50. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

Správa o riešení úloh zo súťaže konanej v školskom roku 2000/2001

42. MEDZINÁRODNÁ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA
13. MEDZINÁRODNÁ OLYMPIÁDA V INFORMATIKE

ŽSR

S pomocou spolupracovníkov spracovali
RNDr. Karel Horák, CSc.,
Mgr. Eugen Kováč, Juraj Földes, Ján Špakula,
Vladimír Koutný, Michal Forišek a členovia Úlohovej komisie MO.

Obsah

O priebehu 50. ročníka matematickej olympiády

Matematická olympiáda (MO) je najstaršia a najmasovejšia súťaž žiakov základných a stredných škôl v SR. Vyhlasuje ju Ministerstvo školstva Slovenskej republiky (MŠ SR) v spolupráci s Jednotou slovenských matematikov a fyzikov (JSMF). V školskom roku 2000/2001 sa uskutočnil už jubilejný 50. ročník MO, pretože matematická olympiáda na Slovensku je pokračovateľom rovnakej súťaže z bývalého Československa. Tak ako po iné roky, aj tento ročník MO mala riadiť Slovenská komisia matematickej olympiády (SK MO). Je však treba povedať, že mandát SK MO zanikol v roku 1999 a MŠ SR vymenovalo predsedu SK MO – doc. RNDr. Vladislava Rosu, CSc. – až 27.12. 2000. A pretože Slovenskú komisiu matematickej olympiády menuje jej predseda, mohol tak urobiť až po svojom menovaní, teda až začiatkom roku 2001. Dôsledok: celý kalendárny rok 2000 (ktorý UNESCO vyhlásilo za svetový rok matematiky a v ktorom začal prebiehať jubilejný 50. ročník MO), SK MO *de jure* neexistovala a riadila túto mohutnú súťaž len zo zotrvačnosti – aby sa neublížilo žiakom. Jednotlivé kolá odborne a organizačne zabezpečovali okresné a krajské komisie MO (OK MO, KK MO).

Cieľom súťaže je vyhľadávanie žiakov talentovaných v matematike, prebúdzanie a podpora ich záujmu o ňu, rozvíjanie ich matematických schopností a ich usmerňovanie a vedenie k samostatnej tvorivej činnosti. Vyvrcholením súťaže je príprava na reprezentáciu Slovenskej republiky a účasť na medzinárodných súťažiach, najmä na Medzinárodnej matematickej olympiáde (IMO) a Medzinárodnej informatickej olympiáde (IOI).

Aj v tomto ročníku boli úlohy vo všetkých kolách MO v Českej republike a na Slovensku rovnaké. MO prebehla vo všetkých 8 krajoch a 79 okresoch SR, a to navzdory vyššie uvedeným problémom a navzdory chrípkovej epidémii, ktorá síce v niekoľkých okresoch neumožnila usporiadať okresné kolo MO v kategórii Z9 v plánovanom termíne, ale úlohovej komisii pre kategórie Z sa podarilo zabezpečiť ekvivalentné náhradné úlohy a uskutočniť toto kolo v náhradnom termíne; aj touto cestou ďakujeme. Kvôli úplnosti uveďme personálne obsadenie *fiktívnej*, ale *de facto* pracujúcej SK MO v 50. ročníku súťaže.

Predsedníctvo SK MO tvorili:

doc. RNDr. Vladislav Rosa, CSc., Slovenská štátna inšpekcia, predseda SK MO,

doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., FPEDaS ŽU Žilina, podpredseda, od 23.5.2001 predseda SK MO,

RNDr. Andrej Blaho, FMFI UK Bratislava,

RNDr. Monika Dillingerová, FMFI UK Bratislava,

Juraj Földes, FMFI UK Bratislava,

doc. RNDr. Jozef Fulier, CSc., FPV UKF Nitra,

prof. RNDr. Jozef Moravčík, CSc., FPV ŽU Žilina,

RNDr. Oliver Ralík, CSc., FPV UKF Nitra,

PhDr. Oto Klostermann, MŠ SR,

Ivan Lukáč, IUVENTA Bratislava.

Členmi Predsedníctva SK MO boli z titulu svojej funkcie predsedovia KK MO:
RNDr. Zuzana Frková, Gymnázium Grösslingová Bratislava,
RNDr. Mária Lucká, CSc., PF TU Trnava,
prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc., FPV UKF Nitra,
RNDr. Soňa Pavlíková, CSc., TU Trenčín,
doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., FPEDaS ŽU Žilina,
RNDr. Eva Oravcová, FPV UMB Banská Bystrica,
RNDr. Tomáš Madaras, PhD., PF UPJŠ Košice,
Mgr. Milan Demko, PedF PU Prešov.

SK MO ďalej tvorili:
doc. RNDr. Gabriela Andrejková, CSc., PF UPJŠ Košice,
RNDr. Ľudovít Balázs, PF UPJŠ Košice,
RNDr. Milan Cirjak, MC Prešov,
Michal Forišek, FMFI UK Bratislava,
RNDr. Milota Hilková, ZŠ Jilemnického, Revúca,
RNDr. Anton Hnát, Gymnázium Michalovce,
RNDr. Vladimír Jodas, Štátny pedagogický ústav Bratislava,
Vladimír Koutný, FMFI UK Bratislava,
Eugen Kováč, FMFI UK Bratislava,
Mgr. József Mészáros, Gymnázium s vyučovacím jazykom maďarským, Galanta,
RNDr. Dagmar Mikulášová, Gymnázium Trenčín,
doc. RNDr. Ľudovít Niepel, CSc., FMFI UK Bratislava,
RNDr. Dana Pardubská, CSc., FMFI UK Bratislava,
RNDr. Dana Smutná, FPV UMB Banská Bystrica,
Mgr. Tomáš Vinař, FMFI UK Bratislava,
Mgr. Dagmar Vongrejová, ZŠ Moskovská Žilina.

V priebehu 50. ročníka MO sa uskutočnilo jedno plenárne zasadnutie SK MO a tri zasadnutia P SK MO. Zamerali sa na obsahové a organizačné zabezpečenie MO, finančné pokrytie súťaže, ďalšie aktivity (korešpondenčné semináre, sústredenia a pod.), ako aj na pokračovanie partnerskej spolupráce s českou Ústřední komisí MO pri príprave súťažných úloh a termínovom zabezpečení prebiehajúceho i ďalšieho ročníka MO. Hostiteľom oboch zasadnutí úlohových komisií bola v tomto ročníku slovenská strana. Za zadaním každej súťažnej úlohy v ďalšom texte v zátvorke uvádzame meno autora resp. navrhovateľa úlohy.

Organizácia súťaže zostala v 50. ročníku MO zachovaná: pre žiakov základných škôl bola rozdelená do šiestich kategórií Z4 – Z9 určených žiakom 4. až 9. ročníka ZŠ a odpovedajúcich ročníkov osemročných gymnázií. Pre žiakov stredných škôl a im zodpovedajúcich ročníkov viacročných gymnázií bola súťaž organizovaná v štyroch kategóriách: C, B, A a P. Kategória C bola určená pre študentov prvých ročníkov, kategória B pre študentov druhých ročníkov a kategória A pre študentov tretích a štvrtých ročníkov stredných škôl. Kategória P, zameraná na úlohy z programovania a matematickej informatiky, bola určená žiakom všetkých ročníkov stredných škôl.

Talentovaní žiaci mohli po súhlase svojho učiteľa matematiky súťažiť aj vo vyššej vekovej kategórii. Týkalo sa to aj žiakov ZŠ, ktorí tiež mohli súťažiť v niektorej z kategórií A, B, C a P.

Súťaž v každej z kategórií pozostáva z niekoľkých postupových kôl, pričom v kategórii Z4 je najvyšším kolom školské kolo, v kategóriách Z5 – Z8 je to okresné kolo, v kategóriách Z9, C a B sa súťaž končí krajským kolom a v kategóriách A i P olympiáda vyvrcholila celoštátnym kolom.

Celoštátne kolo 50. ročníka MO v kategórii A sa uskutočnilo v dňoch 1.–4. apríla 2001 a celoštátne kolo 50. ročníka MO v kategórii P v dňoch 4.–7. apríla 2001 v Žiline.

Do celoštátneho kola (CK MO) bolo pozvaných 39 najlepších riešiteľov krajských kôl v kategórii A a 26 najlepších riešiteľov krajských kôl v kategórii P, pričom sa postupovalo podľa poradia zostaveného po koordinácii bodových hodnotení z jednotlivých krajov. V tomto kole je súťaž rozdelená do dvoch dní. V kategórii A riešia súťažiaci každý deň tri úlohy v časovom limite 4 hodiny, v kategórii P v rovnakom limite prvý deň tri teoretické úlohy a druhý deň dve praktické úlohy na počítači.

Zorganizovaním CK MO bola žilinská krajská komisia MO poverená až 1. februára 2001. Pretože autor týchto riadkov bol vedúcim organizačného výboru CK MO, nebude sa vyjadrovať ku kvalite organizovania – to by mali urobiť iní. Ubytovanie, stravovanie aj samotná súťaž prebehli v areáli ŽU na Veľkom dieli, teda všetko podstatné mali súťažiaci „na dosah“. Mesto Žilina poskytuje určité kultúrne možnosti – kiná, koncerty, galérie – o ktorých boli účastníkom CK MO poskytované informácie. Okrem toho sa podarilo zorganizovať výlet tak pre kategóriu A ako aj pre kategóriu P na prekrásne Súľovské skaly zakvitnuté poniklecom alpínskym.

Jedenásť najúspešnejších riešiteľov tretieho kola MO kategórie A prijalo pozvanie na výberové sústredenie v dňoch 17.–21.4. 2001 na FMFI UK v Bratislave. Na základe výsledkov tohto sústredenia, výsledkov predchádzajúcich kôl MO a s prihliadnutím na úspešnosť v korešpondenčnom seminári SK MO bolo na konci sústredenia vybrané šesťčlenné družstvo na reprezentáciu SR na IMO vo Washingtone v dňoch 1.–14. júla 2001. Tento výber absolvoval ešte jedno (prípravné) sústredenie v dňoch 8.–12.6. 2001 v Bratislave a zároveň nás reprezentoval na medzinárodnom trojstretnutí s Českou republikou a Poľskom, ktoré sa konalo v Bílovci v dňoch 14.–15.6. 2001. Medzištátnemu trojstretnutiu ako aj IMO sú v tejto ročenke venované samostatné kapitoly.

Výberové sústredenie pre najlepších riešiteľov v kategórii P sa uskutočnilo na FMFI UK v Bratislave. V rámci náročného sústredenia, ktoré približovalo podmienky medzinárodnej súťaže, účastníci každý deň dopoludnia tvorili programy, ktoré večer v ten istý deň aj spoločne vyhodnocovali. Na základe dosiahnutých výsledkov schválila SK MO zloženie štvorčlenného družstva, ktoré v dňoch 14.–21.7. 2001 reprezentovalo SR na IOI v Tampere vo Fínsku. Toto družstvo pred IOI absolvovalo ešte jedno prípravné sústredenie, na ktorom sa zúčastnili aj olympionici z Českej republiky a Poľska. Rovnako bolo na základe výsledkov výberového sústredenia schválené štvorčlenné reprezentačné družstvo, ktoré sa v dňoch 10.–17.8. 2001 zúčastnilo na Stredoeurópskej informatickej olympiáde (CEOI) v Zalaegerszegu v Maďarsku. Obom súťažiam sú venované samostatné kapitoly. Cestu na CEOI zabezpečovalo MŠ SR ako neplánovanú – aj touto cestou v mene SK MO ďakujeme. Pobyt na IMO, IOI aj CEOI bol financovaný usporiadajúcou krajinou.

Súčasťou celoročnej prípravy na MO sú aj rôzne korešpondenčné semináre (KS) a sústredenia na okresnej a krajskej úrovni. Aj v tomto ročníku prebiehalo niekoľko KS s celoslovenskou pôsobnosťou, a to:

Bratislavský korešpodenčný matematický seminár (BKMS),
Stredoslovenský korešpodenčný seminár (SKMS),
Košický korešpodenčný seminár (STROM),
Korešpodenčný seminár z programovania (KSP).

Stručnú informáciu o týchto aktivitách, spolu s kontaktnými adresami, možno nájsť v samostatnej kapitole.

V tomto jubilejnom ročníku sa podarilo 7. júna 2001 v koncertnej sieni konzervatória v Bratislave uskutočniť aj slávnostné zasadnutie SK MO; vyžiadalo si to však enormnú organizačnú prácu a naviac veľmi rýchlu, nakoľko s prípravou akcie sa začalo pomerne neskoro. Nie je možné vymenovať všetkých, ktorí priložili ruku k dielu, ale bolo by neslušné nespomenúť tých, ktorí sa o úspech akcie pričinili mierou vrchovatou: *prof. RNDr. Beloslav Riečan, DrSc.*, *prof. RNDr. Jozef Moravčík, CSc.*, *doc. RNDr. Vladislav Rosa, CSc.*, *doc. RNDr. Tomáš Hecht, CSc.*, *Ivan Lukáč*; svojou troškou prispel aj autor týchto riadkov. Pri príležitosti polstoročnice MO pán minister *Milan Ftáčnik* odovzdal dve malé medaily sv. Gorazda ako jedno z najvyšších rezortných ocenení, a to *prof. RNDr. Jozefovi Moravčíkovi, CSc.* a *doc. RNDr. Tomášovi Hechtovi, CSc.*; ďalších 18 zaslúžilých pracovníkov v MO dostalo ďakovný list MŠ SR a 43 pracovníkov ďakovný list ministra. Medzi ocenenými ďakovným listom MŠ SR bol tiež dlhoročný predseda českého ÚV MO *doc. RNDr. Leo Boček, CSc.*, ktorý sa nemálo zaslúžil o dobrú spoluprácu v MO medzi SR a ČR v poslednom desaťročí. Dovolíme si aj touto cestou poďakovať pánovi ministrovi Ftáčnikovi, že okrem financií prispel aj svojou osobnou účasťou.

Pretože MO je masová súťaž a k jej úspešnému priebehu v celej SR je nutná poctivá práca veľkého počtu vysokokvalifikovaných odborníkov, bol na návrh autora týchto riadkov rozoslaný dopis na krajské úrady, aby KÚ na návrh krajských komisií MO v rámci svojich možností ocenili aspoň časť pracovníkov v MO vo svojich krajoch. Podarilo sa to realizovať v krajoch Prešov, Košice, Nitra, Banská Bystrica, Bratislava a Žilina.

Vojtech Bálint

Výsledky celoštátneho kola, kategória A

Víťazi

1.	Katarína QUITTNEROVÁ	3 G Bilíkova Bratislava	7	7	7	7	7	7	42
2.	Tomáš KULICH	4 G V.B.Nedožerského Prievidza	6	6	7	7	7	7	40
3.	Radovan BAUER	G Poštová, Košice	7	7	5	7	6	7	39
4.	Peter BELLA	3 G Jura Hronca Bratislava	5	6	4	7	7	7	36
	Jana SZOLGAYOVÁ	4 G Grösslingová Bratislava	6	7	7	7	7	2	36
6.	Róbert LUKOŤKA	G J.G.Tajovského B. Bystrica	6	7	4	7	2	6	32
	Zoltán MICS	4 G Mládežnícka, Šahy	4	5	5	4	7	7	32
	Marek TESAŘ	G B.S.Timravy Lučenec	7	6	3	7	7	2	32

Ďalší úspešní riešitelia

9.	Martin MACKO	4 G Školská, Spišská Nová Ves	2	1	6	7	5	7	28
10.	Peter KRČAH	4 G Párovská, Nitra	3	1	0	7	7	7	25
11.	Stanislav MIKLÍK	G J.G.Tajovského, B. Bystrica	2	6	4	4	7	1	24
12.	Tomáš DZETKULIČ	G Pavla Horova Michalovce	2	1	3	7	7	2	22
	Miloš MEDŘÍK	4 G Párovská, Nitra	4	3	0	7	6	2	22
	Michal POKORNÝ	4 G Grösslingová Bratislava	4	5	0	5	7	1	22
15.	Andrej OSUSKÝ	3 G Jura Hronca Bratislava	5	6	2	1	7	0	21
16.	Juraj ŠARINAY	4 G Ľ. Štúra Trenčín	3	1	5	3	7	1	20
	Erika TROJÁKOVÁ	3 G Veľká Okružná, Žilina	3	6	0	2	7	2	20

Ostatní riešitelia

18.	Andrej DUDÍK	4 G Grösslingová Bratislava	5	1	4	3	6	0	19
	Tomáš STRIBULA	3 G Mierová, Levice	6	1	0	5	7	0	19
20.	Zoltán ADAM	3 G H. Selyeho, Komárno	2	1	3	3	7	2	18
	Zuzana KASAROVÁ	G J.G.Tajovského, B. Bystrica	3	6	0	1	7	1	18
22.	Peter ČENDULA	4 G M.M.Hodžu, Lipt. Mikuláš	6	1	3	–	7	0	17
	Tomáš FARKAŠ	4 G Grösslingová Bratislava	6	0	5	1	5	0	17
	Eva SKOPALOVÁ	3 G Popradské nábr., Poprad	3	1	4	2	7	0	17
25.	Ivan DOVICA	G Poštová, Košice	1	3	4	3	4	0	15
26.	Ján MAZÁK	G Poštová, Košice	7	1	1	2	1	2	14
27.	Jaroslav ŠEVČÍK	4 G Veľká Okružná, Žilina	2	1	2	1	4	2	12
28.	Michal KOPERA	4 G Veľká Okružná, Žilina	1	1	2	2	1	3	10

29.	Matej ŠUSTR	4 G Ľ. Štúra Trenčín	2	1	0	2	3	1	9
30.	Juraj LAŠŠUTH	4 G Veľká Okružná, Žilina	2	0	2	0	3	1	8
31.	Lenka BABIAKOVÁ	G Poštová, Košice	0	1	0	–	6	–	7
	Ladislav SZABÓ	3 G Nám. 1. mája, Dunaj. Streda	0	0	0	0	7	0	7
33.	Juraj NEČAS	4 G Nám. Slobody, Skalica	1	1	0	1	3	0	6

Úspešnosť jednotlivých úloh je zaznamenaná v tabuľke.

Počet bodov	**Spolu**	**Číslo úlohy**					
		1.	2.	3.	4.	5.	6.
7 bodov	48	4	4	3	11	19	7
6 bodov	19	6	7	1	0	4	1
5 bodov	13	3	2	4	2	2	0
4 body	13	3	0	6	2	2	0
3 body	19	5	2	4	4	3	1
2 body	25	7	0	4	5	1	8
1 bod	32	3	15	1	5	2	6
0 bodov	26	2	3	10	2	0	9
Priemer	3,62	3,73	3,06	2,79	3,94	5,70	2,50

Výsledky celoštátneho kola, kategória P

Víťazi

1.	Jozef TVAROŽEK	3 G Jura Hronca Bratislava	8	10	7	8	10	43
2.	Marián DVORSKÝ	4 G Šrobárova, Košice	10	7	6	10	9	42
3.	Ján ORAVEC	4 G J.G.Tajovského B. Bystrica	9	6	5	10	10	40
4.	Dávid HARAGA	4 G J.G.Tajovského B. Bystrica	8	8	1	5	9	31
5.	Peter BELLA	3 G Jura Hronca Bratislava	1	10	6	6	7	30
	Pavol JUHOS	3 G Grösslingová Bratislava	5	8	6	4	7	30
	Martin MACKO	4 G Školská, Spišská Nová Ves	8	3	7	3	9	30

Ďalší úspešní riešitelia

8.	Tomáš ZÁTHURECKÝ	6 G V. Paulínyho–Tótha Martin	1	8	6	3	10	28
9.	Miroslav RUDIŠIN	4 G Šrobárova, Košice	9	5	6	2	4	26
10.	Tomáš DZETKULIČ	3 G Pavla Horova Michalovce	3	5	5	3	9	25
11.	Michal POKORNÝ	4 G Grösslingová Bratislava	4	9	6	0	4	23
12.	Pavol MRAVEC	3 G Karola Štúra Modra	5	5	7	3	2	22
13.	Pavol ADAM	G Konštantínova, Prešov	5	3	7	1	3	19

Ostatní riešitelia

14.	Peter KRČAH	4 G Párovská, Nitra	5	1	3	1	6	16
15.	Marek TESAŘ	G B.S.Timravy Lučenec	1	6	1	3	4	15
16.	Ondrej SVITEK	G Karola Štúra Modra	4	1	0	2	6	13
	Michal TVAROŽEK	4 G Jura Hronca Bratislava	5	1	1	0	6	13
18.	Peter GAŽI	4 G Grösslingová Bratislava	1	–	5	0	6	12
	Tomáš KULICH	4 G V.B.Nedožerského Prievidza	3	5	4	0	0	12
	Peter TRUCHLÝ	3 G Párovská, Nitra	1	–	5	1	5	12
	Zuzana VLČKOVÁ	4 G Alejová, Košice	5	1	2	0	4	12
22.	Ľuboš STESKAL	4 G Grösslingová Bratislava	1	3	7	0	0	11
23.	Tomáš VRÁBEL	3 G V. Paulínyho–Tótha Martin	5	2	1	0	0	8
24.	Michal RJAŠKO	2 G Vranov nad Topľou	1	1	1	1	2	6
25.	Boris BURDILIAK	4 G Jura Hronca Bratislava	0	3	1	0	0	4
	Pavol MARKO	4 G Jura Hronca Bratislava	1	–	1	0	2	4

Výsledky krajských kôl

Z príslušného kraja a v príslušnej kategórii A, B, C, P a Z9 sú uvedení všetci, resp. aspoň prvých 10 úspešných riešiteľov. V kategóriách B, C, Z9, ak nie je uvedené inak, sú všetci žiaci študentmi 2., resp. 1., resp. 9. ročníka. Gymnáziá so zameraním na matematiku, študijný odbor 01 sú tieto:

Gymnázium Grösslingová, Bratislava,
Gymnázium Párovská, Nitra,
Gymnázium Veľká Okružná, Žilina,
Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica,
Gymnázium Alejová, Košice,
Gymnázium Poštová, Košice.

Kraj Bratislava

Kategória A

1.	Katarína QUITTNEROVÁ	3 Gymnázium Bilíkova
2.	Peter BELLA	3 Gymnázium Jura Hronca
3.	Jana SZOLGAYOVÁ	4 Gymnázium Grösslingová
4.	Andrej OSUSKÝ	3 Gymnázium Jura Hronca
5.	Tomáš FARKAŠ	4 Gymnázium Grösslingová
	Branislav NOVOTNÝ	4 Gymnázium Grösslingová
7.	Michal MICHALČÍK	4 Gymnázium Grösslingová
8.	Andrej DUDÍK	4 Gymnázium Grösslingová
9.	Elena AXAMÍTOVÁ	4 Gymnázium Grösslingová
	Michal BURGER	2 Gymnázium Grösslingová
	Juraj FEILHAUER	4 Gymnázium Grösslingová
	Václav KOLÁTOR	4 Gymnázium Grösslingová
	Michal POKORNÝ	4 Gymnázium Grösslingová
	Martin SVETLÍK	3 Gymnázium Grösslingová
	Štefan ŠURINA	3 Gymnázium Jura Hronca

Kategória B

1.	Ján MARKOŠ	Gymnázium Jura Hronca
2.	Matej BLAŽEK	Gymnázium Grösslingová

	Juliana LIPKOVÁ	Gymnázium Jura Hronca
	Edita ROLLOVÁ	Gymnázium Grösslingová
5.	Tomáš MIKUŠ	Gymnázium Jura Hronca
	Michal POLAČEK	Gymnázium Haanova

Kategória C

1.	Martin TÓTH	Gymnázium Grösslingová
2.	Michal BURGER	Gymnázium Grösslingová
	Katarína KITTANOVÁ	Gymnázium Hubeného
4.	Závodný JAKUB	Gymnázium Grösslingová
5.	Juraj ZEMIANEK	Gymnázium I. Horvátha
6.	Michal KOLESÁR	Gymnázium Karola Štúra, Modra
	Mária ŠOLTÉSOVÁ	Gymnázium Grösslingová
8.	Anton ŠTAFÁNEK	Gymnázium Jura Hronca
9.	Matúš DEKÁNEK	Gymnázium Jura Hronca
10.	Martin FIALA	Gymnázium Grösslingová
	Peter HANDLOVIČ	Gymnázium Grösslingová
	Jana PODSTUPKOVÁ	Gymnázium Grösslingová
	Michal POLÁČIK	Gymnázium Tomášiková
	Barbora TRUBENOVÁ	Gymnázium Jura Hronca

Kategória Z9

1.	František SIMANČÍK	Gymnázium Grösslingová
2.	Andrej BORSUK	Gymnázium Grösslingová
	Stanislava SOJÁKOVÁ	ZŠ Turnianska
4.	Kristína HÝROŠŠOVÁ	ZŠ Dérera, Malacky
	Jana MAJERÍKOVÁ	ZŠ a Gymnázium Košická
	Veronika PETRÁKOVÁ	ZŠ Turnianska
	Vojtech VILLARIS	ZŠ a Gymnázium Košická
8.	Martina BREZOVÁ	Gymnázium Grösslingová
	Viktor KUBINEC	ZŠ Prokofievova
	Ján MIKLÓSSY	Gymnázium Grösslingová

Kategória P

1.	Peter BELLA	3 Gymnázium Jura Hronca
2.	Pavol MRAVEC	3 Gymnázium Karola Štúra, Modra
3.	Michal TVAROŽEK	4 Gymnázium Jura Hronca
4.	Boris BURDILIAK	4 Gymnázium Jura Hronca
5.	Michal POKORNÝ	4 Gymnázium Grösslingová

6.	Pavol MARKO	4	Gymnázium Jura Hronca
7.	Pavol JUHOS	3	Gymnázium Grösslingová
8.	Ľuboš STESKAL	4	Gymnázium Grösslingová
	Jozef TVAROŽEK	3	Gymnázium Jura Hronca
10.	Ondrej SVITEK		Gymnázium Karola Štúra, Modra

Kraj Nitra

Kategória A

1.	Miloš MEDŘÍK	4	Gymnázium Párovská, Nitra
	Zoltán MICS	4	Gymnázium maď., Šahy
3.	Peter KRČAH	4	Gymnázium Párovská, Nitra
4.	Tomáš STRIBULA	3	Gymnázium Levice
5.	Zoltán ADAM	3	Gymnázium maď., Komárno
6.	Zuzana TREPÁČOVÁ	3	Gymnázium Topoľčany
7.	Ľuboš FAZEKAŠ	4	Gymnázium Zlaté Moravce
	Ildikó KÁSA	3	Gymnázium maď., Komárno
	Endre KURUCZ	4	Gymnázium maď., Komárno
	Martin MOLNÁR	1	Gymnázium Levice
	Tibor PETÁK	3	Gymnázium Komárno
	Péter RAKYTA	1	Gymnázium maď., Komárno

Kategória B

1.	Péter KOLTAI	Gymnázium maď., Komárno
2.	Pavol CVIK	Gymnázium Levice
3.	Jozef VESELÝ	Gymnázium Golianova, Nitra
4.	Peter SPÁČ	Gymnázium Golianova, Nitra
5.	Juraj ĎURECH	Gymnázium Golianova, Nitra
	Stanislav HAVRAN	Gymnázium Zlaté Moravce
	Martin ŠUŠKA	Gymnázium Levice
	Tomáš TKÁČ	Gymnázium Piaristická, Nitra
	Marek VRÁBEL	Gymnázium Párovská, Nitra

Kategória C

1.	Marek JANČUŠKA	Gymnázium Párovská, Nitra
	Martin MOLNÁR	Gymnázium Levice
	Péter RAKYTA	Gymnázium maď., Komárno
4.	Silvia BAGÓCSIOVÁ	Gymnázium maď., Komárno
	Jozef CIBIČEK	ZŠ Komenského, Komárno

	László FEKETE	Gymnázium maď., Komárno
	Róbert PATHÓ	Gymnázium Štúrovo
	Miroslav ŠTOLC	Gymnázium Párovská, Nitra
9.	Peter MOLNÁR	Gymnázium Nové Zámky
	Juraj PISÁR	SPŠE Nové Zámky

Kategória Z9

1.	Matej PIVOLUSKA	ZŠ Pri Podlužianke, Levice
2.	Bystrík PEŠL	ZŠ Gogoľova, Topoľčany
3.	Marek KRČAH	Gymnázium Párovská, Nitra
4.	Jaroslava BÓNOVÁ	ZŠ Volkovce
	András MORAUSZKI	ZŠ maď., Želiezovce
	Martin TAKÁČ	CZŠ Nové Zámky
7.	Balázs ÁCSAY	ZŠ maď., Marcelová
	Katarína KUNOVÁ	ZŠ Komenského, Komárno
	Tomáš PRINCZKEL	ZŠ maď., Želiezovce
10.	Kristián KACZ	ZŠ maď., Školská, Kolárovo
	Michal KESELY	Gymnázium Párovská, Nitra
	Erik NAGY	ZŠ Sídlisko Váh, Šaľa
	Martin NOVÁČIK	ZŠ Tribečská, Topoľčany
	Ágnes ORBÁN	ZŠ a G cirk. maď., Šahy

Kategória P

1.	Peter TRUCHLÝ	4 Gymnázium Párovská, Nitra
2.	Peter KRČAH	4 Gymnázium Párovská, Nitra
3.	Jozef VESELÝ	2 Gymnázium Golianova, Nitra

Kraj Trnava

Kategória A

1.	Ladislav SZABÓ	3 Gymnázium maď., Dunajská Streda
2.	Zoltán DOMONKOS	3 Gymnázium maď., Dunajská Streda
	Juraj NEČAS	4 Gymnázium Skalica
	Zoltán CSONGA	3 Gymnázium maď., Dunajská Streda
5.	Marta ZAJACOVÁ	3 Gymnázium J. Hollého Trnava
6.	Filip VALAŠEK	4 Športové gymnázium Trnava

Kategória B

1.	Lívia ŠMÁTRALOVÁ	Gymnázium Z. Kodálya maď., Galanta

Kategória C

1.	Sámuel PERES	Gymnázium maď., Dunajská Streda
2.	Tomáš MIKLÁNEK	Gymnázium J. Hollého, Trnava
3.	Pavol GÁL	Gymnázium Sereď
4.	Lukáš HRÍBÍK	Gymnázium A. Merici, Trnava
5.	Katarína JUDINYOVÁ	Športové gymnázium J. Bottu, Trnava
6.	Jana MAKÝŠOVÁ	Gymnázium Komenského, Hlohovec
7.	Karol GYRI	Gymnázium Z. Kodálya maď., Galanata
	Csilla KROMMEROVÁ	Gymnázium Z. Kodálya maď., Galanata
	Martin PAULECH	Gymnázium Komenského, Hlohovec
	Žaneta TRUMPEŠOVÁ	Gymnázium Skalica

Kategória Z9

1.	Lucia BANIČOVÁ	VII. ZŠ Brezová, Piešťany
	Szabolcs CSÉFALVAY	ZŠ maď., Veľký Meder
3.	Dávid ISTVÁN	Gymnázium maď., Dunajská Streda
	Matej KAMENÁR	ZŠ Komenského, Sereď
	Veronika PETRINCOVÁ	III. ZŠ Senica
	Ivana ŠVIHRANOVÁ	ZŠ Štefánikova, Galanta
	Péter TAMÁSI	ZŠ maď., Veľký Meder
8.	Zuzana DANČÍKOVÁ	VII. ZŠ Brezová, Piešťany
	Mariana NEDOROSTOVÁ	V. ZŠ Piešťany
	Jozef SKOČÍK	ZŠ Koperníkova, Hlohovec

V kategórii P nikto nezískal dostatočný počet bodov na to, aby sa stal úspešným riešiteľom.

Kraj Trenčín

Kategória A

1.	Tomáš KULICH	4 Gymnázium Prievidza
	Juraj ŠARINAY	4 Gymnázium Ľudovíta Štúra Trenčín
2.	Michal PECÚCH	3 Gymnázium Ľudovíta Štúra Trenčín
	Matej ŠUSTR	4 Gymnázium Ľudovíta Štúra Trenčín

Kategória B

1.	Barbora GÁBELOVÁ	Gymnázium 1. mája, Púchov
2.	Martin MUŠKA	Gymnázium Ľudovíta Štúra, Trenčín
3.	Vladimír SADLOŇ	Gymnázium 1. mája, Púchov
	Michal STAŇO	Gymnázium 1. mája, Púchov

Kategória C

1.	Peter AUGUSTÍN	Gymnázium M.R.Štefánika Nové mesto n/V
2.	Igor TRÚCHLIK	Gymnázium Školská, Považská Bystrica
3.	Juraj PRIEVALSKÝ	Gymnázium Nedožerského, Prievidza
4.	Peter MACEJKA	SPŠ Športovcov, Považská Bystrica
5.	Zuzana RYCHTÁRECHOVÁ	Gymnázium Radlinského, Bánovce n/B
6.	Martin PARGAČ	Gymnázium Ľudovíta Štúra Trenčín
7.	Tomáš GIECI	SPŠ Bánovce nad Bebravou
8.	Peter SIVÝ	SPŠ Obrancov mieru, Dubnica n/V
9.	Michal KRÁSNY	Gymnázium 1. mája, Púchov
	Bohumil ŠKRÍP	Gymnázium Nedožerského, Prievidza
	Eva HAMAJOVÁ	Gymnázium Nedožerského, Prievidza
	Martin SENEŠI	Gymnázium Školská, Dubnica n/V

Kategória Z9

1.	Malo
	Rodina
3.	Pristach
4.	Mikloš
	Moriš
	Plačko
	Šošovičková
8.	Bukvay
	Černo
	Grman
	Hrdina
	Jurdík
	Lachký

Kategória P

1.	Tomáš KULICH	4 Gymnázium V.B.Nedožerského, Prievidza

Kraj Žilina

Kategória A

1.	Peter ČENDULA	4 Gymnázium Liptovský Mikuláš
	Erika TROJÁKOVÁ	3 Gymnázium Veľká Okružná Žilina
3.	Michal KOPERA	4 Gymnázium Veľká Okružná Žilina
4.	Milan KOLKUS	4 Gymnázium Čadca
	Jaroslav ŠEVČÍK	4 Gymnázium Veľká Okružná Žilina
	Tomáš ŠKEREŇ	3 Gymnázium Veľká Okružná Žilina
7.	Jakub DAUBNER	3 Gymnázium Veľká Okružná Žilina
	Juraj LAŠŠUTH	4 Gymnázium Veľká Okružná Žilina
	Michal PEŠTA	4 Gymnázium Liptovský Mikuláš
10.	Jozef JURÍČEK	4 Gymnázium Veľká Okružná Žilina
	Branislav MIKULÁŠ	6 Gymnázium V. Paulínyho–Tótha Martin

Kategória B

1.	Milan ŠATKA	Gymnázium Liptovský Hrádok
2.	Juraj VOZÁRIK	Gymnázium Liptovský Mikuláš

Kategória C

1.	Martin ŠKORUPA	Gymnázium Liptovský Mikuláš
2.	Bianka KOVÁČOVÁ	Gymnázium Veľká Okružná Žilina
	Miroslav MAHDOŇ	Gymnázium Veľká Okružná Žilina
	Zuzana STRAŽOVCOVÁ	Gymnázium sv. Františka Žilina
5.	Peter MIKULÁŠ	SPŠ Novomeského, Martin
6.	Lucia GULDANOVÁ	Gymnázium Veľká Okružná Žilina
	Daniela JANÁČOVÁ	Gymnázium Veľká Okružná Žilina
8.	Rastislav LENHARDT	Gymnázium Liptovský Mikuláš
9.	Tomáš BAČA	Gymnázium Varšavská, Žilina
	Andrej BOSÍK	Gymnázium Veľká Okružná Žilina
	Monika LAŠTÍKOVÁ	Gymnázium Námestovo

Kategória Z9

1.	Marek HANES	Gymnázium J. Lettricha Martin
2.	Edita DOLEJŠIA	Gymnázium Varšavská, Žilina
	Matej FABŠÍK	ZŠ Nábrežná, Kysucké Nové Mesto

	Katarína KURICOVÁ	ZŠ Zaymusa, Žilina
	Martin LADECKÝ	ZŠ Hliny VII., Žilina
	Peter MACKO	ZŠ J.Kráľa, Liptovský Mikuláš
	Peter PIJÁK	ZŠ Nesluša
8.	Vladimír BUTEK	ZŠ Hliny V., Žilina
	Richard STAROŇ	ZŠ Bobrovec
10.	Daniel ČIERNÝ	Gymnázium J. Lettricha Martin

Kategória P

1.	Tomáš ZÁTHURECKÝ	6 Gymnázium V. Paulínyho–Tótha Martin
2.	Michal KOPERA	4 Gymnázium Veľká Okružná Žilina
3.	Tomáš VRÁBEL	3 Gymnázium V. Paulínyho–Tótha Martin
4.	Marek ŠAMAJ	4 Gymnázium Hlinská, Žilina
5.	Luboš PAZDERA	3 Gymnázium JMH Čadca
	Peter SMOLKA	3 Gymnázium JMH Čadca
7.	Miroslav CHABREČEK	4 Gymnázium JMH Čadca
	Marián REVAY	3 Gymnázium JMH Čadca
9.	Martin DUBEC	2 Gymnázium A. Škrábika, Rajec

Kraj Banská Bystrica

Kategória A

1.	Robert LUKOŤKA	Gymnázium J.G.Tajovského B. Bystrica
2.	Stanislav MIKLÍK	Gymnázium J.G.Tajovského B. Bystrica
3.	Zuzana KASAROVÁ	Gymnázium J.G.Tajovského B. Bystrica
	Marek TESAŘ	Gymnázium B.S.Timravy Lučenec
5.	Ján GREGOR	Gymnázium J.G.Tajovského B. Bystrica
	Branislav HUDEC	Gymnázium J.G.Tajovského B. Bystrica

Kategória C

1.	Hana BUDÁČOVÁ	Gymnázium B.S.Timravy Lučenec
2.	Zuzana SVITEKOVÁ	Gymnázium J.G.Tajovského B. Bystrica
3.	Dušan LEITNER	Gymnázium Veľký Krtíš
4.	Tomáš OSIČKA	Gymnázium J.G.Tajovského B. Bystrica
5.	Elena DUŠKOVÁ	Gymnázium Kremnica
6.	Lucia KOMENDOVÁ	Gymnázium J.G.Tajovského B. Bystrica
	Martin LYSÍK	Gymnázium J.G.Tajovského B. Bystrica
	Roman STOKLASA	Gymnázium J.G.Tajovského B. Bystrica

	Ivan ŠTUBŇA	Gymnázium J.G.Tajovského B. Bystrica
	Martin ŠVANTNER	Gymnázium J.G.Tajovského B. Bystrica

Kategória Z9

1.	Mirislav CICKO	ZŠ Badín
	Jozef BODNÁR	ZŠ Mládežnícka, Fiľakovo
3.	Róbert ASTALOŠ	ZŠ P. Dobšinského, Rimavská Sobota
4.	Ján MIŠKOV	Gymnázium A. Sládkoviča, Krupina
	Pavel BAHNO	ZŠ Žiar nad Hronom
	Ján TUROŇ	ZŠ Pionierska, Brezno
7.	Soňa KYSEĽOVÁ	IV. ZŠ Detva
	Lívia KRAKOVSKÁ	Gymnázium Veľký Krtíš
9.	Andrej NEMČEK	OŠG Banská Bystrica
10.	Michal LULČO	ZŠ Centrum, Hnúšťa
	Veronika STANKOVIANSKA	ZŠ Radvaň

Kategória P

1.	Ján ORAVEC	Gymnázium J.G.Tajovského B. Bystrica
2.	Dávid HARAGA	Gymnázium J.G.Tajovského B. Bystrica
3.	Marek TESAŘ	Gymnázium B.S.Timravy Lučenec
4.	Tomáš VÁŇA	Gymnázium Žiar nad Hronom

V kategórii B nikto nezískal dostatočný počet bodov na to, aby sa stal úspešným riešiteľom.

Kraj Košice

Kategória A

1.	Ján MAZÁK	Gymnázium Poštová, Košice
2.	Ján DOVICA	Gymnázium Poštová, Košice
3.	Martin MACKO	Gymnázium Školská, Spišská Nová Ves
4.	Lenka BABIAKOVÁ	Gymnázium Poštová, Košice
5.	Radovan BAUER	Gymnázium Poštová, Košice
	Peter SASÁK	Gymnázium Alejová, Košice
7.	Ján UHRÍN	Gymnázium Pavla Horova Michalovce
8.	Tomáš DZETKULIČ	Gymnázium Pavla Horova Michalovce
9.	Daniel REITZNER	Gymnázium Šrobárova, Košice
	Boris ZÁPOTOCKÝ	Gymnázium Poštová, Košice
	Peter MARKO	Gymnázium Alejová, Košice

Kategória B

1.	Peter NAWKA	Gymnázium Pavla Horova Michalovce

Kategória C

1.	Ján BORSÍK	Gymnázium Poštová, Košice
2.	Pavol TRENKLER	Gymnázium sv. T. Akvinského, Košice
	Tomáš MARCINKO	Gymnázium Alejová, Košice
4.	Ladislav MIKEŠ	Gymnázium Alejová, Košice
	Roman ZÁKUTNÝ	Gymnázium Poštová, Košice
6.	Darina POLOVKOVÁ	Gymnázium Školská, Spišská Nová Ves
	Martin PANCÁK	Gymnázium Poštová, Košice
8.	Tomáš GREŠLÍK	Gymnázium Pavla Horova Michalovce
9.	Peter JUHÁSZ	Gymnázium Pavla Horova Michalovce
	Dušan ŠERFZ	Gymnázium Alejová, Košice
	Veronika CZIPPELOVÁ	Gymnázium J.A.Komenského Košice

Kategória Z9

1.	Jozef FETTERIK	ZŠ Fábryho, Košice
2.	Katarína DUNAJSKÁ	ZŠ Nad Medzou, Spišská Nová Ves
3.	Štefan GURSKÝ	Gymnázium Alejová, Košice
	Adrián KOVÁČ	II. ZŠ Michalovce
	Marián SOMENTÁL	ZŠ Ing. Kožucha, Spišská Nová Ves
6.	Michal REPISKÝ	ZŠ Drábova, Košice
	Jana SLOSARČÍKOVÁ	ZŠ Lechkého, Košice
	Dušan PETRIČKO	ZŠ Dneperská, Košice
	Katarína SAVINCOVÁ	VII. ZŠ Michalovce
	Michal DZETKULIČ	I. ZŠ Michalovce
	Ondrej KOČAN	VII. ZŠ Michalovce

Kategória P

1.	Marián DVORSKÝ	4 Gymnázium Šrobárova, Košice
2.	Zuzana VLČKOVÁ	4 Gymnázium Alejová, Košice
3.	Miroslav RUDIŠIN	4 Gymnázium Šrobárova, Košice
4.	Martin MACKO	4 Gymnázium Školská, Spišská Nová Ves
5.	Tomáš DZETKULIČ	3 Gymnázium Pavla Horova Michalovce
6.	Ján KATRENIČ	3 Gymnázium Školská, Spišská Nová Ves
7.	Radovan BAUER	3 Gymnázium Poštová, Košice

8.	Ján MAZÁK	3 Gymnázium Poštová, Košice
	Kamil PAULÍNY	3 Gymnázium Poštová, Košice
10.	Eva VASILOVÁ	4 Gymnázium Pavla Horova Michalovce

Kraj Prešov

Kategória A

1.	Eva SKOPALOVÁ	3 Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad
2.	Daniel JOŠČÁK	4 Gymnázium Konštantínova, Prešov
3.	Katarína KVAŠŇÁKOVÁ	1 Gymnázium Konštantínova, Prešov

Kategória B

1.	Michal RJAŠKO	Gymnázium Vranov nad Topľou
2.	Jozef BARLAŠ	Gymnázium Snina

Kategória C

1.	Zuzana CEĽUCHOVÁ	Gymnázium Konštantínova, Prešov
	Katarína KVAŠŇÁKOVÁ	Gymnázium Konštantínova, Prešov
3.	Zuzana BATMENDIYNOVA	Gymnázium Stará Ľubovňa
4.	Rastislav PJONTEK	Gymnázium D. Tatarku Poprad
5.	Lukáš MERIČKO	Gymnázium L. Svobodu Humenné
	Tomáš MOLOKAČ	Gymnázium L. Svobodu Humenné
	Daniel VOJTEK	Gymnázium Konštantínova, Prešov
	Vladimír ŽÁK	Gymnázium L. Stöckela Bardejov
9.	Jozef MARČIN	Gymnázium L. Stöckela Bardejov
	Andrea REGULOVÁ	Gymnázium L. Svobodu Humenné

Kategória Z9

1.	Martin BEKESS	Gymnázium D. Tatarku, Poprad
	Matúš TEJIŠČÁK	ZŠ Ľubotice
2.	Ondrej FRÖHLICH	ZŠ Šrobárova, Prešov
3.	Lenka HLADOVÁ	ZŠ Bernolákova, Vranov n/T
	Lenka POLOVKOVÁ	ZŠ Kudlovská, Humenné
	Denisa HOSTOVÁ	ZŠ Kúpeľná, Prešov
7.	Zdenka KALANINOVÁ	ZŠ Kudlovská, Humenné

	Gabriel OLEKŠÁK	ZŠ Dr. Fischera, Kežmarok
	Tatiana GONDEKOVÁ	ZŠ Ul. 8. mája, Svidník
10.	Anton REPKO	Gymnázium sv. Mikuláša, Prešov
	Lukáš SLEBODNÍK	ZŠ G. Haina, Levoča

Kategória P

1.	Pavol ADAM	4	Gymnázium Konštantínova, Prešov
2.	Michal RJAŠKO	2	Gymnázium Daxnerova, Vranov nad Topľou
3.	Michal TEKEĽ	3	Gymnázium Konštantínova, Prešov
4.	Peter BANDA	4	Gymnázium Konštantínova, Prešov
5.	Martin ADAM	4	SPŠE Plzenská, Prešov

Zadania súťažných úloh

Kategória C

C – I – 1

Nájdite všetky trojciferné čísla n také, že posledné trojčíslie čísla n^2 je zhodné s číslom n.

(J. Zhouf)

C – I – 2

Zostrojte lichobežník, ak sú dané dĺžky 9 cm a 12 cm jeho uhlopriečok, dĺžka 8 cm strednej priečky a vzdialenosť 2 cm stredov uhlopriečok.

(E. Kováč)

C – I – 3

Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b, pre ktoré platí

$$n(a,b) + D(a,b) = 63,$$

kde $n(a,b)$ označuje najmenší spoločný násobok a $D(a,b)$ najväčší spoločný deliteľ čísel a, b.

(L. Boček)

C – I – 4

Dokážte, že pre dĺžky a, b, c strán ľubovoľného trojuholníka platí

$$\frac{(a^2+b^2)c^2-(a^2-b^2)^2}{abc^2} \leqq 2.$$

Pre ktoré trojuholníky nastane v predchádzajúcom vzťahu rovnosť?

(J. Šimša)

C – I – 5

Tridsať maturantov jedného gymnázia si podalo prihlášku na ďalšie štúdium na niektorú zo šiestich fakúlt Slovenskej technickej univerzity. Využili možnosť podať viac prihlášok, a tak polovica žiakov podala prihlášku aspoň na tri fakulty. Tretina študentov si podala prihlášku na viac ako tri fakulty. Na fakultu architektúry sa vzhľadom na talentové prijímacie skúšky nehlásil nikto. Dokážte, že na niektorú zo zvyšných piatich fakúlt sa prihlásilo menej ako dvadsať študentov.

(P. Hliněný)

C – I – 6

Do danej kružnice s polomerom r vpíšte lichobežník $ABCD$ s kratšou základňou CD a priesečníkom uhlopriečok E tak, aby platilo $|BC| = |CD|$ a $|AE| = r$.

(P. Leischner)

C – S – 1

Nájdite všetky trojice a, b, c prirodzených čísel pre ktoré súčasne platí

$$n(ab, c) = 2^8, \qquad n(bc, a) = 2^9, \qquad n(ca, b) = 2^{11},$$

kde $n(x, y)$ označuje najmenší spoločný násobok prirodzených čísel x a y.

(P. Černek)

C – S – 2

V rovine je daný štvorec $ABCD$. Kružnica k prechádza bodmi A, B a dotýka sa priamky CD. Označme M ($M \neq B$) priesečník kružnice k a strany BC. Určte pomer $|CM| : : |BM|$.

(J. Švrček)

C – S – 3

Pre ktoré dvojciferné čísla n je číslo $n^3 - n$ deliteľné číslom sto?

(J. Zhouf)

C – II – 1

Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b, pre ktoré platí

$$a + b + D(a, b) + n(a, b) = 50\,,$$

kde $D(a, b)$ označuje najväčší spoločný deliteľ a $n(a, b)$ najmenší spoločný násobok prirodzených čísel a, b.

(J. Šimša)

C – II – 2

Kružnice $k(S, r)$ a $l(O, R)$ sa zvonku dotýkajú v bode T. Ich spoločná dotyčnica v bode T pretína ich vonkajšiu spoločnú dotyčnicu v bode M. Dokážte, že - SOM je pravouhlý a vyjadrite jeho obsah pomocou polomerov r, R daných kružníc.

(P. Leischner)

C – II – 3

Nájdite všetky dvojice kladných čísel x, y, ktoré sú riešením sústavy rovníc

$$x \cdot y_{10} = 195{,}6,$$
$$y \cdot x_{10} = 241{,}7.$$

Zápis z_{10} označuje číslo, ktoré vznikne zaokrúhlením čísla z na desiatky.

(S. Bednářová)

C – II – 4

Zostrojte taký trojuholník ABC, pre ktorý platí, že výška a ťažnica z vrcholu C delia ťažnicu z vrcholu A na tri zhodné úsečky, ak je daná dĺžka strany AB a veľkosť výšky z vrcholu C.

(J. Földes)

Kategória B

B – I – 1

V obore kladných čísel riešte sústavu rovníc

$$3x + y_{10} = 598{,}6$$
$$x_{10} + 2y = 723{,}4$$

pričom x_{10} a y_{10} označujú postupne čísla x a y zaokrúhlené na desiatky.

(S. Bednářová)

B – I – 2

Na povrchu kocky $ABCDEFGH$ je zostrojená lomená čiara zložená zo štyroch zhodných úsečiek v stenách $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$ a $GHEF$, ktorá vychádza z vrchola A a končí vo vrchole E. Určte, v akom pomere delí táto lomená čiara hranu CG.

(J. Zhouf)

B – I – 3

Do každého poľa štvorcovej tabuľky $n \times n$ vpíšeme jedno z čísel $1, 2, \ldots, n$ tak, aby v každom riadku aj v každom stĺpci boli buď všetky čísla rovnaké, alebo všetky navzájom rôzne. Príkladom pre $n = 5$ je nasledujúca tabuľka

5	4	1	2	3
3	3	3	3	3
4	1	2	5	3
1	2	5	4	3
2	5	4	1	3

Označme S súčet všetkých čísel tabuľky. Koľko rôznych hodnôt S pre dané n existuje?

(J. Šimša)

B – I – 4

Nech k je kružnica opísaná trojuholníku ABC, D je priesečník ťažnice na stranu AB s kružnicou k. Dotyčnice ku kružnici k v bodoch A, B, C, D vytvárajú štvoruholník $PQRS$. Zistite, pre ktoré trojuholníky ABC je štvoruholník $PQRS$ tetivový.

(J. Földes)

B – I – 5

Určte všetky polynómy $P(x)$ také, že pre každé reálne číslo x je splnená rovnosť

$$P(2x) = 8P(x) + (x-2)^2.$$

(P. Černek)

B – I – 6

Zostrojte trojuholník ABC s obsahom $18\,\mathrm{cm}^2$ a nasledujúcou vlastnosťou: obvod každého pravouholníka $KLMN$, ktorého vrcholy K, L ležia na úsečke AB a body M, N postupne na úsečkách BC, AC, je rovný trom pätinám obvodu trojuholníka ABC.

(S. Bednářová)

B – S – 1

Nájdite všetky trojciferné čísla n, ktorých druhá mocnina končí rovnakým trojčíslim ako druhá mocnina čísla $3n-2$.

(J. Šimša)

B – S – 2

Je daný tetivový štvoruholník $ABCD$. Označme E priesečník priamok BC a AD. Ak leží priesečník uhlopriečok AC a BD na osi uhla AEB, tak je trojuholník ABE rovnoramenný. Dokážte.

(E. Kováč)

B – S – 3

Určte mnohočleny P a Q také, že pre všetky reálne čísla x platí

$$Q(x^2) = (x+1)^4 - x\big(P(x)\big)^2.$$

(P. Černek)

B – II – 1

Určte všetky reálne čísla p také, že pre ľubovoľné kladné čísla x, y platí nerovnosť

$$\frac{x^3 + py^3}{x+y} \geqq xy.$$

(J. Bábeľa)

B – II – 2

Daný je trojuholník ABC. Zostrojte rovnobežník $KLMN$ tak, aby jeho vrcholy K a L ležali na strane AB, vrchol M na strane BC, vrchol N na strane AC a aby trojuholníky AKN, LBM a NMC mali rovnaké obsahy.

(J. Šimša)

B – II – 3

Určte všetky prirodzené čísla n, pre ktoré je podiel

$$\frac{(n^2)_{10}}{(n_{10})^2}$$

celé číslo. Zápis z_{10} označuje číslo, ktoré vznikne zaokrúhlením čísla z na desiatky.

(S. Bednářová)

B – II – 4

Nájdite všetky ostrouhlé trojuholníky ABC, ktorých ťažisko T splýva s priesečníkom výšok trojuholníka PQR, pričom body P, Q, R sú poporadí priesečníky polpriamok opačných k polpriamkam TA, TB, TC s kružnicou opísanou trojuholníku ABC.

(J. Földes)

Kategória A

A – I – 1

V urne sú len biele a čierne guličky, ktorých počet zaokrúhlený na stovky je 1 000. Pravdepodobnosť vytiahnutia dvoch čiernych guličiek je o $\frac{17}{43}$ väčšia ako pravdepodobnosť vytiahnutia dvoch bielych guličiek. Koľko bielych a koľko čiernych guličiek je v urne? (Pravdepodobnosť vytiahnutia ktorejkoľvek guličky je rovnaká.)

(P. Černek)

A – I – 2

Nech a_1, a_2 sú prirodzené čísla a nech pre každé prirodzené $n \geqq 2$ je číslo a_{n+1} o 1 väčšie ako najväčší nepárny deliteľ súčtu $a_n + a_{n-1}$. Dokážte, že postupnosť $a_1, a_2, a_3, \ldots$ je od určitého člena počínajúc periodická. Nájdite všetky také postupnosti, ktoré sú periodické už od prvého člena.

(J. Bábeľa)

A – I – 3

V rovine je daný ostrouhlý trojuholník ABC. Päty výšok z vrcholov A, B označme postupne A_1, B_1. Dotyčnice kružnice opísanej trojuholníku CA_1B_1 zostrojené v bodoch A_1, B_1 sa pretínajú v bode M. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom AMB_1, BMA_1, CA_1B_1 prechádzajú jedným bodom.

(J. Švrček)

A – I – 4

V obore reálnych čísel riešte sústavu nerovníc

$$\begin{aligned} \sin x + \cos y &\geqq \sqrt{2}, \\ \sin y + \cos z &\geqq \sqrt{2}, \\ \sin z + \cos x &\geqq \sqrt{2}. \end{aligned}$$

(J. Švrček)

A – I – 5

Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x, y platí

$$x^2 + y^2 + 2f(xy) = f(x+y) \cdot \big(f(x) + f(y)\big).$$

(E. Kováč)

A – I – 6

Zostrojte lichobežník $ABCD$, ak sú dané dĺžky jeho ramien $|BC| = 4{,}5\,\mathrm{cm}$, $|DA| = 3\,\mathrm{cm}$ a veľkosť 75° uhla, ktorý zvierajú priamky BC a AD, a ak navyše platí $|AB| \cdot |CD| = |AC|^2$.

(E. Kováč)

A – S – 1

Nájdite všetky reálne čísla p, pre ktoré má sústava nerovníc

$$\begin{aligned} 25 + 2x^2 &\leqq 13y + 10z - p, \\ 25 + 3y^2 &\leqq 6z + 10x, \\ 25 + 4z^2 &\leqq 6x + 5y + p \end{aligned}$$

s neznámymi x, y, z riešenie v obore reálnych čísel.

(J. Švrček)

A – S – 2

Je daný lichobežník $ABCD$ so základňou AB dĺžky a, v ktorom sú oba uhly ABC a ADB pravé. Na strane AB leží bod M taký, že úsečka MD je kolmá na AC a úsečka MC je kolmá na BD. Určte dĺžky ostatných strán lichobežníka.

(J. Zhouf)

A – S – 3

Nájdite všetky štvorciferné čísla $\overline{abcd}$, ktoré sú deliteľné každým z dvojciferných čísel $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$, pričom číslice a, b, c, d sú nepárne a nie všetky rovnaké.

(J. Šimša)

A – II – 1

Nájdite najmenšie štvorciferné číslo n, pre ktoré má sústava

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + y^2x + x^2y &= n, \\ x^2 + y^2 + x + y &= n + 1 \end{aligned}$$

iba celočíselné riešenia.

(J. Zhouf)

A – II – 2

Určte všetky reálne čísla s a t, pre ktoré je grafom funkcie

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + s}{t|x-1| + x + 7}$$

lomená čiara zložená z dvoch polpriamok.

(P. Černek)

A – II – 3

Je daná kružnica $k(S, r)$ a na nej body M, N také, že uhol MSN je ostrý. Ľubovoľným bodom X menšieho z oblúkov MN veďme rovnobežku s priamkou MS a označme Y jej priesečník s úsečkou SN. Zostrojte taký bod X, pre ktorý je obsah trojuholníka SXY maximálny.

(P. Černek)

A – II – 4

Určte všetky funkcie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x a y platí

$$f\bigl(x^2 + f(y)\bigr) = (x-y)^2 \cdot f(x+y)\,.$$

(P. Calábek)

A – III – 1

Určte všetky mnohočleny $P(x)$ s reálnymi koeficientami také, že pre všetky reálne čísla x platí

$$\bigl(P(x)\bigr)^2 + P(-x) = P(x^2) + P(x).$$

(P. Calábek)

A – III – 2

V rovine je daný trojuholník PQX, pričom $|PQ| = 3\,\mathrm{cm}$, $|PX| = 2{,}6\,\mathrm{cm}$, $|QX| = 3{,}8\,\mathrm{cm}$. Zostrojte pravouhlý trojuholník ABC tak, aby sa jeho vpísaná kružnica dotýkala prepony AB v bode P, odvesny BC v bode Q a aby bod X ležal na priamke AC.

(J. Šimša)

A – III – 3

Nájdite všetky trojice reálnych čísel a, b, c, pre ktoré je množinou všetkých riešení nerovnice

$$\sqrt{2x^2 + ax + b} > x - c$$

s neznámou x množina $(-\infty, 0\rangle \cup (1, \infty)$.

(P. Černek)

A – III – 4

V istom jazyku je n písmen. Skupina písmen (napísaných za sebou) je slovom práve vtedy, keď sa medzi žiadnymi dvoma rovnakými písmenami nenachádzajú dve rovnaké písmená. Určte počet všetkých slov maximálnej dĺžky.

(K. Černeková)

A – III – 5

Z papiera bol vystrihnutý rovnoramenný lichobežník $C_1AB_2C_2$ s kratšou základňou B_2C_2. Pätu kolmice zo stredu D ramena C_1C_2 na základňu AC_1 označíme B_1. Po prehnutí papiera pozdĺž úsečiek DB_1, AD a AC_2 sa body C_1, C_2 premiestnili v priestore do jedného bodu C a body B_1, B_2 do bodu B. Vznikol tak model štvorstena $ABCD$ s objemom $64\,\mathrm{cm}^3$. Určte dĺžky strán pôvodného lichobežníka.

(P. Leischner)

A – III – 6

Dané sú prirodzené čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a funkcia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ taká, že $f(x) = 1$ pre každé celé $x < 0$ a

$$f(x) = 1 - f(x - a_1)\, f(x - a_2) \cdots f(x - a_n)$$

pre každé celé $x \geqq 0$. Dokážte, že existujú prirodzené čísla s a t také, že pre každé celé $x > s$ platí $f(x + t) = f(x)$.

(P. Kaňovský)

Riešenia súťažných úloh

Kategória C

C – I – 1

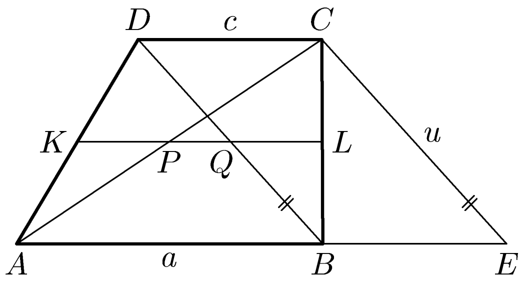
Použijeme postup založený na deliteľnosti — dve čísla sa zhodujú v posledných troch čísliciach práve vtedy, keď je ich rozdiel deliteľný číslom 1 000. V našom prípade má byť číslo $n^2 - n = n(n-1)$ deliteľné číslom $1\,000 = 2^3 \cdot 5^3$. Čísla n a $n-1$ sú nesúdeliteľné a menšie ako 1 000, preto musí byť jedno deliteľné číslom 125 a druhé ôsmimi.

Prvá možnosť: n je *nepárnym* násobkom 125, takže sa rovná niektorému z čísel 125, 375, 625, 875 a súčasne je $n-1$ násobok ôsmich, preto $n = 625$.

Druhá možnosť: n je násobok 8 (teda párne) a $n-1$ je nepárny násobok 125, preto $n = 376$, lebo z čísel 126, 376, 626, 876 je len číslo 376 násobok ôsmich.

C – I – 2

Zvoľme označenie podľa obr. 1. Keďže KP je stredná priečka v trojuholníku ACD,



Obr. 1

musí byť $|KP| = \frac{1}{2}|DC|$; podobne $|QL| = \frac{1}{2}|DC|$, $|PL| = \frac{1}{2}|AB|$, takže $|PQ| = \frac{1}{2}(a - c) = 2\,\text{cm}$. Pretože $|KL| = \frac{1}{2}(a+c) = 8\,\text{cm}$, je $a = 10\,\text{cm}$, $c = 6\,\text{cm}$. Najprv zostrojíme trojuholník AEC podľa vety sss, na úsečke AE potom bod B, ním vedieme rovnobežku s CE. Tá pretne priamku vedenú bodom C rovnobežne s AE v bode D.

C – I – 3

Nech $a = Dp$, $b = Dq$, $n = Dpq$, kde D je najväčší spoločný deliteľ, n najmenší spoločný násobok čísel a, b, čísla p, q sú nesúdeliteľné. Podľa textu úlohy má platiť $D(1 + pq) = 63$, takže máme tieto možnosti (bez ujmy na všeobecnosti predpokladáme, že $a \leqq b$):

D	pq	(p,q)		(a,b)	
1	62	$(1,62)$,	$(2,31)$	$(1,62)$,	$(2,31)$
3	20	$(1,20)$,	$(4,5)$	$(3,60)$,	$(12,15)$
7	8	$(1,8)$		$(7,56)$	
9	6	$(1,6)$,	$(2,3)$	$(9,54)$,	$(18,27)$
21	2	$(1,2)$		$(21,42)$	

Úloha má 8 riešení, ak nerozlišujeme poradie čísel a, b.

C – I – 4

Uvedenú nerovnosť upravíme na ekvivalentný tvar

$$0 \leqq (a^2 - b^2)^2 - (a^2 - 2ab + b^2)c^2,$$

t.j.

$$0 \leqq (a - b)^2 \cdot [(a + b)^2 - c^2].$$

Pretože $a+b > c$, platí táto nerovnosť pre dĺžky strán ľubovoľného trojuholníka, rovnosť nastane práve vtedy, keď $a = b$, teda pre rovnoramenné trojuholníky so základňou c.

