49. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

Správa o riešení úloh zo súťaže konanej v školskom roku 1999/2000

41. MEDZINÁRODNÁ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA
12. MEDZINÁRODNÁ OLYMPIÁDA V INFORMATIKE

IUVENTA

S pomocou spolupracovníkov spracovali
RNDr. Karel Horák, CSc.,
Eugen Kováč, Mgr. Jana Višňovská, Juraj Földes, Ján Špakula
Vladimír Koutný, Martin Pál a členovia Úlohovej komisie MO.

Obsah

O priebehu 49. ročníka matematickej olympiády

Matematická olympiáda (MO) je súťažou žiakov základných a stredných škôl. Jej vyhlasovateľom je Ministerstvo školstva Slovenskej republiky v spolupráci s Jednotou slovenských matematikov a fyzikov. Tento ročník MO na Slovensku riadila Slovenská komisia matematickej olympiády (SK MO). Jednotlivé kolá odborne a organizačne zabezpečovali okresné a krajské komisie MO (KK MO). Cieľom súťaže je vyhľadávanie žiakov talentovaných v matematike, prebúdzanie a podpora ich záujmu o ňu, rozvíjanie ich matematických schopností a ich usmerňovanie a vedenie k samostatnej tvorivej činnosti. Vyvrcholením súťaže je príprava na úspešnú reprezentáciu Slovenskej republiky a účasť na medzinárodných súťažiach, najmä na Medzinárodnej matematickej olympiáde (MMO) a Medzinárodnej informatickej olympiáde (MIO). V školskom roku 1999/2000 sa uskutočnil už 49. ročník MO, pretože matematická olympiáda na Slovensku je pokračovateľom rovnakej súťaže z bývalého Československa. Aj v tomto ročníku boli úlohy vo všetkých kolách MO v Českej republike a na Slovensku rovnaké. S potešením možno konštatovať, že MO aj tentokrát prebehla vo všetkých 79 okresoch, a tiež vo všetkých 8 krajoch Slovenskej republiky. Personálne obsadenie SK MO v 49. ročníku súťaže bolo nasledovné.

Predsedníctvo SK MO tvorili:

doc. RNDr. Vladislav Rosa, CSc., Slovenská štátna inšpekcia, predseda SK MO,
doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., FPEDaS ŽU Žilina, podpredseda SK MO,
RNDr. Andrej Blaho, MFF UK Bratislava,
doc. RNDr. Jozef Fulier, CSc., FPV UKF Nitra,
RNDr. Oto Klostermann, zástupca MŠ SR,
Mgr. Jana Višňovská, MFF UK Bratislava,
RNDr. Monika Kráľlová, MFF UK Bratislava,
Ivan Lukáč, Iuventa Bratislava,
prof. RNDr. Jozef Moravčík, CSc., FPV ŽU Žilina.

Členmi predsedníctva sú ďalej predsedovia krajských komisií:

RNDr. Zuzana Frková, Gymnázium Grösslingová, Bratislava,
prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc., FPV UKF Nitra,
doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., FPEDaS ŽU Žilina,
RNDr. Eva Oravcová, FPV UMB Banská Bystrica,
RNDr. Božena Mihalíková, CSc., PF UPJŠ Košice,
Mgr. Milan Demko, PedF PU Prešov,
RNDr. Soňa Pavlíková, CSc., TU Trenčín,
doc. RNDr. Pavol Híc, CSc., PF TU Trnava,

SK MO ďalej tvorili:

Mgr. Dagmar Vongrejová, ZŠ Moskovská, Žilina,
RNDr. Ľudovít Balázs, PF UPJŠ Košice,
doc. RNDr. Ľudovít Niepel, CSc., MFF UK Bratislava,
Mgr. Jozef Mészáros, Gymnázium s vyuč. jaz. maďarským, Galanta,
RNDr. Milota Hilková, ZŠ Jilemnického, Revúca,
Tomáš Vinař, MFF UK Bratislava
RNDr. Milan Cirjak, MC Prešov,
RNDr. Dagmar Mikulášová, Gymnázium Trenčín,
RNDr. Dana Smutná, FPV UMB Banská Bystrica,
RNDr. Anton Hnát, Gymnázium Michalovce.

V priebehu 49. ročníka MO sa uskutočnilo jedno plenárne zasadnutie SK MO a tri zasadnutia predsedníctva SK MO. Zamerali sa na obsahové a organizačné zabezpečenie MO, finančné pokrytie súťaže, ďalšie aktivity (korešpondenčné semináre, sústredenia a pod.), ako aj na pokračovanie v partnerskej spolupráci s českou Ústřední komisí MO pri príprave súťažných úloh a termínovom zabezpečovaní prebiehajúceho i budúceho ročníka MO. Hostiteľom pri oboch zasadnutiach úlohových komisií bola v tomto ročníku česká strana. Úlohy MO sú prevažne pôvodné, za zadaním každej súťažnej úlohy preto v ďalšom texte v zátvorke uvádzame meno autora (resp. navrhovateľa) úlohy.

Organizácia súťaže zostala v 49. ročníku MO zachovaná: pre žiakov základných škôl bola rozdelená do piatich kategórií Z4 – Z9 určených žiakom 4. až 9. ročníka ZŠ a odpovedajúcich ročníkov osemročných gymnázií. Pre žiakov stredných škôl a im zodpovedajúcich ročníkov viacročných gymnázií bola súťaž organizovaná v štyroch kategóriách: C, B, A a P. Kategória C bola určená pre študentov prvých ročníkov, kategória B pre študentov druhých ročníkov a kategória A pre študentov tretích a štvrtých ročníkov stredných škôl. Kategória P, zameraná na úlohy z programovania a matematickej informatiky, bola určená žiakom všetkých ročníkov stredných škôl. Talentovaní žiaci mohli po súhlase svojho učiteľa matematiky súťažiť aj vo vyššej vekovej kategórii. Týkalo sa to aj žiakov ZŠ, ktorí tiež mohli súťažiť v niektorej z kategórií A, B, C a P.

Súťaž v každej z kategórií pozostáva z niekoľkých postupových kôl, pričom v kategórii Z4 je najvyšším kolom školské kolo, v kategóriách Z5 – Z7 je to okresné kolo, v kategóriách Z9, C a B sa súťaž končí krajským kolom a v kategóriách A a P olympiáda vyvrcholila celoštátnym kolom.

Do celoštátneho kola bolo pozvaných 40 najlepších riešiteľov krajských kôl v kategórii A a 25 najlepších riešiteľov krajských kôl v kategórii P, pričom sa postupovalo podľa poradia zostaveného po koordinácii bodových hodnotení z jednotlivých krajov. V tomto kole je súťaž rozdelená do dvoch dní. V kategórii A riešia súťažiaci každý deň tri úlohy v časovom limite 4 hodiny, v kategórii P v rovnakom limite prvý deň tri teoretické a druhý deň dve praktické úlohy na počítači.

Celoštátne kolo 49. ročníka MO kategórie A sa uskutočnilo v dňoch 9.–12.4.2000 v *Banskej Bystrici* a celoštátne kolo 49. ročníka MO kategórie P v dňoch 13.–16.4.2000 v *Banskej Bystrici*. Na úspešnom priebehu celoštátneho kola má mimoriadnu zásluhu predsedkyňa krajského výboru MO pre banskobystrický kraj *RNDr. Eva Oravcová*, a tiež obetaví študenti MFF UK Bratislava.

Desať najúspešnejších riešiteľov tretieho kola MO kategórie A prijalo pozvanie na výberové sústredenie pred 41. Medzinárodnou matematickou olympiádou, ktoré sa konalo v dňoch 25.4.–1.5.2000 na MFF UK v Bratislave. Na základe výsledkov tohto sústredenia, výsledkov predchádzajúcich kôl MO a s prihliadnutím na úspešnosť v korešpondenčnom seminári SK MO bolo na konci sústredenia vybrané šesťčlenné družstvo na reprezentáciu SR na MMO v Taejone (Kórea) v dňoch 16.–25.7.2000. Tento výber absolvoval ešte jedno (prípravné) sústredenie v dňoch 11.–17.6.2000 *na Zochovej chate* a zároveň nás reprezentoval na šiestom ročníku medzištátneho stretnutia s Českou republikou, ktoré sa konalo v dňoch 7.–10.6.2000 *na Zochovej chate*. Medzištátnemu stretnutiu ako aj MMO sú v tejto ročenke venované samostatné kapitoly.

Výberové sústredenie pre najlepších riešiteľov v kategórii P sa uskutočnilo v dňoch 4.–10.6.2000 na MFF UK v Bratislave. V rámci náročného sústredenia, ktoré približovalo podmienky medzinárodnej súťaže, účastníci každý deň dopoludnia tvorili programy, ktoré večer v ten istý deň aj spoločne vyhodnocovali. Na základe dosiahnutých výsledkov schválila SK MO zloženie štvorčlenného družstva, ktoré v dňoch 23.–30.9.2000 reprezentovalo SR na MIO v Beijingu (Čína). Toto družstvo pred MIO absolvovalo ešte jedno prípravné sústredenie v dňoch 13.–19.8.2000 v Przylekove (Poľsko), na ktorom sa zúčastnili aj olympionici z Česka a Poľska. Rovnako bolo na základe výsledkov výberového sústredenia schválené štvorčlenné reprezentačné družstvo, ktoré sa v dňoch 24.–31.8.2000 zúčastnilo na Stredoeurópskej informatickej olympiáde v rumunskom meste Cluj-Napoca. Obom súťažiam sú venované samostatné kapitoly.

Ako už bolo spomenuté, súčasťou celoročnej prípravy na MO sú aj rôzne korešpondenčné semináre (KS) a sústredenia na okresnej a krajskej úrovni. Aj v tomto ročníku prebiehalo niekoľko KS s celoslovenskou pôsobnosťou a to:

Bratislavský korešpondenčný matematický seminár (BKMS),
Stredoslovenský korešpondenčný seminár (SKMS),
Košický korešpondenčný seminár (STROM),
Korešpondenčný seminár z programovania (KSP).

Stručnú informáciu o týchto aktivitách, spolu s kontaktnými adresami, možno nájsť v samostatnej kapitole.

Výsledky celoštátneho kola, kategória A

Víťazi

1.	Vladimír ZAJAC	4 G Grösslingová Bratislava	7	7	7	7	7	7	42
2.	Balázs KESZEGH	4 G Komárno maď.	7	7	4	6	7	7	38
3.	Tomáš JURÍK	4 G Poštová Košice	7	7	2	7	7	7	37
4.	Katarína QUITTNEROVÁ	2 G Bilíkova Bratislava	7	4	5	7	5	7	35
5.	Peter MÁJEK	4 G Jura Hronca Bratislava	7	7	3	6	7	4	34
6.	Miroslava SOTÁKOVÁ	4 G Poštová Košice	7	7	3	7	3	6	33
7.	Ján ORAVEC	3 G J.G.Tajovského B.Bystrica	7	7	0	7	4	7	32
8.	Peter PRAVDA	4 G V.B.Nedožerského Prievidza	7	7	1	7	1	7	30
9.	Tomáš KULICH	3 G V.B.Nedožerského Prievidza	3	7	0	7	5	6	28
10.	Mics ZOLTÁN	3 G Šahy maď.	7	0	1	7	5	6	26

Ďalší úspešní riešitelia

11.	Marian ERTL	4 G V.B.Nedožerského Prievidza	7	0	0	4	7	7	25
12.	Jozef ŠEVČÍK	4 G Grösslingová Bratislava	7	1	0	7	6	3	24
13.	Róbert LUKOŤKA	3 G J.G.Tajovského B.Bystrica	7	4	0	6	1	5	23
	Miloš MEDŘÍK	3 G Párovská Nitra	7	0	1	7	1	7	23
	Michal PEŠTA	3 G Liptovský Mikuláš	7	7	1	5	3	0	23
16.	Radovan BAUER	2 G Poštová Košice	7	3	0	3	2	7	22
	Jaroslav TÓTH	4 G Alejová Košice	7	7	0	3	5	0	22
18.	Tomáš FARKAŠ	3 G Grösslingová Bratislava	7	0	1	6	4	3	21
	Branislav NOVOTNÝ	3 G Grösslingová Bratislava	7	0	1	5	5	3	21

Ostatní riešitelia

20.	Peter BELLA	2 G Jura Hronca Bratislava	7	2	0	7	1	3	20
	Peter ČENDULA	3 G Liptovský Mikuláš	7	7	0	3	0	3	20
22.	Peter MOLNÁR	4 G Poštová Košice	0	2	3	0	5	7	17
	Jana SZOLGAYOVÁ	3 G Grösslingová Bratislava	7	1	1	1	0	7	17
24.	István GYÜRKI	4 G Želiezovce maď.	5	7	1	0	0	3	16
	Miroslav ZÁMEČNÍK	4 G Nové Mesto n. Váhom	0	7	1	2	3	3	16
26.	Roman NEDELA	4 G J.G.Tajovského B.Bystrica	7	0	0	0	7	1	15
	Pavol ORAVEC	4 G Alejová Košice	0	3	1	1	3	7	15
28.	Peter KOŠINÁR	4 G Jura Hronca Bratislava	7	0	1	4	0	2	14
	Veronika SKŘIVÁNKOVÁ	3 G Poštová Košice	0	1	1	0	5	7	14

30.	Katalin FEHÉR	4 G Komárno maď.	7	0	0	3	2	0	12
	Zuzana KASAROVÁ	3 G J.G.Tajovského B.Bystrica	7	0	0	1	0	4	12
	Branislav MIKULÁŠ	4 G V.Paulínyho–Tótha Martin	0	0	1	0	5	6	12
	Andrej OSUSKÝ	2 G Jura Hronca Bratislava	7	1	0	0	3	1	12
	Martin TROJÁK	4 G Veľká Okružná Žilina	1	1	0	5	4	1	12
35.	Iveta HUDECOVÁ	4 G Veľká Okružná Žilina	0	1	0	4	2	3	10
	Milan KOLKUS	3 G Čadca	7	2	0	1	0	0	10
	Michal POKORNÝ	3 G Grösslingová Bratislava	4	0	1	1	2	2	10
38.	Katarína BEHULIAKOVÁ	4 G Veľká Okružná Žilina	0	2	1	2	3	0	8
39.	Elena AXAMÍTOVÁ	3 G Grösslingová Bratislava	3	0	1	1	0	1	6
	Igor GOMBOŠ	3 G Kežmarok	0	1	0	0	3	2	6

Úspešnosť jednotlivých úloh je zaznamenaná v tabuľke.

Počet bodov	**Spolu**	**Číslo úlohy**					
		1.	2.	3.	4.	5.	6.
7 bodov	71	27	13	1	11	6	13
6 bodov	9	0	0	0	4	1	4
5 bodov	14	1	0	1	3	8	1
4 body	12	1	2	1	3	3	2
3 body	26	2	2	3	4	7	8
2 body	14	0	4	1	2	4	3
1 bod	38	1	7	16	6	4	4
0 bodov	56	8	12	17	7	7	5
Priemer	3,39	5,12	3,00	1,07	3,75	3,32	4,05

Výsledky celoštátneho kola, kategória P

Víťazi

1.	Ján ORAVEC	3 G J.G.Tajovského B.Bystrica	7	7	1	1	9	43
2.	Peter KOŠINÁR	4 G Jura Hronca Bratislava	3	8	1	1	1	41
	Jozef TVAROŽEK	2 G Jura Hronca Bratislava	1	6	5	1	1	41
4.	Tomáš ZÁTHURECKÝ	5 G V.Paulínyho–Tótha Martin	5	3	1	1	8	36
5.	Ľubomír ČECH	4 G Senecká, Pezinok	6	3	1	1	4	33
6.	Martin MACKO	3 G Školská, Spišská Nová Ves	1	2	8	1	2	32

Ďalší úspešní riešitelia

7.	Marián DVORSKÝ	3 G Šrobárova, Košice	8	3	1	1	9	31
	Mária NÁNÁSIOVÁ	5 G Metodova, Bratislava	7	4	1	7	3	31
9.	Miroslav BAJTOŠ	4 G Jura Hronca Bratislava	8	8	4	1	0	30
10.	Matej SAPÁK	4 G Jura Hronca Bratislava	1	4	0	1	2	26
	Peter BELLA	2 G Jura Hronca Bratislava	4	8	3	1	1	26
12.	Tomáš LACKÓ	4 G Nové Zámky	–	4	9	1	2	25

Ostatní riešitelia

13.	Radovan BAUER	2 G Poštová, Košice	7	5	1	0	2	24
14.	Štefan VARGA	4 G Jura Hronca Bratislava	7	2	2	1	1	22
15.	Marek MATEJÁK	4 G Myjava	6	5	2	7	0	20
16.	František GALČÍK	4 G Stropkov	6	1	–	1	1	18
17.	Tomáš HAJAS	3 G Jura Hronca Bratislava	4	3	–	1	0	17
	Slavomír KATUŠČÁK	4 G Konštantínova, Prešov	3	3	0	1	1	17
19.	Juraj ONDERÍK	4 G Jura Hronca Bratislava	4	2	0	1	–	16
20.	Tomáš DZETKULIČ	2 G Pavla Horova Michalovce	2	3	0	6	2	13
21.	Tomáš ÁGOŠTON	4 G Jura Hronca Bratislava	2	3	1	3	1	10
22.	Peter NÁTHER	4 G Jura Hronca Bratislava	1	0	1	7	0	9
23.	Juraj BEDNÁR	3 G J.G.Tajovského B.Bystrica	3	3	2	0	0	8
24.	Stanislav SLUŠNÝ	4 G Levice	6	1	–	0	0	7
25.	Igor OSTROVSKÝ	3 Ev. lýceum Bratislava	2	2	0	–	–	4

Výsledky krajských kôl

Z príslušného kraja a v príslušnej kategórii A, B, C, P a Z9 sú uvedení všetci, resp. aspoň prvých 10 úspešných riešiteľov. V kategóriách B, C, Z9, ak nie je uvedené inak, sú všetci žiaci študentmi 2., resp. 1., resp. 9. ročníka. Gymnáziá so zameraním na matematiku, študijný odbor 01 sú tieto:

Gymnázium Grösslingová, Bratislava,
Gymnázium Párovská, Nitra,
Gymnázium Veľká Okružná, Žilina,
Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica,
Gymnázium Alejová, Košice,
Gymnázium Poštová, Košice.

Kraj Bratislava

Kategória A

1.	Peter MÁJEK	4, Gymnázium Jura Hronca
2.	Katarína QUITTNEROVÁ	2, Gymnázium Bilíkova
3.	Jana SZOLGAYOVÁ	3, Gymnázium Grösslingová
4.	Tomáš FARKAŠ	3, Gymnázium Grösslingová
5.	Peter BELLA	2, Gymnázium Jura Hronca
6.	Branislav NOVOTNÝ	3, Gymnázium Grösslingová
7.	Vladimír ZAJAC	4, Gymnázium Grösslingová
8.	Elena AXAMÍTOVÁ	3, Gymnázium Grösslingová
9.–11.	Peter KOŠINÁR	4, Gymnázium Jura Hronca
	Andrej OSUSKÝ	3, Gymnázium Jura Hronca
	Jozef ŠEVČÍK	4, Gymnázium Grösslingová

Kategória B

1.	Katarína QUITTNEROVÁ	Gymnázium Bilíkova
2.	Peter BELLA	Gymnázium Jura Hronca
3.–4.	Matej BENDŽALA	Gymnázium Grösslingová
	Martin SVETLÍK	Gymnázium Grösslingová
5.	Jozef TVAROŽEK	Gymnázium Jura Hronca

6.	Michal MIKUŠ	Gymnázium Jura Hronca
7.	Juraj MAJER	Gymnázium Tomášikova
8.	Tomáš ZÁHOREC	Gymnázium Jura Hronca
9.–12.	Pavol JUHOS	Gymnázium Grösslingová
	Andrej OSUSKÝ	Gymnázium Jura Hronca
	Štefan ŠURINA	Gymnázium Jura Hronca
	Tatiana VISZUSOVÁ	Gymnázium Grösslingová

Kategória C

1.	Edita ROLLOVÁ	Gymnázium Grösslingová
2.	Matej BLAŽEK	Gymnázium Grösslingová
3.–4.	Tomáš MIKUŠ	Gymnázium Jura Hronca
	Ľuba KRIVÁ	Gymnázium Grösslingová
5.–6.	Slavomír KOLKOVIČ	Gymnázium Grösslingová
	Ján MARKOŠ	Gymnázium Grösslingová
7.–12.	Ján BAKOŠ	Gymnázium Matky Alexie
	Michal GEMERAN	Gymnázium Svätej Uršule
	Natália KASALOVSKÁ	Gymnázium Vazovova
	Michal KOTRBČÍK	Gymnázium Jura Hronca
	Adam ŠEVČÍK	Gymnázium Grösslingová
	Martin ZIKA	Gymnázium Jura Hronca

Kategória Z9

1.–3.	Michal BURGER	Gymnázium Grösslingová
	Andrej BORSUK	Gymnázium Grösslingová
	Jakub ZÁVODNÝ	Gymnázium Grösslingová
4.–6.	Veronika BREZOVÁ	Gymnázium Grösslingová
	Martin FIALA	ZŠ Prokofievova
	Peter RAKYTA	ZŠ Senec
7.–10.	Katarína KITTANOVÁ	Gymnázium Bilíkova
	Hana KOLIBIAROVÁ	Gymnázium Grösslingová
	Tomáš LABUDA	ZŠ Holíčska
	Mária ŠOLTÉSOVÁ	ZŠ Mudroňova

Kategória P

1.	Jozef TVAROŽEK	2, Gymnázium Jura Hronca
2.	Peter KOŠINÁR	4, Gymnázium Jura Hronca
3.	Matej SAPÁK	4, Gymnázium Jura Hronca
4.	Ľubomír ČECH	4, Gymnázium Pezinok, Senecká

5.	Štefan VARGA	4, Gymnázium Jura Hronca
6.	Tomáš ÁGOŠTON	4, Gymnázium Jura Hronca
7.	Tomáš HAJAS	3, Gymnázium Jura Hronca
8.–9.	Mária NÁNÁSIOVÁ	5, Gymnázium Metodova
	Juraj ONDERÍK	4, Gymnázium Jura Hronca

Kraj Nitra

Kategória A

1.	Balázs KESZEGH	4, Gymnázium maď., Komárno
2.–3.	Miloš MEDŘÍK	3, Gymnázium Párovská, Nitra
	Zoltán MICS	3, Gymnázium maď., Šahy
4.	István GYÜRKI	4, Gymnázium maď., Želiezovce
5.–6.	Katalin FEHÉR	4, Gymnázium maď., Komárno
	Barbora HEŠŠOVÁ	4, Gymnázium Párovská, Nitra
7.–8.	Keve KURUC	4, Gymnázium maď., Komárno
	Levente VARGA	4, Gymnázium maď., Komárno
9.	Slávka ĎURIŠOVÁ	3, Gymnázium Párovská, Nitra

Kategória P

1.	Stanislav SLUŠNÝ	4, Gymnázium Levice
2.	Tomáš LACKÓ	4, Gymnázium Nové Zámky
3.	Keve KURUCZ	4, Gymnázium H.Selyeho maď., Komárno
4.	Jozef VESELÝ	1, Gymnázium Golianova, Nitra
5.	Tomáš LAKATOS	3, Gymnázium Nové Zámky

Výsledkové listiny kategórií B, C a Z9 neboli dodané do uzávierky ročenky.

Kraj Trnava

Kategória A

1.	Peter SIDÓ	4, Gymnázium Dunajská Streda
2.–3.	Kamil CHOVANEC	3, Gymnázium Sereď
	Michal SEDLÁK	4, Gymnázium Piešťany

Kategória P

1.	Tomáš JANÍK	2, Gymnázium Piešťany

Výsledkové listiny kategórií B, C a Z9 neboli dodané do uzávierky ročenky.

