliť obrázok svojej najobľúbenejšej hračky. Po skončení súťaže sa konala výstavka a deti, ktoré nakreslili najkrajšie obrázky, dostali od hračkárstva nejakú hračku. Ale ako asi viete, nie každému dieťaťu sa páčia všetky hračky, a tak už pred ukončením súťaže mal každý výtvarník vyhliadnutú odmenu, ktorú by chcel za svoj obrázok dostať. Tú, a žiadnu inú. Po vyhlásení výsledkov dávali deti svoj názor najavo dosť nahlas. Maminky ukričaných potomkov sa rozhodli, že deti si medzi sebou hračky povymieňajú tak, aby pokiaľ možno čo najviac detí bolo spokojných so svojou výhrou. Situáciu komplikuje skutočnosť, že zapojiť sa do vymieňania sú ochotné iba tie deti, ktoré nakoniec dostanú tú hračku, po ktorej túžia. S tak náročnou úlohou si mamičky nevedli poradiť, a tak poprosili Vás, aby ste napísali program, ktorý úlohu vyrieši.

Súťažná úloha

Váš program dostane na vstupe zadaný počet odmenených detí N a ďalej pre každé dieťa číslo hračky, ktorú dostalo a číslo hračky, ktorú by chcelo dostať (pretože hračiek je rovnako ako detí, očíslujeme si ich pre jednoduchosť od 1 po N). Na výstup program vypíše najväčšiu skupinu detí takú, že ak si deti v skupine medzi sebou vhodným spôsobom vymenia hračky, budú všetky spokojné.

Príklad

Predpokladajme, že prvé dieťa má hračku 2 a chce hračku 4, druhé dieťa má hračku 3 a aj chce hračku 3, tretie dieťa má hračku 5 a chce hračku 2, štvrté dieťa má 4 a chce 5 a piate dieťa má 1 a chce 2. Najväčšia skupina detí, ktoré môžu výmenou dostať svoje vytúžené hračky, obsahuje deti 1, 2, 3, a 4.

P – III – 2

Knihovníčka Milka opäť potrebuje objednať skriňu do svojej knižnice a keďže sa jej vaša pomoc osvedčila, opäť sa na Vás obrátila, aby ste jej pomohli spočítať optimálne rozmery novej skrine. Nová skriňa má mať P poličiek a Milka by do nej chcela umiestniť N kníh. Každá kniha má priradený jednoznačný číselný kód a tieto kódy určujú poradie kníh v skrini. Kniha s menším kódom sa má nachádzať na rovnakej alebo vyššie umiestnenej poličke ako kniha s väčším kódom. Na každej poličke majú byť knihy s menšími kódmi umiestené naľavo od kníh s väčšími kódmi.

Vstupom pre váš program budú čísla P a N a postupnosť N čísel h_i, $1 \leq i \leq N$, kde h_i je hrúbka i-tej knihy (v poradí podľa kódov od najmejšieho po najväčší). Môžete predpokladať, že hrúbka h_i i-tej knihy je v rozmedzí od 1 mm do 50 mm. Každá kniha ma takú výšku, že sa dá bez problémov umiestniť do ľubovoľnej z plánovaných P poličiek. Váš program by mal zo zadaných údajov spočítať nasledujúce údaje:

- Šírku skrine – označme ju s.
- Rozmiestenie kníh do skrine s vypočítanými parametrami.

Rozmiestnenie kníh, ktoré váš program nájde, musí z pochopiteľných dôvodov spĺňať nasledujúce požiadavky:

- Súčet hrúbok kníh umiestnených do jednej poličky je najviac s.
- Šírka skrine s je najmenšia možná.

Príklad

Predpokladajme, že nová skriňa má mať 3 poličky a má v nej byť uložených 6 kníh, ktorých hrúbky v poradí podľa ich kódu sú nasledujúce: 15 mm, 20 mm, 7 mm, 6 mm, 2 mm a 4 mm. Minimálna možná šírka skrine v tomto prípade je 20 mm. Na prvú poličku se dá iba prvá kniha, na druhú iba druhá kniha a zvyšné knihy sa umiestnia na poslednú tretiu poličku.

P – III – 3

Študijný text „Reverzibilné algoritmy" k príkladu P-II-4 možno nájsť v zadaní príkladu P-I-4 na strane **115**.

Súťažná úloha

Napíšte *reverzibilnú* procedúru `Add(var n:word; var A,B: array [0..n-1] of bit)`, ktorá bude slúžiť na sčítanie n-bitových čísel. Na vstupe dostane v poliach A, B dve n-bitové čísla zapísané po bitoch v dvojkovej sústave (pričom $A[0]$ je najnižší bit). Po skončení procedúry by v poli A mal byť uložený súčet týchto dvoch čísel. Môžete predpokladať, že vstup bude taký, aby nenastalo pretečenie, t.j. súčet bude menší ako 2^n. Základným kritériom hodnotenia bude **pamäťová zložitosť** vašej procedúry.

P – III – 4

Program: `poklad.pas/.c/.cpp`
Vstup: `poklad.in`
Výstup: `poklad.out`

Počas svojich pirátskych výprav nadobudol kapitán Flint značný majetok. Ako už piráti zvyknú robiť, rozhodol sa časť z neho zakopať na pustom ostrove. A tak sa aj stalo. Potom zobral ovčiu kožu v tvare konvexného N-uholníka a nakreslil na ňu cestu k pokladu. Potom mapu rozrezal na niekoľko kusov, pričom každý rez bola úsečka spájajúca dva vrcholy mnohouholníka a žiadne dva rezy sa vo vnútri mnohouholníka nepretínali.

Aby si poistil vernosť posádky svojho škuneru, rozhodol sa Flint darovať niektoré kusy mapy najšikovnejším pirátom. Aby sa však námorníci nemohli z mapy vyznať bez jeho pomoci, žiadni dvaja piráti nesmú dostať susedné diely mapy. Najviac koľko dielov mapy môže Flint rozdať pirátom?

Formát vstupu Prvý riadok vstupného súboru obsahuje dve celé čísla N, M ($3 \leq N \leq \leq 30\,000$, $0 \leq M \leq 30\,000$) oddelené medzerou. Pritom N je počet vrcholov mapy, M je počet rezov, ktoré Flint spravil. Nasleduje M riadkov, popisujúcich jednotlivé rezy. Každý z nich obsahuje dve celé čísla a_i, b_i oddelené medzerou – čísla vrcholov, cez ktoré viedol príslušný rez. Vrcholy sú očíslované od 1 do N po obvode mnohouholníka.

Formát výstupu Výstupný súbor má obsahovať jeden riadok a na ňom jedno celé číslo – najväčší počet kusov mapy, ktoré sa dajú rozdať pirátom (za podmienky, že žiadni dvaja nesmú dostať susedné kusy).

Príklad

Vstup	**Výstup**

`11 4`
`1 3`
`5 7`
`10 8`
`4 11`
	`3`

P – II – 5

Program: `vahy.pas/.c/.cpp`
Vstup: `vahy.in`
Výstup: `vahy.out`
Knižnica: `vahy_lib`

V nemenovanom kráľovstve nedávno vyhlásili konkurz na kráľovského radcu. Podmienky sú veľmi náročné: Každý uchádzač dostane N mincí, ktoré môžu a nemusia mať navzájom rôzne hmotnosti. Jeho úlohou bude roztriediť tieto mince na niekoľko kôpok, pričom mince na jednej kôpke musia mať navzájom rovnakú hmotnosť a následne usporiadať kôpky podľa hmotností mincí tak, aby na prvej kôpke boli najľahšie mince, na druhej ťažšie, atď., až na poslednej najťažšie mince. K dispozícii bude mať iba dvojramenné váhy, na ktorých môže porovnať hmotnosť ľubovoľných dvoch mincí. (Pri každom vážení musí dať na každú misku práve jednu mincu.)

Vašou úlohou je napísať program, ktorý by tento konkurz vyhral. Očíslujeme si mince číslami od 1 do N. Váš program bude môcť volať funkciu `porovnaj`, ktorá porovná váhy dvoch mincí a programu oznámi výsledok. Váš program musí samozrejme nájsť odpoveď čo najrýchlejšie. Pritom musí spraviť všetky *nutné* váženia (nesmú existovať dve rôzne riešenia konzistentné s váženiami, ktoré spravil váš program). Navyše váš program nesmie spraviť žiadne *zbytočné* váženie, t.j. také, ktorého výsledok by vyplýval zo skôr uskutočnených vážení.

Popis funkcie `porovnaj`

Funkcia `porovnaj` je definovaná v knižnici `vahy_lib`. Aby ju váš program mohol volať, musí obsahovať nasledujúci riadok:

Pascal: `uses vahy_lib;`
C/C++: `#include "vahy_lib.h"`

Hlavička funkcie `porovnaj` vyzerá nasledovne:

Pascal: `function porovnaj(a,b: longint): integer;`
C/C++: `int porovnaj(int, int);`

Táto funkcia očakáva ako vstupné parametre čísla dvoch mincí. Vráti hodnotu -1, ak je prvá minca ľahšia, $+1$, ak je ťažšia a 0, ak sú obe rovnako ťažké.

Nezabudnite, že váš program **nesmie** volať funkciu `porovnaj` zbytočne, t.j. výsledok žiadneho volania nesmie byť jednoznačne určený predchádzajúcimi volaniami. Napr. ak sme už zistili, že minca 1 je ľahšia ako minca 2 a že mince 2, 3 majú rovnakú hmotnosť, nesmieme už zavolať `porovnaj` s parametrami 1 a 3. Okrem toho, váš program môže funkciu `porovnaj` zavolať najviac 250 000-krát.

Formát vstupu Vstupný súbor obsahuje jediný riadok a na ňom jedno celé číslo N ($1 \leq N \leq 10\,000$) – počet mincí.

Formát výstupu Výstupný súbor má obsahovať K riadkov, kde K je počet rôznych hmotností mincí. Na každom riadku budú uvedené čísla mincí z príslušnej kôpky. Teda na prvom riadku budú čísla najľahších mincí, atď., až na poslednom najťažších. V každom riadku musia byť tieto čísla uvedené v rastúcom poradí a oddelené práve jednou medzerou.

Príklad

Vstup	**Priebeh komunikácie**	**Výstup**
`4`	Volanie `porovnaj(2,4)` vrátilo -1.	`2`
	Volanie `porovnaj(1,2)` vrátilo $+1$.	`1 3`
	Volanie `porovnaj(3,4)` vrátilo -1.	`4`
	Volanie `porovnaj(1,3)` vrátilo 0.	

Riešenia súťažných úloh

Kategória P

P – I – 1

Pri riešení úlohy budeme používať terminológiu z teórie grafov. Významné miesta na čajovníku budeme nazývať *vrcholy*, časti kmeňa čajovníku medzi dvoma významnými miestami *hrany*. Vrcholy spolu s hranami pomenujeme *strom* (stromom sa v teórii grafov nazýva súvislý graf, ktorý nemá žiadny cyklus). Počet hrán, ktoré vedú z nejakého vrcholu v (teda vlastne počet častí kmeňa, ktoré vedú z významného miesta v), nazveme *stupňom* vrcholu v.

Najskôr si všimnime, že každý strom s aspoň dvomi vrcholy má aspoň jeden vrchol stupňa jeden (takýto vrchol sa nazýva *list*). Tento vrchol môžeme nájsť takto. Začneme strom prehľadávať v ľubovoľnom vrchole. Ak ešte nie sme v liste, prejdeme do ľubovoľného susedného (t.j. pripojeného hranou) vrcholu, v ktorom sme ešte neboli. Keďže v strome nie sú cykly, musí takýto vrchol vždy existovať. Pretože vrcholov je konečný počet, musíme raz skončiť – a to môžeme iba v liste.

Teraz ukážeme, že súčet stupňov všetkých vrcholov v ľubovoľnom strome je $2N-2$ (kde N je počet vrcholov). Naopak platí, že ak máme N kladných celých čísel so súčtom $2N-2$, tak existuje strom s N vrcholmi majúcimi tieto stupne. Z toho už je jasné, že stačí zistiť, či čísla na vstupe majú súčet $2N-2$, a podľa výsledku vypísať príslušnú správu.

Prvé tvrdenie dokážeme indukciou vzhľadom na počet vrcholov. Strom s dvoma vrcholmi obsahuje iba jednu hranu. Súčet stupňov vrcholov je teda $1+1=2$ a naše tvrdenie platí. Ak má strom viac vrcholov, podľa predchádzajúceho pozorovania vieme, že má list. Ak tento list odoberieme (teda zrušíme vrchol a hranu, ktorá ho pripojuje k zvyšku stromu), získame zjavne opäť strom. Pre nový strom z indukčného predpokladu platí, že súčet stupňov je $2\cdot(N-1)-2=2N-4$. Pretože pôvodný strom mal o jeden list viac a jeden jeho jeden vrchol mal stupeň o jedna vyšší (ten, ku ktorému byl pripojený list), je súčet stupňov v pôvodnom strome $2N-4+2=2N-2$. Tým je prvé tvrdenie dokázané.

Druhé tvrdenie dokážeme indukciou podľa počtu členov postupnosti: Nech máme postupnosť dvoch kladných celých čísel, ktorých súčet je $2\cdot 2-2=2$. Tieto čísla teda môžu byť iba dve jednotky. Pre ne sú zrejme zodpovedajúcim stromom dva vrcholy spojené hranou. Ak má postupnosť viac ako dve čísla, musí zjavne obsahovať aspoň jednu jednotku (inak by súčet N čísel bol aspoň $2N$ a nie $2N-2$). Analogicky musí tiež obsahovať aspoň jedno číslo väčšie ako jedna. Ak z postupnosti vypustíme jednu jednotku a jedno z čísel väčších ako jedna znížime o jedna, získame postupnosť čísel o jedna kratšiu so súčtom $2N-2-2=2\cdot(N-1)-2$. Z indukčného predpokladu teda existuje strom s $N-1$ vrcholmi s príslušnými stupňami vrcholov. Keď do stromu pridáme jeden list a pripojíme ho hranou k vrcholu, ktorý zodpovedá číslu, ktoré sme zmenšovali o jedna, získame presne strom pre našu pôvodnú postoupnosť. Tým je dokázané druhé tvrdenie.

Časová zložitosť algoritmu je $O(N)$, pamäťová $O(1)$.

P – I – 2

Ukážeme si dve možné riešenia tejto úlohy. Obe sú založené na metóde nazývanej dynamické programovanie: úloha sa najskôr vyrieši pre podúlohu veľkosti 1. Toto riešenie se použije na nájdenie riešenia podúlohy veľkosti 2. Takto nájdené riešenie sa použije na vyriešenie podúlohy veľkosti 3, atď. V našom prípade bude veľkosť podúlohy určená počtom kníh, ktoré chceme do skrine umiestiť.

Prvé riešenie používa dvojrozmerné pole A veľkosti $N \times V$, kde N je celkový počet kníh, ktoré máme do skrine umiestiť a V je maximálna výška skrine (V je v našom prípade 250 podľa zadania úlohy). Hodnota $A[i,j]$, $0 \le i \le N, 1 \le j \le V$ udáva minimálnu možnú šírku skrine výšky j, do ktorej je možné umiestiť prvých i kníh. Ak do skrine výšky j prvých i kníh nemožno umiestiť, t.j. niektorá z týchto kníh je vyššia ako $j - 2$ cm, tak je hodnota $A[i,j]$ rovná nejakej špeciálnej hodnote, napríklad -1.