C – I – 5

Najprv odhadneme, koľko prihlášok celkovo maturanti podali. Polovica, t.j. 15 študentov, podala jednu alebo dve prihlášky. Z druhej polovice podalo 10 študentov aspoň 4, teda 4 alebo 5 prihlášok, a ostávajúcich päť študentov podalo prihlášku na práve tri fakulty. Celkovo podali najviac $15 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 10 \cdot 5 = 95$ prihlášok. Preto nemohli podať na každú fakultu aspoň 20 prihlášok, inak by ich muselo byť aspoň 100. □

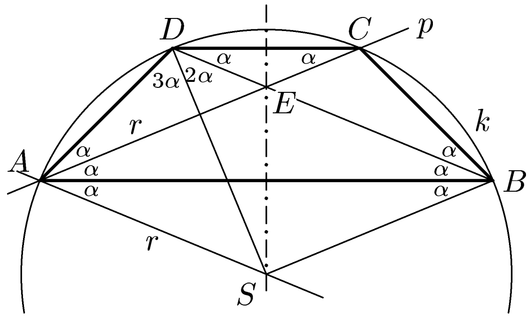
Spravme si rozpis pre prípad, keď na každú z piatich fakúlt bolo podaných práve 19 prihlášok (A znamená, že žiak v príslušnom stĺpci podal prihlášku na fakultu v uvedenom riadku, znak – znamená, že prihlášku nepodal. Študenti sú rozdelení do troch skupín, prvá je zložená z 15 študentov, ktorí podali dve prihlášky. Nasleduje skupina piatich študentov s tromi prihláškami, tretia skupina má 10 členov, každý podal 5 prihlášok):

študent	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1. fakulta:	A	A	A	A	A	A	–	–	–	–	–	–	–	–	–
2. fakulta:	–	–	–	A	A	A	A	A	A	–	–	–	–	–	–
3. fakulta:	–	–	–	–	–	–	A	A	A	A	A	A	–	–	–
4. fakulta:	–	–	–	–	–	–	–	–	–	A	A	A	A	A	A
5. fakulta:	A	A	A	–	–	–	–	–	–	–	–	–	A	A	A

študent	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1. fakulta	A	A	A	–	–	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
2. fakulta	–	A	A	A	–	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
3. fakulta	–	–	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
4. fakulta	A	–	–	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
5. fakulta	A	A	–	–	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A

C – I – 6

Predpokladajme, že sme už lichobežník zostrojili (obr. 2), priamka SE je nutne jeho



Obr. 2

os súmernosti. Ak označíme α veľkosť uhla ACD, majú uhly BDC, ABD a CAB rovnakú veľkosť, ako vyplýva ze súmernosti lichobežníka podľa priamky SE a z rovnobežnosti priamok CD a AB. Pretože $|BC| = |CD|$, je trojuholník BCD rovnoramenný. Potom sa veľkosti uhlov CBD a CAD rovnajú α. Pretože $|AE| = |AS|$ a AB je kolmá na SE, rovnajú sa α tiež veľkosti uhlov SAB a SBA. Z rovnoramenného trojuholníka ASD vyplýva, že uhly SAD a SDA majú veľkosť 3α, veľkosť uhla SDB je 2α (trojuholník SDB je tiež rovnoramenný). Z trojuholníka ACD potom vyplýva, že $8\alpha = 180°$, $\alpha = 22{,}5°$. Tým už je daná *konštrukcia*: na danej kružnici zvolíme ľubovoľne bod A, ním vedieme priamku p zvierajúcu s priamkou AS uhol $2\alpha = 45°$, p pretne kružnicu k v bode C rôznom od A. Na úsečke AC zvolíme bod E, $|AE| = r$. Body B, D zostrojíme ako body súmerne združené k bodom A, C podľa priamky SE. Iná voľba bodu A by viedla len k riešeniu, ktoré by vzniklo otočením riešenia už zostrojeného. Podobne voľba druhej priamky vedenej bodom A pod uhlom 45° s priamkou AS vedie k riešeniu súmerne združenému k riešeniu zostrojenému podľa priamky AS.

C – S – 1

Ak sú čísla a, b, c riešením úlohy, sú to delitele mocnín dvojky a teda sami sú mocninami čísla 2, $a = 2^r$, $b = 2^s$, $c = 2^t$, kde r, s, t sú celé nezáporné čísla. Z rovnosti $n(ab, c) = 2^8$ vyplýva, že čísla t, $r + s$ sa rovnajú najviac 8, pričom aspoň jedno z nich sa rovná 8. Podobne sa čísla $s + t$, r rovnajú najviac deviatim a aspoň jedno z nich je rovné deviatim. Ďalej platí, že jedno z čísel $r + t$, s sa rovná 11 a žiadne z nich nie je väčšie ako 11. Nemôže však platiť $s = 11$, pretože $s + t \leqq 9$, takže $r + t = 11$. Číslo r nemôže byť rovné 9, lebo má platiť $r + s \leqq 8$. Preto $s + t = 9$. Ďalej máme dve možnosti:

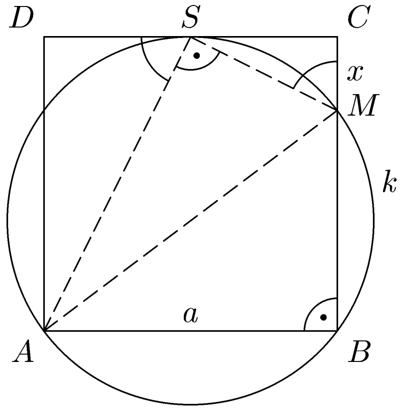
1) $t = 8$, odtiaľ $r = 3$, $s = 1$, $a = 2^3$, $b = 2$, $c = 2^8$,

2) $r + s = 8$, odtiaľ vyplýva $t = 6$, $r = 5$, $s = 3$, teda $a = 2^5$, $b = 2^3$, $c = 2^6$.

Úloha má dve riešenia.

C – S – 2

Pretože stred kružnice k leží na osi strany AB, ktorá je zároveň os protiľahlej strany CD, dotýka se kružnica k úsečky CD v jej strede S (obr. 3). Pretože uhol ABM je pravý, je AM priemerom kružnice k, a preto je pravý aj uhol ASM. Odtiaľ vyplýva, že $|\sphericalangle DSA| = 90° - |\sphericalangle CSM| = |\sphericalangle SMC|$ a preto sú trojuholníky SMC a ASD podobné. Takže platí $|CM| : |CS| = |DS| : |DA|$. Ak označíme $a = |DA|$ a $x = |CM|$, tak potom $x : \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a : a$, teda $x = \frac{1}{4}a$. Potom $|CM| : |BM| = 1 : 3$.



Obr. 3

Dodajme, že rovnosť $x = \frac{1}{4}a$ možno odvodiť z Pytagorovej vety pre trojuholníky AMB, AMS:

$$|AB|^2 + |BM|^2 = |AM|^2 = |AS|^2 + |SM|^2,$$

Po dosadení dostaneme:

$$a^2 + (a-x)^2 = \left(a^2 + (\tfrac{1}{2}a)^2\right) + \left((\tfrac{1}{2}a)^2 + x^2\right),$$

odkiaľ po úprave

$$x = \tfrac{1}{4}a.$$

C – S – 3

Ak je číslo $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$ deliteľné číslom $100 = 2^2 \cdot 5^2$, musí byť jedno z čísel $n-1$, n, $n+1$ deliteľné číslom 25, pretože z troch po sebe idúcich čísel môže byť najviac jedno deliteľné piatimi. Ďalej musí byť číslo n deliteľné štyrmi (čísla $n-1$, $n+1$ sú potom nepárne), alebo musí byť nepárne (čísla $n-1$, $n+1$ sú párne a ich súčin je deliteľný štyrmi). Máme teda tieto možnosti:

$n = 25$ vyhovuje, lebo je nepárne,
$n = 75$ vyhovuje, lebo je nepárne,
$n = 50$ nevyhovuje, lebo je párne, ale nie je deliteľné štyrmi,
$n - 1 = 25$, $n = 26$ nevyhovuje, lebo je párne, ale nie je deliteľné štyrmi,
$n - 1 = 50$, $n = 51$ vyhovuje, lebo je nepárne,

$n-1=75$, $n=76$ vyhovuje, lebo je deliteľné štyrmi,
$n+1=25$, $n=24$ vyhovuje, lebo je deliteľné štyrmi,
$n+1=50$, $n=49$ vyhovuje, lebo je nepárne,
$n+1=75$, $n=74$ nevyhovuje, lebo je párne, ale nie je deliteľné štyrmi,
$n+1=100$, $n=99$ vyhovuje, lebo je nepárne.
Úloha má sedem riešení.

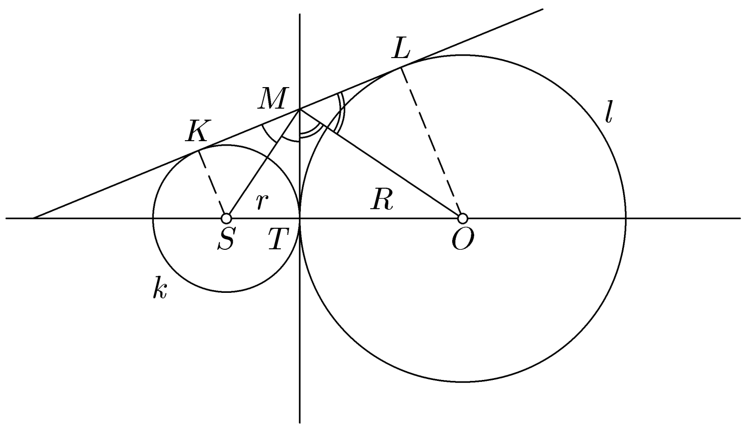
C – II – 1

Položme $a=Dk$, $b=Dl$, kde $D=D(a,b)$ je najväčší spoločný deliteľ čísel a, b. Je zrejmé, že čísla k, l sú nesúdeliteľné. Potom $n=n(a,b)=Dkl$ a má platiť $D(k+l+1+kl)=50$. Inak napísané, $(1+k)(1+l)D=50$. Nájdime preto všetky rozklady čísla 50 na súčin troch prirodzených čísel D, $1+k$, $1+l$, z ktorých posledné dve sú väčšie ako 1. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $a \leqq b$, tj. $k \leqq l$. Dostaneme tieto možnosti:

D	$1+k$	$1+l$	k	l	a	b
1	2	25	1	24	1	24
1	5	10	4	9	4	9
5	2	5	1	4	5	20

Pre $D=2$ dostaneme $k=l=4$, ale k, l majú byť nesúdeliteľné. Spor.
Pre $D=10$, 25 alebo 50 dostaneme $k=0$, čo nevedie k žiadnemu riešeniu.
Úloha má tri riešenia.

C – II – 2



Obr. 4

Označme K, L body dotyku tej spoločnej dotyčnice oboch kružníc, na ktorej leží bod M a ktorá je rôzna od spoločnej dotyčnice v bode T (obr. 4). Zo súmernosti podľa priamky MS vyplýva zhodnosť uhlov KMS a TMS a zo súmernosti podľa priamky OM vyplýva zhodnosť uhlov LMO a TMO. Súčet týchto štyroch uhlov je 180°, preto $|\sphericalangle SMO| = |\sphericalangle SMT| + |\sphericalangle TMO| = 90°$. Tým je vyriešená prvá časť úlohy.

Použitím Pytagorovej vety pre trojuholníky SOM, STM a OTM dostaneme pre výšku $v = |TM|$ trojuholníka SOM rovnosť

$$(r + R)^2 = (r^2 + v^2) + (R^2 + v^2),$$

odkiaľ $v^2 = Rr$. (Tento vzťah priamo vyplýva z Euklidovej vety pre trojuholník SOM.)

Obsah trojuholníka SOM je teda $\frac{1}{2}(R + r)\sqrt{Rr}$.

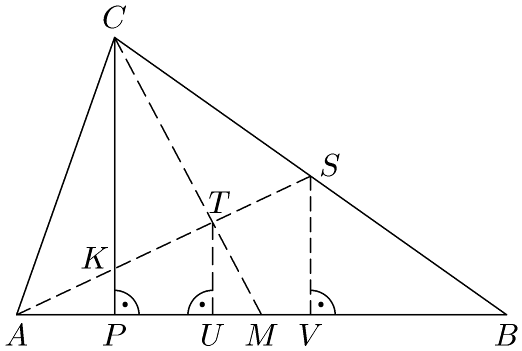
C – II – 3

Ak sú x, y riešením, musí platiť, $x \geqq 5$ a $y \geqq 5$, inak by sa x_{10} alebo y_{10} rovnalo nule. Pretože $y_{10} \geqq 10$, je $x = 195{,}6 : y_{10} \leqq 19{,}56$, takže x_{10} sa rovná 10 alebo 20. V prvom prípade je $y = 24{,}17$, $y_{10} = 20$ a $x = 9{,}78$, v druhom prípade je $y = 12{,}085$, $y_{10} = 10$ a $x = 19{,}56$. Úloha má práve dve riešenia:

$$(x, y) = (19{,}56; 12{,}085) \quad \text{a} \quad (x, y) = (9{,}78; 24{,}17).$$

C – II – 4

Predpokladajme, že trojuholník ABC spĺňa podmienky úlohy. Označme S stred strany BC, M stred strany AB, T ťažisko trojuholníka, P pätu výšky z vrcholu C, K priesečník ťažnice AS a výšky CP. Pretože ťažisko T delí úsečku AS v pomere $2 : 1$, tj. platí $|AT| = 2|TS|$, musí byť bod K stredom úsečky AT (obr. 5). Z rovnosti $|AK| = |KT| = |TS|$ navyše vyplýva, že $|AP| = |PU| = |UV|$, kde U, V sú kolmé priemety bodov T, S na priamku AB. Pretože S je stred strany BC, tak V je stred úsečky PB. Potom $|AP| = \frac{1}{5}|AB|$. Odtiaľ už vyplýva *konštrukcia*: Zostrojíme úsečku AB danej dĺžky, na nej bod P tak, aby $|AP| = \frac{1}{5}|AB|$. Bodom P vedieme kolmicu k strane AB, na nej nanesieme od bodu P danú výšku a dostaneme tak bod C. Tým je trojuholník ABC zostrojený.



Obr. 5

Zostrojme v trojuholníku ABC ťažnice CM a AS, ťažisko T a priesečník K úsečiek AS, CP. Označme U, V kolmé priemety bodov T, S na priamku AB. Pretože $|CT| = 2|TM|$, je $|PU| = 2|UM|$. Ak označíme $c = |AB|$, je $|AP| = \frac{1}{5}c$, $|PM| = \frac{1}{2}c - \frac{1}{5}c = \frac{3}{10}c$, $|PU| = \frac{2}{10}c = \frac{1}{5}c$ a $|UV| = |PV| - |PU| = \frac{1}{5}c$. Pretože $|AP| = |PU| = |UV|$, je zároveň $|AK| = |KT| = |TS|$. Tým je dokázaná správnosť konštrukcie.

KATEGÓRIA B

B – I – 1

Nech

$$x = x_{10} + m, \quad y = y_{10} + n, \quad -5 \leqq m, n \leqq 5, \tag{1}$$

$$a = 3x_{10} + y_{10}, \quad b = x_{10} + 2y_{10}. \tag{2}$$

Čísla a, b sú násobky desiatich a pôvodnú sústavu rovníc môžeme prepísať do tvaru

$$a = 598{,}6 - 3m, \qquad b = 723{,}4 - 2n. \tag{3}$$

Čísla m, n sú z intervalu $\langle -5, 5)$, preto $a \in \{590, 600, 610\}$ a $b \in \{720, 730\}$. Ďalej z (2) dostávame

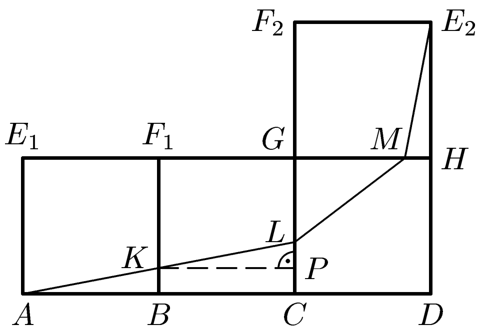
$$x_{10} = \tfrac{1}{5}(2a - b), \qquad y_{10} = \tfrac{1}{5}(3b - a). \tag{4}$$

Vidíme, že čísla $2a - b$ a $3b - a$ musia byť deliteľné päťdesiatimi a preto prichádzajú do úvahy len dvojice $[a, b] = [590, 730]$, $[a, b] = [610, 720]$. Nájdené hodnoty čísel a, b postupne dosadíme do (4) a (3). Pomocou (1) určíme x a y:

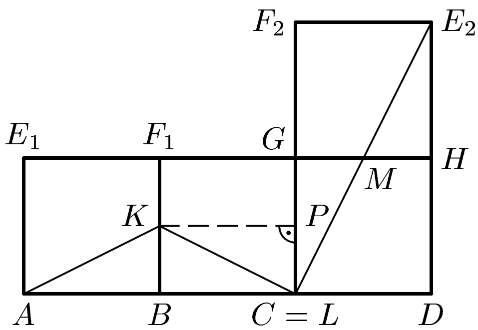
V prvom prípade je $x_{10} = 90$, $y_{10} = 320$, $m = \frac{43}{15}$, $n = -3{,}3$, $x = \frac{1\,393}{15} = 92{,}8\overline{6}$ a $y = 316{,}7$, v druhom prípade $x_{10} = 100$, $y_{10} = 310$, $m = -3{,}8$, $n = 1{,}7$, $x = 96{,}2$ a $y = 311{,}7$.

B – I – 2

Označme K, L, M body danej lomenej čiary, ktoré po rade ležia na úsečkách BF, CG, GH. Dĺžku hrany kocky položme rovnú jednej a pätu kolmice z bodu K na hranu CG označme P (obr. 6). Pravouhlé trojuholníky AKB, KLP a EMH majú rovnaké prepony AK, KL a EM a tiež odvesny AB, KP a EH. Sú teda podľa vety *ssu* zhodné a platí $|BK| = |LP| = |MH| = u$. Z pravouhlých trojuholníkov LMG a ABK ($|GL| = 1 - 2u$, $|GM| = 1 - u$) vyjadríme pomocou Pytagorovej vety druhé mocniny dĺžok ich prepon a porovnáme ich: $1 + u^2 = (1 - u)^2 + (1 - 2u)^2$.



Obr. 6



Obr. 7

Rovnica má jediný koreň menší ako 1: $u = \frac{1}{4}(3-\sqrt{5})$. Pomer $|CL| : |LG| = 2u : (1 - 2u) = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ je rovný pomeru zlatého rezu.

Pre polohu bodu L na hrane CG je ešte jedna možnosť, znázornená na rovnakej časti siete kocky na obr. 7. Potom zrejme sú body C a L totožné a $u = |BK| = |GM| = |MH| = \frac{1}{2}$, pričom pomer $|CL| : |LG|$ bude nulový.

B – I – 3

Podľa charakteru čísel v riadkoch rozdelíme všetky skúmané tabuľky do troch skupín:

(a) V žiadnom riadku tabuľky nie je n rovnakých čísel. Sčítaním čísel po riadkoch v tejto situáci zistíme, že

$$S = n(1 + 2 + \ldots + n) = \frac{1}{2}n^2(n+1). \tag{5}$$

(b) V práve jednom riadku tabuľky je n rovnakých čísel a. V každom z ostatných riadkov sú čísla 1, 2, …, n, takže $S = na + (n-1)(1 + 2 + \ldots + n)$, a po úprave

$$S = na + \frac{1}{2}n(n^2 - 1), \quad a \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{6}$$

(c) V niektorom riadku tabuľky je n rovnakých čísel b a v inom n rovnakých čísel c. Pokiaľ je $b = c$, vyskytuje sa číslo c v každom stĺpci aspoň dvakrát, a teda práve n-krát. V tom prípade platí

$$S = n^2 c, \qquad c \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{7}$$

Pokiaľ sú b, c rôzne čísla, sú aj v každom stĺpci tabuľky dve rôzne čísla, a teda sú v ňom všetky čísla navzájom rôzne. Sčítaním po stĺpcoch zistíme, že súčet S má hodnotu (5).

Dosadením daného n a postupne všetkých možných hodnôt čísel a, c do vzťahov (5), (6) a (7) dostaneme celkom $2n+1$ súčtov, z toho n súčtov typu (6) je navzájom rôznych a n súčtov typu (7) je navzájom rôznych. Musíme teda ešte overiť, či nie je možné pre nejaké hodnoty čísel a, c aby sa súčty (5) a (6), alebo (5) a (7), alebo (6) a (7) rovnali.

V prvom prípade z rovnice $\frac{1}{2}n^2(n+1) = na + \frac{1}{2}n(n^2-1)$ zistíme, že rovnosť nastane pre $a = \frac{1}{2}(n+1)$, to znamená, len keď n je nepárne.

V druhom prípade prídeme analogicky k záveru, že (5) a (7) sa rovnajú len pre n nepárne a $c = \frac{1}{2}(n+1)$.

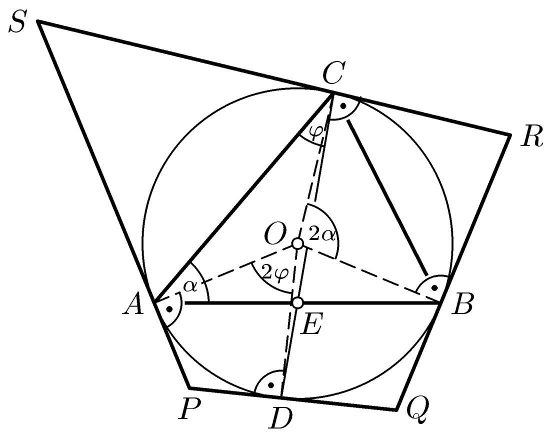
V treťom prípade upravíme rovnicu $na + \frac{1}{2}n(n^2-1) = n^2c$ na tvar $2a - 1 = n(2c - n)$, z ktorého vyplýva, že pokiaľ také dve čísla $a, c \in \{1, 2, \ldots, n\}$ existujú, je číslo n nutne nepárne a číslo $2a - 1$ je jeho násobkom. Avšak $2a - 1 \leqq 2n - 1$, preto môže byť jedine $2a - 1 = n$ a $2c - n = 1$. Odtiaľ $a = \frac{1}{2}(n+1) = c$.

Zhrnutím všetkých troch situácií môžeme konštatovať, že pre n párne je všetkých $2n + 1$ súčtov S rôznych. Na druhej strane, pre n nepárne sa medzi týmito súčtami vyskytujú práve tri rovnaké.

Odpoveď: Súčet S všetkých čísel tabuľky nadobúda buď $2n + 1$ hodnôt (keď n je párne), alebo $2n - 1$ hodnôt (keď n je nepárne).

B – I – 4

Nech O je stred kružnice opísanej trojuholníku ABC. Pri označení podľa obrázku 8 sú uhly PAO a PDO pravé a veľkosť stredového uhla AOD je dvojnásobkom veľkosti príslušného obvodového uhla ACD. V štvoruholníku $APDO$ je teda $|\sphericalangle APD| = 180° - 2|\sphericalangle ACD|$. Analogicky $|\sphericalangle BRC| = 180° - 2|\sphericalangle BAC|$. Štvoruholník $PQRS$ je tetivový práve vtedy keď $|\sphericalangle SPQ| + |\sphericalangle SRQ| = 180°$, t.j. $180° - 2|\sphericalangle ACD| + 180° - 2|\sphericalangle BAC| = 180°$. Odtiaľ vyplýva, že nutná a postačujúca podmienka na to, aby štvoruholník $PQRS$ bol tetivový, je $|\sphericalangle ACD| + |\sphericalangle BAC| = 90°$. Pri označení podľa obr. 8 to znamená $|\sphericalangle ACE| + |\sphericalangle EAC| = 90°$, t.j. ťažnica CD je kolmá na AB, ako je vidieť z trojuholníka ACE. Teda $|AC| = |BC|$, pretože trojuholníky AEC a BEC sú zhodné podľa vety *sus*.



Obr. 8

Záver: Štvoruholník $PQRS$ je tetivový len vtedy, ak je trojuholník ABC rovnoramenný so základňou AB.

B – I – 5

Stupeň polynómu P je aspoň dva. Nech najprv $P(x) = ax^2 + bx + c$. Dosadením tohto vyjadrenia do vzťahu v zadaní dostávame

$$4ax^2 + 2bx + c = (8a+1)x^2 + (8b-4)x + 8c + 4.$$

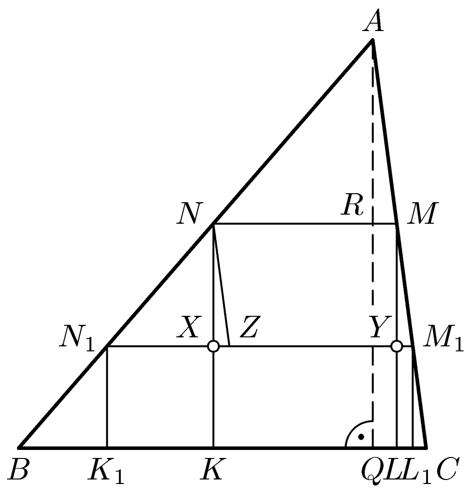
Porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách x na ľavej a pravej strane dostaneme $4a = 8a + 1$, $2b = 8b - 4$ a $c = 8c + 4$. Odtiaľ $a = -\frac{1}{4}$, $b = \frac{2}{3}$, $c = -\frac{4}{7}$.

Ak je stupeň n polynómu P väčší ako dva, zistíme analogicky, že jeho člen $a_n 2^n$ pri najvyššej mocnine x spĺňa vzťah $2^n a_n = 8a_n$, teda $n = 3$, pričom $a_n \neq 0$ je ľubovoľné. Koeficienty mnohočlena P pri mocninách x^2, x^1 a x^0 výjdu rovnako ako v predchádzajúcej situácii.

Celkový záver: $P(x) = ax^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{4}{7}$, kde a je ľubovoľné reálne číslo.

B – I – 6

Uvažujme dva pravouholníky $KLMN$, $K_1L_1M_1N_1$ vpísané do trojuholníka ABC uve-



Obr. 9

deným spôsobom. Nech $|KL| < |K_1L_1|$. Označme Z priesečník úsečky N_1M_1 s priamkou rovnobežnou s AC vedenou bodom N, Q pätu výšky z vrchola A na stranu BC a X, Y priesečníky hranice pravouholníka $KLMN$ s úsečkou N_1M_1 (obr. 9). Obvody oboch pravouholníkov sú si rovné práve vtedy, keď $|N_1X|+|YM_1| = |NX|$. To je ekvivalentné s podmienkou $|NX| = |N_1Z|$, lebo $|XZ| = |YM_1|$. Trojuholníky BCA, N_1ZN aj NMA sú podobné, preto $a = v_a$. A pretože $S = a \cdot \frac{1}{2}v_a = 18\,\mathrm{cm}^2$, vyplýva odtiaľ rovnosť $a = v_a = 6\,\mathrm{cm}$.

Obvod pravouholníka $KLMN$ je $2|NM| + 2|KN| = 2|AR| + 2|RQ| = 2v_a = 2a = 12\,\mathrm{cm}$. Obvod $2s$ trojuholníka ABC je preto $\frac{5}{3} \cdot 12\,\mathrm{cm} = 20\,\mathrm{cm}$. Odtiaľ $b + c = 2s - a = 14\,\mathrm{cm}$.

Máme teda zostrojiť trojuholník ABC, ak je dané a, v_a, $b + c$.

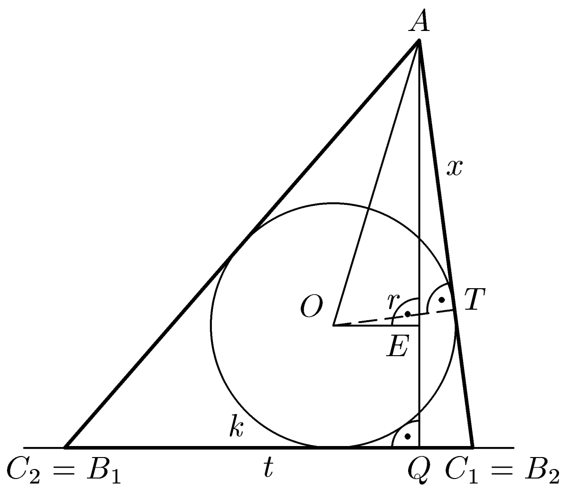
Uvedieme niekoľko postupov riešenia.

1. možnosť: Ľahko vypočítame $s = 10$ (cm), $s - a = 4$, $s - b = 10 - b$, $s - c = b - 4$. Po dosadení do Herónovho vzorca pre obsah trojuholníka ABC dostaneme $\sqrt{40 \cdot (10 - b) \cdot (b - 4)} = 18$, čo vedie po úprave na kvadratickú rovnicu $10b^2 - 140b + 481 = 0$. Jej vyriešením dostaneme

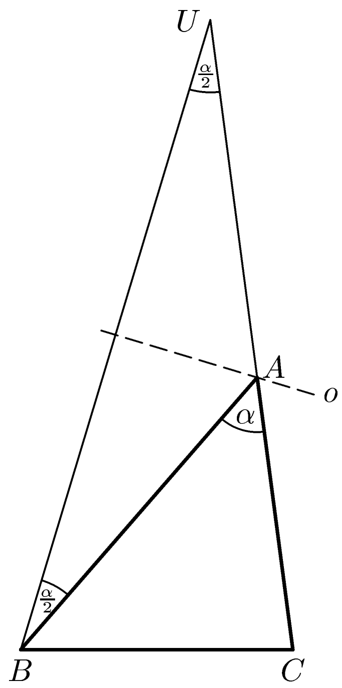
$$b = 7 + \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad c = 7 - \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \text{alebo} \quad b = 7 - \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad c = 7 + \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Obe riešenia vyhovujú a ľahko ich zo známych dĺžok strán zostrojíme. Dĺžku $d = 3/\sqrt{10} = \frac{3}{10}\sqrt{10}$ zostrojíme euklidovsky tak, že najprv zostrojíme $\sqrt{10}$ (napr. pomocou Euklidovej vety o výške) a tú rozdelíme v pomere 3:7.

2. možnosť: Nech $k(O, r)$ je kružnica vpísaná trojuholníku ABC a T jej bod dotyku so stranou AC (obr. 10). Pravouhlý trojuholník AOT môžeme zostrojiť, lebo poznáme dĺžky jeho odvesien $|AT| = x = s - a = 4\,\mathrm{cm}$, $|TO| = r = S/s = 1{,}8\,\mathrm{cm}$, ďalej kružnicu $k(O, r)$ a nad preponou AO ešte jeden pravouhlý trojuholník s odvesnou AE dĺžky $v_a - r = 4{,}2\,\mathrm{cm}$. (Tento trojuholník zrejme existuje — výpočtom dĺžky prepony trojuholníka AOT pomocou Pytagorovej vety možno overiť, že $|AO| > v_a - - r$.) Úsečku AE doplníme podľa obrázku na úsečku AQ dĺžky v_a. Kolmica na AQ v bode Q je priamka t. Jej priesečníky s dotyčnicami z bodu A ku kružnici k sú hľadané vrcholy B, C. Úloha má dve riešenia. Vzhľadom k jednoznačne zostrojenému trojuholníku AOT nájdeme síce konštukciou pomocou Thalesovej vety dva trojuholníky AOE a AOE_1, každý z výsledných trojuholníkov AB_kC_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ sa však v súhlasne označených prvkoch zhoduje s niektorým z prekrývajúcich sa trojuholníkov AB_1C_1, AB_2C_2 na obr. 10.



Obr. 10



Obr. 11

3. možnosť: Úsečka CU na obr. 11 má dĺžku $b + c$. Trojuholník UBA je teda rovnoramenný so základňou UB, a preto $|\sphericalangle BUC| = \frac{1}{2}\alpha$. Tento uhol vieme zostrojiť podľa predchádzajúceho postupu, lebo je to uhol OAT na obr. 10. Zostrojíme teda najprv trojuholník CUB, v ktorom poznáme $|BC|$, $|CU|$ a $|\sphericalangle CUB|$. Bod A je potom priesečník úsečky CU s osou strany BU. Konštrukcia vedie opäť na dve riešenia.

B – S – 1

Ak číslo n vyhovuje podmienke úlohy, existuje prirodzené číslo k také, že

$$(3n - 2)^2 - n^2 = 1\,000k\,.$$

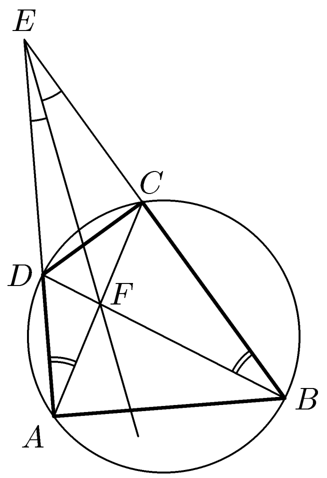
Ľavú stranu uvedenej rovnosti rozložíme na súčin podľa vzorca pre rozdiel štvorcov a po jednoduchej úprave dostaneme

$$(2n - 1)(n - 1) = 250k = 2 \cdot 5^3 \cdot k.$$

Čísla $2n-1$ a $n-1$ sú nesúdeliteľné ($2n-1 = 2(n-1)+1$), prvé z nich je nepárne a druhé párne. Hľadáme teda *nepárne* trojciferné čísla n také, že buď $n-1$ je násobkom 250, alebo $2n-1$ je nepárnym násobkom čísla 125. V prvom prípade dostaneme $n \in \{251, 501, 751\}$. V druhom prípade vidíme, že musí platiť $2n-1 \in \{375, 625, 875, 1\,125, 1\,375, 1\,625, 1\,875\}$, teda (pretože n je nepárne) $n \in \{313, 563, 813\}$. Celkovo má úloha šesť riešení.

B – S – 2

Označme F priesečník uhlopriečok AC a BD (obr. 12). Ak je priamka EF os uhla AEB, tak sú uhly AEF a BEF zhodné. Naviac sú zhodné aj uhly EAF a EBF, pretože sú to obvodové uhly prislúchajúce tetive CD. Trojuholníky AFE a BFE sa zhodujú v spoločnej strane EF a sú teda zhodné podľa vety *usu*, $|AE| = |BE|$ a trojuholník ABE je rovnoramenný.



Obr. 12

B – S – 3

Predpokladajme, že P je mnohočlen stupňa n. Členy polynómu $Q(x^2)$ obsahujú len párne mocniny x a polynóm $x \cdot P^2(x)$ je nepárneho stupňa $2n+1$. Pretože má platiť $Q(x^2) = (x+1)^4 - x \cdot P^2(x)$, nemôže byť $2n+1 > 4$. Potom $n \leqq 1$ a

$$P(x) = ax + b, \quad Q(x^2) = (x+1)^4 - x(ax+b)^2. \tag{1}$$

Po úprave dostaneme $Q(x^2) = x^4 + (4-a^2)x^3 + (6-2ab)x^2 + (4-b^2)x + 1$. Koeficienty pri nepárnych mocninách x sú rovné nule, preto $a, b \in \{-2, 2\}$ a $Q(x^2) = x^4 + (6 - 2ab)x^2 + 1$. Dosadením každej zo štyroch možných dvojíc čísel a, b do (1) dostaneme všetky štyri riešenia úlohy:

$P(x) = 2x + 2$ a $Q(x) = x^2 - 2x + 1$,
$P(x) = 2x - 2$ a $Q(x) = x^2 + 14x + 1$,
$P(x) = -2x + 2$ a $Q(x) = x^2 + 14x + 1$,

$P(x) = -2x - 2$ a $Q(x) = x^2 - 2x + 1$.

B – II – 1

Nerovnosť je pre kladné x, y zrejme ekvivalentná so vzťahom

$$y^2(py - x) - x^2(y - x) \geqq 0.$$

Ak je $p \geqq 1$, dostávame

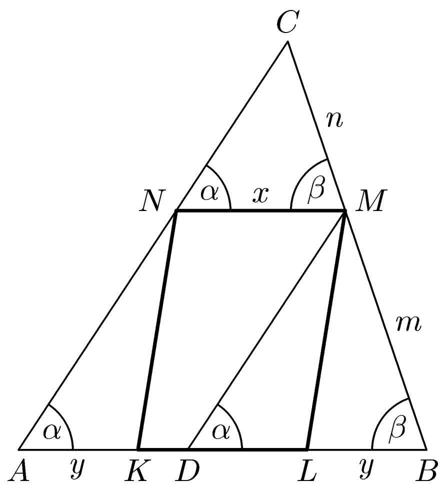
$$y^2(py - x) - x^2(y - x) \geqq y^2(y - x) - x^2(y - x) = (x + y)(y - x)^2 \geqq 0.$$

Ak je $p < 1$, neplatí daná nerovnosť, napríklad pre $x = y = 1$.

Záver: Daná nerovnosť je splnená pre každé dve kladné čísla x, y práve vtedy, keď $p \geqq 1$.

B – II – 2

Predpokladajme, že rovnobežník $KLMN$ má požadované vlastnosti. V posunutí o vek-



Obr. 13

tor $\overrightarrow{NM}$ (obr. 13) je obrazom trojuholníka AKN trojuholník DLM. Vzniknutý trojuholník DBM má mať (podľa zadania) dvakrát väčší obsah ako trojuholník NMC a má byť tomuto trojuholníku podobný (veta *uu*). Koeficient k podobnosti, ktorá transformuje trojuholník DBM na trojuholník NMC, je odmocnina z podielu obsahov týchto trojuholníkov a zároveň podiel dĺžok ľubovoľných dvoch v podobnosti si zodpovedajúcich úsečiek: $k = \sqrt{2} = \dfrac{|BM|}{|MC|}$. Z podmienky rovnosti obsahov trojuholníkov LBM, DLM a AKN ktorých výšky na strany LB, DL a AK sú zhodné, vyplýva $|LB| = |DL| = |AK|$.

Z uvedeného vyplýva *konštrukcia*: Na úsečke BC zostrojíme bod M tak, aby $|BM| : : |MC| = \sqrt{2} : 1$. Rovnobežka s priamkou AC vedená bodom M pretne úsečku AB v bode D. Vrchol N nájdeme ako priesečník úsečky AC s priamkou, ktorá prechádza bodom M rovnobežne s AB. Bod L zostrojíme ako stred úsečky DB, bod K je potom obrazom bodu L v posunutí o vektor $\overrightarrow{MN}$.

Výsledkom konštrukcie je rovnobežník $KLMN$ (jediný pre každý trojuholník ABC), o ktorom sa ľahko presvedčíme, že má požadované vlastnosti.

Iné riešenie. Z rovnosti obsahov trojuholníkov AKN a LBM so zhodnými výškami na strany AK a LB vyplýva zhodnosť týchto strán. Označme (obr. 13) $|AB| = c$, $|NM| = |KL| = x$, $|BM| = m$ a $|MC| = n$ a $|LB| = |AK| = y$; potom $c = 2y + x$, takže $y = \frac{1}{2}(c - x)$. Trojuholníky NMC a LBM majú rovnaké obsahy, a teda $\frac{1}{2}xn \sin\beta = \frac{1}{2}ym \sin\beta$ alebo $xn = ym$. Po dosadení za y a úprave dostaneme

$$x(m + 2n) = mc. \tag{1}$$

Z podobnosti trojuholníkov NMC a ABC vyplýva pomer $x : c = n : (m + n)$ alebo

$$nc = x(m + n), \tag{2}$$

takže z rovnosti súčinu ľavých a súčinu pravých strán vzťahov (1) a (2) dostaneme $m = n\sqrt{2}$, tj. $\dfrac{|BM|}{|MC|} = m : n = \sqrt{2}$. Odtiaľ vyplýva *konštrukcia* podobne ako v predchádzajúcom riešení.

B – II – 3

Položme $m = \dfrac{(n^2)_{10}}{(n_{10})^2}$ a $n = 10k + r$, kde k je celé nezáporné číslo a r je posledná cifra čísla n, tj. $r \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Zrejme je m celé pre všetky n, ktoré majú $r = 0$ a $k > 0$. Pokiaľ je $k = 0$ a $r \in \{1, 2, 3, 4\}$, zlomok m nie je definovaný.

Nech $k > 0$ a $r \in \{1, 2\}$. Potom $m = \dfrac{100k^2 + 20kr}{100k^2} = 1 + \dfrac{r}{5k}$, čo nie je celé číslo.

Pre $k > 0$ a $r = 3$ platí $m = \dfrac{100k^2 + 60k + 10}{100k^2} = 1 + \dfrac{6k + 1}{10k^2}$. Čitateľ posledného zlomku nie je na rozdiel od menovateľa deliteľný desiatimi, teda m nie je celé číslo.

Ak je $k > 0$ a $r = 4$, platí $m = \dfrac{100k^2 + 80k + 20}{100k^2} = 1 + \dfrac{4k + 1}{5k^2}$. Odtiaľ $m = 2$ pre $k = 1$. Pre $k > 1$ je $\dfrac{4k + 1}{5k^2} = \dfrac{4k + 1}{(4k + k)k} < \dfrac{4k + 1}{(4k + 1)k} = \dfrac{1}{k}$, a teda m nemôže byť celé číslo.

Ak je konečne $r \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$, dostávame

$$m = \frac{100k^2 + 20kr + (r^2)_{10}}{100(k + 1)^2} < \frac{100k^2 + 200k + 100}{100(k + 1)^2} = 1.$$

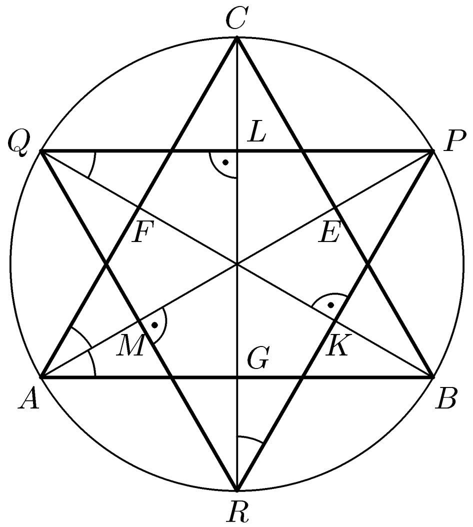
Záver: m je celé číslo pre všetky prirodzené čísla n, ktorých dekadický zápis končí cifrou 0 a pre $n = 14$.

B – II – 4

Pravouhlé trojuholníky LRP a KQP na obr. 14 sú podobné, pretože majú spoločný ostrý uhol pri vrchole P. Ak naviac využijeme, že obvodové uhly prislúchajúce tomu istému oblúku sú zhodné, dostávame $|\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle CRP| = |\sphericalangle LRP| = |\sphericalangle KQP| = |\sphericalangle BQP| = |\sphericalangle BAP|$. Bod E je stred úsečky BC, tetivy CP a BP prislúchajúce zhodným obvodovým uhlom ACP a BAP sú zhodné. Trojuholník CEP je teda zhodný s trojuholníkom BEP podľa vety *sss*, teda uhly AEB a BEP rovnako ako uhly AEB a AEC sú zhodné (a pravé). Odtiaľ vyplýva zhodnosť trojuholníkov AEC a AEB podľa vety *sus*. Teda $|AC| = |AB|$. Analogicky zistíme, že $|AB| = |BC|$.

Záver: Daným podmienkam vyhovujú len rovnostranné trojuholníky ABC.

Poznámka. Rovnosť $|CP| = |BP|$ možno dokázať aj inak, napríklad na základe poznatku, že obrazy ortocentra v súmernostiach podľa strán trojuholníka ležia na kružnici opísanej trojuholníku (pozri pomocnú úlohu 2 k štvrtej úlohe domáceho kola). Ťažisko T trojuholníka ABC je zároveň ortocentrom trojuholníka PQR. Preto sú obrazom úsečky TP v osových súmernostiach podľa priamok PQ, resp. PR úsečky CP, resp. BP, ktoré sú zhodné.



Obr. 14

Kategória A

A – I – 1

Nech je v urne n guličiek, z toho b bielych (a teda $n-b$ čiernych). Potom pravdepodobnosť vytiahnutia dvoch bielych guličiek je rovná podielu

$$\frac{\binom{b}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{b(b-1)}{n(n-1)},$$

zatiaľ čo pravdepodobnosť vytiahnutia dvoch čiernych guličiek podielu

$$\frac{\binom{n-b}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{(n-b)(n-b-1)}{n(n-1)}.$$

Podľa zadania úlohy platí rovnosť

$$\frac{(n-b)(n-b-1)}{n(n-1)} = \frac{b(b-1)}{n(n-1)} + \frac{17}{43},$$

ktorú možno algebraickými úpravami zjednodušiť do tvaru $43b = 13n$ (pre $n \notin \{0,1\}$ ide o ekvivalentné rovnice). Odtiaľ vzhľadom k nesúdeliteľnosti čísel 13 a 43 vyplýva, že prirodzené čísla n a b sú tvaru $n = 43k$ a $b = 13k$, kde k je vhodné prirodzené číslo. Podľa zadania pre číslo n platia odhady $950 \leqq n < 1\,050$, z ktorých zistíme, že $k \in \{23, 24\}$. Pre $k = 23$ vychádza $n = 989$ a $b = 299$ (vtedy $n - b = 690$), hodnote $k = 24$ zodpovedá $n = 1\,032$ a $b = 312$ (vtedy $n - b = 720$).

Odpoveď: Úloha má dve riešenia — v urne je alebo 299 bielych a 690 čiernych guličiek, alebo 312 bielych a 720 čiernych guličiek.

A – I – 2

Ak zvolíme prirodzené čísla a_1, a_2 ľubovoľne, sú všetky nasledujúce členy a_3, a_4, ... skúmanej postupnosti jednoznačne určené rekurentným predpisom

$$a_{n+1} = 1 + (a_n + a_{n-1})^* \quad (n = 2, 3, \ldots), \tag{1}$$

kde a^* je najväčší nepárny deliteľ prirodzeného čísla a. Najprv vypočítame pre niekoľko „počiatočných“ dvojíc a_1, a_2 zopár prvých členov a_n, z ktorých už bude jasné, kde začína a ako vyzerá perióda skúmanej postupnosti. Niekoľko príkladov uvádzame v nasledujúcej tabuľke.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	$\dots$
1	1	2	4	4	2	4	4	2	4	$\dots$
2	1	4	6	6	4	6	6	4	6	$\dots$
1	2	4	4	2	4	4	2	4	4	$\dots$
1	3	2	6	2	2	2	2	2	2	$\dots$
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	$\dots$
3	1	2	4	4	2	4	4	2	4	$\dots$
1	4	6	6	4	6	6	4	6	6	$\dots$
2	3	6	10	2	4	4	2	4	4	$\dots$
3	2	6	2	2	2	2	2	2	2	$\dots$
4	1	6	8	8	2	6	2	2	2	$\dots$

(Pre väčšie hodnoty a_1, a_2 sa perióda často objaví „neskôr“, ako ukazuje príklad postupnosti $30, 31, 62, 94, 40, 68, 60, 2, 32, 18, 26, 12, 20, 2, 12, 8, 6, 8, 8, 2, 6, 2, 2 \dots$)

Uvedomme si, že postupnosť vytvorená podľa predpisu (1) je od istého člena, povedzme a_n, periodická práve vtedy keď existuje taký index m, že platí

$$m > n, \quad a_m = a_n \quad \text{a} \quad a_{m+1} = a_{n+1}. \tag{2}$$

Vlastné riešenie úlohy začneme tak, že dokážeme štyri tvrdenia (T1) až (T4), ktoré platia pre každú skúmanú postupnosť $\{a_n\}$ a ktoré možno „vidieť“ z príkladov uvedených v tabuľke.

(T1) *Číslo a_n je párne pre každé $n \geqq 3$.*

Dôkaz (T1) je triviálny: pretože číslo a^* je nepárne pre každé a, je pravá strana rovnosti v (1) párna.

(T2) *Nerovnosť $a_n \leqq \max\{a_{n-1}, a_{n-2}\}$ platí pre každé $n \geqq 5$.*

Dôkaz (T2): Pretože pre párne a platí $a^* \leqq \frac{1}{2}a$ a pre každé $n \geqq 5$ sú podľa (T1) obidve čísla a_{n-1}, a_{n-2} párne, platí pre také n odhad

$$a_n = 1 + (a_{n-1} + a_{n-2})^* \leqq 1 + \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2} \leqq 1 + \max\{a_{n-1}, a_{n-2}\}$$

(lebo aritmetický priemer dvoch čísel neprevyšuje väčšie z nich). Zistili sme, že párne číslo a_n neprevyšuje nepárne číslo $1 + \max\{a_{n-1}, a_{n-2}\}$, teda neprevyšuje ani číslo o 1 menšie, číslo $\max\{a_{n-1}, a_{n-2}\}$.

Z dokázaného tvrdenia (T2) vyplýva, že každá skúmaná postupnosť $\{a_n\}$ má najväčší člen (a ten sa naviac rovná jednému z čísel a_1, a_2, a_3, a_4). Ukážme, ako ľahko už odtiaľ vyplýva tvrdenie o periodičnosti postupnosti $\{a_n\}$: ak označíme najväčší člen postupnosti m, je každá z nekonečne veľa dvojíc (a_n, a_{n+1}) $(n = 1, 2, 3, \dots)$ rovná jednej z M^2 dvojíc (a, b), kde $a, b \in \{1, 2, \dots, M\}$. Preto existujú dva rôzne indexy, povedzme $n < m$, pre ktoré platí $(a_n, a_{n+1}) = (a_m, a_{m+1})$, t.j. podmienka (2). Potom však indukciou z (1) vyplýva, že $a_{n+k} = a_{m+k}$ pre každé $k \geqq 0$. Dokázali sme, že postupnosť $\{a_n\}$ je periodická a tým sme vyriešili prvú časť úlohy.

Zdôraznime ešte, že tvrdenie (T2) neznamená, že postupnosť $\{a_n\}$ je od niektorého členu nerastúca (popierajú to príklady z našej tabuľky). Platí ale:

(T3) *Existuje index n_0 (závislý na postupnosti $\{a_n\}$) taký, že pre každé $n \geqq n_0$ platí rovnosť* $\max\{a_{n-1}, a_{n-2}\} = \max\{a_n, a_{n-1}\}$.

Dôkaz (T3): Položme $b_n = \max\{a_n, a_{n-1}\}$ pre každé $n \geqq 4$. Podľa (T2) pre každé $n \geqq 5$ platí $a_n \leqq b_{n-1}$, čo spolu s triviálnou rovnosťou $a_{n-1} \leqq b_{n-1}$ vedie k záveru, že $b_n \leqq b_{n-1}$. Postupnosť prirodzených čísel b_4, b_5, b_6, …je teda nerastúca, preto je od istého člena, povedzme b_{n_0}, konštantná. Dôkaz (T3) je hotový.

(T4) *Pre každé $n \geqq n_0$, kde n_0 je index z* (T3), *platí implikácia: ak $a_n > a_{n+1}$, potom $a_n - a_{n+1} = 2$.*

Dôkaz (T4): Pokiaľ $a_n > a_{n+1}$ pre niektoré $n \geqq n_0$, potom $a_n \geqq a_{n+1} + 2$ podľa (T1) a z rovnosti $\max\{a_{n+1}, a_n\} = \max\{a_{n+2}, a_{n+1}\}$ uvedenej v (T3) vyplýva, že $a_n = a_{n+2}$, čo podľa (1) znamená, že $a_n = 1 + (a_n + a_{n+1})^*$. Číslo $a_n - 1$ je teda deliteľom (väčšieho) čísla $a_n + a_{n+1}$ a tak platí nerovnosť $a_n + a_{n+1} \geqq 2(a_n - 1)$, odkiaľ $a_n \leqq a_{n+1} + 2$. Pretože platí aj obrátená nerovnosť (pozri vyššie), je dôkaz (T4) skončený.

Pomocou tvrdení (T3) a (T4) teraz dokončíme riešenie úlohy. (Ukazuje sa, že všetky možné periodické skupiny členov možno vyčítať z našej tabuľky.) Uvažujme aj naďalej ľubovoľnú skúmanú postupnosť $\{a_n\}$ a jej príslušný index n_0 z (T3). Môžu nastať dva prípady:

(i) nerovnosť $a_n \leqq a_{n+1}$ platí pre každé $n \geqq n_0$
(ii) pre niektoré $n \geqq n_0$ platí $a_n > a_{n+1}$.

V prípade (i) z (T3) vyplýva indukciou, že $a_n = a_{n_0}$ pre každé $n \geqq n_0$. Možnú hodnotu $c = a_{n_0}$ nájdeme podľa (1) z rovnosti $c = 1 + (2c)^*$. Pretože $(2c)^* = c^*$, dostávame $c^* = c - 1$. Číslo $c - 1$ je však deliteľom čísla c zrejme len pre $c = 2$. Skúmaná postupnosť je teda tvaru

$$a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}, 2, 2, 2, \dots \tag{3}$$

V prípade (ii) z nerovnosti $a_n > a_{n+1}$ podľa (T4) vyplýva $a_n = 2d$ a $a_{n+1} = 2d - 2$ pre vhodné celé $d > 1$ (pripomeňme, že a_n je párne podľa (T1)). Podľa predpisu (1) potom dostávame

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 1 + (2d + 2d - 2)^* = 1 + (2d - 1) = 2d, \\ a_{n+3} &= 1 + (2d - 2 + 2d)^* = 1 + (2d - 1) = 2d, \\ a_{n+4} &= 1 + (2d + 2d)^* = 1 + d^*. \end{aligned}$$

Pre $d > 1$ však platí $2d > 1 + d \geqq 1 + d^*$ a teda $a_{n+3} > a_{n+4}$. To opäť podľa (T4) znamená, že $a_{n+3} - a_{n+4} = 2$, alebo $(2d) - (1 + d^*) = 2$, odkiaľ $2d - 3 = d^* \leqq d$, takže $d \leqq 3$. V prípade $d = 2$ je skúmaná postupnosť tvaru

$$a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 4, 2, 4, 4, 2, 4, 4, 2, \dots, \tag{4}$$

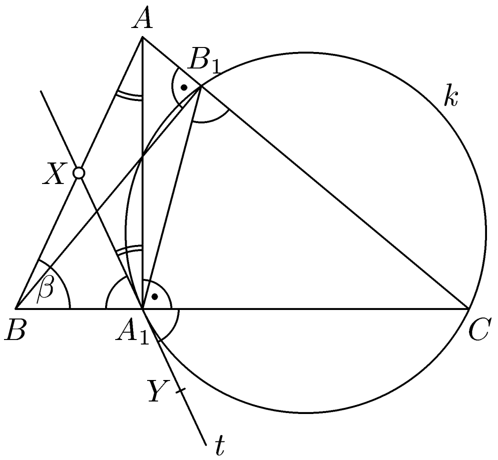
pre $d = 3$ má tvar

$$a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 6, 4, 6, 6, 4, 6, 6, 4, \dots \tag{5}$$

Dokázali sme, že *každá* postupnosť zo zadania úlohy je jedného z tvarov (3), (4), (5). Odtiaľ už vyplýva, že periodické od prvého člena sú práve tie postupnosti, ktorých dvojice prvých členov (a_1, a_2) sú rovné jednej zo siedmych dvojíc čísel $(2,2)$, $(2,4)$, $(4,2)$, $(4,4)$, $(4,6)$, $(6,4)$ a $(6,6)$.

A – I – 3

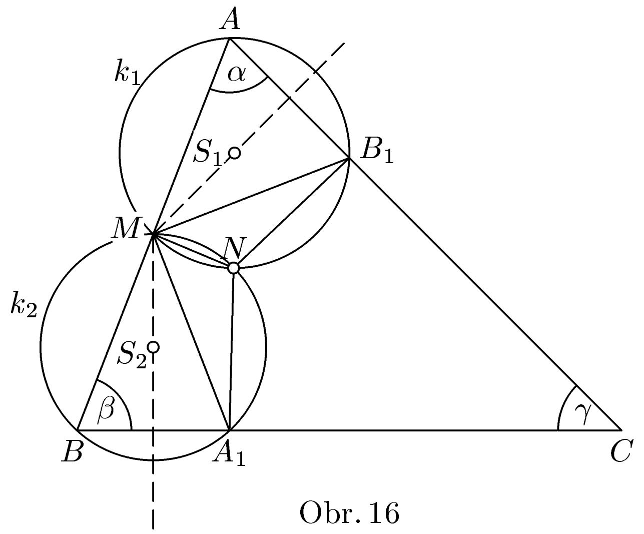
Označme k kružnicu opísanú trojuholníku CA_1B_1. V prvej časti riešenia ukážeme, že bod M z textu úlohy je stredom strany AB. Pretože trojuholník ABC je ostrouhlý, ležia päty A_1, B_1 príslušných výšok vnútri odpovedajúcich strán. S ohľadom na symetriu danej situácie stačí uvažovať len dotyčnicu t ku kružnici k zostrojenú v bode A_1. Označme X priesečník dotyčnice t s priamkou AB a dokážme rovnosť $|AX| = |BX|$ (obr. 15).



Obr. 15

Nech Y je ľubovoľný vnútorný bod polpriamky opačnej k polpriamke A_1X. Pretože obidva uhly AA_1B a BB_1A sú pravé, je štvoruholník ABA_1B_1 tetivový a platí $|\sphericalangle AB_1A_1| = 180° - |\sphericalangle ABA_1| = 180° - \beta$, kde ako obvykle $\beta = |\sphericalangle ABC|$. Preto má obvodový uhol A_1B_1C v kružnici k nad tetivou A_1C veľkosť $|\sphericalangle A_1B_1C| = 180° - |\sphericalangle AB_1A_1| = 180° - (180° - \beta) = \beta$. Rovnakú veľkosť má aj príslušný úsekový uhol YA_1C. Pretože uhly XA_1B a YA_1C sú vrcholové, dohromady dostávame $|\sphericalangle XA_1B| = |\sphericalangle YA_1C| = |\sphericalangle A_1B_1C| = \beta$ (tieto zhodné uhly sú na obr. 15 vyznačené oblúčikmi). Zároveň tiež platí $|\sphericalangle XA_1A| = |\sphericalangle XAA_1| = 90° - \beta$. Zistili sme, že dotyčnica t pretne priamku AB v takom bode X, pre ktorý sú trojuholníky BA_1X a A_1AX rovnoramenné, t.j. $|BX| = |A_1X| = |AX|$.

Dokázali sme, že bod M (priesečník dotyčníc ku kružnici k s bodmi dotyku A_1 a B_1) splýva so stredom strany AB. Označme teraz k_1 a k_2 kružnice opísané po rade trojuholníkom AMB_1 a BMA_1 a S_1, S_2 ich stredy (obr. 16). Jedným priesečníkom kružníc k_1 a k_2 je bod M, druhý priesečník označme N. Pretože body S_1, S_2 ležia



Obr. 16

v polrovine ABC, leží v nej i bod N, lebo je súmerne združený s M podľa spojnice stredov S_1S_2. Našou úlohou je dokázať, že body N, A_1, B_1 a C ležia na jednej kružnici.

Ako už vieme, trojuholník BA_1M je rovnoramenný a protože $|\sphericalangle BB_1M| = 90° - \alpha < \beta = |\sphericalangle BA_1M|$ (táto nerovnosť je ekvivalentná tomu, že $\gamma < 90°$), leží bod B_1 zvonku kružnice k_2. To znamená, že kružnica k_2 musí pretínať kružnicu k_1 v tom jej oblúku nad tetivou MB_1, ktorý zodpovedá obvodovému uhlu $180° - \alpha$. Analogicky zistíme, že bod A_1 leží zvonku kružnice k_1, takže priesečník N leží na oblúku kružnice k_2 príslušného tetive MA_1 a obvodovému uhlu $180° - \beta$. Pretože zároveň

$$|\sphericalangle B_1NM| + |\sphericalangle A_1NM| = (180° - \alpha) + (180° - \beta) = 360° - (\alpha + \beta) = 180° + \gamma > 180°,$$

musí bod N ležať vnútri trojuholníka A_1B_1M (priamka A_1B_1 teda oddeľuje body C a N). Keďže $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ (kde $\gamma = |\sphericalangle A_1CB_1|$), je v štvoruholníku A_1CB_1N súčet vnútorných uhlov pri protiľahlých vrcholoch C a N rovný $180°$. Teda tento štvoruholník je skutočne tetivový.

A – I – 4

Sčítaním všetkých troch daných nerovníc dostaneme nerovnosť

$$(\sin x + \cos x) + (\sin y + \cos y) + (\sin z + \cos z) \geqq 3\sqrt{2}. \tag{1}$$

Pre každé reálne číslo t platí

$$\begin{aligned} \sin t + \cos t &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\right) = \sqrt{2}\left(\sin t \cos\frac{\pi}{4} + \cos t \sin\frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \leqq \sqrt{2}, \end{aligned} \tag{2}$$

lebo $\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right) \leqq 1$. Pritom rovnosť v druhom riadku (2) nastane práve vtedy, keď $t+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, alebo $t=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ pre niektoré celé číslo k. Sčítaním troch odhadov (2) pre $t=x$, $t=y$ a $t=z$ dostaneme nerovnosť

$$(\sin x+\cos x)+(\sin y+\cos y)+(\sin z+\cos z) \leqq 3\sqrt{2}. \tag{3}$$

Všimnime si, že nerovnosť (3) platí pre *ľubovoľnú trojicu* reálnych čísel (x,y,z), zatiaľ čo opačná nerovnosť (1) platí pre *každé riešenie* pôvodnej sústavy. Zisťujeme teda, že nerovnosť (1) môže byť splnená jedine ako rovnosť, čo se podľa predchádzajúceho stane práve vtedy, keď čísla x, y, z budú tvaru

$$x=\frac{\pi}{4}+2k_1\pi, \quad y=\frac{\pi}{4}+2k_2\pi, \quad z=\frac{\pi}{4}+2k_3\pi \quad (k_1,k_2,k_3\in\mathbb{Z}).$$

Dosadením do pôvodnej sústavy sa ľahko presvedčíme, že každá taká trojica čísel (x,y,z) je skutočne riešením, platí pre ňu totiž

$$\sin x=\cos x=\sin y=\cos y=\sin z=\cos z=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(Poznámka o skúške bola nutná, protože nerovnosť (1) je len *dôsledkom* zadanej sústavy. Nemoholi sme vylúčiť, že pre niektorú trojicu čísel (x,y,z) platí (1), avšak neplatí niektorá z troch pôvodných nerovností.)

Poznámka. Nerovnosť (2) môžeme ľahko získať z nerovnosti medzi aritmetickým a kvadratickým priemerom:

$$\sin t+\cos t \leqq |\sin t|+|\cos t| \leqq 2\sqrt{\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{2}}=\sqrt{2}.$$

Na vyriešenie úlohy možno miesto (1) využiť aj iné dôsledky danej sústavy. Prepíšme napríklad prvé z daných nerovníc do tvaru $\sin x \geqq \sqrt{2}-\cos y$. Ak platí táto nerovnosť, platí aj umocnená nerovnosť $\sin^2 x \geqq (\sqrt{2}-\cos y)^2$, lebo $\sqrt{2}-\cos y>0$ pre každé $y\in\mathbb{R}$. Sčítaním troch nerovností

$$\sin^2 x \geqq (\sqrt{2}-\cos y)^2,\ \sin^2 y \geqq (\sqrt{2}-\cos z)^2,\ \sin^2 z \geqq (\sqrt{2}-\cos x)^2$$

dostaneme po úpravách nerovnosť

$$0 \geqq \left(1-\sqrt{2}\cos x\right)^2+\left(1-\sqrt{2}\cos y\right)^2+\left(1-\sqrt{2}\cos z\right)^2,$$

z ktorej už vyplýva všetko potrebné.

Riešenie úlohy môžeme začať ešte jedným spôsobom. Umocníme najprv každú z troch daných nerovníc na druhú (ide o dôsledkovú úpravu, lebo menšia (pravá) strana nerovnice je kladná) a potom ich sčítame. Po ľahkej úprave vyjde nerovnosť

$$2\sin x\cos y+2\sin y\cos z+2\sin z\cos x \geqq 3.$$

O všeobecnej platnosti opačnej nerovnosti sa presvedčíme tak, že každý z troch členov na ľavej strane odhadneme zhora pomocou „klasickej“ nerovnosti $2uv \leqq u^2 + v^2$ (ktorá je ostrá v prípade $u \neq v$):

$$\begin{aligned}&2\sin x\cos y + 2\sin y\cos z + 2\sin z\cos x \leqq \\ &\leqq (\sin^2 x + \cos^2 y) + (\sin^2 y + \cos^2 z) + (\sin^2 z + \cos^2 x) = 3.\end{aligned}$$

Tak odvodíme nutné podmienky $\sin x = \cos y$, $\sin y = \cos z$, $\sin z = \cos x$, pri ktorých je riešenie pôvodnej sústavy už triviálnou úlohou.

A – I – 5

Vlastné riešenie funkcionálnej rovnice

$$x^2 + y^2 + 2f(xy) = f(x+y)\cdot\big(f(x) + f(y)\big) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

začneme tak, že vypíšeme prehľad všetkých výsledkov dosadení, ktoré budeme ďalej potrebovať (písmeno a označuje ľubovoľné reálne číslo):

$$\begin{array}{lll}
\text{(D1)} & x = 0,\ y = 0: & f(0) = (f(0))^2,\\
\text{(D2)} & x = 0,\ y = a: & a^2 + 2f(0) = f(a)\cdot(f(a) + f(0)),\\
\text{(D3)} & x = a,\ y = a: & a^2 + f(a^2) = f(a)\cdot f(2a),\\
\text{(D4)} & x = a,\ y = -a: & 2a^2 + 2f(-a^2) = f(0)\cdot(f(a) + f(-a)),\\
\text{(D5)} & x = 1,\ y = 1: & 1 = f(1)\cdot(f(2) - 1).
\end{array}$$

(Niektoré rovnosti sme trochu algebraicky upravili.)

Z (D1) vyplýva, že číslo $f(0)$ je riešením rovnice $t = t^2$, je to teda číslo $t = 0$ alebo $t = 1$. Rozoberme obidve možnosti.

(i) Nech $f(0) = 0$. Ak dosadíme $f(0) = 0$ do (D2), dostaneme $a^2 = (f(a))^2$, odkiaľ $f(a) = a$ alebo $f(a) = -a$ pre každé $a \in \mathbb{R}$. Zdôraznime, že zatiaľ nevieme, či pre všetky x platí rovnaký z oboch predpisov $f(x) = x$ resp. $f(x) = -x$ (vieme, len, že existuje $A \subset \mathbb{R}$ tak, že $f(x) = x$ pre každé $x \in A$ a $f(x) = -x$ pre každé $x \in \mathbb{R} \setminus A$).

Ukážme najprv, že vzťah $f(x) = x$ platí pre všetky nekladné x: ak dosadíme $f(0) = 0$ do (D4), dostaneme rovnosť $f(-a^2) = -a^2$, takže $f(x) = x$ pre všetky také reálne čísla x, ktoré sa dajú zapísať v tvare $x = -a^2$ s vhodným $a \in \mathbb{R}$, a to sú všetky nekladné x. Teraz zdôvodnime, prečo $f(x) = x$ pre všetky kladné x: keby totiž pre niektoré $a \neq 0$ neplatilo $f(a^2) = a^2$, platilo by podľa predchádzajúceho odstavca $f(a^2) = -a^2$, a tak by sme podľa (D3) dostali $f(a)f(2a) = 0$, čo je ale v spore s tým, že obe čísla $f(a)$ a $f(2a)$ sú nenulové (sú to čísla $\pm a$ resp. $\pm 2a$, predpoklad ale bol, že $a \neq 0$). Tým sme dokázali, že $f(x) = x$ pre každé x. Dosadením sa ľahko overí, že taká funkcia je skutočne riešením našej úlohy.