Kraj Trenčín

Kategória A

1.	Peter PRAVDA	4, Gymnázium Prievidza
2.	Marián ERTL	4, Gymnázium Prievidza
3.	Tomáš KULICH	3, Gymnázium Prievidza
4.	Miroslav ZÁMEČNÍK	3, Gymnázium Nové Mesto nad Váhom
5.	Pavol FÜLÖP	3, Piaristické gymnázium Trenčín

Kategória P

1.	Marek MATEJÁK	4, Gymnázium Myjava,
2.–4.	Šimon ZÁMEČNÍK	4, Gymnázium MRŠ., Nové Mesto nad Váhom
	Martin PASTVA	4, Gymnázium Prievidza
	Marian ERTL	4, Gymnázium Prievidza

Výsledkové listiny kategórií B, C a Z9 neboli dodané do uzávierky ročenky.

Kraj Žilina

Kategória A

1.	Branislav MIKULÁŠ	4, Gymnázium V. Paulínyho–Tótha, Martin
2.–4.	Katarína BEHULIAKOVÁ	4, Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
	Iveta HUDECOVÁ	4, Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
	Martin TROJÁK	4, Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
5.	Milan KOLKUS	3, Gymnázium Čadca
6.–7.	Peter ČENDULA	3, Gymnázium Liptovský Mikuláš
	Michal PEŠTA	2, Gymnázium Liptovský Mikuláš
8.	Juraj STACHO	4, Gymnázium Veľká Okružná, Žilina

9.	František DEBNÁR	4, Gymnázium Liptovský Hrádok

Kategória B

1.	Jakub DAUBNER	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
2.	Michal BUTEK	Gymnázium bilingválne Žilina
3.	Michal CICANIČ	Gymnázium sv. Františka Žilina
4.	Tomáš ŠKEREŇ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
5.	Tomáš VRÁBEL	Gymnázium V. Paulínyho–Tótha, Martin
6.	Miroslav HUDEC	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
7.	Michal HUDEK	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
8.– 12.	Ivan BLAŽEK	Gymnázium Moyzesova, Ružomberok
	Dušan KALUŽA	Gymnázium Hlinská, Žilina
	Jarmila KECEROVÁ	Gymnázium Dolný Kubín
	Peter PETROVSKÝ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
	Erika TROJÁKOVÁ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina

Kategória C

1.	Mirko ZIBOLEN	Gymnázium V. Paulínyho–Tótha Martin
2.	Zuzana PODMANICKÁ	Gymnázium Moyzesova, Ružomberok
3.– 4.	Milan ŠATKA	Gymnázium Liptovský Hrádok
	Pavel ŠIARNIK	Gymnázium Liptovský Mikuláš
5.	Mária SROKOVÁ	Gymnázium Námestovo
6.	Zuzana KÖRÖSIOVÁ	Gymnázium V. Paulínyho–Tótha, Martin
7.– 9.	Marián SLÁDEK	Gymnázium Varšavská, Žilina
	Juraj VOZÁRIK	Gymnázium Liptovský Mikuláš
	Kristína VRÁBLOVÁ	Gymnázium V. Paulínyho–Tótha, Martin

Kategória Z9

1.	Martin ŠKORUPA	ZŠ Čs. brigády, Liptovský Mikuláš
2.–3.	Bianka KOVÁČOVÁ	ZŠ Limbová, Žilina
	Jakub RESS	ZŠ Čs. brigády, Liptovský Mikuláš
4.–6.	Martin BRISUDA	ZŠ Krásno nad Kysucou
	Peter ČERMÁK	ZŠ Čs. brigády, Liptovský Mikuláš
	Rastislav TISOŇ	ZŠ Zákamenné
7.	Andrej FURTÁK	ZŠ Martinská, Žilina
8.–9.	Petra BOHOVICOVÁ	Gymnázium Varšavská, Žilina
	Mariana FUKASOVÁ	Gymnázium Trstená
10.	Lukáš LICHNER	ZŠ Východná, Martin

Kategória P

1.	Tomáš ZÁTHURECKÝ	5, Gymnázium V. Paulínyho–Tótha, Martin
2.	Tomáš VANDERKA	4, Gymnázium M.Hattalu, Trstená
3.	Libor HAVLÍČEK	6, Gymnázium Čadca
4.	Andrej CHU	4, Gymnázium Čadca

Kraj Banská Bystrica

Kategória A

1.	Ján ORAVEC	3, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
2.	Roman NEDELA	4, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
3.	Róbert LUKOŤKA	3, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
4.–5.	Zuzana KASÁROVÁ	3, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
	Dušan LACIKA	4, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
6.	Peter PAŽÁK	4, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica

Kategória B

1.	Michal ŽILKA	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
2.	Michal MALÝ	Gymnázium Žiar nad Hronom
3.	Vlado KŠENZULIAK	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
4.	Milan BOĎA	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
5.–6.	Marek TESAŘ	Gymnázium Lučenec
	Ján ŽIŽKA	Gymnázium Žiar nad Hronom
7.–8.	Peter BUBELÍNY	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
	Michal VALKOVIČ	Gymnázium šport. Banská Bystrica

Kategória C

1.	Hana BUDÁČOVÁ	9, ZŠ Haličská, Lučenec
2.	Ivan ŠIMŠÁLEK	Gymnázium Hronská, Zvolen
3.–4.	Býryová IVANA	Gymnázium Veľký Krtíš
	Michal ŠVAJDA	Gymnázium evanjelické, Tisovec
5.–7.	Lucia LAURINCOVÁ	Gymnázium evanjelické, Tisovec
	Tomáš LÍŠKA	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
	Ľudovít SCHOLTZ	Gymnázium evanjelické, Tisovec

Kategória Z9

1.	Hana BUDÁČOVÁ	ZŠ Haličská, Lučenec
2.	Martin LYSÍK	ZŠ Brezno – Mazorníkovo
3.–6.	Tomáš BABIAK	ZŠ Bakossova, Banská Bystrica
	Tomáš OSIČKA	ZŠ Tatranská, Banská Bystrica
	Roman STOKLASA	ZŠ Tatranská, Banská Bystrica
	Daniela SLABEJOVÁ	ZŠ Clementisa, Rimavská Sobota
7.–8.	Milan LAMPER	ZŠ Vajanská, Lučenec
	Tomáš MÁNIK	ZŠ Lovinobaňa
9.–12.	Matej BEŇO	ZŠ M. R. Štefánika, Žiar nad Hronom
	Elena DUŠKOVÁ	I. ZŠ Kremnica
	Lucia KOMENDOVÁ	ZŠ Žarnovica
	Iveta KOTMANOVÁ	ZŠ Haličská, Lučenec

Kategória P

1.	Ján ORAVEC	3, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
2.	Juraj BEDNÁR	3, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
3.	Dávid HARAGA	3, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica

Kraj Košice

Kategória A

1.–2.	Miroslava SOTÁKOVÁ	4, Gymnázium Poštová, Košice
	Peter MOLNÁR	4, Gymnázium Poštová, Košice
3.	Tomáš JURÍK	4, Gymnázium Poštová, Košice
4.	Pavol ORAVEC	4, Gymnázium Alejová, Košice
5.–7.	Radovan BAUER	2, Gymnázium Poštová, Košice
	Veronika SKŘIVÁNKOVÁ	3, Gymnázium Poštová, Košice
	Jaroslav TÓTH	4, Gymnázium Alejová, Košice
8.	Zuzana VARGOVÁ	4, Gymnázium Alejová, Košice
9.	Anna KORDULIAKOVÁ	4, Gymnázium Alejová, Košice
10.–11.	Tomáš ANDRAŠINA	4, Gymnázium Alejová, Košice
	Ján UHRÍN	3, Gymnázium P. Horova, Michalovce

Kategória B

1.	Peter SASÁK	Gymnázium Alejová, Košice

2.–5.	Stanislav KOVALČIN	Gymnázium Alejová, Košice
	Ján MAZÁK	Gymnázium Poštová, Košice
	Kamil PAULÍNY	Gymnázium Poštová, Košice
	Tomáš DZETKULIČ	Gymnázium P. Horova, Michalovce
6.–7.	Margaréta HIEKELOVÁ	Gymnázium Poštová, Košice
	Martin RÁKOCI	Gymnázium Poštová, Košice
8.–9.	Jaroslav KAČMÁR	Gymnázium Alejová, Košice
	Martina VIŠŇOVSKÁ	Gymnázium Poštová, Košice
10.–12.	Ján TITKO	Gymnázium Poštová, Košice
	Matúš LEVRINC	Gymnázium P. J. Š., Rožňava
	Emil KYKLOŠ	Gymnázium P. J. Š., Rožňava

Kategória C

1.	Ján BORSÍK	9, ZŠ Starozagorská, Košice
2.	Maroš VRANEC	Gymnázium Alejová, Košice
3.	Adam BOSÁK	Gymnázium Šrobárova, Košice
4.	Miroslav SABO	Gymnázium Trebišovská, Košice
5.–7.	Peter NAWKA	Gymnázium J. A. Komenského, Košice
	Martin HASAJ	Gymnázium Trebišovská, Košice
	Gabriel KARÁDY	Gymnázium Kráľovský Chlmec
8.–10.	Kamil BARBIERIK	Gymnázium Poštová, Košice
	Tomáš REIFF	Gymnázium Poštová, Košice
	Peter NAGY	Gymnázium sv. T. Akvinského, Košice

Kategória P

1.	Marián DVORSKÝ	3, Gymnázium Šrobárova, Košice
2.	Radovan BAUER	2, Gymnázium Poštová, Košice
3.	Martin MACKO	3, Gymnázium Školská, Spišská Nová Ves
4.	Zuzana VLČKOVÁ	3, Gymnázium Alejová, Košice
5.	Tomáš DZETKULIČ	2, Gymnázium P.Horova, Michalovce
6.–7.	Oto CIULIS	4, SPŠE Komenského, Košice
	Štefan BIGOŠ	4, Gymnázium Školská, Spišská Nová Ves
8.	Miroslav RUDIŠIN	3, Gymnázium Šrobárova, Košice

Výsledková listina kategórie Z9 nebola dodaná do uzávierky ročenky.

Kraj Prešov

Kategória A

1.	Igor GOMBOŠ	3, Gymnázium P.O. Hviezdoslava, Kežmarok
2.	Matej KRIŽAN	4, Gymnázium D. Tatarku, Poprad
3.	Alexandra SAXOVÁ	4, Gymnázium Konštantínova, Prešov
4.	Helena HOVANCOVÁ	1, Gymnázium Popr. nábrežie, Poprad

Kategória P

1.	Slavomír KATUŠČÁK	4, Gymnázium Konštantínova Prešov
2.	František GALČÍK	4, Gymnázium Stropkov
3.–4.	Peter HRUŠOVSKÝ	3, Gymnázium D. Tatarku, Poprad
	Michal RJAŠKO	1, Gymnázium, Vranov nad Topľou
5.	Juraj LACA	4, Gymnázium Svidník

Výsledkové listiny kategórií B, C a Z9 neboli dodané do uzávierky ročenky.

Zadania súťažných úloh

Kategória C

C – I – 1

Pri delení istého prirodzeného čísla číslami 19 a 99 dostaneme ako zvyšky dve prvočísla. Súčet oboch neúplných podielov sa rovná 1 999. Určte delené číslo.

(J. Šimša)

C – I – 2

Nájdite všetky pravouhlé trojuholníky, v ktorých spojnica stredov vpísanej a opísanej kružnice zviera s preponou uhol 45°.

(M. Krállová)

C – I – 3

Zistite najmenšie prirodzené číslo k, pre ktoré platia jednotlivé tvrdenia a), b) a c): Ak obsadíme figúrkami ľubovoľných k polí šachovnice 8×8, budú obsadené niektoré

a) tri susedné polia niektorého riadku,
b) tri susedné polia niektorého šikmého radu,
c) štyri susedné polia niektorého riadku alebo stĺpca.

Šikmým radom rozumieme takú skupinu polí, ktorých uhlopriečky jedného z oboch smerov ležia na jednej a tej istej priamke.

(J. Šimša)

C – I – 4

Juro zhotovil papierový model pravidelného štvorbokého ihlana $ABCDV$ s podstavou $ABCD$. Keď potom model rozrezal pozdĺž štyroch hrán, bolo ho možné rozvinúť (bez prekrytia) do roviny. Koľko rôznych sietí daného ihlana tak mohol Juro dostať? Ukázalo sa, že sieť, ktorú Juro dostal, mala tvar (nekonvexného) sedemuholníka. Vypočítajte uhol AVB v bočnej stene ihlana.

(P. Leischner)

C – I – 5

V číselnom výraze

$$+1+2+3-4-5-6+7+8+9-10-11-12+\cdots+595+596+597-598-599-600),$$

v ktorom chýba ľavá zátvorka, sú postupne vypísané všetky prirodzené čísla od 1 do

600; pred nimi sa pravidelne opakujú tri znamienka + a tri znamienka −. Doplňte ľavú zátvorku do výrazu tak, aby vyšiel výsledok 378.

(P. Černek)

C – I – 6

Daný je pravidelný šesťuholník $KLMNOP$. Zostrojte pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB tak, aby jeho vrchol C ležal na úsečke NP, body M, O, K ležali po rade na priamkach AB, BC, CA a aby priamka NP rozdelila trojuholník ABC na dve časti s rovnakým obsahom.

(K. Černeková)

C – S – 1

Nájdite najmenšie prirodzené číslo k, pre ktoré platí: Ak vyberieme ľubovoľných k rôznych čísel z množiny $\{1, 4, 7, 10, 13, \dots, 1\,999\}$, potom medzi vybranými existujú dve rôzne čísla, ktorých súčet sa rovná 2 000.

(J. Zhouf)

C – S – 2

Štvorec $ABCD$ a obdĺžnik $AEFD$ majú takú vzájomnú polohu, že bod B leží na kružnici vpísanej trojuholníku AEF. Vypočítajte pomer dĺžky a šírky obdĺžnika $AEFD$.

(J. Šimša)

C – S – 3

Ak celé kladné číslo N vydelíme číslom 19 a získaný neúplný podiel ďalej vydelíme číslom 99, vyjde nám pri druhom delení rovnaký neúplný podiel a rovnaký zvyšok, ako keď pôvodné číslo N vydelíme číslom 1 999. Určte ako najmenšie, tak aj najväčšie také číslo N.

(J. Šimša)

C – II – 1

Z dreva je vyrobených šesť zhodných pravidelných štvorbokých ihlanov a kocka. Stena kocky je zhodná s podstavami ihlanov. Určte pomer povrchu kocky a telesa, ktoré vznikne zlepením podstáv ihlanov so stenami kocky, ak je pomer objemov týchto telies $1 : 2$.

(P. Leischner)

C – II – 2

Milan zapísal za seba niekoľko prvých prirodzených čísel, vynechal pri tom len čísla 4, 9, 14, 19, 24, 29, ... Potom medzi zapísané čísla vpísal striedavo znaky mínus a plus, takže dostal výraz

$$1-2+3-5+6-7+8-10+11-12+13-15+\cdots$$

Nakoniec ešte vpísal ľavú zátvorku za každý znak mínus a rovnaký počet pravých zátvoriek zapísal až na koniec výrazu:

$$1-(2+3-(5+6-(7+8-(10+11-(12+13-(15+\cdots))))))$$

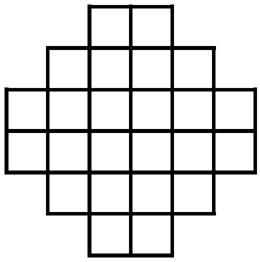
Výsledný výraz mal hodnotu 103. Koľko čísel bolo v Milanovom výraze? (Zistite všetky možnosti.)

(P. Černek)

C – II – 3

Aký najväčší počet figúrok je možné rozostaviť na jednotlivé polia hracej dosky z obrázku tak, aby v žiadnom šikmom rade neboli figúrkami obsadené žiadne tri susedné polia? Nezabudnite zdôvodniť, prečo väčší počet figúrok takto rozostaviť nemožno. (Šikmým radom rozumieme takú skupinu polí, ktorých uhlopriečky jedného z oboch smerov ležia na jednej priamke.

(J. Bábeľa)



C – II – 4

V rovine sú dané body A, L, M také, že $|AL| = 6{,}3\,\mathrm{cm}$, $|AM| = 5{,}6\,\mathrm{cm}$, $|LM| = 1{,}8\,\mathrm{cm}$. Zostrojte lichobežník $ABCD$, ktorému sa dá vpísať kružnica, ktorá sa dotýka ramena BC v bode L a základne CD v bode M (body dotyku so základňou AB a ramenom AD lichobežníka $ABCD$ nie sú dané).

(J. Šimša)

Kategória B

B – I – 1

Pre ktoré reálne čísla t má funkcia $f(x) = 5x + 44 + t \cdot |x-2| - 3 \cdot |x-t|$ maximum rovné 0?

(P. Černek)

B – I – 2

Označme S stred kružnice vpísanej ľubovoľnému trojuholníku ABC. Dokážte, že rovnosť $|AS| \cdot |BS| = |CS| \cdot |AB|$ platí práve vtedy, keď je uhol ACB pravý.

(J. Švrček)

B – I – 3

Určte reálne čísla a, b, pre ktoré má sústava

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2z^2 &= 16, \\ xyz^2 + xy + z^2 &= a, \\ x + y + 2z &= b \end{aligned}$$

v obore reálnych čísel práve jedno riešenie.

(J. Bábeľa)

B – I – 4

Sú dané kružnice k a l s rôznymi polomermi, ktoré sa dotýkajú zvonku v bode T. Priesečníkom M dvoch ich spoločných dotyčníc veďme sečnicu s oboch kružníc. Označme X ten z oboch priesečníkov kružnice k so sečnicou s, ktorý je vzdialenejší od bodu M. Podobne označme Y ten z oboch priesečníkov kružnice l so sečnicou s, ktorý je vzdialenejší od bodu M. Nech P je taký bod, že $XTYP$ je rovnobežník. Určte množinu bodov P odpovedajúcich všetkým takým sečniciam s.

(J. Zhouf)

B – I – 5

Deväťsten $ABCDEFGHV$ vznikol zlepením kocky $ABCDEFGH$ a pravidelného štvorbokého ihlana $EFGHV$. Na každú stenu tohoto deväťstena sme napísali číslo. Štyri z napísaných čísel sú 25, 32, 50 a 57. Pre každý vrchol deväťstena $ABCDEFGHV$ sčítame čísla na všetkých stenách, ktoré ho obsahujú. Dostaneme tak deväť rovnakých súčtov. Určte zvyšných päť čísel napísaných na stenách tohoto telesa.

(K. Černeková)

B – I – 6

Daný je rovnostranný trojuholník XYZ s ťažiskom T a stranou dĺžky 5 cm. Zostrojte rovnobežník $ABCD$ s obsahom 8 cm^2 a stranou AB dĺžky 2 cm tak, aby body X, Y, Z, T ležali po rade na priamkach AB, BC, CD, DA.

(M. Krállová)

B – S – 1

Pre ktoré reálne čísla a, b je funkcia

$$f(x) = a|x-1| + b(x-3) + |x-b| + x - 1$$

ohraničená?

(J. Bábeľa)

B – S – 2

Daná je úsečka XZ dĺžky 7 cm a jej body S, Y tak, že $|XS| = 2\,\text{cm}$, $|YZ| = 1\,\text{cm}$. Zostrojte pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB tak, aby bod S bol stredom kružnice vpísanej trojuholníku ABC a body X, Y, Z ležali po rade na priamkach AC, AB, BC.

(P. Černek)

B – S – 3

Do výrazu

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots + 99 - 100$$

sme vpísali niekoľko zátvoriek tak, že nakoniec sú v každej dvojici odpovedajúcich si zátvoriek práve tri čísla a výraz neobsahuje žiadny súčin. Koľko rôznych výsledkov môžeme takto dostať?

(P. Černek)

B – II – 1

Nájdite všetky reálne čísla c, pre ktoré má rovnica

$$(c^2 + c - 8)(x + 2) - 8|x - c + 2| = c|x + c + 14|$$

nekonečne veľa riešení v obore celých čísel.

(J. Šimša)

B – II – 2

Deväťsten vznikol zlepením kocky a pravidelného štvorbokého ihlana. Na každej stene tohto deväťstena je napísané jedno číslo. Ich súčet je 3 003. Pre každú stenu S uvažovaného deväťstena sčítame čísla na všetkých stenách, s ktorými má S spoločnú práve jednu hranu. Dostaneme tak deväť rovnakých súčtov. Určte všetky čísla napísané na stenách deväťstena.

(K. Černeková)

B – II – 3

Daný je lichobežník $ABCD$, v ktorom $|AB| = 8\,\text{cm}$ a $|\sphericalangle ABC| = 90^\circ$. Jeho obvod je 28 cm. Polkružnica k s priemerom AB sa dotýka strany CD. Vypočítajte dĺžky zvyšných strán daného lichobežníka, ak strana AB je jeho

a) základňou,

b) ramenom.

(Smutná)

B – II – 4

Daný je obdĺžnik $KLMN$, $|KN| > |KL|$. Zostrojte rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB dĺžky $|KL|$ tak, aby jeho výška v_a obsahovala body K, N, výška v_b bod L a výška v_c bod M. (Výškami tu rozumieme priamky.)

(K. Černeková)

Kategória A

A – I – 1

Nech $P(x)$, $Q(x)$ sú kvadratické mnohočleny také, že čísla -22, 7, 13 sú tri z koreňov rovnice $P\big(Q(x)\big) = 0$. Určte štvrtý koreň tejto rovnice.

(P. Černek)

A – I – 2

Nech K, L, M sú po rade vnútorné body strán BC, CA, AB daného trojuholníka ABC také, že kružnice vpísané dvojiciam trojuholníkov ABK a CAK, BCL a ABL, CAM a BCM majú vonkajší dotyk. Potom platí

$$|BK| \cdot |CL| \cdot |AM| = |CK| \cdot |AL| \cdot |BM|.$$

Dokážte.

Poznámka. Z uvedenej rovnosti vyplýva na základe Cèvovej vety, že priamky AK, BL, CM prechádzajú spoločným bodom.

(J. Švrček)

A – I – 3

V obore kladných reálnych čísel riešte sústavu

$$\begin{aligned}\sqrt{xy} + \sqrt{xz} - x &= a,\\ \sqrt{yz} + \sqrt{yx} - y &= b,\\ \sqrt{zx} + \sqrt{zy} - z &= c,\end{aligned}$$

kde a, b, c sú dané kladné čísla. *(R. Horenský)*

A – I – 4

V rovine je daných 1 999 zhodných trojuholníkov s obsahom 1, ktoré sú obrazmi jedného trojuholníka v rôznych posunutiach. Ak je prienikom všetkých daných trojuholníkov množina $\mathcal{M}$, ktorá obsahuje ťažisko každého z nich, je obsah množiny $\mathcal{M}$ aspoň $\frac{1}{9}$. Dokážte. *(M. Beneš)*

A – I – 5

Daná je funkcia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taká, že $f(n) = 1$, ak je n nepárne, a $f(n) = k$ pre každé párne číslo $n = 2^k l$, kde k je prirodzené číslo a l číslo nepárne. Určte najväčšie prirodzené číslo n, pre ktoré platí

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) \leqq 123\,456.$$

(S. Trávníček)

A – I – 6

Daný je štvorboký ihlan $ABCDV$ s podstavou $ABCD$. Jeho hrany AB, CD sú rovnobežné a roviny ABV a CDV navzájom kolmé. Označme P pätu výšky z vrcholu V na stranu AB v trojuholníku ABV a Q pätu výšky z vrcholu V na stranu CD v trojuholníku CDV. Dokážte nerovnosť

$$|AV|^2 + |BV|^2 + |CV|^2 + |DV|^2 \geqq |PQ|^2 + 2(S_{ABV} + S_{CDV} + S_{PQV}),$$

kde S_{XYZ} označuje obsah trojuholníka XYZ. Zistite tiež, kedy platí rovnosť. *(J. Bábeľa)*

A – S – 1

Určte, pre ktoré reálne čísla p má sústava rovníc

$$(x-y)^2 = p^2,$$
$$x^3 - y^3 = 16$$

práve jedno riešenie v obore reálnych čísel. *(J. Bábeľa)*

A – S – 2

Je daný trojuholník ABC. Vnútri jeho strán BC, CA, AB uvažujme po rade body K, L, M také, že úsečky AK, BL, CM sa pretínajú v bode U. Ak trojuholníky AMU a KCU majú obsah P a trojuholníky MBU a CLU obsah Q, potom $P = Q$. Dokážte. *(J. Švrček)*

A – S – 3

Určte najmenšie prirodzené číslo k, pre ktoré platí: Ak vyberieme ľubovoľných k rôznych čísel z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 2\,000\}$, tak medzi vybranými číslami existujú dve, ktorých súčet alebo rozdiel je 667.