Popíšeme si, ako spočítať hodnotu $A[i_0,j_0]$ v čase $O(N)$, ak už máme spočítané hodnoty $A[i,j]$ pre $i < i_0$. Ak $i_0 = 0$, tak zjavne $A[i_0,j_0] = 0$ cm. Ak existuje i, $1 \le i \le i_0$, také, že výška v_i i-tej knihy je viac ako $j_0 - 2$ cm, tak prvých i kníh nemožno do skrine výšky j_0 umiestiť a $A[i_0,j_0]$ bude rovné -1. V ostatných prípadoch určíme hodnotu $A[i_0,j_0]$ nasledovne. Pre $0 \le i < i_0$ skúsime umiestiť na poslednú poličku skrine $(i + 1)$-vú až i_0-tu knihu a prvých i kníh dáme na predchádzajúce poličky; výška poslednej poličky by teda musela byť aspoň $v = \max_{i+1 \le k \le i_0} v_k$ a môžeme predpokladať, že je práve v. Šírka tejto poličky musí byť aspoň $i_0 - i$. Ak sa $A[i, j_0 - v - 1]$ rovná -1, tak sa nedá vytvoriť skriňa výšky j_0, ktorá by obsahovala prvých i_0 kníh a na poslednej poličke by z nich mala posledných $i_0 - i$. V opačnom prípade sa najmenšia šírka skrine výšky j_0, ktorá obsahuje prvých i_0 kníh a na poslednej poličke má z nich umiestnených posledných $i_0 - i$, rovná $\max\{A[i, j_0 - v - 1], i_0 - i\}$. Najmenší z týchto výrazov pre $0 \le i < i_0$ je hľadanou hodnotou $A[i_0,j_0]$. Vyššie popísaný výpočet sa dá vykonať v čase $O(N)$, ak postupujeme od $i = i_0 - 1$ k $i = 0$. V takom prípade je možné $v = \max_{i+1 \le k \le i_0} v_k$ spočítať z v pre hodnotu i o 1 väčšiu v konštantnom čase. Hodnota poľa $A[N, 250]$ je hľadanou minimálnou možnou šírkou skrine.

Ak chceme zároveň nájsť aj rozmiestnenie kníh do skrine a výšky jednotlivých poličiek, zavedieme si ešte pomocné pole $B[i,j]$, $0 \le i \le N, 1 \le j \le V$ a pri výpočte hodnoty $A[i_0,j_0]$ si do položky $B[i_0,j_0]$ uložíme to i, pre ktoré je šírka skrine minimálna pri výške j_0. Z hodnoty $B[N, 250]$ určíme počet kníh, ktoré sú v optimálnom riešení na poslednej poličke; táto hodnota nám umožní spočítať výšku skrine bez poslednej poličky a počet kníh v ostatných poličkách dohromady. Z príslušnej hodnoty v poli B určíme počet kníh na predposlednej poličke a takto postupujme, až kým nedosiahneme prvú poličku. Vzhľadom na veľkosť poľa A je časová zložitosť práve popísaného algoritmu $O(VN^2)$ a pamäťová zložitosť $O(VN)$.

Teraz popíšeme druhé možné riešenie. Najprv ukážeme, ako sa dá v čase $O(N^2)$ rozhodnúť, či sa dajú knihy umiestniť do skrine šírky s a výšky V. K tomu si vytvoríme pomocné pole $A[i]$, $0 \le i \le N$, ktoré obsahuje minimálnu výšku skrine šírky s, do ktorej je možné umiestiť prvých i kníh. Ak $A[N] > V$, tak sa knihy nedajú umiestiť do skrine šírky s a výšky V; v opačnom prípade sa umiestniť do skrine s týmito rozmery dajú. Na určenie hodnôt v poli A opäť použijeme dynamické programovanie. Hodnota $A[0]$ je 1 cm, čo je špeciálny prípad všeobecného vzťahu pre výšku skrine "súčet výšiek poličiek + + (počet poličiek + 1) × 1 cm". Popíšeme, ako určiť hodnotu $A[i_0]$, ak poznáme hodnoty $A[i]$ pre $0 \le i < i_0$. Zvoľme $i_0 - s \le i < i_0$; na poslednú poličku chceme umiestiť v takomto prípade posledných $i_0 - i$ kníh (preto podmienka $i_0 - s \le i$). Výška skrine je potom $A[i] + 1 + \max_{i<k\le i_0} v_k$; najmenší z týchto výrazov pre i, $i_0 - s \le i < i_0$ je hľadaná hodnota $A[i_0]$. Hodnotu $A[i_0]$ možno spočítať v čase $O(N)$, ak budeme postupovať od $i = i_0 - 1$ k $i = i_0 - s$ (potom je možné spočítať $\max_{i<k\le i_0} v_k$ z hodnoty pre $i + 1$ v konštantnom čase). Popísaná procedúra v čase $O(N^2)$ s pamäťou $O(N)$ rozhodne, či sa zadaných N kníh dá umiestiť do skrine šírky s a výšky V.

Zostáva popísať, ako sa dá táto procedúra použiť na vyriešenie pôvodnej úlohy. Najprv skontrolujeme, že výška všetkých kníh je najviac $V - 2$ cm $= 248$ cm a teda že knihy sa vôbec dajú umiestiť do nejakej skrine výšky V. Na určenie minimálnej šírky skrine s_0 použijeme metódu nazývanú binárne vyhľadávanie. Budeme si udržovať dve premenné $s_1 \le s_2$, ktoré nám budú ohraničovať možný interval, v ktorom je hľadaná šírka s_0, t.j., $s_1 \le s_0 \le s_2$. Najprv položíme $s_1 = 1$ a $s_2 = N$. V každom kroku zvolíme $s = = \lfloor (s_1 + s_2)/2 \rfloor$ a pomocou vyššie popísanej procedúry skontrolujeme, či sa dá umiestniť našich N kníh do skrine výšky V a šírky s. Ak sa knihy dajú do takej skrine umiestiť, priradíme do s_2 hodnotu s; v opačnom prípade priradíme do s_1 hodnotu $s+1$. Celý postup opakujeme, kým sa hodnoty s_1 a s_2 líšia, t.j. až kým nenájdeme hľadanú hodnotu s_0. Všimnite si, že v každom kroku sa rozdiel $s_2 - s_1$ zmenší aspoň o 1 (ak by sme pri voľbe s použili hornú celú časť namiesto dolnej celej časti, nebolo by toto tvrdenie pravdivé) a tento rozdiel se zmenší zhruba na polovicu. Teda po $O(\log N)$ krokoch nájdeme hľadanú optimálnu šírku skrine s_0. Výšky poličiek a rozmiestnenie kníh je možné nájsť podobne ako v predchádzajúcom algoritme zavedením pomocného poľa B, do ktorého si budeme ukladať počet kníh na poslednej poličke v optimálnom riešení. Celková časová zložitosť práve popísaného algoritmu je teda $O(N^2 \log N)$ a pamäťová zložitosť je $O(N)$.

Zostáva vyriešiť otázku, ktorý z dvoch popísaných algoritmov je lepší. Odpoveď je, že ani jeden. Vzhľadom k zadaniu úlohy, kde V je obmedzené, je časová zložitosť prvého algoritmu síce $O(N^2)$ a pamäťová iba $O(N)$, ale multiplikatívna konštanta skrytá vo "veľkom O" je lineárna s V; na druhej strane pamäťová zložitosť druhého algoritmu je iba $O(N)$, kde multiplikatívna konštanta nezáví od výšky. Podľa vyššie popísaného postupu druhý algoritmus potrebuje polia, ktoré sú 250-krát menšie. Rovnako v časovej zložitosti bude člen $\log N$ menší ako člen V vyskytujúci sa v časovej zložitosti prvého algoritmu. Prvý algoritmus je teda asymptoticky lepší pre obmedzenú výšku V, ale v skutočnosti bude lepší ako druhý popísaný algoritmus až pre veľmi veľké hodnoty N. Dá sa teda povedať, že druhý algoritmus je použiteľnejší.

P – I – 3

Poznáme posledný stĺpec zotriedenej tabuľky. Základná myšlienka celého riešenia spočíva v tom, že tým je jednoznačne určený aj prvý stĺpec – stačí zoradiť písmená posledného stĺpca podľa abecedy. Teraz využijeme to, že jednotlivé riadky vznikli rotáciou pôvodného reťazca. Teda ak je na začiatku niektorého riadku písmeno x a na jeho konci písmeno y, znamená to, že v pôvodnom reťazci bolo písmeno x tesne za písmenom y. ("Tesne za" berieme cyklicky, t.j. prvé písmeno reťazca je tesne za posledným.) Keďže každé písmeno sa v reťazci vyskytuje najviac raz, je n riadkami tabuľky určené poradie písmen v celom reťazci, až na rotáciu. Naviac vieme, v ktorom riadku sa nachádza naše slovo, odkiaľ vieme jeho prvé písmeno.

Zostrojiť algoritmus podľa tejto myšlienky je už jednoduché. Písmená zadaného reťazca si zoradíme podľa abecedy (keďže sú z obmedzeného rozsahu, vieme to spraviť v lineárnom čase) a vyrobíme si tabuľku, v ktorej bude každému písmenu reťazca priradené to, ktoré nasleduje v reťazci tesne za ním. Potom začneme od písmena, o ktorom vieme, že je prvé a postupujeme od neho podľa tabuľky až kým nevypíšeme celý reťazec.

Časová aj pamäťová zložitosť tohoto algoritmu sú zjavne lineárne od dĺžky vstupu.

P – 1 – 4

Najjednoduchšie riešenie je prejsť pole prvok po prvku, avšak takéto riešenie je pomerne pomalé a nijakým spôsobom nevyužíva, že je pole zotriedené. Ponúka sa nám myšlienka binárneho vyhľadávania. Skúsime teda spraviť jeho reverzibilnú verziu. Binárne vyhľadávanie býva tradične implementované ako while-cyklus. Takýto cyklus však nemáme k dispozícii, preto si budeme musieť pomôcť rekurziou.

Zavedieme si podprocedúru `Hladaj(var l,p : word)`, ktorá bude hľadať hodnotu `co` v úseku `X[l]`, `X[l+1]` až `X[p]` a výsledok pripočíta k premennej `kde`. Bude fungovať tak, že najskôr si spočíta pozíciu `m` prostredného prvku zadaného úseku (ak má úsek párnu dĺžku, zaokrúhlime nadol) a podľa hodnoty príslušného prvku zistí, v ktorej polovici úseku má hľadanie pokračovať: ak `X[m]`<`co`, tak od `m`+1 po `p`, ak `X[m]`>`co`, tak od `l` po `m`-1. Na tento úsek sa rekurzívne zavoláme. Po návrate z rekurzie nesmieme zabudnúť `m` vynulovať.

Ak niekedy nastane pri porovnávaní rovnosť, práve sme hodnotu `co` našli, pripočítame `m` ku `kde` a už sa hlbšie nevnárame. Ak dospejeme v rekurzii k úseku nulovej dĺžky (`r`<`l`), hodnota `co` sa v poli nenachádza, preto sa už len vynoríme z rekurzie bez toho, aby sme menili obsah premennej `kde`.

Podľa tohoto algoritmu už ľahko napíšeme program, kvôli prehľadnejšiemu zápisu používame príkaz `wrap`. Z takto zapísaného programu je zjavná jeho reverzibilnosť.

Vždy, keď sa v rekurzii vnoríme o úroveň hlbšie, zmenší sa prehľadávaný úsek na polovicu, takže po najviac $\log_2 n$ volaniach hľadanú hodnotu buď nájdeme, alebo zistíme, že v poli nie je. Na každé vnorenie spotrebujeme konštantne veľa pamäte. Preto časová aj pamäťová zložitosť je $O(\log n)$, čiže logaritmická.

procedure *Najdi*(**var** n : *word*; **var** X : **array** [1..n] **of** *word*; **var** co, kde : *word*);
var *one* : *word*;

  procedure *Hladaj*(**var** l, r : *word*);
  var m : *word*;

```
  begin
    if l <= r then                                  { úsek nie je prázdny }
      wrap m += (l + r) div 2                       { spočítame stred }
      on
        if X[m] = co then                           { našli sme }
          kde += m
        else
          if X[m] < co then begin                   { postúpime do pravého úseku }
            wrap m += 1 on Hladaj(m, r)
          end else begin                            { do ľavého }
            wrap m -= 1 on Hladaj(l, m)
          end
  end;

begin
  wrap one += 1
  on Hladaj(one, n)
end;
```

P – II – 1

Riešenie tejto úlohy môžeme rozdeliť na dve časti. Najskôr si spočítame, kde sa musí nachádzať stred symetrie, potom overíme, či sú naozaj hviezdy rozmiestnené stredovo súmerne okolo neho.

Potenciálny stred symetrie nájdeme ľahko. Všimnime si dve hviezdy $A[a_x, a_y, a_z]$ a $B[b_x, b_y, b_z]$, ktoré sú stredovo súmerné okolo bodu $S[s_x, s_y, s_z]$. Potom súradnice bodu S sú zjavne priemerom súradníc bodov A a B. Alebo inými slovami $A + B = [a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z] = 2S$. Takže ak sú všetky body rozmiestnené stredovo súmerne okolo bodu S, ich sčítaním dostaneme N-násobok bodu S, t.j. $[Ns_x, Ns_y, Ns_z]$. Odtiaľ už ľahko spočítame súradnice (jediného možného) bodu S. Kandidáta na bod S vieme teda nájsť v čase $O(N)$. *(Uvedomte si, že z fyzikálneho hľadiska tento bod musí ležať v ťažisku sústavy, no a súradnice ťažiska množiny hmotných bodov dostaneme práve ako priemer súradníc týchto bodov.)*

Zostáva overiť, či sú hviezdy naozaj rozmiestnené stredovo súmerne okolo bodu, ktorý sme práve našli. Aby sme to vedeli rýchlejšie overiť, hviezdy si utriedime lexikograficky podľa ich súradníc, t.j. tak, že $[a_x, a_y, a_z]$ je pred $[b_x, b_y, b_z]$ ak buď $a_x < b_x$, alebo $a_x = b_x \wedge a_y < b_y$, alebo $a_x = b_x \wedge a_y = b_y \wedge a_z < b_z$. Keď teraz vieme súradnice nejakej hviezdy a stredu súmernosti, vieme ľahko spočítať, na akých súradniciach má ležať hviezda s našou súmerná. Následne vieme binárnym vyhľadávaním v čase $O(\log N)$ zistiť, či takúto hviezdu máme. Ak áno, obe si označíme ako spracované a pokračujeme ďalšou nespracovanou hviezdou.

Vhodnou implementáciou predchádzajúcich myšlienok (s použitím triedenia bežiaceho v čase $O(N \log N)$, my sme použili HeapSort) dostávame algoritmus bežiaci v čase $O(N \log N)$. Toto riešenie sa ešte dá trochu zjednodušiť. Stačí si uvedomiť nasledovnú skutočnosť: Všimnime si utriedené poradie hviezd. Ak sú všetky hviezdy naozaj rozmiestnené stredovo súmerne okolo S, tak prvá hviezda musí nutne ležať oproti poslednej, druhá oproti predposlednej, atď. Takže aby sme overili, či je naozaj S stredom súmernosti, stačí nám raz prejsť utriedené pole. To vieme spraviť v čase $O(N)$. Najpomalšou časťou nášho algoritmu však zostane triedenie hviezd, ktoré nevieme spraviť v lepšom čase ako $O(N \log N)$. Taká je preto aj výsledná časová zložitosť nášho algoritmu.

P – II – 2

Zahľaďme sa na skriňu, ktorá je riešením úlohy. Zjavne môžeme medzi sebou povymieňať poličky tak, aby boli usporiadané podľa výšky (najvyššia bude hore). Teraz ak máme nejaké dve knihy na rôznych poličkách, pričom kniha na nižšej poličke je vyššia, môžeme túto dvojicu kníh vymeniť. (Vyššia kniha sa zmestila do svojej police, tým skôr sa zmestí do vyššie položenej police, ktorá je aspoň tak isto vysoká. Nižšia kniha sa do novej police zmestí, lebo sa do nej predtým zmestila vyššia kniha.) Konečnou postupnosťou takýchto výmen dostaneme skriňu, ktorá je tiež riešením úlohy a zároveň platí, že na prvej poličke je niekoľko najvyšších kníh, na druhej niekoľko ďalších najvyšších, atď.