(ii) Nech $f(0) = 1$. Po dosadení $f(0) = 1$ do (D2) dostaneme pre hodnotu $f(a)$ kvadratickú rovnicu $(f(a))^2 + f(a) - a^2 - 2 = 0$. Jej riešením zistíme, že

$$f(a) \in \left\{\frac{-1 + \sqrt{4a^2 + 9}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{4a^2 + 9}}{2}\right\} \quad \text{pre každé } a \in \mathbb{R}.$$

Špeciálne pre $a = 1$ a pre $a = 2$ dostaneme

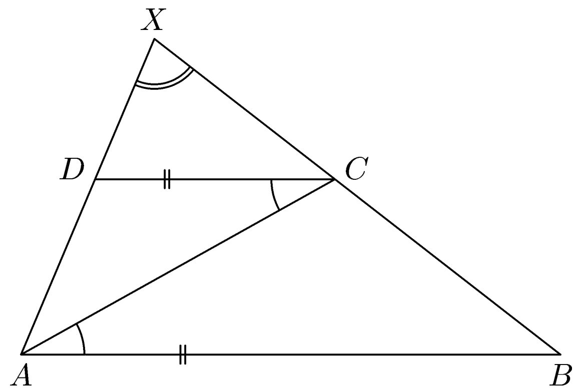
$$f(1) \in \left\{ \frac{-1+\sqrt{13}}{2}, \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \right\} \quad \text{a} \quad f(2) \in \{2, -3\},$$

odkiaľ vyplýva, že číslo $f(1)$ je iracionálne, zatiaľ čo číslo $f(2) - 1$ je racionálne a rôzne od nuly. Potom je súčin $f(1) \cdot (f(2) - 1)$ iracionálny, čo je v spore s (D5). Hľadaná funkcia f spĺňajúca podmienku $f(0) = 1$ teda neexistuje.

Odpoveď: Danú funkcionálnu rovnicu spĺňa jediná funkcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a to funkcia určená predpisom $f(x) = x$ pre každé $x \in \mathbb{R}$.

A – I – 6

Prvé riešenie. Rovnosť zo zadania prepíšme ako $|AB| : |CA| = |AC| : |CD|$. Táto rovnosť spolu s rovnosťou striedavých uhlov BAC a ACD (obr. 17) znamená, že trojuholníky BAC a ACD sú podobné podľa vety *sus*. Pretože strany BC a AD si



Obr. 17

v tejto podobnosti zodpovedajú a podľa zadania platí $|BC| : |AD| = 3 : 2$, platí rovnako $|AB| : |CA| = 3 : 2$ a $|AC| : |CD| = 3 : 2$. Vynásobením posledných dvoch rovností dostaneme $|AB| : |CD| = 9 : 4$, takže základňa AB lichobežníka $ABCD$ je dlhšia ako základňa CD. Preto sa polpriamky AD a BC pretínajú a ich priesečník označme X. Podľa zadania má uhol CXD veľkosť 75° alebo 105°.

Trojuholníky ABX a DCX sú podobné podľa vety *uu* a podľa predchádzajúceho platí $|AB| = \frac{9}{4}|DC|$ a podobne $|AX| = \frac{9}{4}|DX|$. Ak dosadíme za $|AX|$ súčet $|AD| + |DX|$ dostaneme, že $|DX| = \frac{4}{5}|AD| = 2{,}4\,\text{cm}$. Analogicky $|CX| = \frac{4}{5}|BC| = 3{,}6\,\text{cm}$.

Konštrukcia:
1. Trojuholník CDX: $|DX| = 2{,}4\,\text{cm}$, $|CX| = 3{,}6\,\text{cm}$, $|\sphericalangle DXC| \in \{75°, 105°\}$,
2. bod A: A leží na polpriamke opačnej k DX, $|AD| = 3\,\text{cm}$,
3. bod B: B leží na polpriamke opačnej k CX, $|BC| = 4{,}5\,\text{cm}$.

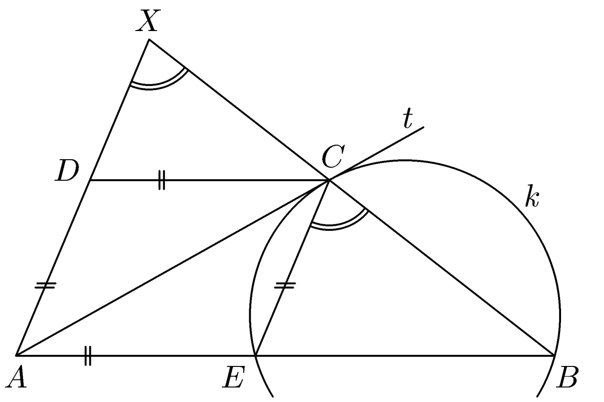
Teraz je treba ukázať, že takto zostrojený štvoruholník $ABCD$ má všetky požadované vlastnosti (t.j. spraviť *dôkaz správnosti* konštrukcie). Body 2. a 3. konštrukcie zaručujú, že strany BC a AD majú predpísané dĺžky. Podľa bodu 1. zvierajú priamky BC a AD predpísaný uhol a platí

$$|AX| = |AD| + |DX| = 5{,}4\,\text{cm} \quad \text{a} \quad |BX| = |BC| + |CX| = 8{,}1\,\text{cm}.$$

Pomer $|AX| : |BX|$ je $2 : 3$ rovnako ako pomer $|DX| : |CX|$. Trojuholníky ABX a DCX sú teda rovnoľahlé a preto sú úsečky AB a CD rovnobežné. Tak sme overili, že $ABCD$ je lichobežník sa základňami AB, CD. Z rovnosti pomerov $|AX| : |BX| = 2 : 3 = |CX| : |AX|$ vyplýva podobnosť trojuholníkov ABX a CAX (so spoločným uhlom pri vrchole X), takže uhly ABX a CAX (alebo uhly ABC a CAD) sú zhodné. Pretože sú zhodné aj (striedavé) uhly BAC a ACD, podľa vety *uu* zisťujeme, že trojuholníky ABC a CAD sú podobné. Preto platí $|AB| : |CA| = |AC| : |CD|$, teda $|AB| \cdot |CD| = |AC|^2$. (Poslednú rovnosť tiež možno dokázať tak, že dĺžky úsečiek AB, CD a AC vyjadríme pomocou kosínusovej vety pre trojuholníky ABX, CDX resp. ACX.) Všetky požadované vlastnosti zostrojeného štvoruholníka $ABCD$ sú teda overené.

DRUHÉ RIEŠENIE. Zadaná rovnosť $|AB| \cdot |CD| = |AC|^2$ evokuje otázku, či nemožno úlohu riešiť pomocou tvrdenia o mocnosti bodu ku kružnici (pozri návodnú úlohu nižšie). Ukážme, že sa to skutočne dá.

Predpokladajme najprv, že $|AB| > |CD|$ a označme X priesečník polpriamok AD a BC. Vhodným bodom E základne AB doplňme trojuholník ACD na rovnobežník $AECD$ (obr. 18). Všimnime si, že v trojuholníku BCE poznáme dĺžky strán BC, EC



Obr. 18

($|EC| = |AD|$) a veľkosť uhla BCE ($|\sphericalangle BCE| = |\sphericalangle CXD|$). Opíšme tomuto trojuholníku kružnicu a označme ju k. Pretože $|AE| = |CD|$, možno zadanú rovnosť $|AB| \cdot |CD| = |AC|^2$ zapísať ako $|AB| \cdot |AE| = |AC|^2$. Podľa tvrdenia z návodnej úlohy to znamená, že priamka AC je dotyčnicou ku kružnici k. Tým je rozbor prípadov $|AB| > |CD|$ skončený. V prípade $|AB| < |CD|$ stačí v rozbore spraviť dve zmeny: bod X je priesečníkom polpriamok DA a CB, bod E leží na polpriamke opačnej k BA (nie na základni AB).

Konštrukcia:

1. Trojuholník BCE: $|BC| = 4{,}5\,\mathrm{cm}$, $|EC| = 3\,\mathrm{cm}$, $|\sphericalangle BCE| \in \{75°, 105°\}$,
2. kružnica k opísaná trojuholníku BCE,
3. dotyčnica t ku kružnici k v bode C,
4. bod A: $A \in BE \cap t$,
5. bod D: $AECD$ je rovnobežník.

(Pretože podľa zadania platí $|BC| > |EC|$, padne bod A pri konštrukcii podľa bodu 4 na polpriamku opačnú k EB. Bod E bude teda patriť úsečke AB, takže nastane prípad $|AB| > |CD|$.)

Pri dôkaze správnosti konštrukcie opäť využijeme tvrdenie z návodnej úlohy (v opačnom „smere“, ako to bolo pri rozbore): protože je priamka AC dotyčnicou kružnice k, platí rovnosť $|AB| \cdot |AE| = |AC|^2$. Zvyšok dôkazu je triviálny.

A – S – 1

Sčítaním všetkých troch nerovníc dostaneme nerovnosť

$$75 + 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 \leqq 16x + 18y + 16z,$$

z ktorej po „úprave na štvorce“ vychádza

$$2(x-4)^2 + 3(y-3)^2 + 4(z-2)^2 \leqq 0.$$

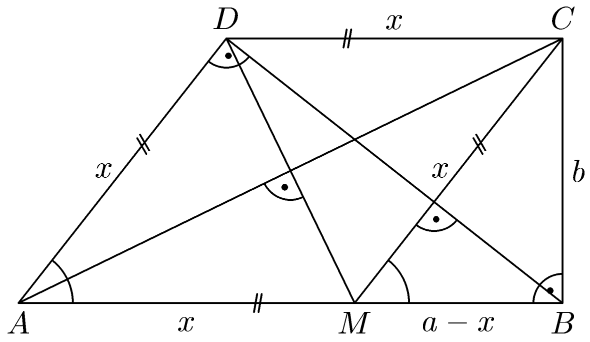
Táto nerovnosť, ktorá je dôsledkom danej sústavy nerovníc, zrejme platí práve vtedy, keď sú základy všetkých troch štvorcov na ľavej strane nerovnosti rovné nule, teda keď $x = 4$, $y = 3$, $z = 2$. Daná sústava má preto (pri zvolenom p) nanajvýš jedno riešenie, a to práve napísanú trojicu čísel. Zistíme teraz, pre ktorú hodnotu parametra p sa skutočne jedná o riešenie. Po dosadení hodnôt $x = 4$, $y = 3$, $z = 2$ do danej sústavy dostaneme trojicu nerovností

$$57 \leqq 59 - p, \quad 52 \leqq 52, \quad 41 \leqq 39 + p.$$

Z prvej nerovnosti vychádza podmienka $p \leqq 2$, z tretej vychádza podmienka $p \geqq 2$. Teda $p = 2$ je jediná hodnota p, pre ktorú má daná sústava v obore reálnych čísel riešenie.

A – S – 2

Úsečky MC a AD sú rovnobežné (obe sú totiž kolmé k úsečke BD, obr. 19); pretože sú rovnobežné aj úsečky AM a DC, je štvoruholník $AMCD$ rovnobežník. Je to dokonca



Obr. 19

kosoštvorec, lebo jeho uhlopriečky sú podľa zadania navzájom kolmé. Označme $x = |CD| = |DA| = |AM| = |MC|$, zrejme $a > x$. Potom $|MB| = a - x$ a zo zhodnosti súhlasných uhlov DAM a CMB vyplýva podobnosť pravouhlých trojuholníkov ABD a MCB, takže platí rovnosť $|AD| : |AB| = |MB| : |MC|$, alebo $x : a = (a - x) : x$. Odtiaľ pre neznámu dĺžku x vychádza kvadratická rovnica $x^2 + ax - a^2 = 0$, ktorá má jediné kladné riešenie $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a$. Tak sme vypočítali (zhodné) dĺžky základne CD a ramena AD daného lichobežníka a ostáva určit dĺžku ramena BC. Podľa *Pytagorovej vety* pre trojuholník CMB dostávame

$$|BC| = \sqrt{|MC|^2 - |MB|^2} = \sqrt{x^2 - (a-x)^2} = \sqrt{a(2x-a)} = a\sqrt{\sqrt{5}-2},$$

lebo $2x - a = a\bigl(\sqrt{5} - 2\bigr)$.

A – S – 3

Z vyjadrenia $\overline{abcd} = 100 \cdot \overline{ab} + \overline{cd}$ vyplýva, že podmienky deliteľnosti číslami $\overline{ab}$ a $\overline{cd}$ sú splnené práve vtedy, keď $\overline{cd} \mid 100 \cdot \overline{ab}$ a $\overline{ab} \mid \overline{cd}$, teda práve vtedy, keď $\overline{cd} = k \cdot \overline{ab}$, kde prirodzené číslo k je niektorý deliteľ čísla 100. Keďže obidve čísla $\overline{ab}$ a $\overline{cd}$ sú podľa zadania nepárne a dvojciferné, je buď $k = 1$, alebo $k = 5$. Rozlíšime dva prípady, pritom s ohľadom na vyjadrenie $\overline{abcd} = 10 \cdot \overline{bc} + (1000a + d)$ budeme namiesto podmienky $\overline{bc} \mid \overline{abcd}$ skúmať ekvivalentnú podmienku

$$\overline{bc} \mid (1000a + d). \qquad (*)$$

(Táto úprava nie je nutná, len trochu zjednodušuje ďalšie zápisy.)

a) Ak je $\overline{cd} = \overline{ab}$, platí $c = a$ a $d = b$, takže podmienka $(*)$ sa napíše v tvare $(10b + a) \mid (1000a + b)$. Pretože

$$1000 \cdot (10b + a) - (1000a + b) = 9999 \cdot b = 11 \cdot 9 \cdot 101 \cdot b$$

a 101 je prvočíslo (teda je s číslom $10b+a$ nesúdeliteľné), dostávame ekvivalentnú podmienku $(10b+a) \mid (11\cdot 9b)$. Odtiaľ, s ohľadom na zrejmú nerovnosť $10b+a > 9b$ vyplýva, že číslo $10b+a$ má číslo 11 vo svojom rozklade na prvočinitele. Podmienka $11 \mid (10b+ +a)$ je však splnená len keď sa číslice a a b rovnajú. Potom by však z rovnosti $\overline{cd} = \overline{ab}$ vyplývalo, že číslo $\overline{abcd}$ má *všetky* číslice rovnaké. O takých číslach podľa zadania úlohy neuvažujeme.

b) Z rovnosti $\overline{cd} = 5\cdot\overline{ab}$ ihneď určíme (nepárne) cifry $a = 1$ a $d = 5$, po ich dosadení a úprave vyjde rovnosť $b = 2c - 9$. Dostávame tri možnosti:

$$c = 5 \text{ a } b = 1, \quad c = 7 \text{ a } b = 5, \quad c = 9 \text{ a } b = 9.$$

Podmienka $(*)$ má teraz tvar $\overline{bc} \mid 1\,005$, z čísel 15, 57 a 99 je však len číslo 15 deliteľom čísla $1\,005$ $(1\,005 = 3\cdot 5\cdot 67)$, preto nutne $b = 1$ a $c = 5$.

Odpoveď: Hľadané číslo je jediné, a to 1 155.

A – II – 1

Predpokladajme, že parameter n je prirodzené číslo a riešme danú sústavu v obore reálnych čísel. Ľavá strana prvej rovnice je rovná $(x^2+y^2)(x+y)$ a pre čísla $s = x+y$ a $t = x^2+y^2$ platí $t\cdot s = n$ a $t+s = n+1$. Čísla s, t sú teda korene kvadratickej rovnice $w^2-(n+1)w+n = 0$. Z rozkladu $w^2-(n+1)w+n = (w-n)(w-1)$ vidíme, že $\{s,t\} = \{1,n\}$. Dvojica (x,y) je riešením pôvodnej sústavy práve vtedy, keď je riešením jednej zo sústav

$$\begin{cases} x+y = 1, \\ x^2+y^2 = n \end{cases} \quad \text{alebo} \quad \begin{cases} x+y = n, \\ x^2+y^2 = 1. \end{cases} \tag{1}$$

V prvom prípade sú čísla x, y koreňmi kvadratickej rovnice $z^2+(1-z)^2 = n$. Jej riešením dostaneme

$$\{x,y\} = \left\{\frac{1+\sqrt{2n-1}}{2}, \frac{1-\sqrt{2n-1}}{2}\right\}. \tag{2}$$

Podobne z druhej sústavy v (1) vyplýva, že čísla x, y sú korene kvadratickej rovnice $z^2+(n-z)^2 = 1$. Jej diskriminant $D = 4(2-n^2)$ je nezáporný iba pre $n = 1$ (poznamenajme, že n je prirozené číslo). Obe sústavy v (1) sú potom totožné, takže žiadne ďalšie riešenie okrem (2) neexistuje.

Zistili sme, že pre každé prirozené číslo n sú všetky riešenia pôvodnej sústavy v obore *reálnych* čísel popísané vzťahom (2). Celé čísla sú riešením práve vtedy, keď je hodnota $2n-1$ druhou mocninou (nepárneho) prirozeného čísla. Ak je číslo n štvormiestne, tak $n \geqq 1\,000$ a teda $2n-1 \geqq 1\,999$. Pretože $44^2 = 1\,936$ a $45^2 = 2\,025$, hľadané číslo n určíme z rovnice $2n-1 = 2\,025$. Zrejme $n = 1\,013$.

Poznamenajme, že v prvej časti riešenia môžeme postupovať aj takto: do prvej rovnice $(x^2+y^2)(x+y) = n$ možno dosadiť za prvý činiteľ výraz $x^2+y^2 = n+ +1-(x+y)$ z druhej rovnice. Tak získame pre neznámu $s = x+y$ kvadratickú rovnicu $(n+1-s)s = n$, ktorej korene sú $s_1 = 1$ a $s_2 = n$.

A – II – 2

Predpokladajme, že s a t sú (pevné) čísla požadovanej vlastnosti. Graf funkcie f je zjednotením grafov funkcií f_1 a f_2, ktoré sú určené vzorcami

$$f_1(x) = \frac{x^2 - 4x + s}{(1-t)x + (t+7)}, \quad f_2(x) = \frac{x^2 - 4x + s}{(t+1)x + (7-t)} \tag{1}$$

a majú definičné obory $D(f_1) = (-\infty, 1\rangle$, $D(f_2) = \langle 1, \infty)$ (polpriamky bez akýchkoľvek vylúčených bodov, lebo hodnota $f(x)$ podľa popisu grafu f existuje pre každé $x \in \mathbb{R}$). Čísla s a t určíme z podmienky, že grafy funkcií f_1 a f_2 sú polpriamky (takže ide o lineárne funkcie). Zrejme platí $t \neq \pm 1$ (inak by graf jednej z funkcií f_1, f_2 bol časťou paraboly), preto môžeme lineárne funkcie z menovateľov zlomkov v (1) zapísať v tvare

$$(1-t)x + (t+7) = (1-t)(x - x_1), \quad \text{kde} \quad x_1 = \frac{t+7}{t-1}, \tag{2a}$$

a

$$(t+1)x + (7-t) = (t+1)(x - x_2), \quad \text{kde} \quad x_2 = \frac{t-7}{t+1}. \tag{2b}$$

Výhodu týchto rozkladov oceníme pri vyjadrovaní podmienky, že obe funkcie f_1 a f_2 sú lineárne. Predtým však poznamenajme, že hodnota $f_1(x)$ existuje pre každé $x \leqq 1$ a hodnota $f_2(x)$ pre každé $x \geqq 1$ práve vtedy, keď čísla x_1, x_2 z rozkladov (2) spĺňajú podmienku

$$x_2 < 1 < x_1. \tag{3}$$

Vzorce (1) určujú lineárne funkcie f_1 a f_2 práve vtedy, keď je kvadratický mnohočlen $x^2 - 4x + s$ deliteľný (bezo zvyšku) každým z lineárnych mnohočlenov $(x - x_1)$ a $(x - x_2)$. Pretože však podľa (3) platí $x_1 \neq x_2$, možno podmienku z predchádzajúcej vety vyjadriť rovnosťou mnohočlenov

$$x^2 - 4x + s = (x - x_1)(x - x_2). \tag{4}$$

Poznamenajme, že ak platí podmienka (4), budú predpisy pre funkcie f_1, f_2 tvaru

$$f_1(x) = \frac{x - x_2}{1 - t} \qquad \text{a} \qquad f_2(x) = \frac{x - x_1}{t + 1}.$$

Podmienka (3) zaručí, že polpriamky, ktoré sú grafmi f_1 a f_2, neležia na rovnakej priamke (keby ležali, nebola by grafom f *lomená čiara*): os x totiž pretne ako polpriamku $y = f_1(x)$ (v bode $[x_2, 0]$), tak aj polpriamku $y = f_2(x)$ (v bode $[x_1, 0]$).

Podmienka (4) je s ohľadom na (2) ekvivalentná s dvojicou rovníc

$$4 = \frac{t+7}{t-1} + \frac{t-7}{t+1} \quad \text{a} \quad s = \frac{t+7}{t-1} \cdot \frac{t-7}{t+1} = \frac{t^2 - 49}{t^2 - 1},$$

z ktorých určíme neznáme hodnoty s a t. Úpravou prvej rovnice dostaneme $t^2 = 9$, možné hodnoty t sú teda ± 3; podľa druhej rovnice im zodpovedá rovnaká hodnota $s = -5$. Ak je $t = 3$, platí podľa (2) $x_1 = 5$ a $x_2 = -1$ (podmienka (3) je teda splnená), ak je $t = -3$, potom $x_1 = -1$ a $x_2 = 5$ (podmienka (3) splnená nie je). Riešením úlohy je teda jediná dvojica $(s, t) = (-5, 3)$.

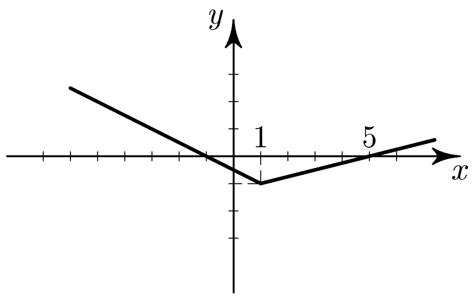
Aj keď sme celé riešenie viedli tak, že skúška nie je nutná, spravme ju ako pre dvojicu $(s, t) = (-5, 3)$ tak aj pre dvojicu $(s, t) = (-5, -3)$. Pre prvú dvojicu vychádza

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{3|x-1| + x + 7} = \begin{cases} \dfrac{(x+1)(x-5)}{-2(x-5)} = -\dfrac{x+1}{2} & (x \leqq 1), \\[2ex] \dfrac{(x+1)(x-5)}{4(x+1)} = \dfrac{x-5}{4} & (x \geqq 1), \end{cases}$$

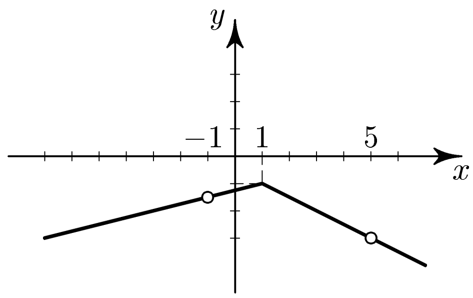
takže naozaj ide o riešenia (obr. 20a); dvojici $(s, t) = (-5, -3)$ zodpovedá funkcia

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{-3|x-1| + x + 7} = \begin{cases} \dfrac{(x+1)(x-5)}{4(x+1)} = \dfrac{x-5}{4} & (x \leqq 1,\ x \neq -1), \\[2ex] \dfrac{(x+1)(x-5)}{-2(x-5)} = -\dfrac{x+1}{2} & (x \geqq 1,\ x \neq 5), \end{cases}$$

ktorej grafom je lomená čiara bez dvoch bodov (obr. 20b), takže dvojicu $(s, t) = (-5, -3)$ nemožno považovať za riešenie.



Obr. 20a



Obr. 20b

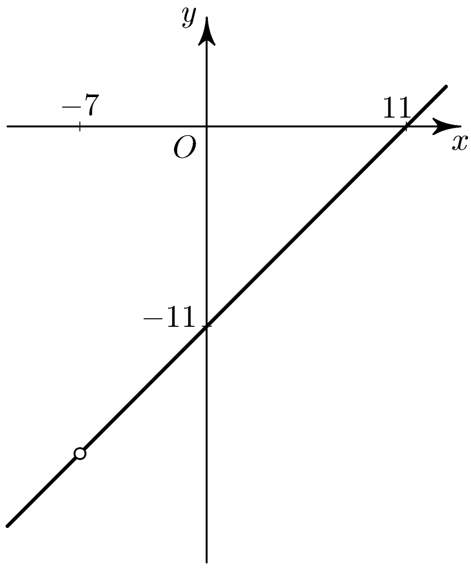
Poznámka. Môže sa stať, že by niekto chcel vyjadiť podmienku linearity oboch funkcií f_1 a f_2 (bez toho, aby zaviedol čísla x_1, x_2) takto: mnohočlen $x^2 - 4x + s$ je deliteľný ako mnohočlenom $(1-t)x + (t+7)$, tak i mnohočlenom $(t+1)x + (7-t)$, je teda deliteľný aj ich súčinom, teda platí rovnosť mnohočlenov

$$\big((1-t)x + (t+7)\big)\big((t+1)x + (7-t)\big) = (1-t^2)(x^2 - 4x + s)$$

(koeficient $(1-t^2)$ sa zistí porovnaním kvadratických členov). Tento záver je však korektný len vtedy, keď sú oba lineárne mnohočleny *nesúdeliteľné*; v našom riešení je táto nesúdeliteľnosť zaručená podmienkou (3). Súdeliteľným mnohočlenom z menovateľov zlomkov v (1) zodpovedá „riešenie“ $(s, t) = (-77, 0)$ s príslušnou funkciou

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x - 77}{x + 7} = x - 11 \quad (x \in \mathbb{R},\ x \neq -7),$$

ktorej graf (obr. 20c) je síce zložený z dvoch polpriamok, ale ich spoločný začiatok do grafu f nepatrí (naviac tieto polpriamky zvierajú priamy uhol, takže ich zjednotenie nie je lomená čiara).



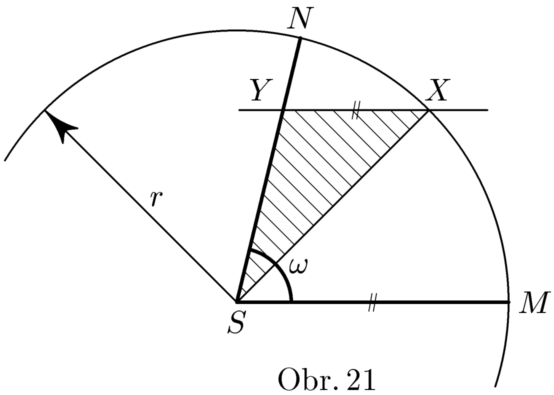
Obr. 20c

A – II – 3

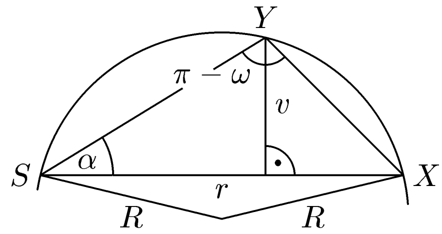
Vo všetkých riešeniach označujeme $\omega = |\sphericalangle MSN|$.

Riešenie 1. Z rovnobežnosti priamok SM a XY vyplýva rovnosť $|\sphericalangle SYX| = \pi - \omega$ (obr. 21). Preto sa všetky uvažované trojuholníky SXY zhodujú nielen v dĺžke strany SX (rovnej polomeru r kružnice k), ale i vo veľkosti protiľahlého vnútorného uhla SYX. Kružnice opísané všetkým trojuholníkom SXY majú teda rovnaký polomer R (rovný $\dfrac{r}{2\sin\omega}$) a bod Y leží vždy na tom ich oblúku, z ktorého je tetiva SX dĺžky r vidieť pod uhlom $\pi - \omega$. Výška v k strane SX trojuholníka SYX zrejme neprevyšuje výšku kruhovej výseče z obr. 22, pritom je rovná tejto výške práve vtedy, keď platí $|SY| = |XY|$. Preto má zo všetkých trojuholníkov SXY najväčší obsah práve ten, ktorý má zhodné strany SY a XY. Jeho vnútorný uhol α pri vrchole S je zhodný s vnútorným uhlom pri vrchole X, a teda platí $2\alpha + (\pi - \omega) = \pi$, odkiaľ $\alpha = \frac{1}{2}\omega$, čo znamená, že polpriamka SX je os uhla MSN. Priesečík tejto osi s kružnicou k preto určuje hľadaný bod X.

Dodajme, že maximálnu výšku v trojuholníka SXY k strane SX možno určiť aj iným postupom (bez úvah o kruhovom výseku): ak označíme Y_0 pätu výšky z vrchola Y, $\alpha =$



Obr. 21



Obr. 22

$= |\sphericalangle XSY|$ a $\beta = |\sphericalangle SXY|$, potom platí

$$v \cdot \operatorname{cotg} \alpha + v \cdot \operatorname{cotg} \beta = |SY_0| + |XY_0| = |SX| = r,$$

odkiaľ s ohľadom na to, že $\alpha + \beta = \omega$ a že funkcia cotg je v intervale $(0, \frac{1}{2}\pi)$ konvexná, vychádza odhad

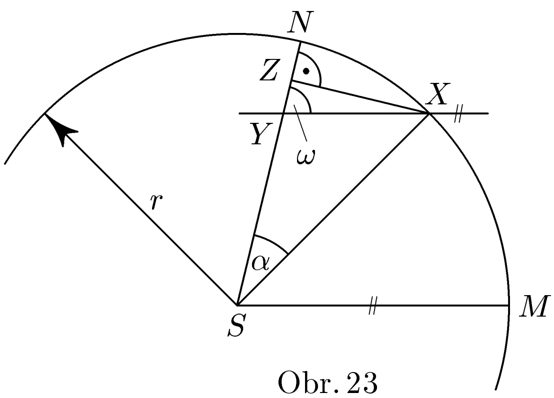
$$v = \frac{r}{\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta} \leqq \frac{r}{2 \operatorname{cotg} \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{r}{2 \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2}} = \frac{r}{2} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}.$$

Riešenie 2. Označme $p = |XY|$ a $q = |SY|$. Podľa kosínusovej vety pro trojuholník SXY platí $r^2 = p^2 + q^2 + 2pq \cdot \cos \omega$, lebo $|\sphericalangle SYX| = \pi - \omega$. Túto rovnosť upravíme do tvaru $r^2 = (p-q)^2 + 2pq(1 + \cos \omega)$, z ktorého už ľahko zhora odhadneme veľkosť súčinu pq:

$$pq = \frac{r^2 - (p-q)^2}{2(1 + \cos \omega)} \leqq \frac{r^2}{2(1 + \cos \omega)},$$

pritom rovnosť nastane práve vtedy, keď $p = q$. To je aj podmienka, pri ktorej je obsah $\frac{1}{2} pq \sin \omega$ trojuholníka SXY maximálny. Došli sme tak k rovnakému záveru ako pri prvom riešení.

Riešenie 3. Vyjadrime obsah trojuholníka SXY ako funkciu uhla $\alpha = |\sphericalangle XSN|$ a zistíme jej najväčšiu hodnotu na intervale $0 < \alpha < \omega$. Pri označení z obr. 23 vyplýva, že $|XZ| = |SX| \sin \alpha = r \sin \alpha$. Pretože $|\sphericalangle SYX| = \pi - \omega$ a $|\sphericalangle SXY| = \omega - \alpha$, zo



Obr. 23

sínusovej vety pre trojuholník SXY vychádza

$$|SY| = |SX| \cdot \frac{\sin(\omega - \alpha)}{\sin \omega}.$$

Pre obsah P trojuholníka SXY tak dostávame vyjadrenie

$$P = \frac{|SY| \cdot |XZ|}{2} = \frac{r^2 \sin \alpha \sin(\omega - \alpha)}{2 \sin \omega} = \frac{r^2\bigl(\cos(2\alpha - \omega) - \cos \omega\bigr)}{4 \sin \omega}$$

(využili sme vzorec $2 \sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$ pre $x = \alpha$ a $y = \omega - \alpha$). Pre hodnotu P teda platí horný odhad

$$P \leqq \frac{r^2(1 - \cos \omega)}{4 \sin \omega} \quad \left(= \frac{r^2}{4} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}\right).$$

Rovnosť nastane práve v prípade, keď $\cos(2\alpha - \omega) = 1$, čo je v našej situácii splnené jedine pre $\alpha = \frac{1}{2}\omega$ (z nerovností $0 < \alpha < \omega$ totiž vyplýva odhad $|2\alpha - \omega| < \omega$).

A – II – 4

Predpokladejme, že f je ľubovoľná z hľadaných funkcií. Všimnime si, že ľavá strana danej rovnice je párna funkcia premennej x. Pri zámene čísla x opačným číslom $-x$ sa preto nezmení ani hodnota pravej strany rovnice:

$$(x-y)^2 \cdot f(x+y) = (-x-y)^2 \cdot f(-x+y)$$

alebo

$$(x-y)^2 \cdot f(x+y) = (x+y)^2 \cdot f(y-x).$$

Dosaďme sem pri ľubovoľnom $t \in \mathbb{R}$ hodnoty $x = \frac{1}{2}(t-1)$ a $y = \frac{1}{2}(t+1)$, ktoré sú zvolené tak, aby platilo $x + y = t$ a $y - x = 1$. Dostaneme vzťah $f(t) = t^2 \cdot f(1)$ pre každé $t \in \mathbb{R}$. Funkcia f je teda nutne tvaru $f(x) = cx^2$. Neznámy koeficient c zistíme tak, že dosadíme do rovnosti zo zadania (a tak vlastne spravíme aj *skúšku*): rovnica $c(x^2 + cy^2)^2 = (x-y)^2 \cdot c(x+y)^2$ je ekvivalentná s rovnicou $c(c+1)y^2(2x^2 + (c - 1)y^2) = 0$, ktorá je splnená pre ľubovoľné x a y práve vtedy, keď $c = 0$ alebo $c = -1$ (napr. dosadenie $x = y = 1$ vedie k podmienke $c(c+1)^2 = 0$, takže nutne $c \in \{0, -1\}$).

Úloha má práve dve riešenia: nulovú funkciu $f_1(x) = 0$ a funkciu $f_2(x) = -x^2$.

A – III – 1

Ak je mnohočlen P konštantný, čiže $P(x) = a$, tak číslo a podľa zadania spĺňa podmienku $a^2 + a = a + a$, takže $a = 0$ alebo $a = 1$. Obidva mnohočleny $P(x) = 0$ a $P(x) = 1$ sú riešením úlohy.

Ak je stupeň n mnohočlena P kladný, tak $P(x) = ax^n + Q(x)$, kde a je číslo rôzne od nuly a Q je mnohočlen so stupňom najviac $n - 1$. Ak porovnáme v rovnosti

$$\bigl(ax^n + Q(x)\bigr)^2 + a(-x)^n + Q(-x) = ax^{2n} + Q(x^2) + ax^n + Q(x) \tag{1}$$

koeficienty pri najväčšej mocnine x^{2n}, dostaneme podmienku $a^2 = a$, z ktorej vyplýva $a = 1$ (pripomeňme, že $a \neq 0$). Rovnosť (1) upravíme po dosadení hodnoty $a = 1$ do ekvivalentného tvaru

$$2x^n Q(x) + \bigl(Q(x)\bigr)^2 - Q(x^2) = [1 - (-1)^n]x^n + Q(x) - Q(-x). \tag{2}$$

Predpokladajme, že mnohočlen Q má kladný stupeň k ($k < n$). Potom je na ľavej strane (2) mnohočlen so stupňom aspoň $n + k$, čo je spor s tým, že na pravej strane (2) je mnohočlen so stupňom najviac n. Preto Q je konštantný mnohočlen, teda $Q(x) = b$ pre vhodné číslo b. Po dosadení do (2) dostávame podmienku $2bx^n + b^2 - b = [1 - (-1)^n]x^n$, ktorá je splnená pre každé x práve vtedy, keď $2b = 1 - (-1)^n$ a zároveň $b^2 - b = 0$. Pre párne n vychádza jedine $b = 0$ (takže $P(x) = x^n$), pre nepárne n vyjde $b = 1$ (takže $P(x) = x^n + 1$).

Odpoveď: Hľadané mnohočleny sú konštanty 0 a 1, jednočleny x^2, x^4, x^6, … a dvojčleny $x + 1$, $x^3 + 1$, $x^5 + 1$, …

Iné riešenie. Ak pripočítame $P(-x)$ k obom stranám danej rovnosti, dostaneme rovnosť $\bigl(P(x)\bigr)^2 + 2P(-x) = P(x^2) + P(x) + P(-x)$. Na jej pravej strane je párna funkcia premennej x. Preto je párna i funkcia na ľavej strane: pre každé x platí $\bigl(P(x)\bigr)^2 + 2P(-x) = \bigl(P(-x)\bigr)^2 + 2P(x)$, alebo

$$\bigl(P(x) - P(-x)\bigr) \cdot \bigl(P(x) + P(-x) - 2\bigr) = 0.$$

Jeden z dvoch činiteľov na ľavej strane poslednej rovnosti je teda nulový mnohočlen. Ak platí identita $P(x) - P(-x) = 0$, redukuje sa rovnosť zo zadania úlohy na $\bigl(P(x)\bigr)^2 = P(x^2)$. Ak platí identita $P(x) + P(-x) - 2 = 0$, tak pre mnohočlen Q definovaný rovnosťou $Q(x) = P(x) - 1$ platí $Q(-x) = -Q(x)$. Po dosadení a úprave prejde rovnosť zo zadania do tvaru $\bigl(Q(x)\bigr)^2 = Q(x^2)$.

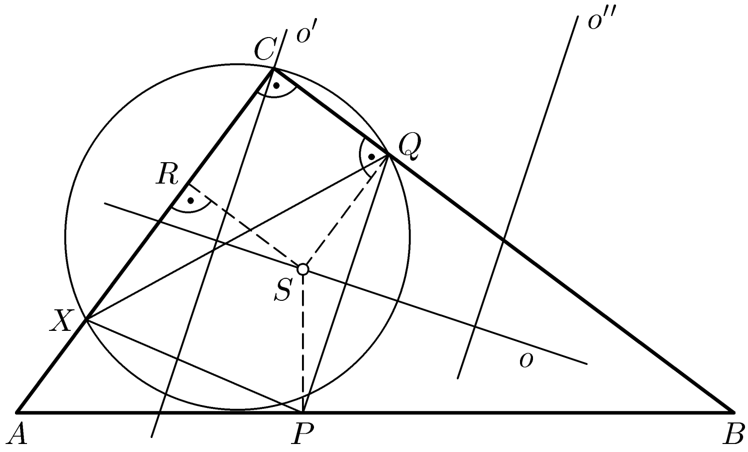
Ak zhrnieme obidva prípady, zistíme, že v každom z nich máme určiť mnohočlen R, ktorý je párnou alebo nepárnou funkciou a pre každé x spĺňa rovnosť $\bigl(R(x)\bigr)^2 = R(x^2)$. Hľadajme také R najskôr medzi jednočlenmi: po dosadení $R(x) = ax^n$ zistíme, že je buď $a = 0$, alebo $a = 1$ a $n \geqq 0$ je ľubovoľné. Predpokladajme, že R nie je jednočlen, teda $R(x) = ax^n + bx^k + S(x)$, kde a, b sú čísla rôzne od nuly, $n > k$ a S je nulový mnohočlen alebo mnohočlen so stupňom nanajvýš $k - 1$. Ak porovnáme v rovnosti

$$\bigl(ax^n + bx^k + S(x)\bigr) \cdot \bigl(ax^n + bx^k + S(x)\bigr) = ax^{2n} + bx^{2k} + S(x)$$

koeficienty členov s mocninou x^{n+k}, dostaneme rovnosť $2ab = 0$, ktorá je v spore s tým, že $a \neq 0$ a $b \neq 0$. Preto podmienku $\bigl(R(x)\bigr)^2 = R(x^2)$ spĺňajú len mnohočleny R rovné 0, 1, x, x^2, x^3, …

A – III – 2

Označme ešte R bod dotyku s odvesnou AC a S stred spomínanej kružnice (obr. 24). Keďže $SQCR$ je štvorec a bod S leží na osi o úsečky PQ, leží bod C na priamke o', ktorá je obrazom osi o pri otočení okolo bodu Q o pravý uhol. Vrchol C potom zostrojíme ako priesečník priamky o' s *Talesovou kružnicou* τ nad priemerom QX. Zvyšok konštrukcie je zrejmý.



Obr. 24

Úloha má (pre dané body P, Q, X) jediné riešenie. Aj keď os o môžeme otočiť okolo bodu Q o pravý uhol dvoma spôsobmi, jedna z otočených priamok o'' kružnicu τ vôbec nepretne. Druhá z nich má síce s kružnicou τ dva spoločné body, ale jednému z nich zodpovedá taký trojuholník ABC, že miesto kružnice vpísanej má požadované vlastnosti kružnica *pripísaná* prepone AB (Q je bod dotyku s priamkou BC a neleží na odvesne BC, ale na jej predĺžení za vrcholom B). Zrejme to zvyšné riešenie spĺňa všetky podmienky zadania.

A – III – 3

Označme $(*)$ danú nerovnicu a $K = (-\infty, 0\rangle \cup (1, \infty)$ príslušnú množinu (všetkých) riešení. Z toho, že 0 patrí do množiny K, vyplýva pre b podmienka $b \geqq 0$ a zároveň $\sqrt{b} > -c$. Keby však platilo $b > 0$, bol by výraz $\sqrt{2x^2 + ax + b}$ definovaný v niektorom okolí bodu $x = 0$ a z (ostrej) nerovnosti $(*)$ pre $x = 0$ by vyplývala jej platnosť aj pre malé kladné čísla x, čo je v spore s tvarom množiny K. Preto musí byť $b = 0$ a z nerovnosti $\sqrt{b} > -c$ vyplýva podmienka $c > 0$.

Pretože $\sqrt{2x^2 + ax + b} = \sqrt{x(2x + a)}$ a množina K obsahuje všetky čísla $x > 1$, platí pre tieto x nerovnosť $2x + a \geqq 0$, z ktorej vyplýva $a \geqq -2$. Pretože $1 \notin K$, nerovnosť $\sqrt{2 + a} > 1 - c$ neplatí, jej ľavá strana má vďaka nerovnosti $a \geqq -2$ zmysel. Naopak, platí nerovnosť $\sqrt{2 + a} \leqq 1 - c$, odkiaľ vyplýva podmienka $c \leqq 1$. Keby platila ostrá nerovnosť $\sqrt{2 + a} < 1 - c$, nerovnosť $\sqrt{x(2x + a)} < x - c$ by bola splnená nielen pre $x = 1$, ale aj pre $x = 1 + \varepsilon$ s dostatočne malým $\varepsilon > 0$, čo je v spore s tým, že $1 + \varepsilon \in K$. To znamená, že $\sqrt{2 + a} = 1 - c$, odkiaľ $a = (1 - c)^2 - 2 = c^2 - 2c - 1$.

Zhrňme výsledky našich úvah: zistili sme, že každá vyhovujúca trojica čísel (a, b, c) je nutne tvaru $(c^2 - 2c - 1, 0, c)$, kde $0 < c \leqq 1$. Ukážme, že každá trojica popísaného tvaru má požadované vlastnosti. Riešme preto v obore reálnych čísel nerovnicu

$$\sqrt{x(2x+a)} > x - c, \tag{1}$$

pre pevne zvolené $c \in (0, 1\rangle$ pričom $a = c^2 - 2c - 1$.

Z nerovnosti $0 < c \leqq 1$ a vyjadrenia $a = (1-c)^2 - 2$ vyplýva, že $-2 \leqq a < -1$. Pre každé $x \leqq 0$ teda platí $2x + a < 0$. Ľavá strana (1) má teda zmysel a je nezáporná, zatiaľ čo pravá strana (1) je pre tieto x záporná (lebo $x - c \leqq -c < 0$). Preto celý interval $(-\infty, 0\rangle$ patrí do množiny riešení (1). Nepatrí do nej však žiadne číslo x z intervalu $(0, -\frac{1}{2}a)$, lebo pre ne nemá zmysel ľavá strana (1). Ostáva teda vyriešiť nerovnicu (1) na intervale $\langle -\frac{1}{2}a, \infty)$. Najprv odôvodnime, že pre krajný bod $-\frac{1}{2}a$ platia odhady $c \leqq -\frac{1}{2}a \leqq 1$. Skutočne, horný odhad okamžite vyplýva z toho, že $a \geqq -2$, dolný odhad sa odvodí zo zrejmej nerovnosti $c^2 \leqq 1$:

$$-\frac{1}{2}a = -\frac{1}{2}(c^2 - 2c - 1) = c + \frac{1}{2}(1 - c^2) \geqq c.$$

Pre každé $x \in \langle -\frac{1}{2}a, \infty)$ teda platí $x \geqq c$ a preto sú obe strany nerovnice (1) nezáporné. Po umocnení oboch strán na druhú a ľahkej úprave dostaneme ekvivalentnú nerovnicu $x^2 + (a + 2c)x - c^2 > 0$. Odtiaľ nám po dosadení $a = c^2 - 2c - 1$ vychádza nerovnica $(x-1)\,(x+c^2) > 0$, ktorá platí práve pre tie (kladné) čísla $x \in \langle -\frac{1}{2}a, \infty)$, ktoré sú väčšie ako 1 (zopakujme, že $-\frac{1}{2}a \leqq 1$). Tým sme dokázali, že množinou riešení nerovnice (1) je skutočne množina K zo zadania úlohy.

Odpoveď: Hľadané trojice sú $(a, b, c) = (c^2 - 2c - 1, 0, c)$, kde c je ľubovoľné číslo z intervalu $(0, 1\rangle$.

A – III – 4

V žiadnom slove zrejme nemôžu byť štyri rovnaké písmená. Maximálna možná dĺžka slova uvažovaného jazyka je teda $3n$ (skupina n trojíc rovnakých písmen za sebou je zrejme slovo). Zároveň je jasné, že pre $n = 1$ existuje jediné slovo dĺžky 3.

Nech $n \geqq 2$.

1. *Každé slovo začína dvoma rovnakými písmenami.* Keby to tak nebolo, mali by sme slovo $AB\ldots A\ldots A\ldots$ začínajúce dvojicou rôznych písmen A, B. Ďalšie písmeno B sa však nemôže vyskytovať medzi prvým a druhým písmenom A (jedno tam už je), ani za tretím písmenom A (dve A by boli medzi dvoma B). Obe ostávajúce písmená B by museli byť medzi druhým a tretím písmenom A, čo tiež nie je možné.

2. *Ak vypustíme zo slova maximálnej dĺžky $3n$ tri rovnaké písmená, dostaneme v jazyku s $n-1$ písmenami opäť slovo maximálnej dĺžky $3(n-1)$.*

Počet slov maximálnej dĺžky v jazyku s n písmenami označme p_n. Zistime, koľko je slov maximálnej dĺžky začínajúcich zvoleným písmenom A. Každé také slovo začína dvoma písmenami A, takže tretie písmeno je buď A (takých slov je zrejme toľko, koľko je slov maximálnej dĺžky obsahujúcich $n-1$ písmen, tj. p_{n-1}), alebo písmeno $B \neq A$. Pretože po vypustení všetkých písmen A dostaneme opäť slovo (a to musí začínať, ako už vieme, dvoma rovnakými písmenami), musí pôvodné slovo začínať skupinou $AABAB$

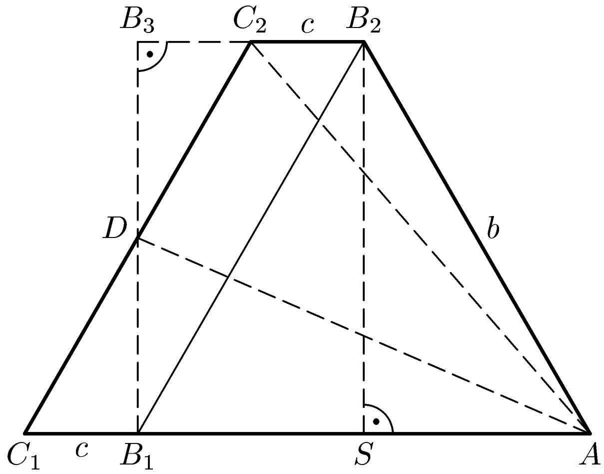
(možnosť $AABB\ldots A$ zrejme neprichádza do úvahy). Takých slov je opäť p_{n-1}. Celkovo je teda $2p_{n-1}$ slov maximálnej dĺžky začínajúcich zvoleným písmenom A. To znamená, že $p_n = 2np_{n-1}$, odkiaľ vyplýva

$$p_n = 2^{n-1}n!p_1 = 2^{n-1}n!.$$

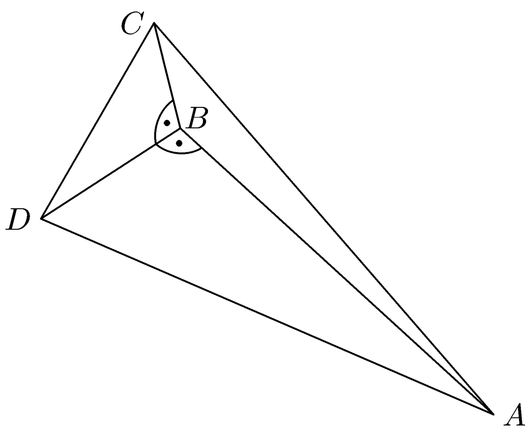
Nájdený vzorec vyhovuje aj pre $n = 1$.

A – III – 5

Z rovnosti úsečiek, ktoré v popísanej sieti zodpovedajú rovnakým hranám výsledného štvorstena $ABCD$, dostávame, že $|AB_1| = |AB_2| = |AB| = b$, $|B_1C_1| = |B_2C_2| = |BC| = c$. Označme S stred úsečky AB_1 a B_3 pätu kolmice z bodu D na priamku B_2C_2 (obr. 25). Trojuholníky B_1C_1D a B_3C_2D sú stredovo súmerné podľa bodu D, preto $|B_3C_2| = |B_1C_1| = c$. Pretože lichobežník $C_1AB_2C_2$ je rovnoramenný, je rovnoramenný aj trojuholník B_1AB_2 (vzhľadom k predchádzajúcim rovnostiam je dokonca rovnostranný), a z obdĺžnika $B_1SB_2B_3$ vyplýva $\frac{1}{2}b = |B_1S| = |B_2B_3| = 2c$, potom $b = 4c$.



Obr. 25



Obr. 26

Teraz si už len uvedomíme, že zostavený štvorsten $ABCD$ bude mať dve pravouhlé steny CDB a ADB s pravými uhlami pri vrchole B (obr. 26), čo znamená, že hrana BD bude kolmá ku stene ABC. Pritom výška v trojuholníka ABC (alebo trojuholníka AB_2C_2) na stranu BC je zároveň výškou B_2S rovnostranného trojuholníka B_1AB_2, takže $v = \frac{1}{2}\sqrt{3}b$ a zároveň $|BD| = |B_1D| = \frac{1}{2}v$. Objem V štvorstena $ABCD$ vypočítame ako

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3}S(ABC)|BD| = \frac{1}{3}S(AB_2C_2)\cdot\frac{1}{2}v = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}cv\cdot\frac{1}{2}v = \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}b\cdot v^2 = \frac{1}{4^3}b^3,\end{aligned}$$

takže $b = \sqrt[3]{64^2}\,\mathrm{cm} = 16\,\mathrm{cm}$.

A – III – 6

Matematickou indukciou najprv dokážeme, že všetky hodnoty $f(x)$ ležia v dvojprvkovej množine $M = \{0, 1\}$. Tvrdenie $f(x) \in M$ platí pre každé $x < 0$. Ak je celé číslo $x \geqq 0$ také, že $f(y) \in M$ pre každé celé $y < x$, potom v M leží každé z n čísel $f(x - a_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, a teda aj ich súčin a podľa (1) aj číslo $f(x)$. Dôkaz indukciou je hotový.

Označme $A = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Potom všetky čísla $x - a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ležia medzi A číslami $x - 1$, $x - 2$, …, $x - A$. Podľa (1) to znamená, že ak platí pre niektoré nezáporné čísla p a q nasledujúcich A rovností

$$f(p-1) = f(q-1),\ f(p-2) = f(q-2),\ \ldots,\ f(p-A) = f(q-A), \tag{2}$$

platí tiež rovnosť $f(p) = f(q)$. Matematickou indukciou možno overiť rovnosť $f(p + r) = f(q + r)$ pre každé celé $r \geqq 0$. Preto ak dokážeme existenciu prirodzených čísel p a q, $p < q$, pre ktoré platí sústava rovností (2), bude tvrdenie z textu úlohy platiť pre čísla $s = p$ a $t = q - p$.

Podmienku (2) možno vyjadriť ako rovnosť dvoch usporiadaných A-tic

$$[f(p-1), f(p-2), \ldots, f(p-A)] = [f(q-1), f(q-2), \ldots, f(q-A)],$$

ktoré sú, ako už vieme, zostavené výhradne z čísel 0 a 1. Z dvoch rôznych prvkov možno ale zostaviť len 2^A rôznych A-tic, takže napríklad v nasledujúcej skupine A-tic

$$\bigl\{[f(x-1), f(x-2), \ldots, f(x-A)] : x = 0, 1, \ldots, 2^A\bigr\}$$

sú niektoré dve A-tice rovnaké. Tým je dôkaz tvrdenia úlohy hotový.

Prípravné sústredenia pred MMO

Pred medzinárodnou matematickou olympiádou (MMO) sa každoročne koná jedno výberové a jedno prípravné sústredenie pre najlepších riešiteľov tretieho kola kategórie A. Po prvom z nich SK MO vyberie 6 najlepších študentov do reprezentačného družstva Slovenska a určí dvoch náhradníkov. Druhé sústredenie je zamerané na prípravu šesťčlenného reprezentačného družstva.

Na výberovom sústredení pred MMO sa zúčastnilo 11 súťažiacich, najúspešnejších riešiteľov tretieho kola MO kategórie A. Sústredenie sa konalo v dňoch 17.–21.4.2001 v Bratislave. Každý deň študenti riešili sériu troch úloh pri rovnakých podmienkach ako na MMO. V poobedňajších hodinách sa konal spoločný rozbor úloh s lektorom. Na konci sústredenia sa získané body za jednotlivé dni sčítali a s prihliadnutím na výsledky tretieho kola MO a iné výsledky (predchádzajúca účasť na MMO, výsledky korešpondenčného seminára SK MO) bolo vybrané šesťčlenné družstvo, ktoré sa zúčastní MMO.

Výsledky sústredenia:

1.	*Katarína Quittnerová*	53	7.	*Marek Tesař*	33.5
2.–3.	*Radovan Bauer*	44	8.	*Peter Krčah*	23
2.–3.	*Róbert Lukoťka*	44	9.	*Stanislav Miklík*	20.5
4.	*Jana Szolgayová*	43	10.	*Martin Macko*	18
5.	*Peter Bella*	42	11.	*Zoltán Mics*	16.5
6.	*Tomáš Kulich*	38			

Úlohy zadávali lektori z Bratislavy:

Mgr. Richard Kollár, František Kardoš, FMFI UK, úlohy 1 – 4,
Mgr. Ján Bábeľa, Tomáš Jurík, FMFI UK, úlohy 5 – 8,
Ján Špakula, FMFI UK, úlohy 9 – 12,
Juraj Földes, FMFI UK, úlohy 13 – 16,
Eugen Kováč, FMFI UK, úlohy 17 – 20.

Pre vybrané družstvo sa organizovalo ešte jedno prípravné sústredenie v dňoch 8.–12.6.2001 v Bratislave. Tohtoročné prípravé sústredenie prebehlo bez väčších problémov. Toto sústredenie bolo zamerané viac na vedomostnú prípravu študentov a jeho obsahom boli prednášky na vybrané témy. Lektormi boli:

Juraj Földes, FMFI UK Bratislava (Geometria),
Vladimír Marko, FMFI UK Bratislava (Nerovnosti),
Ján Špakula, FMFI UK Bratislava (Kombinatorika),
Mgr. Richard Kollár FMFI UK Bratislava (Funkcie),
Eugen Kováč, FMFI UK Bratislava (Teória čísel).

Zadania súťažných úloh výberového sústredenia pred MMO

1. Dané sú dve kružnice k_1 a k_2, ktoré sa pretínajú v dvoch rôznych bodoch A a B. Priamka p prechádzajúca bodom A pretína kružnice k_1 a k_2 po rade v bodoch C a D. Označme P a Q projekcie bodu B zostrojená po rade na dotyčnicu ku kružnici k_1 v bode C a na dotyčnicu ku kružnici k_2 v bode D. Dokážte, že priamka PQ je dotyčnicou kružnice k_3 zostrojenej nad priemerom AB.

2. Dané je prirodzené číslo n, $n \geqq 2$ a reálne čísla x_i, $0 \leqq x_i \leqq 1$, kde $i = 1, 2, \dots, n$. Dokážte, že platí

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - (x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1) \leqq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

a zistite, kedy nastáva rovnosť!

3. V bode $(1, 1)$ súradnicovej sústavy je umiestnený balík piesku. Ďalej sa pohybuje vždy podľa jedného z nasledujúcich pravidiel:
- z bodu (a, b) môže prejsť do bodu $(2a, b)$ alebo do bodu $(a, 2b)$
- z bodu (a, b) môže prejsť do bodu $(a-b, b)$, ak $a > b$ alebo do bodu $(a, b-a)$, ak $a < b$.

Do ktorých bodov súradnicovej sústavy sa môže balík dostať?

4. Zistite, či medzi prvými 100 000 001 členmi *Fibonaciho postupnosti* existuje číslo končiace štyrmi nulami!

5. Je daných $2n + 1$ kladných čísel takých, ze rozdiel medzi súčtom ľubovoľných $n + 1$ daných čísel a súčtom zvyšných n čísel je kladný. Dokážte, že pre súčin B všetkých $\binom{2n+1}{n+1}$ takýchto rozdielov a súčin A všetkých $2n + 1$ daných čísel platí

$$B^{n+1} \leqq A^{\binom{2n}{n}}$$

6. Ak

$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$$

potom

$$\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0$$

Dokážte!

7. Uvažujme n rovnakých mincí, ktoré ležia na stole a vytvárajú uzavretú reťaz, (každé dve susedné sa dotýkajú.) Koľko otáčok vykoná minca rovnakých rozmerov, ak s ňou obídeme (bez kĺzania) celú reťaz, pričom predpokladáme, že pohybujúca sa minca sa nesutále dotýka niektorej z daných mincí a pri svojom pohybe sa dotkne každej z daných mincí? Ako sa odpoveď zmení, ak bude mať táto minca k-kát väčší polomer ako mince v reťazi?

8. Dokážte, že na povrchu devätnásťstena, ktorý je opísaný guli s polomerom 10, existujú dva body, ktorých vzdialenosť je väčšia ako 21.

9. Tri kružnice rovnakého polomeru rovného t prechádzajú jedným bodom T, všetky sú vnútri $\triangle ABC$ a každá z nich sa dotýka dvoch jeho strán. Označme

r polomer vpísanej a R polomer opísanej kružnice $\triangle ABC$. Dokážte
(i) $t = \frac{rR}{R+r}$,
(ii) T leží na priamke prechádzajúcej cez stred vpísanej a stred opísanej kružnice $\triangle ABC$.

10. Nech funkcia f je definovaná nasledovne:
- Ak $n = p^k > 1$ je mocnina prvočísla p, potom $f(n) = n + 1$.
- Ak $n = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$ $(r > 1)$ je súčin mocnín navzájom rôznych prvočísel, potom $f(n) = p_1^{k_1} + \dots + p_r^{k_r}$.

Pre každé $m > 1$ skonštruujme postupnosť $a_0, a_1, a_2, \dots$ takú, že $a_0 = m$ a $a_{j+1} = f(a_j)$ pre $j \geqq 0$. Označme $g(m)$ najmenšie číslo v tejto postupnosti. Určte hodnoty $g(m)$ pre každé $m > 1$.

11. Uvažujme reálne čísla spĺňajúce podmienku $a \geqq b \geqq c > 0$. Dokážte, že

$$\frac{a^2 - b^2}{c} + \frac{c^2 - b^2}{a} + \frac{a^2 - c^2}{b} \geqq 3a - 4b + c\,.$$

12. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n \geqq 6$ existuje množina M obsahujúca n bodov v rovine takých, že pre každý bod P z množiny M existujú aspoň 3 body v M vo vzdialenosti 1 od P!

13. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$(2n + 1)^n \geqq (2n)^n + (2n - 1)^n\,.$$

14. Všetky steny konvexného mnohostena sú trojuholníky. Dokážte, že môžeme nafarbiť každú hranu tohto mnohostena červenou alebo modrou farbou tak, aby sa z každého vrchola dalo dostať do každého iného vrchola iba po modrých a zároveň iba po červených hranách!

15. Množina T_0 pozostáva zo všetkých čísel tvaru $(2^k)!$, kde $k = 0, 1, 2, \dots$. Pre každé prirodzené číslo $p = 1, 2, \dots, 2001$ označme T_p množinu čísel, ktoré dostaneme ako súčty niekoľkých (aj jedného) rôznych čísel z T_{p-1}. Dokážte, že existuje prirodzené číslo, ktoré nepatrí do T_{2001}.

16. Dokážte, že ak v konvexnom päťuholníku $ABCDE$ platí $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ADE|$ a $|\sphericalangle AEC| = |\sphericalangle ADB|$, tak $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle DAE|$.

17. Nech $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkcia. Dokážte, že nasledujúce dve podmienky sú ekvivalentné:
(A) Buď $u(x) = 1$ pre každé $x \in \mathbb{R}$, alebo je funkcia u striktne monotónna a pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$u(x + y) = u(x)u(y).$$

(B) Existuje striktne monotónna funkcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taká, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x + y) = f(x)u(y) + f(y).$$

18. Daný je trojuholník ABC a jeho vnútorný bod M. Dokážte, že platí nerovnosť

$$\min\{|MA|, |MB|, |MC|\} + |MA| + |MB| + |MC| < |AB| + |BC| + |AC|.$$

19. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n, $n \geqq 2$ existuje n-prvková množina S celých čísel taká, že pre všetky $a, b \in S$, $a \neq b$ je číslo ab deliteľné číslom $(a-b)^2$.

20. Nech m, n sú prirodzené čísla také, že $m \geqq n \geqq 2$. Dokážte, že počet všetkých polynómov stupňa $2n-1$ s navzájom rôznymi koeficientami z množiny $\{1, 2, \dots, 2m\}$, ktoré sú deliteľné polynómom $x^{n-1} + \dots + x + 1$ je

$$2^n n! \left[4\binom{m+1}{n+1} - 3\binom{m}{n} \right].$$

7. Česko-Slovensko-Poľské stretnutie

Bílovec, 14.–15. 6. 2001

V dňoch 13.–16.6. 2001 sa v Bílovci ukutočnil už siedmy ročník matematickej súťaže medzi olympionikmi Českej a Slovenskej republiky. Tento rok prijalo pozvanie aj poľské družstvo pripravujúce sa na medzinárodnú matematickú olympiádu. Dá sa povedať, že tento rok sa uskutočnilo prvé Česko-Slovensko-Poľské stretnutie, lebo na budúci rok bude organizovať stretnutie poľská strana. Veríme, že účasťou tradične kvalitného poľského družstva sa v tvrdšej konkurencii zocelí aj naše družstvo pred MMO. Dlhodobá snaha organizátorov vedie k usporiadaniu akejsi Stredoeurópskej matematickej olympiády. Český tím doprevádzali a zároveň organizátormi boli tento rok *RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.*, *Mgr. Pavel Calábek* a *doc. RNDr. Miroslav Šimša, CSc.*. Vedúcimi Slovenského tímu boli *Ján Špakula* a *Juraj Földes* a vedúcimi poľského tímu boli *Marcin Kuczma*, *Józef Kalinowski* a *Rafal Lochowski.*

Por.	Meno	Štát	1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$
1.–2.	Michał Adamaszek	Poľsko	7	7	7	7	7	3	38
	Karol Cwalina	Poľsko	7	7	5	5	7	7	38
3.	Katarína Quittnerová	Slovensko	7	7	2	7	7	7	37
4.–6.	Radovan Bauer	Slovensko	7	7	7	7	2	4	34
	Jan Kynčl	Česká rep.	7	2	7	7	7	4	34
	Jarosłav Wrona	Poľsko	7	7	6	5	6	3	34
7.–9.	Jaroslav Hájek	Česká rep.	7	7	2	7	7	1	31
	Roman Łomowski	Poľsko	7	7	0	7	7	3	31
	Paweł Walter	Poľsko	6	5	6	5	6	3	31
10.–11.	Jana Szolgayová	Slovensko	7	7	7	6	2	0	29
	Matrin Tancer	Česká rep.	7	4	7	7	1	3	29
12.	Tomáš Kulich	Slovensko	3	4	7	7	6	0	27
13.–14.	Peter Bella	Slovensko	3	7	5	1	1	4	24
	Aleksander Zabłocki	Poľsko	7	3	2	6	6	0	24
15.	Jan Herman	Česká rep.	0	4	0	7	7	3	21
16.	Róbert Lukoťka	Slovensko	0	1	1	7	7	3	19
17.	Tomáš Protivínský	Česká rep.	1	2	2	6	2	3	16
18.	Ondřej Suchý	Česká rep.	0	0	2	7	1	1	11

Táto súťaž je spolu s výberovým a prípravným sústredením súčasťou dlhodobej prípravy na medzinárodnú matematickú olympiádu (MMO). Na rozdiel od spomínaných sústredení si tu môžu študenti precvičiť svoje schopnosti vo veľmi podobných podmienkach, ako ich čakajú na MMO. Na riešenie úloh majú štyri a pol hodiny, čo je o pol hodiny viac ako vo všetkých kolách našej MO. Aj tematické zameranie a náročnosť úloh je oveľa bližšia MMO ako napríklad celoštátnemu kolu.