(J. Šimša)

A – II – 1

Nech $P(x)$ je kvadratický trojčlen. Určte všetky korene rovnice

$$P(x^2 + 4x - 7) = 0,$$

ak viete, že medzi nimi je číslo 1 a aspoň jeden koreň je dvojnásobný.

(P. Černek)

A – II – 2

Daný je rovnoramenný lichobežník $UVST$, v ktorom $3|ST| < 2|UV|$. Zostrojte rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB tak, aby body B, C ležali na priamke VS, bod U na priamke AB a bod T bol ťažiskom trojuholníka ABC.

(P. Černek)

A – II – 3

Dokážte, že pre ľubovoľné kladné čísla a, b platí nerovnosť

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \leqq \sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}.$$

Zistite, kedy nastane rovnosť. *(J. Šimša)*

A – II – 4

Určte všetky konvexné štvoruholníky $ABCD$ s nasledujúcou vlastnosťou: Vnútri štvoruholníka $ABCD$ existuje bod E taký, že každá priamka, ktorá prechádza týmto bodom a pretína strany AB a CD vo vnútorných bodoch, delí štvoruholník $ABCD$ na dve časti s rovnakým obsahom. Svoju odpoveď zdôvodnite.

(P. Černek, J. Švrček)

A – III – 1

Nech n je prirodzené číslo. Dokážte, že súčet $4 \cdot 3^{2^n} + 3 \cdot 4^{2^n}$ je deliteľný trinástimi práve vtedy, keď n je párne.

(J. Šimša)

A – III – 2

Daný je rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB. Na jeho výške CD je zvolený bod P tak, že kružnice vpísané trojuholníku ABP a štvoruholníku $PECF$ sú zhodné; pritom bod E je priesečník priamky AP so stranou BC a F priesečník priamky BP so stranou AC. Dokážte, že aj kružnice vpísané trojuholníkom ADP a BCP sú zhodné.

(J. Šimša, K. Horák)

A – III – 3

V rovine je daných 2 000 zhodných trojuholníkov s obsahom 1, ktoré sú obrazmi toho istého trojuholníka v rôznych posunutiach. Každý z týchto trojuholníkov obsahuje ťažiská všetkých ostávajúcich. Dokážte, že obsah zjednotenia týchto trojuholníkov je menší ako $\frac{22}{9}$.

(P. Calábek)

A – III – 4

Pre ktoré kvadratické funkcie $f(x)$ existuje taká kvadratická funkcia $g(x)$, že korene rovnice $g\bigl(f(x)\bigr) = 0$ sú štyri rôzne po sebe idúce členy aritmetickej postupnosti a súčasne sú aj koreňmi rovnice $f(x)g(x) = 0$?

(P. Černek)

A – III – 5

Monika zhotovila papierový model trojbokého ihlana, ktorého podstavou bol pravouhlý trojuholník. Keď model rozrezala pozdĺž odvesien podstavy a pozdĺž ťažnice jednej zo stien, vznikol po rozvinutí do roviny štvorec so stranou a. Určte objem tohoto ihlana.

(P. Leischner)

A – III – 6

Nájdite všetky štvormiestne čísla $\overline{abcd}$ (v desiatkovej sústave), pre ktoré platí rovnosť

$$\overline{abcd} + 1 = (\overline{ac} + 1)(\overline{bd} + 1).$$

(J. Zhouf)

Riešenia súťažných úloh

Kategória C

C – I – 1

Obe delenia hľadaného čísla N vyjadríme rovnosťami

$$N = 19a + p \quad \text{a} \quad N = 99b + q,$$

kde a, b sú príslušné neúplné podiely a p, q príslušné zvyšky. Podľa zadania sú čísla p, q prvočísla, pričom ako zvyšky spĺňajú nerovnosti $p < 19$ a $q < 99$. Nezáporné celé čísla a, b sú podľa zadania zase také, že ich súčet sa rovná číslu 1 999. Preto platí $b = 1\,999 - a$ a z dvojitého vyjadrenia čísla N,

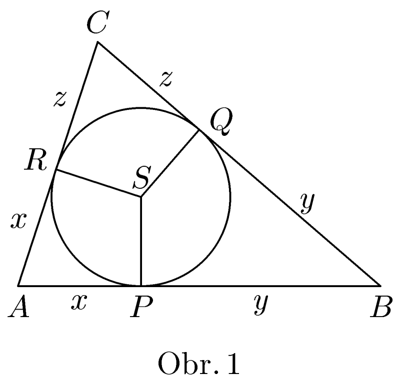
$$N = 19a + p = 99 \cdot (1\,999 - a) + q,$$

odvodíme rovnosť $118a + (p - q) = 197\,901$. Pretože rozdiel zvyškov $p - q$ je „malé" číslo, presnejšie $-99 < p - q < 19$, je podľa poslednej rovnosti číslo $118a$ taký násobok čísla 118, ktorý leží medzi číslami $197\,901 - 19$ a $197\,901 + 99$. Delením $197\,901 : 118$ zistíme, že $197\,901 = 1\,677 \cdot 118 + 15$. Preto nutne platí $a = 1\,677$ (takže $b = 322$) a $p - q = 15$. Z poslednej rovnosti vyplýva, že jedno z prvočísel p, q je nepárne a druhé párne, teda $q = 2$ a $p = 17$. Ostáva vypočítať hodnotu N:

$$N = 19 \cdot 1\,677 + 17 = 99 \cdot 322 + 2 = 31\,880.$$

Odpoveď: Hľadané číslo je rovné 31 880.

C – I – 2



Obr. 1

Časť A. Predpokladajme, že kružnica vpísaná *všeobecnému* trojuholníku ABC sa dotýka strán AB, BC, AC po rade v bodoch P, Q a R (obr. 1). Z hodín geometrie žiaci vedia o súmernosti oboch dotyčníc vedených z daného bodu k danej kružnici. Úsečky AP a AR sú teda zhodné, rovnako ako úsečky BP a BQ a úsečky CQ a CR. Ukážeme, ako možno dĺžky

$$x = |AP| = |AR|, \; y = |BP| = |BQ|, \; z = |CQ| = |CR|$$

vyjadriť pomocou dĺžok strán $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$. Podľa obr. 1 platí

$$x + y = c, \; y + z = a, \; x + z = b,$$

čo je sústava troch lineárnych rovníc, z ktorej ľahko plynú užitočné vzorce

$$x = \frac{b+c-a}{2}, \; y = \frac{a+c-b}{2}, \; z = \frac{a+b-c}{2}.$$

Časť B. Teraz predpokladajme, že ABC je *pravouhlý* trojuholník s preponou AB. Označme S stred kružnice vpísanej a Q, R jej body dotyku s odvesnami BC, AC (obr. 2). Pretože $SQCR$ je pravouholník, ktorého susedné strany SQ a SR sú zhodné (majú dĺžku rovnú polomeru ϱ kružnice vpísanej), jedná sa o štvorec o strane ϱ. Dĺžku úseku $z = |CQ|$ sme však vypočítali v časti A. Tak pre polomer ϱ kružnice vpísanej pravouhlému trojuholníku s odvesnami a, b a preponou c dostávame vzorec

$$\varrho = \frac{a+b-c}{2}.$$

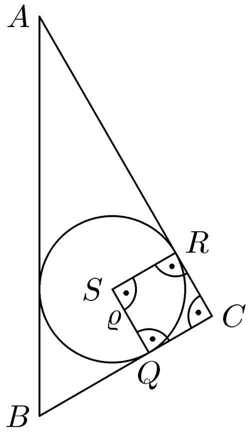
Časť C. Predpokladajme konečne, že ABC je pravouhlý trojuholník s preponou AB, ktorý spĺňa podmienku z textu úlohy. Podľa Tálesovej vety je stred O kružnice opísanej trojuholníku ABC stredom prepony AB. Podľa zadania má jeden z uhlov SOA, SOB (kde S je stred vpísanej kružnice) veľkosť 45°; nech je to uhol SOB (obr. 3), inak prehodíme označenie vrcholov A, B. Bod P, v ktorom sa kružnica vpísaná dotýka strany AB, je potom vnútorným bodom úsečky OB. Podľa časti A platí vzorec $|BP| = \frac{1}{2}(a + c - b)$, takže

$$|OP| = |OB| - |BP| = \frac{c}{2} - \frac{a+c-b}{2} = \frac{b-a}{2}.$$

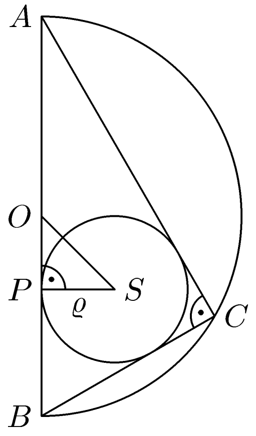
Vyjadrili sme dĺžku odvesny OP pravouhlého trojuholníka SOP. Jeho druhá odvesna SP má podľa časti B dĺžku $|SP| = \varrho = \frac{1}{2}(a+b-c)$. Pretože však uhol SOP má podľa predpokladu veľkosť 45°, je trojuholník SOP rovnoramenný:

$$|OP| = |SP|, \text{ alebo } \frac{b-a}{2} = \frac{a+b-c}{2}, \text{ alebo } 2a = c.$$

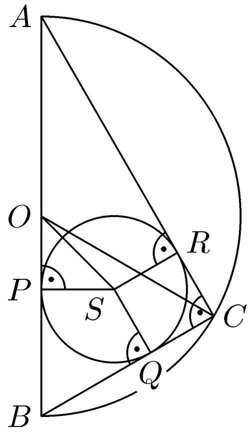
Strany pravouhlého trojuholníka ABC sú preto v pomere $a : b : c = 1 : \sqrt{3} : 2$, takže jeho vnútorné uhly sú, ako je dobre známe, 30°, 60° a 90°. Pre úplnosť je treba ešte ukázať, že taký trojuholník skutočne požadovanú vlastnosť má. To možno urobiť obrátením predchádzajúceho postupu: z rovnosti $2a = c$ sa odvodí rovnosť $|OP| = |SP|$,



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

ktorá znamená, že pravouhlý trojuholník SOP je rovnoramenný, takže uhol SOP má skutočne veľkosť 45°.

Stručné riešenie podľa obr. 4: Úsečka SO zviera s preponou AB uhol 45° práve vtedy, keď $|OP| = |SP|$. Pretože však $|SP| = |SR| = |QC|$ a $|PB| = |QB|$, je rovnosť $|OP| = |SP|$ ekvivalentná s rovnosťou $|OP| + |PB| = |QC| + |QB|$, teda s rovnosťou $|OB| = |BC|$. Podľa Tálesovej vety však vždy platí $|OB| = |OC|$, takže rovnosť $|OB| = |BC|$ nastane práve vtedy, keď je trojuholník OBC rovnostranný, teda práve vtedy, keď uhol ABC meria 60°.

Odpoveď: Požadovanú vlastnosť majú práve tie pravouhlé trojuholníky, ktorých ostré vnútorný uhly majú veľkosť 30° a 60°.

C – I – 3

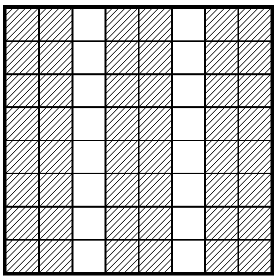
Riešenie časti a) súťažnej úlohy: Všimneme si, že v každom riadku je možné obsadiť nanajvýš šesť políčok tak, aby medzi obsadenými neboli žiadne tri susedné políčka. Preto je možné na celej šachovnici obsadiť nanajvýš $8 \times 6 = 48$ políčok tak, aby v žiadnom riadku neboli obsadené tri susedné políčka. Inak povedané, ak obsadíme *ľubovoľných* 49 políčok, potom obsadené budú niektoré tri susedné políčka niektorého riadku. Tento jav nenastane pre (jediné) obsadenie 48 políčok, ktoré vidíte na obr. 5, kde sú obsadené políčka vyznačené šrafovaním (zmienená jedinečnosť vyplýva z toho, že je to jediné možné obsadenie šiestimi políčkami v každom riadku). Preto je hľadané číslo k rovné 49.

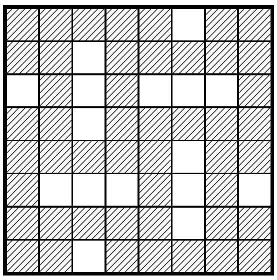
Riešenie časti b): Skúsme postupovať podobne ako pri riešení časti a). Vyberme teda jeden z oboch smerov šikmých radov, napríklad smer „zľava zdola napravo hore“ a posúďme, koľko políčok je možné obsadiť v jednotlivých šikmých radách vybraného smeru tak, aby v žiadnej z nich neboli obsadené žiadne tri susedné políčka. Počty všetkých políčok v týchto 15 radách sú (zhora dole) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 a 1; preto v nich možno požadovaným spôsobom (pri požadovanej podmienke) obsadiť po rade najviac 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2 a 1 políčko (znovu uplatníme úvahu o disjunktných trojiciach susedných políčok ako v návodnej úlohe). Preto je možné na celej šachovnici obsadiť najviac

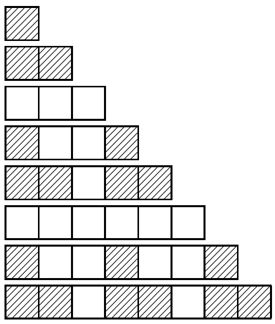
$$1+2+2+3+4+4+5+6+5+4+4+3+2+2+1=48$$

políčok tak, aby neboli obsadené žiadne tri susedné políčka, ani žiadne šikmé rady vybraného smeru. Ak obsadíme s touto podmienkou v každej z uvažovaných 15 šikmých radov najväčší možný počet polí vhodným spôsobom (v radách o 1, 2, 5 a 8 políčkach je toto „maximálne“ obsadenie jediné, ale nie v radách o 3, 4, 6 a 7 políčkach , zvoľme i v nich obsadenie z pohľadu zľava doprava typu XXOXXO…), dostaneme na celej šachovnici opäť obsadenie 48 políčok z obrázku 5. Čo je dôležité: pri tomto obsadení tiež v šikmých radoch druhého smeru nie sú nikde obsadené tri susedné políčka! Zhrňme, čo sme zistili:

1. Ak obsadíme na šachovnici ľubovoľných 49 políčok, budú medzi nimi tri susedné políčka niektoreho šikmého radu zvoleného smeru.
2. Na šachovnici možno obsadiť 48 políčok tak, aby medzi nimi neboli žiadne tri susedné políčka, ani žiadne šikmé rady (jedného aj druhého smeru).

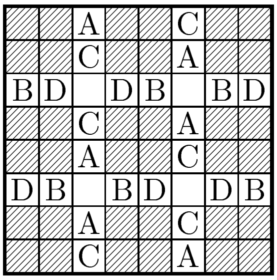

Obr. 5


Obr. 6

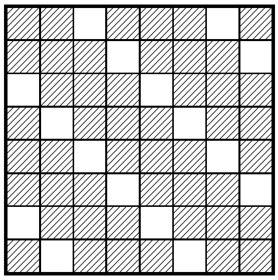

Obr. 7

To znamená, že pre časť b) úlohy je hľadané číslo k rovné 49. Dodajme, že existujú práve štyri rôzne obsadenia 48 políčok zmienených v (2). Okrem úplného obsadenia šiestimi stĺpcami z obrázku 5 a obsadenie, ktoré je jeho otočením o 90° (je teda úplným obsadením šiestimi radmi), je to zaujímavé obsadenie z obrázku 6 a jeho „zrkadlové preklopenie“.

Dôkaz: Ako vieme, pri každom obsadení 48 políčok zmienenom v (2) musí byť v každej šikmej rade šachovnice obsadený najväčší možný počet políčok (výpis týchto maximálnych počtov sme uviedli vyššie); na obr. 7 sú znázornené rady políčok dĺžok 1 až 8, šrafovaním sú v nich vyznačené práve tie políčka, ktoré sú *nutne obsadené*, ak je v celej rade ľubovoľne obsadený príslušný maximálny počet políčok (pripomíname podmienku: obsadené nie sú žiadne tri susedné políčka); znovu zopakujme, že všetky obsadené políčka sú vyznačené len v radách o 1, 2, 5 a 8 políčkach. Odtiaľ vyplýva, že pri ľubovoľnom obsadení 48 políčok zmienenom v (2) je nutne obsadených 36 políčok vyznačených na obr. 8; ďalej už je ľahké ukázať, že ostávajúcich 12 obsadených políčok je tvorených dvoma šesticami políčok značených na obr. 8 jednou z dvojíc písmen: A



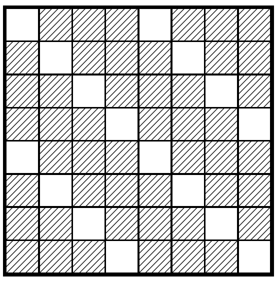
Obr. 8



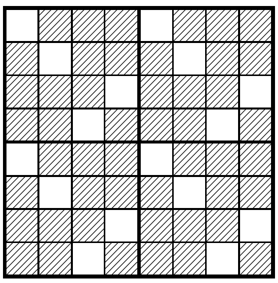
Obr. 9

a C, B a C, A a D alebo B a D (obrázok 5 odpovedá dvojici písmen B a D, obrázok 6 dvojici A a D).

Riešenie časti c): Ako v časti b) sa zaujímame o skupiny políčok dvoch smerov, v tomto prípade o riadky a stĺpce. Posudzujme napríklad najprv, koľko políčok možno obsadiť v jednotlivých riadkoch tak, aby v žiadnom z nich neboli obsadené štyri susedné políčka. Ako zistíme pomocou rozdelenia riadku na dve štvorice susedných políčok, obsadených políčok bude v každom riadku najviac šesť. Preto možno na celej šachovnici obsadiť najviac $8 \times 6 = 48$ políčok tak, aby v žiadnom riadku neboli obsadené štyri susedné políčka. Inak povedané: ak obsadíme ľubovoľných 49 políčok, potom obsadené budú štyri susedné políčka niektorého riadku. (Je zaujímavé porovnať tento záver s podobným záverom z riešenia časti a), kde sme sa nezaujímali o štvorice, ale o trojice susedných políčok.) Teraz samozrejme vzniká otázka, či je možné na šachovnici obsadiť 48 políčok tak, aby neboli obsadené štyri susedné políčka nielen v žiadnom riadku, ale ani v žiadnom stĺpci. Takéto obsadenia existujú, dva príklady vidíte na obr. 9 a 10. Preto aj v časti c) je hľadané číslo k rovné 49. Bez dôkazu dodajme ešte popis všetkých obsadených 48 políčok šachovnice, kedy medzi obsadenými políčkami nie sú štyri susedné políčka žiadneho riadku ani stĺpca: Celú šachovnicu rozdelíme na štyri štvrtiny 4×4, na jednej z nich, napríklad ľavej hornej časti, obsadíme zo 16 políčok práve 12 tak, aby v nej ostalo neobsadené práve jedno políčko v každom zo štyroch riadkov i v každom zo štyroch stĺpcov (to je možné urobiť $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ spôsobmi, jeden z nich, odlišný od spôsobov z obr. 9 a 10, je na obr. 11), a toto obsadenie zhodne prenesieme vodorovnými a zvislými posunutiami o štyri políčka do ostatných troch štvrtín celej šachovnice.



Obr. 10



Obr. 11

Odpoveď: Hľadané číslo k je pre každú z častí a)–c) rovné tomu istému číslu 49 (poradovému číslu tohto ročníka MO).

C – I – 4

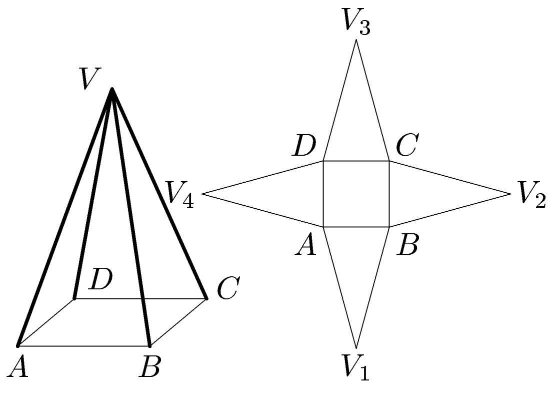
Počet rôznych sietí daného ihlana určíme tak, že najprv všetky možné siete nakreslíme. Aby sme niektorú možnosť nevynechali, mali by sme do výpisu sietí vniesť *určitý systém*. Popíšeme dva prístupy, ktoré taký systém vytvárajú.

Prístup 1 („od siete k ihlanu"). Každá sieť bude zložená z jedného štvorca so stranou a a štyroch rovnoramenných trojuholníkov so stranami a, b, b, kde a označuje dĺžku podstavnej hrany a b dĺžku bočnej hrany daného ihlana $ABCDV$. Premýšľajme teda o tom, ako taký štvorec a štyri trojuholníky „zlepiť" pozdĺž zhodných strán do „celku" a či tento celok skutočne vytvorí sieť ihlana. Je veľmi prirodzené rozčleniť riešenie tejto úlohy *podľa počtu strán štvorca, ktoré budú zlepené* (možné počty sú 1 až 4).

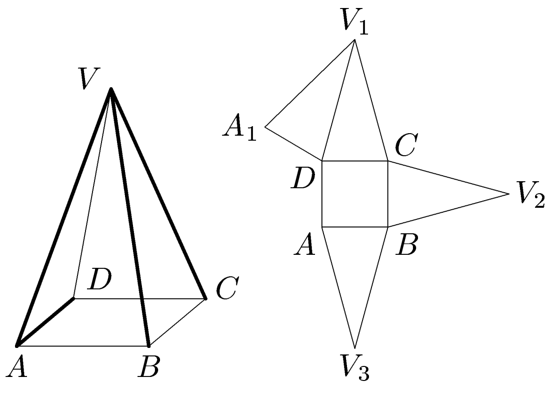
Prístup 2 („od ihlana k sieti"). Premýšľajme o tom, ako rozrezať daný ihlan $ABCDV$ pozdĺž štyroch hrán, aby sme po rozvinutí dostali jeho sieť. (Čoskoro si pri tom uvedomíme jeden všeobecný poznatok: z každého vrcholu telesa musí vychádzať aspoň jedna hrana rezu.) Pretože nám ide o počet rôznych (t.j. po dvoch nezhodných) sietí, s ohľadom na symetriu daného ihlana nie je príliš vhodné systematizovať štvorice hrán rezu podľa toho, či obsahujú niektoré konkrétne hrany (ako napr. hrany AB, AV apod.). Výhodnejšie je rozdelenie týchto štvoríc do skupín podľa toho, *koľko hrán rezu je v ihlane podstavných* (a koľko bočných).

Pretože obidva popísané prístupy vedú k zhodnej systematizácii (ak je práve k hrán rezu podstavných, je v príslušnej sieti práve $4-k$ strán štvorce zlepených s trojuholníkmi), popíšeme výpis všetkých sietí len podľa Prístupu 2:

1. Ak neleží v podstave $ABCD$ žiadna hrana rezu, je ihlan rozrezaný pozdĺž všetkých štyroch bočných hrán, príslušná sieť je na obr. 12.