Teraz môžeme knihy na každej polici usporiadať podľa výšky. Opäť dostaneme rovnako širokú skriňu, ktorá bude naďalej spĺňať podmienky zo zadania. Nájdime si teraz najvyššiu policu, ktorá nie je plná, t.j. je na nej menej kníh ako je jej šírka. Ak sú ešte nižšie v skrini nejaké ďalšie knihy, môžeme zobrať najvyššiu z nich a presunúť ju na koniec tejto police. Tento postup budeme opäť opakovať, kým to pôjde. Ak nám pri jeho opakovaní niekedy vznikne prázdna polica, môžeme ju z našej skrine vyhodiť.

V predchádzajúcich odsekoch sme vlastne ukázali, že ak existuje vyhovujúca skriňa so šírkou s, tak existuje aj taká, v ktorej sú knihy zhora nadol usporiadané podľa výšky a navyše sú všetky poličky až na možno poslednú plné (je na nich po s kníh). Ak teda chceme zistiť, či existuje nejaká skriňa šírky s, stačí nám hľadať takú skriňu, ktorá bude mať nami spomenuté vlastnosti.

Základom nášho algoritmu bude funkcia, ktorá pre dané s rozhodne, či existuje skriňa šírky s, vyhovujúca zadaniu a našim podmienkam. Optimálnu šírku skrine potom nájdeme binárnym vyhľadávaním (šírka 0 nestačí, šírka N určite stačí). Samotná funkcia spočíta najmenšie možné výšky jednotlivých poličiek (výška i-tej poličky bude o 1 väčšia ako výška $(s(i-1)+1)$. najvyššej knihy) a zistí, či dokopy vôjdu do 250 cm.

Odhadnime teraz časové a pamäťové nároky nášho algoritmu. Na začiatku potrebujeme zotriediť výšky N kníh. To vieme spraviť v čase $O(N \log N)$, prípadne ak predpokladáme, že sú to celé čísla (navyše zhora ohraničené 250), vieme ich utriediť v čase $O(N)$. Keď zavoláme funkciu, ktorá zisťuje, či existuje skriňa šírky s, bude potrebovať čas $O(N/s)$, lebo musí sčítať $\lceil N/s \rceil$ čísel. Túto funkciu budeme volať $O(\log N)$-krát, preto časová zložitosť nášho algoritmu je $O(N \log N)$.

Dokonca ak si uvedomíme, že pri i-tom volaní našej funkcie bude šírka skrine aspoň $N/2^i$, a teda i-te volanie bude trvať najviac $O(2^i)$, nahliadneme, že celkový čas, ktorý zaberú všetky volania našej funkcie, bude dokonca len $O(N)$. Pamäťové nároky sú zjavne lineárne, t.j. $O(N)$.

P – II – 3

Použijeme podobnú myšlienku ako pri riešení úlohy v domácom kole. (Vieme posledný stĺpec tabuľky, jeho utriedením dostaneme prvý stĺpec, v hľadanom reťazci za posledným písmenom ľub. riadku tabuľky nasleduje prvé písmeno z toho istého jej riadku.) Jediný rozdiel je ten, že keď sa môžu písmená opakovať, nemusíme vedieť na prvý pohľad určiť, ako po sebe písmená nasledujú. Napr. pre tabuľku zo zadania nevieme hneď povedať, po ktorom 'a' má ísť 'b', po ktorom 'k' a po ktorom 'a'.

Spravme teraz nasledujúcu úvahu: Keďže vieme, v ktorom riadku tabuľky leží naše slovo, vieme jeho prvé písmeno c_1. Toto písmeno sa môže v prvom stĺpci vyskytovať viackrát, nech sú príslušné riadky (zhora nadol) $c_1v_1, c_1v_2, \ldots, c_1v_k$. Potom ale $v_1 < v_2 < \ldots < v_k$, a teda aj $v_1c_1 < v_2c_1 < \ldots < v_kc_1$. To sú ale práve všetky riadky, ktoré *končia* znakom c_1. Nech je náš riadok i-ty zhora spomedzi riadkov začínajúcich na c_1. Práve sme ukázali, že presunutím c_1 na koniec dostaneme i-ty riadok zhora spomedzi tých, ktoré končia na c_1. Prvé písmeno tohto riadku je zároveň druhým písmenom slova, ktoré hľadáme. Označíme ho c_2 a túto úvahu opakujeme, kým takto nezostrojíme celé hľadané slovo.

Implementácia je pomerne jednoduchá. Písmená v poslednom stĺpci očíslujeme od 1 po N. Použijeme priehradkové triedenie (viď program), aby sme zistili prvý stĺpec tabuľky v lineárnom čase. Písmená zotriedime podľa abecedy, v prípade rovnosti podľa čísla, ktoré dostali. Následne hľadané slovo zostrojíme priamočiarym prechodom riadkami podľa vyššie uvedeného algoritmu. Náš program spočíta len indexy písmen v prvom stĺpci, samotné písmená z nich ľahko vieme určiť. Časová aj pamäťová zložitosť nášho riešenia sú lineárne od počtu písmen slova.

V príklade zo zadania zotriedením $k_1a_2r_3a_4a_5b_6$ dostaneme $a_2a_4a_5b_6k_1r_3$. Slovo leží v 2. riadku, teda prvý znak je a_4. Riadok končiaci a_4 začína b_6, to je teda druhý znak. Riadok končiaci b_6 začína r_3, atď.

P – II – 4

Podobnosť úlohy s hľadaním dĺžky najkratšej cesty v orientovanom grafe nie je čisto náhodná. Preto sa aj my budeme držať tejto analógie. Miestnosti v inštitúcii budú vrcholmi nášho grafu, potrubia orientovanými hranami. Potom A nie je nič iné ako matica susednosti tohto grafu. Štandardným algoritmom na riešenie danej úlohy je prehľadávanie do šírky, len ho musíme upraviť, aby bolo reverzibilné.

Vrcholy si rozdelíme do *vrstiev*, pričom do vrstvy W_i budú patriť tie vrcholy, do ktorých je z vrcholu 1 vzdialenosť i (t.j. použitím žiadnych $i-1$ rúr tam správu nevieme dostať, použitím vhodných i rúr ju tam dostať vieme). Neprázdnych vrstiev je zjavne najviac N a vieme ich ľahko zostrojiť indukciou – $W_0 = \{1\}$, do W_i patria tie vrcholy, ktoré doteraz nie sú v žiadnej vrstve a vedie do nich hrana z nejakého vrcholu v W_{i-1}. (Vďaka tejto hrane doň existuje cesta dĺžky i, keby existovala aj kratšia, patril by tento vrchol do niektorej už spočítanej vrstvy.)

Práve opísaný postup zostrojenia vrstiev je zjavne reverzibilný – pri konštrukcii novej vrstvy nijako nemeníme už spočítané vrstvy. Nakoniec nájdeme číslo vrstvy, v ktorej leží vrchol N, pripočítame jej číslo k výstupnej premennej a všetky informácie o vrstvách opäť odpočítame. (Na to je vhodná konštrukcia *wrap … on …*) Priamočiara implementácia tohoto riešenia má časovú zložitosť $O(N^3)$ a pamäťovú $O(N^2)$.

Pamäťovú zložitosť vieme ešte zlepšiť (a dokonca sa tým náš program aj zefektívni) nasledovne: Vrstvy si vieme pamätať efektívnejšie, lebo vo všetkých vrstvách dokopy je najviac N vrcholov. Tie budeme postupne ukladať do poľa V a budeme mať pomocné pole S, ktoré nám bude hovoriť, kde v poli V ktorá vrstva začína. Vrcholy vrstvy W_i teda budú uložené v prvkoch $V[S[i]]$ až $V[S[i+1]-1]$.

Všimnite si, že reverzibilita programu sa príliš nekamaráti so značkovaním vrcholov (na aké sme zvyknutí pri "klasickom" prehľadávaní do šírky). Povedzme že by sme si pre každý vrchol pamätali, či sme v ňom už boli. Značkovanie bude vyzerať približne takto:

```
if UzSomTamBol[i]=0 then begin {objavil som novy vrchol}
  UzSomTamBol[i] += 1; ...;
end;
```

Tu sa ale dostávame do sporu s reverzibilitou – po vykonaní príkazu if totiž nevieme povedať, či bola podmienka splnená, alebo nie, lebo $UzSomTamBol[i]$ bude vždy 1. Ale presne toto náš jazyk zakazuje!

Zachráni nás jednoduchý trik: Ako značku budeme používať číslo vrstvy, ktorej bol vrchol objavený (alebo *inf* – dosť veľké číslo, ak sme tam ešte neboli). Značkovanie teda bude vyzerať nasledovne:

```
if Znacka[i] >= TatoVrstva then begin {objavil som novy vrchol}
  Znacka[i] -= inf - TatoVrstva; ...;
end;
```

To už je korektné, lebo vykonaním príkazu if sa platnosť podmienky nezmení. Zároveň to aj funguje – pri spracovaní ďalších vrstiev správne spoznáme už označkované vrcholy.

Zostáva už len dodať, že časová zložitosť výsledného algoritmu je kvadratická a pamäťová lineárna.

Poznámka Ak by sme sa vzdali polynomiálnej časovej zložitosti, existovali by aj pamäťovo efektívnejšie riešenia. Jedno je založené na nasledovnej myšlienke: Hľadáme cestu dĺžky najviac l z x do y. Ak $l \leq 1$, je to triviálne. V opačnom prípade vyskúšame postupne všetky možnosti, kde sme sa mohli nachádzať v približnej polovici cesty. Pre každý vrchol v rekurzívne overíme, či sa vieme na najviac $\lfloor l/2 \rfloor$ krokov dostať z x do v a či sa vieme na najviac $\lceil l/2 \rceil$ krokov dostať z v do y. Ak takýto vrchol nájdeme, vlastne sme zistili, že existuje cesta z x do y dĺžky najviac l, naopak ak takýto vrchol v nenájdeme, zjavne žiadna takáto cesta neexistuje. Postupne napr. binárnym vyhľadávaním nájdeme najmenšie l, pre ktoré existuje cesta tejto dĺžky. Takto dostaneme pamäťovú zložitosť $O(\log N)$, ale časová sa nám zhorší na $O(N^{\log N})$.

procedure *Skumaj*(**var** *n* : *word*; **var** *A* : **array** [1..*n*] **of array** [1..*n*] **of** *bit*; **var** *d* :
: *word*);
var *inf*, *cnt* : *word*;
var *L*, *V*, *S* : **array** [0..*n*] **of** *word*;

```
begin
  wrap begin
    inf += n + 47;                               { „nekonečná vzdialenosť“ }
    for var i = 1 to n do L[i] += inf;
    V[0] += 1;                                   { nultá vrstva: vrchol 1 ... }
    L[x] -= inf;                                 { ... vo vzdialenosti 0 ... }
    S[1] += 1;                                   { ... a žiadny ďalší }
    for var i = 1 to n − 1 do begin              { hľadáme ďalšie vrstvy }
      S[i + 1] += S[i];                          { zatiaľ prázdna }
      for var w = 1 to n do
        if L[w] >= i then                        { nezaradený vrchol }
          wrap
            for var j = S[i − 1] to S[i] − 1 do  { vedie do neho hrana z vrstvy i-1? }
              if A[V[j]][w] = 1 then
                cnt += 1;
          on if cnt > 0 then begin               { áno ⇒ pridať do i-tej vrstvy }
            V[S[i + 1]] += w;
            S[i + 1] += 1;
            L[w] -= inf − i;                     { L[w] ≥ i stále platí }
            end
      end
    end
  on if L[N] > 0 then d += L[N];                 { vrátime výsledok }
end;
```

P – III – 1

Pri riešení úlohy si najskôr uvedomíme, že zo zadaných čísel hračiek môžeme jednoducho zistiť, ktoré dieťa chce hračku po ktorom dieťati. Situáciu si predstavíme ako orientovaný graf, v ktorom vrcholy zodpovedajú deťom a z vrcholu i vedie hrana do vrcholu j, ak dieťa i chce hračku po dieťati j. Pretože dieťa je ochotné vymeniť hračku iba ak dostane tú svoju vytúženú, deti si môžu vymieňať hračky iba v cykloch – aby sa dieťa i_1 vzdalo svojej hračky, musí dostať hračku od i_2, to od i_3 a tak ďalej, až nejaké dieťa dostane hračku od i_1. Chceme teda nájsť v grafe množinu disjunktných cyklov (na zjednodušenie vyjadrovania budeme za cyklus považovať aj vrchol so slučkou), ktoré spolu obsahujú čo najviac vrcholov. Hľadanie týchto cyklov je uľahčené tým, že každé dva cykly v našom grafe sú disjunktné – keby nejaké dva cykly mali spoločný vrchol, museli by sa niekde tiež od seba oddeľovať. Z príslušného vrcholu by teda museli viesť dve hrany, čo ale v našom grafe nie je možné. Keďže sú cykly navzájom disjunktné, chceme vlastne vypísať všetky cykly.

A teraz ako budeme cykly hľadať: Začneme v ľubovoľnom vrchole (napríklad v prvom) a pôjdeme po hranách (z každého vrcholu vedie práve jedna hrana, takže postup je jednoznačný), až kým sa nevrátime do nejakého vrcholu, v ktorom sme už boli (to spoznáme jednoducho, ak si budeme označovať navštívené vrcholy). Tým sme v grafe našli cyklus, ten môžeme vypísať a jeho vrcholy označiť za vyriešené. Vrcholy, ktoré sme prešli predtým, ako sme sa dostali na cyklus, pre zmenu určite na žiadnom cykle neležia (inak by z niektorého vrcholu museli viesť aspoň dve hrany). Preto sa týmito vrcholmi už nikdy nemusíme zaoberať a môžeme ich tiež označiť za vyriešené. Teraz vezmeme ďalší zatiaľ nevyriešený vrchol a opäť sa z neho vydáme hľadať cyklus. Ak narazíme na nejaký už vyriešený vrchol, hľadanie ukončíme a prejdené vrcholy označíme ako vyriešené – zjavne totiž nemôžu ležať na žiadnom cykle. Keď už nezostane žiadny nevyriešený vrchol, máme nájdené všetky cykly a výpočet ukončíme. Jediným nevyriešeným problémom zostáva, ako rýchlo hľadať zatiaľ nevyriešené vrcholy. To môžeme spraviť tak, že pri hľadaní ďalšieho nevyriešeného vrcholu začneme hľadať od posledne nájdeného vrcholu (pred ním isto žiadne nevyriešené vrcholy už nie sú). Vďaka tomu s hľadaním vrcholov strávime spolu čas $O(N)$ a pretože na nájdenie cyklov potrebujeme spolu tiež $O(N)$ (každú hranu prejdeme najviac raz), je celková časová zložitosť $O(N)$. Pamäťová zložitosť je tiež $O(N)$.

P – III – 2

Základom nášho riešenia bude funkcia `existuje(s:integer)`, ktorá pre zadanú šírku s rozhodne, či existuje skriňa tejto šírky s P poličkami, do ktorej je možné umiestniť všetkých N kníh. Optimálnu šírku skrine s_0 potom môžeme nájsť binárnym vyhľadávaním pomocou $O(\log\sum_{i=1}^N h_i)$ volaní funkcie `existuje(s:integer)`, lebo zrejme šírka skrine bude nanajvýš rovná súčtu hrúbok všetkých kníh, $\sum_{i=1}^N h_i$. Poznamenajme, že ak by platilo $\log\sum_{i=1}^N h_i > N^2$ (čo ale vďaka obmedzeniu na hrúbku kníh nie je práve náš prípad), bolo by výhodnejšie spočítať $O(N^2)$ súčtov hrúbok i-tej až j-tej knihy ($i \le \le j$), utriediť ich (na to potrebujeme čas $O(N^2\log N)$), a potom hľadať optimálnu šírku knižnice iba medzi týmito súčtami binárnym vyhľadávaním.[1]

Samotná funkcia `existuje` bude fungovať nasledovne: Pre zadané s nájde najväčšie i_1 také, že $\sum_{i=1}^{i_1} h_i \le s$; je jasné, že i_1 je maximálny možný počet kníh, ktoré sa dajú umiestniť do prvej poličky. Potom nájdeme najväčšie i_2 také, že $\sum_{i=i_1+1}^{i_2} h_i \le s$, teda najväčší možný počet kníh i_2, ktoré sa dajú umiestniť do prvých dvoch poličiek, atď. Ak sa nám podarí umiestniť všetky knihy, t.j. $i_P = N$, tak existuje skriňa šírky s, do ktorej sa dajú všetky knihy uložiť; v opačnom prípade taká skriňa zjavne neexistuje.