Organizácia tohtoročného stretnutia bola bezchybná, za čo možno poďakovať vedeniu gymnázia v Bílovci a českým organizátorom. Súťaž prebiehala v priateľskej, ale súťaživej atmosfére. Príklady sa podarilo vybrať primerane ťažké tak, aby rozvrstvili súťažiacich. Nikto nezískal plný počet bodov. V celkovom hodnotení zvíťazilo Poľsko pred Slovenskom a Českou republikou. Výsledky jednotlivých žiakov uvádza tabuľka.

Naše družstvo podalo vyrovnaný výkon. Vyčítať sa im dá iba zaváhanie na príklade číslo 5. Bola to funkcionálna rovnica veľmi podobná rovnici v krajskom kole kategórie A.

Z tradičného volejbalového stretnutia sa stal turnaj, v ktorom tento rok každé družstvo získalo jedno víťazstvo a jednu porážku.

Zadania úloh 7. česko-slovenského stretnutia

Úloha 1.
Dokážte, že pre ľubovoľné kladné čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ $(n \geqq 2)$ platí nerovnosť

$$(a_1^3+1)(a_2^3+1)\dots(a_n^3+1) \geqq (a_1^2a_2+1)(a_2^2a_3+1)\dots(a_n^2a_1+1).$$

(P. Kaňovský)

Úloha 2.
Trojuholník ABC má ostré vnútorné uhly pri vrcholoch A a B. Nad stranami AC a BC sú trojuholníku zvonku pripísané rovnoramenné trojuholníky ACD a BCE so základňami AC a BC tak, že $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle ABC|$ a súčasne $|\sphericalangle BEC| = |\sphericalangle BAC|$. Označme S stred opísanej kružnice trojuholníku ABC. Dokážte, že dĺžka lomenej čiary DSE sa rovná obvodu trojuholníka ABC práve vtedy, keď je uhol ACB pravý!

(J. Šimša)

Úloha 3.
Pre ľubovoľné prirodzené čísla n, k spĺňajúce podmienky $\frac{1}{2}n < k \leqq \frac{2}{3}n$ nájdite najmenší počet políčok, ktoré môžeme obsadiť na štvorcovej šachovnici $n \times n$ tak, aby v žiadnom riadku ani v žiadnom stĺpci šachovnice neexistovalo k voľných (tj. neobsadených) susedných políčok!

(J. Šimša)

Úloha 4.
V rovine sú dané body A, B $(A \neq B)$. V tejto rovine uvažujme ľubovoľný trojuholník ABC s vlastnosťou: Na jeho stranách BC, CA existujú postupne body D, E, pre ktoré platí

(i) $\dfrac{|BD|}{|BC|} = \dfrac{|CE|}{|CA|} = \dfrac{1}{3}$;

(ii) body A, B, D, E ležia (v tomto poradí) na jednej kružnici.

Určte množinu priesečníkov priamok AD a BE pre všetky trojuholníky ABC s danou vlastnosťou!

(J. Švrček)

Úloha 5.
Určte všetky funkcie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vyhovujúce rovnici

$$f(x^2+y) + f\big(f(x)-y\big) = 2f\big(f(x)\big) + 2y^2$$

pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$.

(P. Kaňovský)

Úloha 6.
V priestore je daná karteziánska sústava súradníc. Každý bod s celočíselnými súradnicami nazveme *mrežovým*. Ofarbime 2 000 mrežových bodov na modro a iných 2 000 mrežových bodov na červeno tak, aby žiadne dve modročervené úsečky nemali spoločný vnútorný bod. (Úsečku nazývame modročervenou, pokiaľ je jeden jej krajný bod ofarbený na modro a druhý na červeno.) Uvažujme najmenší kváder s hranami rovnobežnými s osmi súradníc, ktorý obsahuje všetky ofarbené body.

(a) Dokážte, že kváder obsahuje aspoň 500 000 mrežových bodov.
(b) Udajte príklad popísaného ofarbenia, keď uvažovaný kváder obsahuje maximálne 8 000 000 mrežových bodov.

(J. Šimša)

Riešenia úloh 7. československého stretnutia

Úloha 1.
Tvrdenie dokážeme použitím princípu matematickej indukcie vzhľadom k prirodzenému číslu n.

(i) Pre $n = 2$ dostávame

$$\begin{aligned}
\left(a_1^3+1\right)\left(a_2^3+1\right) &\geqq \left(a_1^2a_2+1\right)\left(a_2^2a_1+1\right),\\
a_1^3a_2^3+a_1^3+a_2^3+1 &\geqq a_1^3a_2^3+a_1^2a_2+a_1a_2^2+1,\\
a_1^2(a_1-a_2)+a_2^2(a_2-a_1) &\geqq 0,\\
(a_1^2-a_2^2)(a_1-a_2) &\geqq 0,\\
(a_1-a_2)^2(a_1+a_2) &\geqq 0.
\end{aligned}$$

Posledná nerovnosť zrejme platí pre ľubovoľné kladné čísla a_1, a_2. Pretože všetky použité úpravy boli ekvivalentné, platí aj daná nerovnosť pre $n = 2$.

(ii) Predpokladajme teraz, že nerovnosť z textu úlohy platí pre určité $n \geqq 2$. Dokážeme platnosť nerovnosti aj pre $n+1$. Nerovnosť

$$\left(a_1^3+1\right)\ldots\left(a_n^3+1\right)\left(a_{n+1}^3+1\right) \geqq \left(a_1^2a_2+1\right)\ldots\left(a_n^2a_{n+1}+1\right)\left(a_{n+1}^2a_1+1\right)$$

(za uvedeného predpokladu) bude platiť, ak bude splnená podmienka

$$a_{n+1}^3+1 \geqq \frac{\left(a_n^2a_{n+1}+1\right)\left(a_{n+1}^2a_1+1\right)}{a_n^2a_1+1}.$$

Pomocou ekvivalentných úprav zistíme, kedy je uvedená podmienka splnená. Postupne dostaneme

$$\begin{aligned}\left(a_{n+1}^3+1\right)\left(a_n^2a_1+1\right) &\geqq \left(a_n^2a_{n+1}+1\right)\left(a_{n+1}^2a_1+1\right),\\ a_{n+1}^3a_n^2a_1+a_n^2a_1+a_{n+1}^3+1 &\geqq a_{n+1}^3a_n^2a_1+a_{n+1}a_n^2+a_{n+1}^2a_1+1,\\ a_n^2(a_1-a_{n+1})+a_{n+1}^2(a_{n+1}-a_1) &\geqq 0,\\ (a_{n+1}-a_1)(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n) &\geqq 0.\end{aligned}$$

Posledná nerovnosť vo všeobecnosti neplatí. Zadaná nerovnosť je však cyklická, tj. nezmení sa, ak n-ticu kladných čísel $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ zameníme ľubovoľnou z n-tíc

$$(a_2, a_3, \dots, a_n, a_1),\ (a_3, a_4, \dots, a_n, a_1, a_2),\ \dots,\ (a_n, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}).$$

Môžeme teda danú $(n+1)$-ticu $(a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$ na začiatku cyklicky pozmeniť tak, aby číslo a_{n+1} bolo maximálne zo všetkých $n+1$ čísel a_i. Potom sú obe čísla $a_{n+1}-a_1$ a $a_{n+1}-a_n$ nezáporné, a preto platí aj posledná nerovnosť.

Tým je dôkaz nerovnosti matematickou indukciou hotový.

Úloha 2.
Uvažujme zvyčajné označenie dĺžok strán a veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka ABC, r nech označuje polomer opísanej kružnice. Ďalej nech G je stred strany AC a D' bod súmerne združený s bodom D podľa priamky AC. Pretože $|\sphericalangle AD'C| = |\sphericalangle ABC|$, leží bod D' na kružnici opísanej trojuholníku ABC, tj. $|SD'| = r$, a teda $|GD| = |GD'| = |SG| + r$.

Odtiaľ dostaneme $|SD| = |SG| + |GD| = 2|SG| + r = r(2\cos\beta + 1)$. Analogicky $|SE| = r(2\cos\alpha + 1)$. Dĺžka lomenej čiary DSE je teda

$$|SD| + |SE| = 2r(\cos\alpha + \cos\beta + 1),$$

zatiaľ čo obvod trojuholníka ABC je $2r(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$.

Zistíme, za akých podmienok platí rovnosť

$$\cos\alpha + \cos\beta + 1 = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma.$$

Túto postupne upravíme nasledujúcim spôsobom

$$\begin{aligned}2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+1 &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\gamma,\\ \left(\cos\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}\right)^2 &= 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}\right),\end{aligned}$$

tj.

$$\left(\cos\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}\right)\left(\cos\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}-2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 0.$$

Ak je $\gamma = 90°$, tak je posledná rovnosť splnená. Ak je však $\gamma \neq 90°$, možno rovnosť ekvivalentne upraviť na tvar $\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\gamma}{2} = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, čo je v spore s odhadmi

$$\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{4}\right) < \sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4} < 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

(pre ostré uhly α, β totiž platí $|\frac{\alpha-\beta}{2}| < \frac{\pi}{4}$).

Tým je dôkaz skončený.

Úloha 3.
Ukážeme, že hľadaný najmenší počet políčok je $4(n-k)$. Čísla n, k spĺňajúce podmienku z textu úlohy budú v celom riešení pevné; každé obsadenie niekoľkých políčok šachovnice $n \times n$ s požadovanou vlastnosťou nazveme „dobrým". (Dobré je napríklad obsadenie všetkých n^2 políčok.)

Popíšme najprv dobré obsadenie $4(n-k)$ políčok. Jednotlivé riadky šachovnice označme postupne číslami $i = 0, 1, \ldots, n-1$, rovnako stĺpce číslami $j = 0, 1, \ldots, n-1$, a obsaďme práve tie políčka, ktorých súradnice (i, j) spĺňajú $i + j \equiv k - 1 \pmod{k}$. Toto obsadenie je zrejme dobré a je tvorené jednak k políčkami, pre ktoré $i + j = k - 1$, jednak $2n - 2k$ políčkami, pre ktoré $i + j = 2k - 1$, a konečne $2n - 3k$ políčkami, pre ktoré $i + j = 3k - 1$ (v prípade $k = \frac{2}{3}n$ políčka tretieho druhu chýbajú, vtedy ale $2n - 3k = 0$), čo je celkovo $k + (2n - 2k) + (2n - 3k) = 4(n - k)$ políčok.

V druhej časti riešenia najprv rozdeľme celú šachovnicu $n \times n$ na časti

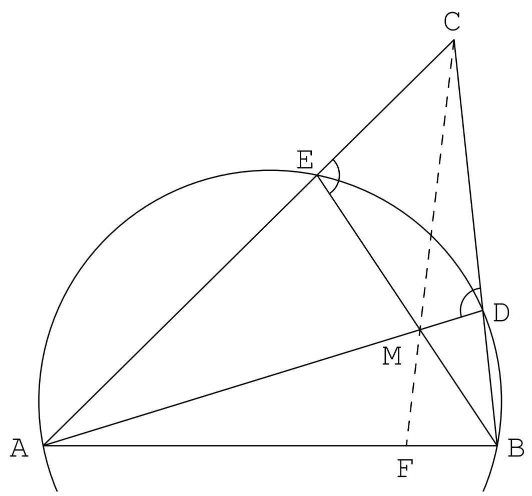
$$\begin{matrix} A & B & C \\ D & E & F, \\ G & H & I \end{matrix}$$

kde šachovnice A, C, G, I majú rozmery $(n-k) \times (n-k)$ políčok, šachovnice B, H rozmery $(n-k) \times (2k-n)$ políčok a šachovnice D, F rozmery $(2k-n) \times (n-k)$ políčok. Toto rozdelenie je motivované nasledujúcou vlastnosťou:

($*$) *Ak je obsadené niektoré políčko z B, potom v príslušnom riadku celej šachovnice neexistuje k voľných susedných políčok. Ak v niektorom riadku z $A \cup B \cup C$ neexistuje voľných k susedných políčok a pritom všetky políčka z B sú voľné, potom v tomto riadku je obsadené aspoň jedno políčko z A a aspoň jedno políčko z C. Podobné implikácie platia aj pre ostatné riadky a stĺpce celej šachovnice.*

Predpokladajme, že $\mathcal{M}$ je ľubovoľné dobré obsadenie, označme $|\mathcal{M}|$ počet políčok v $\mathcal{M}$ a dokážme nerovnosť $|\mathcal{M}| \geqq 4(n-k)$, ktorá je zrejmá, pokiaľ žiadne políčko z $\mathcal{M}$ neleží v $A \cup C \cup G \cup I$, lebo vtedy $\mathcal{M}$ nutne obsahuje aspoň $(n-k)$ políčok zo šachovnice B (aspoň jedno z každého jeho riadku) a podobne aspoň $(n-k)$ políčok každej zo šachovníc D, F a H. Predpokladajme ďalej, že práve b riadkov šachovnice B, práve h riadkov šachovnice H, práve d stĺpcov šachovnice D a práve f stĺpcov šachovnice F neobsahuje žiadne políčko z obsadenia $\mathcal{M}$. Ako sme už uviedli, v prípade $b = h = d = f = 0$ nerovnosť $|\mathcal{M}| \geqq 4(n-k)$ platí. V opačnom prípade existuje políčko z $\mathcal{M}$ ležiace v $A \cup C \cup G \cup I$; niektoré z nich „označkujeme“, a to nasledujúcim spôsobom. Najprv dáme značku na b políčok z $\mathcal{M}$ ležiacich v A a na b políčok z $\mathcal{M}$ ležiacich v C, vždy na jedno políčko v A a na jedno políčko v C v každom riadku, kde B neobsahuje žiadne políčko z $\mathcal{M}$ (také políčka v A a C existujú podľa $(*)$; ak je ich v A alebo C viac, vyberieme ľubovoľné z nich). Podobne dáme h značiek na políčka v G aj na políčka v I (podľa riadkov H), d značiek na políčka v A aj na políčka v G (podľa stĺpcov D) a konečne f značiek na políčka v C aj na políčka v I (podľa stĺpcov F). Celkovo sme dali $2(b+h+d+f)$ značiek (a to iba políčkam z $\mathcal{M}$ ležiacim v $A \cup C \cup G \cup I$), pritom na každom políčku sú najviac dve značky. Preto je počet označkovaných políčok aspoň $b+h+d+f$. Všetky tieto políčka z obsadenia $\mathcal{M}$ teraz odstránime a nahradíme ich novými b políčkami v B (po jednom v každom riadku, kde B neobsahovalo žiadne políčko z $\mathcal{M}$) a podobne novými h políčkami v H, d políčkami v D a f políčkami v F. Tak dostaneme nové obsadenie $\mathcal{M}'$, ktoré nemá viac políčok než $\mathcal{M}$ (tj. $|\mathcal{M}| \geqq |\mathcal{M}'|$) a o ktorom se pomocou $(*)$ ľahko overí, že je dobré (je dôležité, že sme pri prechode od $\mathcal{M}$ k $\mathcal{M}'$ neodstránili žiadne políčko z riadkov $D \cup E \cup F$, ani zo stĺpcov $B \cup E \cup H$). Pretože políčka z $\mathcal{M}'$ sú v každom riadku šachovníc B a H aj v každom stĺpci šachovníc D a F, platí $|\mathcal{M}'| \geqq 4(n-k)$, a teda aj $|\mathcal{M}| \geqq 4(n-k)$.

Úloha 4.
Dĺžky strán uvažovaného trojuholníka ABC označme obvyklým spôsobom a, b, c.



Obr. 27

Vhľadom na to, že body A, B, D, E ležia na jednej kružnici, platí (obr. 27) $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle BEC|$. Trojuholníky ADC a BEC sú teda podobné, z čoho vyplýva

$$\frac{|DC|}{|CA|} = \frac{|CE|}{|CB|}, \quad \text{tj.} \quad \frac{\frac{2}{3}a}{b} = \frac{\frac{1}{3}b}{a}.$$

Úpravou odtiaľ dostávame $b : a = \sqrt{2} : 1$. Vrchol C trojuholníka ABC danej vlastnosti leží teda na Apollóniovej kružnici k (so stredom na priamke AB).

Označme ďalej M priesečník priamok AD a BE, F priesečník priamky CM so stranou AB a $|AF| = x$. Z Cèvovej vety vyplýva

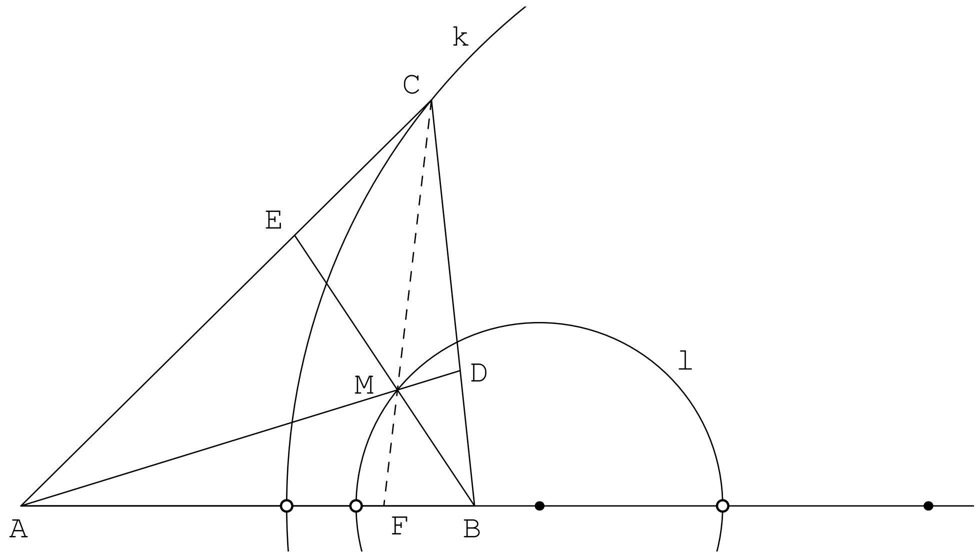
$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = \frac{x}{c-x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Z poslednej rovnosti už okamžite vyplýva $x = \frac{4}{5}c$, tj. priamka CM pretína stranu AB v pevnom vnútornom bode F, pre ktorý platí $|AF| : |FB| = 4 : 1$.

Použitím van Aubelovej vety pre *ceviány* AD, BE a CF, ktoré se pretínajú v bode M, dostávame

$$\frac{|CM|}{|MF|} = \frac{|CD|}{|DB|} + \frac{|CE|}{|EA|} = \frac{2}{1} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}, \quad \text{a teda} \quad |FM| : |FC| = 2 : 7.$$

Uvažujme rovnoľahlosť $h(F, \frac{2}{7})$. Tá zobrazuje vrchol C trojuholníka ABC danej vlastnosti na priesečník M priamok AD a BE a Apollóniovu kružnicu k na kružnicu l, ktorej stred leží na priamke AB (obr. 28). Hľadaná množina priesečníkov M priamok AD a BE leží teda na kružnici l.



Obr. 28

Ukážeme naopak, že ku každému bodu M kružnice l (z nej sú vyňaté dva body ležiace na priamke AB) existuje bod $C \in k$, ktorý je vrcholom trojuholníka ABC s danou vlastnosťou. Ukážeme teda, že na jeho stranách BC, CA existujú postupne body D, E vyhovujúce podmienkam (i), (ii). Ku každému bodu M kružnice l existuje bod $C \in k$ taký, že platí $C = h^{-1}(M)$. Na stranách BC, CA trojuholníka ABC existujú postupne body D, E vyhovujúce podmienke (i). Ukážeme, že tieto dva body vyhovujú podmienke (ii). Stačí overiť, že platí $\cos|\sphericalangle ADC| = \cos|\sphericalangle BEC|$. To môžeme spraviť napríklad použitím kosínusovej vety pre trojuholníky ADC a BEC. Tu je nutné využiť vzťah $b : a = \sqrt{2} : 1$. Pri výpočte dĺžok úsečiek AD, resp. BE možno znovu využiť kosínusovú vetu v trojuholníku ABC (a to pre vyjadrenie $\cos|\sphericalangle BCA|$).

Záver: Hľadaná množina M priesečníkov priamok AD a BE všetkých trojuholníkov s vlastnosťou danou v texte úlohy je kružnica l, ktorá je obrazom kružnice k v rovnoľahlosti $h(F, \frac{2}{7})$, z ktorej sú vyňaté dva body (jej priemeru) ležiace na priamke AB.

Úloha 5.
Ukážeme, že jediné riešenie je funkcia $f(x) = x^2$. Položme najprv $y = f(x)$ a ďalej $y = -x^2$. Porovnaním výsledkov, ktoré dostaneme týmito špeciálnymi voľbami, dostaneme $|f(x)| = x^2$ a zároveň $f(0) = 0$. Voľbou $x = 0$ dostaneme $f(y) + f(-y) = 2y^2$. Ako už vieme, musí platiť $f(y) \leqq y^2$ a súčasne $f(-y) \leqq y^2$. Obe predchádzajúce nerovnosti však implikujú spolu s podmienkou $f(y) + f(-y) = 2y^2$ rovnosť, a to pre každé $y \in \mathbb{R}$.

Skúškou sa presvedčíme, že riešením danej funkcionálnej rovnice je funkcia $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$.

Úloha 6.
(a) Najprv dokážeme, že žiadne dve modročervené úsečky nesmú mať rovnaký (orientovaný) smer. V opačnom prípade by ich koncové body tvorili vrcholy lichobežníka (alebo rovnobežníka) s modročervenými uhlopriečkami majúcimi spoločný vnútorný bod (platí to aj v prípade, keď sa štvoruholník degeneruje na úsečku).

Ďalej si uvedomme, že všetky dvojice mrežových bodov v uvažovanom kvádri o rozmeroch a, b, c určujú najviac $8(a+1)(b+1)(c+1)$ smerov.

Ak je uvažovaný kváder popísaný v karteziánskej súradnicovej sústave $Oxyz$ nerovnosťami

$$x_0 \leqq x \leqq x_0 + a, \quad y_0 \leqq y \leqq y_0 + b, \quad z_0 \leqq z \leqq z_0 + c,$$

je každý smer určený vektorom (u, v, w), kde u, v, w sú celé čísla spĺňajúce nerovnosti $|u| \leqq a$, $|v| \leqq b$, $|w| \leqq c$. Všetkých takýchto vektorov je práve $(2a+1)(2b+1)(2c+1)$, čo je menej ako $8(a+1)(b+1)(c+1)$.

Daných 2 000 modrých a 2 000 červených bodov určuje 4 000 000 modročervených úsečiek, z ktorých žiadne dve nemôžu mať rovnaký smer. Teda $4\,000\,000 \leqq 8(a+1)(b+1)(c+1)$, alebo inak napísané $(a+1)(b+1)(c+1) \geqq 500\,000$. Tým sme hotoví s dôkazom časti (a), lebo $(a+1)(b+1)(c+1)$ je počet mrežových bodov tohto kvádra.

(b) Vezmime kváder o rozmeroch $1999 \times 1999 \times 1$ s vrcholmi v bodoch $[0,0,0]$, $[0,0,1]$, $[1999,0,0]$, $[0,1999,0]$, $[1999,0,1]$, $[0,1999,1]$, $[1999,1999,0]$, $[1999,1999,1]$. Na modro ofarbíme všetkých 2 000 mrežových bodov na hrane s vrcholmi $[0,0,0]$ a $[1999,0,0]$, na červeno všetkých 2 000 mrežových bodov na hrane s vrcholmi $[0,0,1]$ a $[0,1999,1]$. Pretože tieto hrany (na ktorých ležia modré, resp. červené body) sú mimobežné, žiadne dve rôzne modročervené úsečky nemajú spoločný vnútorný bod. Kváder pritom obsahuje práve 8 000 000 mrežových bodov.

42. Medzinárodná matematická olympiáda

42. ročník Medzinárodnej matematickej olympiády (IMO) sa uskutočnil (už druhýkrát) v hlavnom meste USA, Washington, DC, v dňoch 1.7.–14.7. 2001.

Medzinárodná matematická olympiáda je súťažou jednotlivcov. Každá zúčastnená krajina na ňu vysiela reprezentačné družstvo zložené najviac zo šiestich súťažiacich, ktorých sprevádzajú (aspoň) dvaja vedúci. Účasť na 42. IMO v hlavnom meste USA bola rekordná: 473 súťažiacich z 83 štátov. Slovenské družstvo tvorili *Radovan Bauer* z Gymnázia na Poštovej ulici v Košiciach, *Peter Bella* z Gymnázia Jura Hronca v Bratislave, *Tomáš Kulich* z Gymnázia V. B. Nedožerského v Prievidzi, *Róbert Lukoťka* z Gymnázia J. G. Tajovského v Banskej Bystrici, Katarína Quittnerová z Gymnázia na Bilíkovej ulici v Bratislave a *Jana Szolgayová* z Gymnázia na Grösslingovej ulici v Bratislave. Vedúcim výpravy SR a zástupcom v medzinárodnej jury bol *doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.*, Žilinská univerzita, pedagogickým vedúcim bol *Juraj Földes*, FMFI UK Bratislava.

Pravidlá súťaže sú veľmi podobné pravidlám nášho celoštátneho kola. Súťaží sa dva dni; študenti dostanú každý deň 3 úlohy v ich rodnom jazyku, na vyriešenie ktorých majú 4,5 hodiny čistého času. Po skončení súťaže riešenia prezrú vedúci príslušnej krajiny a svoj návrh hodnotenia podľa vopred pripravených bodovacích schém obhajujú pred koordinátormi. Za správne vyriešenú úlohu môže súťažiaci získať maximálne 7 bodov. Výsledky družstva SR:

Meno	súčet	cena
Katarína Quittnerová	13 bodov	bronzová medaila
Tomáš Kulich	11 bodov	bronzová medaila
Radovan Bauer	8 bodov	
Peter Bella	8 bodov	
Róbert Lukoťka	7 bodov	
Jana Szolgayová	7 bodov	

Výsledky nášho družstva sú asi veľkým sklamaním predovšetkým pre samotných súťažiacich. Snáď okrem Tomáša Kulicha a čiastočne Katky Quittnerovej, pre ktorú je to už tretia bronzová medaila a už v Kórei na IMO 2000 jej chýbal jediný bod ku striebornej medaile; ak si vybojuje v družstve 2002 účasť, má nádej zaradiť sa medzi absolútne najúspešnejších účastníkov IMO, pretože štyri medaily má málokto. Držíme jej palce.

Jury 4 dni vyberala veľmi (a neskôr sa ukázalo, že až príliš) starostlivo príklady a „podarilo" sa jej vybrať šesticu veľmi ťažkých príkladov. Svedčí o tom fakt, že na bronzovú medailu stačilo 11 bodov, na striebornú 20 bodov a na zlatú 30 bodov zo 42 možných. Príklady však boli rovnaké pre všetkých a nie ostatní získali veľa bodov, ale my sme ich získali málo. Po vedomostnej stránke totiž aj najslabší člen nášho družstva mohol (a mal!) dosiahnuť aspoň 16 bodov…

Čo sa týka vhodnosti príkladov, všetky boli na medzinárodnú súťaž vhodné. Dajú sa však vytknúť isté detaily. Príklad číslo 1 sa dal riešiť pomocou analytickej geometrie a príklad číslo 2 sa dal po malých úpravách riešiť Lagrangeovými multiplikátormi. Treba však uznať, že všetky príklady boli veľmi pekné a zaujímavé.

Príprava nášho družstva nebola horšia, ako po iné roky a aj pri takých ťažkých vybraných príkladoch mohlo družstvo získať jednu–dve strieborné a tri–štyri bronzové medaily. Trend vo svete je však taký, že po celoštátnom kole MO má širší výber žiakov dlhšie sústredenie a so žiakmi užšieho výberu sa pracuje niekde tri mesiace nepretržite. A niekde je príprava ešte ostrejšia. Tu však vzniká otázka zosúladenia snahy po úspechu na IMO s ostatnými povinnými predmetmi, najmä pre maturantov.

Maximálny počet 42 bodov dosiahli a absolútnymi víťazmi sa stali dvaja Číňania *Liang Xiao* a *Zhiqiang Zhang* a dvaja Američania *Reid Barton* a *Gabriel Carroll*; na druhom konci tabuľky 0 bodov „dosiahlo“ 28 žiakov. (Poznamenajme, že Reid Barton si 13. júla prevzal cenu absolútneho víťaza, hneď odletel do Tampere vo Fínsku, aby sa o pár dní počtom bodov 580 zo 600 možných stal absolútnym víťazom IOI, t.j. Medzinárodnej informatickej olympiády.) Všetkých 6 čínskych žiakov získalo zlaté medaily a s 225 bodmi (z 252 možných) aj prvenstvo síce v neoficiálnej, ale predsa len hodne sledovanej súťaži družstiev. V tejto nasledovali 2. USA – 196 bodov, 3. Rusko – 186 bodov, 4. Bulharsko a Kórea po 185 bodov, 6. Kazachstan (okrem iného aj tvrdé trojmesačné sústredenie) 168 bodov.

Uveďme ešte niektoré neobvykle slabé výsledky: 15. Rumunsko – 129 bodov, 21. Maďarsko – 104 bodov; tieto krajiny sa v minulosti pravidelne umiestňovali v prvej desiatke, neraz aj medzi prvými tromi. Na druhej strane niekoľko družstiev podalo prekvapujúco dobré výsledky. Záverečné rozhodovanie jury skončilo až o pol tretej ráno, najmä kvôli rokovaniu o diskvalifikácii Cypru. Diskvalifikácia sa napokon nekonala, aj keď podľa názoru (nielen) vedúceho výpravy SR sa na základe predložených dôkazov konať mala.

Z ďalšieho poradia uveďme: 44. Česká republika – 57 bodov (a tiež len dve bronzové medaily), 47. Slovensko – 54 bodov. Za nami z európskych krajín skončili Nórsko, Bosna a Hercegovina, Holandsko, Rakúsko, Litva, Švajčiarsko, Španielsko, Írsko, Fínsko, Slovinsko (usporiadateľ IMO 2006), Švédsko, Dánsko, Belgicko, Albánsko, Island, Portugalsko, Luxembursko. Len na okraj: v prípravnom trojstretnutí Poľsko-ČR-SR v Bílovci 14.–15.6. 2001 sme boli pred českými priateľmi – ktorým sa posledné roky neveľmi darilo – o 26 bodov. Podobný výsledok (možno) bol v silách a schopnostiach našich žiakov aj teraz a znamenal by predstihnutie ďalších 9–10 európskych krajín a miesto v prvej tridsiatke. Neostáva však nič iné, len zopakovať, že naši žiaci nepodali výkon primeraný svojim vedomostiam.

IMO pripravili organizátori veľmi dobre, aj keď občas mohla byť informovanosť jury väčšia. Otvorenie súťaže sa konalo 4. júla na *George Mason University*. A keďže to je Deň nezávislosti, mohli si večer všetci účastníci IMO z lodí na rieke Potomac vychutnať slávnostný ohňostroj. Na sponzorovaní IMO sa podieľal celý rad významných firiem a inštitúcií, napr. *The Akamai Foundation*, *Wolfram Research*, *The Clay Mathematics Institute*, *Texas Instruments*, *The National Science Foundation*, *National Security Agency*. V samotnom Washingtone sa je na čo dívať: okrem mnohých monumentov na pamiatku vojen (Kórea, Vietnam, Iwo Jima, ...) a prezidentov (Lincoln, Jefferson, Roosevelt, Washington, ...) spomeňme len *Biely dom*, *Kapitol*, *Arlingtonský cintorín*, mimoriadne krásne *Smithsonian-múzeá* (so vstupom zadarmo), *Einsteinov pamätník* a pod. Usporiadatelia zorganizovali krátke návštevy *The Mathematical Association of America* (obdoba našej JSMF) a *Národnej akadémie vied*. V jediný (pre jury) voľný deň sa konal výlet do Baltimore spojený s prehliadkou nádherného morského akvária, múzea Titanicu, morského múzea v zálive, ... Slávnostné vyhlásenie výsledkov sa konalo v *Kennedyho centre*. O význame akcie svedčí, že účastníkom IMO sa prihovoril prezident Bush (príhovor sa premietal na dvoch plátnach; pre zaneprázdnenosť Bush nemohol byť prítomný osobne, ale našiel si čas natočiť ten príhovor) a okrem mnohých veľmi významných matematikov sa zúčastnil odovzdávania cien aj jeden z najslávnejších matematikov súčasnosti *Andrew Wiles* (v r. 1994 vyriešil viac ako 300-ročný Fermatov problém).

Súťažiaci bývali v univerzitnom mestečku George Mason kúsok od Washingtonu, DC, a mali veľmi bohatý sprievodný program. Od prvého dňa sa organizátori starali o pohodlie súťažiacich. Hneď prvý deň pripravili tradičnú barbecue párty. Ďalšie dni si mohli súťažiaci pozrieť veľmi zaujímavé matematické filmy, zahrať matematické hry alebo si pozrieť vystúpenie matematického kúzelníka, ktorý vedel neobvykle rýchlo sčitovať a násobiť čísla. Nakoniec dokonca porušil kúzelnícke tajomstvo a všetkým vysvetlil svoje „kúzla“. V areáli univerzity bol voľný prístup na internet a takisto možnosti športového vyžitia. Dal sa hrať futbal, volejbal, frisbee, softbal.

Jedným z najväčších prínosov IMO je stretávanie mladých ľudí, ktorý majú radi matematiku. Tomu napomáhali napríklad aj „medzištátne“ zápasy v rôznych športoch, spoločné stravovanie a ubytovanie. Myslím, že 42. IMO zanechala na väčšine účastníkov veľmi dobrý dojem.

Ďalšia, v poradí 43., IMO sa bude konať v Glasgowe 18.–31.7. 2002; potom by mali nasledovať Japonsko a Grécko.

Vojtech Bálint, Juraj Földes

Zadania úloh MMO

Úloha 1.
Nech O je stred kružnice opísanej ostrouhlému trojuholníku ABC. Bod P strany BC je pätou výšky z vrcholu A.

Predpokladajme, že $|\sphericalangle BCA| \geqq |\sphericalangle ABC| + 30°$.

Dokážte, že $|\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle COP| < 90°$. *(Kórea)*

Úloha 2.
Dokážte, že nerovnosť

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqq 1$$

platí pre všetky kladné reálne čísla a, b, c. *(Kórea)*

Úloha 3.
Matematickej súťaže sa zúčastnilo 21 dievčat a 21 chlapcov.

- Každý súťažiaci vyriešil nanajvýš šesť úloh.
- Pre každé dievča a každého chlapca existuje aspoň jedna úloha, ktorú vyriešili obaja.

Dokážte, že existuje úloha, ktorú vyriešili aspoň tri dievčatá a aspoň traja chlapci! *(Nemecko)*

Úloha 4.
Nech n je nepárne číslo väčšie ako 1 a nech $k_1, k_2, \dots, k_n$ sú dané celé čísla. Pre každú z $n!$ permutácií $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ nech

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i.$$

Dokážte, že existujú dve permutácie b a c, $b \neq c$ také, že $n!$ je deliteľom $S(b) - S(c)$. *(Kanada)*

Úloha 5.
V trojuholníku ABC nech AP rozpoľuje uhol BAC, pričom P leží na strane BC a nech BQ rozpoľuje uhol ABC, pričom Q leží na strane CA.

Je známe, že $|\sphericalangle BAC| = 60°$ a že $|AB| + |BP| = |AQ| + |QB|$.

Aké sú možné veľkosti uhlov trojuholníka ABC? *(Izrael)*

Úloha 6.
Nech pre celé čísla a, b, c, d platí $a > b > c > d > 0$. Predpokladajme, že

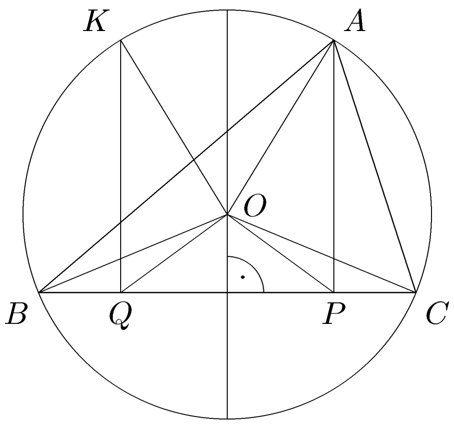
$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c).$$

Dokážte, že $ab + cd$ nie je prvočíslo! *(Rusko)*

Riešenia úloh MMO

Úloha 1.
Označme $\alpha = |\sphericalangle CAB|, \beta = |\sphericalangle ABC|, \gamma = |\sphericalangle BCA|$ a $\delta = |\sphericalangle COP|$. Ďalej označme po poradí K a Q body osovo súmerné s bodmi A a P podľa osi strany BC. Ďalej nech R je polomer opísanej kružnice trojuholníku ABC. Potom $|OA| = |OB| = |OC| = |OK| = R$. Navyše vieme, že $|QP| = |KA|$, lebo AP je výška trojuholníka ABC, a teda štvoruholník $KQPA$ je obdĺžnik. Všimnime si, že

$$|\sphericalangle AOK| = |\sphericalangle AOB| - |\sphericalangle KOB| = |\sphericalangle AOB| - |\sphericalangle AOC| = 2\gamma - 2\beta \geqq 60^\circ .$$



Z toho a z poznatku $|OA| = |OK| = R$ dostávame, že $|KA| \geqq R$ a $|QP| \geqq R$. Použitím trojuholníkovej nerovnosti dostaneme

$$|OP| + R = |OQ| + |OC| > QC = |QP| + |PC| \geqq R + |PC| .$$

Teda $|OP| > |PC|$. Potom v trojuholníku COP je $|\sphericalangle PCO| > \delta$ (oproti väčšej stranej leží väčší uhol). Pretože

$$\alpha = \frac{1}{2}|\sphericalangle BOC| = \frac{1}{2}\,(180^\circ - 2|\sphericalangle PCO|) = 90^\circ - |\sphericalangle PCO|,$$

dostávame $\alpha + \delta < 90^\circ$.

Úloha 2.
Najprv dokážeme, že platí

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \geqq \frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}},$$

alebo inak napísané

$$\left(a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}\right)^2 \geqq a^{\frac{2}{3}} \left(a^2 + 8bc\right) .$$

Použitím AG-nerovnosti dostaneme

$$\begin{aligned}\left(a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}\right)^2 - \left(a^{\frac{4}{3}}\right)^2 &= \left(b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}\right)\left(a^{\frac{4}{3}} + a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}\right) \\ &\geqq 2b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}} \cdot 4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}} = 8a^{\frac{2}{3}}bc .\end{aligned}$$

Teda

$$\left(a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}\right)^2 \geqq \left(a^{\frac{4}{3}}\right)^2 + 8a^{\frac{2}{3}}bc = a^{\frac{2}{3}} \left(a^2 + 8bc\right) .$$

Nakoniec dostávame

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \geqq \frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}} .$$

Podobne dokážeme

$$\frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ac}} \geqq \frac{b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}}$$

$$\frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geqq \frac{c^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}} .$$

Sčítaním týchto nerovností dostaneme dokazované tvrdenie.

Úloha 3.

Označme si G množinu dievčat, ktoré sa zúčastnili na súťaži, B množinu chlapcov, P množinu úloh, $P(g)$ množinu tých úloh, ktoré vyriešilo dievča $g \in G$ a $P(b)$ množinu tych úloh, ktoré vyriešil chlapec $b \in B$. Nakoniec si označme $G(p)$ množinu dievčat, ktoré vyriešili úlohu $p \in P$ a $B(p)$ množinu chlapcov, ktorí vyriešili úlohu $p \in P$. Prepíšme si podmienky zo zadania pomocou nášho označenia. Pre každé $g \in G$ a pre každé $b \in B$ dostávame

$$(a) \quad |P(g)| \leqq 6 , \quad |P(b)| \leqq 6, \qquad (b) \quad P(g) \cap P(b) \neq \emptyset .$$

Cheme dokázať, že existuje úloha $p \in P$ taká, že $|G(p)| \geqq 3$ a $|B(p)| \geqq 3$. Aby sme to urobili, budeme predpokladať opak a dosiahneme spor výpočtom (dvomi spôsobmi) všetkých usporiadaných trojíc (p, g, b) takých, že $p \in P(g) \cap P(b)$. Ak označíme $T = \{(p, g, b) : p \in P(g) \cap P(b)\}$, podmienka (b) dáva

$$|T| = \sum_{g\in G} \sum_{b\in B} |P(g) \cap P(b)| \geqq |G| \cdot |B| = 21^2 . \tag{1}$$

Predpokladajme, že žiadne $p \in P$ nespĺňa $|G(p)| \geqq 3$ a $|B(p)| \geqq 3$. Potom platí

$$\sum_{p \in P} |G(p)| = \sum_{g \in G} |P(g)| \leqq 6|G| \qquad \text{a} \qquad \sum_{p \in P} |B(p)| \leqq 6|B| . \tag{2}$$

Poznámka: Rovnosť v (2) sa dosiahne štandardnou „double-counting" technikou, t.j. technikou dvojakého výpočtu: Nech $\chi(g,p) = 1$ ak g vyriešila p a $\chi(g,p) = 0$ inak a vymeníme poradie sumácie v $\sum_{p \in P} \sum_{g \in G} \chi(g,p)$.

Označme si

$$P_+ = \{p \in P : |G(p)| \geqq 3\} , \qquad P_- = \{p \in P : |G(p)| \leqq 2\} .$$

Lema. *Platí* $\sum_{p \in P_-} |G(p)| \geqq |G|$, *a teda* $\sum_{p \in P_+} |G(p)| \leqq 5|G|$. *Tiež* $\sum_{p \in P_+} |B(p)| \geqq$ $\geqq |B|$, *a teda* $\sum_{p \in P_-} |B(p)| \leqq 5|B|$.

Dôkaz. Vezmime si ľubovoľné $g \in G$. Z *Dirichletovho princípu* a podmienok (a) a (b) vyplýva, že dievča g vyriešilo úlohu p, ktorú vyriešilo aspoň $\lceil 21/6 \rceil = 4$ chlapcov. Podľa predpokladu z nerovnosti $|B(p)| \geqq 4$ vyplýva, že $p \in P_-$, inak by sme dostali spor. Teda každé dievča vyriešilo aspoň jednu úlohu z množiny P_-. Teda

$$\sum_{p \in P_-} |G(p)| \geqq |G| . \tag{3}$$

Zo vzťahov (2) a (3) dostaneme

$$\sum_{p \in P_+} |G(p)| = \sum_{p \in P} |G(p)| - \sum_{p \in P_-} |G(p)| \leqq 5|G| .$$

Podobne každý chlapec vyriešil úlohu, ktorú vyriešili aspoň štyri dievčatá, teda každý chlapec vyriešil úlohu $p \in P_+$. Teda $\sum_{p \in P_+} |B(p)| \geqq |B|$ a ďalej postupujeme analogicky ako pred chvíľou. $\square$

Použitím lemy dostávame

$$\begin{aligned} |T| = \sum_{p \in P} |G(p)| \cdot |B(p)| &= \sum_{p \in P_+} |G(p)| \cdot |B(p)| + \sum_{p \in P_-} |G(p)| \cdot |B(p)| \\ &\leqq 2 \sum_{p \in P_+} |G(p)| + 2 \sum_{p \in P_-} |B(p)| \leqq 10|G| + 10|B| = 20 \cdot 21 . \end{aligned}$$

To je ale spor s (1). Tým sme dokázali požadované tvrdenie.

Úloha 4.
Úlohu dokazujme sporom. Označme $\sum S(a)$ súčet čísel $S(a)$ cez všetkých $n!$ permutácií $a = (a_1, a_2, \ldots , a_n)$. Vypočítame $\sum S(a)$ (mod n!) dvoma spôsobmi.

Prvý spôsob. V súčte $\sum S(a)$ je c_1 vynásobené $(n-1)!$-krát každým $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, jedenkrát za každú permutáciu množiny $\{1, \dots, n\}$ pre ktorú $a_1 = k$. Teda koeficient pri c_1 v $\sum S(a)$ bude

$$(n-1)!(1+2+\ldots+n) = \frac{(n+1)!}{2}\,.$$

Tento postup môžeme zopakovať pre všetky c_i a dostaneme

$$\sum S(a) = \frac{(n+1)!}{2} \sum_{i=1}^{n} c_i\,.$$

Druhý spôsob. Ak $n!$ nedelí výraz $S(a) - S(b)$ pre žiadne $a \neq b$, potom každé číslo $S(a)$ musí dávať rôzny zvyšok po delení číslom $n!$. Keďže počet permutácií je presne $n!$, tieto zvyšky musia byť $0, 1, 2, \dots, n! - 1$. Teda

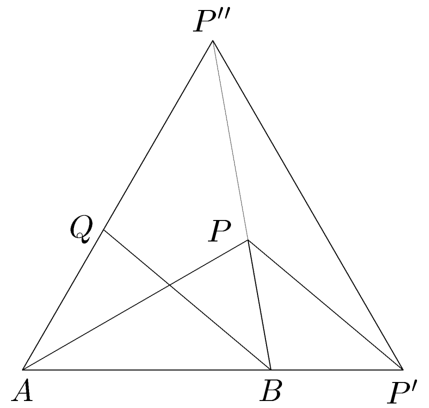
$$\sum S(a) \equiv \frac{(n!-1)n!}{2} \pmod{\mathrm{n!}}$$

Porovnaním výsledkov prvého a druhého spôsobu výpočtu dostaneme

$$\frac{(n+1)!}{2} \sum_{i=1}^{n} c_i \equiv \frac{(n!-1)n!}{2} \pmod{\mathrm{n!}}\,.$$

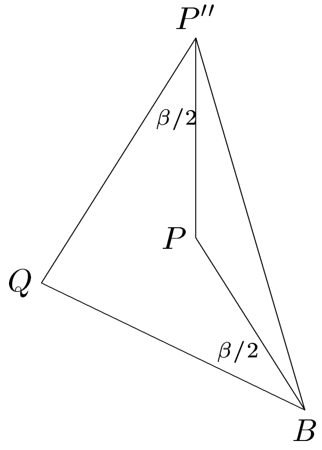
Pre n nepárne je ľavá strana kongruentná s 0 modulo $n!$, ale pre $n > 1$ pravá strana nie je kongruentná s 0 modulo $n!$. Teda pre nepárne $n > 1$ sme dostali spor.

Úloha 5.
Označme uhly trojuholníka $\alpha = 60°, \beta$ a γ. Predĺžme stranu AB do bodu P' tak, aby $|BP'| = |BP|$ a zostrojme bod P'' na polpriamke AQ tak, aby $|AP''| = |AP'|$. Potom je trojuholník BPP' rovnoramenný s uhlom $\beta/2$ pri základni a trojuholník $AP'P''$ je rovnostranný. Keďže $|AQ| + |QP''| = |AB| + |BP'| = |AB| + |BP| = |AQ| + |QB|$, tak $|QP''| = |QB|$. Trojuholník $AP'P''$ je rovnostranný a AP je osou uhla α implikujú, že $|PP'| = |PP''|$.



Lema. *Body B, P, P'' ležia na jednej priamke a teda P'' je totožný s bodom C.*

Dôkaz. Predpokladajme, že BPP'' tvoria nedegenerovaný (vrcholy neležia na priamke) trojuholník. Potom $|\sphericalangle PBQ| = |\sphericalangle PP'B| = |\sphericalangle PP''Q| = \frac{\beta}{2}$. Potom situácia vyzerá ako na obrázku, alebo bod P leží na druhej strane BP''. V oboch prípadoch predpoklad nedegerovanosti trojuholníka dáva $|BP| = |PP''| = |PP'|$, a teda BPP' je rovnostranný trojuholník. Potom ale platí, že $\frac{\beta}{2} = 60°$ a $\alpha + \beta = 60° + 120° = 180°$, čo je spor. Teda body B, P, P'' ležia na jednej priamke a $P'' = C$.



Z lemy dostávame, že trojuholník BCQ je rovnostranný, a teda $120° - \beta = \gamma = \frac{\beta}{2}$ Odtiaľ $\beta = 80°$ a $\gamma = 40°$.

Úloha 6.
Úlohu dokazujme sporom. Predpokladajme, že $ab + cd$ je prvočíslo. Všimnime si, že

$$ab + cd = (a + d)c + (b - c)a = m \cdot nsd(a + d, b - c)$$

pre nejaké kladné celé číslo m. Podľa nášho predpokladu je $m = 1$ alebo $nsd(a + d, b - - c) = 1$. Rozoberme postupne oba prípady.

Prvý prípad: $m = 1$. Potom

$$\begin{aligned} nsd(a + d, b - c) &= ab + cd > ab + cd - (a - b + c + d) \\ &= (a + d)(c - 1) + (b - c)(a + 1) \geqq nsd(a + d, b - c), \end{aligned}$$

čo je spor.

Druhý prípad: $nsd(a + d, b - c) = 1$. Nahraďme v podmienke zadania výraz $ac + bd$ výrazom $(a + d)b - (b - c)a$; po úpravách dostaneme

$$(a + d)(a - c - d) = (b - c)(b + c + d)\,.$$

Odtiaľ vidíme, že existuje kladné celé číslo k také, že

$$\begin{aligned} a-c-d &= k(b-c)\,, \\ b+c+d &= k(a+d)\,. \end{aligned}$$

Sčítaním týchto dvoch rovníc dostaneme $a+b=k(a+b-c+d)$, a teda $k(c-d) = (k-1)(a+b)$. Vieme, že $a>b>c>d$. Ak $k=1$, potom $c=d$, čo je spor. Ak $k \geqq 2$ potom

$$2 \geqq \frac{k}{k-1} = \frac{a+b}{c-d} > 2,$$

čo je znovu spor.

Keďže sme dostali spor v oboch prípadoch, tak výraz $ab+cd$ nemôže byť prvočíslo.

Poznámka. Príklady štvoríc (a,b,c,d) vyhovujúcim podmienke zo zadania sú napríklad (21, 18, 14, 1) a (65, 50, 34, 11).

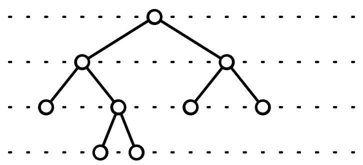
Zadania súťažných úloh

Kategória P

Archív zadaní Matematickej olympiády, kategórie P sa nachádza na WWW stránke http://www.ksp.sk/mop.

P – I – 1

Binárny strom je štruktúra tvorená jednotlivými uzlami. Jeden z uzlov je význačný – hovoríme mu koreň. Každý z uzlov buď nemá žiadneho následníka (potom sa nazýva list), alebo má práve dvoch následníkov (ďalšie uzly stromu). Hĺbkou uzla rozumieme jeho vzdialenosť od koreňa stromu. Uvedomte si, že koreň môže byť i listom – potom je binárny strom tvorený jediným vrcholom hĺbky 0. Príklad binárneho stromu si môžete prezrieť na nasledujúcom obrázku:



Aby sme mohli binárne stromy jednoducho popisovať, zavedieme si nasledujúce kódovanie: k-ty riadok kódovania (pre $k = 0, 1, 2 \ldots$) popisuje práve uzly hĺbky k v poradí zľava doprava. Uzol binárneho stromu, ktorý nie je listom, budeme v našom kódovaní zobrazovať znakom `U`, listy budeme označovať znakom `L`. Binárny strom z predchádzajúceho obrázku teda bude zakódovaný ako:

```
U
UU
LULL
LL
```

Súťažná úloha

Je daný počet listov N ($N \leq 10\,000$) a ich hĺbky v binárnom strome (nejakých N prirodzených čísel). Napíšte program, ktorý zostaví binárny strom so zadanými hĺbkami listov a ten vypíše v našom kódovaní. Ak vstupným dátam vyhovuje viac binárnych stromov, program vypíše ľubovoľný jeden z nich. Pokiaľ vyhovujúci strom neexistuje, program o tom vypíše správu.

Formát vstupu: Prvý riadok vstupného súboru `STROMY.IN` obsahuje jediné číslo N (počet listov). Druhý riadok obsahuje N čísel – hĺbky listov hľadaného stromu.

Formát výstupu: Výstupný súbor `STROMY.OUT` bude obsahovať kódovanie nájdeného stromu vo vyššie uvedenom formáte, prípadne správu „`Zodpovedajuci strom neexistuje.`“.

Príklad

Súbor `STROMY.IN`

```
4
2 3 1 3
```

Súbor `STROMY.OUT`

```
U
UL
LU
LL
```

Súbor `STROMY.IN`

```
3
1 1 2
```

Súbor `STROMY.OUT`

```
Zodpovedajuci strom neexistuje.
```

P – I – 2

Na kráľovstvo kráľa Mieromila III. zaútočili nepriateľské vojská a podarilo sa im obsadiť niekoľko miest. Kráľ teraz potrebuje dať svojmu generálovi príkaz k protiútoku (bez príkazu predsa generál nemôže bojovať). Generál však momentálne prevádza inšpekciu vojsk v inom meste. Je preto treba vyslať posla, ktorý príkaz čo najrýchlejšie doručí. Príkaz však v žiadnom prípade nesmie padnúť do rúk nepriateľa! Preto sa posol musí neustále držať čo najďalej od nepriateľom obsadených miest. Vašou úlohou je navrhnúť pre posla čo najlepšiu trasu.

Súťažná úloha

Program dostane na vstupe zadaný počet miest N ($1 \leq N \leq 100$). Jednotlivé mestá budeme označovať číslami $1 \ldots N$. Ďalej je na vstupe uvedený počet ciest M ($1 \leq M \leq$ $\leq 10\,000$) a zoznam týchto ciest vedúcich medzi mestami. Každá cesta je určená dvojicou čísel miest, ktoré spája. Cesty sa krížia len v mestách a je možné sa po nich dostať z ľubovoľného mesta do ľubovoľného (prípadne cez iné mestá). Ďalší údaj K zadaný na vstupe určuje počet miest obsadených nepriateľom, nasleduje zoznam obsadených miest. Nakoniec program dostane číslo mesta, odkiaľ vyráža posol, a číslo mesta, kde sa zdržuje generál. Váš program má nájsť trasu, ktorej vzdialenosť od miest obsadených nepriateľom je maximálna. Pokiaľ existuje takých trás viac, program určí ľubovoľnú najkratšiu z nich. Vzdialenosť miest $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ počítame ako minimálny počet ciest, po ktorých musíme prejsť, aby sme sa dostali z mesta $\mathcal{A}$ do mesta $\mathcal{B}$. Vzdialenosť trasy od mesta $\mathcal{A}$ je potom najmenšia zo vzdialeností mesta $\mathcal{A}$ od jednotlivých miest ležiacich na uvažovanej trase. Vzdialenosťou trasy od obsadených miest rozumieme najmenšiu zo vzdialeností medzi trasou a niektorým z obsadených miest alebo nulu pokiaľ niektoré mesto na trase samotnej je obsadené.

Formát vstupu: Prvý riadok vstupného súboru `POSOL.IN` obsahuje čísla N (počet miest) a M (počet ciest). Po ňom nasleduje M riadkov, z ktorých každý obsahuje popis jednej cesty. Cesta je popísaná dvojicou čísel koncových miest. Nasleduje riadok s číslom K (počet obsadených miest) a za ním K riadkov s číslami obsadených miest. Posledný riadok vstupného súboru obsahuje číslo mesta, odkiaľ vychádza posol, a číslo mesta, kde sa nachádza generál.

Formát výstupu : Výstupom programu v súbore `POSOL.OUT` sú čísla miest na najlepšej nájdenej trase uvedené v poradí, v akom nimi má posol prechádzať. Všetky čísla miest sú zapísané v jedinom riadku výstupného súboru a sú oddelené medzerami.

Príklad

Súbor `POSOL.IN`

```
10 12        7 8
1 2          8 5
2 3          1 9
3 4          9 10
4 5          10 5
2 5          1
1 6          3
6 7          1 5
```

Súbor `POSOL.OUT`

```
1 9 10 5
```

P – I – 3

Skupina priateľov sa rozhodla, že v lete podniknú spoločný výlet na bicykloch. Väčšina zvolenej trasy však vedie prírodnou rezerváciou, a preto môžu nocovať len v kempoch. Kempy, v ktorých na svojom výlete prespia, ešte nevybrali.

Celková dĺžka naplánovanej trasy je L ($1 \leq L \leq 1\,000\,000\,000$). Maximálna vzdialenosť, ktorú naši priatelia môžu prejsť za jeden deň, je K, t.j. počas dvoch po sebe nasledujúcich dňoch musia prespať v kempoch vzdialených nanajvýš o K. Na naplánovanej trase sa nachádza celkom N kempov ($0 \leq N \leq 10\,000$); i-ty kemp je vo vzdialenosti l_i od začiatku ich výletu a cena za prespanie v ňom je c_i ($1 \leq c_i \leq 20\,000$). Čísla L, K, l_i a c_i sú celé kladné; všetky l_i sú navzájom rôzne a platí $0 < l_1 < l_2 < \ldots < l_N < L$.

Vašou úlohou je rozhodnúť, či skupina môže naplánovanú trasu prejsť. Ak možno trasu prejsť, potom určte, v ktorých kempoch majú prespať, aby:

a) ich výlet trval čo najmenší počet dní.

b) celková cena za prespanie v kempoch bola čo najmenšia.

Úlohy a) a b) riešte zvlášť; v prípade, že jednu z týchto úloh neviete vyriešiť, riešte len druhú z nich.

Formát vstupu: Vstupný súbor sa nazýva `VYLET.IN`. V prvom riadku sú čísla L, K a N oddelené medzerou. Na ďalších N riadkoch nasledujú dvojice čísel l_i a c_i oddelených medzerou, postupne pre $i = 1$ až $i = N$.

Formát výstupu: Výstupný súbor sa nazýva `VYLET-A.OUT` pre úlohu a) a `VYLET-B.OUT` pre úlohu b). Ak výlet nemožno uskutočniť tak, aby naši priatelia nikdy neprešli za deň vzdialenosť väčšiu ako K, výstupný súbor obsahuje jediný riadok s vetou „`Trasu nemozno prejst.`“. V opačnom prípade prvý riadok obsahuje dve čísla – M a C. Prvé z nich M ($0 \leq M$) je počet kempov, v ktorých skupina prespí, druhé z nich C je cena, ktorú za prespanie v týchto kempoch zaplatí. Druhý riadok súboru obsahuje M medzerou oddelených čísel kempov, v ktorých naši priatelia budú nocovať. Kempy sú číslované od jednotky. Pokiaľ je $M = 0$, nemusí byť druhý riadok vôbec uvedený. V prípade, že existuje viac riešení spĺňajúcich podmienku a) alebo b), program má vypísať ľubovoľné jedno z nich.

Príklad

Súbor `VYLET.IN`
```
25 5 9
4 2
5 8
8 2
10 8
12 2
15 8
16 2
20 8
24 2
```

Súbor `VYLET-A.OUT`
```
4 32
2 4 6 8
```

Súbor `VYLET-B.OUT`
```
5 16
1 3 5 7 8
```

Súbor `VYLET.IN`
```
15 10 2
2 11
4 12
```

Súbory `VYLET-A.OUT`, `VYLET-B.OUT`
```
Trasu nemozno prejst.
```

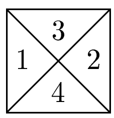
Súbor `VYLET.IN`
```
8 10 1
7 11
```

Súbory `VYLET-A.OUT`, `VYLET-B.OUT`
```
0 0
```

P – I – 4

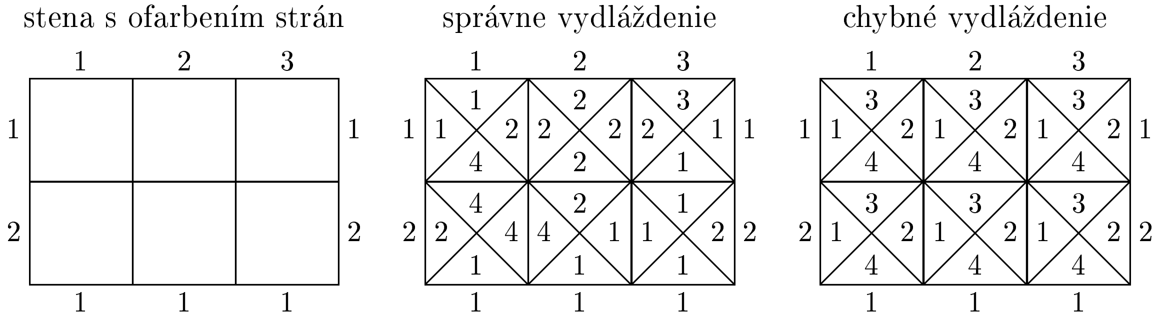
Dlaždicové programy

Najprv niekoľko definícií: *Dlaždice* sú rovnako veľké štvorce s ofarbenými hranami. Konkrétnemu priradeniu farieb hranám dlaždice budeme hovoriť *typ* dlaždice a budeme ho zapisovať ako usporiadanú štvoricu (l, p, h, d) udávajúcu farbu v poradí ľavej, pravej, hornej a dolnej hrany. Aby sme si uľahčili prácu, budeme farby označovať rôznymi symbolmi – písmenami, číslami a podobne. Dlaždica typu $(1, 2, 3, 4)$ bude teda vyzerať nasledovne:



Priestor, ktorý budeme dláždiť (budeme mu hovoriť *stena*), má tvar obdĺžnika o veľkosti $m \times n$ (m aj n sú prirodzené čísla; jednotkou dĺžky nech je dĺžka hrany dlaždice). Strany obdĺžnika sú rozdelené na úseky jednotkovej dĺžky a každému úseku je opäť priradená farba. Našim cieľom je *vydláždiť* stenu dlaždicami tak, aby v každom z $m \cdot n$ jednotkových štvorcov steny bola umiestnená práve jedna dlaždica, susedné dlaždice se dotýkali vždy hranami tej istej farby a rovnako krajné dlaždice priliehali k okraju steny vždy hranou takej farby, akú má aj príslušný úsek okraja steny. Dlaždice nie je povolené otáčať.

Príklad



Pomocou dláždenia môžeme ľahko riešiť úlohy, ktorých výsledkom je odpoveď ÁNO alebo NIE: zostavíme vhodnú množinu typov dlaždíc (tá je pre daný problém pevná – nezávisí na vstupe), vezmeme vhodne veľkú stenu, jej horný okraj ofarbíme podľa vstupu nášho problému, ostatné okraje ponecháme jednofarebné a budeme sa pýtať, či je túto stenu možné vydláždiť alebo nie. Pritom chceme, aby tento výsledok bol zhodný s riešením našej úlohy.

Aby sme sa nemuseli zaoberať tým, ako presne veľkú stenu máme zvoliť pre ten či onen vstup úlohy, budeme šírku steny voliť vždy rovnakú, ako je dĺžka vstupu (horný okraj teda bude celý zaplnený vstupom), zatiaľ čo výšku steny použijeme najmenšiu, pre ktorú existuje vydláždenie s použitím našej sady dlaždíc.

Keď tento spôsob počítania porovnáme s klasickým programovaním, zistíme, že zvolená sada dlaždíc tvorí v našom modeli niečo podobné programu a potrebná výška steny vzdialene odpovedá dobe behu výpočtu – budeme sa preto snažiť, aby v našich riešeniach bola čo najmenšia.

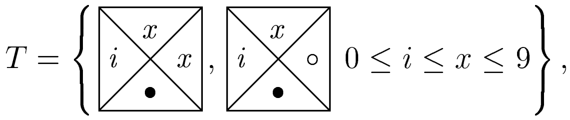
Formálne povedané, *dlaždicový program* je usporiadaná štvorica

$$D = (T, l_0, p_0, d_0),$$

kde T je konečná množina typov dlaždíc $\{(l_1, p_1, h_1, d_1), \ldots, (l_k, p_k, h_k, d_k)\}$ a l_0, p_0 a d_0 sú okrajové farby. *Rozhodovacou úlohou* $P(x)$ rozumieme úlohu zistiť, či vstup x (konečná postupnosť symbolov, resp. farieb z vopred určenej konečnej množiny) má požadovanú vlastnosť P. Hovoríme, že dlaždicový program *rieši rozhodovaciu úlohu* $P(x)$, ak platí, že $P(x) =$ ÁNO práve vtedy, keď existuje $v > 0$ také, že je možné vydláždiť dlaždicami typov obsiahnutých v množine T stenu veľkosti $|x| \times v$ s hornou hranou ofarbenou vstupom x a ľavou, pravou a dolnou hranou ofarbenou postupne farbami l_0, p_0 a d_0. Z každého typu je možné použiť ľubovoľne mnoho dlaždíc. *Zložitosťou* programu D pre daný vstup x nazveme najmenšie v, pre aké to je možné; pokiaľ také v neexistuje, a teda $P(x) =$ NIE, definujeme zložitosť ako nulovú. Zložitosť programu je funkcia dĺžky vstupu n, ktorej hodnota udáva maximum zo zložitostí programov pre jednotlivé vstupy tejto dĺžky.

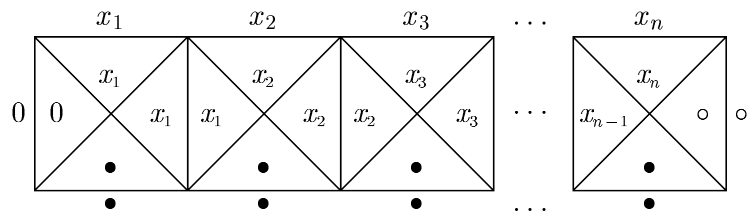
Príklad

Skúsme teraz skonštruovať dlaždicový program, ktorý bude overovať, či je daná postupnosť tvorená prirodzenými číslami $x_1, \ldots, x_n$ $(0 \leq x_i \leq 9)$ neklesajúca. Použijeme dlaždice nasledujúcich typov:



ľavý okraj ofarbíme farbou 0, pravý ∘, dolný farbou • a tvrdíme, že tento program rieši danú úlohu so zložitosťou $O(1)$. To je však treba dokázať.