Obr. 12



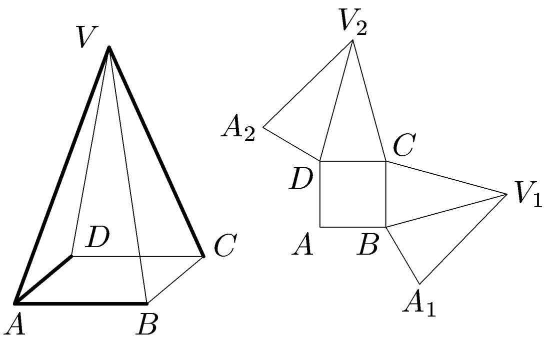
Obr. 13

2. Predpokladajme, že v podstave $ABCD$ leží jediná hrana rezu, napríklad hrana AD. Z vrcholov B a C musia vychádzať nejaké hrany rezu, môžu to teda byť jedine hrany BV a CV. Tri hrany rezu sú teda AD, BV a CV, s ohľadom na

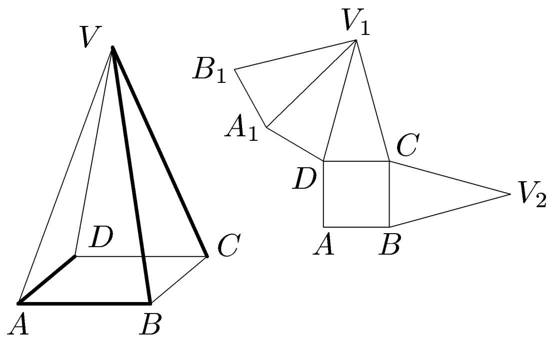
symetriu je jedno, či je štvrtou hranou rezu AV alebo DV, nech je to teda hrana AV ako na obr. 13.

3. Predpokladajme, že v podstave $ABCD$ ležia práve dve hrany rezu. Rozlíšme, či sú to hrany susedné (napr. AB a AD), alebo hrany náprotivné (napr. AD a BC); pre väčšiu prehľadnosť oba prípady posúďme v oddelených odstavcoch:

(3a) Ak je podstava rozrezaná práve pozdĺž hrán AB a AD (takže rezom v podstave je lomená čiara BAD), musí byť treťou hranou rezu hrana CV, štvrtá hrana rezu je potom jedna z hrán AV, BV, alebo DV. S ohľadom na symetriu prípadov, kedy je štvrtou hranu rezu BV alebo DV, uvádzame len obrázky pre hrany rezu AV (obr. 14) a BV (obr. 15).

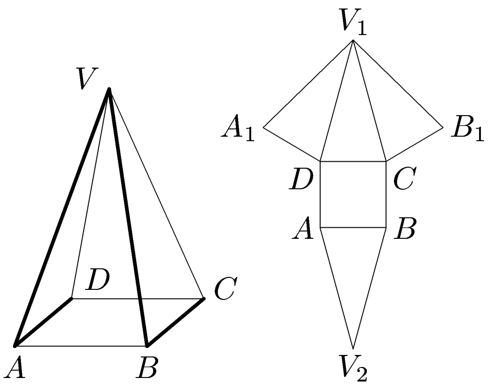


Obr. 14

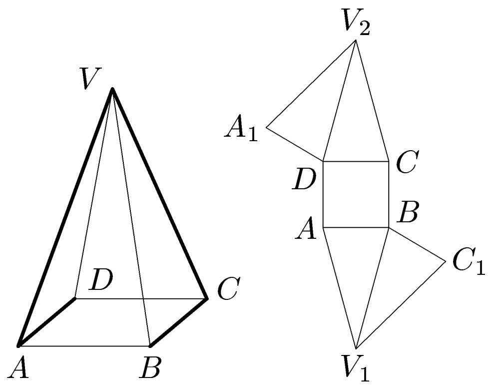


Obr. 15

(3b) Ak je podstava rozrezaná práve pozdĺž hrán AD a BC, je treťou hranou rezu jedna z bočných hrán AV, DV a štvrtou hranou rezu jedna z bočných hrán BV, CV (nemôžu to totiž byť ani obe hrany AV, DV, ani obidve hrany BV, CV). S ohľadom na symetriu stačí rozlíšiť len dva prípady: bočné hrany rezu sú buď AV a BV (obr. 16), alebo AV a CV (obr. 17).



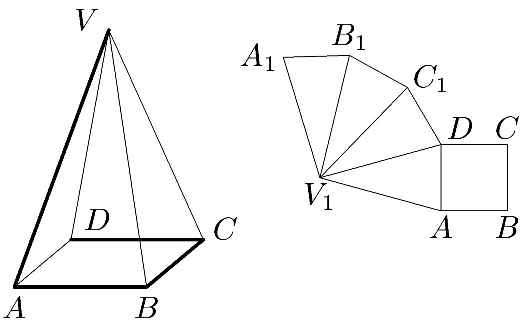
Obr. 16



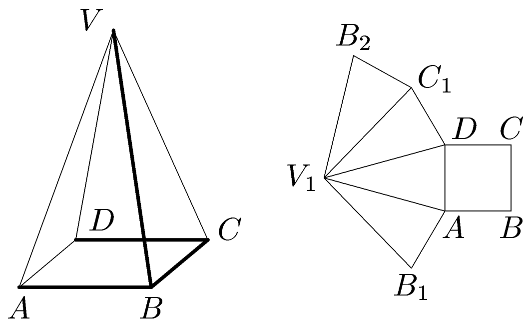
Obr. 17

4. Predpokladajme, že v podstave $ABCD$ ležia práve tri hrany rezu, napríklad hrany AB, BC a CD, takže rezom v podstave je lomená čiara $ABCD$. S ohľadom na

symetriu teraz stačí rozlíšiť len dva prípady: štvrtá hrana rezu vedie do vrcholu V buďto z jedného z oboch krajných vrcholov zmienenej lomenej čiary $ABCD$, napríklad bodu A (obr. 18), alebo z jedného z oboch prostredných vrcholov, napríklad bodu B (obr. 19).



Obr. 18



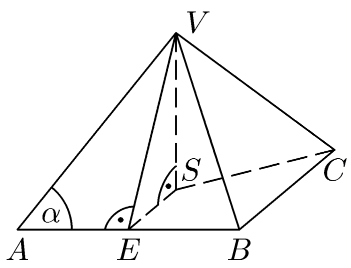
Obr. 19

Zistili sme, že daný ihlan má práve osem rôznych sietí.

Prejdeme teraz k druhej časti úlohy, otázke, kedy niektorá zo sietí daného ihlana má tvar nekonvexného sedemuholníka. Podľa obrázkov vidíme, že každá sieť má, všeobecne vzaté, osem vrcholov; ich počet sa zníži na sedem, práve keď sa uhol u jedného z ôsmich všeobecných vrcholov „napriami“, t.j. bude mať veľkosť 180°. Veľkosti všetkých dotyčných uhlov možno ľahko vyjadriť pomocou $\omega = |\measuredangle AVB|$ a $\alpha = |\measuredangle BAV|$; zistíme tak, že popísaná situácia nastane, len keď jeden z uhlov

$$2\alpha,\ \alpha + 90^\circ,\ 2\alpha + 90^\circ,\ 2\omega,\ 3\omega \text{ alebo } 4\omega \tag{$*$}$$

bude 180°. Položme si teraz trochu všeobecnejšiu otázku: Aké hodnoty α a ω sú prípustné, t.j. odpovedajú niektorému ihlanu $ABCDV$? Označme S stred štvorca $ABCD$ a E stred hrany AB (obr. 20), z pravouhlého trojuholníku EVS vyplýva, že $|EV| >$



Obr. 20

$> |ES|$ alebo $|EV| > |AE|$, preto pre uhol α v pravouhlom trojuholníku AVE platí $45^\circ < \alpha < 90^\circ$ (pre $\alpha = 45^\circ$ by sme dostali „zdegenerovaný“ ihlan s nulovou výškou, pre $\alpha = 90^\circ$ „ihlan“ s nekonečnou výškou, teda hranol). Zároveň je jasné, že pre každé $\alpha \in (45^\circ, 90^\circ)$ odpovedajúci ihlan existuje. Odtiaľ vzhľadom k rovnosti $2\alpha + \omega = 180^\circ$

vyplýva, že prípustné hodnoty ω zaplnia interval $(0^\circ, 90^\circ)$. Preto z uhlov $(*)$ môžu byť priame jedine uhly 3ω a 4ω. Pre $\omega = 60^\circ$ majú tvar sedemuholníka siete z obr. 15 a 16, pre $\omega = 45^\circ$ siete z obr. 18 a 19.

Odpoveď: Jurko mohol dostať práve osem rôznych sietí. Uhol AVB mal veľkosť 45° alebo 60°.

C – I – 5

Riešenie rozdelíme do piatich etáp.

Časť A. Podľa spôsobu opakovania znamienok rozdelíme daný výraz (ešte bez oboch zátvoriek) na 100 úsekov po šiestich číslach

$$+1+2+3-4-5-6,\ +7+8+9-10-11-12,$$
$$+13+14+15-16-17-18,\ \dots,$$
$$+589+590+591-592-593-594,\ +595+596+597-598-599-600$$

(hovorme im ďalej stručne „úseky“). Pri výpočte celého výrazu bude výhodné určovať „čiastkové súčty“ práve po týchto úsekoch: po doplnení chýbajúcej ľavej zátvorky sa totiž naruší „celistvosť“ jediného úseku (toho, do ktorého zátvorku doplníme).

Zapíšeme čísla v k-tom úseku ($k = 1, 2, 3, \dots, 100$) takto:

$$6k-5,\ 6k-4,\ 6k-3,\ 6k-2,\ 6k-1,\ 6k.$$

Časť B. Určíme teraz hodnoty výrazov tvorených jednotlivými úsekmi. Keď napríklad prvé číslo úseku označíme písmenom x, dostaneme:

$$x+(x+1)+(x+2)-(x+3)-(x+4)-(x+5) = (3x+3)-(3x+12) = -9.$$

(Na tomto mieste ešte nie je dôležité, že číslo x je tvaru $6k-5$.)

Časť C. Zistíme teraz možné hodnoty V skúmaného výrazu v prípade, keď chýbajúcu ľavú zátvorku vpíšeme pred číslo z niektorého konkrétneho úseku, napríklad toho, ktorý obsahuje číslo 100:

$$V = 1+\dots+\underbrace{*97+*98+*99-*100-*101-*102}_{\text{niekde sem doplníme zátvorku}}+103+\dots-600)$$

Hviezdičkami sme označili možné miesta pre doplňovanú zátvorku. Ľahko určíme, že pred číslom 97 je 16 úsekov, a že za číslom 102 je 83 úsekov ($16+83=99$, nezapočítaný stý úsek je tvorený číslami od 97 do 102). Je zrejmé, že pokiaľ umiestnime zátvorku na miesto pred číslo 97, 98 alebo 99, teda za znamienko plus, prispeje do výsledku V všetkých 100 úsekov číslom -9, takže vyjde $V = 100\cdot(-9) = -900$. Ak umiestnime zátvorku na miesto pred číslo 100, 101 alebo 102, teda za znamienko mínus, prispeje 16 úsekov (pred číslom 97) do výsledku V číslom -9, zatiaľ čo 83 úsekov (za číslom 102) prispeje číslom $-(-9) = 9$. So zátvorkou pred číslom 100 tak vyjde

$$V = 16\cdot(-9)+97+98+99-100+101+102+83\cdot 9 = 1\,000,$$

so zátvorkou pred číslom 101

$$V = 16 \cdot (-9) + 97 + 98 + 99 - 100 - 101 + 102 + 83 \cdot 9 = 798,$$

konečne so zátvorkou pred číslom 102

$$V = 16 \cdot (-9) + 97 + 98 + 99 - 100 - 101 - 102 + 83 \cdot 9 = 594.$$

Časť D. Konkrétny postup z Časti C teraz zopakujeme vo všeobecnej situácii, kedy zátvorku doplníme do k-teho úseku, na miesto niektorej z hviezdičiek:

$$\begin{aligned} V = 1 + \dots + *[6k-5] + *[6k-4] + *[6k-3] - \\ - *[6k-2] - *[6k-1] - *[6k] + \ldots - 600) \end{aligned}$$

(vyjadrenie čísel sme zapísali do *hranatých* zátvoriek kvôli odlíšenia od vpisovanej *oblej* zátvorky). V Časti C bolo k rovné číslu 17, teraz je to ľubovoľné prirodzené číslo od 1 do 100 vrátane. Pred číslom $6k-5$ je zrejme $(k-1)$ úsekov a za číslom $6k$ je $(100-k)$ úsekov. Pokiaľ umiestnime zátvorku na miesto pred číslo $6k-5$, $6k-4$ alebo $6k-3$, teda za znamienko plus, prispeje do výsledku V všetkých 100 úsekov číslom -9, takže vyjde $V = 100 \cdot (-9) = -900$. Ak umiestnime zátvorku na miesto pred číslo $6k-2$, $6k-1$ alebo $6k$, teda za znamienko mínus, prispeje prvých $(k-1)$ úsekov číslom -9, zatiaľ čo posledných $(100-k)$ úsekov prispeje číslom $-(-9) = 9$. So zátvorkou pred číslom $6k-2$ tak vyjde

$$\begin{aligned} V = (k-1) \cdot (-9) + [6k-5] + [6k-4] + [6k-3] - [6k-2] + [6k-1] + \\ + [6k] + (100-k) \cdot 9 = 898 + 6k, \end{aligned}$$

so zátvorkou pred číslom $6k-1$

$$\begin{aligned} V = (k-1) \cdot (-9) + [6k-5] + [6k-4] + [6k-3] - [6k-2] - [6k-1] + \\ + [6k] + (100-k) \cdot 9 = 900 - 6k, \end{aligned}$$

konečne so zátvorkou pred číslom $6k$

$$\begin{aligned} V = (k-1) \cdot (-9) + [6k-5] + [6k-4] + [6k-3] - \\ - [6k-2] - [6k-1] - [6k] + (100-k) \cdot 9 = 900 - 18k. \end{aligned}$$

Našli sme všetky možné hodnoty V skúmaného výrazu po doplnení ľavej zátvorky.

Časť E. Zistíme teraz všetky prípady, kedy výsledok V má hodnotu 378 zo zadania úlohy. Podľa Časti D stačí riešiť rovnice

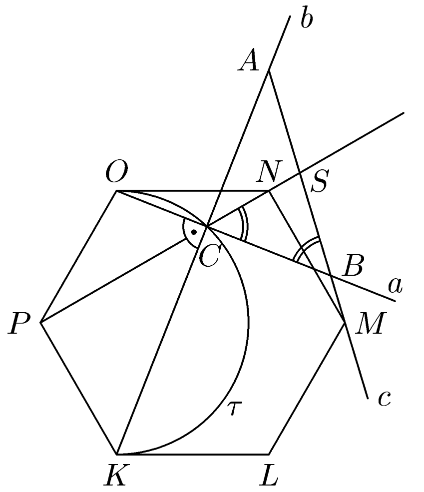
$$898 + 6k = 378, \; 900 - 6k = 378, \; 900 - 18k = 378$$

v obore prirodzených čísel k od 1 do 100. Riešenie má len druhá a tretia rovnica, a to $k = 87$ resp. $k = 29$. Hodnote $k = 87$ odpovedá umiestnenie zátvorky pred číslo $6k - 1 = 521$, hodnote $k = 29$ odpovedá umiestnenie zátvorky pred číslo $6k = 174$.

Odpoveď: Úloha má dve riešenia: zátvorku doplníme buďto bezprostredne pred číslo 521, alebo bezprostredne pred číslo 174.

C – I – 6

Z obrázka 21 je zrejmé, že bod C môžeme zostrojiť ako priesečník úsečky NP s Tálesovou kružnicou τ nad priemerom OK, lebo uhol OCK je pravý. Akonáhle takto nájdeme bod C, zostrojíme priamky $a = OC = BC$ a $b = KC = AC$. Všimnime si teraz trojuholník SBC. Podľa Tálesovej vety platí $|SC| = |SB|$, takže priamka a zviera zhodné ostré uhly s priamkami PN a AB (tieto uhly sú vyznačené na obrázku). Pretože priamka a je už zostrojená a priamka PN je určená zadaním



Obr. 21

úlohy, má podľa predchádzajúcej vety (zatiaľ neznáma) priamka $c = AB$ jednoznačne určený smer; pretože má táto priamka c naviac prechádzať daným bodom M, môžeme ju teraz zostrojiť. Potom už určíme vrcholy A a B ako priesečníky priamky c po rade s priamkami b a a. Tým je celý postup konštrukcie hotový. Dôkaz správnosti: výsledkom konštrukcie je zrejme pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB, ktorého vrchol C leží na úsečke NP a ktorého strany BC, CA, AB ležia po rade na priamkach a, b, c, ktoré prechádzajú po rade bodmi O, K, M; zostáva vysvetliť, prečo priesečník S priamky PN s preponou AB je jej stredom. To ale vyplýva z toho, že podľa konštrukcie má trojuholník SBC zhodné uhly pri vrcholoch B a C.

Zo vzájomnej polohy úsečky NP a kružnice τ nad priemerom OK vyplýva, že pre každý pravidelný šesťuholník $KLMNOP$ má úloha jediné riešenie.

C – S – 1

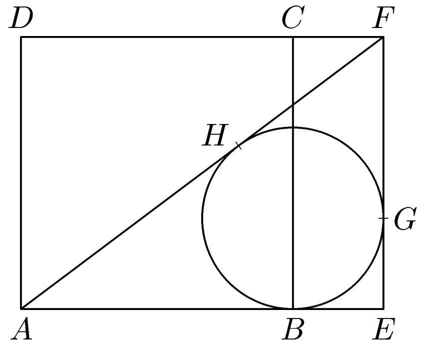
Označme $M = \{1, 4, 7, 10, 13, \dots, 1\,999\}$ a vypíšme všetky súčty dvoch *rôznych* (nebudeme ďalej zdôrazňovať) čísel z M, ktoré sa rovnajú číslu 2 000:

$$2\,000 = 1 + 1\,999 = 4 + 1\,996 = 7 + 1\,993 = \ldots = 997 + 1\,003.$$

S výnimkou jediného čísla 1 000 vystupuje každé číslo z M práve v jednom súčte (súčet $1\,000 + 1\,000$ sa podľa zadania neuvažuje). Pretože $997 = 1 + 3 \cdot 332$, je vypísaných práve 333 súčtov. Dá sa teda vybrať 334 čísel z M (po jednom z každého vypísaného súčtu spolu s číslom 1 000, teda napríklad čísla $1, 4, 7, \ldots, 997, 1\,000$) tak, že súčet žiadnych dvoch vybraných čísel nie je 2 000. Ak však vyberieme ľubovoľných 335 čísel z M, potom niektoré dve vybrané čísla sú sčítancami jedného z vypísaných súčtov (zopakujme: vypísaných súčtov je 333 a chýba v nich jediné číslo z M). Preto je $k = 335$ hľadaná hodnota.

C – S – 2

Pretože oba pravouholníky musia ležať v rovnakej polrovine s hraničnou priamkou AD, leží bod B na polpriamke AE. Preto sa spomínaná kružnica dotýka strany AE trojuholníka AEF práve v bode B. Body, v ktorých sa kružnica dotýka strán EF a FA, označme po rade G a H (obr. 22). Označme ešte $a = |AB| = |EF|$ a nech $|AE| = ka$,



Obr. 22

$k > 1$. Zo súmerností dvojíc dotyčníc ku kružnici vyplývajú rovnosti $|AH| = |AB| = a$, $|EG| = |EB| = |AE| - |AB| = (k-1)a$, $|FH| = |FG| = |EF| - |EG| = (2-k)a$, teda $|AF| = |AH| + |FH| = (3-k)a$. Pytagorova veta pre trojuholník AEF tak dáva rovnicu $(3-k)^2 = k^2 + 1$, ktorá je po úprave lineárna a má (jediný) koreň $k = \frac{4}{3}$.

Odpoveď: Hľadaný pomer je 4 : 3.

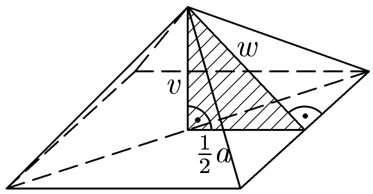
C – S – 3

Spomínané tri delenia zapíšeme rovnosťami $N = 19a + b$, $a = 99c + d$ a $N = 1\,999c + d$. Odtiaľ vyplýva, že $19(99c + d) + b = 1\,999c + d$, alebo $18d + b = 118c$. Najmenšie a najväčšie vyhovujúce N nájdeme podľa najmenšieho a najväčšieho možného neúplného podielu c (pri delení čísla N číslom 1 999). Z rovnosti $18d + b = 118c$ vyplýva predovšetkým, že $c > 0$ (keby bolo $c = 0$, bolo by $b = d = 0$, teda i $N = 0$, ale N je kladné); pre $c = 1$ z rovnosti $18d + b = 118$ usúdime, že $d = 6$ a $b = 10$ (lebo pre zvyšok b pri delení $N : 19$ platí $0 \leqq b \leqq 18$). Preto je najmenšie N rovné číslu $1\,999 \cdot 1 + 6 = 2\,005$. Aby sme zistili najväčšie N, poznamenajme najprv, že pre zvyšky d a b pri deleniach $a : 99$ a $N : 19$ platia nerovnosti $d \leqq 98$ a $b \leqq 18$, z ktorých vyplýva odhad $118c \leqq 18 \cdot 98 + 18$, odkiaľ $c \leqq 15$. Pre $c = 15$ však z rovnosti $18d + b = 118 \cdot 15$ vyplýva, že $d = 98$ a $b = 6$, lebo $0 \leqq b \leqq 18$ a $118 \cdot 15 = 1\,770 = 18 \cdot 98 + 6$. Najväčšie N sa teda rovná $1\,999 \cdot 15 + 98 = 30\,083$.

Odpoveď: Najmenšie vyhovujúce N je $2\,005$, najväčšie také N je $30\,083$.

C – II – 1

Povrch vzniknutého telesa je tvorený všetkými 24 bočnými stenami daných šiestich ihlanov. Označme v výšku týchto ihlanov a a dĺžku ich hrany podstavy (ktorá je zhodná s hranou danej kocky). Zo zadania úlohy vyplýva, že objem jedného ihlana je šestinou objemu kocky, teda $\frac{1}{3}a^2v = \frac{1}{6}a^3$, odkiaľ $v = \frac{1}{2}a$. Bočná stena ihlana je rovnoramenný trojuholník, pre ktorého výšku w z hlavného vrcholu (obr. 23) platí podľa Pytagorovej vety rovnosť $w^2 = v^2 + (\frac{1}{2}a)^2$, odkiaľ po dosadení $v = \frac{1}{2}a$ vychádza $w = \frac{\sqrt{2}}{2}a$. Preto je obsah bočnej steny ihlana rovný $\frac{1}{2}aw = \frac{\sqrt{2}}{4}a^2$. Výsledné teleso má povrch 24-krát väčší, teda $6\sqrt{2}a^2$, zatiaľ čo povrch kocky je $6a^2$.



Obr. 23

Odpoveď: Pomer povrchov pôvodnej kocky a výsledného telesa je $1 : \sqrt{2}$.

Poznámka. Za daných predpokladov vznikne zlepením teleso, ktoré bude mať dvanásť zhodných stien (tzv. kosoštvorcový dvanásťsten). Uvedené zhodné ihlany majú totiž v súčte rovnaký objem ako daná kocka a dostaneme ich, keď kocku rozdelíme na šesť zhodných ihlanov so spoločným hlavným vrcholom v strede kocky.