Zostáva domyslieť, ako rýchlo hľadať čísla i_k, $1 \le k \le P$, vo funkcii `existuje`. Na to si najprv vytvoríme pomocné pole, v ktorom budú uložené súčty hrúbok prvých j kníh pre $1 \le j \le N$. Pri počítaní hodnoty i_k binárnym vyhľadávaním nájdeme v tomto pomocnom poli najväčšie číslo i' také, že $\sum_{i=1}^{i'} h_i - \sum_{i=1}^{i_{k-1}} h_i \le s$; zjavne i' je hľadaná hodnota i_k.

Teraz odhadnime časovú a pamäťovú zložitosť nášho algoritmu. Funkcia `existuje` vykoná P vyhľadávaní v poli veľkosti N, t.j. pracuje v čase $O(P\log N)$. Celkový čas výpočtu nášho programu je teda $O(N + P\log N\log\sum_{i=1}^N h_i)$; čas $O(N)$ spotrebujeme okrem načítania dát tiež na vytvorenie pomocného poľa popísaného v predchádzajúcom odstavci. Pamäťová zložitosť je $O(N)$ – pole veľkosti N potrebujeme na uloženie hrúbok

[1] Alebo ešte lepšie: na binárne vyhľadávanie nepotrebujeme mať súčty utriedené, stačí zakaždým nájsť medián hodnôt v prehľadávanom intervale.

jednotlivých kníh a rovnaká je aj veľkosť pomocného poľa.

P – III – 3

Najprv sa skúsme zamyslieť nad jednoduchou otázkou: vieme k číslu A reverzibilne pripočítať jednotku? A ak áno, čo takto dvojku? Alebo štvorku? Ak by sme totiž vedeli spraviť reverzibilne tieto operácie v slušnej pamäťovej zložitosti, bude už celá úloha vcelku jednoduchá – každé číslo B si totiž vieme napísať ako $B = \sum_{i=0}^{n-1} B[i] \cdot 2^i$, kde $B[i] \in \{0, 1\}$, takže stačí postupne k číslu A pripočítavať správne mocniny 2, a keďže tieto operácie podľa predpokladu vieme robiť reverzibilne, dostaneme hotové riešenie.

Pozrime sa teraz na prvý problém – ako k číslu A pripočítať jednotku? V normálnom (t.j. nie reverzibilnom) svete zvýšenie binárne zapísaného čísla o 1 vyzerá tak, že si od najnižšieho bitu nájdeme maximálny súvislý interval jednotiek, za ktorým nasleduje nula (takýto interval môže byť aj prázdny – ak je najnižší bit 0), a tento interval (vrátane nuly) po bitoch znegujeme.

V reverzibilnom svete môžeme použiť podobný postup, len mierne modifikovaný, aby sme dodržali všetky podmienky nášho jazyka. Samotné zvýšenie čísla budeme realizovať v dvoch krokoch:

- v cykle si v pomocnej premennej spočítame počet núl v zápise čísla A (to už je premenná typu *word*, ktorú vieme inkrementovať operáciou +=)
- v ďalšom cykle od najvyššieho bitu po najnižší si budeme toto počítadlo s každou nulou znižovať, t.j. ak je príslušný bit čísla A nulový, tak si počítadlo znížime o 1; navyše, ak má toto počítadlo hodnotu 0, znegujeme bit na aktuálnej pozícii

Všimnime si, že počítadlo nadobudne nulovú hodnotu práve na nule pred hľadaným intervalom, a teda celý interval vrátane nuly po bitoch znegujeme (negácia = xor 1).

Zrejme uvedená operácia je reverzibilná – používame len jednu pomocnú premennú, ktorá na konci bude vždy nulová, ostatné operácie – cyklus, inkrementácia/dekrementácia premennej, xor premennej – sú elementárne reverzibilné.

Ostatné problémy, t.j. zvýšenie A o 2^k pre $k > 0$, sú veľmi podobné – stačí si "zakryť" posledných k cifier binárneho zápisu čísla A, pretože tieto cifry sa určite nebudú meniť. V odokrytom zvyšku čísla už ide vlastne len o pripočítanie jednotky.

Vyriešením všetkých čiastkových problémov sme našli správne riešenie daného problému.

Zložitosť Odhad časovej, ale hlavne pamäťovej zložitosti uvedeného algoritmu prenechávame ako jednoduché cvičenie pre čitateľa.

procedure *Nasyp*(**var** n : *word*; **var** A : **array**$[0..n-1]$ **of** *bit*; **var** *from* : *word*);
var *nul* : *word*;
begin
  for var $i :=$ *from* **to** $n-1$ **do**
    if $A[i] = 0$ **then** *nul*$+= 1$;

```
  for var i := n − 1 downto from do
  begin
    if A[i] = 0 then nul− = 1;
    if nul = 0 then A[i]ˆ = 1;
  end;
end;

procedure Add(var n : word; var A, B : array[0..n − 1] of bit);
begin
  for var index := 0 to n − 1 do
    if B[index] = 1 then Nasyp(n, A, index);
end;
```

P – III – 4

Zadanie si najskôr preložíme do matematickej reči. Daný je konvexný N-uholník a M jeho nepretínajúcich sa tetív, ktoré ho delia na niekoľko dielov. Nájdite najväčší počet dielov, z ktorých žiadne dva nemajú spoločnú stranu.

Zostrojme graf G nasledovne: vrcholy budú diely mapy, dva vrcholy budú spojené hranou práve vtedy, ak príslušné diely majú spoločnú stranu. Graf G je zjavne súvislý. Keďže žiadne dve tetivy sa nepretínajú, rozdelia N-uholník na presne $M+1$ dielov, pričom každá tetiva oddeľuje od seba niektoré dva z nich. Preto G má $M+1$ vrcholov a M hrán.

Keďže G je súvislý, ľahko nahliadneme, že nemôže obsahovať žiadnu kružnicu – nemáme na to dosť hrán. Takémuto grafu (súvislému a neobsahujúcemu kružnicu) hovoríme strom. Našou úlohou je nájsť v našom strome najväčšiu nezávislú množinu vrcholov. (Množina vrcholov je nezávislá, ak žiadne dva vrcholy z nej nie sú spojené hranou. To je práve to, čo chceme dosiahnuť.) Naše riešenie bude využívať prehľadávanie do hĺbky. Na začiatku označíme všetky vrcholy ako vybrané. Začneme graf prehľadávať z ľubovoľného vrcholu. Keď sa počas prehľadávania vraciame z vrcholu, ktorý je označený ako vybraný, jeho otcovi (tomu vrcholu, kam sme sa vrátili) túto značku zrušíme.

Je zrejmé, že takto dostaneme nezávislú množinu vrcholov. Ale bude naozaj najväčšia? Ukážeme, že áno. Sporom. Nech A je množina, ktorú sme zostrojili, nech B je taká najväčšia nezávislá množina, ktorá má s A najviac vrcholov spoločných. Pozrime sa na vrcholy, v ktorých sa líšia a vyberme si z nich taký, ktorý je najďalej od vrcholu, z ktorého sme spustili prehľadávanie. Označme vybraný vrchol v. Rozoberme dva prípady.

Nech $v \in B$, $v \notin A$. Keďže v nepatrí do A, znamená to, že niektorý vrchol u, do ktorého sme prišli z v, leží v A. (Z A sme vrchol vyhodili len ak bol v A nejaký jeho syn, toho syna sme už neskôr z A vyhodiť nemohli.) Keďže v je najvzdialenejší vrchol, v ktorom sa A a B líšia, nemôžu sa líšiť v u. Preto $u \in B$. To je ale spor, lebo v B máme dva vrcholy u, v spojené hranou.

Preto nutne $v \in A$, $v \notin B$. Pridajme v do B. Keďže v je v A a na vrcholoch ďalej od v sa A a B zhodujú, nie je v B ani jeden zo synov vrcholu v. Preto jediný problém môže byť ak do B patrí otec vrcholu v. V takomto prípade otca vrcholu v z B vyhodíme. Takto sme z B dostali rovnako veľkú nezávislú množinu vrcholov, ktorá má ale s A spoločných viac vrcholov ako B. To je ale spor (s výberom B).

Iný pohľad: Spustením prehľadávania do hĺbky sme si náš strom "zakorenili". Vrchol, v ktorom sme začali prehľadávať, nazveme koreň. Zakorenený strom dostaneme tak, že zoberieme strom za koreň a zatrasieme. Vrcholy budú tým nižšie, čím sú ďalej od koreňa. Navyše z každého vrcholu pôjde práve jedna hrana dohora (tou sme doň počas prehľadávania prišli; vrchol na jej hornom konci voláme otcom vrcholu na dolnom konci). Predstavme si, že postupne spracúvame vrcholy oddola nahor, pričom pre každý chceme povedať, koľko najviac nezávislých vrcholov vieme nájsť na strome visiacom pod ním. Potom zjavne odpoveď pre koreň stromu je riešením úlohy.

Keď teraz spracúvame vrchol, vieme už odpoveď pre všetky vrcholy visiace pod ním. Pre najväčšiu množinu máme dve možnosti – buď spracúvaný vrchol vyberieme (a už nesmieme vybrať žiadneho jeho syna), alebo nie. Zjavne prvá možnosť sa oplatí ***iba*** *vtedy, ak v podstrome každého syna existuje najlepšie riešenie, v ktorom tento syn nie je vybraný. Inak dá totiž druhá možnosť aspoň tak dobré riešenie, ktoré je navyše o to lepšie, že práve spracovaný vrchol nie je vybraný. Vyššie popísané upravené prehľadávanie robí presne toto isté, len to robí už priamo počas prehľadávania.*

V našej úlohe zostrojiť vyššie popísaný graf G je zbytočná robota navyše. Ukážeme, ako ho prehľadať bez toho, aby sme ho museli najskôr explicitne zostrojiť. Orientujme každú tetivu tak, aby jej prvý koniec mal menšie číslo ako druhý. Pridajme k nim ako zarážku hranu z 1 do N. Keďže konce tetív sú čísla od 1 do N, vieme ich priehradkovým triedením (BucketSort, resp. CountSort) zoradiť podľa začiatočného vrcholu, tetivy s rovnakým začiatočným vrcholom zoradíme **klesajúco** podľa koncového. Teraz budeme prechádzať vrcholy mnohouholníka v poradí od 1 do N, pričom v zásobníku si udržiavame zoznam tetív, ktorých začiatok sme už prešli, ale koniec ešte nie. (Keďže tetivy sa nepretínajú, na ich konce naozaj narazíme v opačnom poradí ako na začiatky, preto je zásobník vhodná dátová štruktúra.)

Každá tetiva teraz zodpovedá jednému dielu mnohouholníka – pridaná zarážka zodpovedá dielu, v ktorom sme začali prehľadávať, každá iná leží medzi dvoma dielmi a odteraz bude zodpovedať tomu z nich, ktorý leží ďalej od začiatočného dielu. Pri každej tetive si budeme pamätať, či jej zodpovedajúci diel je ešte vybraný, alebo už nie. Spracovanie vrcholu mnohouholníka bude vyzerať nasledovne: Najskôr zo zásobníka postupne odstránime všetky tetivy, ktoré v ňom končia. Pritom ak diel zodpovedajúci odstraňovanej tetive máme stále označený ako vybraný, zvýšime si počet vybraných dielov a odznačíme tetivu, ktorá leží v zásobníku pod práve odstránenou. (Jej zodpovedajúci diel už nemôžeme vybrať.) Teraz postupne pridáme všetky tetivy, ktoré v tomto vrchole začínajú a pri každej z nich si zapamätáme, že jej zodpovedajúci diel je zatiaľ vybraný. Výpočet končí spracovaním N-tého vrcholu mnohouholníka.

Počas výpočtu raz spracujeme každý vrchol mnohouholníka. Každú tetivu raz vložíme do zásobníka a raz ju vyberieme. Keďže sa tetivy nepretínajú, je ich najviac $N-3$. Preto časová aj pamäťová zložitosť nášho algoritmu sú $O(N)$.

P – III – 5

Na riešenie úlohy zjavne potrebujeme vhodne upraviť niektorý triediaci algoritmus. Keďže chceme mať optimálnu časovú zložitosť, vyberieme si MergeSort, ktorý aj v najhoršom prípade potrebuje $O(N \log N)$ operácií (kde N je počet mincí). Daňou za to bude, že jeho implementácia nebude práve najjednoduchšia. Poznamenávame, že existuje viacero iných riešení tejto úlohy (založených na iných triediacich algoritmoch), asi najjednoduchšiu implementáciu má upravený QuickSort.[2]

Výstupom algoritmu bude (jednosmerný) spájaný zoznam, pričom každému prvku v ňom zodpovedá jedna váha mincí a tieto váhy tvoria rastúcu postupnosť. Na každom mieste v spájanom zozname si navyše budeme pamätať (neskôr upresníme ako) všetky mince príslušnej váhy.

Základom programu bude rekurzívna procedúra `Vytvor(prvy,posledny)`, ktorá zoberie mince od *prvy* po *posledny* a vytvorí z nich takýto spájaný zoznam. Ak *prvy* = = *posledny*, je to triviálne. Ak je mincí viac, procedúra tento interval rozdelí na dve približne rovnaké časti a na obe sa rekurzívne zavolá. Takto dostane dva spájané zoznamy, ktoré potrebuje spojiť do jedného.

Zoberme si prvé prvky oboch zoznamov. Každý z nich predstavuje množinu mincí s nejakou hmotnosťou. Tieto hmotnosti potrebujeme porovnať, aby sme vedeli, ktorý z týchto prvkov bude na začiatku výsledného zoznamu. **Vyberieme** teda z každej množiny jednu ľubovoľnú mincu a opýtame sa na ich váhy. Ak je ľahšia prvá, odstránime prvý prvok z prvého zoznamu a spravíme z neho prvý prvok výsledného zoznamu. Analogicky ak je ľahšia druhá minca. Ak sú váhy mincí rovnaké, odstránime prvé prvky z oboch spracúvaných zoznamov, príslušné množiny mincí **spojíme** a z výslednej množiny spravíme začiatok výsledného zoznamu.

Zvyšok oboch zoznamov spracujeme analogicky, teda vždy porovnáme váhy dvoch potenciálne najľahších množín a ľahšiu z nich vložíme na koniec hotovej časti výsledného zoznamu.

Ostáva vyriešiť, ako si pamätať množiny mincí, aby sme vedeli vyššie zvýraznené operácie robiť efektívne, t.j. v konštantnom čase. Jedno možné riešenie je použiť binárne stromy (nebudú musieť byť vyvážené). Prvky množiny (čísla mincí) si budeme pamätať v listoch stromu. V každom vnútornom vrchole si budeme pamätať to isté číslo, ako v ľubovoľnom z jeho synov. Takto keď chceme číslo niektorej mince v množine, stačí pozrieť na číslo v koreni stromu. Takisto spojiť dva stromy do jedného je triviálne – stačí pridať nový koreň, ktorého synmi budú pôvodné dva korene a uložiť doň hodnotu z jedného z nich.

V prvku spájaného zoznamu si budeme pamätať dva ukazovatele – jeden na nasledujúci prvok, jeden na koreň stromu, v ktorom si pamätáme príslušnú množinu mincí.

Na záver algoritmu len prejdeme postupne celý výsledný spájaný zoznam a každú množinu (listy každého stromu) vypíšeme na samostatný riadok. Ľahko nahliadneme, že ak budeme spájať stromy tak, že ako ľavý podstrom vždy zoberieme ten, v ktorom

[2] Vyberieme mincu-pivota, preusporiadame pole tak, aby v prvej časti boli ľahšie, v druhej rovnako ťažké a v tretej ťažšie mince a rekurzívne sa zavoláme na prvú a tretiu časť. Keď navyše použijeme randomizovanú verziu, t.j. pivota vyberáme náhodne, dostaneme očakávanú časovú zložitosť $O(N \log N)$.

sú menšie čísla mincí (a na záver vypíšeme listy stromu v poradí zľava doprava), budú vypísané čísla rovno utriedené.