Predovšetkým si overíme, že každá stena, ktorú je možné vydláždiť dlaždicami typov z množiny T, má jednotkovú výšku. To jasne vyplýva z toho, že spodná hrana každej dlaždice má farbu •, ktorá sa nevyskytuje na žiadnej hornej hrane. Z toho istého dôvodu sa dlaždice majúce na svojej pravej hrane farbu ∘ musia vyskytovať tesne pri pravom okraji steny a nikde inde. Každé korektné dláždenie preto musí vyzerať takto:



čo je však možné práve vtedy, keď $0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_{n-1} \le x_n$, teda keď postupnosť na vstupe je neklesajúca.

Súťažné úlohy

a) Zostrojte dlaždicový program, ktorý o danej postupnosti núl a jednotiek zistí, či je dvojkovým zápisom nejakého prirodzeného čísla deliteľného piatimi.

b) Zostrojte dlaždicový program, ktorý o danej postupnosti prirodzených čísel $x_1, \ldots, x_n$ $(0 \le x_i \le 9)$ rozhodne, či je nekonštantná (t.j. vydláždenie existuje práve vtedy, keď existujú indexy i, j také, že $x_i \ne x_j$).

P – II – 1

Jožko našiel na povale u babičky krabicu s drevenými paličkami. Začal sa s nimi hrať a zostavovať z nich trojuholníky rôznych tvarov. Uvidel ho jeho otec a začalo ho zaujímať, koľko rôznych trojuholníkov sa dá z týchto paličiek zostaviť. Vašou úlohou je pomôcť mu nájsť odpoveď na túto otázku.

Súťažná úloha

Váš program na vstupe dostane celé číslo N (počet paličiek) a ďalej N navzájom rôznych kladných čísel d_1 až d_N (dĺžky paličiek). Úlohou vášho programu je určiť počet trojíc celých čísel i, j, k takých, že $1 \le i < j < k \le N$ a čísla d_i, d_j a d_k spĺňajú trojuholníkovú nerovnosť (teda $d_i < d_j + d_k$, $d_j < d_i + d_k$ a $d_k < d_i + d_j$).

Príklad

Pre $N = 5$ a $d_1 = 5.5$, $d_2 = 1.5$, $d_3 = 2.0$, $d_4 = 2.5$, $d_5 = 7.5$ váš program vráti číslo 2, lebo trojuholník sa dá zostaviť len z trojice paličiek s dĺžkami d_1, d_4 a d_5 a z trojice s dĺžkami d_2, d_3 a d_4. Všimnite si, že ani trojica paličiek s dĺžkami d_1, d_3 a d_5 netvorí trojuholník.

P – II – 2

Spoločnosť pre rovnoprávnosť robotov a ľudí sa snaží vyrobiť robota, ktorý by sa mohol sám pohybovať v miestnosti s prekážkami. Bohužiaľ tejto spoločnosti chýba softvérový expert, a preto sa rozhodla, že vás požiada o pomoc.

Robot sa má pohybovať v obdĺžnikovej miestnosti, ktorá má na podlahe nakreslenú štvorčekovú sieť. Na niektorých políčkach v miestnosti sú postavené prekážky – na tieto políčka nesmie robot počas svojho pohybu vstúpiť. Robot sa môže po miestnosti pohybovať iba rovnobežne s niektorou zo stien.

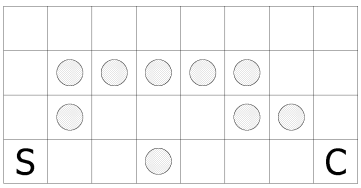
Spoločnosť však trpí aj nedostatkom schopných technikov, a tak sú možnosti pohybu robota po miestnosti značne limitované. Robot rozpoznáva len tri príkazy: `Krok`, `Doľava` a `Doprava`. Po prijatí príkazu `Krok` sa robot presunie na susedné políčko v smere, do ktorého je práve natočený. Po prijatí príkazu `Doľava` sa otočí o 90 stupňov doľava a po prijatí príkazu `Doprava` sa otočí o 90 stupňov doprava.

Súťažná úloha

Vašou úlohou je napísať program, ktorý na vstupe dostane rozmery štvorcovej siete na podlahe miestnosti (M a N), súradnice políčka, na ktorom sa robot práve nachádza a súradnice políčka, na ktoré sa robot má presunúť. Súradnice políčok číslujeme od 1, prvá súradnica je riadok, druhá stĺpec. Ľavý horný roh miestnosti má súradnice $[1, 1]$ (viď príklad nižšie). Každý z nasledujúcich M riadkov obsahuje N čísel 0 alebo 1. Ak je j-te číslo na i-tom radku 1, potom je na políčku so súradnicami $[i, j]$ prekážka, ak je toto číslo 0, tak tam prekážka nie je. Úlohou je nájsť a vypísať postupnosť príkazov, podľa ktorých robot dôjde zo začiatočného políčka na cieľové. Úloha však má ešte jeden háčik: Spracovanie príkazov `Doľava` a `Doprava` je časovo veľmi náročné. Preto by ich vami vytvorená postupnosť inštrukcií pre robota mala obsahovať čo najmenej. Počet príkazov `Krok` môže byť ľubovoľný. Začiatočné natočenie robota si môžete zvoliť. V prípade, že robot nemôže prejsť zo začiatočného políčka na cieľové, vypíšte o tom vhodnú správu.

Príklad

Predstavme si miestnosť so štvorcovou sieťou 4×8 z nasledujúceho obrázku:



Úlohou je presunúť robota z políčka označeného S (so súradnicami $[4, 1]$) na políčko označené C (so súradnicami $[4, 8]$). Vstup vášho programu by teda vyzeral nasledovne:

```
4 8
4 1
```

```
4 8
0 0 0 0 0 0 0 0
0 1 1 1 1 1 0 0
0 1 0 0 0 1 1 0
0 0 0 1 0 0 0 0
```

Optimálny program na presun robota je nasledovný (začiatočné natočenie robota je dohora):

```
Krok Krok Krok
Doprava
Krok Krok Krok Krok Krok Krok Krok
Doprava
Krok Krok Krok
```

Pri tejto ceste robot urobí 13 krokov a dvakrát sa otočí. Všimnite si, že existuje kratšia cesta s 9 krokmi a 4 otočeniami – táto cesta je síce kratšia, ale podľa zadania nie je optimálna, lebo sa počas nej robot viackrát otočí.

P – II – 3

Malému Jožkovi (ktorého poznáte už zo zadania 1. úlohy) sa jedného dňa dostali do rúk nožnice. A keďže Jožko zdedil talent po ockovi, ktorý je moderným maliarom, rozhodol sa vylepšiť jeden jeho obraz v tvare konvexného n-uholníka. Vybral si dva jeho vrcholy a obraz prestrihol po ich spojnici. Potom si na jednej zo vzniknutých častí opäť vybral dva vrcholy a časť opäť prestrihol. Keď sa takto Jožko chvíľu hral, prichytil ho ocko, nožnice mu nekompromisne zobral a začal zachraňovať, čo sa dalo. Po chvíli zistil, že obraz už do pôvodného stavu nezloží. Rozhodol sa teda, že aspoň nájde časť, ktorá má najviac vrcholov a tú vystaví na svojej najbližšej výstave ako miniatúru. A práve s hľadaním tejto časti mu máte pomôcť.

Súťažná úloha

Navrhnite čo najefektívnejší algoritmus, ktorý dostane na vstupe počet vrcholov pôvodného obrazu n, počet Jožkových prestrihnutí k a popis jednotlivých prestrihnutí a na základe týchto údajov určí počet vrcholov tej výslednej časti, ktorá ich má najviac. Každé prestrihnutie je popísané dvojicou čísel (a_i, b_i), čo sú čísla vrcholov v pôvodnom n-uholníku, medzi ktorými Jožko strihal. Vrcholy n-uholníka sú číslované po obvode číslami 1 až n. Snažte sa, aby časová ani pamäťová zložitosť vášho programu nezávisela na počte vrcholov obrazu.

Príklad

Pre $n = 10$, $k = 3$ a prestrihnutia $(1, 8)$, $(7, 5)$ a $(4, 2)$ má najväčšia časť 6 vrcholov.

P – II – 4

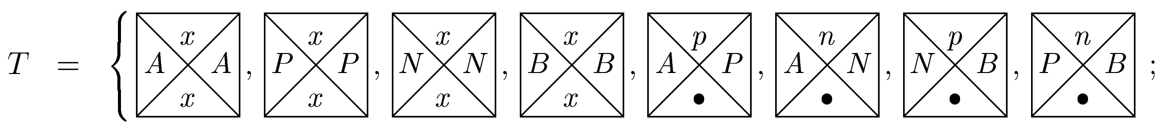
Študijný text „Dlaždicové programy" k príkladu P-II-4 možno nájsť v zadaní príkladu P-I-4 na strane **98**.

Uveďme ďalší príklad použitia dlaždicových programov, ktorý je zložitejší a ukazuje, ako možno využívať viac riadkov dlaždíc.

Príklad

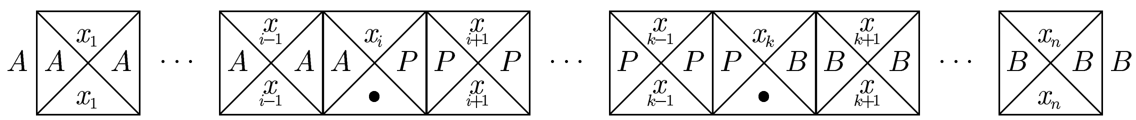
Skonštruujme dlaždicový program, ktorý bude overovať, či je daná postupnosť tvorená prirodzenými číslami $x_1, \ldots, x_n$ $(0 \leq x_i \leq 9)$ *vyvážená,* tzn. či obsahuje rovnaký počet párnych a nepárnych čísel.

Myšlienka nášho riešenia je veľmi jednoduchá: zostrojíme sadu dlaždíc, ktorá bude umožňovať práve také vydláždenia, v ktorých v každom riadku prepíšeme jedno párne a jedno nepárne číslo na $\bullet$. Dolný okraj steny ofarbíme tiež farbou $\bullet$. Keďže ofarbenie spodného okraja je vyvážené a vydláždenie každého riadku vyváženosť zachováva, akákoľvek vstupná postupnosť, pre ktorú existuje vydláždenie, je nutne vyvážená. A naopak, ak máme vyváženú postupnosť, potom ľahko overíme, že vydláždenie existuje: kým ešte máme nejaké čísla, vyberieme si ľubovoľné párne a ľubovoľné nepárne číslo (z vyváženosti vieme, že také čísla v postupnosti určite sú), tie jedným riadkom prepíšeme na $\bullet$ a toto opakujeme tak dlho ($n/2$-krát), kým neprepíšeme všetky čísla. Ak sa nám teda podarí takýto dlaždicový program zostrojiť, bude zadanú úlohu riešiť so zložitosťou $O(n)$.
Hľadaný program môže vyzerať napríklad nasledovne:

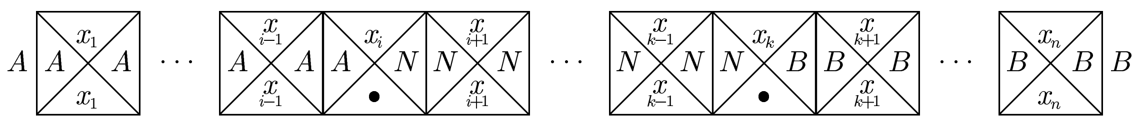


$$x \in \{0, \ldots, 9, \bullet\},\ p \in \{0, 2, 4, 6, 8\},\ n \in \{1, 3, 5, 7, 9\} \Bigg\},$$

ľavý okraj ofarbíme farbou A, pravý farbou B a dolný farbou $\bullet$. Z týchto dlaždíc je možné konštruovať jedine riadky typu



kde x_i je párne a x_k nepárne, prípadne



pre x_i nepárne a x_k párne. To sú presne riadky, ktoré sme potrebovali.

Súťažná úloha

Zostrojte dlaždicový program, ktorý o danej postupnosti prirodzených čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($0 \le x_i \le 9$) rozhodne, či je symetrická, t.j. či $x_1 = x_n$, $x_2 = x_{n-1}$, $\ldots$, $x_i = x_{n-i+1}$, $\ldots$, $x_n = x_1$.

P – III – 1

Pán Kašparov bol náruživý hráč šachu. Keďže mu často chýbal rovnocenný protihráč a hrať sám proti sebe ho už nebavilo (vždy si odhalil všetky premyslené pasce), vymyslel si nasledujúcu hru: Na šachovnici s rozmermi $N \times N$ treba rozmiestniť N veží tak, aby sa žiadne dve neohrozovali. Aby hra nebola až taká jednoduchá, je pre každú vežu určený obdĺžnik, do ktorého ju treba umiestniť.

Vašou úlohou je navrhnúť algoritmus, ktorý bude hrať túto hru. Na vstupe dostane rozmer šachovnice N (čo je zároveň aj počet veží) a ďalej popis N obdĺžnikov. Každý obdĺžnik je popísaný štvoricou čísel $A_x, A_y, B_x, B_y, 1 \le A_x \le B_x \le N, 1 \le A_y \le B_y \le N$, kde A_x, A_y sú súradnice ľavého horného rohu obdĺžnika a B_x, B_y sú súradnice jeho pravého dolného rohu. Riadky číslujeme od 1 do N zhora nadol, stĺpce od 1 do N zľava doprava. Na výstup má algoritmus vypísať jedno ľubovoľné prípustné rozloženie veží alebo podať správu o tom, že vyhovujúce rozloženie neexistuje.

Príklad

Vstup:
$N = 4$
```
1 1 1 1
4 4 4 4
1 1 3 3
3 2 4 4
```

Výstup:
(1, 1), (4, 4), (2, 2), (3, 3)
(toto je jedno z vyhovujúcich rozmiestnení veží)

Vstup:
$N = 3$
```
1 1 3 1
2 1 3 1
2 2 3 3
```

Výstup:
Vyhovujúce rozmiestnenie veží neexistuje.

P – III – 2

Napíšte program, ktorý na vstupe dostane prirodzené číslo N a nájde najmenšie prirodzené číslo x, ktoré je deliteľné číslom N a ktorého zápis v desiatkovej sústave obsahuje iba cifry nula a jedna. V prípade, že také číslo neexistuje, váš program o tom má podať vhodnú správu.

Príklad

Pre vstup $N = 6$ je hľadaným číslom x číslo 1110.

P – III – 3

Študijný text „Dláždicové programy“ k príkladu P-III-3 možno nájsť v zadaní príkladu P-I-4 na strane **98**. *Jeho doplnenie pre potreby tohto príkladu je uvedené nižšie.*

Dláždicové programy sa dajú používať nielen na riešenie rozhodovacích problémov, ale aj na výpočet hodnôt funkcií. Výpočet funkcie $f(x)$ totiž môžeme ľahko previesť na rozhodovací problém $P(x, y) =$ "je $y = f(x)$?", o ktorom budeme vedieť, že pre každé x bude $P(x, y)$ platiť práve pre jednu hodnotu y. Navyše môžeme dláždicovému programu x a y zadať ako jeden vstup tak, že farby dlaždíc nebudú zodpovedať hodnotám, ale ich usporiadaným dvojiciam.

Príklad

Zostrojme dláždicový program, ktorý pre dané číslo zapísané v dvojkovej sústave vypočíta dvojkový zápis tohto čísla vydeleného tromi (predpokladajme, že je deliteľné 3 bez zvyšku). Inými slovami máme o danej postupnosti dvojíc $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ zistiť, či $\langle y_1, \ldots, y_n\rangle = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle /3$.

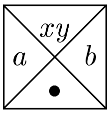
Riešenie je založené na klasickom algoritme na písomné delenie (ten nezávisí od použitej číselnej sústavy): zvolíme $z_0 = 0$ a postupne pre všetky k budeme rátať hodnoty $z_k = (2 \cdot z_{k-1} + x_k) \bmod 3$ a $y_k = \lfloor (2 \cdot z_{k-1} + x_k)/3 \rfloor$. Teraz dokážeme indukciou, že pre každé k je

$$\langle x_1, \ldots, x_k\rangle = 3 \cdot \langle y_1, \ldots, y_k\rangle + z_k.$$

Pre $k = 1$ rovnosť platí. Ak platí pre $k - 1$, potom pre k dostávame:

$$\begin{aligned}
\langle x_1, \ldots, x_k\rangle &= 2 \cdot \langle x_1, \ldots, x_{k-1}\rangle + x_k = \\
&= 2 \cdot (3 \cdot \langle y_1, \ldots, y_{k-1}\rangle + z_{k-1}) + x_k = \\
&= 3 \cdot 2 \cdot \langle y_1, \ldots, y_{k-1}\rangle + 2 \cdot z_{k-1} + x_k = \\
&= 3 \cdot 2 \cdot \langle y_1, \ldots, y_{k-1}\rangle + 3 \cdot y_k + z_k = \\
&= 3 \cdot \langle y_1, \ldots, y_k\rangle + z_k.
\end{aligned}$$

Teraz stačí zvoliť si nasledujúcu sadu dlaždíc:

$T = \Big\{$  $;\ x, y \in \{0, 1\}, a \in \{0, 1, 2\}, b = (2a + x) \bmod 3, y = \lfloor (2a + x)/3 \rfloor \Big\}$,

ľavý a pravý okraj budú mať farbu 0, spodný farbu •.

Z takýchto dlaždíc sa dajú zložiť len jednoriadkové steny, lebo • nie je na hornom okraji žiadnej dlaždice. V prípustnom vydláždení má k-ta dlaždica na svojom pravom okraji z_k a pre dvojicu (x_k, y_k) na jej hornom okraji platí: $y_k = \lfloor (2 \cdot z_{k-1} + x_k)/3 \rfloor$. Inými slovami toto vydláždenie zodpovedá presne hodnotám vypočítaným našim algoritmom, teda aj požadovanému výsledku. Tým je problém vyriešený.

Súťažná úloha

Zostrojte dlaždicový program, ktorý bude usporadúvať postupnosť núl a jednotiek vzostupne, čo znamená, že na postupnosť dvojíc núl a jednotiek $(x_1, y_1),\ldots,(x_n, y_n)$ odpovie *áno* práve vtedy, keď $y = y_1,\ldots,y_n$ je postupnosť, ktorú dostaneme vzostupným usporiadaním postupnosti $x = x_1,\ldots,x_n$, teda platí $y_1 \leq \ldots \leq y_n$ a postupnosti x a y obsahujú tie isté prvky, nanajvýš v inom poradí.

Príklad

Na postupnosť $(1,0),(0,0),(0,0),(1,1),(0,1),(1,1)$ program odpovie *áno*, na $(1,1),(0,0)$ *nie*, na $(1,0),(1,1)$ taktiež *nie*.

P – III – 4

Program: `FORMAT.PAS/.C/.CPP`
Vstup: `FORMAT.IN`
Výstup: `FORMAT.OUT`

Do nového textového editora potrebujeme napísať program slúžiaci na formátovanie textu. Editor pracuje v textovom režime s neproporcionálnym písmom. Všetky znaky sú teda rovnako široké a aj medzera má pevnú šírku rovnakú ako ktorýkoľvek iný znak. Taktiež pomocné symboly v texte (ako napríklad interpunkčné znamienka, zátvorky či úvodzovky) sa spracovávajú rovnako ako akékoľvek iné znaky. Editor je pomerne jednoduchý, takže nepripúšťa delenie slov. Program budeme vždy používať len na formátovanie jedného odseku textu.

Pri formátovaní textu budeme za slovo považovať každú súvislú postupnosť nemedzerových znakov, ktorá je na oboch koncoch ohraničená medzerou, prípadne začiatkom alebo koncom riadku. Pomocné symboly v texte sú teda súčasťou tých slov, od ktorých nie sú oddelené medzerou.

Úlohou formátovania textu je vhodné rozloženie slov do jednotlivých riadkov tak, aby bol celý text zarovnaný „do bloku“ (teda k ľavému aj pravému okraju) pri zadanej šírke riadku. Pritom medzery medzi slovami musia byť pokiaľ možno najmenšie a v texte čo najrovnomernejšie rozložené. Tieto všeobecné požiadavky teraz upresníme: Veľkosti medzier medzi slovami v jednom riadku (okrem posledného riadku odseku) sa môžu líšiť najviac o 1, pred prvým a za posledným slovom v riadku nesmie byť medzera. Pokiaľ je v riadku len 1 slovo, je rozloženie medzier ľubovoľné. V poslednom riadku odseku musia byť slová oddelené práve 1 medzerou a pred prvým slovom nesmie byť medzera.

Ak text spĺňa tieto záväzné požiadavky, potom kvalitu sformátovania odseku hodnotíme trestnými bodmi. Ohodnotenie odseku je súčtom ohodnotení jednotlivých riadkov. Ohodnotenie jedného riadku je dané výsledkom funkcie $F(Width, Chars, Words, Last)$, kde $Width$ je šírka stránky (teda počet znakov v riadku sformátovaného textu vrátane všetkých medzier), $Chars$ je počet nemedzerových znakov v riadku, $Words$ je počet slov v riadku a $Last$ hovorí, či sa hodnotí posledný riadok odseku alebo nie.
Ohodnocovacia funkcia F v programovacom jazyku C vyzerá nasledovne:

```
int F(int Width, int Chars, int Words, int Last)
{
  int Spaces = Width - Chars - Words + 1; /* Počet zbytočných medzier */
  int BasePen = LINEPENALTY;      /* Základné trestné body za riadok */

  if (Spaces < 0)                 /* Nevôjde sa text do riadku? */
    return INFTYPEN;
  if (Last)                       /* Posledný riadok? */
  {
    if (4*(Chars + Words - 1) <= Width) /* Je posledný riadok príliš krátky? */
      BasePen += SMALLLINEPEN;
    return BasePen;
  }
  if (Words == 1)                 /* Iba jedno slovo v riadku? */
    BasePen += SINGLEWORDPEN;
  return Spaces * Spaces + BasePen;   /* Ohodnotenie celého riadku */
}
```

V Pascale je zápis funkcie F podobný:

```
function F(Width, Chars, Words: Integer; Last: Boolean): Integer;
var
  Spaces : Integer;          { Počet zbytočných medzier }
  BasePen : Integer;         { Základné trestné body za riadok }
begin
  BasePen := LINEPENALTY;
  Spaces := Width - Chars - Words + 1;
  if Spaces < 0 then         { Nevôjde sa text do riadku? }
    F := INFTYPEN
  else if Last then begin    { Posledný riadok? }
    if 4*(Chars + Words - 1) <= Width then  { Je príliš krátky? }
      Inc(BasePen, SMALLLINEPEN);
    F := BasePen;
  end
  else begin
    if Words = 1 then        { Iba jedno slovo v riadku? }
      Inc(BasePen, SINGLEWORDPEN);
    F := Spaces * Spaces + BasePen; { Ohodnotenie celého riadku }
  end;
end;
```

Hodnoty konštánt sú:

- $LINEPENALTY = 10$
- $SMALLLINEPEN = 5$
- $SINGLEWORDPEN = 20$

- $INFTYPEN = 30\,000$

Vašou úlohou je sformátovať odsek textu pri zadanej šírke riadku čo najkvalitnejšie, teda splniť všetky záväzné požiadavky kladené na formátovanie a pritom dosiahnuť čo najnižšie ohodnotenie odseku trestnými bodmi podľa funkcie F.

Formát vstupu: Vo vstupnom súbore `FORMAT.IN` je na prvom riadku zadaná požadovaná šírka stránky po sformátovaní. V ďalších riadkoch sa nachádza text odseku, určený na sformátovanie. Môžete predpokladať, že žiadny z týchto riadkov nie je dlhší ako 100 znakov, na začiatku ani na konci žiadneho riadku nie je medzera a medzi jednotlivými slovami v riadku je práve 1 medzera. Vstupný súbor vrátane medzier nebude dlhší ako 10 000 znakov.

Formát výstupu: Do výstupného súboru `FORMAT.OUT` zapíšte text odseku zo vstupu sformátovaný čo najkvalitnejšie podľa vyššie uvedených zásad (teda s najnižšou možnou hodnotou ohodnocovacej funkcie).

Príklad

Súbor `FORMAT.IN`

```
40
Each section in this document will have the string "<section>" at the
right-hand side of the section title. Each subsection will have
"<subsection>" at the right-hand side. These strings are meant to make
it easier to search through the document.
```

Súbor `FORMAT.OUT`
(jedno z možných riešení; symbol '␣' označuje medzeru)

```
Each␣␣section␣␣in␣␣this␣␣document␣␣␣will
have␣␣the␣␣string␣␣"<section>"␣␣at␣␣␣the
right-hand␣side␣of␣␣the␣␣section␣␣title.
Each␣subsection␣will␣have␣"<subsection>"
at␣the␣right-hand␣␣side.␣␣These␣␣strings
are␣meant␣to␣make␣it␣␣easier␣␣to␣␣search
through␣the␣document.
```

P – III – 5

Program: `OKRUZNE.PAS/.C/.CPP`
Vstup: `OKRUZNE.IN`
Výstup: `OKRUZNE.OUT`

V meste Turiststadt začal rozkvetať turistický ruch. Aby podporili jeho ďalší rozkvet, rozhodla sa mestská rada založiť spoločnosť City-tour. Poslaním tejto spoločnosti je prevádzkovať v meste niekoľko vyhliadkových okružných autobusových liniek. Vašou úlohou je napísať program, ktorý navrhne trasy jednotlivých liniek podľa požiadaviek mestskej rady, prípadne zistí, že sa ich požiadavky nedajú splniť.

Mesto je tvorené križovatkami, ktoré sú navzájom pospájané ulicami. Každá ulica spája práve dve križovatky. Dve križovatky môžu byť spojené viacerými rôznymi ulicami. Križovatkou voláme aj miesto, na ktoré vedú len jedna alebo dve ulice.

Mestská rada kladie na plánované trasy liniek nasledovné požiadavky: Aby si turisti mohli pohodlne prezrieť každú ulicu v meste a pritom neboli prevádzkové náklady príliš veľké, musí každou ulicou prechádzať práve jedna autobusová linka. Žiadna z trás nesmie prejsť niektorou križovatkou viac ako raz. Trasy liniek musia byť okružné, teda prvá a posledná križovatka na trase musia byť rovnaké.

Formát vstupu: Prvý riadok vstupného súboru `OKRUZNE.IN` obsahuje dve čísla oddelené medzerou – počet križovatiek N ($1 \leq N \leq 120$) a počet ulíc M. Križovatky sú očíslované číslami od 1 do N. Nasledujúcich M riadkov vstupného súboru obsahuje popis jednotlivých ulíc v meste. Každý z týchto riadkov obsahuje dve čísla, predstavujúce čísla križovatiek, ktoré príslušná ulica spája. Prvé číslo v každom riadku je menšie ako druhé z nich. Tieto riadky sú v súbore utriedené podľa prvého čísla. V prípade, že má viac ulíc rovnaké prvé číslo, sú utriedené podľa druhého. Môžete predpokladať, že každé dve križovatky spája najviac 200 ulíc.

Formát výstupu: Výstupný súbor `OKRUZNE.OUT` obsahuje toľko riadkov, koľko má spoločnosť prevádzkovať autobusových liniek. Každý riadok obsahuje popis práve jednej autobusovej linky. Trasa autobusovej linky je popísaná ako postupnosť čísel križovatiek, ktorými linka prechádza. Prvé a posledné číslo uvedené v riadku musia byť rovnaké (trasa je okružná, teda začína a končí na tej istej križovatke). Jednotlivé čísla sú v každom riadku oddelené práve 1 medzerou. Pokiaľ sa trasa liniek nedá navrhnúť tak, aby vyhovovali podmienkam zo zadania úlohy, potom výstupný súbor má obsahovať jediný riadok s textom „`Neda sa`“.

Príklad

Vstup:
```
5 12
1 2
1 2
1 2
1 2
1 3
1 3
2 3
2 5
3 4
3 5
3 5
4 5
```

Výstup:
```
1 2 3 1
2 1 2
3 4 5 3
2 5 3 1 2
```

Príklad

Vstup:
```
3 4
1 2
1 2
1 3
2 3
```

Výstup:
```
Neda sa
```

Riešenia súťažných úloh

Kategória P

P – I – 1

Je jasné, že za každé dva uzly hĺbky $K, K > 0$ musí existovať jeden uzol hĺbky $K-1$, ktorý nie je listom – každé dva uzly musíme pod nejaký uzol „zavesiť“. Pretože naviac pod každý uzol môžeme zavesiť iba žiadny alebo dva uzly, musí byť počet uzlov hĺbky K párny. Vyššie uvedené pozorovania nám už dávajú návod na zostrojenie algoritmu. Pre každú hĺbku si budeme pamätať počet listov a počet ostatných uzlov. Budeme postupovať od uzlov s najväčšou hĺbkou. Pre každú hĺbku $K, K > 0$ skontrolujeme, či je počet uzlov v nej párny. Ak nie je, strom neexistuje. Ak je počet uzlov párny, za každé dva uzly umiestnené v strome v danej hĺbke pridáme do predchádzajúcej hĺbky jeden uzol. Keď sa takto dostaneme až k uzlom hĺbky 0, stačí overiť, či v tejto hĺbke leží práve jeden uzol, ako sa vyžaduje v definícii binárneho stromu. Ak nie, strom neexistuje. To plynie z toho, že ak neexistuje uzol hĺbky 0, nebol zadaný žiadny list, a teda strom nemôže mať žiadne uzly. To je ale v spore s požiadavkou, že každý strom musí mať aspoň koreň. Ak je uzlov hĺbky 0 naopak viac, strom neexistuje, pretože všetky uzly, ktoré sme pridávali, boli vynútené a každý strom s danými počtami listov teda musí mať v jednotlivých hĺbkach aspoň toľko uzlov ako náš strom. Ak existuje práve jeden uzol hĺbky 0, jednoducho už zo spočítaných počtov listov a ostatných uzlov v jednotlivých hĺbkach vytvoríme požadovaný zápis stromu. Jednoducho vypíšeme toľko `L`, koľko je počet listov danej hĺbky, a toľko `U`, koľko je počet ostatných uzlov danej hĺbky. Algoritmus má časovú i pamäťovú zložitosť $O(N)$.

P – I – 2

Algoritmus riešiaci túto úlohu sa dá rozdeliť do troch fáz. V prvej fáze sa pre každé mesto spočíta, aká je jeho vzdialenosť od nepriateľom obsadených miest (v zmysle definície uvedenej v zadaní). V druhej fáze sa zistí, akú maximálnu vzdialenosť od nepriateľských miest dokážeme udržať pri ceste z počiatočného do cieľového mesta. V tretej fáze potom nájdeme najkratšiu z trás vedúcich z počiatočného do cieľového mesta, ktoré udržujú spočítanú vzdialenosť.

Prvá fáza: Vzdialenosť od obsadených miest budeme hľadať pomocou prehľadávania do šírky. Pre každé mesto si budeme udržovať informáciu, či sme v ňom už boli (na počiatku bude nastavené práve u všetkých obsadených miest) a jeho vzdialenosť od nepriateľa. Pre mestá obsadené nepriateľom bude táto vzdialenosť rovná 0. Ďalej si budeme udržovať rad (frontu) miest na spracovanie, do ktorého na začiatku uložíme všetky nepriateľské mestá. V každom kroku výpočtu vždy vezmeme jedno mesto z radu a u všetkých jeho susedov, v ktorých sme doteraz neboli, nastavíme vzdialenosť o jedna väčšiu, než je vzdialenosť vybraného mesta. U všetkých týchto susedov tiež označíme, že sme v nich už boli, a pridáme ich na koniec radu. Prvá fáza výpočtu končí, keď sa vyprázdni rad. Vtedy sme prešli všetky mestá a určili sme vzdialenosť každého z nich od nepriateľa.

Druhá fáza: V tejto fáze si budeme udržovať radov hneď niekoľko, pre každú vzdialenosť od nepriateľských miest jeden. Ďalej si pre každé mesto budeme zaznamenávať, či sme v ňom už boli. Tiež si budeme pamätať doposiaľ najväčšiu nájdenú vzdialenosť, ktorú dokážeme udržať od nepriateľa. Na začiatku nastavíme udržateľnú vzdialenosť od nepriateľa na hodnotu vzdialenosti kráľovského mesta od nepriateľa a toto mesto vložíme do radu pre príslušnú vzdialenosť. Pre toto mesto takisto nastavíme, že sme v ňom už boli. Výpočet prebieha tak, že postupne vyberáme mestá z radu pre aktuálnu udržateľnú vzdialenosť, dokým sa tento rad nevyprázdni. Keď sa rad vyprázdni, znížime udržateľnú vzdialenosť o jedna a opäť začneme vyberať mestá z príslušného radu. Vždy, keď vezmeme nejaké mesto z radu, prejdeme všetkých jeho susedov, u doteraz nenavštívených z nich nastavíme príznak, že už sme ich navštívili, a pridáme ich do radu – ak je vzdialenosť takéhoto mesta od nepriateľských miest väčšia ako aktuálna udržateľná vzdialenosť, pridáme vrchol do radu zodpovedajúceho aktuálnej udržateľnej vzdialenosti, inak mesto pridáme do radu zodpovedajúceho jeho vzdialenosti od nepriateľských miest. Druhá fáza končí hneď ako vyberieme z radu cieľové mesto. Aktuálna udržateľná vzdialenosť je potom výslednou udržateľnou vzdialenosťou.

Tretia fáza: Táto fáza predstavuje opäť prosté prehľadávanie do šírky. Pre každé mesto si pamätáme, či sme v ňom už boli, a ak áno, zaznamenáme si to mesto, z ktorého sme do neho prišli. Opäť používame rad na doteraz nespracované mestá. Na začiatku vložíme do radu cieľové mesto. U neho nastavíme, že sme v ňom už boli, a ako jeho predchodcu nastavíme jeho samé. V každom kroku výpočtu potom vezmeme jedno mesto z radu a prejdeme všetkých jeho susedov. Každého suseda, ktorého sme doteraz nenavštívili a ktorého vzdialenosť od nepriateľských miest je väčšia alebo rovná výslednej udržateľnej vzdialenosti, označíme ako navštíveného a pridáme ho na koniec radu. Tiež u neho ako mesto, z ktorého sme prišli, nastavíme práve vybrané mesto. Prehľadávanie končí vo chvíli, keď je z radu vybrané počiatočné (kráľovské) mesto. Potom už len prejdeme cestu z počiatočného do cieľového mesta (to je veľmi jednoduché vďaka odkazom na mestá, odkiaľ sme do nich pri prehľedávaní prišli) a cestu vypíšeme.

Algoritmus má časovú zložitosť $O(M+N)$, kde M je počet ciest a N je počet miest.

Správnosť algoritmu budeme ukazovať opäť po fázach. To, že algoritmus spočíta správne vzdialenosti od nepriateľských miest v prvej fáze, plynie z nasledujúceho: Na počiatku majú všetky vrcholy so vzdialenosťou nula túto vzdialenosť priradenú. V okamihu, keď sú spracované všetky vrcholy vzdialenosti nula, prešli sme všetkých ich susedov, priradili sme im vzdialenosť jedna a zaradili ich do radu. Pretože iné vrcholy vzdialenosť jedna mať nemôžu, je vzdialenosť jedna priradená práve všetkým správnym vrcholom. Túto úvahu môžeme jednoducho zovšeobecniť pre ľubovoľnú vzdialenosť D. Prehľadávanie teda skutočne určí vzdialenosti od nepriateľských miest správne.

V druhej fáze sa správne spočíta maximálna udržateľná vzdialenosť od obsadených miest. Sledujeme v nej totiž súbežne všetky možné trasy vedúce z počiatočného mesta tak dlho, kým dokážeme udržať vzdialenosť počiatočného mesta (výsledná vzdialenosť od nepriateľa zrejme nemôže byť väčšia než vzdialenosť počiatočného mesta). Keď už neexistuje mesto s dostatočne veľkou vzdialenosťou, do ktorého by sme mohli ísť, znížime udržateľnú vzdialenosť o jedna. Všetky vrcholy so vzdialenosťou o jedna nižšou, do ktorých sa dokážeme dostať cez vrcholy s doterajšou udržateľnou vzdialenosťou, máme už pripravené v príslušnom rade a začneme teda prehľadávať z nich. Pretože udržateľnú vzdialenosť znižujeme až keď sme sa už dostali všade, kam to bolo možné, jej výsledná hodnota bude zrejme najvyššia možná.

To, že v tretej fáze nájdeme najkratšiu trasu s danou vzdialenosťou, je zrejmé. Robíme totiž jednoduché prehľadávanie do šírky s tým, že ignorujeme mestá s príliš malou vzdialenosťou od nepriateľa. Nájdeme teda určite trasu s dostatočnou vzdialenosťou od nepriateľa. Skutočnosť, že to bude trasa najkratšia možná, plynie z vlastností prehľadávania do šírky uvedených v prvej časti dôkazu.

P – I – 3

Riešenie úlohy rozdelíme na niekoľko častí – najprv sformulujeme nutné a postačujúce podmienky pre to, aby skupina mohla prejsť trasu podľa podmienok v zadaní úlohy, potom vyriešime úlohu a) a nakoniec nájdeme riešenie úlohy b).

Plánovanou trasou sa dá prejsť práve vtedy, keď táto trasa nie je dlhšia ako vzdialenosť, ktorú skupina prejde za deň, t.j. $L \leq K$, alebo keď sú splnené zároveň všetky štyri nasledujúce podmienky:

1. Na trase je aspoň jeden kemp.
2. Vzdialenosť prvého kempu od začiatku trasy je najviac K, t.j. $l_1 \leq K$.
3. Vzdialenosť ľubovolných dvoch po sebe nasledujúcich kempov nie je väčšia než K, t.j. $l_{i+1} - l_i \leq K$ pre $1 \leq i \leq N - 1$.
4. Vzdialenosť posledného kempu od konca trasy je najviac K, t.j. $L - l_N \leq K$.

Nutnosť všetkých uvedených podmienok je zrejmá; pokiaľ sú tieto podmienky splnené, potom plán cesty, v ktorom skupina bude cestovať $N + 1$ dní a i-tý deň prespí v i-tom kempe, spĺňa podmienky zo zadania úlohy.

Teraz vyriešime úlohu a). Na chvíľu si predstavme, že sme každému kempu priradili číslo d_i, ktoré udáva koľký deň najskôr môžeme do tohto kempu prísť. Číslo d_i priradené kempu i zrejme spĺňa jednu z nasledujúcich dvoch podmienok:

1. Buď je $d_i = 1$ a $l_i \leq K$ – do kempu sa dá prísť hneď prvý deň.
2. Existuje $j < i$ také, že $l_i - l_j \leq K$ a $d_j = d_i - 1$ (do i-teho kempu prídeme tak, že deň predtým prespíme v j-tom kempe), ale neexistuje $j < i$ také, že $l_i - l_j \leq K$ a $d_j < d_i - 1$ (inak by bolo možné do j-tého kempu prísť už skôr).

Podľa týchto podmienok by bolo možné spočítať všetky d_i v čase $O(N)$, náš program však d_i počítať nebude. Plán cesty spĺňajúci podmienku a) by mohol vyzerať napríklad tak, že h-tý deň skupina prespí v i-tom kempe, pokiaľ $d_i = h$ a $d_{i+1} = h+1$; skupina naviac prespí v N-tom kempe, pokiaľ plán cesty bez tohto kempu nespĺňa podmienku obmedzujúcu maximálnu vzdialenosť, ktorú je možné prejsť za jeden deň. Budeme priamo vytvárať takýto plán cesty – ak doposiaľ vytvorený plán cesty končí kempom vo vzdialenosti l od začiatku výletu a $L - l > K$ (nedá sa bez prespania prísť na koniec trasy), potom ďalší deň skupina prespí v i-tom kempe, pokiaľ $l_i - l \leq K$ a i je maximálne s touto vlastnosťou. Vytvoriť program pracujúci podľa práve popísaného postupu je triviálne; časová zložitosť algoritmu je $O(N)$.

Ďalej vyriešime úlohu b). Každému kempu priradíme číslo e_i, ktoré určuje, koľko by cyklisti museli zaplatiť za prespanie na ceste z i-teho kempu na koniec výletu (vrátane poplatku za prespanie v i-tom kempe). Čísla e_i náš algoritmus spočíta postupne pre $i = N$ až $i = 1$; okrem týchto čísel si pre každý kemp uložíme informáciu, do ktorého nasledujúceho kempu sa z neho máme vybrať, aby sme za nocľah zaplatili optimálnu cenu e_i. Čísla e_i sa dajú spočítať podľa nasledujúceho predpisu:

1. Ak $L - l_i \leq K$, potom $e_i = c_i$; z i-tého sa kempu dá prísť na koniec trasy behom jedného dňa.
2. Ak $L - l_i > K$, potom $e_i = min_j(c_i + e_j) = c_i + min_j e_j$, kde minimum sa počíta cez všetky $j > i$ také, že $l_j - l_i \leq K$; to j, kde sa nadobúda minimum, určuje poradie kempu, v ktorom prespíme ten deň, keď vyjdeme z i-teho kempu.

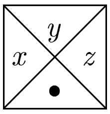
Prvý deň, ak $L > K$, prespíme v kempe s číslom i s minimálnym e_i, pre ktorý platí $l_i \leq K$. Ako bude algoritmus pracovať je teraz už jasné. Zostáva ešte určiť, ako rýchlo sa dá nájsť j, ktoré minimalizuje vzťah v druhom bode.

Na rýchle nájdenie indexu j použijeme dátovú štruktúru, ktorá sa nazýva halda. Halda je dátová štruktúra, ktorá umožňuje v konštantnom čase určiť najmenší z prvkov v nej; prvok do haldy pridať alebo vybrať najmenší prvok dokáže v čase logaritmickom od počtu prvkov obsiahnutých v halde. V halde si budeme udržiavať čísla kempov zotriedené podľa hodnôt e_i; na začiatku budeme mať v halde naviac koniec trasy, ktorého hodnotu budeme považovať za rovnú nule (bude najmenším prvkom haldy). Nájdenie vhodného j bude prebiehať nasledovne: Zistíme, či najmenší prvok haldy je od i-teho kempu vzdialený najviac o K – ak áno, našli sme príslušné j, v opačnom prípade z haldy odstránime tento prvok a celý postup zopakujeme. Potom do haldy pridáme i-ty kemp. Za predpokladu logaritmického času pridania prvku do haldy a vybratia najmenšieho prvku z haldy je celková doba behu algoritmu $O(N \log N)$.

Haldu budeme reprezentovať v poli. Ak bude v halde n prvkov, potom jej prvky budú uložené v poli na pozíciách s číslami 0 až $n - 1$. Pre prvok x s indexom k budeme prvky na pozíciách $2k + 1$ a $2k + 2$ nazývať synmi prvku x a prvok x budeme nazývať otcom týchto prvkov. Všimnite si, že každý prvok okrem prvku na pozícii 0 má práve jedného otca. Pri práci s haldou budeme dodržovať nasledujúci invariant: Každý prvok je väčší ako jeho otec. Najmenším prvkom v halde je preto prvok na nultej pozícii; zistenie najmenšieho prvku haldy sa dá teda spraviť v konštantnom čase. Pridanie prvku do haldy bude prebiehať nasledovne: Ak je v halde n prvkov, potom nový prvok umiestnime na pozíciu n; ak je jeho otec väčší, vymeníme pridávaný prvok s jeho otcom a celý postup opakujeme tak dlho, pokiaľ nový prvok nie je nultým prvkom alebo jeho otec nie je menší než on. V každom kroku sa index nového prvku v poli zmenší aspoň na polovicu a teda po logaritmicky veľa krokoch sa zastavíme. Odobranie prvku z haldy bude probiehať podobne: Ak je v halde n prvkov, potom najmenší prvok haldy nahradíme prvkem z $(n-1)$-vej pozície; tento prvok porovnáme s oboma jeho synmi a prípadne ho vymeníme s menším z oboch jeho synov. Skončíme, ak je tento prvok menší než obaja jeho synovia. Pretože sa v každom kroku posunieme na prvok s aspoň dvojnásobným indexom, odobranie najmenšieho prvku z haldy bude trvať čas logaritmický od počtu prvkov v nej.

P – I – 4

a) Majme zadané nejaké dvojkové číslo $\langle x_1,\dots,x_n\rangle$, o ktorom máme rozhodnúť, či je deliteľné piatimi. Zostrojíme sadu dlaždíc, ktorými bude možné vydláždiť iba stenu s jediným riadkom, a to tak, aby farba pravej hrany i-tej dlaždice (tú budeme značiť p_i) odpovedala zvyšku po delení dvojkového čísla $\langle x_1,\dots,x_i\rangle$ piatimi. Keď naviac zvolíme farbu pravého okraja steny tak, aby zodpovedala zvyšku 0, pôjde stena vydláždiť práve vtedy, keď je zadané číslo deliteľné piatimi, a to je presne to, čo potrebujeme.
Použijeme dlaždice nasledujúcich typov:

$T = \Big\{$ 

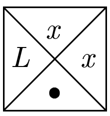
$;\ 0 \le x \le 4, 0 \le y \le 1, z = (2x+y) \bmod 5 \Big\}$,

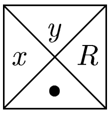
ľavý aj pravý okraj budú mať farbu 0 a dolný okraj farbu •. Keďže farba • sa nevyskytuje na hornej hrane žiadnej dlaždice, musí byť každé korektné vydláždenie tvorené jediným riadkom. Zostáva dokázať, že farby pravých hrán dlaždíc zodpovedajú zvyškom, čo urobíme indukciou:

- $p_1 = \langle x_1\rangle = \langle x_1\rangle \bmod 5$ (existuje práve jedna dlaždica, ktorá môže byť na prvom políčku – tá, ktorá má na ľavom okraji nulu a na hornom okraji x_1).
- Ak je $p_i = \langle x_1,\dots,x_i\rangle \bmod 5$, môže byť na $i+1$-vom políčku iba jediná dlaždica (majúca na ľavom okraji p_i a na hornom okraji x_{i+1}) a jej pravý okraj má farbu $p_{i+1} = (2p_i + x_{i+1}) \bmod 5 = (2(\langle x_1,\dots,x_i\rangle \bmod 5) + x_{i+1}) \bmod 5 = (2\langle x_1,\dots,x_i\rangle +$ $+ x_{i+1}) \bmod 5 = \langle x_1,\dots,x_{i+1}\rangle \bmod 5$.

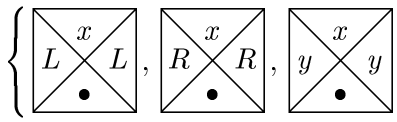
Z toho plynie, že popísaný dlaždicový program rieši zadanú úlohu so zložitosťou $O(1)$.

b) Použijeme nasledujúce typy dlaždíc:

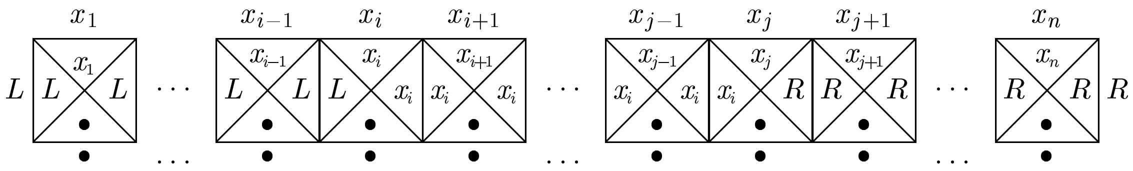
- „ľavé“ dlaždice $\Big\{$ 

$;\ 0 \le x \le 9 \Big\}$
- „pravé“ dlaždice $\Big\{$ 

$;\ 0 \le x, y \le 9, x \ne y \Big\}$

- „opakovacie" dlaždice  ; $0 \le x, y \le 9$

Ľavý okraj steny ofarbíme farbou L, pravý farbou R a spodný farbou $\bullet$. Keďže farba $\bullet$ sa nevyskytuje na hornej hrane žiadnej dlaždice, musí byť každé korektné vydláždenie tvorené jediným riadkom.
Z toho, ako sme si typy dlaždíc nadefinovali, ihneď plynie, že každé vydláždenie steny musí vyzerať takto:



(zľava doprava: najprv [možno i prázdna] postupnosť dlaždíc opakujúcich L, potom jedna ľavá dlaždica, nasleduje opäť niekoľko opakovacích dlaždíc, jedna pravá dlaždica a prípadne opakovanie R). Také vydláždenie je ale korektné práve vtedy, ak bolo možné nájsť indexy i a j také, že $x_i \neq x_j$ (vďaka definícii farieb hrán pravej dlaždice), takže náš dlaždicový program rieši zadanú úlohu so zložitosťou $O(1)$.

Poznámka: Naše riešenie využíva fakt, že dlaždicové programy sú nedeterministické (to znamená, že nemajú pevne definovaný priebeh výpočtu a miesto toho pripúšťajú viac rôznych výpočtov s tým, že odpoveďou programu je ÁNO, ak existuje aspoň jeden korektný výpočet) a že nám nedeterminizmus „uhádne" polohu nejakých dvoch rôznych prvkov vstupnej postupnosti.

P – II – 1

Predpokladajme, že máme dĺžky drevených paličiek zotriedené podľa veľkosti, t.j. $d_1 < < d_2 < \ldots < d_N$. Potom trojica indexov $i < j < k$ určuje paličky tvoriace trojuholník práve vtedy, keď $d_k < d_i + d_j$. Zostávajúce dve trojuholníkové nerovnosti sú totiž splnené triviálne, lebo $d_i, d_j < d_k$. Pre každú dvojicu indexov $i < j$ označme symbolom $l(i,j)$ najväčšie číslo k také, že $d_k < d_i + d_j$; všimnime si, že $l(i,j) \geq j$. Zvolená dvojica indexov $i < j$ sa dá na trojicu $i < j < k$ určujúcu trojuholník doplniť práve tými k, pre ktoré platí $j < k \leq l(i,j)$. Pre pevnú dvojicu indexov i a j teda existuje práve $l(i,j) - j$ takých k, že paličky s indexami $i < j < k$ tvoria trojuholník. Na určenie počtu trojuholníkov teda stačí určiť hodnoty $l(i,j)$ pre všetky $i < j$ a sčítať výrazy $l(i,j) - j$.

Z definície $l(i,j)$ vyplýva, že $N = l(i,N) \geq l(i,N-1) \geq l(i,N-2) \geq \ldots \geq l(i,i+1)$. Náš program bude pracovať nasledovne: Pre každé i spočítame hodnoty $l(i,N-1), l(i,N- - 2), \ldots, l(i,i+1)$ a súčasne budeme počítať súčet $(l(i,N-1) - (N-1)) + \cdots + (l(i,i+ +1) - (i+1))$, ktorý predstavuje počet trojuholníkov, ktorých najkratšia strana má dĺžku d_i. Hodnotu $l(i,j)$ spočítame tak, že hodnotu $l(i,j+1)$ budeme zmenšovať o jednotku tak dlho, kým $d_{l(i,j)} \geq d_i + d_j$. Pretože celkový počet zmenšení o jednotku počas výpočtu hodnôt $l(i,N-1), l(i,N-2), \ldots, l(i,i+1)$ je najviac $N-2$, je čas výpočtu pre jedno pevné i lineárny od N. Celkový čas výpočtu pre všetkých $N-2$ možných hodnôt i je teda $O(N^2)$. V tomto čase môžeme ľahko spraviť aj úvodné triedenie dĺžok paličiek. Časová zložitosť nášho algoritmu je teda $O(N^2)$ a pamäťová $O(N)$.

P – II – 2

Najskôr si rozmyslime, ako by sme zadanú úlohu riešili, keby sme chceli nájsť najkratšiu cestu robota medzi dvoma zadanými políčkami. Algoritmus na riešenie tejto úlohy je známy pod názvom prehľadávanie do šírky alebo tiež algoritmus vlny. Každému políčku v priebehu výpočtu priradíme číslo, ktoré udáva minimálny počet krokov, ktoré robot potrebuje na premiestnenie sa zo začiatočného políčka na uvažované políčko. Algoritmus pracuje vo fázach. Najskôr začiatočnému políčku priradí nulu. V i-tej fáze priradí číslo i všetkým políčkam, ktoré susedia s nejakým políčkom, ktorému bolo priradené číslo $i-1$ a ktorým sme doteraz žiadne číslo nepriradili. Je zrejmé, že takto priradené čísla určujú minimálny počet krokov potrebný na premiestnenie robota zo začiatočného políčka na každé z políčok.

Teraz si rozmyslime, ako sa tento algoritmus dá modifikovať tak, aby riešil úlohu zo zadania. V i-tej fáze nebudeme číslovať políčka vo vzdialenosti i krokov, ale políčka, na ktoré sa dá presunúť cestou s i zmenami smeru. To sú zjavne políčka, ktoré ešte nemajú číslo, ležia v rovnakom riadku alebo stĺpci ako niektoré políčko s číslom $i-1$ a nie sú od neho oddelené prekážkou. Správnosť tohto algoritmu je zrejmá. Zostáva domyslieť detaily jeho implementácie. Políčka si budeme ukladať v poli tak, že políčka s rovnakým číslom budú tvoriť súvislé úseky a políčka s nižšími číslami budú pred políčkami s vyššími číslami. Pokiaľ prídeme počas nejakej fázy na ešte neočíslované políčko, zaradíme ho na koniec poľa. V priebehu algoritmu vyberieme vždy prvé nespracované políčko z poľa a prehľadáme jeho riadok a stĺpec. Pole, s ktorým sa pracuje práve popísaným spôsobom, sa obvykle nazýva fronta (políčka sa stavajú na koniec fronty a čakajú, kým na ne príde rad). Nech M a N sú rozmery štvorcovej siete, potom spracovanie každého z $M \times N$ políčok vyžaduje čas $O(M+N)$. Celková časová zložitosť nášho algoritmu by tedy bola $O(M^2N + MN^2)$.

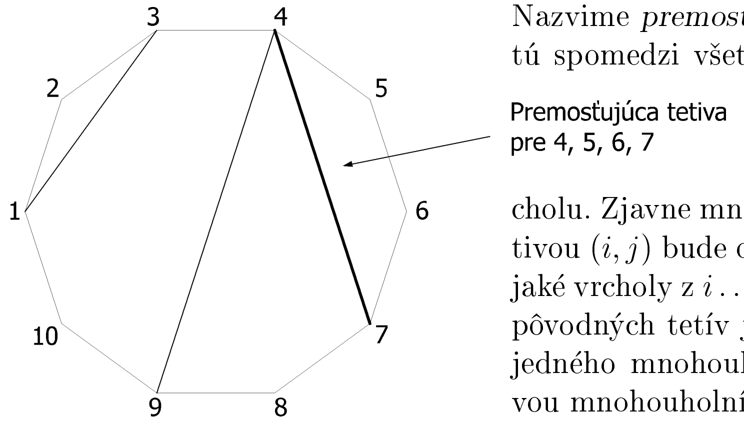
Čas potrebný na výpočet sa však ešte dá zlepšiť. Jeden súvislý úsek riadku alebo stĺpca totiž prehľadávame niekoľkokrát – pre každé jeho políčko raz. Preto si budeme pre každé políčko pamätať, či sme už prehľadali súvislý úsek (bez prekážok) riadku, resp. stĺpca, v ktorom toto políčko leží. Pred prehľadávaním sa najskôr pozrieme, či sme tento úsek riadku alebo stĺpca už neprehľadávali. Ak áno, už ho neprehľadávame. Ak nie, prezrieme ho a pre všetky jeho políčka si zapamätáme, že sme daný úsek už prehľadávali. Všimnite si, že pre každé políčko si musíme samostatne pamätať, či bol prehľadaný úsek v riadku a či bol prehľadaný úsek v stĺpci.

Čas potrebný na načítanie vstupných dát, na prácu s frontou a na výpis riešenia je zrejme $O(MN)$. Zostáva stanoviť čas potrebný na prehľadávanie riadkov a stĺpcov. Každý súvislý úsek bez prekážok prehľadáme práve raz, súčet ich dĺžok je $O(MN)$, lebo každé políčko je nanajvýš v dvoch (riadok a stĺpec). Súvislý úsek ľahko prehliadneme v čase lineárnom od jeho dĺžky, preto aj celková časová zložitosť nášho algoritmu je $O(MN)$; pamäťová zložitosť je tiež $O(MN)$.

P – II – 3

Úlohu si najskôr trošku preformulujme. Obraz je vlastne konvexný n-uholník a strihy sú jeho nepretínajúce sa tetivy. Úlohou je nájsť mnohouholník tvorený stranami pôvodného mnohouholníka a tetivami, v ktorom neleží žiadna tetiva a ktorý má zo všetkých takýchto mnohouholníkov najviac vrcholov. Ďalej ho budeme označovať ako *najväčší mnohouholník*. Pokiaľ nebude povedané inak, slovom mnohouholník rozumieme jeden z mnohouholníkov, na ktoré sa pôvodný mnohouholník rozpadol.

Najskôr si všetky tetivy otočme tak, aby začiatočný vrchol bol menší ako koncový a zotrieďme si ich. Pri triedení porovnávame najskôr číslo začiatočného vrcholu, v prípade rovnosti sa berie obrátené poradie čísel koncových vrcholov (teda $(1,2) < (2,3)$, ale $(1,2) > (1,3)$). Po zotriedení už môžeme začať hľadať najväčší mnohouholník.



Nazvime *premosťujúcou tetivou* mnohouholníka tú spomedzi všetkých tetív a strán tohto mnohouholníka, ktorá má najmenšie číslo začiatočného vrcholu a najväčšie číslo koncového vrcholu. Zjavne mnohouholník s premosťujúcou tetivou (i,j) bude obsahovať vrcholy i, j a ešte nejaké vrcholy z $i \dots j$. Tiež si všimnime, že každá z pôvodných tetív je premosťujúcou tetivou práve jedného mnohouholníka (a premosťujúcou tetivou mnohouholníka, ktorý obsahuje hranu $(1,n)$ je práve táto hrana). Hovoríme, že mnohouholník je svojou premosťujúcou tetivou *ohraničený*.

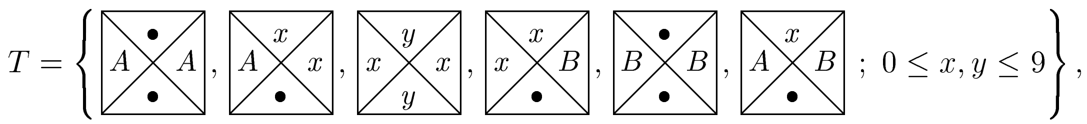
A teraz ako nájsť najväčší mnohouholník. Použijeme nasledovnú ideu: Algoritmus postupne prechádza vrcholy n-uholníka od 1 do n. Udržuje si pri tom zásobník, v ktorom sú uložené tetivy, u ktorých prešiel ich počiatočným vrcholom, ale ešte nie koncovým. Sú to teda *premosťujúce tetivy* pre doteraz neuzavreté mnohouholníky. Pre každú tetivu na zásobníku si ešte pamätáme doteraz narátaný počet vrcholov v ňou ohraničenom mnohouholníku. Keďže aktuálny vrchol vždy patrí do mnohouholníka ohraničeného najneskôr začínajúcou premosťujúcou tetivou, stačí vždy upravovať len počet vrcholov pre tetivu na vrchu zásobníka.

Konkrétna implementácia vyzerá nasledovne: Vždy, keď sa posunieme na ďalší vrchol, postupne odoberieme zo zásobníka tetivy, ktoré v tomto vrchole končia. Keďže tetivy sa nepretínajú, sú všetky tieto tetivy momentálne na vrchu zásobníka. Prešli sme totiž všetky vrcholy, ktoré mohli ležať v mnohouholníkoch ohraničených týmito tetivami. K týmto tetivám už teda boli spočítané počty vrcholov v nimi ohraničených mnohouholníkoch, a tak stačí podľa nich upraviť maximum. Po každom odobraní tetivy zo zásobníka prirátame jedna k počtu vrcholov pre tetivu na vrchu zásobníka, lebo do príslušného mnohouholníka patrí aj aktuálny vrchol. Potom pridáme všetky tetivy začínajúce v danom vrchole do zásobníka. Počty vrcholov u nových tetív sa nastavia na jedna, lebo sa musí zarátať aktuálny vrchol. Vďaka zotriedeniu tetív stačí tetivy len zaradom odoberať z poľa, kým sa ich začiatočný vrchol zhoduje s aktuálnym. Zotriedenie tak zaistí, že z tetív, ktoré začínajú v aktuálnom vrchole, budú tie, ktoré neskôr skončia, vložené do zásobníka skôr. Keď sú pridané všetky tetivy začínajúce v aktuálnom vrchole, priráta sa jedna k počtu vrcholov tetivy na vrchu zásobníka za vrchol, do ktorého sa presúvame.

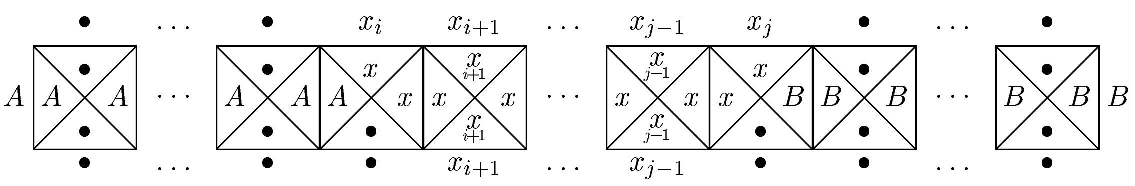
Práve uvedený algoritmus sa dá ešte zrýchliť – stačí si uvedomiť, že je zbytočné posúvať sa po obvode len po jednom vrchole. Stačí nam vlastne len obísť vrcholy, v ktorých niektorá tetiva začína alebo končí. To, o koľko sa mám posunúť, ľahko zistím ako minimum z konca tetivy na vrchu zásobníka a začiatku prvej ešte nezaradenej tetivy. Získame tak algoritmus s časovou zložitosťou $O(k \log k)$. Samotný prechod n-uholníkom nám bude trvať len $O(k)$, pretože každú tetivu len raz vložíme na zásobník a raz ju odtiaľ vyberieme. Správnosť algoritmu bola ukázaná v popise.

P – II – 4

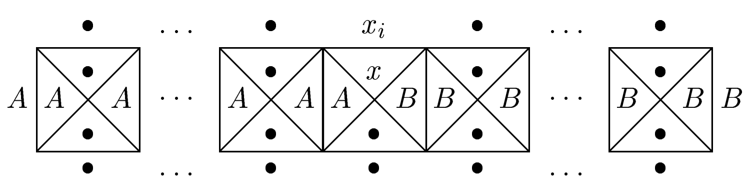
Využijeme jednoduché pozorovanie: Postupnosť $x_1, \ldots, x_n$ je symetrická práve vtedy, keď $x_1 = x_n$ a postupnosť $x_2, \ldots, x_{n-1}$ je symetrická. Jednoprvková i prázdná postupnosť sú vždy symetrické.
Zostrojíme dlaždicový program, ktorý bude pripúšťať len také vydláždenia, v ktorých každý riadok overí rovnosť krajných prvkov postupnosti a odstráni ich (prepíše na farbu $\bullet$), pričom posledný riadok akceptuje prázdnu alebo jednoprvkovú postupnosť. Takýto program odpovedá ÁNO práve na symetrické postupnosti: Ak je postupnosť $x_1, \ldots, x_n$ symetrická, prvý riadok z nej odstráni x_1 a x_n, druhý x_2 a x_{n-1}, atď, až posledný riadok akceptuje jej prostredný prvok (ak mala nepárnu dĺžku) alebo prázdnu postupnosť (ak mala párnu dĺžku). Ak program postupnosť akceptuje, tak podľa prvého riadku je $x_1 = x_n$, podľa druhého $x_2 = x_{n-1}$ atď, teda zadaná postupnosť je symetrická. Preto náš program rieši zadanú úlohu so zložitosťou $O(n)$.
Použijeme nasledovnú sadu dlaždíc:



ľavý okraj steny má farbu A, pravý farbu B a dolný farbu $\bullet$.
Každý korektne vydláždený riadok musí vyzerať buď takto:



(to zodpovedá kontrole a odstráneniu krajných prvkov postupnosti) alebo takto:



(taký riadok akceptuje ľubovoľnú jednoprvkovú postupnosť; prázdna postupnosť – taká, ktorej všetky prvky už boli prepísané na $\bullet$ – je akceptovaná priamo dolným okrajom steny).

Poznámka: Lepšia časová zložitosť ako lineárna sa nedá dosiahnuť. Myšlienka dôkazu:

Z definície vydláždenia vieme, že stenu párnej šírky vieme vydláždiť práve vtedy, ak sa dá vydláždiť jej ľavá aj jej pravá polovica tak, aby v každom riadku mali dlaždice, ktorými sa tieto polovice dotýkajú, rovnakú farbu spoločnej hrany (týmto hranám budeme hovoriť *prostredný stĺpec*). Pre každý začiatok postupnosti $x_1, \ldots, x_{n/2}$ však existuje práve jedno doplnenie prvkami $x_{n/2+1}, \ldots, x_n$ také, že $x_1, \ldots, x_n$ je symetrická postupnosť. Keby nejakým dvom rôznym $x_1, \ldots, x_n$ a $y_1, \ldots, y_n$ zodpovedalo rovnaké ofarbenie prostredného stĺpca, potom by sa ale dala vydláždiť aj stena s postupnosťou $x_1, \ldots, x_{n/2}, y_{n/2+1}, \ldots, y_n$ (ľavá časť po prostredný stĺpec rovnako, ako pre $x_1, \ldots, x_n$, pravá časť ako pre $y_1, \ldots, y_n$). To je ale spor, lebo táto postupnosť nie je symetrická. Preto rôznych ofarbení prostredného stĺpca (tých je $\leq f^h$, kde f je počet farieb, vyskytujúcich sa na dlaždiciach, h je maximálna výška steny, teda zložitosť programu) musí byť aspoň toľko, koľko je možných postupností (tých je $10^{n/2}$), a preto musí byť

$$h \geq \log_b 10^{n/2} = n \cdot \frac{\log_b 10}{2}$$

To ale znamená, že zložitosť ľubovoľného dlaždicového programu, riešiaceho našu úlohu, musí byť aspoň lineárna.