C – II – 2

V danom výraze odstránime zátvorky a čísla združíme do štvoríc:

$$\underbrace{1 - 2 - 3 + 5} + \underbrace{6 - 7 - 8 + 10} + \underbrace{11 - 12 - 13 + 15} + \underbrace{16 - 17 - 18 + 20} + \cdots$$

(posledná skupina je kratšia, ak nie je počet N všetkých čísel násobkom štyroch). Čísla v i-tej skupine ($i = 1, 2, \ldots$) tvoria výraz $(5i - 4) - (5i - 3) - (5i - 2) + 5i$, ktorého hodnota je zrejme rovná jednej (nezávisle od indexu i). Preto je hodnota V celého výrazu v prípade $N = 4k$ rovná $V = k$, v prípade $N = 4k + 1$ rovná $V = k + (5k + 1) = 6k + 1$, v prípade $N = 4k + 2$ rovná $V = k + (5k + 1) - (5k + 2) = k - 1$ a v prípade

$N = 4k + 3$ rovná $V = k + (5k + 1) - (5k + 2) - (5k + 3) = -4k - 4$. Ľahko sa zistí, kedy $V = 103$:

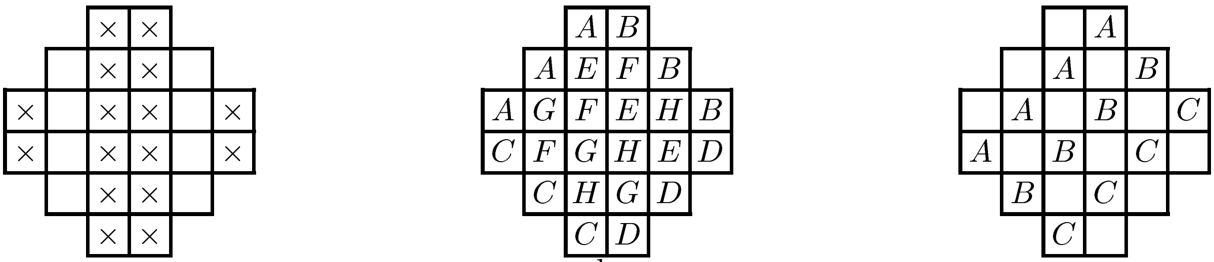
$$\begin{array}{llll}
N = 4k, & V = k = 103, & & N = 412, \\
N = 4k + 1, & V = 6k + 1 = 103, & k = 17, & N = 69, \\
N = 4k + 2, & V = k - 1 = 103, & k = 104, & N = 418, \\
N = 4k + 3, & V = -4k - 4 = 103, & k \notin \mathbb{N}. &
\end{array}$$

Odpoveď: V Milanovom výraze bolo buď 69, alebo 412, alebo 418 čísel.

C – II – 3

Príklad z obr. 24a ukazuje, že je možné požadovaným spôsobom rozostaviť 16 figúrok (obsadené polia sú označené krížikmi). Vysvetlíme teraz, prečo viac figúrok rozostaviť nemožno. Na obr. 24b vidíme rozdelenie všetkých polí dosky do ôsmych šikmých radov po troch poliach, keď polia toho istého radu-trojice sú označené rovnakým písmenom. Figúrkami je možné obsadiť nanajvýš dve polia v každom rade-trojici (2 polia A, 2 polia B, …, 2 polia H), spolu nanajvýš $8 \cdot 2 = 16$ polí.

Tvrdenie o tom, že nemožno rozostaviť viac ako 16 figúrok, zdôvodníme ešte inak, postupom podobným postupu z úlohy domáceho kola. Šikmé rady jedného smeru majú postupne 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3 polia, v ktorých možno obsadiť nanajvýš 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2 polia. Súčet posledných čísel je síce 17, ale keby v každom z troch uvažovaných radov so 4 poľami (rady polí A, polí B a polí C na obr. 24c) boli obsadené 3 polia, museli by byť obsadené všetky krajné polia týchto troch radov. Tie však tvoria dva šikmé rady-trojice druhého smeru (krajné šikmé rady ABC na obr. 24c).



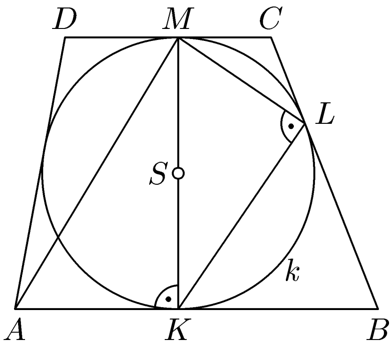
a b c

Obr. 24

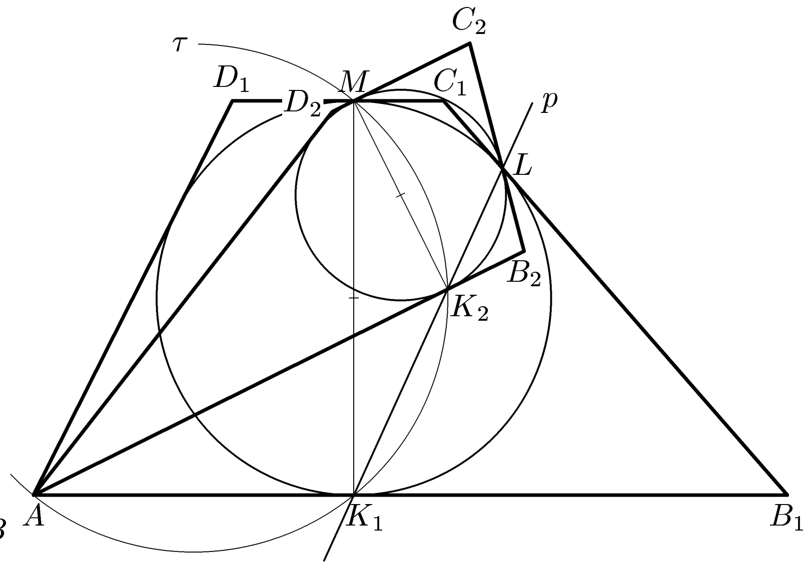
Odpoveď: Najväčší možný počet rozmiestených figúrok je 16.

C – II – 4

Označme k vpísanú kružnicu, S jej stred a K bod dotyku kružnice k so základňou AB (obr. 25). Pretože $AB \parallel CD$, $SK \perp AB$ a $SM \perp CD$, je KM priemer kružnice k. Preto sú obidva uhly AKM a KLM pravé, bod K teda zostrojíme ako priesečník Tálesovej kružnice τ nad priemerom AM s priamkou p, ktorá prechádza bodom L a je kolmá na LM. Zvyšok konštrukcie je ľahký: bod S určíme ako stred úsečky KM, zostrojíme kružnicu $k = (S, |SK|)$ a v bodoch L a M po rade jej dotyčnice b a c. Vrchol B potom určíme ako priesečník polpriamky AK s priamkou b, vrchol C ako priesečník priamok b a c a napokon vrchol D zostrojíme ako priesečník priamky c s dotyčnicou d kružnice k, ktorá je súmerne združená s dotyčnicou AK podľa osi AS. Pre trojuholník ALM zo zadania má kružnica τ s priamkou p spoločné dva body, ktoré sú na obr. 26 označené K_1, K_2, preto má úloha dve riešenia — lichobežníky $AB_1C_1D_1$ a $AB_2C_2D_2$.



Obr. 25



Obr. 26

Kategória B

B – I – 1

Daná funkcia je po častiach lineárna, pretože obsahuje dva výrazy s absolútnou hodnotou, ktoré spôsobujú, že jej grafom nie je priamka, ale lomená čiara. Jej definičný obor, množinu $\mathbb{R}$ všetkých reálnych čísel, môžeme v tomto prípade rozdeliť na tri disjunktné časti podľa toho, ako sa príslušná absolútna hodnota chová (či je výraz v absolútnej hodnote kladný, či záporný). Pretože jedna z absolútnych hodnôt závisí od parametra t, rozlíšime, či je $t < 2$ (prípad A), alebo $t \geqq 2$ (prípad B).

Riešenie 1. Rozlíšime dva prípady, podľa toho, či je $t < 2$ (prípad A), či $t \geqq 2$ (prípad B).

A. Nech $t < 2$. Množina $\mathbb{R}$ sa nám rozpadne na tri disjunktné intervaly, $\mathbb{R} = (-\infty, t\rangle \cup \cup (t, 2\rangle \cup (2, \infty)$.

(a) V intervale $(-\infty, t\rangle$ je, ako ľahko spočítame, $f(x) = (8-t)x + 44 - t$. Pretože za uvedeného predpokladu je $8 - t > 0$, je funkcia f v tomto intervale rastúca a nadobúda maximum v bode $x = t$.

(b) V intervale $(t, 2\rangle$ je $f(x) = (2-t)x + 44 + 5t$. Pretože za uvedeného predpokladu je $2 - t > 0$, je funkcia f aj v tomto intervale rastúca a nadobúda maximum v bode $x = 2$. Pritom zrejme platí $f(t) < f(2) = 2(2-t) + 44 + 5t$.

(c) V intervale $(2, \infty)$ je $f(x) = (2+t)x + 44 + t$. Táto funkcia je pre $2 + t > 0$ na tomto intervale rastúca a zhora neohraničená, takže nemôže mať maximum. Musí teda nutne byť $2 + t \leqq 0$, t.j. $t \leqq -2$, funkcia f bude v intervale $(2, \infty)$ nerastúca a jej hodnota nebude väčšia ako $f(2)$, ktorú sme spočítali v (b).

Zistili sme teda, že za predpokladu $t < 2$ nadobúda funkcia f maximum jedine pre $t \leqq -2$, pričom jej maximum je $f(2) = 2(2-t) + 44 + 5t$. Toto maximum sa rovná 0 práve vtedy, keď $2(2-t) + 44 + 5t = 0$, alebo $t = -16$, čo je našťastie číslo, ktoré spĺňa podmienku $t \leqq -2$.

B. Nech $t \geqq 2$. Množina $\mathbb{R}$ sa nám rozpadne na tri disjunktné intervaly, $\mathbb{R} = (-\infty, 2\rangle \cup \cup (2, t\rangle \cup (t, \infty)$, pričom prostredný „interval" bude prázdny pre $t = 2$ (to však nie je pre ďalšie úvahy podstatné, inak by sme mohli tento prípad ľahko rozobrať samostatne).

V intervale $(-\infty, 2\rangle$ je $f(x) = (8-t)x + 44 - t$. Keby teraz bolo $8 - t < 0$, bola by funkcia f v tomto intervale klesajúca a zhora neohraničená, takže by nemohla mať maximum. Preto je $8 - t \geqq 0$, t.j. $t \leqq 8$. Potom ale je $f(2) = 2(8-t) + 44 - t = 60 - 3t > > 0$. Odtiaľ hneď vidíme, že za uvedeného predpokladu nemôže mať funkcia f nikdy maximum rovné 0.

Z uvedeného rozboru vyplýva, že uvažovaná funkcia má maximum rovné 0 jedine pre $t = -16$.

Riešenie 2. Vieme, že grafom danej funkcie f je lomená čiara, ktorá sa v našom prípade skladá z dvoch polpriamok (pre $t = 2$), resp. z dvoch polpriamok a jednej úsečky.

Ďalej by sme si mali uvedomiť, že pokiaľ má takáto funkcia maximum, nadobúda ho určite v niektorom zo „zlomových" bodov (tam, kde je príslušný výraz v absolútnej hodnote nulový). To samozrejme neznamená, že funkcia nemôže nadobúdať maximum aj v iných bodoch (ak je konštantná na niektorom intervale).

V našom prípade sú týmito zlomovými bodmi pre $x = 2$ bod $A(2, 54 - 3|t-2|)$, pre $x = t$ bod $B(t, 5t + 44 + t|t-2|)$.

Pretože jeden z bodov $x = 2$, $x = t$ má byť bodom maxima funkcie f rovného 0, zistíme, pre ktoré t je jedna z y-ových súradníc bodov A a B nulová (a druhá nekladná).

A: $54 - 3|t-2| = 0$,
$|t-2| = 18$,
$t = 20$ alebo $t = -16$.

B: $5t + 44 + t|t-2| = 0$,
$t \geqq 2 \Rightarrow t^2 + 3t + 44 = 0$,
nemá riešenie.
$t < 2 \Rightarrow t^2 - 7t - 44 = 0$.
$t = 11$ alebo $t = -4$,
vyhovuje len $t = -4$.

Máme teda tri možnosti:

Pre $t = 20$ je $A(2, 0)$, $B(20, 504)$, čo nevyhovuje.

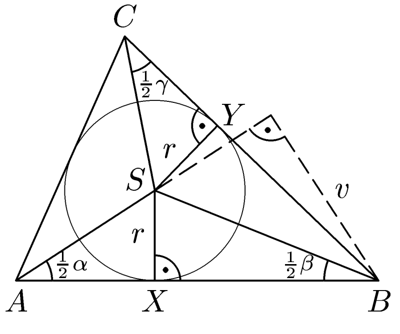
Pre $t = -16$ je $A(2, 0)$, $B(-16, -80 + 11 - 16 \cdot 18)$, zatiaľ vyhovuje.

Pre $t = -4$ je $A(2, 36)$, $B(-4, 0)$, čo nevyhovuje.

Zistili sme, že úloha má riešenie nanajvýš pre $t = -16$, ktorému zodpovedá funkcia $f(x) = 5x + 44 - 16|x-2| - 3|x+16|$. Pre túto funkciu samozrejme platí $f(2) = 0$. Overiť, že táto hodnota je skutočne maximom funkcie f, môžeme viacerými spôsobmi. Napríklad tak, že overíme, že pre $x < -16$ je uvedená funkcia neklesajúca (pre $x < -16$ je $f(x) = 24x + 60$) a súčasne pre $x > 2$ nerastúca (pre $x > 2$ je $f(x) = -14x + 28$).

B – I – 2

Riešenie 1. Uhly vo všeobecnom trojuholníku ABC označme obvyklým spôsobom, polomer vpísanej kružnice označme r a jej dotykové body so stranami AB, BC označme po rade X, Y (obr. 27).



Obr. 27

Úsečky AS a BS sú stranami trojuholníka ASB. Jeho obsah môžeme vyjadriť dvoma spôsobmi:

$$S(ASB) = \frac{1}{2}|AS|v = \frac{1}{2}|AB|r,$$

lebo výška na stranu AB tohoto trojuholníka je r. Pre výšku v na stranu AS pritom platí $v = |BS|\cos\frac{1}{2}\gamma$, pretože vedľajší uhol pri vrchole S má veľkosť $\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$. Nakoľko navyše $\sin(90^\circ - \varphi) = \cos\varphi$, je teda

$$|AS|\cdot|BS|\cos\frac{\gamma}{2} = |AB|r$$

a nasledujúce rovnosti sú ekvivalentné:

$$\begin{aligned} |AS|\cdot|BS| &= |CS|\cdot|AB|, \\ |AB|r &= |CS|\cdot|AB|\cos\frac{\gamma}{2}, \\ r &= |CS|\cos\frac{\gamma}{2}. \end{aligned} \tag{1}$$

V pravouhlom trojuholníku CSY však platí $\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{|CY|}{|CS|}$, takže rovnosť (1) je ekvivalentná rovnosti

$$r = |CY|,$$

čo znamená, že trojuholník CSY je rovnoramenný pravouhlý a $\frac{1}{2}\gamma = 45^\circ$. Daná rovnosť je teda ekvivalentná tomu, že $\gamma = 90^\circ$.

Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

Riešenie 2. Napíšeme si daný vzťah ako rovnosť podielov tak, aby to boli pomery strán v trojuholníkoch, a budeme sa snažiť použiť podobnosť alebo sínusovú vetu.

V našom prípade vyjdeme z rovnosti $\frac{|AS|}{|CS|} = \frac{|AB|}{|BS|}$. Skúsime sínusovú vetu:

V trojuholníku ASC platí $\frac{|AS|}{|CS|} = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\alpha}$ a v trojuholníku ASB zase $\frac{|AB|}{|BS|} = \frac{\sin|\sphericalangle ASB|}{\sin\frac{1}{2}\alpha}$. Odtiaľ dostávame nasledujúcu ekvivalentnú rovnosť:

$$\begin{aligned} \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} &= \frac{\sin|\sphericalangle ASB|}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \\ \sin\frac{\gamma}{2} &= \sin|\sphericalangle ASB|, \\ \sin\frac{\gamma}{2} &= \sin\Bigl(90^\circ + \frac{\gamma}{2}\Bigr), \\ \frac{\gamma}{2} &= 180^\circ - \Bigl(90^\circ + \frac{\gamma}{2}\Bigr) \qquad \text{(lebo } \gamma \in (0, \tfrac{\pi}{2})\text{)}, \\ \gamma &= 90^\circ. \end{aligned}$$

Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

Riešenie 3. Skúsime vypočítať dĺžky úsečiek AS, BS, CS, AB pomocou niektorých prvkov trojuholníka. Zvolíme si uhly trojuholníka a polomer r.

Zrejme $|CS| = \dfrac{r}{\sin\frac12\gamma}$, $|AS| = \dfrac{r}{\sin\frac12\alpha}$, $|BS| = \dfrac{r}{\sin\frac12\beta}$ a $|AB| = |AX| + |BX| =$ $= r\operatorname{cotg}\frac12\alpha + r\operatorname{cotg}\frac12\beta$. Po dosadení dostaneme ekvivalentnú rovnosť

$$\begin{aligned}
\frac{r}{\sin\frac12\alpha}\cdot\frac{r}{\sin\frac12\beta} &= \Bigl(r\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + r\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\Bigr)\cdot\frac{r}{\sin\frac12\gamma},\\
\sin\frac{\gamma}{2} &= \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2},\\
\sin\frac{\gamma}{2} &= \sin\Bigl(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\Bigr),\\
\sin\frac{\gamma}{2} &= \sin\Bigl(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\Bigr),\\
\sin\frac{\gamma}{2} &= \cos\frac{\gamma}{2},\\
\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} &= 1, \qquad \text{a keďže } \gamma\in(0,\frac{\pi}{2}),\\
\gamma &= 90^\circ.
\end{aligned}$$

Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

B – I – 3

Predpokladajme, že sústava má práve jedno riešenie $x = s$, $y = t$, $z = u$. Pretože vo všetkých rovniciach sa neznáme x a y vyskytujú v rovnakom tvare, možno vytušiť a overiť, že aj $x = t$, $y = s$ a $z = u$ je riešením danej sústavy. A pretože sústava má jediné riešenie, musí byť $t = s$, a teda $x = y$. Po dosadení dostaneme sústavu

$$\begin{aligned}
x^2 + z^2 &= 8,\\
x^2z^2 + x^2 + z^2 &= a, \qquad\qquad (*)\\
x + z &= \tfrac12 b.
\end{aligned}$$

Pokiaľ (x, z) je niektoré riešenie tejto sústavy, potom je trojica (x, x, z) riešením pôvodnej sústavy. Ak má preto pôvodná sústava jediné riešenie, musí taká byť aj nová sústava $(*)$. Tá je však opäť symetrická voči neznámym x a z. Preto bude mať jediné riešenie, len keď bude platiť $x = z$.

Po dosadení dostaneme sústavu

$$\begin{aligned}
x^2 &= 4,\\
x^4 + 2x^2 &= a,\\
x &= \tfrac14 b,
\end{aligned}$$

ktorá má jediné riešenie. Podľa prvej rovnice je to buď $x = 2$ (potom $b = 8$, $a = 24$), alebo $x = -2$ (potom $b = -8$, $a = 24$).

Týmito úvahami sme dospeli k nasledujúcemu záveru:

Pokiaľ má daná sústava práve jedno riešenie, tak len pre $a = 24$, $b = 8$, a to $x = 2$, $y = 2$, $z = 2$, alebo pre $a = 24$, $b = -8$, a to $x = -2$, $y = -2$, $z = -2$.

Ešte musíme overiť, či v týchto dvoch prípadoch nemá daná sústava iné riešenie (ako to symetrické, ktoré sme vypočítali nie ekvivalentnými úpravami, ale zjednodušovaním).

Nech $a = 24$, $b = 8$. Po dosadení dostaneme sústavu

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2z^2 &= 16, \\ xyz^2 + xy + z^2 &= 24, \\ x + y + 2z &= 8. \end{aligned}$$

Táto sústava sa dá riešiť viacerými spôsobmi. My tu uvedieme dva.

a) Vylúčime neznáme x, y, napríklad tak, že najprv rovnice upravíme:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 16 - 2z^2, \\ xy &= \frac{24 - z^2}{1 + z^2}, \\ x + y &= 8 - 2z. \end{aligned}$$

Dostávame tak

$$(8 - 2z)^2 = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 16 - 2z^2 + 2 \cdot \frac{24 - z^2}{1 + z^2}.$$

Po úprave vychádza

$$3z^4 - 16z^3 + 28z^2 - 16z = 0.$$

Vzhľadom k tomu, že vieme, že $z = 2$ je koreňom tejto rovnice, môžeme ju postupne upraviť až na tvar

$$z(z - 2)^2(3z - 4) = 0.$$

Odtiaľ vyplýva, že buď $z = 0$, $z = \frac{4}{3}$, alebo $z = 2$.

Pokiaľ $z = 0$, dostaneme

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 16, \\ xy &= 24, \\ x + y &= 8 \end{aligned}$$

a ľahko sa presvedčíme, že táto sústava nemá riešenie (čísla x, y by museli byť korene kvadratickej rovnice $t^2 - 8t + 24 = 0$, ktorá má záporný diskriminant).

Pokiaľ $z = \frac{4}{3}$, dostaneme

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{112}{9}, \\ xy &= 8, \\ x + y &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

a opäť sa ľahko presvedčíme, že táto sústava nemá riešenie.

Pokiaľ $z = 2$, dostaneme

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 8, \\ xy &= 4, \\ x + y &= 4. \end{aligned}$$

Ľahko zistíme, že táto sústava má jediné riešenie $x = y = 2$.

b) Šikovnejší prístup využíva len prvú a tretiu rovnicu a nerovnosť medzi kvadratickým a aritmetickým priemerom:

$$4 = 2^2 = \left(\frac{1}{4}(x + y + z + z)\right)^2 \leqq \frac{1}{4}(x^2 + y^2 + z^2 + z^2) = 4.$$

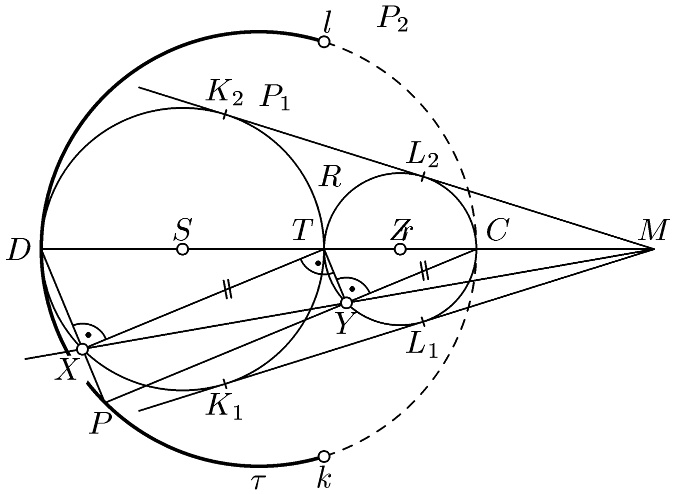
Medzi aritmetickým a kvadratickým priemerom nastane rovnosť práve vtedy, keď sa všetky členy rovnajú. Odtiaľ $x = y = z = 2$.

Prípad $a = 24$, $b = -8$ posúdime podobne; aj vtedy je riešenie jediné.

Odpoveď. Daná sústava má jediné riešenie pre $a = 24$, $b = 8$ alebo $a = 24$, $b = -8$.

B – I – 4

Označme S, Z stredy oboch kružníc k, l a R, r ich polomery (bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $r < R$). Označme ďalej C (D) od T rôzny priesečník kružnice l (k) s priamkou SZ a K_1, K_2, L_1, L_2 po rade dotykové body oboch spoločných vonkajších dotyčníc ku kružniciam k a l (obr. 28).



Obr. 28

Bod M je stredom rovnoľahlosti h oboch kružníc s koeficientom R/r. Pritom je napríklad $h(L_1) = K_1$, $h(Z) = S$, $h(C) = T$, $h(T) = D$, $h(Y) = X$. Odtiaľ vyplýva, že priamky CY, TX sú rovnobežné ($h(CY) = TX$). Pretože uhol CYT je pravý podľa Talesovej vety, je tiež $|\sphericalangle YTX| = 90°$ (TY je priečka rovnobežiek CY, TX). Rovnobežník $XTYP$ je teda vždy obdĺžnik.

Zároveň je zrejmé, že body C, Y, P ležia na priamke a podobne aj body D, X, P ležia na priamke. Teda platí $|\sphericalangle CPD| = 90°$ a bod P leží na Talesovej kružnici τ nad priemerom CD. Ležia na nej aj vrcholy P_1, P_2 rovnobežníkov $K_1TL_1P_1$, $K_2TL_2P_2$, pretože pre ne môžeme zopakovať predchádzajúcu úvahu (ako pre rovnobežník $XTYP$).

Teraz už nie je problém ukázať, že hľadaná množinu bodov je väčší z oblúkov P_1P_2 kružnice τ okrem bodov P_1, P_2 a D (lebo body Y tvoria väčší z oblúkov L_1L_2 kružnice l okrem bodov T, L_1, L_2).