Indukciou ukážme, že náš algoritmus nevolá funkciu `porovnaj` zbytočne. Procedúra `Vytvor` volá `porovnaj` len na mince z príslušného intervalu. Ak je tento interval jednoprvkový, tvrdenie triviálne platí. V opačnom prípade sa procedúra dvakrát rekurzívne zavolá a potom vytvorené dva zoznamy spojí do jedného. Z indukčného predpokladu pri rekurzívnych volaniach zbytočné volania nerobíme. Keď teraz spájame zoznamy do jedného, porovnávame vždy mince z rôznych dvoch zoznamov. Výsledok tohto váženia nemôže teda byť určený váženiami počas rekurzívnych volaní. Takisto ale nemôže byť určený ani predchádzajúcimi váženiami počas spájania týchto dvoch zoznamov – z tých vieme len toľko, že mince doteraz presunuté do výsledného zoznamu sú ľahšie od mincí v oboch práve porovnávaných množinách.

Hĺbka rekurzie pri volaní procedúry `Vytvor` je $O(\log N)$, lebo pri každom volaní sa dĺžka úseku, ktorý treba spracovať, zmenší približne na polovicu. Na spojenie dvoch zoznamov je potrebný čas úmerný dĺžke výsledného zoznamu, tú môžeme zhora odhadnúť počtom mincí v ňom. Na každej úrovni rekurzie sa každá minca vyskytuje v práve jednom zozname, preto celkový čas spotrebovaný volaniami procedúry `Vytvor` v jednej úrovni rekurzie je $O(N)$. Celková časová zložitosť je preto $O(N \log N)$. Z podobných argumentov (počas behu algoritmu je v každom okamihu každá minca v najviac 1 zozname) vyplýva, že pamäťová zložitosť nášho algoritmu je lineárna.

10. Stredoeurópska informatická olympiáda

Jubilejná desiata Stredoeurópska olympiáda v informatike (CEOI) sa konala v dňoch 5. až 12. júla 2003 v nemeckom Münsteri. Nemecko ako nová členská krajina organizovalo CEOI po prvýkrát, ale nedali sa zahanbiť. Ako po technickej, tak aj po organizačnej stránke bola táto CEOI výborne zvládnutá.

Slovensko tento rok reprezentovali Miroslav Baláž, Jakub Kováč (obaja z Gymnázia Jura Hronca v Bratislave), Peter Perešíni a Marek Ludha (obaja z Gymázia J. G. Tajovského v Banskej Bystrici). Pedagogický dozor a preklad úloh zabezpečili doc. RNDr. Gabriela Andrejková, CSc. z Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach a Michal Forišek z Fakulty matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislave.

Súťaž sa rovnako ako IOI skladala z dvoch súťažných dní. Každý deň súťažiaci riešili tri úlohy algoritmického charakteru. Tohtoročné úlohy boli trochu ľahšie ako v minulých rokoch, čo dokazuje aj skutočnosť, že absolútny víťaz Bartosz Walczak z Poľska získal plný počet bodov.

Pre všetkých našich súťažiacich to bola prvá medzinárodná skúsenosť, čo sa podpísalo aj na ich výsledkoch. Jediná bronzová medaila bola predsa len menej ako sme zvykli získať v minulých rokoch. Zostáva len dúfať, že získané skúsenosti členovia nášho mladého družstva úspešne použijú na ďalších súťažiach, ktoré ich ešte len čakajú.

Výsledky našich súťažiacich: Peter Perešíni získal 304 bodov zo 600 možných, obsadil 22. miesto a dostal zaň bronzovú medailu. Ostatní naši súťažiaci medaily nezískali, v oficiálnej výsledkovej listine bohužiaľ nie je uvedené ani ich poradie, ani počet bodov, ktoré získali.

V rámci sprievodného programu sme si obzreli historické centrum mesta Münster, navštívili sme pekný zámoček, ale aj v súčasnosti už odstavené železiarske závody, kde sme si mohli zblízka obzrieť vysokú pec.

Michal Forišek

Zadania úloh 10. Stredoeurópskej informatickej olympiády

Hanojské veže

Určite ste sa už stretli s úlohou o *Hanojských vežiach*. Na troch kolíkoch sú nasunuté drevené disky navzájom rôznych veľkostí. Na začiatku sú všetky nasunuté na jednom kolíku, usporiadané podľa veľkosti s najväčším na spodku. Úlohou je presunúť celú vežu na niektorý iný kolík. Ťah vyzerá tak, že z niektorého kolíku zoberieme vrchný disk a nasunieme ho na iný kolík. Nikdy nesmieme nasunúť väčší disk nad menší.

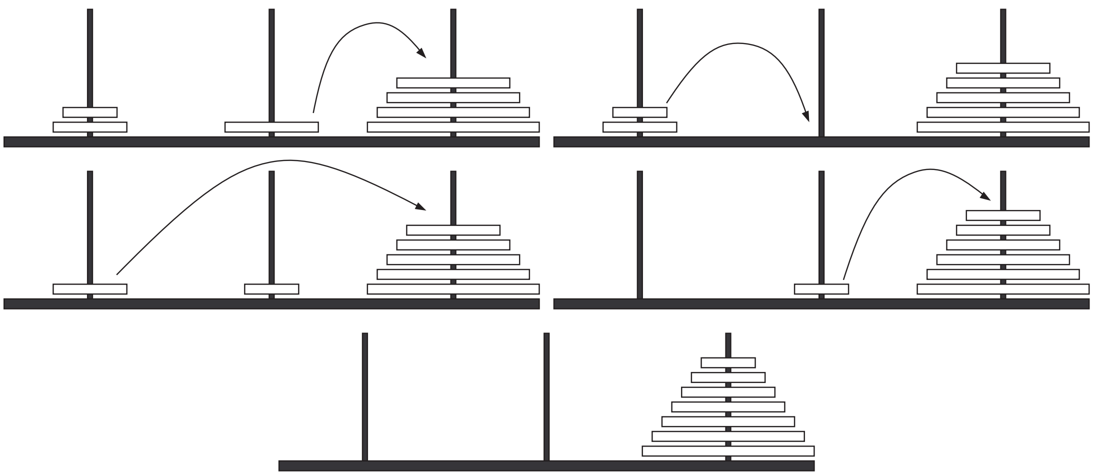
Podľa starého mýtu mnísi v starovekom tibetskom kláštore sa už tisíce rokov snažia vyriešiť tento hlavolam pre 47 diskov. Keďže na vyriešenie tejto úlohy treba aspoň $2^{47}-1$ ťahov a mnísi nepoznali optimálne riešenie, úplne to pošahali (aj keď samozrejme ťahali stále podľa pravidiel). Teraz by chceli všetko napraviť a dostať všetky disky na jeden ľubovoľný kolík (môže to byť aj ten, kde boli na začiatku). A to samozrejme na najmenší možný počet ťahov a stále dodržujúc pôvodné pravidlá. Potrebujú ale vedieť, na ktorý kolík majú disky presunúť a koľko ťahov budú potrebovať.

Súťažná úloha

Napíšte program, ktorý mníchom vyrieši ich problém. Váš program by mal vedieť riešiť úlohu pre rôzne počty a rozmiestnenia diskov. Samozrejme čísla objavujúce sa počas výpočtu by mohli byť veľmi veľké. Preto mníchom bude stačiť vedieť počet potrebných ťahov modulo 1 000 000.

Príklad

Nasledujúci príklad sa dá vyriešiť na 4 ťahy.



Obr. 44

Formát vstupu Prvý riadok vstupného súboru `hanoi.in` obsahuje počet diskov N ($0 < N \leq 100\,000$). V druhom riadku sú tri celé čísla s_1, s_2, s_3 ($0 \leq s_1, s_2, s_3 \leq N$, $s_1 + s_2 + s_3 = N$) – počty diskov na jednotlivých kolíkoch. V treťom až piatom riadku sú uvedené veľkosti diskov na jednotlivých kolíkoch. Presnejšie: v $(i+2)$. riadku sú celé čísla $m_{i,1}, \ldots, m_{i,s_i}$ ($1 \leq m_{i,j} \leq N$) predstavujúce veľkosti diskov na i-tom kolíku. Disky sú uvedené zdola nahor, teda $m_{i,1} > \ldots > m_{i,s_i}$. Na všetkých kolíkoch spolu je práve jeden disk každej z veľkostí od 1 do N. Všimnite si, že ak $s_i = 0$, príslušný riadok vstupného súboru bude prázdny.

Formát výstupu Prvý riadok výstupného súboru `hanoi.out` má obsahovať číslo $d \in \{1, 2, 3\}$ – číslo kolíka, na ktorý majú mnísi premiestniť všetky disky pri optimálnom riešení. Druhý riadok má obsahovať číslo M – minimálny počet potrebných presunov modulo 1 000 000.

Príklad

Súbor `hanoi.in`
```
7
2 1 4
2 1
3
7 6 5 4
```

Súbor `hanoi.out`
```
3
4
```

Testovacie dáta Váš program bude testovaný na 20 rôznych vstupoch rôznej náročnosti. Nasledujúca tabuľka obsahuje počty diskov v jednotlivých vstupných súboroch.

č. testu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	5	10	15	20	50	100	150	200	1000	2000	3000	4000

č. testu	13	14	15	16	17	18	19	20
N	30000	40000	50000	60000	70000	80000	90000	100000

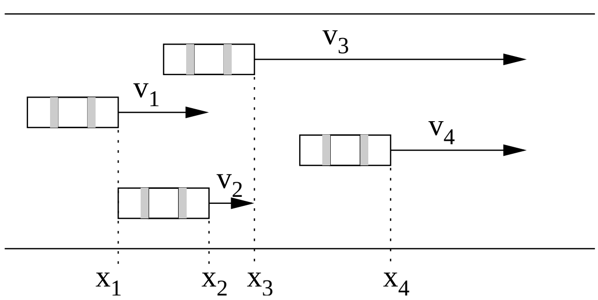
Preteky

Na 47. ročníku Každoročných Superrýchlych Pretekov bude súťažiť N vesmírnych lodí. Každá vesmírna loď je nastavená tak, aby vedela okamžite zrýchliť z nuly na svoju maximálnu rýchlosť a odvtedy sa touto rýchlosťou pohybovať. Podľa výsledkov kvalifikácie má každá vesmírna loď predpísanú štartovaciu pozíciu X_i – koľko kilometrov je vzdialená od štartovacej čiary.

Trať pretekov je nekonečne dlhá a kvôli vysokým rýchlostiam lodí má tvar priamky. Lode sa vedia predbiehať bez toho, aby si navzájom prekážali.

Mnoho divákov si ešte neuvedomilo, že výsledok pretekov je dopredu určený. Vašou úlohou je ukázať im to, a to tak, že zistíte, koľkokrát počas pretekov nejaká loď predbehne inú a predpovedať prvých 10 000 predbehnutí v poradí, v akom nastanú.

Môžete predpokladať, že štartovacie pozície lodí sú navzájom rôzne a že v žiadnom okamihu nebudú na tej istej pozícii viac ako 2 lode.



Obr. 45

Formát vstupu Prvý riadok vstupného súboru `therace.in` obsahuje jedno celé číslo N ($0 < N \leq 250\,000$) – počet vesmírnych lodí. V ďalších N riadkoch sú popísané vlastnosti jednotlivých lodí. Každý z nich obsahuje dve celé čísla X_i a V_i ($0 \leq X_i \leq 1\,000\,000$, $0 < V_i < 100$), ktoré predstavujú začiatočnú pozíciu a rýchlosť i-tej lode. Lode sú usporiadané podľa začiatočnej pozície, t.j. $X_1 < X_2 < \ldots < X_N$. Začiatočná pozícia je počet kilometrov za štartom, rýchlosť je daná v kilometroch za sekundu.

Formát výstupu Prvý riadok výstupného súboru `therace.out` má obsahovať počet predbehnutí, ktoré počas pretekov nastanú, **modulo 1 000 000**.[3]

Každý z nasledujúcich riadkov má popisovať jedno predbehnutie, a to v poradí, v akom nastanú. Každý riadok má obsahovať dve celé čísla i a j, znamenajúce, že i-ta vesmírna loď predbehla j-tu. Ak počas pretekov bude viac ako 10 000 predbehnutí, vypíšte len prvých 10 000 z nich. Ak počas pretekov bude menej ako 10 000 predbehnutí, vypíšte všetky. Ak *naraz* nastane viac predbehnutí, vypíšte ich utriedené podľa miesta na trati, kde nastali. Skôr vypíšte to, ktoré nastalo bližšie pri štarte.

Poznámky Ak počet predbehnutí vo vašom výstupnom súbore bude správny, za príslušný test získavate 40% bodov. Ak uvediete správne prvých 10 000 predbehnutí, za príslušný test získavate 60% bodov. Aby váš program za test získal body, musí skončiť v časovom limite (t.j. ak vyrieši jednu časť ale neskončí, bude hodnotený 0 bodmi).

Príklad

Súbor `therace.in`

```
4
0 2
2 1
3 8
6 3
```

Súbor `therace.out`

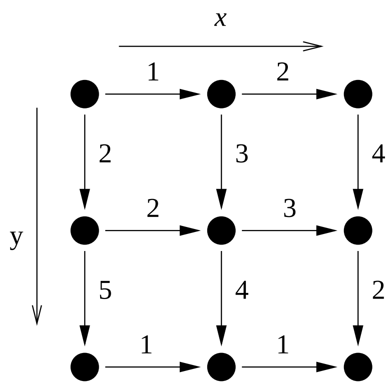
```
2
3 4
1 2
```

Štvorec

Daný je graf. Jeho vrcholy sú všetky mrežové body siete s rozmermi $N \times N$ ($1 \leq N \leq 2\,003$). Z každého vrcholu vedú orientované hrany do jeho pravého a spodného suseda, ak ich má. Každá hrana má danú váhu – celé číslo w ($1 \leq w \leq 500\,000$). Každá cesta vedúca z ľavého horného vrcholu $v_{1,1}$ do vrcholu $v_{x,y}$ má rovnakú váhu. Váha cesty je súčet váh všetkých hrán, ktoré ju tvoria.

V grafe na obrázku je $N = 3$, každá cesta z $v_{1,1}$ do $v_{2,2}$ má váhu 4. Jediná cesta z $v_{1,1}$ do $v_{1,2}$ má váhu 2.

[3]Tým dokážete, že poznáte výsledok, ale neskazíte nikomu zábavu pri sledovaní pretekov.



Obr. 46

Dané je celé číslo L ($1 \le L \le 2\,000\,000\,000$). Vašou úlohou je nájsť vrchol $v_{x,y}$, do ktorého vedie z $v_{1,1}$ cesta s váhou práve L. Váš program nebude pri spustení váhy hrán poznať, musí sa na ne pýtať knižnice. Program sa môže na váhu hrany opýtať najviac 6667 krát.

Knižnica obsahuje nasledujúce funkcie:

- Funkcie `getN()` a `getL()` vracajú hodnoty N a L.
- Funkcia `getWeight(x,y,direction)` vráti váhu hrany, začínajúcej vo $v_{x,y}$ a smerujúcej napravo (ak `direction=0`) alebo nadol (ak `direction=1`).
- Ak ste našli nejaký vrchol $v_{x,y}$, do ktorého vedie z $v_{1,1}$ cesta s váhou L, musíte zavolať `solution(x,y)`. Ak taký vrchol neexistuje, musíte zavolať `solution(-1,-1)`. Váš program bude automaticky ukončený po zavolaní `solution`. Ak urobíte viac ako 6667 volaní `getWeight`, vaše riešenie za tento test nedostane žiadne body.

Táto úloha nemá žiaden vstupný ani výstupný súbor.

Popis knižnice

C/C++:

```
int getN()
int getL()
int getWeight(int x, int y, int direction)
void solution(int x, int y)
```

Pascal:

```
function getN: Longint
function getL: Longint
function getWeight(x, y, direction: Longint): Longint
procedure solution(x, y: Longint)
```

Ukážkovú knižnicu nájdete v adresári `~/ceoi`, resp. v `c:\ceoi`. Váš program bude hodnotený s inou implementáciou knižnice.