P – III – 1

Na úvod si treba uvedomiť, že jednotlivé súradnice pozícií veží môžeme voliť nezávisle na sebe. To preto, že voľba stĺpca nijako neobmedzuje rozsah riadkov, v ktorých môže byť veža umiestnená a naopak. Môžeme teda pre každú vežu najskôr zvoliť stĺpec, v ktorom sa bude nachádzať a potom pre každú zvoliť riadok. Tým sme pôvodnú úlohu previedli do jedného rozmeru. Jednotlivé obdĺžniky sa nám premietnu na intervaly a v každom intervale chceme vybrať jedno číslo tak, aby sa žiadne dve vybrané čísla nezhodovali.

Čísla budeme hľadať nasledujúcim spôsobom: Budeme postupne prechádzať čísla od 1 do N a budeme si udržiavať informáciu, ktoré intervaly začínajúce pred týmto číslom ešte nemajú pridelené žiadne číslo. Z týchto intervalov vyberieme najskôr končiaci a priradíme mu aktuálne číslo. Pokiaľ vybraný interval už prideľované číslo neobsahuje (skončil skôr), tvrdíme, že úloha nemá riešenie.

Majme nejaké korektné rozostavenie veží R. Indukciou dokážeme, že každé takéto rozostavenie vieme upraviť na rozostavenie, ktoré navrhne náš algoritmus. Tým teda ukážeme, že ak existuje korektné rozostavenie veží, tak náš algoritmus jedno korektné rozostavenie nájde.

1° Nech C je najmenšie číslo, ktoré chce náš algoritmus priradiť nejakému (konkrétne najskôr začínajúcemu) intervalu I. Z popisu algoritmu je zrejmé, že menšie číslo sa v žiadnom rozostavení nemôže vyskytovať. Pokiaľ sa v R nevyskytuje ani číslo C, môžeme R upraviť tak, že intervalu I priradíme namiesto jeho súčasného čísla číslo C. Tým sme dostali korektné rozostavenie, ktoré sa navyše v prvom čísle zhoduje s riešením, ktoré nájde náš algoritmus. Ak je v R číslo C už priradené nejakému intervalu J, môžeme intervalu J priradiť číslo, ktoré mal doteraz priradené interval I a intervalu I priradiť číslo C. Keďže interval I končí zo všetkých intervalov obsahujúcich C najskôr, bude toto rozostavenie opäť korektné.

2° Z indukčného predpokladu vieme, že existuje rozostavenie, ktoré sa s rozostavením navrhnutým našim algoritmom zhoduje v prvých k číslach, chceme ukázať, že existuje rozostavenie, ktoré sa s ním zhoduje v prvých $k+1$ číslach. Myšlienka je úplne rovnaká ako v prvom kroku indukcie, preto túto časť dôkazu nechávame na čitateľa.

Priama implementácia algoritmu vedie k riešeniu s časovou zložitosťou $O(N^2)$. My implementáciu zrýchlime nasledujúcim spôsobom: Aby sme vedeli rýchlo upravovať informáciu o tom, ktoré intervaly obsahujú práve spracovávané číslo, zoradíme si ich najskôr podľa začiatku. Aby sme boli schopní rýchlo nájsť najskôr končiaci z nich, budeme si intervaly obsahujúce spracovávané číslo udržiavať v halde podľa ich koncov. Vylepšená implementácia teda vyzerá nasledovne: Prechádzame postupne čísla od 1 do N. Pre každé si do haldy pridáme všetky intervaly, začínajúce týmto číslom. Potom z haldy (ak je neprázdna) vyberieme najskôr končiaci interval a pridelíme mu toto číslo. Pokiaľ vybraný interval už toto číslo neobsahuje, vyhlásime, že rozostavenie neexistuje. S týmito vylepšeniami má algoritmus časovú zložitosť $O(N.\log N)$ a pamäťovú $O(N)$.

P – III – 2

Najskôr ukážeme, že pre každé N existuje prirodzené číslo x, ktoré má cifry len 0 a 1 a je deliteľné N. Označme $x_1 = 1$, $x_2 = 11$, $x_3 = 111$ atď. Ďalej označme $m_i = x_i \bmod N$. Čísla m_i môžu nadobúdať iba hodnoty od 0 do $N-1$, a preto sa aspoň dve z čísel m_1 až m_{N+1} rovnajú. Nech sú to m_i a m_j $(i < j)$. Potom ale číslo $x = x_j - x_i$ je deliteľné N a jeho zápis sa zjavne skladá len z cifier 0 a 1.

Naďalej budeme uvažovať len čísla zložené z cifier 0 a 1. Predchodcom čísla x budeme volať číslo x div 10 (teda x bez poslednej cifry) a nasledovníkmi čísla $10x$ a $10x+1$ (teda tie, ktoré z x dostaneme pridaním ďalšej cifry). Číslo x budeme nazývať minimálnym číslom pre zvyšok z, ak $x \bmod N = z$, x obsahuje vo svojom zápise len cifry 0 a 1 a je zo všetkých takýchto čísel najmenšie. Teraz si dokážeme jednoduchú pomocnú vetu:

Lema: Nech x je minimálne číslo pre zvyšok z, nech x' je predchodca x; označme $z' = x' \bmod N$. Potom x' je minimálne číslo pre zvyšok z'.

Dôkaz: Sporom. Predpokladajme, že x' nie je minimálne číslo pre zvyšok z', čiže existuje $x'' < x'$ také, že $x'' \bmod N = x' \bmod N$. Nech c je posledná cifra čísla x. Keďže $(10x'+c) \bmod N = z$ a $x' \bmod N = x'' \bmod N$, musí nutne platiť aj $(10x''+c) \bmod N = z$, ale potom by číslo x nemohlo byť minimálne pre zvyšok z, lebo číslo $10x'' + c$ má požadované vlastnosti a je menšie. Tým sme dospeli k sporu, preto nutne x' je minimálne číslo pre zvyšok z', q.e.d.

Podľa tejto pomocnej vety budeme počítať minimálne čísla pre rôzne zvyšky. Pre daný zvyšok z sa dá spočítať minimálne číslo x tak, že budeme postupne testovať v rastúcom poradí nasledovníkov minimálnych čísel pre ostatné zvyšky a prvý nasledovník y nejakého minimálneho čísla, pre ktorého platí $y \bmod N = z$, je zjavne hľadaným minimálnym číslom pre zvyšok z.

Týmto postupom nájdeme minimálne čísla pre všetky zvyšky, pre ktoré existujú. Položme $l_1 = 1$ a keď už vieme $l_1, \dots, l_k$, položme l_{k+1} rovné najmenšiemu nasledovníkovi niektorého z čísel $l_1, \dots, l_k$, pre ktorého platí, že $l_{k+1} \bmod N$ je rôzne od všetkých $l_i \bmod N$ pre $1 \le i \le k$. Z predchádzajúcich úvah ale vyplýva, že jednotlivé čísla l_i sú minimálne čísla pre zvyšky $z_i = l_i \bmod N$. Naviac podľa prvého odstavca sa niektoré z čísel z_i rovná 0.

Náš algoritmus bude pracovať presne podľa vyššie uvedeného popisu. V poli `fronta` si budeme pamätať hodnoty z_i a na m-tej pozícii poľa `predchadzajuci` si budeme pamätať zvyšok predchodcu minimálneho čísla pre zvyšok m – z hodnôt v tomto poli sme schopní ľahko zostrojiť minimálne číslo pre zadaný zvyšok. Postupne budeme brať hodnoty z poľa `fronta`, zrátame hodnoty $(10 * z_i) \bmod N$ a $(10 * z_i + 1) \bmod N$ (čo sú zvyšky, ktoré dávajú nasledovníci minimálneho čísla pre zvyšok z_i) a ak sme doteraz nenašli číslo, ktorého zvyšok by bola jedna z týchto hodnôt, tak tento zvyšok pridáme na koniec fronty a príslušne zmeníme pole `predchadzajuci`. Časová aj pamäťová zložitosť algoritmu je zjavne $O(N)$.

P – III – 3

Aby sme nemuseli všetko popisovať zbytočne zložito, zaveďme jednoduché označenia: *Postupnosti* budú vždy zložené len z núl a jednotiek a všetky budú mať n prvkov. Budeme ich značiť tučnými písmenami a ich prvky písmenami s indexmi, teda napríklad $\mathbf{x}$ je postupnosť, obsahujúca prvky $x_1, \dots, x_n$. Počtu jednotiek v postupnosti $\mathbf{x}$ budeme hovoriť jej *váha* a značiť $\#\mathbf{x}$.

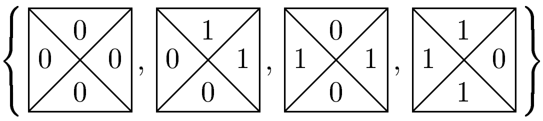
Postupnosť $\mathbf{y}$ je zotriedením postupnosti $\mathbf{x}$ práve vtedy, keď $y_1 \le \dots \le y_n$ (teda $\mathbf{y}$ je neklesajúca) a $\#\mathbf{y} = \#\mathbf{x}$.

Zaoberajme sa najskôr tým, ako overiť druhú podmienku. Mohli by sme postupovať podobne ako v krajskom kole – v každom riadku vydláždenia odstrániť po jednej jednotke z oboch postupností a to opakovať tak dlho, kým nebudú obe obsahovať len nuly, čo ľahko overíme farbou spodného okraja steny. Tým úlohu vyriešime s lineárnou zložitosťou, čo však nie je (ako si ďalej ukážeme) optimálne. Zostaneme však pri myšlienke zjednodušovania testovaných postupností.

Tvrdenie: $\#\mathbf{x} = \#\mathbf{y} \iff \#\mathbf{x} \bmod 2 = \#\mathbf{y} \bmod 2 \wedge \#\hat{\mathbf{x}} = \#\hat{\mathbf{y}}$, kde $\hat{\mathbf{x}}$ je postupnosť, ktorú dostaneme z $\mathbf{x}$ prepísaním každej druhej jednotky na nulu (t.j. prvú prepíšeme, druhú necháme, tretiu prepíšeme atď.)

Dôkaz: Ak $\#\mathbf{x} = \#\mathbf{y}$, tak iste $\#\mathbf{x} \bmod 2 = \#\mathbf{y} \bmod 2$, ale keďže $\#\hat{\mathbf{x}} = \lfloor \#\mathbf{x}/2 \rfloor$, musí byť aj $\#\hat{\mathbf{x}} = \#\hat{\mathbf{y}}$. Naopak ak $\#\hat{\mathbf{x}} = \#\hat{\mathbf{y}}$, môžu sa váhy $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ líšiť najviac o 1, a keďže dávajú rovnaký zvyšok po delení 2, nutne sa rovnajú.

Vytvorme najskôr dlaždicový podprogram, ktorý pre danú postupnosť $\mathbf{x}$ zadanú farbami horného okraja spočíta $\hat{\mathbf{x}}$ na dolnom okraji a $\#\mathbf{x} \bmod 2$ na pravom okraji. (V tom zmysle, že vydláždenie bude existovať práve vtedy, keď farby týchto okrajov spĺňajú dané podmienky.) Toto vydláždenie bude mať jediný riadok. Predpokladajme, že ľavý okraj má farbu 0. Budeme potrebovať nasledovnú sadu dlaždíc:

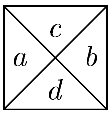
$T_0 =$ 

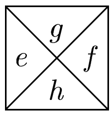
Označme z_i farbu pravej hrany a y_i farbu dolnej hrany i-tej dlaždice vydláždeného riadku (z_0 nech je 0). Ľahko ukážeme, že $z_i = \left(\sum_{k=1}^{i} x_k\right) \bmod 2$. Indukciou – pre $i = 0$ platí, pre $i > 0$ je

$$z_i = (z_{i-1} + x_k) \bmod 2 = \left(\left(\sum_{k=1}^{i-1} x_k\right) \bmod 2 + x_i\right) \bmod 2 = \left(\sum_{k=1}^{i} x_k\right) \bmod 2.$$

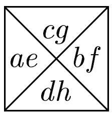
Taktiež si treba uvedomiť, že $y_i = 1 \iff x_i = 1 \ \wedge\ z_{i-1} = 1$, inými slovami práve vtedy, keď je x_i jednotka, pred ktorou bol nepárny počet jednotiek, teda keď táto je párna, čiže ju máme nechať v $\hat{\mathbf{x}}$.

Skombinujme teraz dva takéto programy tak, aby pracovali naraz – jeden s postupnosťou $\mathbf{x}$ a druhý s $\mathbf{y}$ (postupnosti sú kódované dvojicami (x_i, y_i)). Budeme požadovať, aby vypočítali rovnako kódované postupnosti $\hat{\mathbf{x}}$ a $\hat{\mathbf{y}}$ aj zvyšky $\#\mathbf{x} \bmod 2$ a $\#\mathbf{y} \bmod 2$. Na to stačí zostrojiť množinu T_1 obsahujúcu „súčiny“ dvojíc dlaždíc z množiny T_0, to znamená pre každé dve dlaždice

$A =$ 

a $B =$ 

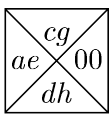
z T_0 do T_1 pridať dlaždicu

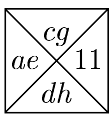


,

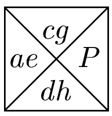
kde ae, bf, cg a dh sú usporiadané dvojice farieb. Ak existuje vydláždenie riadku, ktorý má na hornej hrane dvojice $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, na dolnej $(\hat{x}_1, \hat{y}_1), \ldots, (\hat{x}_n, \hat{y}_n)$, na ľavej $(0, 0)$ a na pravej (z_x, z_y) dlaždicami z T_1, musí vďaka tomu, ako sme si tieto dlaždice zadefinovali, existovať aj vydláždenie riadku s hornou hranou $x_1, \ldots, x_n$, dolnou $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n$, ľavou 0 a pravou z_x, ako aj analogické vydláždenie pre $\mathbf{y}$. A naopak, ak existujú tieto dve vydláždenia, existuje aj ich zloženie zostavené z dlaždíc z množiny T_1. Preto $z_x = \#\mathbf{x} \bmod 2$, $z_y = \#\mathbf{y} \bmod 2$ a spodná hrana naozaj obsahuje dvojice prvkov postupností $\hat{\mathbf{x}}$ a $\hat{\mathbf{y}}$.

My však potrebujeme akceptovať práve tie vydláždenia, u ktorých $z_x = z_y$, teda s pravým okrajom $(0, 0)$ aj $(1, 1)$. K dispozícii však máme len jednu farbu pravého okraja. Preto rozšírime množinu T_1 na T_2 tak, že ku každému typu dlaždice z T_1 tvaru



alebo 

pridáme do T_2 typ

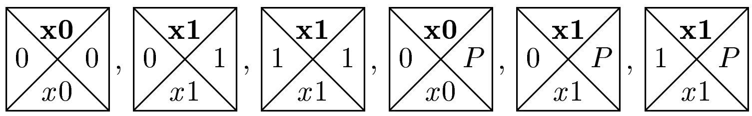


,

kde P je farba pravého okraja, ktorá sa nezhoduje so žiadnou inou farbou. Keďže sa táto dlaždica môže vyskytnúť len tesne pri pravej stene (keďže žiadna dlaždica nemá ľavú hranu farby P), zodpovedajú korektné vydláždenia pomocou tejto sady dlaždíc práve tým vydláždeniam sadou T_1, pri ktorých je $z_x = z_y$.

Zostáva nám ešte pridať test, či je postupnosť $\mathbf{y}$ neklesajúca, čo vyriešime pridaním dlaždíc typov:

$T_z \quad = \quad \Bigg\{$



;

$$x \in \{0,1\}, \mathbf{x} = \text{„tučná verzia“ } x \Bigg\},$$

kde **00**, **01**, **10** a **11** sú farby dvojíc kódujúcich zadané postupnosti $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ a 00, 01, 10 a 11 analogické kódy používané všetkými ostatnými doteraz zadefinovanými dlaždicami. Tým z T_2 vznikne množina T, o ktorej tvrdíme, že s farbou ľavého okraja 0, pravého P a spodného 00 rieši našu úlohu v čase $O(\log n)$. Toto tvrdenie teraz dokážeme.

Prvý riadok musí obsahovať len dlaždice z T_z, lebo žiadne iné nemajú na svojich horných hranách farby zodpovedajúce tým, ktorými je kódovaný vstup. Ako sme už ukázali v domácom kole, táto sada overí, že postupnosť $\mathbf{y}$ je neklesajúca. Navyše na spodnom okraji tohto riadku dostaneme pôvodné postupnosti zo vstupu, len ináč kódované. Všetky ostatné riadky obsahujú len dlaždice z T_2, pričom každý riadok prepíše postupnosti $\mathbf{x}_i$ a $\mathbf{y}_i$ zadané na svojom hornom okraji na postupnosti $\mathbf{x}_{i+1} = \hat{\mathbf{x}}_i$ a $\mathbf{y}_{i+1} = \hat{\mathbf{y}}_i$ a overí, či $\#\mathbf{x}_i \bmod 2 = \#\mathbf{y}_i \bmod 2$. Ak $\#\mathbf{x} = \#\mathbf{y}$, tak po maximálne $\lceil \log_2 n \rceil$ riadkoch budú obe postupnosti zredukované na nuly, čo zodpovedá farbe spodného okraja. Čiže v takomto prípade vydláždenie existuje a má hĺbku $\leq 1 + \lceil \log_2 n \rceil$. Ak $\#\mathbf{x} \neq \#\mathbf{y}$, vydláždenie nemôže existovať, lebo aspoň v jednom kroku by sa $\#\mathbf{x}_i \bmod 2$ nerovnalo $\#\mathbf{x}_i \bmod 2$ (viď Tvrdenie).

Poznámka: Lepšia hĺbka než $\Omega(\log n)$ sa nedá dosiahnuť. To môžeme zdôvodniť podobne, ako sme v krajskom kole dokazovali, že na overenie symetrie potrebujeme lineárnu hĺbku. Opäť budeme počítať možné ofarbenia stredného stĺpca – tentokrát si uvedomíme, že tieto ofarbenia musia byť rôzne pre každé dva rôzne počty jednotiek v $x_1, \ldots, x_{n/2}$ – ak sú jednotky len medzi týmito prvkami a $x_{n/2+1}, \ldots, x_n$ sú nulové, musí zotriedená postupnosť $\mathbf{y}$ obsahovať naopak vo svojej ľavej polovici samé nuly a v pravej rovnako jednotiek ako $\mathbf{x}$ v ľavej. Možných počtov jednotiek medzi $x_1, \ldots, x_{n/2}$ je $n/2 + 1$, možných ofarbení stredného stĺpca f^h, kde f je počet nami použitých farieb a h je výška steny, teda zložitosť programu. Z toho dostávame:

$$b^h \geq n/2 + 1 \quad \Longrightarrow \quad b^h > n/2 \quad \Longrightarrow \quad h > \log_b n - \log_b 2 \quad \Longrightarrow \quad h = \Omega(n).$$

P – III – 4

Riešenie tejto úlohy je založené na dynamickom programovaní. Pre každé slovo si budeme pamätať, kde je najlepšie skončiť predchádzajúci riadok, ak by toto slovo bolo na konci riadku. Tiež si budeme pamätať minimálny celkový počet trestných bodov pri tomto rozdelení. Keď zrátame najlepší koniec predchádzajúceho riadku pre posledné slovo, vieme zo zapamätaných informácií ľahko zrekonštruovať rozdelenie celého textu do riadkov – z informácií pre posledné slovo vieme, ktoré slová ležia v poslednom riadku. Potom ale vieme, ktorým slovom končí predposledný riadok, preň už tiež máme zrátané optimálne rozdelenie a pokračujeme analogicky. Stačí už len správne doplniť medzery medzi vypisované slová. To urobíme tak, že keď máme umiestniť M medzier medzi $S+1$ slov, tak $M \bmod S$ dvojíc slov oddelíme $(M \div S)+1$ medzerami a $S-(M \bmod S)$ oddelíme $M \div S$ medzerami. Tým sa počty medzier medzi ľubovoľnými dvoma dvojicami susedných slov líšia najviac o 1 a celkový počet medzier je tiež správny. Formátovanie posledného riadku a riadku s jedným slovom sú triviálne.

A teraz už k hlavnej časti algoritmu – ako rýchlo spočítať, kde je najlepšie skončiť predchádzajúci riadok, ak bude aktuálne slovo na konci riadku? Túto informáciu budeme postupne počítať od prvého slova. Pri prvom slove nastavíme počet trestných bodov na 0. Ak máme zrátané hodnoty pre prvých N slov, začnime ju rátať pre $(N+1)$. slovo. Pôjdeme od N-tého slova smerom k začiatku textu. Pre každé slovo si zrátame počet trestných bodov za riadok, ktorý by začínal za týmto slovom a končil $(N+1)$. slovom. (Pokiaľ je $(N+1)$. slovo posledné v texte, bude ním ukončený riadok posledný, a tak hodnotiacu funkciu musíme informovať, že hodnotí posledný riadok.) K tomuto počtu trestných bodov ešte prirátame minimálny počet trestných bodov za predchádzajúci text (ten už máme zrátaný a uložený pri slove, ktoré skúšame ako koniec predposledného riadku). Z týchto hodnôt si vyberieme minimálnu, zapamätáme si ju a tiež si zapamätáme slovo, ktorým pri nej končil predposledný riadok. Keď už je posledný riadok pridlhý (hodnotiaca funkcia vráti ∞), vieme, že lepšie rozdelenie už nenájdeme. Môžeme teda ísť rátať hodnoty pre ďalšie slovo. Algoritmus má časovú zložitosť $O(T + W \cdot L)$, kde T je dĺžka textu, W je počet slov a L je dĺžka riadku. Pamäťová zložitosť algoritmu je $O(T)$. Správnosť algoritmu vyplýva z popisu.

P – III – 5

Najskôr si rozmyslime, že platí nasledovné tvrdenie: Trasy liniek mestom sa dajú navrhnúť práve vtedy, keď z každej križovatky vychádza párny počet ulíc.

Keby sme si trasy rôznych liniek vyznačili na pláne mesta rôznymi farbami, potom by každá z nich tvorila cyklus. Každá ulica by mala jednoznačne určenú svoju farbu. Pre každú križovatku a každú farbu by platilo, že z tejto križovatky buď nevychádza žiadna ulica tejto farby, alebo z nej vychádzajú práve dve ulice tejto farby. Preto je počet ulíc vychádzajúcich z každej križovatky naozaj párny.

Teraz si naopak rozmyslime, že ak z každej križovatky vychádza párny počet ulíc, potom vieme navrhnúť trasy liniek tak, aby spĺňali požiadavky zo zadania. Postupne ofarbujeme ulice v meste tak, aby ulice rovnakej farby tvorili cyklus (teda zodpovedali nejakej linke). Ulice, ktoré sme ofarbili, už nebudeme považovať za súčasť mesta. Tým zmenšíme počet ulíc vychádzajúci z ľubovoľnej križovatky o párne číslo (o nula alebo o dve), takže počet ulíc vychádzajúcich z každej križovatky bude naďalej párny. Vyberme si nejakú križovatku v meste a označme si ju na mape (položme na ňu kamienok). Vyberme sa z tejto križovatky po ľubovoľnej (doteraz neofarbenej) ulici a položme kamienok na križovatku, na ktorú sme prišli. Z každej križovatky sa vždy dá pokračovať aspoň jednou ulicou – po jednej sme sem prišli a keďže neofarbených ulíc z nej je párny počet, sú aspoň dve a tou druhou môžeme pokračovať ďalej. Skončíme, keď by sme mali na nejakú križovatku položiť druhý kamienok – prišli sme sem druhýkrát, a teda našli cyklus. Tento cyklus ofarbíme nejakou doteraz nepoužitou farbou a prehlásime ho za novú linku. Kamienky odstránime z mapy a celý proces opakujeme, kým sa nám neminú neofarbené hrany.

Algoritmus na riešenie zadanej úlohy vytvoríme priamo podľa dôkazu. Najskôr overíme, či z niektorej križovatky nevychádza nepárny počet ulíc. Ak taká existuje, rovno vypíšeme `Neda sa`. V opačnom prípade začneme aplikovať postup z predchádzajúceho odstavca. Kamienky samozrejme nahradíme nastavovaním vhodného príznaku v programe. Keď nájdeme cyklus, príslušné ulice vymažeme z mapy a cyklus vypíšeme na výstup. Aby sme ušetrili čas, necháme kamienky na križovatkách, ktoré sú medzi križovatkou, kde sme začali a križovatkou, kde sme mali položiť druhý kamienok. Na tieto križovatky by sme totiž mohli položiť kamienky aj v meste, ktoré vzniklo vynechaním práve nájdeného cyklu. Kladenie kamienkov budeme realizovať jednoduchou rekurzívnu funkciou. Zostáva vyriešiť, ako práve ofarbené ulice rýchlo odstraňovať z mapy mesta, uloženej v pamäti.

Ulice spájajúce dve rovnaké križovatky si budeme pamätať ako jednu ulicu s uvedením počtu ulíc, ktoré spájajú tie isté dve križovatky. Ulice si uložíme do dvojrozmerného poľa. Jeden jeho index bude predstavovať číslo križovatky a druhý poradové číslo ulice vychádzajúcej z danej križovatky. Rozmery tohto poľa teda budú počet križovatiek $\times$ maximálny počet ulíc, vychádzajúcich z jednej križovatky. Pre každú križovatku máme uvedené všetky ulice, ktoré z nej vychádzajú. Pre každú si pamätáme, kam vedie, koľko ulíc tieto dve križovatky v meste spája a index do tohto poľa určujúci, kde sú informácie o tejto ulici uložené pri križovatke, ktorá je na jej opačnom konci. Príslušnú ulicu vymažeme jednoducho tak, že upravíme informácie o nej pri oboch koncových križovatkách, ktoré spája, čo vieme spraviť v konštantnom čase, lebo si pamätáme jej index pri druhej križovatke.

Pamäťové aj časové nároky nášho algoritmu sú $O(N+M)$, kde N je počet križovatiek v meste a M je počet ulíc v meste. Pamäťové nároky sa reprezentáciou len jednej z hrán spájajúcej dve konkrétne križovatky (viď predchádzajúci odsek) dajú znížiť na $O(N+H)$, kde H je maximálny počet ulíc takých, že žiadne dve nespájajú tie isté dve križovatky.

8. Stredoeurópska informatická olympiáda

Ôsma Stredoeurópska olympiáda v programovaní (Central European Olympiad in Informatics – CEOI) sa uskutočnila v dňoch 24. – 31. augusta 2001 v maďarskom meste Zalaegerszeg. CEOI je súťažou stredoškolákov prevažne zo stredoeurópskych krajín. Každá zúčastnená krajina má právo vyslať štyroch súťažiacich, vedúceho výpravy a jeho zástupcu. Na CEOI sa každoročne zúčastňujú družstvá zakladajúcich krajín – Českej Republiky, Chorvátska, Maďarska, Nemecka, Poľska, Rakúska, Rumunska, Slovenskej Republiky a Slovinska. Tento rok organizátori navyše pozvali tímy z Holandska, Fínska, Estónska a Talianska. Z Maďarska sa okrem oficiálneho tímu zúčastnil ďalší tím študentov zo Zalskej župy.

Družstvo Slovenska sa zúčastnilo v zložení Dávid Haraga (gym. J.G. Tajovského, B. Bystrica), Martin Macko (gym. Školská, Spišská Nová Ves), Peter Bella (gym. J. Hronca, Bratislava) a Jozef Tvarožek (gym. J. Hronca, Bratislava) pod vedením doc. RNDr. Gabriely Andrejkovej, CSc. (Prírodovedecká fakulta UPJŠ) a Jána Senka (Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK).

Slovenské družstvo získalo tri medaily, jednu zlatú (Jozef Tvarožek), jednu striebornú (Peter Bella) a jednu bronzovú (Martin Macko).

V neoficiálnom poradí krajín sa Slovenská Republika umiestnila na druhom mieste spolu s Poľskom so ziskom 6 medailových bodov. Na prvom mieste skončilo netradične Nemecko so 7 medailovými bodmi. Naše umiestnenie bolo príjemným prekvapením a potvrdilo to, že tohtoročné úlohy boli o čosi tažšie a nielen naši súťažiaci mali problémy s ich vyriešením.

meno	body	
Jozef Tvarožek	442	zlato
Peter Bella	355	striebro
Martin Macko	256	bronz
Dávid Haraga	246	–

Ján Senko

Zadania úloh 8. Stredoeurópskej informatickej olympiády

Atómový cólštok

Vedci objavili špeciálny druh molekúl. Je známe, že molekuly pozostávajú z N rôznych atómov, označených číslami od 1 do N, a molekula je lineárna postupnosť. Vedci sú vybavení špeciálnym meradlom, tzv. cólštokom. Toto meradlo umožňuje odmerať vzdialenosť medzi ľubovoľnými dvoma atómami v molekule. Vzdialenosť nameraná cólštokom je absolútnou hodnotou rozdielu pozícií dvoch atómov v reťazci.

Nanešťastie sa atómy meraním opotrebúvajú a časté merania môžu zničiť molekulu. Ak je meraná vzdialenosť medzi dvoma atómami, tak sa oba raz použijú. Ak sa nejaký atóm použije 5x, tak sa rozpadne a molekula je zničená. Ak sa niektorý atóm použije 4x, tak sa molekula iba jemne poškodí. A ak sa každý atóm použije menej ako 4x, tak sa molekule nič nestane.

Vašou úlohou je napísať program, ktorý zistí presnú štruktúru molekuly určením postupnosti atómov v molekule.

Označenia atómov:	1 —	3 —	5 —	2 —	4
Pozície:	1	2	3	4	5

Knižnica

Na obsluhu vášho cólštoku ste dostali knižnicu `meter` s tromi funkciami:

- `Size`, má byť volaná raz na začiatku, bez parametrov, a vracia hodnotu N. `Size` musí byť volaná pred prvým volaním funkcie `Span`.
- `Span`, má byť volaná s dvoma označeniami atómov ako parametrami a vracia vzdialenosť medzi nimi.
- `Answer`, má byť volaná na konci a musí byť použitá na odovzdanie vášho výsledku. `Answer` má dva celočíselné parametre, i a x, ktoré vravia, že atóm s označením x je na pozícii i v našej molekule. Pre každé i ($1 \le i \le N$) musí byť `Answer` volaná práve raz, a to v *rastúcom* poradí vzhľadom na i. Vždy existujú dve symetrické riešenia a vy môžete odovzdať ľubovoľné z nich.

Rozhovor medzi vaším programom a knižničnými funkciami je zaznamenávaný do textového súboru `chain.out`. Tento súbor taktiež obsahuje odpovede vášho programu a v prípade chyby aj chybové hlásenia.

Pokyny pre Pascalistov: nezabudnite na importovací príkaz

```
uses meter;
```

vo vašom zdrojovom kóde.

Pokyny pre programátrov v C/C++: použite direktívu

```
#include "meter.h"
```

vo vašom zdrojovom kóde, vytvorte project file `chain.gpr` v adresári úlohy, pridajte súbory `chain.c` (`chain.cpp`) a `meter.o` do tohto projectu, a potom použite *compile* a/alebo *make* na váš program.

Experimentovanie

Môžete experimentovať s knižnicou vytvorením textového súboru `chain.in`. Tento súbor musí obsahovať dva riadky. Prvý riadok má obsahovať celé číslo N, čo je počet atómov v molekule. Druhý riadok má obsahovať zadanie – postupnosť označení atómov pozostávajúcu z N rôznych celých čísel z intervalu 1 až N.

Príklad

Súbor `chain.in`	Súbor `chain.out`
5	Size=5
1 3 5 2 4	Span(1,2)=3
	Span(1,3)=1
	Span(2,3)=2
	Span(4,5)=2
	Span(1,4)=4
	Span(3,5)=1
	Your Answer: 1 3 5 2 4
	Max. Access/Atom: 3

Your Answer = Vaša odpoveď
Max. Access/Atom = Maximálny počet použití nejakého atómu

Obmedzenia

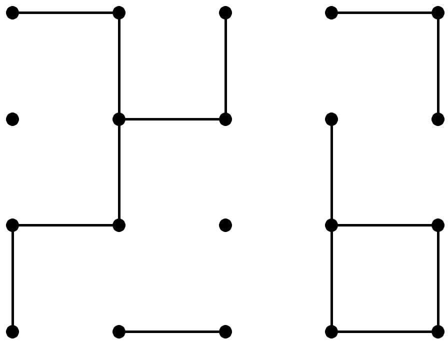
- Pre počet atómov N platí: $5 \leq N \leq 10000$.
- Použitie jedného atómu funkciou `Span` viac než 4x ukončí váš program.
- Váš program nesmie pristupovať k žiadnym súborom.
- Pre označenia atómov x a ich pozície i platí: $1 \leq i, x \leq N$.
- Mená FreePascalovských knižničných súborov: `meter.ppw` a `meter.ow`
- Deklarácie Pascalovských funkcií:
```
function Size: integer;
function Span(x, y: integer):integer;
procedure Answer(i, x: integer);
```
- Mená C/C++ knižníc: `meter.h` a `meter.o`
- Deklarácie C/C++ funkcií:
```
int Size(void);
int Span(int x, int y);
void Answer(int i, int x);
```

Bodovanie

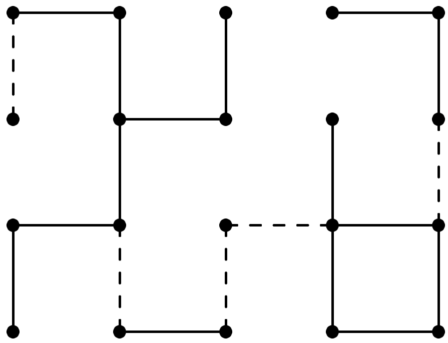
Ak je odpoveď vášho programu správna a žiaden atóm nebol použitý viac ako 3x, tak dostanete plný počet bodov za tento test. Ak je odpoveď správna, ale nejaký atóm bol použitý 4x, tak dostanete polovicu bodov za tento test. A ak odpoveď bola nesprávna alebo bol nejaký atóm použitý 5x, nedostanete žiadne body za tento test.

Plošné spoje

Plošný spoj je kuprexitová doštička pokrytá medenou vrstvou (do ktorej sa leptajú alebo tlačia rôzne magické obrazce), ktorá sa skladá z uzlov a vodivých segmentov. Jeden vodivý segment spája dvojicu uzlov. Uvažujme špeciálny druh plošných spojov, kde sú uzly umiestnené v obdĺžnikovej mriežke a vodivé segmenty spájajú (vodorovne alebo zvislo) len susedné uzly. Plošný spoj sa nazýva skompletovaný, ak sú každé dva uzly vodivo spojené. Je daný plošný spoj, ktorý má niektoré susedné uzly už prepojené. Našou úlohou je pridať nové vodivé segmenty tak, aby bol plošný spoj skompletovaný. Cena za nový zvislý segment je 1 a za vodorovný 2.



Obrázok 29



Obrázok 30

Vašou úlohou je napísať program, ktorý vypočíta ako najlacnejšie skompletovať daný obvod. Váš program by mal vyriešiť nasledovné tri podúlohy:

A. Určiť počet vodivých segmentov v najlacnešom skompletovaní.

B. Vypočítať najmenšiu cenu tohoto skompletovania.

C. Vypísať zoznam vodivých segmentov v najlacnejšom skompletovaní.

Vstup: Prvý riadok súboru `circuit.in` obsahuje dve celé čísla, N and M. N ($1 \le N \le$ ≤ 100) je počet riadkov a M ($1 \le M \le 100$) je počet stĺpcov v mriežke. Uzly obvodu označujeme súradnicami. Uzol v ľavom hornom rohu je na súradniciach $(1, 1)$, uzol v pravom dolnom rohu je na (N, M). Každý z ďalších N riadkov obsahuje M celých čísel. Číslo v riadku i a stĺpci j v týchto riadkoch popisuje vodivé segmenty medzi dvojicou uzlov (i, j) a $(i+1, j)$, a tiež medzi dvojicou uzlov (i, j) a $(i, j+1)$ nasledujúcim spôsobom:

- `0` znamená, že ani dvojica uzlov (i, j) a $(i + 1, j)$ ani dvojica uzlov (i, j) a $(i, j + 1)$ nie sú spojené vodivým segmentom.
- `1` znamená, že iba dvojica uzlov (i, j) a $(i + 1, j)$ je spojená vodivým segmentom.
- `2` znamená, že iba dvojica uzlov (i, j) a $(i, j + 1)$ je spojená vodivým segmentom.
- `3` znamená, že aj dvojica uzlov (i, j) a $(i + 1, j)$, aj dvojica uzlov (i, j) a $(i, j + 1)$ sú spojené vodivým segmetnom.

Poznámka: Uvedomte si, že na niektorých pozíciach nie sú niektoré hodnoty platné (napr. na pozícii (N, M) je platná iba hodnota `0`).

Výstup: Prvý riadok súboru `circuit.out` by mal obsahovať dve celé čísla, K a V. Číslo K je počet nových vodivých segmentov v najlacnejšom skompletovaní a číslo V je cena tohto skompletovania. Zvyšok súboru musí obsahovať K riadkov, a to zoznam nových vodivých segmentov najlacnejšieho skompletovania (v ľubovoľnom poradí). Každý riadok musí obsahovať tri čísla popisujúce práve jeden nový vodivý segment: i, j a d, kde (i, j) sú súradnice uzla a d je buď `1` alebo `2`; `1` znamená, že nový segment spája uzly (i, j) a $(i + 1, j)$, hodnota `2` znamená, že nový segment spája uzly (i, j) a $(i, j + 1)$.

Príklad

Súbor `circuit.in`

```
4 5
2 1 1 2 1
0 3 0 1 0
3 0 0 3 1
0 2 0 2 0
```

Súbor `circuit.out`

```
5 6
1 1 1
3 2 1
3 3 1
3 3 2
2 5 1
```

Príklad vstupu zodpovedá plošnému spoju na obrázku 29. Príklad výstupu je najlacnejšie možné skompletovanie, tak ako je znázornené na obrázku 30.

Bodovanie

Ak odpoviete správne v podúlohe A, dostanete za tento test 1 bod. Ak odpoviete správne aj na podúlohu B, dostanete navyše 2 body (dokopy 3). A ak odpoviete správne na všetky tri podúlohy, dostanete za tento test plných 5 bodov.

Uvedomte si, že na získanie bodov za podúlohy A alebo B nepotrebujete vypisovať nič z podúlohy C.

Kolobežkársky „Trip“

Váš tím sa rozhodol, že po súťaži pôjde na kolobežkársky výlet po krajine. Chcete docestovať do cieľového mesta a potom sa vrátiť naspäť do štartovného mesta. Váš tím však chce, aby cesta tam a cesta naspäť mali čo najmenej spoločných chodníkov (chodník spája dve susedné mestá; cesta nemôže obsahovať jeden chodník viackrát).

Vašou úlohou je napísať program, ktorý nájde dve cesty medzi štartovným a cieľovým mestom také, aby počet spoločných chodníkov na týchto dvoch cestách bol čo najmenší.

Vstup: Prvý riadok súboru `trip.in` obsahuje dve celé čísla, S a D ($S \neq D$), čísla štartovného a cieľového mesta. Druhý riadok obsahuje dve celé čísla, N a M, kde N ($3 \leq$ $\leq N \leq 1000$) je počet miest a M ($2 \leq M \leq 100000$) je počet chodníkov medzi mestami. Mestá sú očíslované od 1 do N. Každý z ďalších M riadkov súboru obsahuje dve celé čísla, P a Q ($1 \leq P$, $Q \leq N$; $P \neq Q$), čo znamená, že medzi mestami P a Q je obojsmerný chodník. Medzi každými dvoma mestami je nanajvýš jeden chodník.

Výstup: Prvý riadok súboru `trip.out` musí obsahovať jedno celé číslo, a to najmenší možný počet spoločných chodníkov pre cesty tam a späť. Druhý riadok by mal obsahovať cestu tam popísanú postupnosťou čísiel miest, cez ktoré vedie, vrátane štartovného aj cieľového mesta. Tretí riadok by mal obsahovať cestu späť popísanú postupnosťou čísiel miest, cez ktoré vedie, vrátane cieľového aj štartovného mesta. Ak existuje viacero rôznych dvojíc ciest s rovnakým počtom spoločných chodníkov, váš program môže vypísať ľubovoľné z nich. Ak neexistuje žiadna cesta zo štartovného do cieľového mesta, tak výstupný súbor má obsahovať jediné číslo -1.

Príklad

Súbor `trip.in`

```
1 6
7 8
2 1
1 3
2 3
4 2
4 5
5 6
7 5
6 7
```

Súbor `trip.out`

```
2
1 3 2 4 5 7 6
6 5 4 2 1
```

Bodovanie

Ak prvý riadok výstupného súboru obsahuje správnu odpoveď, tak dostanete 2 body za tento test. Ak navyše druhý a tretí riadok obsahujú správne cesty, tak za tento test dostanete navyše ďalšie 3 body (teda dokopy 5).

Komponenty bitmapy

Čiernobiele obrázky sa zvyčajne ukladajú vo forme bitmáp. Bitmapa je obdĺžniková mriežka pixelov.

Lomená čiara (alebo len **čiara**) medzi bodmi P a Q je postupnosť čiernych pixelov $P = P_1, P_2, \dots, P_k = Q$, kde P_i a P_{i+1} ($i = 1, \dots, k-1$) sú (vodorovne alebo zvislo) susedné pixely. *Čiara* $P_1, P_2, \dots, P_k$ je uzavretá, ak platí $P_1 = P_k$ a $P_i \neq P_j$ ($i = 1, \dots, k-1$, $j = 2, \dots, k$) pre všetky $i < j$ okrem $i = 1$ a $j = k$ (to znamená, že *čiara* neobsahuje ten istý pixel viackrát).

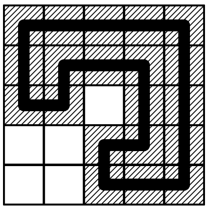
Množina čiernych pixelov S je **súvislá**, ak pre každú dvojicu pixelov (P, Q) v S existuje aspoň jedna *čiara* L medzi P a Q taká, že všetky pixely z L patria do S.

Komponent bitmapy je maximálna súvislá množina čiernych pixelov.

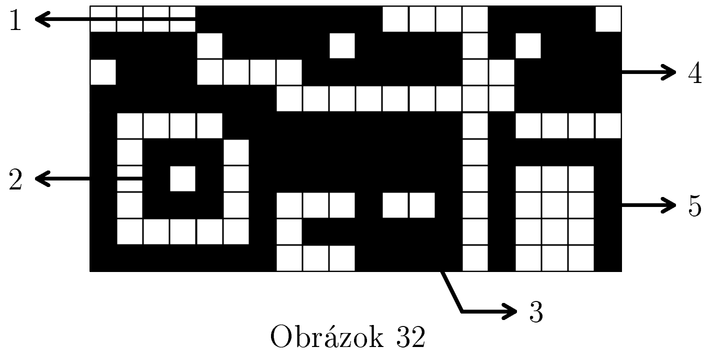
Komponent môže obsahovať dieru. **Diera** sa skladá z bielych pixelov, ktoré sú vo vnútri uzavretej *čiary*. Všimnite si biely pixel uprostred obrázku 31, ktorý nie je vnútri zvýraznenej uzavretej *čiary*.

Kompaktný komponent neobsahuje žiadnu dieru.

Obrázok 32 zobrazuje bitmapu s piatimi komponentami, z ktorých dva sú kompaktné (4 a 5; komponenty 1, 2 a 3 nie sú kompaktné).



Obrázok 31



Obrázok 32

Vašou úlohou je napísať program, ktorý vypočíta počet všetkých komponentov a počet kompaktných komponentov v danej bitmape.

Kódovanie: Bitmapy, ktoré skúmame, sú zakódované (skomprimované) nasledovnou metódou: Každý riadok je zakódovaný ako postupnosť celých čísel $W_1, B_1, \ldots, W_k, B_k$, kde W_i je počet za sebou nasledujúcich bielych pixelov a B_i je počet za sebou nasledujúcich čiernych pixelov. Napríklad kód prvého riadku bitmapy na obrázku 32 je postupnosť 4 7 4 4 1 0.

Vstup: Prvý riadok súboru `bitmap.in` obsahuje dve kladné celé čísla, N a M. N ($2 \leq N \leq 10000$) je počet riadkov a M ($2 \leq M \leq 1000$) je počet stĺpcov v bitmape. Nasledujúcich N riadkov obsahuje zakódovanú bitmapu systémom popísaným v odstavci *Kódovanie*. Každý z týchto riadkov je ukončený číslom -1.

Výstup: Súbor `bitmap.out` musí obsahovať dva riadky, na každom práve jedno celé číslo. Prvý riadok má obsahovať počet všetkých komponentov a druhý počet kompaktných komponentov vo vstupnej bitmape.

Príklad

Súbor `bitmap.in`

```
10 20
4 7 4 4 1 0 -1
0 4 1 4 1 4 1 1 1 3 -1
1 3 4 6 2 4 -1
0 7 9 4 -1
0 1 4 9 1 1 4 0 -1
0 1 1 3 1 8 1 5 -1
0 1 1 1 1 1 1 8 1 1 3 1 -1
0 1 1 3 1 1 3 1 2 1 1 1 3 1 -1
0 1 5 1 1 6 1 1 3 1 -1
0 7 3 4 1 1 3 1 -1
```

Súbor `bitmap.out`

```
5
2
```

Bodovanie

Ak prvý riadok vášho výstupného súboru obsahuje správny počet všetkých komponentov, tak dostanete 50% bodov za tento test. Ak aj druhý riadok vášho výstupného súboru obsahuje správny počet kompaktných komponentov, tak dostanete ďalších 50% bodov za tento test.

Žolíkové výrazy

Hviezdičkové výrazy sa často používajú na špecifikovanie viacerých súborov. Napríklad všetky súbory, ktorých názvy začínajú na **h** a končia na **bak** môžeme špecifikovať výrazom **h*bak**.

Hviezdičkový výraz je reťazec, v ktorom hviezdičky (*) označujú žolíka. Reťazec W vyhovuje výrazu P, ak je W možné získať dosadením nejakých reťazcov (aj prázdnych) za hviezdičky do P (za každú hviezdičku môžete dosadiť iný reťazec). Q nazývame spoločným výrazom pre dva hviezdičkové výrazy P_1 a P_2, ak každý reťazec, ktorý vyhovuje Q, vyhovuje aj P_1 aj P_2.

Množina $Q_1, Q_2, \dots, Q_L$ spoločných výrazov sa nazýva úplná, ak každý reťazec, ktorý vyhovuje obom P_1 aj P_2, vyhovuje nejakému Q_i.

Vašou úlohou je napísať program, ktorý pre danú dvojicu výrazov P_1 a P_2 vypočíta

A. aspoň jeden spoločný výraz (ale žiadne nesprávne!); alebo

B. úplnú množinu spoločných výrazov, ktorá nemá viac ako 6666 položiek; alebo

C. úplnú množinu spoločných výrazov, ktorá má najmenší počet prvkov (to znamená, že neexistuje žiadna menšia úplná množina). Všimnite si, že vyriešením tejto úlohy získate bonusových 50% bodov.

Vstup: Prvý a druhý riadok vstupného súboru `pattern.in` obsahujú hviezdičkové výrazy P_1 a P_2. Výrazy sú zložené z malých písmen od `'a'` po `'z'` a znaku `'*'`. Každý výraz má nanajvýš 20 znakov. Počet hviezdičiek vo výraze je medzi 0 a 6 (vrátane).

Výstup: Prvý riadok výstupného súboru `pattern.out` musí obsahovať celé číslo K, počet spoločných výrazov vo vašom riešení. Nasledujúcich K riadkov musí obsahovať po jednom spoločnom výraze, tieto spolu tvoria vaše riešenie.

Poradie spoločných výrazov je nepodstatné. Aj verzia B aj C sa dá vyriešiť pomocou nanajvýš 6666 výrazov. Ak neexistuje žiaden spoločný výraz výrazov P_1 a P_2, tak prvý a jediný riadok výstupného súboru musí obsahovať číslo 0.

Príklad

Súbor `pattern.in`

```
*ab*
ba*b
```

Súbor `pattern.out` **pre verziu C**

```
4
ba*ab*b
bab*b
ba*ab
bab
```

Bodovanie

Ak vaše riešenie vyrieši verziu A tohto problému, dostanete 5 bodov za tento test. Ak vyrieši verziu B, dostanete 10 bodov, a ak vyrieši verziu C, dostanete 15 bodov.

Kockáči majú voľby

Študenti vo vašej škole sa delia na dve disjunktné skupiny: na kockáčov a na nevedomých. Na každej škole je jedna z týchto skupín v prevahe. Našou úlohou je vybrať prezidenta školy, ktorý ale musí patriť do tej väčšej skupiny. Identifikátory študentov sú celé čísla od 1 po počet študentov. Jedinú operáciu, ktorú môžete na študentoch vykonať (okrem operácie slepého čreva) je spýtať sa, či dvaja študenti patria do rovnakej skupiny.

Vašou úlohou je napísať program, ktorý nájde ľubovoľného študenta patriaceho do väčšej skupiny a zároveň položí čo najmenej otázok.

Knižnica

Na kladenie otázok ste dostali knižnicu `query` s tromi operáciami:

- `Size`, má byť volaná raz na začiatku, bez parametrov, a vracia hodnotu N, čo je počet všetkých študentov. `Size` musí byť volaná pred prvým volaním funkcie `Member`.
- `Member`, má byť volaná s dvoma identifikátormi študentov ako parametrami a vracia 1, ak títo študenti patria do rovnakej skupiny, inak vracia 0.
- `Answer`, má byť volaná raz na konci a musí byť použitá na odovzdanie vášho výsledku. Answer má jeden celočíselný parameter, a to identifikátor študenta, ktorý patrí do väčšej skupiny.

Rozhovor medzi vaším programom a knižničnými funkciami je zaznamenávaný do textového súboru `select.out`. Tento súbor tiež obsahuje vašu odpoveď a taktiež to, či ste odpovedali správne.

Vaša odpoveď je akceptovaná len vtedy, ak neexistuje protipríklad. Protipríklad je nejaké rozdelenie študentov na dve disjunktné skupiny A a B, pre ktoré je vaša komunikácia s knižnicou korektná, ale vaša odpoveď nie je. Knižnica núti váš program, aby sa spýtal toľko otázok, koľko je potrebné na identifikáciu člena väčšej skupiny. To znamená, že neexistujú žiadne dopredu určené testovacie dáta, ale knižnica si ich vymýšľa za behu. Ak odpoviete predtým, ako si ste na 100% istí, dostanete 0 bodov. Tak žiadne tipovanie!

Pokyny pre Pascalistov: nezabudnite na importovací príkaz

```
uses query;
```

vo vašom zdrojovom kóde.

Pokyny pre programátrov v C/C++: použite direktívu

```
#include "query.h"
```

vo vašom zdrojovom kóde, vytvorte project file `select.gpr` v adresári úlohy, pridajte súbory `select.c` (`select.cpp`) a `query.o` do tohto projectu, a potom použite *compile* a/alebo *make* na váš program.

Experimentovanie

Môžete experimentovať s knižnicou vytvorením textového súboru `select.in`. Prvý a jediný riadok tohto súboru má obsahovať celé číslo N, a to počet všetkých študentov na škole. N musí byť nepárne číslo!

Príklad

Súbor `select.in`

7

Súbor `select.out`

Size=7
Member(1,2)=0
Member(3,4)=1
Member(5,6)=1
Member(4,6)=0
Your Answer: 7, Correct
Majority Group: 2 5..7
Non-majority Group: 1 3 4
Number of Queries: 4
Full Possible Score: 3
Your Score: 3

Vysvetlivky:

Your Answer = Vaša odpoveď
Majority Group = Väčšia skupina
Non-majority Group = Menšia skupina
Number of Queries = Počet otázok
Full Possible Score = Najvyšší možný počet bodov
Your Score = Tvoj počet bodov
zápis $a..b$ označuje celočíselný interval od a po b vrátane.

Napríklad odpoveď 1 by nebola správna, pretože pre rozdelenie študentov do skupín $\{2, 5, 6, 7\}$ a $\{1, 3, 4\}$ 1 nie je členom väčšej skupiny $\{2, 5, 6, 7\}$.

Obmedzenia

- Pre počet študentov N platí: $5 \leq N < 30000$ a N je nepárne.
- Váš program nesmie pristupovať k žiadnym súborom.
- Pre identifikátory študentov i platí: $1 \leq i \leq N$.
- Mená FreePascalovských knižničných súborov: `query.ppw` a `query.ow`
- Deklarácie Pascalovských funkcií:
```
function Size: integer;
function Member(x, y: integer):integer;
procedure Answer(x: integer);
```
- Mená C/C++ knižníc: `query.h` a `query.o`
- Deklarácie C/C++ funkcií:
```
int Size(void);
int Member(int x, int y);
void Answer(int x);
```

Bodovanie

Ak je odpoveď vášho programu správna a váš program sa opýtal K otázok, tak dostanete $\max(0, N - K)$ bodov za tento test (kde N je počet študentov).

13. Medzinárodná informatická olympiáda

V dňoch 14. – 21. júla 2001 sa v Tampere vo Fínsku konala medzinárodná informatická olympiáda (IOI 2001). Olympiády sa zúčastnili štvorčlenné družstvá stredoškolákov zo 74 krajín celého sveta. Našu výpravu na olympiáde tvorilo družstvo v zložení Marián Dvorský (gym. Košice, Šrobárova), Ján Oravec (gym. J.G. Tajovského, B. Bystrica), Jozef Tvarožek (gym. J. Hronca, Bratislava) a Tomáš Záthurecký (gym. V. Paulínyho–Tótha, Martin) spolu s dvomi vedúcimi RNDr. Danou Pardubskou, CSc. a Michalom Forišekom (FMFI UK Bratislava).

Slovenskému družstvu sa podarilo nadviazať na tradične výborné výsledky v minulých rokoch, keďže dvaja naši študenti získali zlaté a dvaja strieborné medaily. Slovensko sa vďaka tomu v neoficiálnom poradí krajín umiestnilo na prvom mieste.

meno	body	
Ján Oravec	420	zlato
Marián Dvorský	415	zlato
Tomáš Záthurecký	338	striebro
Jozef Tvarožek	329	striebro

Na výsledku nášho družstva je vidieť, že všetci naši súťažiaci mali za sebou intenzívnu prípravu a taktiež skúsenosti na medzinárodných súťažiach. Traja z nich sa dokonca na IOI zúčastnili aj minulý rok. Preto boli na nich tento rok právom kladené vysoké nároky. Na našu radosť ich s prehľadom dokázali splniť a v rozhodujúcej chvíli pomohla aj trocha šťastia. Dosiahnuté medaily sú najlepšie, aké mohli reálne za získané body dostať a aj keď si do poslednej chvíle neboli istí, akú medailu dostanú, o to väčšiu radosť z nich potom mali. Zostáva už len popriať, aby naše družstvo budúci rok tento výsledok dokázalo aspoň zopakovať.

Michal Forišek

Zadania úloh 13. Medzinárodnej informatickej olympiády

Mobilné telefóny

Pliaga zvaná mobilné telefóny sa už rozšírila aj v okolí Tampere. Dokonca tu už majú vykrývače štvrtej generácie (pre neznalých: vykrývač je akási stanica, na ktorú sa pripájajú mobily z blízkeho okolia). A tieto vykrývače pracujú nasledovne: Celý okres je rozdelený na štvorce. Tie tvoria maticu $S \times S$. Jej riadky a stĺpce budeme číslovať od 0 do $S-1$. V každom štvorci je práve jeden vykrývač. Počet aktívnych mobilov vo štvorci sa môže meniť, keďže sa majitelia mobilov s nimi presúvajú z jedného štvorca do druhého, zapínajú a vypínaju ich. Z času na čas vykrývače hlásia do centra počet aktívnych mobilov vo svojom štvorci a spolu s ním aj svoje súradnice, t.j. riadok a stĺpec štvorca, v ktorom sa nachádzajú.

Napíšte program, ktorý bude prijímať tieto hlásenia a odpovedať na otázky ohľadom aktuálneho počtu aktívnych mobilov v ľubovoľnom obdĺžniku.

Vstup a výstup: Vstup čítajte zo štandardného vstupu ako celé čísla a odpovede na otázky píšte na štandardný výstup opäť ako celé čísla. Formát vstupu je nasledovný: Každý riadok vstupu bude obsahovať práve jeden príkaz. Ten sa skladá z jedného celého čísla, určujúceho typ príkazu, a niekoľkých celočíselných parametrov podľa nasledujúcej tabuľky:

Príkaz	Parametre	Význam
0	S	Inicializuj maticu veľkosti $S \times S$, obsahujúcu samé nuly. Tento príkaz bude použitý práve raz ako prvý príkaz.
1	$X\ Y\ A$	Zvýš počet mobilov vo štvorci (X, Y) o A. A môže byť kladné aj záporné.
2	$L\ B\ R\ T$	Vypíš počet aktívnych mobilov vo štvorcoch (X, Y) takých, že $L \leq X \leq R$ a $B \leq Y \leq T$.
3		Ukončenie programu. Tento príkaz bude použitý práve raz ako posledný príkaz.

Môžete predpokladať, že hodnoty parametrov budú v povolenom rozsahu, netreba ich kontrolovať. Konkrétne môžete predpokladať, že ak A je záporné, nezníži počet aktívnych mobilov vo štvorci pod 0. Číslovanie riadkov aj stĺpcov začína od 0, teda tabuľka veľkosti 4×4 obsahuje štvorce (X, Y), pre ktoré $0 \leq X \leq 3$ a $0 \leq Y \leq 3$

Pri spracovaní iného príkazu ako 2 by váš program nemal nič písať na výstup. Pri spracovaní príkazu 2 by mal na štandardný výstup vypísať riadok s jediným číslom.

Príklad

stdin	stdout	vysvetlenie
0 4		Inicializuje tabuľku veľkosti 4×4.
1 1 2 3		Vo štvorci $(1, 2)$ pribudli 3 aktívne mobily.
2 0 0 2 2		Otázka na počet akt. mobilov v obdĺžniku $0 \leq X \leq 2$, $0 \leq Y \leq 2$.
	3	Odpoveď na otázku.
1 1 1 2		Vo štvorci $(1, 1)$ pribudli 2 aktívne mobily.
1 1 2 -1		Vo štvorci $(1, 2)$ ubudol 1 aktívny mobil.
2 1 1 2 3		Otázka na počet akt. mobilov v obdĺžniku $1 \leq X \leq 2$, $1 \leq Y \leq 3$.
	4	Odpoveď na otázku.
3		Ukončenie programu.

Obmedzenia

Veľkosť tabuľky	$S \times S$	$1 \times 1 \leq S \times S \leq 1024 \times 1024$
Počet mobilov vo štvorci	V	$0 \leq V \leq 2^{15} - 1$ $(= 32\,767)$
Zmena počtu mobilov	A	$-2^{15} \leq A \leq 2^{15} - 1$ $(= 32\,767)$
Počet príkazov na vstupe	U	$3 \leq U \leq 60\,002$
Maximálny počet mobilov v celej tabuľke	M	$M = 2^{30}$

Z 20 vstupov bude 16 takých, že veľkosť tabuľky je nanajvýš 512×512.

Hra Ioiwari

Medzi najstaršie formy ľudskej zábavy patrí aj séria hier s guličkami a jamkami, nazývaná Mancala. V tejto úlohe sa stretnete s jej verziou vyvinutou špeciálne pre túto IOI. Hru hrajú dvaja hráči na okrúhlej doske so siedmimi jamkami po obvode. Okrem toho má každý hráč vlastné vrecko, ktoré je na začiatku hry prázdne. Na začiatku hry sa do jamiek na doske náhodne rozloží 20 guličiek tak, aby v každej jamke boli aspoň 2 a najviac 4. Potom obaja hráči striedavo ťahajú. Ťah prebieha nasledovne: Hráč si vyberie neprázdnu jamku a zoberie si z nej do ruky všetky guličky. Kým ešte má nejaké guličky v ruke, prechádza jamky v smere hodinových ručičiek začnúc nasledujúcou a pri každej jamke vykoná nasledovné operácie:

- Ak má ešte v ruke viac ako 1 guličku: Ak je v aktuálnej jamke práve 5 guličiek, vyberie z nej jednu guličku a dá si ju do vrecka. Inak dá do aktuálnej jamky jednu guličku z ruky.
- Ak má v ruke práve 1 guličku: Ak sú v aktuálnej jamke 1 až 4 guličky, tak si všetky guličky z nej a aj tú z ruky dá do vrecka. V opačnom prípade (ak je v jamke 0 alebo 5 guličiek), dá guličku z ruky do súperovho vrecka.

Hra končí, keď sú všetky jamky prázdne a vyhráva hráč, ktorý má vo vrecku viac guličiek.

Existuje vyhrávajúca stratégia pre začínajúceho hráča. Vašou úlohou je napísať program, ktorý bude túto hru hrať ako začínajúci hráč a vyhrá. Súper bude pri vyhodnocovaní hrať optimálne, t.j. ak dostane šancu vyhrať, vyhrá.

Vstup a výstup: Váš program bude čítať vstup zo štandardného vstupu a vypisovať na štandardný výstup. Váš program bude hráč 1 a súper bude hráč 2. Jamky sú očíslované od 1 po 7 v smere hodinových ručičiek po obvode dosky. Na začiatku musí váš program načítať riadok so siedmimi celými číslami $p_1, \ldots, p_7$ – začiatočné rozmiestnenie guličiek v jamkách 1 až 7. Potom sa začne hra. Váš program by ju mal hrať nasledovne:

- Ak je na ťahu váš program, má na štandardný výstup vypísať číslo jamky, ktorú si vo svojom ťahu vybral.
- Ak je na ťahu súper, váš program má načítať zo štandardného vstupu číslo jamky, ktorú si súper vo svojom ťahu vybral.

Nástroje

K dispozícii máte program (pod Linuxom `ioiwari2`, pod Win98 `ioiwari2.exe`), ktorý hrá ako hráč 2 optimálne jednu konkrétnu hru. Najskôr vypíše na štandardný výstup prvý riadok, ktorý má váš program prečítať. Tento riadok popisuje počiatočné počty guličiek v jamkách (4 3 2 4 2 3 2). Potom bude hrať túto hru, pričom sa bude snažiť čítať ťahy hráča 1 zo štandardného vstupu a písať vlastné ťahy na štandardný výstup. Pri testovaní môžete tento program a svoj spustiť nezávisle na sebe a ručne prenášať informácie medzi nimi. Hra bude zaznamenaná do súboru `ioiwari.out`.

Príklad

Korektná postupnosť 6 ťahov:

Operácia \ Jamka	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	Vrecko 1	Vrecko 2
Začiatok hry	4	3	2	4	2	3	2	0	0
Ťah hráča 1: 2	4	0	3	5	0	3	2	3	0
Ťah hráča 2: 3	4	0	0	4	1	4	0	3	4
Ťah hráča 1: 5	4	0	0	4	0	0	0	8	4
Ťah hráča 2: 4	0	0	0	0	1	1	1	8	9
Ťah hráča 1: 5	0	0	0	0	0	0	1	10	9
Ťah hráča 2: 7	0	0	0	0	0	0	0	11	9

Bodovanie

Za každú hru, ktorú váš program vyhrá, dostanete 4 body, za každú remízu 2 a inak 0 bodov.

Päťadvadsať

Santa Claus si so svojimi pomocníkmi často posiela správy, ktoré bývajú zakódované do jazyka Päťadvadsať. Abeceda tohto jazyka je rovnaká ako anglická s jedinou výnimkou – chýba písmeno Z, t.j. obsahuje 25 písmen od A po Y v takom istom poradí ako anglická abeceda. Každé slovo v tomto jazyku má presne 25 rôznych písmen. Slovo môžeme zapísať do tabuľky 5×5 po riadkoch. Napríklad slovo ADJPTBEKQUCGLRVFINSWHMOXY zapíšeme takto:

A	D	J	P	T
B	E	K	Q	U
C	G	L	R	V
F	I	N	S	W
H	M	O	X	Y

Jazyk Päťadvadsať obsahuje práve také slová, ktorých príslušná tabuľka má písmená v každom riadku aj stĺpci usporiadané vzostupne. Takže slovo ADJPTBEKQUCGLRVFINSWHMOXY je slovom z tohto jazyka, na rozdiel od slova ADJPTBEGQUCKLRVFINSWHMOXY (v druhom ani treťom stĺpci nie sú písmená usporiadané korektne).

Santa Claus má obrovský slovník. Ten obsahuje zoznam všetkých slov jazyka Päťadvadsať v lexikografickom usporiadaní (vzostupne) súčasne s ich poradovými číslami, začínajúc od 1. Napríklad slovo ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXY má číslo 1, slovo ABCDEFGHIJKLMNOPQRSUTVWXY má číslo 2. V slove číslo 2 sú oproti slovu 1 vymenené U a T.

Tento slovník je na chudáka starého Santa Clausa priveľký. Preto ak mu nenapíšete program, ktorý by mu pomohol, nedostanete na Vianoce žiadne darčeky, len päťadvadsať na zadok. Váš program by mal vedieť ľubovoľnému slovu priradiť jeho poradové číslo a aj naopak poradovému číslu priradiť príslušné slovo. Slovník obsahuje nanajvýš 2^{31} slov.

Vstup: Vstupný súbor sa volá `twofive.in` a obsahuje dva riadky. Na prvom riadku je jediný znak – '`W`' alebo '`N`'. Ak prvý riadok obsahuje '`W`', na druhom riadku je platné slovo jazyka Päťadvadsať, teda reťazec s 25 znakmi. Ak prvý riadok obsahuje '`N`', na druhom riadku je poradové číslo existujúceho slova tohto jazyka.