Ešte naznačíme hlavné myšlienky iných dvoch prístupov:

a) Aby sme odhadli tvar hľadanej množiny, zvolíme niekoľko význačných polôh priamky XY. Vhodné sú nasledujúce polohy: a) $X = K_1$, $Y = L_1$ (PT je kolmé na SZ), b) XS a YZ sú kolmé na SZ (vtedy vyjde, že päta kolmice z bodu P na SZ leží v strede J úsečky CD a $|JC| = |JP|$).

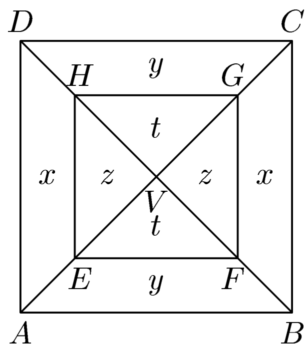
Z toho už sa dá odhadnúť, že bod P leží najskôr na kružnici so stredom J a polomerom $\frac{1}{2}(R + r)$. Ostáva už len dokázať (teda všeobecne vypočítať), že vzdialenosť $|PJ|$ je rovná $\frac{1}{2}(r + R)$. (Nie je to ľahké.)

b) Pomocou zhodných a podobných zobrazení je najelegantnejší nasledujúci postup: Pomocou súradníc (bod M zvolíme za začiatok súradnicového systému) je $P = X + {}$ ${}+ Y - T = Y + h(Y) - T = Y + \dfrac{R}{r}Y - T = \left(1 + \dfrac{R}{r}\right)Y - T$, bod P teda vznikne z bodu Y (a všetky body Y tvoria väčší z oblúkov L_1L_2 kružnice l bez bodov T, L_1, L_2) zložením rovnoľahlosti sa stredom M a koeficientom $1 + \frac{R}{r}$ a posunutím o vektor $\overrightarrow{TM}$.

B – I – 5

Pretože dva susedné vrcholy ležia vždy vo dvoch spoločných stenách, budeme si všímať predovšetkým takéto dvojice vrcholov.

Vrcholy A a B (B a C) ležia v spoločných stenách $ABFE$ a $ABCD$ ($BCGF$ a $BCDA$). Preto porovnaním im priradených čísel dostaneme, že na stenách $ADHE$ a $BCGF$ ($ABFE$ a $CGHD$) je rovnaké číslo. Označme ho x (y).



Obr. 29

Podobne vrcholy E a F (F a G) ležia v spoločných stenách $EFBA$ a EFV ($FGCB$ a FGV) a naviac už vieme, že steny $ADHE$ a $FBCG$ ($ABFE$ a $GHDC$) majú rovnaké čísla. Preto porovnaním im priradených čísel dostaneme, že na stenách HEV a FGV (EFV a GHV) je rovnaké číslo. Označme ho z (t, obr. 29).

Porovnávaním čísel príslušných vrcholom A a E (majú spoločné steny $EABF$ a $EADH$) ďalej dostaneme, že stena $ABCD$ má číslo $s = z + t$.

Nakoniec porovnajme vrcholy E a V (majú spoločné steny EFV a HEV). Dostaneme $z + t = x + y$.

Keď to všetko zhrnieme, zistíme, že jednotlivé steny sú nutne očíslované číslami x

(steny $BCGF$ a $DAEH$), z (steny FGV a EHV), s (stena $ABCD$), $s-x$ (steny $ABFE$ a $CDHG$), $s-z$ (steny EFV a GHV). A ľahko sa presvedčíme, že takéto očíslovanie má vždy požadovanú vlastnosť (všetkým vrcholom je priradené číslo $2s$).

My poznáme štyri rôzne čísla z deviatich čísel x, x, z, z, s, $s-x$, $s-x$, $s-z$, $s-z$, teda štyri čísla z piatich čísel x, z, s, $s-x$, $s-z$.

a) Pokiaľ je neznáme piate číslo s, tvoria známe čísla dve dvojice s rovnakým súčtom: $x+(s-x)=z+(s-z)$. Pre dané čísla tak máme jedinú možnosť $25+57=32+50=82$. Hľadané čísla sú potom 25, 32, 50, 57 a 82.

b) Ak nie je piate neznáme číslo s, je jedno zo známych čísel (a to s) súčtom ďalších dvoch známych: $s=x+(s-x)$, alebo $s=z+(s-z)$. Pre dané čísla je jediná možnosť: $25+32=57$. Potom je $s=57$ a hľadanú päticu tvoria čísla 7, 7, 25, 32 a 50.

Odpoveď. Hľadané čísla sú buď 25, 32, 50, 57 a 82, alebo čísla 7, 7, 25, 32 a 50.

Ešte naznačíme, ako by mohol vyzerať čisto algebraický prístup — riešením deviatich rovníc o desiatich neznámych.

Kvôli prehľadnosti si musíme dať záležať na označení jednotlivých čísel napísaných na stenách. Označme čísla na stenách $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$, $DAEH$, EFV, FGV, GHV, HEV a $ABCD$ postupne a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, c a nech spoločný súčet na stenách pri každom vrchole je s. Dostaneme tak nasledujúcich deväť rovníc:

$$a_1+a_2+b_1+b_2=s, \tag{F}$$
$$a_2+a_3+b_2+b_3=s, \tag{G}$$
$$a_3+a_4+b_3+b_4=s, \tag{H}$$
$$a_4+a_1+b_4+b_1=s, \tag{E}$$
$$a_1+a_2+c=s, \tag{B}$$
$$a_2+a_3+c=s, \tag{C}$$
$$a_3+a_4+c=s, \tag{D}$$
$$a_4+a_1+c=s, \tag{A}$$
$$b_1+b_2+b_3+b_4=s. \tag{V}$$

Porovnaním rovníc (B) a (C) máme $a_1=a_3$. Porovnaním rovníc (D) a (C) máme $a_2=a_4$.

Pomocou týchto vzťahov ďalej dostaneme: porovnaním rovníc (F) a (G) vyjde $b_1= =b_3$; porovnaním rovníc (G) a (H) vyjde $b_2=b_4$.

To znamená, že nám pre čísla a_1, a_2, b_1, b_2 a c ostali rovnice

$$\begin{aligned} a_1+a_2+b_1+b_2&=s,\\ a_1+a_2+c&=s,\\ b_1+b_2&=\tfrac{1}{2}s. \end{aligned}$$

Odtiaľ už ľahko dostaneme, že $c=a_1+a_2=b_1+b_2=\frac{1}{2}s$.

B – I – 6

Podstatou riešenia sú nasledujúce dve úlohy:

A. Sú dané body K, L. Veďte nimi po rade rovnobežky k, l, ak je daná ich vzdialenosť d.
B. Sú dané body K, L a priamka m. Veďte bodmi K, L po rade rovnobežky k, l, ktoré na priamke m vytínajú úsečku danej dĺžky d.

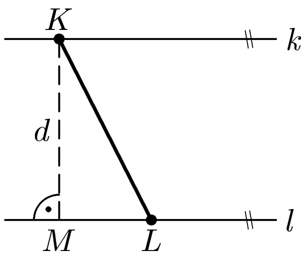
Riešenie úlohy A. Nech M je päta kolmice vedenej z bodu K na priamku l. V trojuholníku KLM s pravým uhlom pri vrchole M poznáme vrcholy K, L a dĺžku odvesny $|KM| = d$, vrchol M teda vieme zostrojiť (ako priesečník Talesovej kružnice t nad priemerom KL s kružnicou $\varkappa(K, d)$). Potom ML je priamka l.

Pokiaľ by sme požadovali diskusiu, vieme, že počet riešení závisí na existencii priesečníkov kružníc t a $\varkappa$:

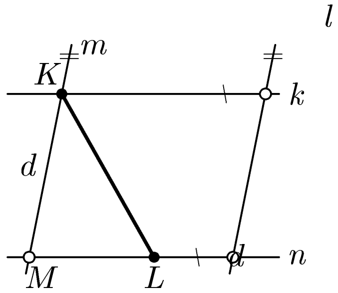
Pokiaľ $|KL| < d$, nemá úloha riešenie.

Pokiaľ $|KL| = d$, má úloha jedno riešenie (kolmice na KL).

Pokiaľ $|KL| > d$, majú kružnice k a t dva priesečníky, tak úloha má dve riešenia.



Obr. 30



Obr. 31

Riešenie úlohy B. Veďme bodom K rovnobežku n s priamkou m a označme M jej priesečník s priamkou l. Potom $|KM| = d$, takže konštrukcia bodu M je zrejmá. Priamka l je potom určená bodmi L a M.

Pokiaľ by sme požadovali diskusiu, ľahko zistíme, že na priamke n existujú dva body M požadovaných vlastností, a počet riešení závisí na tom, či $M = L$.

Pokiaľ súčasne neplatí, že KL je rovnobežná s m a $|KL| = d$, má úloha dve riešenia.

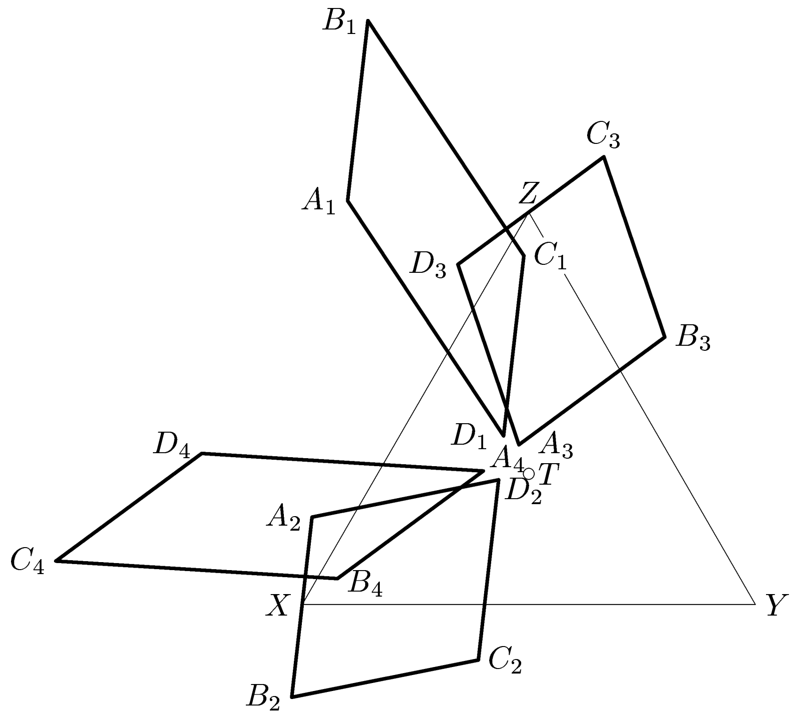
Pokiaľ je KL rovnobežná s m a $|KL| = d$, vznikne pre jednu z možných polôh bodu M v predchádzajúcom prípade nekonečne mnoho riešení (za priamku l môžeme vziať ľubovoľnú priamku prechádzajúcu bodom L).

Riešenie pôvodnej úlohy. Z obsahu rovnobežníka $ABCD$ a dĺžky strany AB ľahko vypočítame výšku v na stranu AB: je $v = 8\,\mathrm{cm}^2 : 2\,cm = 4\,\mathrm{cm}$. Odtiaľ vyplýva, že vzdialenosť rovnobežiek AB a CD je $4\,\mathrm{cm}$, pričom poznáme bod X priamky AB a bod Z priamky CD. Podľa úlohy A teda vieme zostrojiť priamky AB a CD.

V polohe, ktorá je daná, má táto časť dve riešenia.

Keď už máme priamku AB, sú AD a BC dve neznáme rovnobežky, ktoré prechádzajú danými bodmi T a Y a na (známej) priamke AB vytínajú úsečku danej dĺžky $|AB| = 2\,\mathrm{cm}$. Preto môžeme rovnobežky AD a BC zostrojiť na základe úlohy B.

Je zrejmé, že špeciálna poloha daných bodov X, Y, Z a T nemá na postup riešenia vplyv, zaručuje nám však ľahkú diskusiu ohľadom počtu riešení. Pre obidve polohy priamky AB má úloha v danej situácii dve riešenia. Tým je rovnobežník $ABCD$ zostrojený. (Priamkami AB, BC, CD a AD sú vrcholy A, B, C, D určené.) Úloha má 4 riešenia.



Obr. 32

B – S – 1

Uvažovaná funkcia f je po častiach lineárna, preto je ohraničená na každom ohraničenom intervale. Stačí teda funkciu f vyšetriť zvlášť pre $x \leqq \min(1, b)$ a zvlášť pre $x \geqq \max(1, b)$, keď majú oba výrazy v absolútnych hodnotách rovnaké znamienko.

a) Ak je $x \leqq \min(1, b)$, je

$$f(x) = a(1-x) + b(x-3) + b - x + x - 1 = (b-a)x - 2b + a - 1.$$

Funkcia f bude na tomto intervale ohraničená práve vtedy, keď tu bude konštantná, t.j. práve vtedy, keď $a = b$.

a) Ak je $x \geqq \max(1, b)$, je

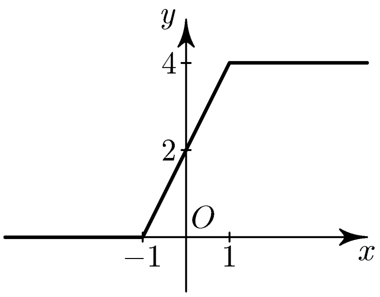
$$f(x) = a(x-1) + b(x-3) + x - b + x - 1 = (a+b+2)x - a + 4b - 1.$$

Funkcia f bude na tomto intervale ohraničená práve vtedy, keď tu bude konštantná, t.j. práve vtedy, keď $a + b = -2$.

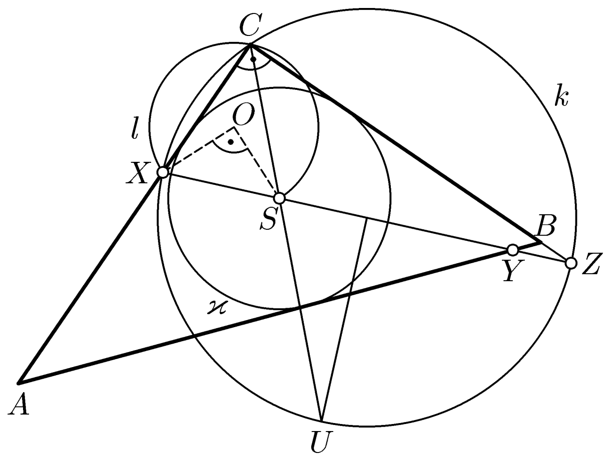
Spojením oboch podmienok dostávame, že funkcia f bude ohraničená práve vtedy, keď bude ohraničená na oboch uvedených neohraničených intervaloch, t.j. práve keď $a = b = -1$. Pre funkciu f potom dostaneme vyjadrenie

$$f(x) = |x + 1| - |x - 1| + 2.$$

Jej graf vidíme na obr. 33.



Obr. 33



Obr. 34

B – S – 2

Predpokladajme, že trojuholník ABC je riešením úlohy. Z daného poradia bodov X, S, Y, Z na jednej priamke a z toho, že bod S je vnútorným bodom trojuholníka ABC, vyplýva, že body X a Y sú vnútornými bodmi príslušných strán AC a AB, zatiaľ čo bod Z musí ležať na polpriamke opačnej k polpriamke BC. Vrchol C neznámeho trojuholníka ABC budeme hľadať len v jednej z polrovín určených priamkou XZ, pretože ku každému riešeniu existuje riešenie súmerne združené podľa osi XZ.

Vrchol C trojuholníka ABC je vrcholom pravého uhla XCZ (obr. 34), leží teda na Tálesovej kružnici k nad priemerom XZ. Pretože bod S je stredom kružnice vpísanej trojuholníku ABC, leží na osi pravého uhla, takže $|\sphericalangle SCX| = 45°$ a vrchol C leží zároveň na oblúku kružnice l určenej tetivou SX a obvodovým uhlom 45°. (Vzhľadom na uvedenú súmernosť stačí uvažovať len ten z dvoch súmerných oblúkov, ktorý leží vo zvolenej polrovine.) Odtiaľ už vyplýva konštrukcia trojuholníka ABC:

1. zostrojíme kružnicu k nad priemerom XZ;
2. v jednej z polrovín určených priamkou XZ zostrojíme vrchol O rovnoramenného pravouhlého trojuholníka XSO, $|\sphericalangle SOX| = 90°$, a v tej istej polrovine narysujeme oblúk SX kružnice $l(O, |OS|)$;
3. vrchol $C = k \cap \widehat{SX}$, $C \neq X$;

4. zostrojíme kružnicu $\varkappa(S, \varrho)$, kde ϱ je vzdialenosť bodu S od priamky CX (polomer kružnice vpísanej trojuholníku ABC);
5. bodom Y vedieme dotyčnicu t ku kružnici $\varkappa$ tak, aby jej bod dotyku ležal v polrovine opačnej k polrovine XZC;
6. vrcholy A, B dostaneme ako priesečníky priamky t s priamkami XC, resp. ZC.

Z popísanej konštrukcie je zrejmé, že pre bod S ležiaci medzi bodmi X a Z majú kružnice k a l práve jeden priesečník rôzny od bodu X. Aby sme mohli zostrojiť dotyčnicu t, musí bod Y ležať mimo kruhu ohraničeného kružnicou $\varkappa$, musí byť teda $|SY| \geqq \varrho$. Aby existoval priesečník dotyčnice t s priamkou XC vnútri uhla XCZ, musí byť dokonca $|YS| > |XS| > \varrho$. V našom prípade je to splnené a úloha má dve zhodné riešenia súmerne združené podľa osi XZ.

Úlohu by sme riešili rovnako, aj keby dané body X, S, Y, Z neležali na jednej priamke.

Poznámka. Bod C môžeme zostrojiť aj iným postupom. Pretože body X a Z ležia po rade na polpriamkach CA a CB, je pravý uhol XCZ totožný s pravým uhlom ACB. Os tohoto uhla prechádza stredom S kružnice vpísanej trojuholníku ABC; zároveň táto os pretne kružnicu k opísanú trojuholníku XCZ v takom bode $U \neq C$, že tetivy XU a UZ sú zhodné (tieto tetivy totiž z bodu C vidieť pod rovnakým uhlom (45 stupňov), obr. 0). Preto (bez toho, aby sme poznali bod C) môžeme bod U zostrojiť ako stred oblúka XZ kružnice k (oblúky XU a UZ sú teda štvrťkružnice). Bod C potom určíme ako priesečník kružnice k s polpriamkou US.

B – S – 3

V danom výraze sa pravidelne striedajú plusy a mínusy, pričom nepárne čísla majú znamienko plus a párne mínus. Zrejme musí každá dvojica odpovedajúcich si zátvoriek obsahovať práve tri po sebe idúce čísla. Ak umiestnime ľavú zátvorku medzi plus a príslušné nepárne číslo, nemajú zátvorky na hodnotu výrazu žiadny vplyv. Zaujímavý je teda len prípad, keď ľavú zátvorku dáme medzi mínus a nasledujúce párne číslo, čo zmení výsledné znamienko druhého a tretieho čísla v zátvorkách. Ak je spomenuté párne číslo $2k$ ($1 \leqq k \leqq 49$), dostaneme miesto pôvodného súčtu $-2k + (2k+1) - (2k+2) = -2k - 1$ súčet $-\bigl(2k + (2k+1) - (2k+2)\bigr) = -2k - (2k+1) + (2k+2) = -2k + 1$. Vidíme teda, že pridaním jedného páru zátvoriek popísaným spôsobom zväčšíme celkovú hodnotu výrazu o 2 bez ohľadu na to, ktorú trojicu po sebe idúcich čísel začínajúcu párnym číslom zvolíme. Zároveň je jasné, že takto umiestnený pár zátvoriek obsahuje ďalšie párne číslo (okrem čísla $2k$ ešte $2k+2$), ktoré už nebudeme môcť pre umiestnenie zátvorky využiť. (Nebudeme teda zbytočne rozmiestňovať zátvorky pred nepárne čísla, pretože by sme sa zbavili ďalšieho párneho čísla, pred ktoré môžeme umiestniť ľavú z dvojice zátvoriek, ktoré by mali vplyv na hodnotu daného výrazu.)

Daný výraz obsahuje spolu 50 párnych čísel. Môžeme teda vybrať nanajvýš 25 dvojíc po sebe idúcich párnych čísel, ktoré obklopíme zátvorkami. Tomu zodpovedá 26 rôznych hodnôt daného výrazu s k dvojicami zátvoriek, kde $0 \leqq k \leqq 25$. Príslušné hodnoty sú $-50, -48, -46, \ldots, -4, -2, 0$ (najmenšia hodnota je $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots + 99 - 100 = -50$, najväčšia $1 - (2 + 3 - 4) + 5 - (6 + 7 - 8) + \ldots - (98 + 99 - 100) = 0$).

B – II – 1

Ak označíme pre dané reálne c

$$f_c(x) = c|x + c + 14| + 8|x - c + 2| - (c^2 + c - 8)(x + 2)$$

zodpovedajúcu po častiach lineárnu funkciu, je zrejmé, že rovnica $f_c(x) = 0$ bude mať nekonečne veľa celočíselných riešení práve vtedy, keď bude funkcia f_c identicky rovná nule na niektorom z nekonečných intervalov $(-\infty, \min(c-2, -c-14)\rangle$ alebo $\langle\max(c-2, -c-14), \infty)$. Vyšetríme postupne obidve možnosti.

a) Nech $x \leqq \min(c-2, -c-14)$, pre také x platí

$$f_c(x) = -c(x + c + 14) - 8(x - c + 2) - (c^2 + c - 8)(x + 2) =$$
$$= -c(2 + c)x - 3c^2 - 8c = -c\bigl(x(c + 2) + 3c + 8\bigr).$$

Na tomto intervale bude funkcia f_c identicky rovná nule práve vtedy, keď $c = 0$ (sústava $c + 2 = 0$, $3c + 8 = 0$ nemá žiadne riešenie).

b) Nech $x \geqq \max(c-2, -c-14)$, pre také x platí

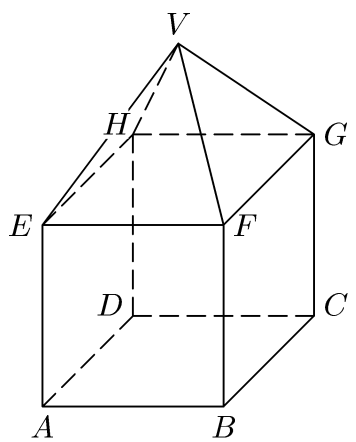
$$f_c(x) = c(x + c + 14) + 8(x - c + 2) - (c^2 + c - 8)(x + 2) =$$
$$= (16 - c^2)x - c^2 + 4c + 32.$$

Na tomto intervale bude funkcia f_c identicky rovná nule práve vtedy, keď bude súčasne platiť $c^2 = 16$ a $c^2 - 4c - 32 = 0$. Dosadením $c^2 = 16$ do druhej rovnice vychádza $c = -4$, čo je zrejme jediné riešenie oboch rovníc.

Záver. Daná rovnica má v obore celých čísel nekonečne veľa riešení práve vtedy, keď $c = 0$ alebo $c = -4$ (v prvom prípade rovnici vyhovujú všetky celé čísla $x \leqq -14$, v druhom potom všetky celé čísla $x \geqq -6$).

B – II – 2

Označme A, B, C, D, E, F, G, H vrcholy spomínanej kocky a V vrchol prilepeného ihlana (obr. 35). Čísla napísané na bočných stenách $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$, $DAEH$ označme postupne a_1, a_2, a_3 a a_4, čísla na bočných stenách EFV, FGV, GHV a HEV prilepeného ihlana označme po rade b_1, b_2, b_3 a b_4, číslo na podstave $ABCD$ označme c. Ďalej označme s uvedený spoločný súčet.