Môžete vytvoriť súbor `square.in`, ktorý ukážková knižnica číta. V prvom riadku tohto súboru musia byť uvedené celé čísla N a L. Každý z nasledujúcich N riadkov obsahuje presne $N-1$ celých čísel – váhy horizontálnych hrán. Nasleduje ďalších $N-1$ riadkov, každý z nich obsahuje N celých čísel – váhy vertikálnych hrán.

Knižnicu musíte vo svojom programe použiť pomocou `#include "square_lib.h"`, resp. `uses square_lib`.

Uvedomte si, že knižnica, ktorú máte k dispozícii je pomalá a zaberá veľa pamäte, lebo načíta celý váš vstupný súbor do pamäte. Preto pamäť použitá knižnicou pri vyhodnotení a čas strávený volaním jej funkcií nebudú zarátané do časového a pamäťového limitu – ako keby knižnica použitá pri vyhodnotení odpovedala okamžite a nepotrebovala žiadnu pamäť.

Príklad komunikácie

Súbor `square.in`

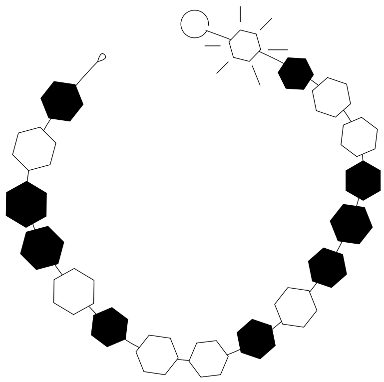
```
3 4
1 2
2 3
1 1
2 3 4
5 4 2
```

Protokol

```
getN() → 3
getL() → 4
getWeight(1,1,0) → 1
getWeight(2,1,1) → 3
solution(2,2)
```

Perlový náhrdelník

V horách žijú dva klany trpaslíkov – zelení a červení. Počas výpravy kosiť rannú trávu[4] skupina červených a zelených trpaslíkov našla náhrdelník. Skladal sa z bezcenných čiernych a bielych sklenených perál. Iba na konci náhrdelníka sa trblietal diamant nesmiernej ceny.



Obr. 47

Každý klan sa samozrejme chcel zmocniť tohto diamantu. Rozhodli sa riešiť situáciu mierovou cestou. Zahrajú si oň nasledujúcu hru.

Každému trpaslíkovi je pridelené nejaké číslo od 1 do N, samozrejme rôzni trpaslíci majú rôzne čísla. Navyše má každý z trpaslíkov dva verejne známe zoznamy čísel trpaslíkov: čierny a biely. Rôzni trpaslíci môžu mať rôzne zoznamy. Každý z týchto zoznamov

[4] V origináli: during a **joint** expedition…

môže obsahovať čísla červených aj zelených trpaslíkov. Počas hry náhrdelník putuje podľa nasledovných pravidiel: Keď trpaslík dostane náhrdelník, utrhne si z jeho začiatku perlu. Ak je biela, náhrdelník odovzdá niektorému trpaslíkovi z bieleho zoznamu. Ak je perla čierna, odovzdá ho niektorému trpaslíkovi z čierneho zoznamu. Môže si vybrať, ktorému trpaslíkovi z príslušného zoznamu náhrdelník odovzdá. (Ak je na príslušnom zozname aj on, môže si náhrdelník nechať.) Na začiatku hry sa náhodne vyberie trpaslík, ktorý dostane náhrdelník.

Na konci hry ostane na náhrdelníku iba diamant. Trpaslík, ktorý tento náhrdelník dostane, si ho môže nechať pre svoj klan a vyhral.

Napíšte program, ktorý pomôže zeleným trpaslíkom získať diamant, ak je to možné. Môžete predpokladať, že červení trpaslíci hrajú optimálne. Váš program bude používať knižnicu popísanú v nasledujúcom texte.

Knižnica

Máte k dispozícii knižnicu, ktorá obsahuje nasledujúce funkcie:

- Funkciu `getNext()` musíte zavolať, ak je na ťahu červený trpaslík. Funkcia vráti číslo trpaslíka, ktorý od neho dostane náhrdelník.
- Funkciu `setNext(d)` musíte zavolať, ak je na ťahu zelený trpaslík. Parameter `d` je číslo trpaslíka, ktorému má náhrdelník odovzdať.
- Funkciu `finish()` musíte zavolať, keď hra končí. Jej zavolanie ukončí váš program.

Na ladenie vášho programu budete mať k dispozícii ukážkovú verziu knižnice. Dostanete súbory `pearls_lib.h` a `pearls_lib.pas`, nájdete ich v adresári `~/ceoi/`, resp. `c:\ceoi\`. V tejto verzii knižnice červení trpaslíci vždy odovzdávajú náhrdelník prvému z trpaslíkov na príslušnom zozname.

Popis knižnice

C/C++:
Použite direktívu `#include "pearls_lib.h"`.

```
int getNext(void);
void setNext(int d);
void finish(void);
```

Pascal:
Použite príkaz `uses pearls_lib.pas;`.

```
function getNext:Integer;
procedure setNext(d:Integer);
procedure finish;
```

Formát vstupu: Prvý riadok vstupného súboru obsahuje začiatočnú dĺžku náhrdelníka L ($1 \leq L \leq 1\,000$), počet trpaslíkov N ($1 \leq N \leq 1\,000$) a číslo trpaslíka F ($1 \leq F \leq N$), ktorý dostane náhrdelník ako prvý. Nezabudnite, že trpaslíci majú čísla od 1 do N.

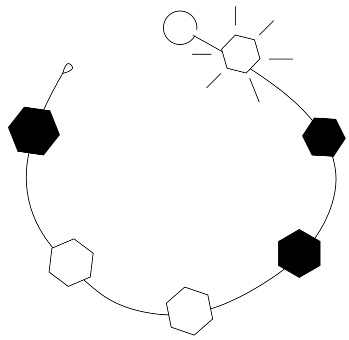
Druhý riadok obsahuje L znakov, popisujúcich náhrdelník. Každý z prvých $L-1$ znakov je buď písmeno 'B' alebo písmeno 'W', B (black) reprezentuje čiernu perlu, W (white) bielu. Posledný znak je písmeno 'D' reprezentujúce diamant.

Nasledujúcich N riadkov popisuje zoznamy jednotlivých trpaslíkov, i-ty z nich popisuje trpaslíka s číslom i. Na začiatku riadku je číslo označujúce jeho farbu (0 je zelená, 1 červená). Nasleduje dĺžka jeho čierneho zoznamu L_B ($1 \leq L_B \leq 20$). Ďalej je na riadku L_B čísel trpaslíkov z čierneho zoznamu. Nasleduje dĺžka jeho bieleho zoznamu L_W ($1 \leq$ $\leq L_W \leq 20$). Nakoniec je na riadku L_W čísel trpaslíkov z bieleho zoznamu.

Formát výstupu: Táto úloha nemá žiadny výstup.

Príklad

Súbor `pearls.in`	**Volania funkcií**
`6 4 2`	`setNext(1)`
`BWWBBD`	`setNext(4)`
`0 1 2 1 4`	`getNext()` → `1`
`0 2 1 3 1 1`	`setNext(2)`
`1 1 4 1 4`	`setNext(1)`
`1 2 2 3 1 1`	`finish()`



Obr. 48

Hodnotenie

Ak spravíte jednu z nasledovných chýb, príslušný test bude hodnotený 0 bodmi:

- zavoláte `setNext(d)` a nie je na ťahu zelený trpaslík
- zavoláte `setNext(d)` a trpaslík `d` nie je na príslušnom zozname trpaslíka s náhrdelníkom
- zavoláte `getNext()` a nie je na ťahu červený trpaslík
- nezavoláte `finish()`
- zavoláte `finish()` a na náhrdelníku ešte sú perly
- zavoláte `finish()` a diamant vlastní červený trpaslík

Body za test dostanete len ak korektne dohráte hru a diamant získa zelený trpaslík. Môžete predpokladať, že v každom teste sa to dá dosiahnuť (t.j. váš program nedostane vstup, ktorý by sa nedal vyhrať).

Posuvný register

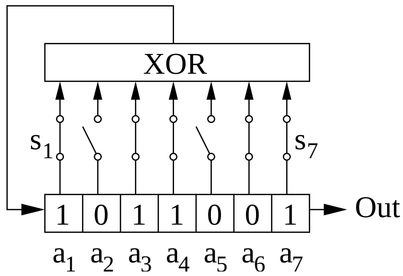
Dôležitou súčasťou pamäte počítača sú registre. V každom registri sa dá uložiť N bitov informácie. Posuvný register je špeciálny typ registra, ktorý vie posunúť uložené bity o jednu pozíciu.

Ukážeme si, ako sa pomocou posuvného registra so spätnou väzbou dajú generovať pseudonáhodné postupnosti bitov. Posuvný register veľkosti N na začiatku naplníme bitmi $a_1, \ldots, a_N$. Pri každom tiku interných hodín počítača sa na výstup dostane najpravejší bit a_N. Ostatné bity sa posunú o jednu pozíciu doprava. Na prvú pozíciu sa uloží nová hodnota a'_1, ktorá sa spočíta nasledovne:

Všetky bity registra sú pripojené na hradlo XOR cez vypínače. Pre každý bit i je vypínač s_i (môže byť v stave 0 alebo 1), ktorý určuje, či sa hodnota a_i k hradlu dostane. Výstupná hodnota tohto hradla sa stane novou hodnotou a'_1. (Poznámka: ak počet jednotiek, ktoré prídu do hradla XOR je nepárny, hradlo vráti 1, inak 0.)

Formálna definícia, ako spočítať nové hodnoty a'_i zo starých a_i:

$$\begin{aligned} a'_1 &= \mathrm{XOR}(s_1 \cdot a_1, \ldots, s_N \cdot a_N) \\ a'_i &= a_{i-1} \text{ pre } 2 \leq i \leq N \\ \text{výstup} &= a_N \end{aligned}$$



Obr. 49

tik	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	výstup
0	1	0	1	1	0	0	1	-
1	0	1	0	1	1	0	0	1
2	1	0	1	0	1	1	0	0
3	1	1	0	1	0	1	1	0
4	0	1	1	0	1	0	1	1
5	0	0	1	1	0	1	0	1
6	1	0	0	1	1	0	1	0
7	1	1	0	0	1	1	0	1
8	0	1	1	0	0	1	1	0
9	1	0	1	1	0	0	1	1
10	0	1	0	1	1	0	0	1
11	1	0	1	0	1	1	0	0
12	1	1	0	1	0	1	1	0
13	0	1	1	0	1	0	1	1
14	0	0	1	1	0	1	0	1

V tomto príklade je nová hodnota pri tiku 1 spočítaná nasledovne:
$\mathrm{XOR}(1 \cdot 1, 0 \cdot 0, 1 \cdot 1, 1 \cdot 1, 0 \cdot 0, 1 \cdot 0, 1 \cdot 1) = 0$.

Daných je prvých $2N$ bitov, ktoré takýto posuvný register vypísal na výstup. Z týchto hodnôt by ste mali určiť, ktoré vypínače s_i sú zapnuté a ktoré nie.

Formát vstupu V prvom riadku vstupného súboru `register.in` je veľkosť posuvného registra N $(1 \leq N \leq 750)$. Druhý riadok obsahuje $2N$ čísel – prvých $2N$ výstupných bitov. Každé z týchto čísel je 0 alebo 1.

Formát výstupu Výstupný súbor `register.in` obsahuje jeden riadok. Ak existujú vyhovujúce stavy vypínačov s_i, tento riadok obsahuje N čísel 0 alebo 1, oddelených medzerami. Ak vypínač s_i je zapnutý, i-te číslo je 1, inak je to 0. Ak existuje viac riešení, vypíšte ľubovoľné jedno z nich. Ak riešenie neexistuje, výstupom je jediné číslo -1.

Príklad

Súbor `register.in`
```
7
1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 0 0 1 1
```

Súbor `register.out`
```
1 0 1 1 0 1 1
```

Súbor `register.in`
```
3
0 0 0 1 1 1
```

Súbor `register.out`
```
-1
```

Výlet

Alica a Robo plánujú ísť cez prázdniny na výlet. Každý z nich si spravil zoznam miest, ktoré chce v danom poradí navštíviť. Zoznam môže obsahovať to isté mesto viackrát.

Keďže chcú cestovať spolu, musia sa dohodnúť na spoločnom pláne cesty. Ani jeden nechce zmeniť poradie, v akom má mestá v zozname napísané ani doň žiadne mestá doplniť. Preto jediné, čo im ostáva, je vynechať zo svojich zoznamov niektoré z miest. Samozrejme že chcú, aby výsledný plán cesty obsahoval čo najviac miest.

V krajine je presne 26 miest, označíme ich písmenami od 'a' do 'z'.

Formát vstupu Vstupný súbor `trip.in` obsahuje dva riadky. Prvý riadok je Alicin zoznam miest a druhý riadok je Robov zoznam. Každý zoznam obsahuje najmenej 1 a najviac 80 miest. Medzi písmenami v zozname nie sú medzery.

Formát výstupu Výstupný súbor `trip.out` by mal obsahovať všetky plány cesty, ktoré spĺňajú hore uvedené podmienky. Každý plán cesty vypíšte na samostatný riadok. Žiaden plán cesty sa vo výstupnom súbore nesmie zopakovať. Na poradí, v akom vypíšete plány cesty, nezáleží. Môžete predpokladať, že optimálny plán cesty je neprázdny a že ich nie je viac ako 1 000.

Príklad

Súbor `trip.in`
```
abcabcaa
acbacba
```

Súbor `trip.out`
```
ababa
abaca
abcba
acbca
acaba
acaca
acbaa
```

15. Medzinárodná informatická olympiáda

15. ročník Medzinárodnej informatickej olympiády (IOI) sa konal v dňoch 15.–24. augusta 2003 v campuse University of Wisconsin–Parkside, Kenosha vSpojených štátoch amerických. Zúčastnilo sa na ňom 265 súťažiacich zo 69 krajín sveta. Reprezentačné družstvo Slovenska bolo vybrané spomedzi najlepších študentov stredných škôl podľa ich výsledkov na celoštátnom kole Matematickej olympiády, kategória P (programovanie) a na týždňovom výberovom sústredení, ktoré sa konalo v dňoch 27. mája–2. júna 2003 v priestoroch Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave (FMFI UK).

Na celoštátne kolo bolo pozvaných 24 najlepších riešiteľov z celého Slovenska, 12 najlepších spomedzi nich bolo pozvaných na výberové sústredenie, ktoré rozhodlo o tom, že tento rok budú Slovensko na IOI reprezentovať Jakub Závodný, Michal Burger, František Simančík, všetci a Gymnázia Grösslingova v Bratislave, a Marek Ludha z Gymnázia J.G. Tajovského v Bansekj Bystrici. Pred IOI sa naši reprezentanti zúčastnili tradičného česko-poľsko-slovenského prípravného stretnutia vo Varšave a Stredoeurópskej olympiády v informatike (CEOI), ktorá bola tento rok v Nemecku.

Vedúcou výpravy bola doc. RNDr. Gabriela Andrejková, CSc. z Prírodovedeckej fakulty Univerzity P. J. Šafárika v Košiciach a Vladimír Koutný, študent FMFI UK.

Medzi úlohy pedagogického dozoru patrí vybrať súťažné úlohy spomedzi úloh navrhnutých organizátormi a hlavne zabezpečovať preklad zadaní úloh do národného jazyka a počas súťaže preklad otázok, ktoré kladú súťažiaci, do angličtiny. O zadaniach príkladov na súťažný deň sa hlasuje večer vopred a následne sa zadania prekladajú, pričom ich preklad často trvá až do skorých ranných hodín.