Výstup: Výstupný súbor sa volá `twofive.out` a má obsahovať jediný riadok. Ak je v druhom riadku vstupného súboru slovo, má vo výstupnom súbore byť poradové číslo tohto slova. Ak je v druhom riadku vstupného súboru poradové číslo, má vo výstupnom súbore byť slovo jazyka Päťadvadsať s týmto poradovým číslom.

Príklad

Súbor `twofive.in`
```
W
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSUTVWXY
```

Súbor `twofive.out`
```
2
```

Súbor `twofive.in`
```
N
2
```

Súbor `twofive.out`
```
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSUTVWXY
```

Skóre

Skóre je dosková hra pre dvoch hráčov, ktorí striedavo presúvajú figúrku z políčka na políčko. Na doske je N políčok, očíslovaných od 1 do N a niekoľko šípok. Každá šípka vedie z jedného políčka na nejaké iné. Každé políčko vlastní jeden z hráčov, toho budeme volať vlastníkom tohoto políčka. Navyše je každé políčko ohodnotené kladným číslom, rôzne políčka majú navzájom rôzne ohodnotenia. Políčko číslo 1 je počiatočné. Na začiatku majú obaja hráči skóre 0.

Hra prebieha nasledovne: Označme C políčko, na ktorom sa na začiatku ťahu nachádza figúrka. (Na začiatku hry bude C políčko č. 1.) Ťah pozostáva z nasledujúcich operácii:

1. Ak je hodnota políčka C väčšia ako aktuálne skóre vlastníka C, jeho skóre sa zvýši na hodnotu C. Inak ostáva skóre vlastníka C nezmenené. Skóre druhého hráča sa ani v jednom z prípadov nemení.
2. Následne si vlastník C vyberie jednu zo šípok vychádzajúcich z C a na políčko, na ktoré šípka vedie, presunie figúrku.

Hra končí, keď sa po niektorom ťahu figúrka ocitne na počiatočnom políčku. Víťazom je hráč, ktorý má v tej chvíli vyššie skóre.

Šípky sú vždy umiestnené tak, aby platilo:

- Z každého políčka vychádza aspoň 1 šípka.
- Každé políčko je dosiahnuteľné z počiatočného políčka, t.j. existuje postupnosť šípok, ktorá naň vedie.
- Je zaručené, že hra skončí po konečnom počte krokov.

Napíšte program, ktorý bude hrať túto hru a vyhrá. Všetky hry, ktoré bude mať počas vyhodnotenia hrať, môže vyhrať, bez ohľadu na to, či je to hra, v ktorej začína alebo nie. Súper bude hrať optimálne, t.j. ak dostane šancu vyhrať, vyhrá.

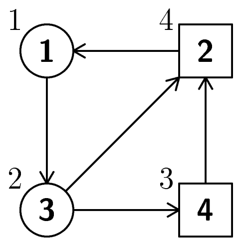
Vstup a výstup: Program má čítať zo štandardného vstupu a písať na štandardný výstup. Váš program je hráč č. 1, súper je hráč č. 2. Pri spustení by váš program mal najskôr zo štandardného vstupu prečítať nasledujúce údaje:

Na prvom riadku je jedno celé číslo N ($1 \leq N \leq 1\,000$) – počet políčok. Políčka sú očíslované od 1 po N. V každom z nasledujúcich N riadkov sa nachádza N celých čísel, popisujúcich šípky. Ak z políčka i na políčko j vedie šípka, tak j-te číslo na i-tom z týchto riadkov je 1, inak je tam 0. Nasledujúci riadok obsahuje N celých čísel – vlastníkov políčok. Ak je vlastníkom políčka i hráč č. 1, tak i-tym číslom na tomto riadku je 1, inak je to 2. Nasledujúci riadok obsahuje N celých čísel – hodnoty políčok. Ak je i-te číslo na tomto riadku j, hodnota políčka i je j. Pre hodnotu j políčka platí $1 \leq j \leq N$ a všetky hodnoty políčok sú navzájom rôzne.

Potom začína hra s figúrkou na políčku číslo 1. Váš program by sa mal správať podľa nasledovných pravidiel a skončiť, keď sa figúrka vráti na počiatočné políčko.

- Ak je na ťahu váš program, mal by na štandardný výstup vypísať číslo políčka P ($1 \leq P \leq N$), na ktoré chce presunúť figúrku.
- Ak je na ťahu váš súper, váš program by mal zo štandardného vstupu načítať číslo políčka P ($1 \leq P \leq N$), na ktoré presunul figúrku.

Všimnime si nasledujúci príklad:



Políčka patriace hráčovi č. 1 sú označené krúžkom, hráčovi č. 2 štvorčekom. V tomto útvare je napísaná hodnota príslušného políčka a pri ňom jeho číslo. Hra prebieha nasledovne:

stdin	stdout	význam
4		N
0 1 0 0		informácie o šípkach
0 0 1 1		informácie o šípkach
0 0 0 1		informácie o šípkach
1 0 0 0		informácie o šípkach
1 1 2 2		vlastníci políčok
1 3 4 2		hodnoty políčok
	2	Ťah hráča č. 1
	4	Ťah hráča č. 1
1		Ťah hráča č. 2 na poč. políčko – koniec hry

Po hre má hráč č. 1 skóre 3, hráč č. 2 skóre 2, teda vyhráva hráč č. 1.

Nástroje

Máte k dispozícii pomocný program (v Linuxe `score2`, vo Win98 `score2.exe`). Tento program číta zo súboru `score.in` popis hry vo vyššie uvedenom formáte. V takomto istom formáte ho aj vypíše na štandardný výstup. Tento výstup môžete použiť ako vstup pre svoj program pri testovaní. Potom program hrá s náhodnou stratégiou, pričom číta zo štandardného vstupu ťahy vášho programu a píše na štandardný výstup svoje ťahy.

Bodovanie

Ak hru vyhráte, získate za ňu plný počet bodov, inak 0. Pri vyhodnocovaní je váš program najskôr spustený proti inému programu s časovým limitom o jednu sekundu vyšším, ako je skutočný časový limit na túto úlohu. Je zaznamenaný vstup a výstup vášho programu. Následne je váš program spustený ešte raz s tým istým vstupom presmerovaným zo súboru a so skutočným časovým limitom. Váš program musí pri druhom spustení vygenerovať rovnaký výstup ako pri prvom spustení.

Dvakrát šifruj a raz rež

Kryptografický Superbezpečný Protokol (KSP) používa silný kryptografický algoritmus. Ten pracuje s tromi *blokmi* veľkosti 128 bitov. Šifrovacia funkcia E (encrypt) dostáva ako parametre blok p (plaintext, t.j. nezašifrovaná správa) a blok k (key, t.j. kľúč šifry) a vráti blok c (ciphertext, t.j. zašifrovaná správa).

$$c = E(p, k)$$

Inverznú funkciu k šifrovacej funkcii E používanej v KSP budeme volať dešifrovacia funkcia a označovať D (decrypt). Pritom platí:

$$D(\, E(p,k),\, k\,) = p \qquad E(\, D(c,k),\, k\,) = c$$

V *Dvojitom KSP*, čo je to úplne najsilnejšie, čo len môže byť, sa postupne používajú dva bloky kľúčov k_1 a k_2 v tomto poradí, teda pre zašifrovanú správu c_2 platí:

$$c_2 = E(\, E(p, k_1),\, k_2\,)$$

Dané je tiež celé číslo s. Určuje, že relevantných bude len $4s$ najvyšších bitov každého kľúča, ostatných $128 - 4s$ bitov budú nuly.

Vašou úlohou je pre danú správu zakódovanú Dvojitým KSP zistiť dvojicu kľúčov, ktorá bola pri šifrovaní použitá. Máte k dispozícii aj pôvodnú správu p, aj príslušný zašifrovaný text c_2 a viete (vďaka danému s), že príslušnú časť kľúčov tvoria nuly.

Taktiež máte k dispozícii knižnicu, v ktorej sú implementované šifrovacia a dešifrovacia funkcia KSP a taktiež funkcie na prevod medzi blokom a jeho hexadecimálnym zápisom.

Vašou úlohou je odovzdať príslušné šifrovacie kľúče a nie program, ktorý ich zisťuje!

Vstup: Daných je desať vstupov v textových súboroch s menami `double1.in` až `double10.in`. Každý súbor obsahuje 3 riadky. Na prvom je celé číslo s, na druhom blok správy p a na treťom zašifrovaná správa c_2, získaná z p použitím Dvojitého KSP. Oba tieto bloky sú napísané ako reťazec 32 hexadecimálnych cifier (‘`0`’…‘`9`’, ‘`A`’…‘`F`’). Všetky vstupné súbory majú riešenie.

Výstup: Máte odovzdať desať výstupných súborov, zodpovedajúcich príslušným vstupným súborom. Každý výstupný súbor má pozostávať z troch riadkov. Na prvom je text:
`#FILE double I`
kde I je číslo príslušného vstupného súboru. Na druhom riadku je blok kľúča k_1 a na treťom blok kľúča k_2, taktiež oba zapísané ako reťazec 32 hexadecimálnych cifier. Tieto kľúče majú spĺňať:

$$c_2 = E(\,E(p, k_1),\, k_2\,)$$

Ak existuje viac riešení, môžete odovzdať ľubovoľné jedno z nich.

Príklad

Súbor `double0.in`	**Možný výstupný súbor**
`1`	`#FILE double 0`
`00112233445566778899AABBCCDDEEFF`	`A0000000000000000000000000000000`
`6323B4A5BC16C479ED6D94F5B58FF0C2`	`70000000000000000000000000000000`

Knižnica

Knižnica pre FreePascal (Linux: `aeslibp.p`, `aeslibp.ppu`, `aeslibp.o`;
Windows: `aeslibp.p`, `aeslibp.ppw`, `aeslibp.ow*`):

```
type
  HexStr = String [ 32 ]; { only '0'..'9', 'A'..'F' }
  Block  = array [ 0..15 ] of Byte; { 128 bits }

procedure HexStrToBlock ( const hs: HexStr; var b: Block );
procedure BlockToHexStr ( const b: Block; var hs: HexStr );
procedure Encrypt ( const p, k: Block; var c: Block );   { c = E(p,k) }
procedure Decrypt ( const c, k: Block; var p: Block );   { p = D(c,k) }
```

Knižnica pre GNU C/C++ (Linux and Windows: `aeslibc.h`, `aeslibc.o*`):

```
typedef char HexStr[33]; /* '0'..'9', 'A'..'F', '\0'-terminated */
typedef unsigned char Block[16];  /* 128 bits */

void hexstr2block ( const HexStr hs, /* out-param */ Block b );
void block2hexstr ( const Block b, /* out-param */ HexStr hs );
void encrypt ( const Block p, const Block k, /* out-param */ Block c );
```

```
  /* c = E(p,k) */
void decrypt ( const Block c, const Block k, /* out-param */ Block p );
  /* p = D(c,k) */
```

Máte k dispozícii program `aestoolp.pas`, resp. `aestoolc.c`, ktorý ukazuje, ako vo FreePascale, resp. v GNU C/C++ používať knižnicu.

Obmedzenie: Pre počet s relevantných hexadecimálnych cifier kľúča platí $1 \leq s \leq 5$.

Poznámka: Dobrý program vie nájsť hľadané kľúče pre každý z daných vstupov za menej ako 10 sekúnd.

Sklad

Slovenská spoločnosť používajúca vyspelé západné technológie vlastní obrovský obdĺžnikový sklad. V celom sklade pracuje len jeden robotník a jeden manažér. Steny skladu (postupne po jeho obvode) sa volajú ľavá, horná, pravá a dolná. Je to na nich napísané veľkými písmenami svetločervenej farby. Plocha skladu je rozdelená na štvorce rovnakej veľkosti, ktoré tvoria riadky a stĺpce. Riadky číslujeme zhora nadol a stĺpce zľava doprava počnúc od 1.

V sklade sú uložené krabice, v ktorých sa nachádzajú všetky vymoženosti modernej techniky, ktoré firma práve nepotrebuje. Krabice sú očíslované navzájom rôznymi identifikačnými číslami. Každá krabica zaberá práve jeden štvorec. Sklad je taký veľký, že počet krabíc v ňom je vždy menší ako počet jeho riadkov aj ako počet jeho stĺpcov. Teda niežeby bol až taký veľký, ono len tej techniky nie je až tak veľa. Krabice sa zo skladu neodstraňujú, lebo nik nevie, čo v nich je. Len občas nejaká pribudne. Vchod do skladu je v ľavom hornom rohu.

Robotník má krabice poukladané v okolí ľavého horného rohu tak, aby ich vedel nájsť podľa identifikačných čísel. Používa na to nasledujúcu metódu:

Nech číslo práve vkladanej krabice je k (budeme ju pre jednoduchosť volať krabica k). Robotník prechádza zľava prvým radom, až kým nenájde prvú krabicu s identifikačným číslom väčším ako k. Ak takú nenájde, uloží krabicu k do tohto radu tesne za doteraz poslednú v ňom. Ak takú krabicu k_1 nájde, umiestni krabicu k na miesto, kde doteraz stála krabica k_1 a následne krabicu k_1 vloží do nasledujúceho riadku použitím tejto istej metódy. Ak narazí na riadok, v ktorom nie sú žiadne krabice, umiestni doň práve ukladanú krabicu na najľavejšiu pozíciu.

Predpokladajme, že krabice prichádzali v poradí 3, 4, 6, 2, 5, 1. Potom umiestnenie krabíc v sklade po uložení všetkých týchto krabíc bude vyzerať nasledovne:

```
1 4 5
2 6
3
```

Manažér prišiel k robotníkovi a prihovoril sa mu:

Manažér: Prišla krabica 5 skôr ako krabica 4?

Robotník: Nie, to je vylúčené.

Manažér: Aha, takže mi vieš povedať poradie, v akom prichádzali, podľa toho, ako ich máš uložené?

Robotník: Ani nie. Teraz napríklad mohli prísť v poradí 3, 2, 1, 4, 6, 5 ale aj v poradí 3, 2, 1, 6, 4, 5 alebo v 14 iných poradiach.

Keďže manažér nechcel pred robotníkom vyzerať hlúpo, ticho a rýchlo odišiel. A teraz sedí v kancelárii a bojí sa vyliezť, kým nebude vedieť, ako to vlastne s tými krabicami je. A na to potrebuje váš program, ktorý mu pre dané rozmiestnenie krabíc v sklade povie všetky možné poradia, v ktorých mohli tieto krabice do skladu prichádzať.

Vstup: Vstupný súbor sa volá `depot.in`. Na jeho prvom riadku je jedno celé číslo R – počet riadkov s krabicami. Nasledujúcich R riadkov vstupného súboru popisuje jednotlivé riadky s krabicami v poradí zhora nadol. Každý z týchto R riadkov vstupného súboru začína celým číslom K, udávajúcim počet krabíc v príslušnom riadku skladu. Nasleduje práve K celých čísel – identifikačné čísla krabíc v tomto riadku skladu v poradí zľava doprava. Pre všetky identifikačné čísla krabíc I platí $1 \leq I \leq 50$. V sklade je najviac 13 krabíc (ich počet označme N).

Výstup: Výstupný súbor sa volá `depot.out`. Má obsahovať toľko riadkov, koľko je rôznych poradí, v ktorých mohli krabice do skladu prichádzať. Každý z týchto riadkov má obsahovať práve N celých čísel – identifikačné čísla krabíc v poradí, v akom mohli prichádzať. Žiadne dva riadky nesmú byť rovnaké.

Príklad

Súbor `depot.in`

```
3
3 1 4 5
2 2 6
1 3
```

Súbor `depot.out`

```
3 2 1 4 6 5      3 2 4 6 1 5
3 2 1 6 4 5      3 2 6 4 1 5
3 4 2 1 6 5      3 6 2 4 1 5
3 2 4 1 6 5      3 4 2 6 5 1
3 2 6 1 4 5      3 4 6 2 5 1
3 6 2 1 4 5      3 2 4 6 5 1
3 4 2 6 1 5      3 2 6 4 5 1
3 4 6 2 1 5      3 6 2 4 5 1
```

Súbor `depot.in`

```
3
2 1 2
1 3
```

Súbor `depot.out`

```
3 1 2
1 3 2
```

Bodovanie

Ak výstupný súbor neobsahuje žiadne poradie alebo obsahuje nejaké nesprávne poradie, dostanete za príslušný vstup 0 bodov. Inak sa body zaň určia nasledovne: Ak obsahuje každé možné poradie práve raz, dostanete 4 body. Ak obsahuje aspoň polovicu možných poradí a každé z nich práve raz, dostanete 2 body. Ak ich obsahuje menej ako polovicu alebo sa niektoré poradie v ňom vyskytuje viackrát, dostanete 1 bod.

Korešpondenčný seminár SK MO

V 50. ročníku matematickej olympiády SK MO prebiehal pre najúspešnejších olympionikov predchádzajúceho ročníka MO zo Slovenska korešpondenčný seminár SK MO. Tento korešpondenčný seminár vznikol už v 24. ročníku MO preto, aby bolo umožnené venovať individuálnu starostlivosť aj tým študentom, ktorí nenavštevovali triedy so zameraním na matematiku. V súčasnosti, pretože existuje veľké množstvo iných matematických korešpondenčných seminárov (napríklad krajských, ktorým je venovaná samostatná kapitola), a pretože počet škôl so zameraním na matematiku stúpol, seminár SK MO sa zameriava na zlepšenie prípravy všetkých študentov, ktorí preukázali svoje schopnosti v predchádzajúcich ročníkoch MO. Keďže úlohy tohto seminára svojou náročnosťou prevyšujú akúkoľvek inú matematickú súťaž pre stredoškolákov, seminár sa stáva dôležitou súčasťou prípravy aj na medzinárodnú matematickú olympiádu. V 44. ročníku MO bol KS SK MO prvýkrát zorganizovaný samostatne na Slovensku. Pozostáva tradične z piatich sérií po sedem úloh. Do riešenia sa v tomto ročníku zapojilo len 11 študentov.

Korešpondenčný seminár viedol *Eugen Kováč* a opravovanie zabezpečovali študenti FMFI UK (všetko bývalí olympionici).

Celkové poradie KS SK MO 2000/2001

1. *Katarína Quittnerová*, 3. ročník, Gymnázium Bilíkova, Bratislava, 93 bodov
2. *Andrej Osuský*, 3. ročník, Gymnázium J. Hronca, Bratislava, 89.5 bodov
3. *Róbert Lukoťka*, 4. ročník, Gymnázium J.G. Tajovského, B. Bystrica, 42.5 bodov

Uvádzame všetky príklady tohto ročníka súťaže spolu s riešeniami, prevažne študentskými. Príklady boli vyberané z materiálov jury MMO a z národných olympiád, či iných súťaží týchto krajín: Bielorusko, Čína, Estónsko, Írsko, Maďarsko, Poľsko, Rumunsko, Rusko, Slovinsko a Veľká Británia.

Zadania súťažných úloh KS SK MO

Prvá séria

1.1 Nech x, y, z sú kladné reálne čísla spĺňajúce $xyz = 1$. Nájdite minimálnu hodnotu výrazu

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2 .$$

(Veľká Británia, MO 99/00)

1.2 Ku každému trojuholníku ABC so stranami $|AB| = c(m), |BC| = a(m), |CA| = b(m)$ a uhlami $|\sphericalangle CAB| = \alpha(rad), |\sphericalangle ABC| = \beta(rad), |\sphericalangle BCA| = \gamma(rad)$ priraďme šesticu čísel $(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma)$. Nájdite najmenšie n pre ktoré existuje nerovnoramenný trojuholník ABC tak, že v šestici $(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma)$ je práve n rôznych čísel!

(Bielorusko, MO 99/00)

1.3 Nech $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ je polynóm s nezápornými reálnymi koeficientami. Predpokladajme, že $p(4) = 2$ a $p(16) = 8$. Dokážte, že $p(8) \leqq 4$ a nájdite všetky polynómy v ktorých nastáva rovnosť.

(Írsko, MO 99/00)

1.4 Nájdite všetky kladné celé čísla a a b spĺňajúce rovnosť $a^{(a^a)} = b^b$.

(Bielorusko, MO 99/00)

1.5 Klenotník spravil retiazku s $N > 3$ očkami pre nespokojného zákazníka, ktorý potom požiadal klenotníka aby zmenil poradie očiek tak, aby musel otvoriť maximálny počet očiek. Koľko očiek musel klenotník otvoriť?

(Rusko, MO 98/99)

1.6 Nech k a l sú prirodzené čísla také, že $nsd(k, 5) = nsd(l, 5) = nsd(k, l) = 1$ a existuje celé číslo F, pre ktoré platí

$$-k^2 + 3kl - l^2 = F^2 , \qquad nsd(F, 5) = 1.$$

Dokážte, že sústava rovníc s neznámymi x, y

$$k = x^2 + y^2$$
$$l = x^2 + 2xy + 2y^2$$

má práve dve riešenia v obore celých čísel!

(Veľká Británia, MO 99/00)

1.7 V trojuholníku ABC leží bod M na strane AB, bod N na strane BC. Označme O priesečník úsečiek CM a AN. Dokážte, že platí $|AO|+|AB|=|CO|+|CB|$, ak platí $|AM|+|AN|=|CM|+|CN|$.

(Kvant)

Druhá séria

2.1 Nájdite všetky funkcie $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ také, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$f(f(f(n)))+f(f(n))+f(n)=3n.$$

(Estónsko, MO 99/00)

2.2 Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Osi jeho vnútorných uhlov ABC a BCA pretínajú protiľahlé strany postupne v bodoch L, M. Dokážte, že $|\sphericalangle BAC| = 60°$ práve vtedy, keď vnútri strany BC existuje bod K taký, že trojuholník KLM je rovnostranný!

(Rumunsko, MO 98/99)

2.3 Nájdite všetky polynómy $P(x)$ s reálnymi koeficientami také, že pre každé reálne číslo z platí: $P(z)$ je celé číslo práve vtedy, keď z je celé číslo.

(Estónsko, MO 99/00)

2.4 Uzavretá lomená čiara zložená z piatich zhodných úsečiek dĺžky d je vpísaná do sféry s priemerom 1. Dokážte, že $d \leqq \sin 72°$.

(Bielorusko, MO 99/00)

2.5 Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n \geqq 3$ existuje n prirodzených čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ tvoriacich aritmetickú postupnosť a n prirodzených čísel $b_1, b_2, \dots, b_n$ tvoriacich geometrickú postupnosť, pričom platí $b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \dots < b_n < a_n$. Nájdite príklad takýchto postupností pre $n = 5$.

(Rumunsko, MO 98/99)

2.6 Nech $ABCDEF$ je konvexný šesťuholník taký, že $|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDE| + |\sphericalangle EFA| = 360°$. Dokážte, že ak

$$\frac{|AB|}{|BC|}\cdot\frac{|CD|}{|DE|}\cdot\frac{|EF|}{|FA|}=1,$$

potom

$$\frac{|BC|}{|CA|}\cdot\frac{|AE|}{|EF|}\cdot\frac{|FD|}{|DB|}=1.$$

(jury MMO 98)

2.7 Do jednej triedy chodí niekoľko (aspoň jeden) chlapcov a niekoľko (aspoň jedno) dievčat. Každé dievča je zaľúbené do práve jedného chlapca a každý chlapec je zaľúbený do práve jedného dievčaťa. V triede je aspoň jeden *nešťastný* chlapec, do ktorého nie je zaľúbené žiadne dievča. Dokážte, že existuje množina chlapcov N (chlapcom z N budeme hovoriť *nekúleri*), ktorá má nasledujúcu vlastnosť: chlapec je mimo N (budeme mu hovoriť *kúler*) práve vtedy, keď je doňho zaľúbené nejaké dievča také, že do nej nie je zaľúbený žiaden chlapec z N (*nekúler*).

(Rumunsko, MO 98/99)

Tretia séria

3.1 Tom a Jerry hrajú nasledovnú hru. Striedavo (Tom začína) ukladajú kamene na šachovnicu $n \times n$ (kde $n \geqq 2$). V jednom ťahu je povolené položiť kameň na ľubovoľné prázdne políčko. Hráč vyhráva, ak po jeho ťahu budú na šachovnici nejaké štyri kamene tvoriace pravouholník (presnejšie sa tým myslí, že stredy políčok, na ktorých tieto kamene ležia tvoria pravouholník) so stranami rovnobežnými so stranami šachovnice. V závislosti od n určte, kto z nich vyhrá, ak obaja hrajú na výhru!

(Bielorusko, MO 99/00)

3.2 Nech M je priesečník uhlopriečok v konvexnom štvoruholníku $ABCD$. Nech K je priesečník osi uhla ACD a polpriamky opačnej k AB. Dokážte, že ak

$$|MA| \cdot |MC| + |MA| \cdot |CD| = |MB| \cdot |MD|,$$

potom $|\sphericalangle BKC| = |\sphericalangle CDB|$.

(Bielorusko, MO 99/00)

3.3 Nech a, b sú prirodzené čísla. Rozhodnite, či platí nasledujúce tvrdenie: Ak je súčin všetkých prirodzených deliteľov čísla a rovnaký ako súčin všetkých prirodzených deliteľov čísla b, potom $a = b$. Svoju odpoveď zdôvodnite!

(Bielorusko, MO 98/99)

3.4 Nech p je prvočíslo, a n, a sú celé čísla čísla také, že $n \geqq 2$ a $p > |a|+1$. Dokážte, že polynóm $P(x) = x^n + ax + p$ nie je súčinom dvoch polynómov (stupňa aspoň 1) s celočíselnými koeficientami!

(Rumunsko, MO 98/99)

3.5 V priestore je daný mnohosten $\mathcal{P}$. Rozhodnite, či sa v $\mathcal{P}$ nachádzajú tri hrany, ktoré môžu byť stranami trojuholníka. Svoju odpoveď zdôvodnite!

(Bielorusko, MO 98/99)

3.6 Nech O, A, B, C sú body v rovine také, že $|OA| = 4$, $|OB| = 2\sqrt{3}$ a $|OC| = \sqrt{22}$. Aký maximálny obsah môže mať trojuholník ABC?

(Bielorusko, MO 98/99)

3.7 Nech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú kladné reálne čísla také, že $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$. Dokážte, že platí nerovnosť

$$\frac{1}{n-1+x_1} + \frac{1}{n-1+x_2} + \ldots + \frac{1}{n-1+x_n} \leqq 1.$$

(Bielorusko, MO 98/99)

Štvrtá séria

4.1 Do tabuľky 10×10 sú vpísané čísla $1, 2, \ldots, 100$, každé práve raz. V každom riadku vyberme tretie najväčšie číslo. Dokážte, že súčet týchto čísel nie je menší než súčet čísel v niektorom riadku!

(St. Peterburg, MO 98/99)

4.2 Daný je pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C. Vnútri neho leží bod P taký, že $|AP| = |AC|$. Nech M je stred prepony AB a H päta výšky z bodu C. Dokážte, že PM je osou uhla BPH práve vtedy, keď má uhol BAC veľkosť $60°$.

(Bielorusko, MO 98/99)

4.3 Dokážte, že neexistuje funkcia $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ taká, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí

$$f\big(f(x)\big)^2 = f(x+y)\big(f(x)+y\big).$$

(Bulharsko, MO 98/99)

4.4 Nájdite všetky prirodzené čísla n, $n \geqq 3$ také, že 2^{2000} je deliteľné číslom

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}.$$

(Čína, MO 98/99)

4.5 Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Určte množinu všetkých bodov X vnútri trojuholníka ABC takých, že

$$|XA| \cdot |XB| \cdot |AB| + |XB| \cdot |XC| \cdot |BC| + |XC| \cdot |XA| \cdot |CA| = \\ = |AB| \cdot |BC| \cdot |CA|.$$

(Čína, MO 98/99)

4.6 Nech n, $n \geqq 2$ je pevné prirodzené číslo. Nech $x_1, x_2, \dots, x_n$ sú reálne čísla také, že

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} = 1.$$

Pre dané prirodzené číslo k, $1 \leqq k \leqq n$ určte maximálnu možnú hodnotu $|x_k|$.

(Čína, MO 98/99)

4.7 Máme tri dostatočne veľké sudy a v každom z nich je celočíselný (nenulový) počet litrov vody. V jednom kroku môžeme zdvojnásobiť počet litrov vody v niektorom sude tak, že potrebné množstvo odlejeme z nejakého iného suda. Zistite, či je možné dostať po konečnom počte krokov niektorý zo sudov prázdny!

(Slovinsko, MO 99/00)

Piata séria

5.1 Postupnosť $a_1, a_2, a_3, \dots$ je definovaná nasledovne:

$$a_1 = 1, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{[n/2]}, \text{ pre } n = 2, 3, \dots .$$

Dokážte, že táto postupnosť obsahuje nekonečne veľa celých čísel, ktoré sú deliteľné 7.

(Poľsko, MO 98/99)

5.2 Daný je trojuholník ABC a na jeho stranách AB, BC a CA postupne body P, Q a R. Body A', B' a C' ležia postupne na úsečkách RP, PQ a QR, pričom $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, a $CA \parallel C'A'$. Dokážte, že pomer obsahov trojuholníkov PQR a $A'B'C'$ sa rovná pomeru dĺžok úsečiek AB a $A'B'$.

(Maďarsko, MO 98/99)

5.3 Určte, koľko dvojíc (n, q), kde n je prirodzené číslo a q je necelé racionálne číslo spĺňajúce nerovnosti $0 < q < 2000$, vyhovuje rovnici

$$\{q^2\} = \left\{ \frac{n!}{2000} \right\}.$$

(Bielorusko, MO 99/00)

5.4 Nech $f(x) = x^2 + ax + b\cos x$. Nájdite všetky reálne hodnoty a, b, pre ktoré majú rovnice $f(x) = 0$ a $f(f(x)) = 0$ rovnakú (neprázdnu) množinu reálnych koreňov!

(Rusko, MO 98/99)

5.5 a) Dokážte, že medzi každými 39 po sebe idúcimi prirodzenými číslami sa nachádza číslo s ciferným súčtom deliteľným 11.
b) Nájdite prvých 38 po sebe idúcich prirodzených čísel, z ktorých žiadne nemá ciferný súčet deliteľný 11.

(Rumunsko, MO 98/99)

5.6 Kružnice k_1, k_2 sa pretínajú vo dvoch bodoch A, B. Priamka l prechádzajúca bodom A pretína druhýkrát kružnice k_1, k_2 postupne v bodoch C, D (rôznych od A). Nech M, N sú stredy oblúkov BC, BD kružníc k_1, k_2, ktoré neobsahujú bod A. Nech K je stred úsečky CD. Dokážte, že $|\sphericalangle MKN| = 90°$.

(Rumunsko, MO 98/99)

5.7 Nech $n \geqq 3$ a $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sú body na kružnici. Pre pevné n určte najväčší možný počet ostrouhlých trojuholníkov s vrcholmi v týchto bodoch!

(Rumunsko, MO 98/99)

Riešenia súťažných úloh KS SK MO

PRVÁ SÉRIA

1.1 Rozložením výrazu a použitím AG-nerovnosti dostávame

$$\begin{aligned}x^2+4xy+4y^2+2z^2 &= x^2+2xy+2xy+4y^2+z^2+z^2 \geqq \\ &\geqq 6\sqrt[6]{x^2\cdot 2xy\cdot 2xy\cdot 4y^2\cdot z^2\cdot z^2} = 6\sqrt[6]{16(xyz)^4} = 6\sqrt[3]{4},\end{aligned}$$

kde v poslednej rovnosti sme využili $xyz=1$. Našli sme teda nejaké dolné ohraničenie nášho výrazu. Pritom rovnosť nastáva práve vtedy, keď nastáva aj v AG-nerovnosti, čiže

$$x^2=2xy=2xy=4y^2=z^2=z^2.$$

To je pre kladné x,y,z ekvivalentné s $x=z=2y$, čo vzhľadom k rovnosti $xyz=1$ dáva $x=z=\sqrt[3]{2}$ a $y=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$. Pre tieto hodnoty naozaj nastáva rovnosť, takže sa v nich nadobúda minimum, ktoré je rovné $6\sqrt[3]{4}$.

1.2 Uvažujme šesticu $(a,b,c,\alpha,\beta,\gamma)$ zo zadania. Je zrejmé, že zodpovedá nejakému nerovnoramennému trojuholníku práve vtedy, keď sú splnené podmienky:

$$\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha, \tag{P1}$$

$$\alpha,\beta,\gamma>0, \qquad \alpha+\beta+\gamma=\pi, \tag{P2}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}. \tag{P3}$$

Uvažujme funkciu $f(x)=x-\frac{\pi}{4}(\sin x+\cos x)$ na intervale $\left\langle\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right\rangle$. Zrejme $f\left(\frac{\pi}{4}\right)<$ <0, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$. Ľahko sa možno presvedčiť, že funkcia f je na tomto intervale spojitá a rastúca. Potom však určite existuje práve jedno reálne číslo $\lambda\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ také, že

$$f(\lambda)=\lambda-\frac{\pi}{4}(\sin\lambda+\cos\lambda)=0.$$

Uvažujme teraz šesticu

$$(a,b,c,\alpha,\beta,\gamma)=\left(\frac{\pi}{4},\,\lambda,\,\frac{\pi\sin\lambda}{2\sqrt{2}},\,\frac{\pi}{4},\,\frac{3\pi}{4}-\lambda,\,\lambda\right).$$

Ukážeme, že spĺňa podmienky (P1), (P2) a (P3), a teda zodpovedá nejakému nerovnoramennému trojuholníku.

Keďže $\lambda > \frac{\pi}{4}$, zrejme $\gamma \neq \alpha$. Navyše $\beta = \frac{3}{4}\pi - \lambda > \frac{\pi}{4}$, čiže $\beta \neq \alpha$. Ľahko však nahliadneme, že aj $\beta \neq \gamma$, nakoľko $\lambda \neq \frac{3}{8}\pi$, lebo $f\left(\frac{3}{8}\pi\right) \neq 0$. Druhú podmienku dokážeme ešte jednoduchšie. Zrejme totiž platí

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} - \lambda + \lambda = \pi.$$

Zostáva dokázať (P3). Postupnými úpravami dostávame:

$$\begin{aligned} b = \lambda = \frac{\pi}{4} \cdot (\cos\lambda + \sin\lambda) &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sin\frac{3}{4}\pi\cos\lambda - \sin\lambda\cos\frac{3}{4}\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sin\left(\frac{3}{4}\pi - \lambda\right)}{\sin\frac{\pi}{4}} = a \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}. \end{aligned}$$

Taktiež

$$c = \frac{\pi\sin\lambda}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2\sin\lambda}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sin\lambda}{\sin\frac{\pi}{4}} = a \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Tým sme ukázali aj (P3). Zároveň sme ukázali, že pre uvažovanú šesticu existuje zodpovedajúci nerovnoramenný trojuholník. Nakoľko táto šestica pozostávala zo štyroch rôznych čísel, zrejme $n \leqq 4$ pre n zo zadania.

Dokážeme, že $n > 3$. Je jasné, že $n \geqq 3$, lebo žiadne dve strany nemôžu byť zhodné. Navyše, bez ujmy na všeobecnosti nech $a < b < c$. Potom $\alpha < \beta < \gamma$. Predpokladajme, že $n = 3$. Aby išlo o strany a uhly v trojuholníku, nutne musí platiť

$$\frac{\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\beta}{\sin\beta}.$$

To je však spor, nakoľko $\alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$, a funkcia $g(x) = \dfrac{x}{\sin x}$ je na intervale $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ rastúca. Preto $n > 3$. Tým sme dokázali, že $n = 4$.

1.3 Polynóm p je hladkou funkciou premennej x, preto sa derivovaním ľahko presvedčíme, že je na intervale $(0, +\infty)$ konvexný. Vďaka nezápornosti koeficientov totiž platí

$$p''(x) = 2 \cdot 1 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 x + \ldots + n(n-1)a_n x^{n-2} \geqq 0.$$

Ak stupeň polynómu p je $n \geqq 2$, tak nemôže nastať rovnosť, lebo $a_n > 0$, a polynóm je teda rýdzokonvexný. Jeho graf preto musí na intervale $(4, 16)$ ležať pod úsečkou prechádzajúcou bodmi $[4, p(4)]$ a $[16, p(16)]$. Podľa zadania sú to body $[4, 2]$ a $[16, 8]$. Pritom na tejto úsečke leží aj bod $[8, 4]$, z čoho dostávame $p(8) < 4$. Pre $n \geqq 2$ je teda tvrdenie dokázané, pričom rovnosť nenastáva.

Pre $n < 2$ je dvoma bodmi polynóm jednoznačne určený, a teda jediný polynóm stupňa nanajvýš 1 vyhovujúci zadaniu je (ako ľahko overíme skúškou) $p(x) = \frac{1}{2}x$. Je zrejmé, že tento polynóm spĺňa dokazovanú nerovnosť $p(8) \leqq 4$ a navyše nastáva rovnosť.

Tým je dôkaz ukončený a jediný polynóm, pre ktorý nastáva rovnosť je $p(x) = \frac{1}{2}x$.

1.4 Ak je jedno z čísel a, b rovné 1, potom zrejme aj druhé je rovné 1. Dostávame tak riešenie $a = b = 1$. Ďalej predpokladajme, že $a, b > 1$. Zrejme $b > a$. Ak označíme $m = a^a$, $n = b$, tak $a^m = b^n$. Potom nutne musí platiť $a = x^k$, $b = x^l$, kde k, l a x sú prirodzené čísla, $k < l$, $x > 1$. Totiž ak $a = p_1^{s_1} \dots p_i^{s_i}$, $b = q_1^{t_1} \dots q_j^{t_j}$ sú kanonické rozklady čísel a, b, pričom $p_1 < \dots < p_i$, $q_1 < \dots < q_j$, tak dostávame $i = j$ a $p_k = q_k$, a tiež $s_k : t_k = n : m$ pre $k = 1, \dots, i$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $(k, l) = 1$. Ak by tak nebolo, položíme $d = (k, l)$. Potom položme $x_1 = x^d$, $k_1 = \frac{k}{d}$, $l_1 = \frac{l}{d}$. Dostaneme $a = x_1^{k_1}$, $b = x_1^{l_1}$, kde $(k_1, l_1) = 1$. Teda môžeme písať

$$(x^k)^{\left((x^k)^{x^k}\right)} = (x^l)^{x^l},$$

čo je ekvivalentné s $x^{k \cdot x^{k \cdot x^k}} = x^{l \cdot x^l}$. Vzhľadom na to, že $x \neq 1$, musí platiť $k \cdot x^{k \cdot x^k} = l \cdot x^l$. Odtiaľ $k \cdot x^{k \cdot x^k - l} = l$. Pretože $k < l$, je $k \cdot x^k - l \geqq 0$, a teda $k \mid l$. To ale znamená, že $k = 1$ a $l = x^{x-l}$. Potom $x^{x-l} = l > 1$, a teda $x - l > 0$. Ale x a l sú prirodzené čísla, takže $x - l \geqq 1$. Potom $l = x^{x-l} \geqq x$, čo je spor.

Preto jediným riešením úlohy je $a = b = 1$.

1.5 Označme $p(N)$ maximálny počet očiek, ktoré musel klenotník otvoriť a $q(N)$ minimálny počet očiek, ktoré mohol nechať zatvorené. Zrejme $p(N) = N - q(N)$. Očká pôvodnej retiazky budeme reprezentovať číslami $1, 2, \dots, N$ a ich poradie v novej retiazke nejakou postupnosťou čísel $1, 2, \dots, N$. Z každých dvoch očiek, ktoré v pôvodnej retiazke boli susedné a v novej nie sú, ako aj z každých dvoch, ktoré neboli susedné ale majú byť, musíme otvoriť aspoň jedno.

Pre $N = 4$ v retiazke $-1 - 3 - 4 - 2-$ z dvojíc $1, 3$ i $2, 4$ musíme otvoriť aspoň jedno očko, preto $p(4) \geqq 2$. Navyše pre ľubovoľné preusporiadanie v novej retiazke musí byť očko 1 susedné s aspoň jedným zo svojich susedov. Nech je to očko 2. Potom stačí otvoriť očká 3 a 4 aby sme mohli preusporiadať celú retiazku, preto $q(4) \geqq 2$. Takže $p(4) = q(4) = 2$.

Pre $N = 5$ v retiazke $-1 - 3 - 5 - 2 - 4-$ musíme z ľubovoľnej dvojice očiek aspoň jedno očko otvoriť, preto $p(5) \geqq 4$. Ale jedno očko môžeme vždy nechať zatvorené, takže $p(5) = 4$.

Pre $N \geqq 6$ najprv ukážme, že $q(N) \leqq \lceil \frac{N}{4} \rceil$, čiže zákazník si mohol zaželať takú retiazku, že klenotník mohol nechať zatvorených najviac $\lceil \frac{N}{4} \rceil$ očiek. Rozdeľme očká retiazky na za sebou idúce štvorice a jednu 1-, 6- alebo 7-ticu. Vrámci týchto skupín zvoľme si nové poradie takto:

- štvorica $-(k+2) - (k+4) - (k+1) - (k+3)-$; môžeme neotvoriť najviac jedno očko, pretože ľubovoľné dve musíme buď spojiť alebo rozpojiť;
- šestica $-(k+2) - (k+4) - (k+6) - (k+3) - (k+1) - (k+5)-$; môžeme neotvoriť najviac jedno z očiek $k+1$, $k+2$, $k+3$ resp. $k+4$, $k+5$, $k+6$, spolu teda maximálne dve očká;

- sedemtica: $-(k+2)-(k+7)-(k+1)-(k+4)-(k+6)-(k+3)-(k+5)-$; môžeme neotvoriť najviac jedno z očiek $k+1$, $k+2$, $k+7$ resp. $k+3$, $k+4$, $k+5$, $k+6$, spolu teda maximálne dve očká

Máme teda za každú i neúplnú štvoricu očiek najviac jedno neotvorené očko, takže môžeme neotvoriť najviac $\lceil \frac{N}{4} \rceil$ očiek.

Teraz dokážme, že $q(N)=\lceil \frac{N}{4} \rceil$, čiže vždy môžme nechať aspoň $\lceil \frac{N}{4} \rceil$ očiek zatvorených. Otvorme najprv všetky nepárne očká. Retiazka sa rozpadne na $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ očiek, ktoré by ale v novej retiazke mohli byť spojené, určite však nie do kruhu, preto z týchto stačí otvoriť $\lfloor \frac{1}{2} \lfloor \frac{N}{2} \rfloor \rfloor$ očiek (každé druhé). Ostalo nám $\lceil \frac{1}{2} \lfloor \frac{N}{2} \rfloor \rceil$ očiek, čo sa pre N rôzne od $4k+1, k \in \mathbb{N}$ rovná $\lceil \frac{N}{4} \rceil$. Pre N tvaru $4k+1$ ($k \in \mathbb{N}$) je $\lceil \frac{1}{2} \lfloor \frac{N}{2} \rfloor \rceil = \lceil \frac{N}{4} \rceil - 1$, takže $\lceil \frac{N}{4} \rceil - 1 \leqq q(N) \leqq \lceil \frac{N}{4} \rceil$. Aby sme dokázali, že aj v tomto prípade $q(N)=\lceil \frac{N}{4} \rceil$, potrebujeme postup pozmeniť. Túto časť dôkazu prenechávame čitateľovi.

Hľadaný počet očiek je teda $p(N)=N-\lceil \frac{N}{4} \rceil = \lfloor \frac{3N}{4} \rfloor$.

1.6 Je zrejmé, že ak je riešením sústavy usporiadaná dvojica (x,y), tak je jej riešením aj dvojica $(-x,-y)$. Ak by bolo $(x,y)=(0,0)$, potom dostávame $k=l=0$, čo je spor s predpokladom $nsd(k,5)=1$ (takto budeme označovať najväčšieho spoločného deliteľa). V opačnom prípade sú usporiadané dvojice (x,y) a $(-x,-y)$ rôzne.

Teraz sa pokúsime vyriešiť našu sústavu. Dosadením z prvej rovnice do druhej dostávame $l=k+y^2+2xy$. Na pravej strane osamostatníme člen $2xy$ a umocníme na druhú:

$$l^2+k^2+y^4-2kl-2ly^2+2ky^2=4x^2y^2.$$

Po dosadení $x^2=k-y^2$ a drobnej úprave máme

$$5y^4-2y^2(k+l)+(k-l)^2=0,$$

čo je kvadratická rovnica pre y^2. Ľahko vypočítame jej diskriminant $D=16(-k^2+ +3kl-l^2)=16F^2 \geqq 0$. To znamená, že

$$5y^2=(k+l)\pm 2F. \tag{1}$$

Potom z prvej a druhej rovnice vypočítame

$$5x^2=4k-l\mp 2F, \tag{2}$$
$$5xy=2l-3k\mp F, \tag{3}$$

pričom ak je v (1) znamienko $+$, tak je v (2) a (3) znamienko $-$ a obrátene.

Teraz dokážeme, že len pri jednej voľbe znamienka dostaneme na pravých stranách rovníc (1), (2), (3) čísla deliteľné 5. Vyjdeme z rovnosti

$$5kl=F^2+(k+l)^2. \tag{4}$$

Uvažujme zvyšky čísla F po delení 5. Podľa zadania nemôže byť $F\equiv 0 \pmod 5$. V prípade $F\equiv \pm 1 \pmod 5$ je $F^2\equiv 1 \pmod 5$ a zo vzťahu (4) vyplýva $(k+l)\equiv 4$

(mod 5), a teda $k + l \equiv \pm 2 \pmod 5$. Vidíme, že ak máme dané čísla k, l, F, tak pri jedinej voľbe znamienka bude číslo $k + l \pm 2F$ deliteľné 5. Zrejme sú potom aj čísla $4k - l \mp 2F$ a $2l - 3l \mp F$ deliteľné 5. Analogicky to platí ak $F \equiv \pm 2 \pmod 5$; vtedy $k+l \equiv \pm 1 \pmod 5$. Tým sme dokázali, že naša sústava pre neznáme x^2, y^2, má v obore celých čísel jedno riešenie a z úvah v prvom odseku vyplýva, že naša pôvodná sústava s neznámymi x, y môže mať v obore celých čísel maximálne dve riešenia.

Teda vieme, že pri vhodnej voľbe znamienka sú čísla $\frac{1}{5}(k + l \pm 2F)$ a $\frac{1}{5}(4k - l \mp 2F)$ celé. Dokážeme, že sú naviac štvorcami. Z (1), (2), (3) dostávame identitu

$$\left(\frac{k + l \pm 2F}{5}\right)\left(\frac{4k - l \mp 2F}{5}\right) = \left(\frac{2l - 3k \mp F}{5}\right)^2. \tag{5}$$

Z podmienky zadania vyplýva, že ak $k = l$, tak nutne $k = l = 1$. V prípade $k = l = 1$ dostávame $F = \pm 1$. Zvoľme $F = 1$; prípad $F = -1$ je analogický. Potom v (1) dostávame pravú stranu deliteľnú 5, len ak zvolíme znamienko $-$. Potom $y = 0$ a $x = \pm\pm 1$. Ľahko overíme, že tieto dvojice sú naozaj riešením sústavy. Ďalej nech $k \neq l$. Potom platí nerovnosť $5(k - l)^2 > 0$, z ktorej vyplýva $(k + l)^2 > 4F^2$, a teda $k + l > \mp 2F$. Naviac z (5) dostávame, že $4k - l \mp 2F \geqq 0$.

Teraz nech c je také prirodzené číslo, ktoré nie je deliteľné 5 a zároveň sú ním deliteľné čísla $k+l\pm 2F$ a $4k-l\mp 2F$. Ukážeme, že $c = 1$. Zrejme $c = (k+l\pm 2F+4k-l\mp 2F) = 5k$. Potom ale $c \mid k$. Odtiaľ $c \mid (l \pm 2F)^2 = l^2 \pm 4lF + 4(-k^2 + 3kl - l^2) = -3l^2 \pm 4lF + 4k(-k + 3l)$. Teda platí aj $c \mid (3l^2 \mp 4lF) = l(2l \mp 4F)$. Vzhľadom na podmienku $nsd(k, l) = 1$ musí platiť $c \mid (3l \mp 4lF)$, a teda aj $c \mid \bigl(3l \mp 4lF + 2(l \pm 2F)\bigr) = 5l$. Avšak kvôli podmienkam zadania musí byť $c = 1$.

Vráťme sa teraz k rovnosti (5). Zlomky v zátvorkách sú (ako už vieme) celými číslami. Naviac sme práve dokázali, že čísla na ľavej strane sú nesúdeliteľné. To znamená, že musia byť štvorcami. Takže z (1) a (2) vyplýva, že čísla x, y sú (pri vhodnej voľbe znamienka) celé. Ľahko sa skúškou (s využitím (5)) overí, že sú naozaj riešeniami našej sústavy. Tým sme dokázali, že naša sústava má v obore celých čísel dve riešenia.

1.7 *(Katarína Quittnerová, Andrej Osuský)* Rozobraním špeciálnych prípadov, že nejaké z bodov M, N ležia na koncoch strán AB a BC zistíme, že v nich tvrdenie úlohy platí.

Teraz predpokladajme, že body M, N ležia vnútri dotyčných strán a označme uhly ako na obrázku.

Použitím *sínusových viet* v trojuholníkoch ABC, CAO, CAN, CAM dostaneme vzťahy

$$|AB| = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \cdot |AC|, \qquad |BC| = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \cdot |AC|,$$
$$|AO| = \frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma+\delta)} \cdot |AC|, \qquad |CO| = \frac{\sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)} \cdot |AC|,$$

$$|CN| = \frac{\sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)}\cdot|AC|, \qquad |AN| = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\delta)}\cdot|AC|,$$
$$|AM| = \frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma+\beta)}\cdot|AC|, \qquad |CM| = \frac{\sin\beta}{\sin(\gamma+\beta)}\cdot|AC|.$$

Takže rovnosť zo zadania $|AM|+|AN|=|CM|+|CN|$ je ekvivalentná s

$$\frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma+\beta)}+\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\delta)}=\frac{\sin\beta}{\sin(\gamma+\beta)}+\frac{\sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)},$$

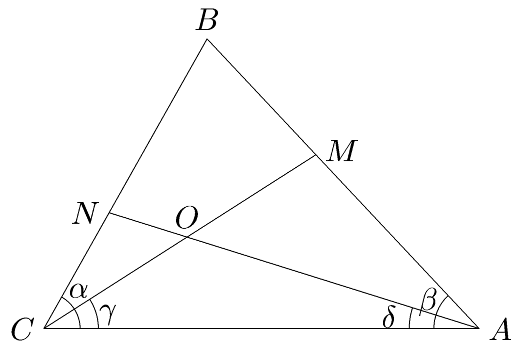
čo upravíme na

$$\frac{\sin\gamma-\sin\beta}{\sin(\gamma+\beta)}=\frac{\sin\delta-\sin\alpha}{\sin(\alpha+\delta)}.$$

Použitím súčtových vzorcov dostávame

$$\frac{2\cdot\cos\frac{\gamma+\beta}{2}\sin\frac{\gamma-\beta}{2}}{2\cdot\sin\frac{\gamma+\beta}{2}\cos\frac{\gamma+\beta}{2}}=\frac{2\cdot\cos\frac{\delta+\alpha}{2}\sin\frac{\delta-\alpha}{2}}{2\cdot\sin\frac{\delta+\alpha}{2}\cos\frac{\delta+\alpha}{2}}.$$

Keďže všetky zúčastnené uhly sú nejaké uhly v trojuholníku, tak v menovateľoch nie sú nuly; môžme krátiť a prenásobiť rovnosť tak, aby sme odstránili zlomky.



Obr. 33

Opätovným použitím súčtových vzorcov dostaneme po úprave

$$\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\delta}{2}=\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\delta}{2}. \qquad (*)$$

Táto posledná rovnosť je ekvivalentná s pôvodnou rovnosťou $|AM|+|AN|=|CM|+|CN|$, lebo sme použili všade len ekvivalentné úpravy.

Analogicky by sme došli na to, že rovnosť $|AO|+|AB|=|CO|+|CB|$ je ekvivalentná takisto s rovnosťou $(*)$ (stačí všade v úpravách písať β namiesto δ a δ namiesto β).

No a to je už úplný záver, lebo potom skutočne platí, že rovnosti v zadaní sú ekvivalentné.

Druhá séria

2.1 Najprv ukážeme, že f je prostá funkcia. Nech $f(a) = f(b)$. Potom

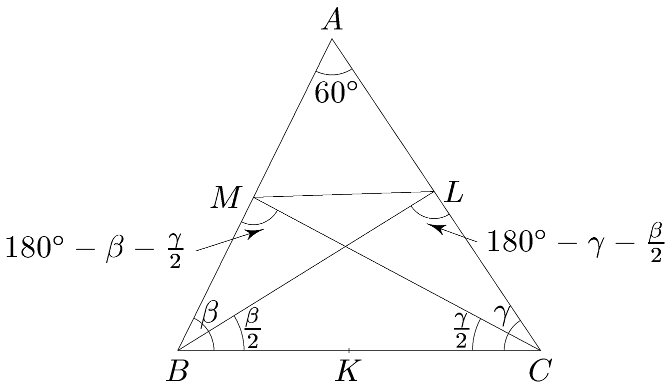
$$3a = f(a) + f(f(a)) + f(f(f(a))) = f(b) + f(f(b)) + f(f(f(b))) = 3b,$$

a teda $a = b$. Teraz dokážeme matematickou indukciou, že platí $f(n) = n$ pre každé $n = 1, 2, \dots$. Pre $n = 1$ máme $f(1) + f(f(1)) + f(f(f(1))) = 3$. Ale všetky čísla na ľavej strane rovnice sú prirodzené, a teda nutne $f(1) = 1$. Predpokladajme, že platí $f(k) = k$ pre všetky $k = 1, 2, \dots, n$. Dokážeme, že platí $f(n+1) = n+1$. Keďže f je prostá funkcia, tak pre všetky prirodzené čísla $l \geqq n+1$ platí $f(l) \geqq n+1$. Teda $f(n+1) \geqq n+1$. Analogicky $f(f(n+1)) \geqq n+1$ a tiež $f(f(f(n+1))) \geqq n+1$. Sčítaním týchto troch nerovností dostávame

$$3(n+1) = f(n+1) + f(f(n+1)) + f(f(f(n+1))) \geqq 3(n+1).$$

Preto musí v každej z vyššie uvedených nerovností platiť rovnosť, a teda aj $f(n+1) = n+1$. Tým sme dokázali, že pre všetky n prirodzené platí $f(n) = n$.

2.2 *(Andrej Osuský)* Máme dokázať dve implikácie. Označme uhly v trojuholníku tradične α, β, γ.



Obr. 34

Nech $\alpha = 60°$. Zo sínusovej vety v trojuholníkoch BCM a BCL vyplýva

$$|BM| = |BC| \cdot \frac{\sin|\sphericalangle BCM|}{\sin|\sphericalangle BMC|} = |BC| \cdot \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin(180° - \beta - \frac{\gamma}{2})},$$

$$|CL| = |BC| \cdot \frac{\sin|\sphericalangle CBL|}{\sin|\sphericalangle BLC|} = |BC| \cdot \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin(180° - \gamma - \frac{\beta}{2})}.$$

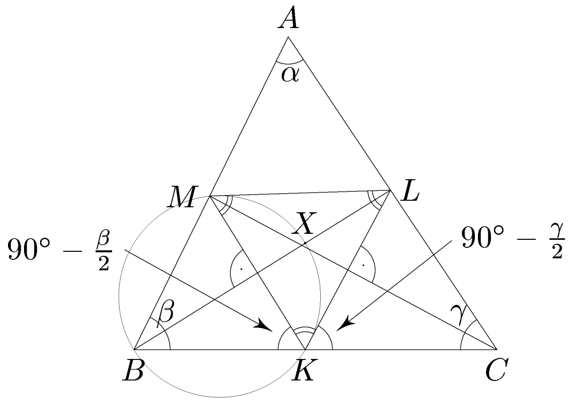
Dosadením $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 120° - \beta$ dostávame:

$$|BM| + |CL| = |BC| \cdot \left(\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin(60° + \frac{\beta}{2})} + \frac{\sin(60° - \frac{\beta}{2})}{\sin(120° - \frac{\beta}{2})} \right) = |BC| \cdot \frac{\sin\frac{\beta}{2} + \sin(60° - \frac{\beta}{2})}{\sin(60° + \frac{\beta}{2})} =$$

$$= |BC| \cdot \frac{\sin\frac{\beta}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{\beta}{2}} = |BC|.$$

Potom vnútri úsečky BC existuje bod K taký, že $|BK| = |BM|$ a $|CK| = |CL|$.

Trojuholníky BLM a BLK sú zhodné (lebo $|BL| = |BL|$, $|BK| = |BM|$, $|\sphericalangle LBM| = |\sphericalangle LBK| = \frac{\beta}{2}$), a teda trojuholník MKL je rovnoramenný so základňou MK. Z toho vyplýva $|\sphericalangle MKL| = |\sphericalangle KML|$. Analogicky dokážeme aj $|\sphericalangle LKM| = |\sphericalangle KLM|$. Ale to znamená, že trojuholník KLM je rovnostranný. Tým sme našli bod K.



Obr. 35

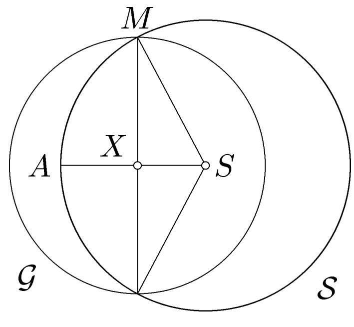
Naopak, nech vnútri úsečky BC existuje taký bod K, že trojuholník KLM je rovnostranný.

Nech os uhla KBM pretne kružnicu opísanú trojuholníku BKM v bode X (okrem B). Potom (ako je známe) X je stred kratšieho oblúka KM, takže $|XK| = |XM|$. Keďže súčasne $|LK| = |LM|$, štvoruholník $KLMX$ je deltoid, v ktorom $\overleftrightarrow{XL} \perp \overleftrightarrow{KM}$, to jest $\overleftrightarrow{BL} \perp \overleftrightarrow{KM}$.

Analogicky potom $\overleftrightarrow{CM} \perp \overleftrightarrow{KL}$. Potom $180° = |\sphericalangle BKM| + |\sphericalangle MKL| + |\sphericalangle CKL| = (90° - \frac{\beta}{2}) + 60° + (90° - \frac{\gamma}{2}) = 150° + \frac{180°-\beta-\gamma}{2} = 150° + \frac{\alpha}{2}$, z čoho priamo vyplýva $\alpha = 60°$.

2.3 *(Katarína Quittnerová)* Označme si hľadaný polynóm $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$. Zrejme konštantné polynómy nevyhovujú, lebo napr. $P(1) = P(\frac{1}{2})$ by muselo aj nesmelo byť celé číslo (lebo $\frac{1}{2}$ nie je celé číslo). Je zrejmé, že ak vyhovuje zadaniu polynóm $P(x)$, tak vyhovuje aj $-P(x)$. Stačí preto uvažovať iba polynómy také, že $a_n > 0$ a $n \geqq 1$. Pre takýto polynóm existuje prirodzené číslo M také, že $P(x)$ je na intervale $\langle M, \infty)$ rastúca funkcia. Teda platí $P(M+1) > P(M)$. Ďalej pre ľubovoľné $m \in \mathbb{N}$ je podľa zadania číslo $P(m)$ celé. Ak by pre nejaké prirodzené $m > M$ platilo $P(m+1) \geqq P(m) + 2$, tak potom by zo spojitosti a rastúcosti polynómu vyplývala existencia takého reálneho čísla x_0, pre ktoré platí: $m < x_0 < m+1$ a zároveň $P(x_0) = P(m) + 1$, čo je ale spor so zadaním, pretože x_0 nie je celé číslo, ale $P(m)+1$ je celé číslo. Preto $P(m+1) = P(m) + 1$, a podobne matematickou indukciou ľahko odvodíme, že platí $P(m+k) = P(m) + k$ pre každé $k \in \mathbb{N}$. Teda pre všetky prirodzené $m > M$ platí $P(m) = m + (P(M) - M)$. Pretože je polynóm stupňa n jednoznačne určený hodnotami v $n+1$ bodoch a my máme predpis pre nekonečne veľa bodov, stačí nájsť jeden polynóm vyhovujúci poslednej rovnosti. Ľahko nahliadneme, že riešením poslednej rovnosti je polynóm $P(x) = x + c$, kde $c \in \mathbb{Z}$. Tento polynóm, podobne ako $P(x) = -x + c$ spĺňa všetky podmienky zadania. Preto riešením úlohy sú všetky polynómy tvaru $P(x) = \pm x + c$ pričom c je ľubovolné celé číslo.

2.4 Označme body zlomu uvažovanej lomenej čiary A, B, C, D a E v poradí v akom sa na nej nachádzajú, teda $|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EA| = d$, Ďalej označme $\mathcal{S}$ sféru, na ktorej tieto body ležia a nech S je jej stred. Tvrdenie dokážeme sporom. Nech teda $d > \sin 72°$. Kružnica opísaná trojuholníku ABC je rezom sféry $\mathcal{S}$ rovinou ABC, jej priemer p je teda nanajvýš 1. Zo sínusovej vety dostaneme použitím $|AB| = d$ vzťah



$$\sin |\sphericalangle ACB| = \frac{d}{|AB|} = \frac{d}{p} > \sin 72°.$$

Obr. 36

Z toho je už zrejmé, že $|\sphericalangle ACB| > 72°$. Navyše je trojuholník ABC rovnoramenný ($|AB| = |BC|$), preto $|\sphericalangle ABC| = 180° - 2|\sphericalangle ACB| < 36°$ a následne (zase zo sínusovej vety)

$$|AC| = p \cdot \sin |\sphericalangle ABC| \leqq \sin |\sphericalangle ABC| < \sin 36°.$$

Obdobne možno v trojuholníku AED ukázať, že $|AD| < \sin 36°$. Potom sa však dostávame k spornému $|CD| < \sin 72°$, čo sa dá nahliadnuť z toho, že body C a D ležiace na sfére $\mathcal{S}$ vzdialené od bodu A o menej než $\sin 36°$ ležia vnútri gule $\mathcal{G}$, ako to ukazuje obrázok. (Guľa ohraničená sférou $\mathcal{G}$ má stred X na úsečke SA, pričom platí $|SX| : |SA| = \cos 72°$, a priemer $\sin 72°$. Ľahko vypočítame, že pre bod M patriaci prieniku sféry $\mathcal{S}$ a sféry $\mathcal{G}$ platí $|AM| = \sin 36°$.)

2.5 Uvažujme prirodzené číslo k také, že $10^k > n \cdot n!$ a položme

$$a_i = 10^{kn} + (i+1) \cdot 10^{k(n-1)}, \qquad b_i = 10^{k(n-i)}\bigl(10^k + 1\bigr)^i$$

pre všetky prirodzené čísla $i \leqq n$. Zrejme tvoria rastúcu aritmetickú, resp. geometrickú postupnosť; ukážeme ešte, že spĺňajú podmienky zadania. Najprv dokážeme, že pre všetky i je splnená podmienka $a_i > b_i$. Postupnými úpravami dostávame

$$b_i = 10^{k(n-i)}\bigl(10^k + 1\bigr)^i =$$

$$= 10^{k(n-i)}\left(10^{ki} + \binom{i}{1}10^{k(i-1)} + \binom{i}{2}10^{k(i-2)} + \ldots + \binom{i}{i-1}10^k + 1\right) =$$

$$= 10^{kn} + i \cdot 10^{k(n-1)} + \binom{i}{2}10^{k(n-2)} + \ldots + \binom{i}{i-1}10^{k(n+1-i)} + 10^{k(n-i)} \qquad (1)$$

Členy (okrem prvých dvoch) vo výraze možno pritom ešte upraviť

$$\binom{i}{2} \cdot 10^{k(n-2)} + \ldots + \binom{i}{i-1} \cdot 10^{k(n+1-i)} + 10^{k(n-i)} <$$

$$< i! \cdot \left(10^{k(n-2)} + \ldots + 10^{k(n-i)}\right) < i! \cdot i \cdot 10^{k(n-2)} \leqq n! \cdot n \cdot 10^{k(n-2)} <$$

$$< 10^k \cdot 10^{k(n-2)} = 10^{k(n-1)},$$

pričom v predposlednej úprave sme použili predpoklad $n\cdot n! < 10^k$. Potom z (1) vyplýva

$$b_i < 10^{kn} + i\cdot 10^{k(n-1)} + 10^{k(n-1)} = 10^{kn} + (i+1)\cdot 10^{k(n-1)} = a_i$$

Tým sme dokázali vzťah $b_i < a_i$ (formálne len pre $i \geqq 2$, avšak $b_1 = 10^{kn} + 10^{k(n-1)} < < 10^{kn} + 2\cdot 10^{k(n-1)} = a_1$ triviálne platí). Ukážeme ešte $a_i < b_{i+1}$. Prepíšeme pritom vzťah (1) pre b_{i+1}.

$$\begin{aligned} b_{i+1} = 10^{kn} + (i+1)\cdot 10^{k(n-1)} + \binom{i+1}{2}\cdot 10^{k(n-2)} + \\ + \ldots + \binom{i+1}{i}\cdot 10^{k(n-i)} + 10^{k(n-i-1)} > \\ > 10^{kn} + (i+1)\cdot 10^{k(n-1)} = a_i \end{aligned}$$

Vzťah $b_{i+1} > a_i$ je teda tiež dokázaný, a preto uvedené postupnosti skutočne vyhovujú podmienkam zadania.

Ešte uvedieme príklad postupnosti pre $n = 5$. Zvoľme

$$\begin{aligned} a_1 &= 33, & a_2 &= 70, & a_3 &= 107, & a_4 &= 144, & a_5 &= 181,\\ b_1 &= 32, & b_2 &= 48, & b_3 &= 72, & b_4 &= 108, & b_5 &= 162. \end{aligned}$$

Prvá postupnosť je aritmetická s diferenciou 37, druhá geometrická s kvocientom $\frac{3}{2}$.