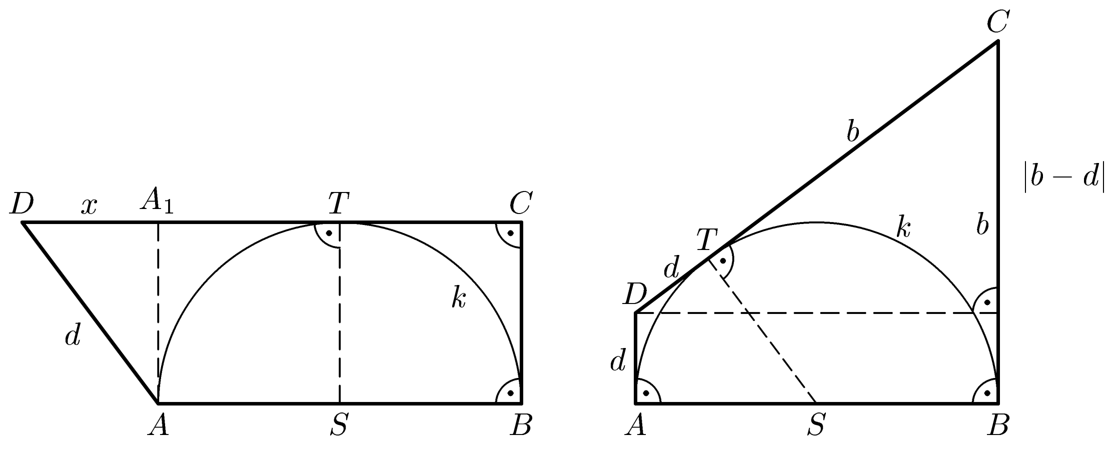
Obr. 35

Porovnaním súčtov príslušiacich stenám EFV a GHV dostaneme rovnosť $a_1 = a_3$, analogicky pre ďalšiu dvojicu stien vyjde $a_2 = a_4$. Porovnaním súčtov príslušiacich stenám $ABFE$ a $CDHG$ vyjde $b_1 = b_3$ a analogicky pre ďalšiu takú dvojicu stien $b_2 = b_4$. Porovnaním súčtov príslušiacich stenám $CDHG$ a HEV dostaneme rovnosť $b_1 = c + a_2$ a analogicky pre dvojicu stien $DAEH$ a GHV rovnosť $b_2 = c + a_1$. Porovnaním súčtov dvoch susedných stien kocky vychádza $a_2 + a_4 + b_1 = a_1 + a_3 + b_2$, alebo $2a_2 + b_1 = 2a_1 + b_2$, čo dosadením z posledných dvoch získaných rovností dáva rovnosť $a_2 = a_1$, a teda tiež $b_2 = b_1 = c + a_1$. Preto môžeme písať $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a$, $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b = a + c$ a z rovnosti súčtov príslušiacich podstave a jednej z bočných stien kocky vychádza $4a = 2a + b + c = 3a + 2c$, takže $a = 2c$, $b = 3c$ a celkový súčet všetkých čísel je $c + 4a + 4b = 21c$. Z rovnice $21c = 3\,003$ vyplýva $c = 143$. Na stenách deväťstena sú napísané čísla 143, 286 (štyrikrát) a 429 (štyrikrát).

Poznámka. Úlohu je možné riešiť aj vypísaním a následným riešením sústavy desiatich lineárnych rovníc pre deväť neznámych čísel zapísaných na stenách telesa a desiatou neznámou rovnou celému súčtu.

B – II – 3

Označme S stred strany AB a T bod dotyku polkružnice k so stranou CD. Ak je AB základňou daného lichobežníka, je $CD \parallel AB$ a $|AB| + |BC| + |CT| = 2|AB| = 16\,\mathrm{cm}$ (obr. 36). Označme A_1 kolmý priemet vrcholu A na priamku CD. Pretože $|TD|+|DA| = 28\,\mathrm{cm}$-$16\,\mathrm{cm}$=$12\,\mathrm{cm} > |AA_1| + |A_1T| = 8\,\mathrm{cm}$, leží vrchol D na polpriamke TA_1 za bodom A_1. Označme veľkosť $|A_1D| = x\,\mathrm{cm}$, $|DA| = d\,\mathrm{cm}$. Pre čísla x, d dostávame sústavu rovníc $d + x = 8$, $d^2 = x^2 + 4^2$ (Pytagorova veta pre trojuholník AA_1D), ktorú ľahko upravíme na tvar $d + x = 8$, $(d - x)(d + x) = 16$, t.j. $d + x = 8$, $d - x = 2$. Sústava má jediné riešenie $d = 5$, $x = 3$. Zvyšné strany daného lichobežníka majú teda veľkosti 4 cm, 11 cm a 5 cm.

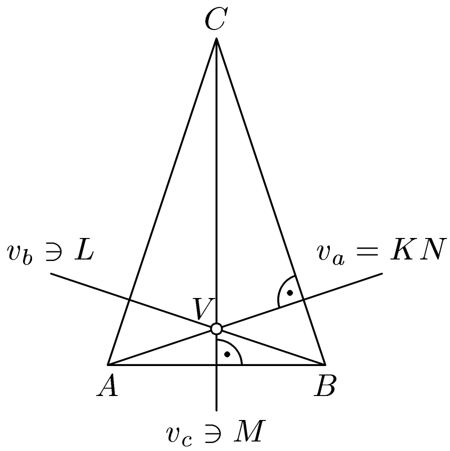


Obr. 36 Obr. 37

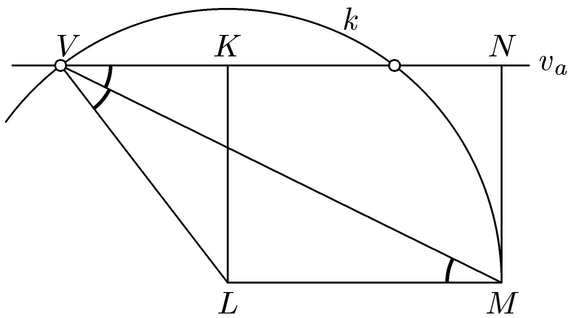
Ak je AB ramenom daného lichobežníka $ABCD$, je $AB \perp BC \parallel AD$ (obr. 37), takže obidve základne BC a AD sa dotýkajú polkružnice k v zodpovedajúcich vrcholoch B a A. Označme b zhodné úseky dotyčníc z vrcholu C ku k a d zhodné úseky dotyčníc z vrcholu D k polkružnici k. Zo znalosti obvodu tak dostávame (v centimetroch) rovnosť $28 = 8 + 2b + 2d$, alebo $b + d = 10$. Z rovnobežnosti $BC \parallel AD$ vyplýva $|b - d| = \sqrt{(b + d)^2 - 8^2} = 6$. Vzhľadom na súmernosť podľa osi danej polkružnice k stačí uvažovať len jednu z možností, napr. $b > d$. Sústava $b + d = 10$, $b - d = 6$ má jediné riešenie $b = 8$, $d = 2$, takže ostávajúce strany daného lichobežníka majú v tomto prípade veľkosti 8 cm, 10 cm a 2 cm, čo platí aj v prípade $b < d$.

B – II – 4

Podľa zadania poznáme priamku KN, na ktorej leží výška v_a. Pretože výška v_b je súmerne združená s v_a podľa osi základne AB hľadaného rovnoramenného trojuholníka ABC, na ktorej zároveň leží jeho tretia výška v_c, pokúsime sa nájsť priesečník V týchto výšok. Ten má tú vlastnosť, že bod L leží na priamke súmerne združenej s $v_a = KN$ podľa $VM = v_c$ (obr. 38). Keď bod V nájdeme, budeme zároveň poznať polohu všetkých troch výšok trojuholníka ABC, takže až na podobnosť môžeme zostrojiť aj hľadaný trojuholník ABC.



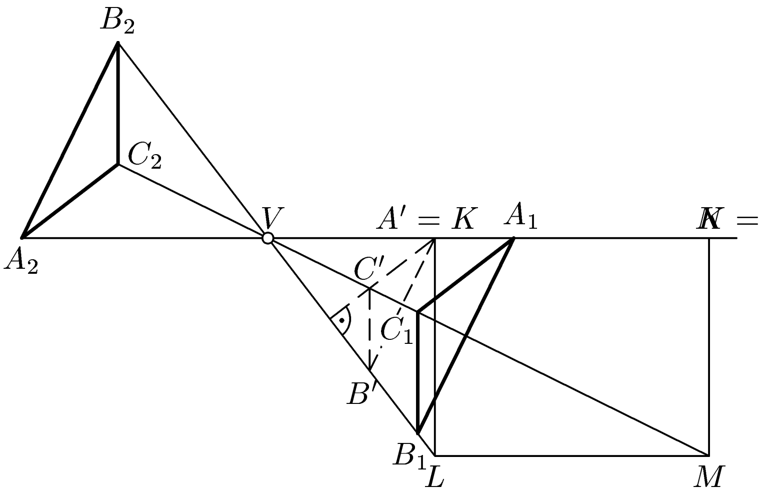
Obr. 38



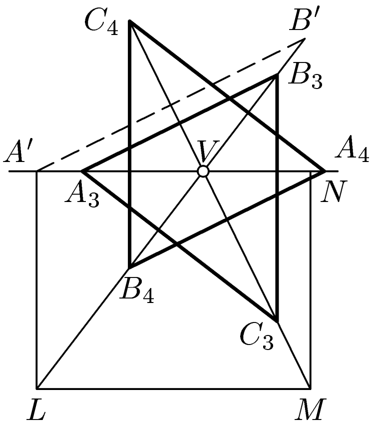
Obr. 39

Predpokladajme, že bod V na priamke KN má požadovanú vlastnosť (obr. 39). Zo súmernosti priamok VL a VN podľa VM vyplýva rovnosť vyznačených uhlov s vrcholom V. Z rovnobežnosti priamok KN a LM dostávame, že rovnakú veľkosť má aj uhol LMV, takže trojuholník MVL je rovnoramenný so základňou MV. Je teda $|LV| = |LM|$ a bod V nájdeme ako priesečník priamky KN s kružnicou $k = (L, |LM|)$. Pretože podľa predpokladu je $|KL| < |KN| = |LM|$, existujú také priesečníky dva.

Teraz dokončíme konštrukciu trojuholníka ABC. Najprv zostrojíme pomocný trojuholník $A'B'C'$, ktorý bude rovnoľahlý s hľadaným trojuholníkom ABC, a to tak, že na priamke KN ľubovoľne zvolíme bod $A' \neq V$ (na obr. 40 je ako bod A' zvolený daný vrchol K), zostrojíme bod B' súmerne združený s bodom A' podľa VM a vrchol C', v ktorom kolmica na $B'V$ vedená bodom A' pretne priamku VM. Pretože má platiť $|AB| = |KL|$, trojuholník ABC zostrojíme použitím tej rovnoľahlosti so stredom V, ktorá známu úsečku $A'B'$ prevedie na hľadanú úsečku AB danej dĺžky $|KL|$ (také rovnoľahlosti sú dve). Pre každý z možných bodov V tak bude mať úloha dve riešenia (na obr. 40 trojuholníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$, na obr. 41 trojuholníky $A_3B_3C_3$ a $A_4B_4C_4$) stredovo súmerné podľa príslušného priesečníka výšok.



Obr. 40



Obr. 41

Kategória A

A – I – 1

Vzhľadom na to, že rovnica $P\bigl(Q(x)\bigr) = 0$ má reálny koreň, má kvadratická rovnica $P(x) = 0$ dva reálne korene r_1, r_2 (nevylučujeme, že $r_1 = r_2$). Mnohočlen $P\bigl(Q(x)\bigr)$ možno preto zapísať v tvare

$$P\bigl(Q(x)\bigr) = a\bigl(Q(x) - r_1\bigr)\bigl(Q(x) - r_2\bigr),$$

kde a je reálne číslo $a \neq 0$. Rovnica $P\bigl(Q(x)\bigr) = 0$ má podľa zadania štyri reálne korene, preto každá z kvadratických rovníc $Q(x) - r_1 = 0$, $Q(x) - r_2 = 0$ musí mať dva reálne korene. Z Viètových vzťahov vyplýva, že súčet koreňov v oboch kvadratických rovniciach je rovnaký, lebo obidve rovnice majú rovnaký koeficient pri lineárnom člene. Pritom tri zo štyroch reálnych koreňov oboch kvadratických rovníc $Q(x) - r_1 = 0$, $Q(x) - r_2 = 0$ sú podľa zadania čísla -22, 7, 13, štvrtý koreň označme q. Ďalej môže nastať jedna z troch možností:

(i) Jedna z kvadratických rovníc má korene -22, 7, druhá má korene 13 a q. Potom platí $-22 + 7 = 13 + q$, teda $q = -28$.

(ii) Jedna z kvadratických rovníc má korene -22, 13, druhá má korene 7 a q. Potom platí $-22 + 13 = 7 + q$, teda $q = -16$.

(iii) Jedna z kvadratických rovníc má korene 13, 7, druhá má korene -22 a q. Potom platí $13 + 7 = -22 + q$, teda $q = 42$.

Je zrejmé, že v každom z prípadov (i), (ii), (iii) existujú príslušné kvadratické trojčleny $P(x)$ a $Q(x)$. Ak má mať jedna z kvadratických rovníc $Q(x) - r_1 = 0$, $Q(x) - r_2 = 0$ korene -22, 7 a druhá 13, -28, položíme $Q(x) = x^2 + 15x$, $r_1 = (-22) \cdot 7 = -154$, $r_2 = 13 \cdot (-28) = -364$, $P(x) = (x + 154)(x + 364) = x^2 + 518x + 56\,056$. Obdobne možno postupovať v zvyšných prípadoch.

Štvrtým koreňom rovnice $P\bigl(Q(x)\bigr) = 0$ môže byť ktorékoľvek z čísel -28, -16, 42.

Iné riešenie. Úvahy o koeficiente pri lineárnom člene s využitím Viètových vzťahov možno nahradiť nasledujúcou úvahou o grafoch kvadratických funkcií.

Pretože grafy kvadratických funkcií $f_1 : y = Q(x) - r_1$ a $f_2 : y = Q(x) - r_2$ majú spoločnú os súmernosti, a pritom existujú štyri reálne korene rovnice $P(Q(x)) = 0$, sú tieto korene na osi x po dvoch stredovo súmerné podľa priesečníka osi súmernosti grafov oboch funkcií f_1 a f_2 s osou x. Vzhľadom k polohe daných troch koreňov na osi x možno ďalej uvažovať tri možnosti – rovnako ako v predchádzajúcom riešení. Napríklad

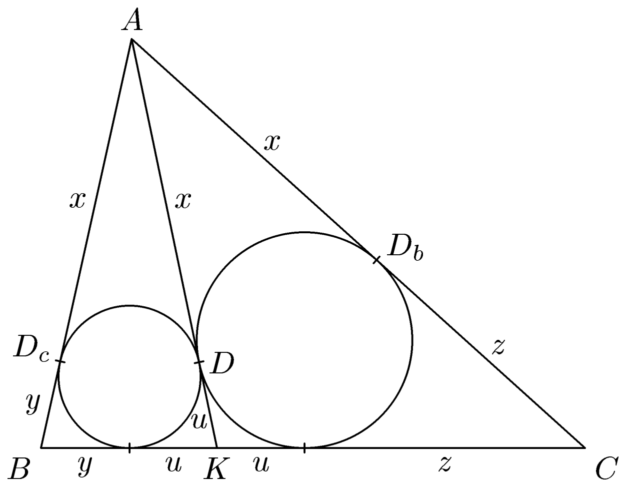
(i) Stred súmernosti je $-7{,}5 = \frac{-22+7}{2}$. Štvrtý koreň leží potom na osi x a je obrazom čísla 13 v stredovej súmernosti podľa stredu v bode $-7{,}5$. Štvrtým hľadaným koreňom je teda číslo -28.

Podobne možno postupovať vo zvyšných dvoch prípadoch. Takýmto postupom dospejeme k rovnakému výsledku.

A – I – 2

Uvažujme vnútorný bod K strany BC trojuholníka ABC taký, že kružnice vpísané trojuholníkom BKA a CKA majú vonkajší dotyk v bode D. Nech ďalej (pri obvyklom označení dĺžok strán trojuholníka ABC) platí označenie podľa obrázku 42, t.j.

$$|AD_b| = |AD_c| = x, \ |BD_c| = y, \ |CD_b| = z, \ |BK| = y + u, \ |CK| = z + u.$$



Obr. 42

Z predošlého obrázku ľahko vidíme, že platí nasledujúca sústava rovníc

$$\begin{aligned} y + z &= a - 2u, \\ z + x &= b, \\ x + y &= c. \end{aligned}$$

Jednoduchou úpravou odtiaľ dostávame $2y + 2u = a - b + c$ (analogicky vyjadríme $2z + 2u$), a teda platí

$$\begin{aligned} |BK| &= y + u = \frac{1}{2}(a - b + c) = s - b, \\ |CK| &= z + u = \frac{1}{2}(a + b - c) = s - c, \end{aligned}$$

kde $2s = a+b+c$. To označuje (pozri prvú návodnú úlohu), že bod K je bodom dotyku kružnice vpísanej trojuholníku ABC so stranou BC. Pre body L a M platia (využitím analogického postupu) nasledujúce vzťahy:

$$|CL| = s - c, \quad |AL| = s - a, \quad |AM| = s - a, \quad |BM| = s - b.$$

Z predošlých rovností už bezprostredne vyplýva

$$|BK| \cdot |CL| \cdot |AM| = (s-a)(s-b)(s-c) = |CK| \cdot |AL| \cdot |BM|.$$

Tým je dôkaz ukončený.

A – I – 3

Z textu úlohy vyplýva, že neznáme x, y, z sú kladné čísla. Preto môžeme danú sústavu upraviť do nasledujúceho tvaru

$$\begin{aligned} -\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} &= \frac{a}{\sqrt{x}},\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z} &= \frac{b}{\sqrt{y}},\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z} &= \frac{c}{\sqrt{z}}. \end{aligned}$$

Ak po dvojiciach sčítame jednotlivé rovnice predošlej sústavy, dostaneme tak sústavu

$$\begin{aligned} \frac{b}{\sqrt{y}}+\frac{c}{\sqrt{z}} &= 2\sqrt{x},\\ \frac{c}{\sqrt{z}}+\frac{a}{\sqrt{x}} &= 2\sqrt{y},\\ \frac{a}{\sqrt{x}}+\frac{b}{\sqrt{y}} &= 2\sqrt{z}. \end{aligned}$$

Ďalej po ľahkej úprave

$$\begin{aligned} b\sqrt{z}+c\sqrt{y} &= 2\sqrt{xyz},\\ c\sqrt{x}+a\sqrt{z} &= 2\sqrt{xyz},\\ a\sqrt{y}+b\sqrt{x} &= 2\sqrt{xyz}. \end{aligned}$$

Odčítaním prvej a tretej, resp. druhej a tretej, rovnice poslednej sústavy ďalej získame

$$\begin{aligned} b\sqrt{z}+(c-a)\sqrt{y} &= b\sqrt{x},\\ a\sqrt{z}-a\sqrt{y} &= (b-c)\sqrt{x}. \end{aligned}$$

Obe strany prvej rovnice predchádzajúcej sústavy vynásobíme číslom a, obe strany druhej rovnice potom vynásobíme číslom $-b$. Po sčítaní obidvoch takto upravených rovníc, dostaneme

$$a(b+c-a)\sqrt{y} = b(c+a-b)\sqrt{x},$$

podobným spôsobom dostaneme tiež

$$a(b+c-a)\sqrt{z} = c(a+b-c)\sqrt{x}.$$

Ak by pre kladné čísla a, b, c, platil vzťah $b+c-a=0$, potom z predošlých dvoch rovníc vyplýva, že tiež $a+b-c=0$, $c+a-b=0$. Potom však $a=b=c=0$, čo však nie je možné. Je teda $b+c-a\neq 0$. Z poslednej dvojice rovníc vyjadríme $\sqrt{y}$ a $\sqrt{z}$ pomocou $\sqrt{x}$ nasledujúcim spôsobom:

$$\sqrt{y}=\frac{b(c+a-b)}{a(b+c-a)}\sqrt{x},$$
$$\sqrt{z}=\frac{c(a+b-c)}{a(b+c-a)}\sqrt{x}.$$

Odtiaľ sa ľahko sa vidí, že výrazy $b+c-a$, $c+a-b$, $a+b-c$ sú súčasne všetky kladné alebo všetky záporné. Po dosadení $\sqrt{y}$ a $\sqrt{z}$ do pôvodnej sústavy rovníc získame (po úpravách) riešenie (x,y,z), kde

$$x=\frac{a^2(b+c-a)}{(c+a-b)(a+b-c)},$$
$$y=\frac{b^2(c+a-b)}{(b+c-a)(a+b-c)},$$
$$z=\frac{c^2(a+b-c)}{(c+a-b)(b+c-a)}.$$

Vzhľadom k tomu, že k riešeniu sústavy rovníc sme dospeli výhradne po ekvivalentných úpravách, nie je potrebné robiť skúšku správnosti.

Sústava má pritom vyššie uvedené riešenie v obore kladných čísel práve vtedy, keď súčasne platia nasledujúce podmienky $b+c-a>0$, $c+a-b>0$, $a+b-c>0$, t.j. práve vtedy, keď kladné čísla a, b, c sú dĺžkami strán trojuholníka.

A – I – 4

Nech $A_sB_sC_s$, kde $s\in\{1,2,\dots,1999\}$, sú trojuholníky vyhovujúce podmienkam úlohy a (XYZ) nech označuje polrovinu s hraničnou priamkou XY a vnútorným bodom Z. Každý z daných trojuholníkov $A_sB_sC_s$ je prienikom vždy troch polrovín $(A_sB_sC_s)$, $(B_sC_sA_s)$ a $(C_sA_sB_s)$, preto je (neprázdna) množina M prienikom $3\cdot 1\,999=5\,997$ takých polrovín. Vzhľadom k tomu, že polroviny $(A_sB_sC_s)$, kde $s\in\{1,2,\dots,1999\}$, sa navzájom líšia len posunutím, je ich prienikom polrovina $(A_iB_iC_i)$, kde i je pevný index z množiny $\{1,2,\dots,1999\}$. Podobne prienikom všetkých polrovín $(B_sC_sA_s)$ je určitá polrovina $(B_jC_jA_j)$ a prienikom všetkých polrovín $(C_sA_sB_s)$ je určitá polrovina $(C_kA_kB_k)$, kde $j,k\in\{1,2,\dots,1999\}$.

Množina M je preto prienikom troch vyššie spomínaných polrovín $(A_iB_iC_i)$, $(B_jC_jA_j)$ a $(C_kA_kB_k)$, M je teda trojuholník ABC, kde A je priesečník priamok A_iB_i a C_kA_k, B je priesečník priamok A_iB_i a B_jC_j a napokon C je priesečník priamok B_jC_j a C_kA_k. Tento trojuholník je podobný všetkým trojuholníkom $A_sB_sC_s$, pričom pre pomer podobnosti λ platí $0<\lambda\leqq 1$. (Prípad $A=B=C$ možno podľa zadania úlohy vylúčiť.)

Vzhľadom k tomu, že obsah trojuholníka ABC je λ^2, stačí dokázať, že $\lambda \geqq \frac{1}{3}$. Označme v výšku z vrcholu C_i na stranu A_iB_i v trojuholníku $A_iB_iC_i$. Pretože priamka A_iB_i je totožná s priamkou AB, je vzdialenosť ťažiska T_i trojuholníka $A_iB_iC_i$ od priamky AB rovná $\frac{1}{3}v$. Podľa zadaní obsahuje množina M ťažisko všetkých trojuholníkov $A_sB_sC_s$, musí teda obsahovať ťažisko T_i trojuholníka $A_iB_iC_i$.

Vzdialenosť vrcholu C trojuholníka ABC od jeho strany AB je teda aspoň $\frac{1}{3}v$. Porovnaním veľkostí výšok z vrcholov C_i a C v podobných trojuholníkoch $A_iB_iC_i$ a ABC dostávame už priamo žiadanú nerovnosť $\lambda \geqq \frac{1}{3}$, t.j. $\lambda^2 \geqq \frac{1}{9}$, čo sme chceli dokázať.