Aj keď sa tento rok nepodarilo získať medailu všetkým našim reprezentatntom, dosiahnute výsledky sú veľmi dobré – veď v neoficálnom hodnotení krajín skončilo Slovensko na 12. mieste. Konkrétne výsledky:

Meno	Body	Medaila
Jakub Závodný	352.9	zlato
Michal Burger	287.0	striebro
František Simančík	235.9	bronz
Marek Ludha	90.4	

Organizátori si dali záležať aj na neodbornom programe. Niekoľko výletov po okolí vrátane celodennej návštevy Chicaga s večerným výletom loďou po Michiganskom jazere pre vedúcich delegácií, ale aj turnaj v Disc-Golfe (samozrejme aj s hodnotnými cenami pre niekoľko najlepších) boli príjemným spestrením celej súťaže.

Zaželajme teda do budúcna našim mladým reprezentantom veľa šťastia, nech sa budúci rok môžeme tešiť z aspoň rovnako dobrých výsledkov!

Vladimír Koutný

Zadania úloh 15. Medzinárodnej informatickej olympiády

Kravské chodníčky

Farmár Miško zdedil po strýkovi z Ameriky veľkú kravskú farmu. Jeho nová farma vyzerá ako úzky, ale o to dlhší pás zeme, na ktorom v pravidelných rozostupoch vyrástlo husté krovie. Z diaľky (a aj zblízka) to vyzerá ako veľa políčok v páse vedľa seba.

Miško pochopiteľne s farmou zdedil aj nejaké tie kravy, ktoré si už privykli na jeho farmu. Keďže sa ale chcú pásť na všetkých jej N políčkach ($1 \leq N \leq 200$), musia používať susednú Jankovu farmu na prechod medzi políčkami (cez krovie sa im nechce chodiť, aby sa náhodou nepoškriabali). Na Jankovom území majú chodníčky, po ktorých, ak akurát nie sú zarastené trávou, môžu prechádzať v oboch smeroch medzi políčkami.

Kravy si nové chodníčky nerobia, ale používajú chodníčky už vytvorené divou zverou, ktoré sa im podarilo objaviť. Každý týždeň zasadne kravská rada a vyberie niektoré (možno aj všetky) chodníčky divej zveri, o ktorých vedia, a upravia si ich tak, aby po nich mohli chodiť (čiže na nich spasú vysokú trávu).

Miškove kravy sú veľmi zvedavé, a tak každý týždeň objavia jeden nový chodníček divej zveri. Keď sa takéto niečo stane, musia sa rozhodnúť, ktoré chodníčky tento týždeň upravia, aby po nich mohli chodiť z ľubovoľného políčka farmy na ľubovoľné iné. Kravy môžu používať len chodníčky, ktoré si vybrali na spásanie.

Keďže na chodníčkoch nerastie dobrá tráva, chcú kravy vždy minimalizovať celkovú dĺžku vybraných chodníčkov. Vždy si môžu vybrať ľubovoľnú množinu ciest, nezávisle od výberu v predošlom týždni, ale tak, aby mohli chodiť po celej farme.

Chodníčky divej zveri (aj keď sú spásané) nie sú nikdy priame. Dva chodníčky spájajúce rovnaké políčka môžu mať rôzne dĺžky. Aj keď sa dva chodníčky niekde križujú, kravy sú tak zaujaté, že si to ani nevšimnú a idú ďalej po pôvodnom chodníčku.

Na začiatku každého týždňa kravy popíšu novoobjavený chodníček divej zveri. Váš program musí potom dať na výstup minimálnu celkovú dĺžku chodníčkov, ktoré budú kravy tento týždeň spásať, aby mohli chodiť po celej farme, ak taká množina chodníčkov existuje.

Formát vstupu

- Prvý riadok vstupu obsahuje 2 medzerou oddelené celé čísla N a W – W je počet týždňov kravskej sezóny ($1 \leq W \leq 6000$).
- Pre každý týždeň, načítajte jeden riadok obsahujúci popis novoobjaveného chodníčka. Tento riadok obsahuje 3 medzerami oddelené celé čísla – čísla políčok, ktoré spája, a jeho dĺžku L ($1 \leq L \leq 10\,000$). Žiadny chodníček nemá čísla koncových políčok rovnaké.

Formát výstupu Bezprostredne ako váš program zistí informácie o novoobjavenom chodníčku, dá na výstupe jediný riadok s minimálnou celkovou dĺžkou chodníčkov, ktoré musia kravy spásať tak, aby sa mohli pohybovať po všetkých políčkach farmy. Ak žiadna množina neumožňuje kravám neobmedzený pohyb po farme, výstupom je hodnota -1.

Po výpise výsledku pre posledný týždeň kravskej sezóny váš program musí skončiť.

Príklad

Vstup	**Výstup**	**Vysvetlenie**
`4 6`		
`1 2 10`	`-1`	Nič nespája 4 so zvyšnými políčkami.
`1 3 8`	`-1`	Nič nespája 4 so zvyšnými políčkami.
`3 2 3`	`-1`	Nič nespája 4 so zvyšnými políčkami.
`1 4 3`	`14`	Spásajú 1 4 3, 1 3 8, a 3 2 3.
`1 3 6`	`12`	Spásajú 1 4 3, 1 3 6, a 3 2 3.
`2 1 2`	`8`	Spásajú 1 4 3, 2 1 2, a 3 2 3.
	`program exit`	

Hodnotenie Za každý testovaný vstup, pre ktorý váš program dá správny výsledok, dostanete plný počet bodov, alebo 0 za nesprávny výsledok.

Porovnávanie kódu

Spoločnosť RBN zažalovala spoločnosť HAL pre údajné použitie kódu *RBN UNIXu*^{TM} v otvorenom operačnom systéme *HALnix*.

Obidve spoločnosti používajú programovací jazyk s jediným príkazom na riadku, pričom každý príkaz má tvar `STOREA = STOREB + STOREC`, kde všetky 3 slová sú mená premenných; meno prvej premennej začína prvým znakom v riadku, za ním nasleduje medzera, znamienko `=`, medzera, meno druhej premennej, medzera, znamienko `+`, medzera a nakoniec meno tretej premennej. Meno tej istej premennej sa môže v jednom riadku vyskytovať aj viac krát. Mená všetkých premenných sú tvorené najviac 8 veľkými písmenami ASCII kódu ('`A`'…'`Z`').

RBN tvrdí, že HAL priamo skopíroval postupnosť riadkov z kódu *RBN UNIXu*, pričom spravil len nepodstatné modifikácie:

- zmenil názvy premenných, aby tak zamaskoval svoj kriminálny čin. HAL teda skopíroval súvislý úsek riadkov z *RBN UNIXu*^{TM} a pre každú premennú v tomto úseku zmenil všetky jej výskyty na nové meno (možno rovnaké ako to pôvodné). Pochopiteľne žiadne 2 premenné neboli premenované na to isté meno.
- RBN tiež predpokladá, že HAL mohol zmeniť poradie sčítancov v niektorých riadkoch, teda príkaz `STOREA = STOREB + STOREC` mohol zmeniť na `STOREA = STOREC + STOREB`
- HAL pochopiteľne nezmenil poradie riadkov tohto úseku a ani žiaden riadok nepridal.

Pre dané 2 zdrojové kódy od RBN a HAL nájdite najdlhší súvislý úsek riadkov z *HALnixu*, ktoré by mohli byť ukradnuté z *RBN UNIXu*^{TM} a upravené pomocou uvedených transformácií. Nezabudnite, že hľadané úseky v konkurenčných programoch nemusia začínať na riadku s tým istým číslom.

Formát vstupu

- Prvý riadok vstupného súboru obsahuje 2 celé čísla R a H, oddelené medzerou – R je počet riadkov *RBN UNIXu*^{TM}, H je počet riadkov *HALnixu* ($1 \le R \le 1\,000$, $1 \le H \le 1\,000$)
- Ďalších R riadkov vo vstupnom súbore obsahuje *RBN UNIX*^{TM}
- Posledných H riadkov vo vstupnom súbore obsahuje *HALnix*

Formát výstupu Výstupný súbor obsahuje jediný riadok (ukončený end-of-line) s jediným celým číslom – dĺžkou najdlhšieho súvislého úseku riadkov, ktorý mohol byť ukradnutý.

Príklad

Súbor `code.in`
```
4 3
RA = RB + RC
RC = D + RE
RF = RF + RJ
RE = RF + RF
HD = HE + HF
HM = HN + D
HN = HA + HB
```

Súbor `code.out`
```
2
```

Vysvetlenie
Riadky 1–2 v prvom programe (*RBN UNIXe*^{TM}) sú rovnaké ako riadky 2–3 v druhom programe (*HALnixe*), ak použijeme substitúciu `RA` $\rightarrow$ `HM`, `RB` $\rightarrow$ `D`, `RC` $\rightarrow$ `HN`, `D` $\rightarrow$ `HA`, `RE` $\rightarrow$ `HB`. Neexistuje lepšie riešenie.

Hodnotenie Za každý testovaný vstup, pre ktorý váš program dá správny výsledok, dostanete plný počet bodov, alebo 0 za nesprávny výsledok.

Reverz

TOM (Tomášova Osobná Mašina) je počítač, ktorý má 9 registrov, očíslovaných 1…9. V každom registri môže byť uložené nezáporné celé číslo z intervalu $\langle 0, 1000 \rangle$. Tento počítač má aj 2 operácie:

`S` i j Do registra j uloží obsah registra i zvýšený o 1 (i a j môžu byť rovnaké)
`P` i Vypíše obsah registra i

TOM-program obsahuje počiatočné hodnoty všetkých registrov a postupnosť operácií. Pre dané číslo N ($0 \le N \le 255$) vytvorte TOM-program, ktorý vypíše klesajúcu postupnosť celých čísel N, $N-1$, $N-2$, …, 0. Maximálny počet po sebe idúcich `S`-operácií by mal byť čo najmenší.

Príklad TOM-programu a jeho vykonanie pre $N = 2$:

Operácia	Nové hodnoty registrov	Vypísané hodnoty
	1 2 3 4 5 6 7 8 9	
Inicializácia	0 2 0 0 0 0 0 0 0	
P 2	0 2 0 0 0 0 0 0 0	2
S 1 3	0 2 1 0 0 0 0 0 0	
P 3	0 2 1 0 0 0 0 0 0	1
P 1	0 2 1 0 0 0 0 0 0	0

Vstupné súbory sú očíslované od 1 po 16 a nájdete ich na súťažnom serveri.

Formát vstupu

- Prvý riadok vstupného súboru obsahuje celé číslo K – číslo testu.
- Druhý riadok obsahuje číslo N.

Formát výstupu

- Prvý riadok výstupného súboru obsahuje reťazec `"FILE reverse` K`"`, kde K je číslo testu z príslušného vstupného súboru.
- Druhý riadok obsahuje 9 čísel oddelených medzerou, ktoré určujú počiatočné hodnoty registrov v poradí od 1 po 9.
- Nasledujúce riadky obsahujú TOM-program – jedna operácia v jednom riadku v poradí, v akom sa majú vykonať (teda tretí riadok obsahuje prvú operáciu, atď.). Posledný riadok by mal obsahovať operáciu, ktorá vypíše 0. V každom riadku by mala byť správna operácia. Operácie je potrebné sformátovať tak, ako v príklade pre výstup.

Príklad

Vstup	**Príklad výstupu #1**	**Príklad výstupu #2**
`1`	(nie plný počet bodov)	(plný počet bodov)
`2`	`FILE reverse 1`	`FILE reverse 1`
	`0 2 0 0 0 0 0 0 0`	`0 2 1 0 0 0 0 0 0`
	`P 2`	`P 2`
	`S 1 3`	`P 3`
	`P 3`	`P 1`
	`P 1`	

Hodnotenie Bodovanie každého testu bude založené na správnosti a optimálnosti daného TOM-programu.

Správnosť: 20%
Správny TOM-program je taký, ktorý nikdy nevykoná viac ako 131 po sebe idúcich `S`-operácií a vypíše správnu postupnosť čísel (obsahujúcu práve $N+1$ čísel od N po 0). Ak ľubovoľná `S`-operácia spôsobí pretečenie registra, TOM-program je nesprávny.

Optimálnosť: 80%
Optimálnosť správneho TOM-programu je určená maximálnym počtom po sebe idúcich `S`-operácií, ktorý by mal byť čo najmenší. Bodové hodnotenie bude odvodené od rozdielu medzi vašim TOM-programom a najlepším známym TOM-programom.

Danove hranice

Farmár Dan sa rozhodol postrážiť plot okolo svojej plochej, vodorovnej farmy tvaru štvorca so stranou N metrov ($2 \leq N \leq 500\,000$). Jeden roh farmy má súradnice $(0, 0)$, protiľahlý roh má súradnice (N, N). Strany Danovej farmy sú rovnobežné so súradnicovými osami X, Y.

Stĺpy plota sa nachádzajú v rohoch plota, ale aj na každom metri pozdĺž každej jeho strany, dokopy $4N$ stĺpov. Všetky stĺpy sú zvislé a majú nulový polomer. Farmár Dan chce určiť, koľko stĺpov môže sledovať, ak sa postaví na nejaké miesto svojej farmy.

Na Danovej farme s nachádza R veľkých skál ($1 \leq R \leq 30\,000$), ktoré mu bránia vo výhľade na jeho sĺpy, pretože Dan je príliš malý na to, aby videl ponad tieto skaly. Skaly sú viacboké hranoly, pôdorys každej skaly je konvexný mnohouholník s nenulovou plochou, ktorého vrcholy majú celočíselné súradnice. Žiadne dve skaly nemajú spoločný prienik a nedotýkajú sa navzájom. Žiadna skala sa nedotýka Dana ani plotu. Podobne farmár Dan sa nedotýka plotu, nestojí v skale a ani na skale.

Pre danú Danovu farmu, pozície a tvar skál a Danove umiestnenie vypočítajte počet stĺpov plota, ktoré Dan môže zo svojho miesta vidieť. Ak je niektorý stĺp v presnom zákryte s hranou skaly pri pohľade z Danovej pozície, tento stĺp Dan nemôže vidieť.

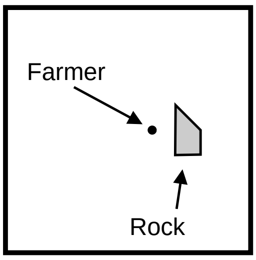
Formát vstupu

- Prvý riadok vstupu obsahuje 2 celé čísla N a R oddelené medzerou – veľkosť Danovej farmy a počet skál
- Ďalší riadok obsahuje 2 celé čísla X a Y oddelené medzerou – pozícia farmára Dana vo vnútri farmy
- Zvyšok vstupného súboru popisuje skaly:
  - Popis i-tej skaly začína riadkom obsahujúcim jediné celé číslo p_i ($3 \leq p_i \leq 20$) – počet vrcholov pôdorysu skaly
  - Každý z ďalších p_i riadkov obsahuje 2 celé čísla oddelené medzerou – X a Y súradnice vrcholu pôdorysu. Vrcholy pôdorysu sú navzájom rôzne a sú uvedené v poradí proti smeru hodinových ručičiek.

Formát výstupu Výstupný súbor obsahuje jediný riadok s jediným celým číslom – počtom viditeľných stĺpov z Danovej pozície.

Príklad

boundary.in	boundary.out	**Vysvetlenie**
100 1	319	Pôdorys skaly má 3 vrcholy na priamke:
60 50		$(70, 40)$, $(75, 40)$, a $(80, 40)$
5		
70 40		
75 40		
80 40		
80 50		
70 60		



Obr. 50

Hodnotenie: Za každý testovaný vstup, pre ktorý váš program dá správny výsledok, dostanete plný počet bodov, alebo 0 za nesprávny výsledok.

Naša krava Milka

Farmárovi Miškovi sa dnes stratila jeho obľúbená krava Milka. Miško bol z toho veľmi smutný, veď ju kúpil za celých 32 768€. Spôsobilo to problémy aj čokoládovému priemyslu, takže sa Miško vydal Milku hľadať. Našiel kravu v zúboženom stave, podľa jej čísla vedel, že patrí do jeho stáda, ale ktorá to je, to sa usiloval odhaliť podľa jej charakteristických vlastností.