2.6 Označme si P taký bod, pre ktorý platí $|\sphericalangle FEA| = |\sphericalangle DEP|$ a $|\sphericalangle EFA| = |\sphericalangle EDP|$, kde dané uhly sú *orientované* (táto formulka znamená, že uhly vyzerajú tak ako na obrázku). Potom vidíme, že trojuholníky FEA a DEP sú podobné. Teda

$$\frac{|FA|}{|EF|} = \frac{|DP|}{|DE|}, \tag{1}$$

$$\frac{|EA|}{|EP|} = \frac{|EF|}{|ED|}. \tag{2}$$

Keďže platí $|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDE| + |\sphericalangle EFA| = 360°$ tak potom $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle PDC|$. Použitím (1) a rovnosti zo zadania dostaneme

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|\cdot|FA|}{|CD|\cdot|EF|} = \frac{|DP|}{|CD|}.$$

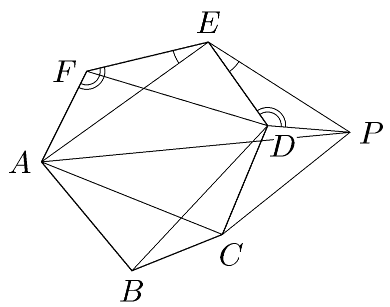
To ale znamená, že trojuholníky ABC a PDC sú podobné, a teda $|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle DCP|$ a tiež

$$\frac{|CB|}{|CD|} = \frac{|CA|}{|CP|}. \tag{3}$$

Keďže $|\sphericalangle FED| = |\sphericalangle AEP|$ a platí (2), tak trojuholníky FED a AEP sú podobné. Podobne, keďže $|\sphericalangle BCD = |\sphericalangle ACP|$ a platí (3), tak trojuholníky BCD a ACP sú tiež podobné. Teda

$$\frac{|FD|}{|EF|} = \frac{|PA|}{|AE|}, \qquad \frac{|BC|}{|DB|} = \frac{|CA|}{|PA|}.$$

Keď vynásobíme tieto rovnice, dostaneme požadované tvrdenie.



Obr. 37

2.7 Označme C množinu chlapcov a D množinu dievčat. Uvažujme funkcie $f : C \to D$ a $g : D \to C$, pričom pre chlapca $x \in C$ je $f(x)$ dievča, do ktorého je zaľúbený x a pre dievča $y \in D$ je $g(y)$ chlapec, do ktorého je y zaľúbená. Podľa zadania nie je funkcia g surjektívna (čiže jej oborom hodnôt nie je celá množina C). Máme dokázať, že existujú množiny K (*kúleri*) a N (*nekúleri*), pričom $C = K \cup N$, $K \cap N = \emptyset$ a platí $K = g(D \setminus f(N))$.

Označme $\mathcal{P}(C)$ systém všetkých podmnožín množiny C a uvažujme zobrazenie $h : \mathcal{P}(C) \to \mathcal{P}(C)$ definované nasledovne: $h(X) = C \setminus g(D \setminus f(X))$ pre každú množinu $X \in \mathcal{P}(C)$, t.j. $X \subseteq C$. Ak $X \subseteq Y \subseteq C$, potom $f(X) \subseteq f(Y)$, a teda $D \setminus f(Y) \subseteq D \setminus f(X)$, $g(D \setminus f(Y)) \subseteq g(D \setminus f(X))$ a $C \setminus g(D \setminus f(X)) \subseteq C \setminus g(D \setminus f(Y))$. Takže $h(X) \subseteq h(Y)$. To znamená, že funkcia h je neklesajúca (vzhľadom na inklúziu).

Označme $\mathcal{M} = \{X \in \mathcal{P}(C) : h(X) \subseteq X\}$. Množina $\mathcal{M}$ je neprázdna, lebo zrejme $C \in \mathcal{M}$. Zvoľme

$$N = \bigcap_{X \in \mathcal{M}} X.$$

Z definície množiny N vyplýva, že $h(N) \subseteq N$. Potom z neklesajúcosti h máme $h(h(N)) \subseteq h(N)$, takže $h(N) \in \mathcal{M}$. Potom ale nutne $h(N) = N$. Takže množina N spĺňa podmienky zadania.

Tretia séria

3.1 *(Andrej Osuský)* Osobitne rozoberieme prípady podľa toho, či n je párne alebo nepárne.

1) Pre párne n nájdeme stratégiu pre Jerryho. V každom ťahu bude postupovať takto:

Keď Tom položí kamienok na nejaké políčko P, potom Jerry buď doplní pravouholník (ak sa dá), čím vyhrá; alebo položí kamienok do riadku obsahujúceho políčko P a do ľubovoľného prázdneho stĺpca.

Ukážeme, že takto hrať skutočne môže, a že vyhrá. Ak Tom vždy položí kamienok do prázdneho stĺpca, potom aj Jerry položí kamienok do prázdneho stĺpca — pokiaľ existuje. V každom stĺpci tak bude najviac jeden kamienok, teda iste nikto nemôže doplniť pravouholník. Lenže počet prázdnych stĺpcov je vždy pred Tomovým ťahom párny (na začiatku n), takže Jerry bude mať kam potiahnuť, a zase tým upraviť počet prázdnych stĺpcov na párny.

To znamená, že Tom raz potiahne ako prvý a po prvý krát do neprázdneho stĺpca. V tomto stĺpci nech je okrem Tomovho ťahu A ešte aj kamienok B, $B \neq A$. V ostatných stĺpcoch je najviac jeden kamienok (teda Tom týmto ťahom iste nevyhrá). Lenže podľa z Jerryho stratégie vyplýva, že v riadku s kamienkom B musí byť ešte aspoň jeden kamienok C, $C \neq B$. Jerry teraz potiahne tak, aby doplnil pravouholník $ABCD$ a vyhral.

2) Pre nepárne n nájdeme stratégiu pre Toma.

Na začiatku Tom položí kamienok na stredné políčko S šachovnice (keďže n je nepárne, tak také tam je). Ďalej hrá takto: Keď Jerry položí kamienok na nejaké políčko P (zrejme $P \neq S$), potom Tom buď doplní pravouholník (ak sa dá); alebo položí kamienok na políčko P' stredovo súmerné s P podľa stredu šachovnice.

Zase ukážeme, že takto hrať môže, a že aj vyhrá. Nazvime *zlým*, také políčko, že keď hráč naňho položí kamienok, tak nasledujúcim ťahom protihráč vyhrá.

Dajme tomu, že Tom nemôže doplniť pravouholník, potom Jerry (nikdy) nepotiahol do *zlého* políčka. Lenže po každom doterajšom Tomovom ťahu je množina zaplnených políčok stredovo súmerná podľa stredu šachovnice, teda iste aj množina *zlých* políčok je súmerná podľa stredu šachovnice. Keďže posledný Jerryho ťah bol na nie *zlé* (a prázdne) políčko, iste aj políčko, kam má potiahnuť Tom je nie *zlé* a prázdne.

Teda Tom bude mať stále kam potiahnuť tak, aby neprehral. Lenže šachovnica je konečná, teda raz pravouholník vzniknúť musí (keďže $n \geqq 2$). Keďže Tom nemôže prehrať, musí ho vytvoriť on. Tým teda vyhrá.

3.2 *(Andrej Osuský)* Trojuholníku BCD opíšeme kružnicu k. Ukážeme, že $K \in k$. Nech polpriamka MA pretne kružnicu v bode X. Využitím mocnosti bodu M ku kružnici k dostaneme

$$|MB| \cdot |MD| = |MC| \cdot |MX|.$$

Rovnosť zo zadania prepíšeme a upravíme:

$$\begin{aligned} |MA|\cdot|MC| + |MA|\cdot|CD| = |MB|\cdot|MD| &= |MC|\cdot|MX|, \\ |MA|\cdot|CD| &= |MC|\cdot(|MX|-|MA|), \\ |MA|\cdot|CD| &= |MC|\cdot|AX|. \end{aligned} \tag{1}$$

Z podobnosti trojuholníkov MCD a MBX (veta uu) vyplýva

$$\frac{|MC|}{|CD|} = \frac{|MB|}{|BX|}.$$

Dosadením (1) do tohto vzťahu dostaneme

$$\frac{|MA|}{|AX|} = \frac{|MB|}{|BX|}.$$

To znamená, že BA je os uhla MBX. Os uhla delí opísanú kružnicu na dva zhodné kružnicové oblúky. Preto sa priamky BK a CK pretínajú v polovici oblúka DX a $K \in k$. Potom už z vety o obvodových uhloch vyplýva tvrdenie zo zadania.

3.3 Tvrdenie zo zadania platí. Predpokladajme, že súčiny všetkých prirodzených deliteľov čísel a a b sú rovnaké. Zrejme súčin deliteľov nejakého čísla je deliteľný práve tými prvočíslami, akými je deliteľné toto číslo. Teda a aj b sú deliteľné rovnakými prvočíslami. Nech teda prvočíselné rozklady čísel a, b sú $a = p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}$, $b = p_1^{\beta_1}\dots p_k^{\beta_k}$, pričom $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{N}$. Počítajme exponent prvočísla p_1 v súčine deliteľov a. Ten sa zrejme rovná súčtu exponentov p_1 v jednotlivých deliteľoch. Zrejme p_1 má exponent λ ($0 \leqq \lambda \leqq \alpha_1$) práve v $(\alpha_2+1)\dots(\alpha_k+1)$ deliteľoch. Spolu je teda súčet exponentov

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^{\alpha_1} \lambda(\alpha_2+1)\dots(\alpha_k+1) = (\alpha_2+1)\dots(\alpha_k+1)\cdot\sum_{\lambda=1}^{\alpha_1}\lambda = \\ = (\alpha_2+1)\dots(\alpha_k+1)\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{2} = \frac{\alpha_1}{2}\tau(a), \end{aligned}$$

kde $\tau(a) = (\alpha_1+1)\dots(\alpha_k+1)$ je počet deliteľov a. Zrejme analogicky p_i má v súčine deliteľov a exponent $\frac{1}{2}\alpha_i\tau(a)$, $i = 1, 2, \dots, k$. A analogicky má p_i v súčine deliteľov b exponent $\frac{1}{2}\beta_i\tau(b)$. A keďže sa súčiny rovnajú, tak aj jednotlivé exponenty sa rovnajú, takže

$$\frac{\alpha_i}{2}\tau(a) = \frac{\beta_i}{2}\tau(b), \qquad i = 1, 2, \dots, k.$$

Po úprave máme

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \dots = \frac{\alpha_k}{\beta_k} = \frac{\tau(a)}{\tau(b)} = q.$$

Ak $q < 1$, tak $\alpha_i < \beta_i$ pre $i = 1, \dots, k$, čiže aj

$$\tau(a) = (\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_k + 1) < (\beta_1 + 1) \dots (\beta_k + 1) = \tau(b).$$

Z toho ale $q = \tau(b)/\tau(a) > 1$, čo je spor. Podobne dôjdeme k sporu, ak $q > 1$. Nutne teda $q = 1$, a teda $\alpha_i = \beta_i$ pre $i = 1, \dots, k$, čiže $a = b$. Tým je riešenie hotové.

3.4 Najprv ukážme, že ak z je komplexný koreň polynómu $p(x)$, tak $|z| > 1$. Predpokladajme, že $|z| \leqq 1$. Keďže $z^n + az = -p$, tak

$$p = |-p| = |z^n + az| \leqq |z^n| + |a| \cdot |z| \leqq 1 + |a|,$$

čo je spor s predpokladom $p > |a| + 1$.

Nech $p(x) = g(x) \cdot h(x)$ je rozklad polynómu $p(x)$ na súčin polynómov s celočíselnými koeficientami. Potom $p = g(0)h(0)$; pretože p je prvočíslo, $|g(0)| = 1$ alebo $|h(0)| = 1$. Nech $|g(0)| = 1$. Ak $z_1, z_2, \dots, z_k$ sú korene $g(x)$, sú koreňmi aj $p(x)$ a platí

$$1 = |g(0)| = |z_1 z_2 \dots z_k| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_k| > 1,$$

čo je opäť spor. Preto $g(x)$ je konštantne 1 alebo -1, a teda polynóm $p(x)$ sa nedá písať ako súčin dvoch celočíselných polynómov.

3.5 Dôkaz urobíme sporom. Nech existuje taký mnohosten $\mathcal{P}$, že žiadne tri jeho hrany nemôžu byť stranami nejakého trojuholníka. Označme si dĺžky všetkých hrán $a_1, a_2, \dots, a_n$ tak, aby $a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n$. Zrejme $n \geqq 4$. Ukážeme matematickou indukciou, že platí $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-3} \leqq 2a_n$.

1° Pre $n = 4$ zrejme platí $a_1 \leqq a_4$.

2° Nech tvrdenie platí pre k, t.j. $a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-3} \leqq a_k$. Potom

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-3} + a_{k-2} \leqq a_k + a_{k-2} \leqq a_{k-1} + a_k \leqq a_{k+1},$$

pretože $a_{k-1} \leqq a_k \leqq a_{k+1}$, a ani tieto 3 hrany nesmú byť stranami nejakého trojuholníka. Tým sme urobili druhý, indukčný krok.

Podobne aj pre a_{n-2}, a_{n-1}, a_n vieme, že aj $a_{n-2} + a_{n-1} \leqq a_n$, čo po sčítaní s práve dokázanou nerovnosťou dáva $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} \leqq a_n + a_n = 2a_n$. Uvažujme dve steny (B, C) mnohostena $\mathcal{P}$, ktoré majú hranu dĺžky a_n. Dĺžky zvyšných hrán týchto stien označme $b_1, b_2, \dots, b_p$ (stena B) a $c_1, c_2, \dots, c_r$ (stena C). Tieto hrany sú rôzne, lebo steny B a C majú už spoločnú hranu (dĺžky a_n) a ak by mali spoločnú ešte jednu hranu, ležali by v rovnakých rovinách a boli by teda totožné. Preto sú $b_1, \dots, b_p, c_1, \dots, c_r$ niektoré z kladných čísel $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ (môže nastať aj prípad, že niektoré dĺžky sú rovnaké, ale nemôže nastať – ako sme vyššie ukázali – aby boli niektoré hrany identické). Preto máme $b_1 + b_2 + \ldots + b_p + c_1 + c_2 + \ldots + c_r \leqq$ $\leqq a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \leqq 2a_n$. Na druhej strane z trojuholníkovej nerovnosti pre dĺžky hrán stien B a C dostávame: $b_1 + b_2 + \ldots + b_p > a_n$ a $c_1 + c_2 + \ldots + c_r > a_n$, čo nám po sčítaní pravých a ľavých strán dáva spor s predchádzajúcou nerovnosťou. Týmto sme dokázali, že musia existovať tri hrany, ktoré môžu byť stranami nejakého trojuholníka.

3.6 Pre pevne dané body A, B a O závisí obsah trojuholníka ABC už len od výšky na stranu AB, ktorá je najväčšia pre jeden z bodov $C \in k(O, \sqrt{22})$ spĺňajúcich $\overleftrightarrow{OC} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (ak $O \in \overleftrightarrow{AB}$, potom pre oba). Kandidátom na trojuholník ABC s najväčším obsahom je teda taký trojuholník ABC, v ktorom platí $\overleftrightarrow{OC} \perp \overleftrightarrow{AB}$ a podobne aj $\overleftrightarrow{OA} \perp \overleftrightarrow{BC}$ a $\overleftrightarrow{OB} \perp \overleftrightarrow{CA}$; bod O je teda jeho ortocentrom. Ak by platilo $\gamma = |\sphericalangle ACB| > \frac{\pi}{2}$, bod C by ležal vnútri trojuholníka ABO a potom by bol pre obraz C' bodu C v stredovej súmernosti podľa bodu O obsah trojuholníka ABC' väčší ako obsah trojuholníka ABC (trojuholník ABC je iba časťou trojuholníka ABC'). Nakoľko nemôže byť $\gamma = \frac{\pi}{2}$ (potom by bol bod C ortocentrom trojuholníka ABC, ale $|OC| = \sqrt{22} \neq 0$), ostáva nám $\gamma < \frac{\pi}{2}$ a zo symetrie aj $\alpha = |\sphericalangle CAB| < \frac{\pi}{2}$ a $\beta = |\sphericalangle ABC| < \frac{\pi}{2}$. Ostrouhlý trojuholník ABC, v ktorom vzdialenosti ortocentra O od vrcholov sú $|OA| = 4$, $|OB| = 2\sqrt{3}$ a $|OC| = \sqrt{22}$ však existuje (až na symetrické) iba jeden. Spočítajme teda jeho obsah.

Z kolmosti priamok AB a CO ľahko vypočítame $|\sphericalangle ACO| = \sphericalangle|ACD| = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Podobne tiež $\sphericalangle|CAO| = \frac{\pi}{2} - \gamma$, $|\sphericalangle BAO| = \frac{\pi}{2} - \beta$ a $|\sphericalangle OBA| = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Zo sínusových viet v trojuholníkoch BCO a CAO máme

$$\frac{|BO|}{\sin(\frac{\pi}{2} - \beta)} = \frac{|CO|}{\sin(\frac{\pi}{2} - \gamma)} \qquad \text{a} \qquad \frac{|AO|}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = \frac{|CO|}{\sin(\frac{\pi}{2} - \gamma)}.$$

Použitím $\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \cos\varphi$ a dosadením dĺžok $|AO|$, $|BO|$ a $|CO|$ dostaneme

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{8}{11}}\cos\gamma \qquad \text{a} \qquad \cos\beta = \sqrt{\frac{6}{11}}\cos\gamma.$$

Dosadením do vzťahu

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\,,$$

ktorý možno pre uhly trojuholníka odvodiť z $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, a súčtových vzorcov pre kosínus, dostaneme rovnicu

$$\sqrt{3}\cos^3\gamma + \frac{25}{8}\cos^2\gamma - \frac{11}{8} = 0\,.$$

Po substitúcii $x = \sqrt{3}\cos\gamma$ dostaneme kubickú rovnicu

$$\frac{1}{3}x^3 + \frac{25}{24}x^2 - \frac{11}{8} = 0\,, \qquad \text{resp.} \quad 8x^3 + 25x^2 - 33 = 0.$$

Ľahko uhádneme koreň $x = 1$ a rovnicu upravíme na tvar

$$(x-1)\,(8x^2 + 33x + 33) = 0,$$

z ktorého je zrejmé, že $x = 1$ je jediný kladný reálny koreň (nezabúdajme, že $x = \sqrt{3}\cos\gamma > 0$, lebo trojuholník je ostrouhlý). Potom dopočítame $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\alpha = \sqrt{\frac{8}{33}}$, $\cos\beta = \sqrt{\frac{2}{11}}$, $\sin\alpha = \sqrt{\frac{25}{33}}$, $\sin\beta = \sqrt{\frac{9}{11}}$ a $\sin\gamma = \sqrt{\frac{2}{3}}$. S využitím $|\sphericalangle AOB| = \alpha + \beta$ a následne $\sin|\sphericalangle AOB| = \sin\gamma$ vypočítame

$$S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2}|OA| \cdot |OB| \sin|AOB| = \frac{1}{2} 4 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 4\sqrt{2}$$

a podobne $S_{\triangle BCO} = 5\sqrt{2}$ a $S_{\triangle CAO} = 6\sqrt{2}$. Následne

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABO} + S_{\triangle BCO} + S_{\triangle CAO} = 15\sqrt{2}.$$

Zatiaľ sme teda ukázali, že ostrouhlý trojuholník ABC s ortocentrom O s vhodnými vzdialenosťami od vrcholov má obsah $15\sqrt{2}$ a pre každý iný trojuholník ABC spĺňajúci podmienky zadania existuje trojuholník ABC' s väčším obsahom, ktorý tiež spĺňa tieto podmienky. Ak teda existuje hľadané maximum, je ním práve $15\sqrt{2}$. Existencia takéhoto maxima je síce z pohľadu vysokoškolskej matematiky triviálna záležitosť, ale my sa budeme držať stredoškolskej matematiky a preto dokážeme, že každý uvažovaný trojuholník ABC má obsah S nanajvýš $15\sqrt{2}$.

Označme postupne φ, ψ a θ orientované uhly AOB, BOC a COA; platí teda $\varphi + \psi + \theta = 2k\pi$, $k \in \{-1, 0, 1\}$. Obsah trojuholníka ABC sa teraz vypočíta podľa vzorca

$$S = \left|\frac{1}{2}|OA| \cdot |OB| \sin\varphi + \frac{1}{2}|OB| \cdot |OC| \sin\psi + \frac{1}{2}|OC| \cdot |OA| \sin\theta\right|,$$

ktorý zohľadňuje prípady, keď majú φ, ψ a θ rovnaké znamienka a teda trojuholníky AOB, BOC a COA sú disjunktné a pokrývajú trojuholník ABC, rovnako ako prípady, keď jeden z týchto uhlov, povedzme θ, má opačné znamienko a obsah sa vypočíta podľa schémy $|S_1 + S_2 - S_3|$ platnej či už je bod B vnútri trojuholníka COA (trojuholník COA je pokrytý trojuholníkmi AOB, BOC a ABC) alebo vonku (zjednotenie trojuholníkov COA a ABC je ten istý štvoruholník ako zjednotenie trojuholníkov AOB a BOC.

Pomocou $\varphi + \psi + \theta = 2k\pi$ a teda $\sin\theta = \sin(2k\pi - \varphi - \psi) = -\sin(\varphi + \psi)$ dostaneme po dosadení hodnôt $|OA|$, $|OB|$ a $|OC|$ vzťah

$$S = |4\sqrt{3}\sin\varphi + \sqrt{66}\sin\psi - 2\sqrt{22}\sin(\varphi + \psi)|.$$

Keď teraz použijeme súčtový vzorec pre sínus, dostaneme

$$4\sqrt{3}\sin\varphi - 2\sqrt{22}\sin(\varphi + \psi) = (4\sqrt{3} - 2\sqrt{22}\cos\psi)\sin\varphi - 2\sqrt{22}\sin\psi\cos\varphi.$$

Po označení $a = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{22}\cos\psi$ a $b = -2\sqrt{22}\sin\psi$ skonštruujeme výraz $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{34 - 4\sqrt{66}\cos\psi} > 0$ a následne platí $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$, preto existuje uhol ω taký, že $\cos\omega = \frac{a}{c}$ a $\sin\omega = \frac{b}{c}$. Potom však

$$S = \left|\sqrt{66}\sin\psi + c\left(\frac{a}{c}\sin\varphi + \frac{b}{c}\cos\varphi\right)\right| \leqq |\sqrt{66}\sin\psi| + c|\cos\omega\sin\varphi + \sin\omega\cos\varphi| =$$

$$= |\sqrt{66}\sin\psi| + c|\sin(\omega + \varphi)| \leqq |\sqrt{66}\sin\psi| + 2\sqrt{34 - 4\sqrt{66}\cos\psi}.$$

Pre nájdený trojuholník s obsahom $15\sqrt{2}$ je prvý člen rovný $5\sqrt{2} = \frac{1}{3}15\sqrt{2}$, čo nás (spolu s tvarom druhého člena) navádza pokračovať použitím AK-nerovnosti pre tri členy, konkrétne $|\sqrt{66}\sin\psi|$ a dvakrát $\sqrt{34 - 4\sqrt{66}\cos\psi}$:

$$S \leqq 3\sqrt{\frac{(\sqrt{66}\sin\psi)^2 + 2(34 - 4\sqrt{66}\cos\psi)}{3}} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{134 - 66\cos^2\psi - 8\sqrt{66}\cos\psi} =$$
$$= \sqrt{3}\cdot\sqrt{150 - 66(\cos\psi + \frac{4}{\sqrt{66}})^2} \leqq \sqrt{3}\cdot\sqrt{150} = 15\sqrt{2},$$

čím je nerovnosť dokázaná.

3.7 *(Katarína Quittnerová, Andrej Osuský)* Zrejme tvrdenie platí pre $n = 1$. Ďalej uvažujme $n \geqq 2$. Pre $k = 1, \dots, n$ označme symbolom $\sum x_1 \dots x_k$ sumu

$$\sum_{1 \leqq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k},$$

t.j. súčet všetkých výrazov tvaru $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$, kde $1 \leqq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqq n$ (takéto označenie sa bežne používa v algebre pri symetrických polynómoch a nazýva sa *symetrizácia* výrazu $x_1 \dots x_k$), pričom pre $k = 0$ položme $\sum x_1 \dots x_k = 1$. Takých výrazov je zrejme $\binom{n}{k}$ a x_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ sa vyskytuje v práve $\binom{n-1}{k-1}$ z nich. Naša nerovnosť je ekvivalentná s nerovnosťou

$$\sum_{k=0}^{n} (n-1)^{n-1-k}(n-k) \sum x_1 \dots x_k \leqq \sum_{k=0}^{n} (n-1)^{n-k} \sum x_1 \dots x_k.$$

To preto, že po roznásobení dostaneme výrazy tvaru $(n-1)^{n-1-k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$, kde $1 \leqq i_1 < \dots < i_k \leqq n$, $1 \leqq k \leqq n$, a každý z nich tam dostaneme $(n-k)$-krát (z tých zátvoriek, kde nechýbajú $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$). Pritom na ľavej strane pre $n = k$ dostávame koeficient nula, takže s kľudným svedomím môžeme mať sumu až po n. Ekvivalentne môžeme poslednú nerovnosť prepísať na tvar

$$\sum_{k=1}^{n} (n-1)^{n-1-k}(k-1) \sum x_1 \dots x_k \geqq (n-1)^{n-1}.$$

Stačí nám dokázať túto nerovnosť, lebo je ekvivalentná s pôvodnou.

Použitím AG-nerovnosti pre $\binom{n}{k}$ členov súčtu $\sum x_1 \dots x_k$ (zrejme pre pevné i sa x_i nachádza v práve $\binom{n-1}{k-1}$ členoch) a vzťahu $x_1 \dots x_n = 1$ dostávame, že pre každé $k = 1, \dots, n$ platí

$$\sum x_1 \dots x_k \geqq \binom{n}{k} \sqrt[\binom{n}{k}]{x_1^{\binom{n-1}{k-1}} \dots x_n^{\binom{n-1}{k-1}}} = \binom{n}{k} \sqrt[\binom{n}{k}]{(x_1 \dots x_n)^{\binom{n-1}{k-1}}} = \binom{n}{k}.$$

Po prenásobení nerovnosti číslom $(n-1)^{n-1-k}(k-1)$ a sčítaní cez $k=1,\dots,n$ dostaneme

$$\sum_{k=1}^{n}(n-1)^{n-1-k}(k-1)\sum x_1\dots x_k \geqq \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(n-1)^{n-1-k}(k-1).$$

Teraz ukážeme, že súčet na pravej strane je práve $(n-1)^{n-1}$:

$$\begin{aligned}(n-1)\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(n-1)^{n-1-k}(k-1) &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(n-1)^{n-k}(k-1) =\\ &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(n-1)^{n-k}k-\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(n-1)^{n-k} =\\ &= \sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}(n-1)^{n-k}-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(n-1)^{n-k}+\binom{n}{0}(n-1)^n =\\ &= n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(n-1)^{n-1-k}-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(n-1)^{n-k}+(n-1)^n =\\ &= n\big((n-1)+1\big)^{n-1}-\big((n-1)+1\big)^n+(n-1)^n =\\ &= n\cdot n^{n-1}-n^n+(n-1)^n=(n-1)^n.\end{aligned}$$

Tým je dôkaz ukončený.

Štvrtá séria

4.1 *(Andrej Osuský)* Môžeme si poprehadzovať riadky tabuľky tak, aby tretie najväčšie čísla v jednotlivých riadkoch tabuľky boli usporiadané, t.j. nech $m_1 < m_2 < \ldots < m_{10}$ (i-ty riadok má tretie najväčšie číslo m_i pre $i=1,2,\dots,10$). Ukážeme, že pre $i = 1,2,\dots,10$ platí

$$m_i \geqq 8i. \qquad (*)$$

Pre každé $k=1,2,\dots,10$ je v k-tom riadku práve 7 čísel menších ako m_k a navyše platí $m_1 < m_2 < \dots < m_{10}$. To znamená, že existuje $7i+(i-1)=8i-1$ čísel menších ako m_i (to sú tie, ktoré sú v k-tom riadku menšie ako m_k, pre $k=1,\ 2,\dots,i$ a ďalej čísla $m_1,m_2,\dots,m_{i-1}$; pričom pre $i=1$ ich vôbec neuvažujeme), teda nutne $m_i \geqq 8i$, lebo všetky tieto čísla sú navzájom rôzne. Z toho istého dôvodu pre čísla m_i ($i=1,2,\dots,10$) dostávame $m_i \geqq m_1+(i-1)$. Podľa $(*)$ dostávame $m_9 \geqq 72$, $m_{10}\geqq 80$, takže

$$\sum_{i=1}^{10}m_i = m_1+\sum_{i=2}^{8}m_i+m_9+m_{10} \geqq m_1+\sum_{i=2}^{8}(m_1+(i-1))+72+80 = 8m_1+180.$$

Súčet čísel v prvom riadku zrejme neprevyšuje číslo

$$(m_1 - 7) + (m_1 - 6) + \ldots + m_1 + 99 + 100 = 8m_1 + 171 < 8m_1 + 180 \leqq \sum_{i=1}^{10} m_i,$$

teda je dokonca ostro menší ako súčet tretích najväčších čísel z každého riadku.

4.2 Môžeme predpokladať, že $|AC| \leqq |BC|$, inak bod M leží mimo úsečky BH, a teda priamka PM nemôže byť osou uhla BPH. Najprv dokážeme

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|PH|}{|PB|}.$$

Z rovnosti $|AC| = |AP|$ vyplýva, že stačí dokázať $|AP| : |AB| = |PH| : |PB|$, čiže $|AP| : |PH| = |AB| : |PB|$. Stačí teda dokázať, že trojuholníky AHP a APB sú podobné. Vzhľadom na rovnosť uhlov PAH a BAP stačí ukázať, že $|AP| : |AH| = |AB| : |AP|$, čo však vyplýva z podobných pravouhlých trojuholníkov ACH a ABC.

Ak má uhol BAC veľkosť $60°$, platí

$$\frac{|MH|}{|MB|} = \frac{1}{2} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|PH|}{|PB|},$$

čiže $|MH| : |MB| = |PH| : |PB|$, z čoho vyplýva, že PM je osou uhla BPH. Ak uhol BAC má veľkosť menej ako $60°$, dĺžka $|MH|$ sa zmenší a dĺžka $|AC|$ sa zväčší, teda nemôže platiť $|MH| : |MB| = |PH| : |PB|$ a priamka PM nie je osou uhla BPH. Ak uhol BAC má veľkosť viac ako $60°$, dĺžka $|MH|$ sa zväčší a dĺžka $|AC|$ sa zmenší, teda tak isto nemôže platiť $|MH| : |MB| = |PH| : |PB|$ a ani teraz priamka PM nie je osou uhla BPH.

4.3 *(Katarína Quittnerová)* Predpokladajme, že funkcia spĺňajúca dané podmienky existuje. Keď sa pre zvolené $x > 0$ pozeráme na rovnicu

$$f(f(x))^2 = f(x+y)\,(f(x)+y)$$

iba ako na funkciu premennej y, máme na ľavej strane konštantu, zatiaľčo na pravej strane súčin kladnej ostro rastúcej funkcie $f(x)+y$ s kladnou funkciou $f(x+y)$, ktorá musí byť nutne ostro klesajúca. Funkcia $f(x')$ je teda pre $x' > x$ klesajúca a my si môžeme zvoliť ľubovoľne malé $x > 0$, preto je táto funkcia klesajúca na celom definičnom obore. Následne zmeníme pohľad na danú rovnicu a budeme y pokladať za konštantu a x za premennú. Potom je $f(f(x))^2$ rastúca funkcia, lebo je zložená z umocnenia na druhú (rastúce na kladných reálnych číslach) a dvoch klesajúcich funkcií f. Pravá strana je však súčinom dvoch kladných klesajúcich funkcií $f(x+y)$ a $f(x)+y$, takže je klesajúca. Rovnosť preto môže byť splnená pre nanajvýš jedno x, nie pre všetky ako sme predpokladali. Tým je tvrdenie dokázané.

4.4 Keďže 2 je prvočíslo, tak všetky prirodzené delitele čísla 2^{1000} majú tvar 2^k, kde $k \in \mathbb{N}_0$, $k \leqq 2000$. Upravením kombinačných čísel zo zadania dostávame

$$2^k = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = \frac{(n+1)\,(n^2 - n + 6)}{6}.$$

To znamená, že práve jedno z čísel $n+1$ a n^2-n+6 je deliteľné tromi a ostatné delitele týchto čísel sú mocniny 2. Môžu teda nastať dva prípady:

1) Nech $n+1 = 3\cdot 2^x$, $n^2-n+6 = 2^y$, kde $x, y \in \mathbb{N}_0$ a $x+y = k+1$. Vzhľadom na to, že $n \geqq 3$, musí byť $x \geqq 1$. Potom dostávame $2^y = n^2 - n + 6 = 9\cdot 2^x(2^x-1)+8$. Ak by bolo $x \geqq 4$, potom $y \geqq 4$ a dostávame, že ľavá strana je deliteľná 16, ale pravá dáva po delení 16 zvyšok 8. Preto musí byť $x \leqq 3$. Vyskúšaním jednotlivých možností dostávame riešenie $n = 23$.

2) Nech $n+1 = 2^x, n^2-n+6 = 3.2^y$, kde $x, y \in \mathbb{N}_0$ a $x+y = k+1$. Keďže $n \geqq 3$, musí byť $x \geqq 2$. Podobne ako v prvom prípade dostávame $3\cdot 2^y = n^2-n+6 = 2^x(2^x-3)+8$. Analogicky vylúčime možnosti $x \geqq 4$. Pre $x \in \{2,3\}$ dostávame riešenia $n = 3$ a $n = 7$.

Zadaniu úlohy vyhovujú čísla $3, 7, 23$.

4.5 Nech X, vnútorný bod trojuholníka ABC, je počiatkom komplexnej roviny (t.j. zodpovedá číslu 0). Označme u, v, w komplexné čísla zodpovedajúce bodom A, B, C. Zrejme platí

$$uv(u-v) + vw(v-w) + wu(w-u) = -(u-v)\,(v-w)\,(w-u). \tag{1}$$

Z toho zrejme vyplýva

$$|uv(u-v)| + |vw(v-w)| + |wu(w-u)| \geqq |(u-v)\,(v-w)\,(w-u)|. \tag{2}$$

Tým sme vlastne dokázali nerovnosť

$$|XA|\cdot|XB|\cdot|AB| + |XB|\cdot|XC|\cdot|BC| + |XC|\cdot|XA|\cdot|CA| \geqq |AB|\cdot|BC|\cdot|CA|$$

Zostáva zistiť kedy nastáva rovnosť. Zaveďme transformáciu

$$z_1 = \frac{uv}{(u-w)\,(v-w)}, \qquad z_2 = \frac{vw}{(v-u)\,(w-u)}, \qquad z_3 = \frac{wu}{(w-v)\,(u-v)}.$$

Vzťahy (1) a (2) potom možno prepísať

$$\begin{aligned} |z_1| + |z_2| + |z_3| &\geqq 1,\\ z_1 + z_2 + z_3 &= 1. \end{aligned}$$

Rovnosť nastáva práve vtedy, keď z_1, z_2 a z_3 sú kladné reálne čísla. Predpokladajme, že skutočne ide o kladné reálne čísla. Pretože

$$-\frac{z_1z_2}{z_3} = \left(\frac{v}{w-u}\right)^2, \qquad -\frac{z_2z_3}{z_1} = \left(\frac{w}{u-v}\right)^2, \qquad -\frac{z_3z_1}{z_2} = \left(\frac{u}{v-w}\right)^2,$$

ľahko nahliadneme, že $u/(v-w)$ a $v/(w-u)$ sú rýdzo imaginárne čísla. Preto $\overrightarrow{AX} \perp \overrightarrow{BC}$ a $\overrightarrow{BX} \perp \overrightarrow{AC}$, a teda X je nutne ortocentrom trojuholníka.

Zostáva overiť, či ortocentrum skutočne vyhovuje zadaniu. Predpokladajme, že X je ortocentrom trojuholníka ABC. Potom platí

$$|\sphericalangle AXB| = \pi - |\sphericalangle ACB|,$$

z čoho

$$2R_1 = \frac{|AB|}{\sin|\sphericalangle AXB|} = \frac{|AB|}{\sin|\sphericalangle ACB|} = 2R,$$

kde R_1 a R sú polomery kružníc opísaných trojuholníkom ABX a ABC. Analogicky $R = R_2 = R_3$, kde R_2 a R_3 sú polomery kružníc opísaných trojuholníkom BCX a CAX. Potom však

$$4RP = 4R_1P_1 + 4R_2P_2 + 4R_3P_3,$$

kde P, P_1, P_2 a P_3 sú obsahy príslušných trojuholníkov. Keďže však vo všeobecnosti platí vzťah $4RP = abc$ pre a, b, c strany trojuholníka, R polomer kružnice opísanej trojuholníku a P obsah trojuholníka, z predchádzajúcej rovnosti dostávame

$$|AB|\cdot|BC|\cdot|CA| = |XA|\cdot|XB|\cdot|AB| + |XB|\cdot|XC|\cdot|BC| + |XC|\cdot|XA|\cdot|CA|,$$

čo je dokazovaná rovnosť.

Z uvedeného vyplýva, že rovnosť zo zadania nastáva práve vtedy, keď bod X je ortocentrom trojuholníka ABC.

4.6 Jediný trik, ktorý v riešení použijeme, je rozklad na štvorec. Pre ľubovoľné kladné reálne číslo c^2 platí

$$c^2x_i^2 + x_ix_j + x_j^2 = \left(cx_i + \frac{1}{2c}x_j\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{4c^2}\right)x_j^2.$$

Použitím tejto rovnosti dostávame

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_ix_{i+1} = \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i+1}{2i}\left(x_i + \frac{i}{i+1}x_{i+1}\right)^2 + \frac{n+1}{2k(n-k+1)}x_k^2 + \\ &\quad + \sum_{i=k}^{n-1} \frac{n+1-i}{2(n-i)}\left(\frac{n-i}{n+1-i}x_i + x_{i+1}\right)^2. \end{aligned}$$

Keďže platí

$$\frac{i+1}{2i}\left(x_1 + \frac{i}{i+1}x_{i+1}\right)^2 \geqq 0,$$

$$\frac{n+1-i}{2(n-1)}\left(\frac{n-i}{n+1-i}x_i + x_{i+1}\right)^2 \geqq 0$$

pre každé potrebné i, tak

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{2k(n-k+1)}x_k^2 &\leqq 1, \\ x_k^2 &\leqq \frac{2k(n-k+1)}{n+1}, \\ |x_k| &\leqq \sqrt{\frac{2k(n-k+1)}{n+1}}. \end{aligned}$$

Túto maximálnu hodnotu nadobudne $|x_k|$ vtedy, keď budú všetky štvorce nulové, t.j.

$$\begin{aligned} x_i &= -\frac{i}{i+1}x_{i+1} && \text{pre } i = k-1, \dots, 1, \\ x_{i+1} &= -\frac{n-i}{n+1-i}x_i && \text{pre } i = k, \dots, n-1, \end{aligned}$$

čo zrejme vieme pre každé x_k splniť.

4.7 Označme si počet litrov v prvom, druhom a treťom sude postupne a, b, c. Ak je niektorý sud prázdny, tak je naša úloha vyriešená. Teda bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $0 < a \leqq b \leqq c$. Vyjadrime b v tvare $b = qa + a'$, kde $q, a' \in \mathbb{Z}$ a $q > 0$, $0 \leqq a' < a$. Ďalej napíšme q v dvojkovej sústave:

$$q = q_0 + 2q_1 + \ldots + 2^m q_m, \qquad q_i \in \{0,1\},\ m \in \mathbb{N}_0,\ q_m = 1.$$

Postupujme nasledovne: do prvého suda prelejme postupne $a, 2a, 4a, \dots, 2^m a$ litrov nasledujúcim spôsobom. Ak $q_i = 1$, tak prelievame z druhého suda, ak $q_i = 0$, tak prelievame z tretieho suda. V druhom sude ostane $b - qa = a' \geqq 0$ litrov vody a z tretieho suda sme preliali maximálne

$$(1 + 2 + \ldots + 2^{m-1})a < 2^m a \leqq b \leqq c$$

litrov vody, takže sme nešli do mínusu. Týmto spôsobom sme zmenšili počet litrov v„najprázdnejšom“sude. Opakovaním tohto postupu nakoniec niektorý sud vyprázdnime.

PIATA SÉRIA

5.1 Ľahko vypočítame $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$ a $a_5 = 7$. Existuje teda aspoň jeden člen postupnosti deliteľný číslom 7. Predpokladajme teraz, že postupnosť obsahuje len konečne veľa členov deliteľných 7. Nech a_k je posledný z nich (zrejme $k \geqq 5$, lebo $7 \mid a_5$). Keď označíme $b = a_{2k-1}$ a $c = a_{4k-3}$, máme $7 \nmid b$ a $7 \nmid c$. Z daného rekurentného vzťahu však vieme, že

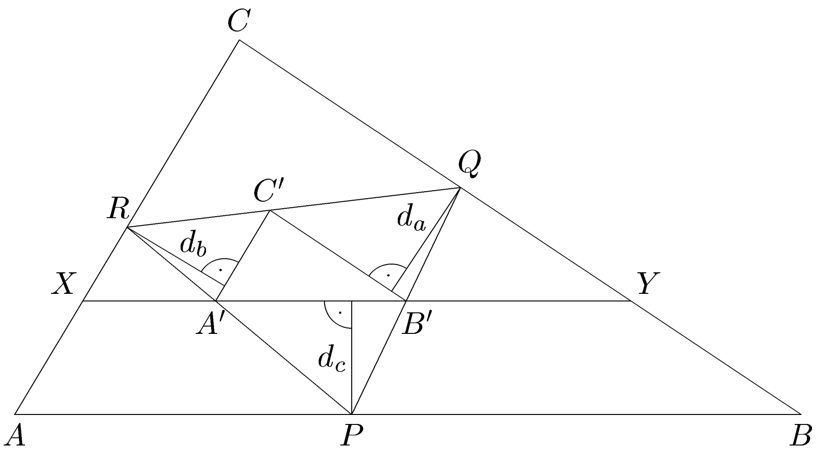
$$a_{2k} = a_{2k-1} + a_k \equiv b \pmod 7 \qquad \text{a} \qquad a_{2k+1} = a_{2k} + a_k \equiv b \pmod 7.$$

Postupnými výpočtami dostávame (všetky kongruencie sú modulo 7)

$$\begin{aligned}
a_{4k-2} &= a_{4k-3} + a_{2k-1} \equiv c + b,\\
a_{4k-1} &= a_{4k-2} + a_{2k-1} \equiv c + 2b,\\
a_{4k} &= a_{4k-1} + a_{2k} \equiv c + 3b,\\
a_{4k+1} &= a_{4k} + a_{2k} \equiv c + 4b,\\
a_{4k+2} &= a_{4k+1} + a_{2k+1} \equiv c + 5b,\\
a_{4k+3} &= a_{4k+2} + a_{2k+1} \equiv c + 6b.
\end{aligned}$$

V postupnosti sa teda vyskytujú čísla $c, c+b, c+2b, \dots, c+6b$, ktoré sú za členom a_k, a teda nesmú byť deliteľné 7, čiže môžu dávať nanajvýš šesť rôznych zvyškov po delení 7. Podľa Dirichletovho princípu dávajú aspoň dve z nich rovnaký zvyšok. Následne však rozdiel týchto dvoch, ktorý je tb, kde $|t| \in \{1,2,3,4,5,6\}$, musí byť deliteľný 7. Ale keďže 7 je prvočíslo a $7 \nmid t$, dostávame $7 \mid b$, čo je spor s predpokladom $7 \nmid b$ zo začiatku. Tým je tvrdenie dokázané.

5.2 *(Andrej Osuský)* Označme k koeficient podobnosti trojuholníkov ABC a $A'B'C'$. Ďalej nech d_a, d_b, d_c sú postupne vzdialenosti priamok BC a $B'C'$, AC a $A'C'$, AB a $A'B'$. Výšky v trojuholníku ABC označme štandardne v_a, v_b, v_c. Priesečníky priamky $A'B'$ so stranami AC a BC označme postupne X a Y.



Obr. 38

Z podobnosti trojuholníkov XYC a ABC a z rovnobežnosti priamok AB a XY vyplýva

$$\frac{|XY|}{|AB|} = \frac{v_c - d_c}{v_c}, \qquad \frac{|A'X|}{d_b} = \frac{|AB|}{v_b}, \qquad \frac{|B'Y|}{d_a} = \frac{|AB|}{v_a}.$$

Po dosadení predchádzajúcich vzťahov do rovnosti $|A'B'| = |XY| - |A'X| - |B'Y|$ dostávame

$$k = \frac{|A'B'|}{|AB|} = 1 - \frac{d_a}{v_a} - \frac{d_b}{v_b} - \frac{d_c}{v_c}.$$

Stačí už len vyjadriť hľadaný pomer obsahov trojuholníkov PQR a $A'B'C'$:

$$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \frac{S_{A'B'C'} + S_{A'B'P} + S_{B'C'Q} + S_{A'C'R}}{S_{A'B'C'}} =$$
$$= 1 + \frac{k|AC| \cdot d_b}{k^2|AC| \cdot v_b} + \frac{k|AB| \cdot d_c}{k^2|AB| \cdot v_c} + \frac{k|BC| \cdot d_a}{k^2|BC| \cdot v_a} =$$
$$= 1 + \frac{1}{k}\left(\frac{d_a}{v_a} + \frac{d_b}{v_b} + \frac{d_c}{v_c}\right).$$

Po dosadení z vyššie uvedeného vzťahu dostávame

$$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle A'B'C'}} = 1 + \frac{1}{k}(1-k) = \frac{1}{k} = \frac{|AB|}{|A'B'|}.$$

A tým je dôkaz hotový.

5.3 Číslo $\dfrac{n!}{2000}$ nemôže byť celé, preto $n < 15$. Nech $q = \frac{k}{l}$, kde k, l sú nesúdeliteľné prirodzené čísla a $l > 1$. Označme $c = [q^2]$. Potom

$$\{q^2\} = \frac{k^2}{l^2} - c = \frac{k^2 - cl^2}{l^2},$$

kde čitateľ a menovateľ sú opäť nesúdeliteľné, preto $\dfrac{n!}{2000}$ musí mať po vykrátení na základný tvar v menovateli štvorec. To platí len ak $6 \leqq n \leqq 9$. Pre $n = 6, 7, 8, 9$ nadobúda $\left\{\dfrac{n!}{2000}\right\}$ postupne hodnoty $\frac{9}{25}$, $\frac{13}{25}$, $\frac{4}{25}$, $\frac{11}{25}$, a teda $q = \frac{k}{5}$. Hľadajme také k, aby k^2 dávalo po delení 25 zvyšok $4, 9, 11$ alebo 13. Ľahko sa dá overiť, že k musí po delení 25 dávať jeden zo zvyškov 2, 3, 6, 9, 22, 23. Keďže má byť $0 < q < 2000$, tak $0 < k < 10000$. Počet takých k, ktoré spĺňajú obe podmienky, je $6 \cdot \frac{10000}{25} = 2400$, čo je aj hľadaný počet dvojíc (n, q).

5.4 Nech r je koreň rovnice $f(x) = 0$. Potom $b = f(0) = f(f(r)) = 0$, a teda $f(x) = x(x+a)$ a $r \in \{0, -a\}$. Taktiež $f(f(x)) = f(x)\big(f(x) + a\big) = x(x+a)\,(x^2 + ax + a)$. Hľadáme teda také a, aby rovnica $x^2 + ax + a = 0$ nemala žiadne korene okrem $0, -a$. Ak ľubovoľný z nich je jej koreňom, potom nutne $a = 0$ a vtedy rovnica $f(f(x)) = 0$ nemá žiadne iné korene. V opačnom prípade musí mať záporný diskriminant, čiže $a^2 - 4a < 0$. To nastáva práve vtedy, keď $0 < a < 4$. Celkove dostávame, že rovnice zo zadania majú rovnakú (neprázdnu) množinu koreňov pre $b = 0$ a ľubovoľné $a \in \langle 0, 4)$, pričom sa ľahko overí, že pre $a = 0$ je to množina $\{0\}$ a pre $a \in (0, 4)$ je to $\{0, -a\}$.

5.5 Najprv dokážme nasledujúcu *Lemu.*

Lema. Ak máme 20 za sebou idúcich čísel medzi ktorými nie je prechod cez stovku (nemení sa cifra na mieste stoviek) a prvé z nich končí nulou, tak sa medzi nimi nachádza číslo, ktoré má ciferný súčet deliteľný 11.

Dôkaz. Nech m je prvé z nich a nech c je jeho ciferný súčet. Potom čísla $m, m + 1, \ldots, m + 9, m + 19$ majú postupne ciferné súčty $c, c + 1, \ldots, c + 9, c + 10$, čo je 11 po sebe idúcich čísel. Takže jedno z nich musí byť deliteľné 11.

a) Vráťme sa k dôkazu nášho príkladu. Ak medzi našimi 39 číslami nie je prechod cez stovku, tak sa medzi nimi zrejme nachádza 20 po sebe idúcich čísel, z ktorých prvé končí nulou. Potom už len stačí použiť *Lemu* (také 20-tice sú zrejme dve).

Teraz nech je medzi našimi 39 číslami prechod cez stovku (zrejme môže byť najviac jeden) a nech n je to z nich, ktoré končí dvoma nulami. Potom sa medzi našimi 39 číslami nachádza buď číslo $n - 20$ alebo $n + 19$ (inak ich bude najviac 38). V prvom prípade použijeme *Lemu* pre 20-ticu začínajúcu číslom $n - 20$ a v druhom pre 20-ticu začínajúcu číslom n.

b) Majme množinu M, v ktorej je 38 po sebe idúcich prirodzených čísel. Ak nemá mať žiadne z nich ciferný súčet deliteľný 11, tak z vyššie uvedených úvah vyplýva, že medzi nimi musí byť prechod cez stovku. Naviac ak n je to z nich, ktoré končí dvoma nulami, tak nutne $M = \{n - 19, \ldots, n, n + 1, \ldots, n + 18\}$.

Dokážte si sami, že ciferný súčet $n - 19$ musí dávať po delení 11 zvyšok 1, a teda ciferný súčet $n - 1$ musí dávať zvyšok po delení 11 zvyšok 10 (pozor na jeden prechod cez desiatku). Ďalej si dokážte, že ciferný súčet n musí dávať zvyšok 1 po delení 11. Predpokladajme, že pri stovkovom prechode sa nám zmení a deviatok (na mieste jednotiek, desiatok, stoviek,...) na nuly. Potom

$$c(n - 1) = c(n) + 9a - 1,$$

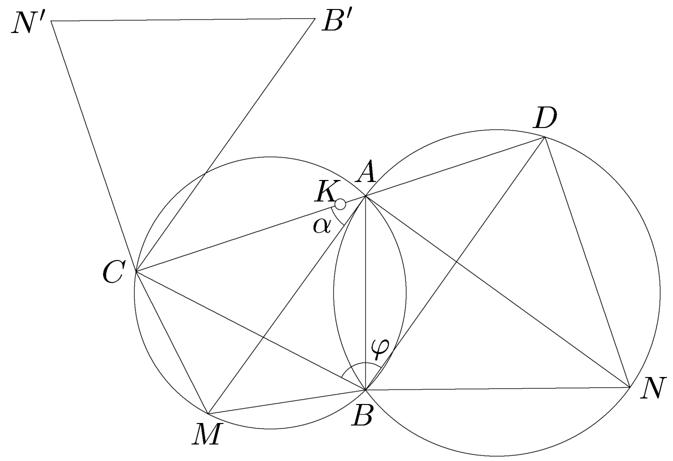
kde $c(x)$ označuje ciferný súčet prirodzeného čísla x. Ľavá strana rovnice dáva po delení 11 zvyšok 10 a pravá zvyšok $9a$. Najmenšie a vyhovujúce tejto podmienke je $a = 6$. Teda $n - 1$ má na posledných šiestich miestach deviatky. Keďže hľadáme najmenšie čísla, tak zrejme pred týmito deviatkami nebudú stáť žiadne iné číslice. Dostali sme riešenie

$$999\,981, \quad 999\,982, \quad \ldots, \quad 999\,999, \quad 1\,000\,000, \quad \ldots, \quad 1\,000\,018,$$

o ktorom sa skúškou presvedčíme, že naozaj vyhovuje danej úlohe. Z postupu vyplýva, že nájdené čísla sú najmenšie.

5.6 *(Andrej Osuský)* Ak $K = A$, tak $|\sphericalangle MKN| = |\sphericalangle MAN| = |\sphericalangle MAB| + |\sphericalangle BAN| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BAC| + \frac{1}{2}|\sphericalangle BAD| = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$, takže tvrdenie platí (použili sme poznatok, že os vnútorného uhla v trojuholníku pretína oblúk nad protiľahlou stranou v polovici, teda v našom prípade AM je os uhla CAB, atď). Ďalej predpokladajme, že $K \neq A$ a že bod A leží vnútri úsečky CD (viď obrázok 39). Druhému prípadu sa budeme venovať neskôr.

Označme $\alpha = |\sphericalangle BAM| = |\sphericalangle MAC|$ (vďaka vyššie uvedenej vlastnosti osi uhla). Potom $|\sphericalangle BAN| = |\sphericalangle NAD| = 90^\circ - \alpha$. Z vety o obvodových a stredových uhloch máme $|\sphericalangle MBC| = |\sphericalangle MCB| = \alpha$ a $|\sphericalangle NBD| = |\sphericalangle NDB| = 90^\circ - \alpha$.



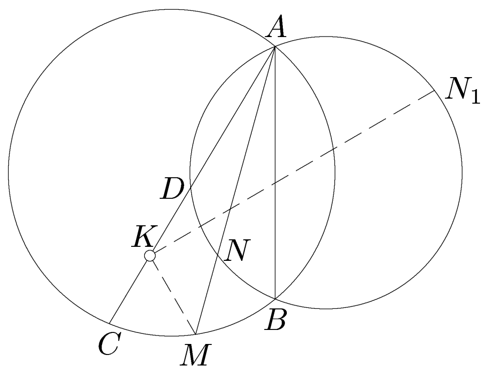
Obr. 39

Uvažujme stredovú súmernosť $\mathcal{S}_K$ so stredom K. Nech $N' = \mathcal{S}_K(N)$ a $B' = \mathcal{S}_K(B)$. Ukážeme, že $|MN'| = |MN|$.

Označme $\varphi = |\sphericalangle CBD|$. Keďže $B'C = \mathcal{S}_K(BD)$, tak $B'C \parallel BD$, a teda $|\sphericalangle BCB'| = 180° - \varphi$. Ďalej $|\sphericalangle N'CB'| = 90° - \alpha$, pretože $\triangle B'CN' = \mathcal{S}_K(\triangle BDN)$. Teraz už vidíme, že $|\sphericalangle MBN| = |\sphericalangle MCN'| = \varphi + 90°$ alebo $360° - (\varphi + 90°) = 270° - \varphi$ (podľa toho, či $\varphi \leqq 90°$ alebo $\varphi > 90°$).

Trojuholníky MNB a $MN'C$ sú potom zhodné (podľa vety *sus*, lebo $|MB| = |MC|$, $|BN| = |DN| = |CN'|$, $|\sphericalangle MBN| = |\sphericalangle MCN'|$). To znamená, že $|MN| = |MN'|$. (Ak by $\varphi = 90°$, tak platí $|MN| = |MB| + |BN| = |MC| + |CN'| = |MN'|$, takže opäť to isté.)

To ale znamená, že trojuholník $NN'M$ je rovnoramenný so základňou NN'. Potom je jeho ťažnica MK zároveň aj výškou, a teda $|\sphericalangle MKN| = 90°$, čo sme chceli dokázať.



Obr. 40

Tvrdenie však neplatí pre situáciu, keď A neleží na úsečke CD, ale mimo nej. Potom sa dá dokázať, že nutná a postačujúca podmienka na platnosť tvrdenia v zadaní je potrebná špeciálna pozícia daných kružníc — taká, že $|\sphericalangle ADB| - |\sphericalangle ACB| = 90°$.

Vo všeobecnosti sa ale dá vypozorovať analogické tvrdenie, a to ak namiesto bodu N budeme brať bod N_1, stred oblúka BD, ktorý obsahuje A (pozri obrázok 40).

5.7 Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že body $A_1, A_2, \dots, A_n$ sú na kružnici umiestnené v tomto poradí v kladnom smere. Položme $A_{n+1} = A_1$, $A_{n+2} = A_2, \dots$. Označme A_iA_j oblúk kružnice začínajúci v bode A_i a končiaci v bode A_j (v kladnom smere). Stredový uhol prislúchajúci tomuto oblúku označme $\sphericalangle A_iA_j$. Budeme hovoriť, že oblúk A_iA_j je *tupý*, ak $|\sphericalangle A_iA_j| \geqq 180°$. Zrejme pre ľubovoľnú dvojicu A_i, A_j platí $|\sphericalangle A_iA_j| + |\sphericalangle A_jA_i| = 360°$. Teda aspoň jeden z oblúkov A_iA_j, A_jA_i je *tupý*. Nech x_s je počet *tupých* oblúkov A_iA_j, vnútri ktorých leží $s-1$ z našich bodov. Keďže $|\sphericalangle A_iA_{i+s}| + |\sphericalangle A_{i+s}A_i| = 360°$, dostávame

$$x_s + x_{n-s} \geqq n \qquad (*)$$

pre každé $s = 1, 2, \dots, n-1$. Pritom rovnosť nastáva len ak neexistujú body A_iA_{i+s}, pre ktoré by bolo $|\sphericalangle A_iA_{i+s}| = 180°$. Spočítame počet neostrouhlých trojuholníkov $A_iA_jA_k$. Taký trojuholník má práve jeden uhol prislúchajúci tupému oblúku. Pre každý tupý oblúk, ktorý má $s-1$ bodov vnútri, máme $n-s-1$ neostrouhlých trojuholníkov $A_iA_jA_k$, pre ktoré uhol pri vrchole A_k prislúcha $\sphericalangle A_iA_j$, teda také, že bod A_k leží vnútri oblúku A_jA_i. Z toho dostávame, že neostrouhlých trojuholníkov je

$$N = x_1(n-2) + x_2(n-3) + \dots + x_{n-3}\cdot 2 + x_{n-2}\cdot 1 + x_{n-1}\cdot 0.$$

Preusporiadaním členov a využitím $(*)$ dostávame

$$\begin{aligned} N &\geqq 0\cdot(x_{n-1}+x_1) + 1\cdot(x_{n-2}+x_2) + \dots + \frac{n-3}{2}(x_{(n+1)/2} + x_{(n-1)/2}) \geqq \\ &\geqq n\cdot\left(1 + 2 + \ldots + \frac{n-3}{2}\right) = \frac{n(n-3)(n-1)}{8} \end{aligned}$$

ak je n nepárne, a

$$\begin{aligned} N &\geqq 0\cdot(x_{n-1}+x_1) + 1\cdot(x_{n-2}+x_2) + \dots + \\ &+ \frac{n-4}{2}(x_{(n+2)/2} + x_{(n-2)/2}) + \frac{n-2}{2}x_{n/2} \geqq \\ &\geqq n\cdot\left(1 + 2 + \ldots + \frac{n-4}{2}\right) + \frac{n-2}{2}\cdot\frac{n}{2} = \frac{n(n-2)^2}{8} \end{aligned}$$

ak je n párne. Rovnosti nastávajú napríklad pre $|\sphericalangle A_1A_2| = |\sphericalangle A_2A_3| = \ldots = |\sphericalangle A_{n-1}A_n| = |\sphericalangle A_nA_1| = 360°/n$ ak je n nepárne, a pre $|\sphericalangle A_1A_2| = |\sphericalangle A_2A_3| = \ldots = |\sphericalangle A_{n-1}A_n| = 360°/n + \varepsilon$ a $|\sphericalangle A_nA_1| = 360°/n - (n-1)\varepsilon$, kde $0 < \varepsilon < 360°/n^2$, ak n je párne. Hľadaný počet ostrouhlých trojuholníkov je potom

$$\binom{n}{3} - N_{\min} = \begin{cases} \frac{1}{24}(n-1)n(n+1), & \text{ak } n \text{ je nepárne,} \\ \frac{1}{24}(n-2)n(n+2), & \text{ak } n \text{ je párne.} \end{cases}$$

Iné korešpondenčné semináre

Okrem matematickej olympiády sú pre študentov základných aj stredných škôl počas školského roka organizované aj iné matematické súťaže. Patria medzi ne predovšetkým korešpondenčné semináre. Tieto súťaže sa v detailoch istotne líšia, avšak základné črty majú spoločné: počas školského roka prebiehajú dve časti (letná a zimná), ktoré pozostávajú zväčša z troch sérií úloh rozosielaných riešiteľom do škôl alebo domov. Riešenia súťažiaci vypracovávajú rovnakou formou ako v MO a v určenom termíne ich odosielajú na adresu príslušného seminára, odkiaľ sa po niekoľkých dňoch až týždňoch vrátia opravené spolu so vzorovými riešeniami a výsledkovou listinou. Mladší a menej skúsení riešitelia zväčša nemusia riešiť tie najzložitejšie príklady, aby aj oni mali šancu ovplyvniť poradie na prvých miestach. Na konci oboch častí súťaže sú približne tridsiati najúspešnejší riešitelia pozývaní na týždňové sústredenie, účasť na ktorom býva často najsilnejšou motiváciou na riešenie úloh. Nie je ale možné nespomenúť, že takýto pravidelný tréning sa odráža aj na výsledkoch dosahovaných v MO, a že drvivá väčšina reprezentantov Slovenska a Českej republiky na MMO, príp. MIO sa aktívne zapájala do viacerých z týchto seminárov.

Nižšie uvedené korešpondenčné semináre (KS) sú určené predovšetkým študentom stredných škôl, svojim záberom pokrývajú územie celého Slovenska a často majú aj riešiteľov z Českej Republiky. Je však možné, že vo svojom okolí nájdete aj menšie súťaže podobného druhu.

Bratislava — Bratislavský korešpondenčný matematický seminár — BKMS

Tento KS je organizovaný študentmi FMFI UK v Bratislave zväčša (80%) bratislavského pôvodu. Série bývajú tematicky zamerané a obsahujú niekedy aj veľmi náročné úlohy. Okrem seminára ÚK MO sa práve tento najviac venuje príprave na MO v kategórii A. Sústredenia s pestrou celoslovenskou účasťou a takmer vždy aj so vzorkou „zahraničného" účastníka z ČR mávajú asi najbohatší matematický program.

BKMS
RNDr. Jaroslav Guričan, CSc.
KATČ FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

e-mail: bkms@pobox.sk
URL: http://www.bkms.sk

Stredné Slovensko — Stredoslovenský korešpondenčný matematický seminár — SKMS

Tento KS je momentálne organizovaný skupinou študentov FMFI UK v Bratislave, pochádzajúcich zo stredného, príp. východného Slovenska. Je pokračovateľom tradície stredoslovenských KS organizovaných v minulosti zo Žiliny a Banskej Bystrice.

Do súčasnej podoby sa SKMS prepracoval pred niekoľkými rokmi, keď sa organizácie ujala skupina bývalých riešiteľov, v tom čase študujúcich v Bratislave. Pre túto súťaž je charakteristický nízky vekový priemer riešiteľov, súťažné úlohy majú blízko ku kategórii B alebo C MO.

SKMS
KZDM FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

e-mail: skms@host.sk
URL: http://skms.miesto.sk

Východné Slovensko — Korešpondenčný seminár z matematiky STROM

Korešpondenčný seminár STROM je organizovaný z PF UPJŠ v Košiciach skupinou nadšencov, väčšinou bývalých riešiteľov seminára. Je pokračovateľom najstaršieho korešpondenčného seminára v bývalom Československu. Jednotlivé série bývajú tematicky zamerané, témy však často bývajú netradičné a niekedy sa obsahovo líšia od úloh v MO. Sústredenia s najmä „východoslovenskou“ účasťou majú takmer neprekonateľne družnú atmosféru.

STROM
PF UPJŠ
Jesenná 5
040 01 Košice

e-mail: strom@upjs.sk
URL: http://www.strom.sk

Korešpondenčný seminár z programovania — KSP

Na rozdiel od predchádzajúcich KS, je KSP súťažou v programovaní. Všetky jeho súťažné úlohy sú, podobne ako na MIO, praktické. KSP je organizovaný zanietenou skupinkou študentov FMFI UK v Bratislave, ktorí majú zároveň na starosti všetky ostatné súťaže v programovaní od COFAX-u až po MO–P. Sústredenia bývajú mierne netradične na jar a na jeseň.

KSP
KVI FMFI UK
Mlynská Dolina
842 48 Bratislava

e-mail: ksp@ksp.sk
URL: http://www.ksp.sk

Ak ste sa rozhodli do niektorého zo seminárov zapojiť, najrozumnejšie je požiadať o zaslanie úloh prvej série začiatkom septembra alebo začiatkom januára.

RNDr. Karel Horák, CSc. – Mgr. Eugen Kováč
Juraj Földes – Ján Špakula
Vladimír Koutný – Michal Forišek
Úlohová komisia MO

Päťdesiaty ročník
Matematickej olympiády
na stredných školách

Sadzbu programom TEX pripravili RNDr. Karel Horák, CSc.,
Mgr. Eugen Kováč a Vladimír Koutný
Zostavil: Vladimír Koutný
Recenzoval: doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.
Grafická úprava obálky: Vladimír Koutný a Richard Kollár
Neprešlo jazykovou úpravou
Náklad: 600 ks

ŽSR, 2001