Miško má[5] v stáde N podobne vyzerajúcich kráv ($1 \leq N \leq 50$) očíslovaných $1 \ldots N$. Kravy sa však trochu odlišujú: Miško rozlišuje P ($1 \leq P \leq 8$) charakteristických vlastností (ďalej len vlastností) očíslovaných $1 \ldots P$, z ktorých každá nadobúda jednu z troch hodnôt. Príkladom vlastnosti môže byť farba fľakov – fialová, ružová alebo tyrkysová. Pre jednoduchosť možné hodnoty každej vlastnosti budeme reprezentovať znakmi 'X', 'Y' a 'Z'. Žiadne dve Miškove kravy nemajú všetky vlastnosti rovnaké.

Napíšte farmárovi Miškovi program, ktorý mu pomôže určiť, ktorú kravu to vlastne našiel. Váš program môže Miškovi položiť najviac 100 otázok tvaru: *Je vlastnosť T nájdenej kravy v množine hodnôt S?* Pokúste sa Miškovi pomocou čo najmenšieho počtu otázok určiť, ktorú kravu našiel.

Formát vstupu

- Prvý riadok vstupného súboru obsahuje 2 celé čísla N a P oddelené medzerou – počet kráv a počet vlastností
- Každý z nasledujúcich N riadkov popisuje vlastnosti jednej kravy – druhý riadok vstupného súboru popisuje prvú kravu, tretí riadok druhú kravu atď. Každý riadok popisuje vlastnosti kravy pomocou P znakov oddelených medzerami – prvý znak udáva hodnotu vlastnosti 1, druhý vlastnosti 2 atď.

Interaktívnosť: *štandardný vstup a výstup*

Kladenie otázok a odpovedí prebieha cez štandardný vstup a výstup.

Váš program kladie otázku o nájdenej krave vypísaním riadku na štandardný výstup v tvare 'Q p $v\ldots$', kde p je číslo vlastnosti a $v \ldots$ je jedna alebo viac hodnôt oddelených medzerami. Teda, 'Q 1 Z Y' znamená '*Je vlastnosť 1 nájdenej kravy rovná* Z *alebo* Y*?*' Vlastnosť p musí byť celé číslo v intervale $1 \ldots P$, všetky hodnoty musia byť 'X', 'Y' alebo 'Z' a žiadna hodnota nesmie byť v jednej otázke uvedená viac ako jeden krát.

Po položení každej otázky načítajte jeden riadok, ktorý obsahuje jedno celé číslo: 1, ak daná vlastnosť nájdenej kravy je v danej množine hodnôt, alebo 0, ak nie je.

Posledný riadok, ktorý váš program dá na výstup, musí byť 'C', medzera a jedno celé číslo, ktoré určuje nájdenú kravu. Program následne skončí.

[5] mal

Príklad

Súbor `guess.in`	Vstup	Výstup	Poznámka
`4 2`		`Q 1 X Z`	
`X Z`	`0`		Môže to byť krava 3 alebo 4
`X Y`		`Q 2 Y`	
`Y X`	`1`		Je to krava 4!
`Y Y`		`C 4`	Program po vypísaní odpovede skončí

Hodnotenie:

Správnosť: 30% bodov

Programy získajú plný bočet bodov za správnosť len vtedy, keď krava, ktorú program určí, je jediná zo stáda, ktorá je v súlade s kladenými otázkami a odpoveďami na ne. Ak sa program pýta viac ako 100-krát, nezíska za tento test žiadne body.

Počet otázok: 70% bodov

Zostávajúce body budú určené podľa počtu položených otázok, ktoré program potreboval na určenie správnej kravy. Snažte sa minimalizovať počet otázok aj v najhoršom prípade (podľa zákona schválnosti všetky prípady budú tie najhoršie možné). Čiastočný počet bodov bude udelený aj za takmer optimálny počet otázok.

Prefíkaní roboti

Ste hrdým vlastníkom dvoch najmodernejších robotov, ktorí sú umiestnení v oddelených obdĺžnikových bludiskách. Políčko $(1,1)$ v bludisku je v jeho ľavom hornom (severo–západnom) rohu. Bludisko i $(i = 1, 2)$ má G_i $(0 \leq G_i \leq 10)$ strážcov, ktorí hliadkujú po určenej trase a snažia sa robotov chytiť. Vaším cieľom je určiť takú postupnosť príkazov, ktorá vyvedie oboch robotov z bludísk bez toho, aby ich strážcovia chytili.

Na začiatku každej minúty pošlete rovnaký príkaz obom robotom – každý príkaz určuje smer (`N`–sever, `S`–juh, `E`–východ alebo `W`–západ), v ktorom sa robot posunie o jedno políčko. Ak je v určenom smere stena, robot ostane stáť tam, kde bol. Robot opustí bludisko tak, že ho vykonanie príkazu posunie mimo bludiska. Potom už ignoruje všetky ďalšie príkazy.

Strážcovia sa posúvajú po svojej trase na začiatku každej minúty o jedno políčko, presne vtedy, kedy sa posunú roboti. Trasa každého strážcu je vždy priama: strážca začne na danom políčku a bude postupovať v určenom smere každú minútu o jedno políčko, až kým sa nedostane na koniec svojej trasy (t.j. až kým neurobí $D - 1$ krokov, kde D je dĺžka jeho trasy). Hneď po príchode na posledné políčko trasy sa otočí o 180° a v ďalšej minúte pokračuje opäť o jedno políčko dopredu (teda smerom k jeho štartovnej pozícii). Po príchode na štartovné políčko sa znovu otočí a takto pokračuje, až kým mu na hlavu nespadne nejaký meteor.[6]

Trasy strážcov sú určite korektné, teda neprechádzajú cez steny a ani neopúšťajú bludisko. Môžu sa však navzájom prekrývať, ale určite sa dvaja strážcovia nestretnú

[6] z originálu: až kým každý z robotov neopustí svoje bludisko

naraz na tom istom políčku. Strážca a robot toho istého bludiska neštartujú na tom istom políčku.

Strážca chytí robota buď vtedy, keď sa stretnú na tom istom políčku, alebo ak si počas jedného kroku navzájom vymenia pozície.

Pre dané 2 bludiská (každé nie väčšie ako 20×20) s robotmi a strážcami určte postupnosť príkazov, pomocou ktorých obaja roboti opustia svoje bludiská bez toho, aby ich chytil nejaký strážca. Minimalizujte čas potrebný na opustenie bludiska posledného robota (na čase robota, ktorý opustí svoje bludisko ako prvý, nezáleží).

Formát vstupu Prvých niekoľko riadkov popisuje prvé bludisko a jeho obyvateľov, potom nasleduje popis druhého bludiska.

- Prvý riadok vstupu obsahuje 2 celé čísla R_1 a C_1 oddelené medzerou – počet riadkov a stĺpcov prvého bludiska

- Každý z ďalších R_1 riadkov obsahuje C_1 znakov určujúcich tvar bludiska: 'X' určuje pozíciu robota, '.' určuje prázdne políčko, '#' určuje stenu. Každé bludisko obsahuje práve jedného robota

- V ďalšom riadku je jedno celé číslo G_1 – počet strážcov v prvom bludisku ($0 \leq G_1 \leq 10$)

- Každý z ďalších G_1 riadkov popisuje trasu jedného strážcu tromi celými číslami a jedným znakom, ktoré sú oddelené medzerami: prvé dve čísla určujú riadok a stĺpec štartovacej pozície strážcu, tretie číslo určuje dĺžku trasy v štvorčekoch (D, $2 \leq D \leq 4$), znak určuje počiatočný smer strážcu ('N', 'S', 'E', 'W')

Popis druhého bludiska je hneď za prvým v rovnakom tvare, ale pravdepodobne s inými hodnotami.

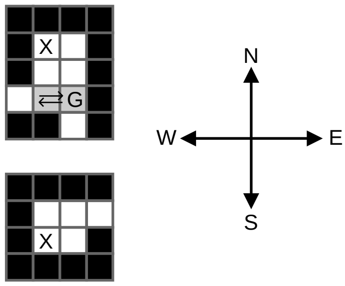
Formát výstupu Prvý riadok výstupu obsahuje jediné číslo K ($K \leq 10\,000$) – počet príkazov pre oboch robotov na opustenie bludísk bez toho, aby boli chytení. Ak riešenie existuje, najkratšia správna postupnosť nebude dlhšia ako 10 000 príkazov. Ďalších K riadkov popisuje postupnosť príkazov – každý obsahuje jeden znak z množiny {'N', 'S', 'E', 'W'}. Ak riešenie neexistuje, výstupom je jediný riadok obsahujúci číslo -1.

Obaja roboti by mali opustiť svoje bludiská do konca postupnosti, pričom posledný príkaz by mal spôsobiť odchod aspoň jedného robota z bludiska. Ak existuje viac správnych postupností príkazov, vypíšte ľubovoľnú z nich.

Príklad

Súbor `robots.in`

```
5 4
####
#X.#
#..#
...#
##.#
1
4 3 2 W
4 4
####
#...
#X.#
####
0
```



Obr. 51

Súbor `robots.out`

```
8
E
N
E
S
S
S
E
S
```

Hodnotenie Ak riešenie neexistuje, nebudú udeľované čiastočné body. V opačnom prípade bude bodové hodnotenie určené takto:

Správnosť: 20% bodov

Správny výstup je taký, ktorý je správne sformátovaný a neobsahuje viac ako 10 000 príkazov a táto postupnosť vyvedie oboch robotov z bludiska, pričom posledný príkaz vyvedie aspoň jedného robota.

Minimálnosť: 80% bodov

Výstup pre daný test je považovaný za minimálny, ak je správny a neexistuje žiadna kratšia správna postupnosť príkazov. Za postupnosť, ktorá nie je minimálna, nedostanete žiadne body za minimálnosť.

Korešpondenčný seminár SK MO

V dôsledku finančných problémov spomínaných v úvode ročenky, v 52. ročníku matematickej olympiády korešpondenčný seminár SK MO neprebiehal. Stalo sa tak prvý krát od 44. ročníka, odkedy je seminár organizovaný samostatne na Slovensku. Pritom v rámci Československa vznikol tento seminár už v 24. ročníku MO.

Nadaní študenti sa tak mohli (okrem samostatného štúdia) pripravovať na vyššie kolá MO iba riešením iných korešpondenčných seminárov, ktorým sa venuje nasledujúca kapitola. V budúcich ročníkoch by seminár SK MO mal prejsť do rúk organizátorov nového korešpondenčného seminára KMS ako jedna jeho osobitná kategória. Vzniká tak nádej, že v tradícii sa bude po ročnej prestávke naďalej pokračovať.

Iné korešpondenčné semináre

Okrem matematickej olympiády sú pre študentov základných aj stredných škôl počas školského roka organizované aj iné matematické súťaže. Patria medzi ne predovšetkým korešpondenčné semináre. Tieto súťaže sa v detailoch istotne líšia, avšak základné črty majú spoločné. Počas školského roka prebiehajú dve časti (letná a zimná), ktoré pozostávajú zväčša z troch sérií úloh rozosielaných riešiteľom do škôl alebo domov. Riešenia súťažiaci vypracovávajú rovnakou formou ako v MO a v určenom termíne ich odosielajú na adresu príslušného seminára, odkiaľ sa po niekoľkých dňoch až týždňoch vrátia opravené spolu so vzorovými riešeniami a výsledkovou listinou. Mladší a menej skúsení riešitelia zväčša nemusia riešiť tie najzložitejšie príklady, aby aj oni mali šancu ovplyvniť poradie na prvých miestach. Na konci oboch častí súťaže sú približne tridsiati najúspešnejší riešitelia pozývaní na týždňové sústredenie, účasť na ktorom býva často najsilnejšou motiváciou na riešenie úloh. Nie je ale možné nespomenúť, že takýto pravidelný tréning sa odráža aj na výsledkoch dosahovaných v MO, a že drvivá väčšina reprezentantov Slovenska a Českej republiky na IMO, príp. IOI, sa aktívne zapájala do viacerých z týchto seminárov.

Nižšie uvedené korešpondenčné semináre (KS) sú určené predovšetkým študentom stredných škôl, svojim záberom pokrývajú územie celého Slovenska a často majú aj riešiteľov z Českej republiky. Je však možné, že vo svojom okolí nájdete aj menšie súťaže podobného druhu.

Korešpondenčný matematický seminár — KMS

KMS vznikol v tomto ročníku spojením Bratislavského a Stredoslovenského korešpondenčného matematického seminára (BKMS a SKMS), ktoré ešte v predchádzajúcom ročníku prebiehali samostatne. Organizovaný je študentmi FMFI UK v Bratislave.

Nový seminár prebral veľa z oboch pôvodných seminárov, nemožno preto hovoriť o ich zániku, ale o ich zlúčení. Dôvodov na zjednotenie bolo viacero, spomeňme len niektoré. BKMS a SKMS mali podobnú štruktúru a boli organizované na tej istej fakulte. Aj ľudia pôsobiaci v jednotlivých seminároch mali k sebe v posledných rokoch čím ďalej bližšie. Keď sa k tomu pridalo zmenšenie počtu riešiteľov a ich značný prienik (oba semináre riešili takmer tí istí študenti), bolo spojenie prirodzenou cestou.

KMS má dve kategórie. Začínajúcim a mladším riešiteľom je určená kategória ALFA, pre skúsenejších je kategória BETA. Rozdelenie do kategórií umožňuje bojovať o miesta na sústredení aj neskúseným študentom, ktorí by v príliš silnej konkurencii strácali motiváciu. Od budúceho ročníka pribudne ako kategória GAMA seminár SK MO, ktorý tak po ročnej prestávke dostane novú tvár. Naďalej sa ale bude venovať príprave špičkových študentov na CKMO a IMO.

KMS
KATČ FMFI UK
Mlynská dolina

842 48 Bratislava

URL: http://kms.sturak.sk

Súťaž talentovaných riešiteľov obľubujúcich matematiku — STROM

Korešpondenčný seminár STROM je organizovaný z PF UPJŠ v Košiciach skupinou nadšencov, väčšinou bývalých riešiteľov seminára a študentov UPJŠ. Riešiteľskú základňu má na východnom Slovensku. Je pokračovateľom najstaršieho korešpondenčného seminára v bývalom Československu. V posledných rokoch ho pomáhali organizovať najmä študenti FMFI UK pochádzajúci z východného Slovenska. Po vzniku KMS sa STROM opäť snaží vybudovať základňu organizátorov na pôde UPJŠ.

STROM
PF UPJŠ
Jesenná 5
040 01 Košice

e-mail: strom@strom.sk
URL: http://www.strom.sk

Korešpondenčný seminár z programovania — KSP

Na rozdiel od predchádzajúcich KS, je KSP súťažou v programovaní. Všetky jeho súťažné úlohy sú, podobne ako na IOI, praktické. KSP je organizovaný zanietenou skupinkou študentov FMFI UK v Bratislave, ktorí majú zároveň na starosti všetky ostatné súťaže v programovaní od COFAX-u až po MO–P. Sústredenia bývajú na jar a na jeseň.

KSP
KVI FMFI UK
Mlynská Dolina
842 48 Bratislava

e-mail: ksp@ksp.sk
URL: http://www.ksp.sk

Ak ste sa rozhodli do niektorého zo seminárov zapojiť, najrozumnejšie je požiadať o zaslanie úloh prvej série začiatkom septembra alebo začiatkom januára, prípadne si zadania a pravidlá nájsť na internete.

RNDr. Karel Horák, CSc. – doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.
Mgr. Vladimír Koutný – Mgr. Peter Novotný – Mgr. Michal Forišek
Úlohová komisia MO

**Päťdesiatydruhý ročník
Matematickej olympiády
na stredných školách**

Sadzbu programom $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX a LATEX pripravili RNDr. Karel Horák, CSc.,
Mgr. Vladimír Koutný a Mgr. Peter Novotný
Zostavil: Mgr. Vladimír Koutný
Grafická úprava obálky: Mgr. Vladimír Koutný
Nepresšlo jazykovou úpravou
Vydal: Iuventa, Bratislava, 2004
Náklad: 500 ks

ISBN 80–8072–022–3