A – I – 5

Označme

$$S(n) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n).$$

Zo zadania vyplýva $S(1) = 1$. Pretože $f(n) \geqq 1$ pre všetky prirodzené čísla n, je $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rastúca funkcia. Ak je n prirodzené číslo tvaru $n = 2^k$, kde k je prirodzené, určíme súčet $S(n)$ nasledujúcim spôsobom: Počet nepárnych čísel, ktoré nie sú väčšie ako n, je 2^{k-1}. Každé nepárne číslo sa na súčte $S(n)$ podieľa hodnotou 1. Počet párnych čísel, ktoré nie sú väčšie ako n, je tiež 2^{k-1}, pritom každé párne číslo sa na súčte $S(n)$ podieľa hodnotou minimálne 1. Ak je naviac toto číslo deliteľné štyrmi, podieľa sa na súčte ďalšou 1. Ak je ďalej číslo deliteľné ôsmimi, podieľa sa ďalšou 1, atď. (Hodnotu $S(n)$ tak tvoríme sčítaním hodnôt 1 „po vrstvách"). Spolu je teda

$$\begin{aligned} S(2^k) &= 2^{k-1} + 2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 2 + 1 = 2^{k-1} + \frac{2^k - 1}{2 - 1} = \\ &= 2^k + 2^{k-1} - 1 = 3 \cdot 2^{k-1} - 1. \end{aligned}$$

Nech p je prirodzené číslo, ktoré sa dá zapísať v tvare $p = 2^m s$, kde m je celé nezáporné číslo a s nepárne prirodzené číslo. Nech k je prirodzené číslo také, že $p < 2^k$ (teda $m < k$), a nech l je nepárne prirodzené číslo. Potom

$$f(2^k l + p) = f(2^k l + 2^m s) = f\bigl(2^m(2^{k-m}l + s)\bigr).$$

Číslo $2^{k-m}l + s$ je nepárne, preto $f\bigl(2^m(2^{k-m}l + s)\bigr) = f(2^m s) = f(p)$. Spolu teda dostávame $f(2^k l + p) = f(p)$.

Ak sú k, m nezáporné celé čísla, $k > m$, a l nepárne číslo, platí podľa predchádzajúceho odstavca

$$\begin{aligned} S(2^k l + 2^m) &= f(1) + f(2) + \ldots + f(2^k l) + f(2^k l + 1) + f(2^k l + 2) + \ldots + \\ &\quad + f(2^k l + 2^m) = \\ &= f(1) + f(2) + \ldots + f(2^k l) + f(1) + f(2) + \ldots + f(2^m) = \\ &= S(2^k l) + S(2^m). \end{aligned}$$

A odtiaľ už matematickou indukciou ľahko dokážeme, že ak sú $k_1 > k_2 > \ldots > k_i$ nezáporné celé čísla, potom platí

$$S(2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_i}) = S(2^{k_1}) + S(2^{k_2}) + \ldots + S(2^{k_i}).$$

Najväčšie nezáporné celé číslo k_1 také, že $3\cdot 2^{k_1-1}-1 = S(2^{k_1}) \leqq 123\,456$, je $k_1 = 16$. Pritom $S(2^{16}) = 98\,303$.

Najväčšie nezáporné celé číslo k_2 také, že $3 \cdot 2^{k_2-1} - 1 = S(2^{k_2}) \leqq 123\,456 - 98\,303 = 25\,153$, je $k_2 = 14$. Pritom $S(2^{14}) = 24\,575$.

Najväčšie nezáporné celé číslo k_3 také, že $3 \cdot 2^{k_3-1} - 1 = S(2^{k_3}) \leqq 25\,153 - 24\,575 = 578$, je $k_3 = 8$. Pritom $S(2^8) = 383$.

Najväčšie nezáporné celé číslo k_4 také, že $3 \cdot 2^{k_4-1} - 1 = S(2^{k_4}) \leqq 578 - 383 = 195$, je $k_4 = 7$. Pritom $S(2^7) = 191$.

Najväčšie nezáporné celé číslo k_5 také, že $3 \cdot 2^{k_5-1} - 1 = S(2^{k_5}) \leqq 195 - 191 = 4$, je $k_5 = 1$. Pritom $S(2^1) = 2$.

Najväčšie nezáporné celé číslo k_6 také, že $S(2^{k_6}) \leqq 4 - 2 = 2$, je $k_6 = 0$. Pritom $S(2^0) = 1$.

Teda

$$\begin{aligned} S(82\,307) &= S(2^{16} + 2^{14} + 2^8 + 2^7 + 2 + 1) = \\ &= S(2^{16}) + S(2^{14}) + S(2^8) + S(2^7) + S(2) + S(1) = \\ &= 123\,455 \leqq 123\,456. \end{aligned}$$

Pritom $S(82\,308) = S(82\,307) + f(82\,308) = 123\,455 + 2 = 123\,457 > 123\,456$.

Najväčšie prirodzené číslo n, pre ktoré platí $S(n) \leqq 123\,456$ je $n = 82\,307$.

Iné riešenie. Na základe úvahy o sčítaní hodnôt „po vrstvách“ (ako v predošlom riešení) zistíme, že

$$S(n) = n + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{16} \right\rfloor + \ldots .$$

Pritom $\lfloor r \rfloor$ znamená celú časť reálneho čísla r, čo je najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako r.

Pretože pre každé reálne číslo r platí $\lfloor r \rfloor \leqq r$, platí tiež

$$S(n) \leqq n + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \ldots = \frac{n}{2} + \frac{n}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right) = \frac{n}{2} + n = \frac{3n}{2}.$$

Najväčšie prirodzené číslo n pre ktoré platí, že $\frac{3n}{2} \leqq 123456$, je $n = 82\,304$. Pritom

$$\begin{aligned} S(82\,304) = 82\,304 &+ \left\lfloor \frac{82\,304}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{82\,304}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{82\,304}{16} \right\rfloor + \ldots + \\ &+ \left\lfloor \frac{82\,304}{65\,536} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{82\,304}{131\,072} \right\rfloor + \ldots = \\ &= 82\,304 + 20\,576 + 10\,288 + 5\,144 + 2\,572 + 1\,286 + 643 + \\ &\quad + 321 + 160 + 80 + 40 + 20 + 10 + 5 + 2 + 1 + 0 + 0 + \ldots = \\ &= 123\,452. \end{aligned}$$

Ďalej

$$S(82\,305) = S(82\,304) + f(82\,305) = 123\,452 + 1 = 123\,453,$$
$$S(82\,306) = S(82\,305) + f(82\,306) = 123\,453 + 1 = 123\,454,$$
$$S(82\,307) = S(82\,306) + f(82\,307) = 123\,454 + 1 = 123\,455,$$
$$S(82\,308) = S(82\,307) + f(82\,308) = 123\,455 + 2 = 123\,457.$$

Najväčšie prirodzené číslo n, pre ktoré $S(n) \leqq 123\,456$, je teda $n = 82\,307$.

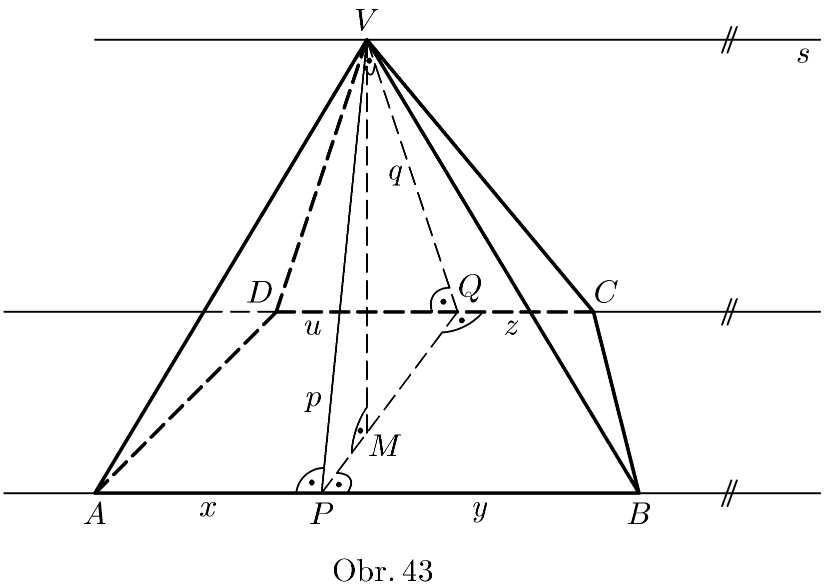
A – I – 6

Priamka AB je priesečnicou roviny ABV s rovinou podstavy $ABCD$ štvorbokého ihlana $ABCDV$. Podobne priamka CD je priesečnicou roviny CDV s rovinou podstavy $ABCD$ uvažovaného ihlana. Vzhľadom k tomu, že obidve priesečnice sú podľa zadania rovnobežné, je rovnako priesečnica s rovín ABV a CDV s nimi rovnobežná (obr. 43). Rovina kolmá na priamku s, prechádzajúca vrcholom V daného ihlana, pretína priamky AB, CD po rade v bodoch P, Q, ktoré sú pätami výšok z vrcholu V po rade na strany AB, CD v trojuholníkoch ABV, CDV. Roviny ABV a CDV sú podľa zadania navzájom kolmé, trojuholník PQV má preto pravý uhol pri vrchole V. Päta M výšky z vrcholu V na preponu PQ je pritom totožná s pätou telesovej výšky z vrcholu V ihlana $ABCDV$. Pre polohu bodov P a Q na priamke AB, resp. CD, je ďalej potrebné rozlíšiť tri prípady:

(i) Obidva body P a Q ležia na odpovedajúcich hranách AB, CD.

(ii) Jeden z bodov P, Q leží na odpovedajúcej hrane, druhý na predĺžení odpovedajúcej hrany.

(iii) Žiadny z bodov P, Q neleží na odpovedajúcej hrane.



Obr. 43

Dokážeme ďalej nerovnosť z textu úlohy pre prípad (i). Zaveďme označenie v zhode s obrázkom 43, t.j.

$$|AP| = x, \ |BP| = y, \ |CQ| = z, \ |DQ| = u, \ |VP| = p, \ |VQ| = q.$$

Využitím Pytagorovej vety v pravouhlých trojuholníkoch APV, BPV, CQV, DQV a PQV dostávame postupne vzťahy:

$$|AV|^2 = x^2 + p^2, \quad |BV|^2 = y^2 + p^2, \quad |CV|^2 = z^2 + q^2,$$
$$|DV|^2 = u^2 + q^2, \quad |PQ|^2 = p^2 + q^2.$$

Pre obsahy trojuholníkov ABV, CDV a PQV platia vzorce

$$2S_{ABV} = (x+y)p, \quad 2S_{CDV} = (z+u)q, \quad 2S_{PQV} = pq.$$

Ak dosadíme teraz za $|AV|^2$, $|BV|^2$, $|CV|^2$, $|DV|^2$, $|PQ|^2$ a $2S_{ABV}$, $2S_{CDV}$, $2S_{PQV}$ do nerovnosti v texte úlohy, dostávame po jednoduchej úprave

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + p^2 + q^2 \geqq xp + yp + zq + uq + pq.$$

Teraz dokážeme, že predošlá nerovnosť platí pre ľubovoľné nezáporné reálne čísla x, y, z, u a ľubovoľné kladné čísla p, q. Vynásobením rozdielu ľavej a pravej strany tejto nerovnosti číslom 4 dostávame po úprave

$$(4x^2 - 4xp + p^2) + (4y^2 - 4yp + p^2) + (4z^2 - 4zq + q^2) + (4u^2 - 4uq + q^2)+$$
$$+2(p^2 - 2pq + q^2) = (2x-p)^2 + (2y-p)^2 + (2z-q)^2 + (2u-q)^2 + 2(p-q)^2 \geqq 0.$$

Vzhľadom k tomu, že všetky prevedené úpravy boli ekvivalentné, platí tiež nerovnosť uvedená v texte úlohy, čo sme mali dokázať.

Podobne možno postupovať aj v prípadoch (ii) a (iii). Odlišné je tu len vyjadrenie hodnôt $2S_{ABV}$ a $2S_{CDV}$.

Rovnosť môže nastať len v prípade (i), vo zvyšných dvoch prípadoch je vylúčená. V prípade (i) pritom rovnosť nastáva práve vtedy, keď platí

$$2x = 2y = 2z = 2u = p = q,$$

t.j. práve vtedy, keď podstavou daného štvorbokého ihlana $ABCDV$ je obdĺžnik $ABCD$, päta M výšky VM uvažovaného ihlana je priesečníkom uhlopriečok AC a BD v obdĺžniku $ABCD$ a súčasne platí

$$|AB| : |BC| : |VM| = 4 : 2\sqrt{2} : \sqrt{2}.$$

A – S – 1

Prvá rovnica je splnená práve vtedy, keď platí $x = y + p$ alebo $x = y - p$. Po dosadení do druhej rovnice danej sústavy dostaneme po úprave v prvom prípade kvadratickú rovnicu

$$3py^2 + 3p^2y + p^3 - 16 = 0,$$

v druhom prípade potom kvadratickú rovnicu

$$3py^2 - 3p^2y + p^3 + 16 = 0$$

o neznámej y. Daná sústava rovníc bude mať práve jedno riešenie v obore reálnych čísel, práve keď jedna z dvoch predošlých kvadratických rovníc bude mať jediný (dvojnásobný) koreň a druhá z nich nebude mať žiadny reálny koreň alebo bude mať rovnaký dvojnásobný koreň ako rovnica prvá (môžeme predpokladať, že $p \neq 0$, pretože pre $p = 0$ daná sústava zrejme nemá riešenie). Prvá kvadratická rovnica má diskriminant $D_1 = 3p(64 - p^3)$, druhá má diskriminant $D_2 = -3p(64 + p^3)$. Hľadáme teda tie $p \neq 0$, pre ktoré je jedno z čísel D_1, D_2 rovné nule a druhé záporné (prípad $D_1 = D_2 = 0$ pre $p \neq 0$ totiž nenastane).

Ak je $D_1 = 0$, je $p = 4$ a $D_2 < 0$. Pokiaľ $D_2 = 0$, je $p = -4$ a $D_1 < 0$. Hodnoty $p = 4$ a $p = -4$ sú teda jediné, ktoré majú požadovanú vlastnosť.

Daná sústava rovníc má pritom pre obe uvedené hodnoty parametra p jediné reálne riešenie $(x, y) = (2, -2)$.

Iné riešenie. Z prvej rovnice máme $|x - y| = |p|$, z druhej rovnice však vidíme, že $x^3 > y^3$, čo je ekvivalentné s nerovnosťou $x > y$ (je $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ a $x^2 + xy + y^2 > 0$ pre ľubovoľné reálne x, y s výnimkou prípadu $x = y = 0$). Je teda $x = y + |p|$, $|p| > 0$. Po dosadení do druhej rovnice sústavy (pre jednoduchosť píšme q miesto $|p|$) dostaneme pre y kvadratickú rovnicu

$$3qy^2 + 3q^2y + q^3 - 16 = 0$$

s diskriminantom $D(q) = 3q(64 - q^3) = 3q(4 - q)(16 + 4q + q^2)$. Ak má daná sústava v obore reálnych čísel jediné riešenie, je nutne diskriminant $D(q)$ predošlej rovnice rovný 0, tj. musí platiť $(4 - q)(16 + 4q + q^2) = 0$ (vieme, že $q = |p| > 0$). Pretože pre ľubovoľné reálne q je $16 + 4q + q^2 > 0$, musí byť $q = |p| = 4$, tj. $p = 4$ alebo $p = -4$. Zároveň hneď dostávame, že $y = -\frac{1}{2}q = -2$ a $x = y + 4 = 2$.

Daná sústava rovníc má práve jedno reálne riešenie práve vtedy, keď $p = 4$ alebo $p = -4$, a to $(x, y) = (2, -2)$.

A – S – 2

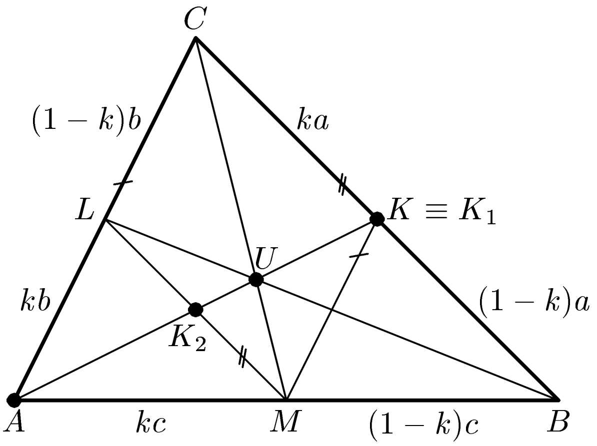
Z rovnosti obsahov trojuholníkov AMU a KCU plynie rovnosť obsahov trojuholníkov AMC a AKC. Body K, M majú teda rovnakú vzdialenosť od priamky AC. Odtiaľ plynie, že $CA \parallel MK$ a štvoruholník $CAMK$ je teda lichobežník. Podobne dokážeme, že štvoruholník $BCLM$ je tiež lichobežník, kde $BC \parallel LM$. Trojuholníky AML a ABC, resp. BKM a BCA sú teda rovnoľahlé a platí (obr. 44)

$$|AL| = kb,\ |AM| = kc,\ |BM| = (1-k)c,\ |BK| = (1-k)a$$

a ďalej

$$|CK| = ka,\ |CL| = (1-k)b, \quad \text{kde } k \in (0;1).$$

Použitím Cèvovej vety pre trojicu úsečiek AK, BL a CM, ktoré sa podľa textu úlohy



Obr. 44

pretínajú v bode U, dostávame

$$\frac{kc}{(1-k)c} \cdot \frac{(1-k)a}{ka} \cdot \frac{(1-k)b}{kb} = 1.$$

Odtiaľ plynie $\dfrac{1-k}{k} = 1$, čiže $k = \dfrac{1}{2}$. Tieto úsečky sú teda ťažnice a ich priesečník U je ťažiskom daného trojuholníka. Zo zhodnosti úsečiek AM a BM už plynie rovnosť obsahov trojuholníkov AMU a BMU, teda rovnosť $P = Q$, čo sme mali dokázať.

Iné riešenie (bez použitia Cèvovej vety). Rovnako ako v prvom riešení ukážeme, že úsečky BC a LM sú rovnobežné, takže si navzájom odpovedajú v istej rovnoľahlosti so stredom U a zároveň aj v istej rovnoľahlosti so stredom A. Označme K_1, K_2 po rade stredy oboch uvažovaných úsečiek. Vzhľadom k tomu, že body K_1, K_2 si odpovedajú v oboch zmienených rovnoľahlostiach, ležia body A a U (stredy oboch rovnoľahlostí) na priamke K_1K_2. Odtiaľ plynie, že stred K_1 strany BC leží na priamke AU, je teda totožný s bodom K z textu úlohy. Úsečka AK je teda ťažnicou trojuholníka ABC. Podobne dokážeme, že aj úsečka BL je ťažnicou daného trojuholníka. Bod U je teda jeho ťažiskom. Záver je potom rovnaký ako v prvom riešení.

A – S – 3

Ukážeme, že hľadaným najmenším k je číslo 1 001. Rozdeľme všetky čísla z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 2\,000\}$ do 1 000 dvojíc

$$\{1, 666\},\ \{2, 665\},\ \{3, 664\},\ \ldots,\ \{333, 334\},$$
$$\{667, 1334\},\ \{668, 1\,335\},\ \{669, 1336\},\ \ldots,\ \{1\,333, 2\,000\}.$$

(Číslo 667 z textu úlohy je rovné súčtu čísel každej dvojice v prvom riadku a rozdielu čísel každej dvojice v druhom riadku. Všimnime si, že skutočne každé z čísel $1, 2, 3, \ldots, 2\,000$ je zastúpené práve v jednej dvojici.)

Číslo $1\,001$ má požadovanú vlastnosť, pretože pokiaľ vyberieme ľubovoľných $1\,001$ čísel z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 2\,000\}$, budú medzi nimi obe čísla aspoň jednej z uvedených dvojíc (máme vybraných $1\,001$ čísel, ale len $1\,000$ dvojíc). Súčet alebo rozdiel čísel v nájdenej dvojici je však 667.

Teraz ukážeme, že žiadne číslo $k \leqq 1\,000$ požadovanú vlastnosť nemá. Stačí to zrejme ukázať pre $k = 1\,000$: ak vyberieme $1\,000$ párnych čísel $2, 4, 6, \ldots, 2\,000$, je súčet aj rozdiel ľubovoľných dvoch vybraných čísel párny, takže sa nemôže rovnať nepárnemu číslu 667.

A – II – 1

Označme $Q(x) = x^2 + 4x - 7$, potom $0 = P\big(Q(1)\big) = P(-2)$. Odtiaľ vyplýva, že $P(x) = a(x+2)(x-p)$, kde a a p sú reálne čísla, $a \neq 0$. Je teda

$$P\big(Q(x)\big) = a(x^2 + 4x - 7 + 2)(x^2 + 4x - 7 - p) = \\ = a(x-1)(x+5)(x^2 + 4x - 7 - p).$$

To znamená, že koreňmi danej rovnice sú okrem čísel 1 a -5 ešte korene kvadratickej rovnice

$$x^2 + 4x - 7 - p = 0. \tag{1}$$

Pretože aspoň jeden z koreňov danej rovnice má byť dvojnásobný, je buď aspoň jedno z čísel 1 a -5 koreňom rovnice (1), alebo má táto rovnica sama dvojnásobný koreň. Pritom z tvaru rovnice (1) vyplýva, že súčet jej koreňov je -4 (číslo opačné ku koeficientu pri lineárnom člene), takže táto rovnica má koreň 1, práve keď má koreň -5.

Sú teda dve možnosti:

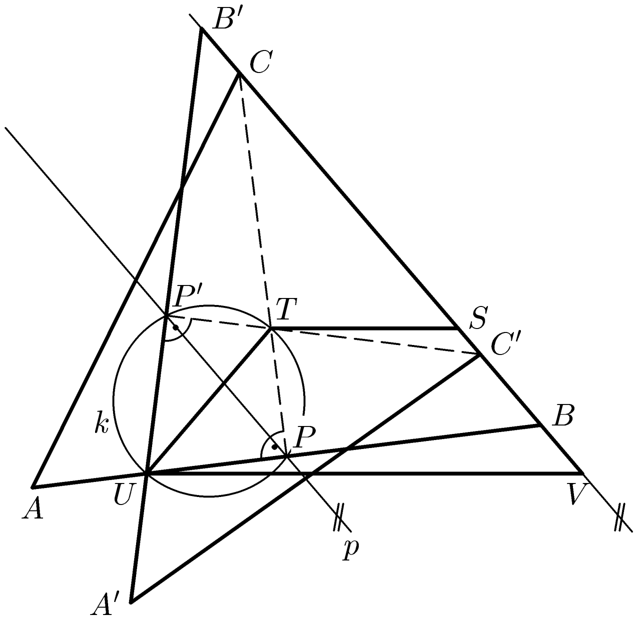
a) Rovnica (1) má dva korene 1 a -5 (takže je $p = -2$) a rovnica $P\big(Q(x)\big) = a(x-1)^2(x+5)^2 = 0$ má dva dvojnásobné korene 1 a -5.

b) Rovnica (1) má sama dvojnásobný koreň. Pretože súčet jej koreňov je -4, je dvojnásobným koreňom číslo $(-4) : 2 = -2$. (V tomto prípade je $p = -11$ a $P\big(Q(x)\big) = a(x-1)(x+5)(x+2)^2 = 0$.)

Záver: Úloha má dve riešenia: daná rovnica má buď dva dvojnásobné korene 1 a -5, alebo má dva jednoduché korene 1 a -5 a dvojnásobný koreň -2.

A – II – 2

Označme P stred základne AB hľadaného rovnoramenného trojuholníka ABC. Pretože vrchol U daného lichobežníka $UVST$ leží na priamke AB, je buď $U = P$, alebo body T, U a P tvoria vrcholy pravouhlého trojuholníka (obr. 45). V oboch prípadoch bod P leží na Tálesovej kružnici k zostrojenej nad priemerom TU. Označme d vzdialenosť vrcholu T daného lichobežníka od priamky VS. Vzhľadom k tomu, že T je ťažiskom trojuholníka

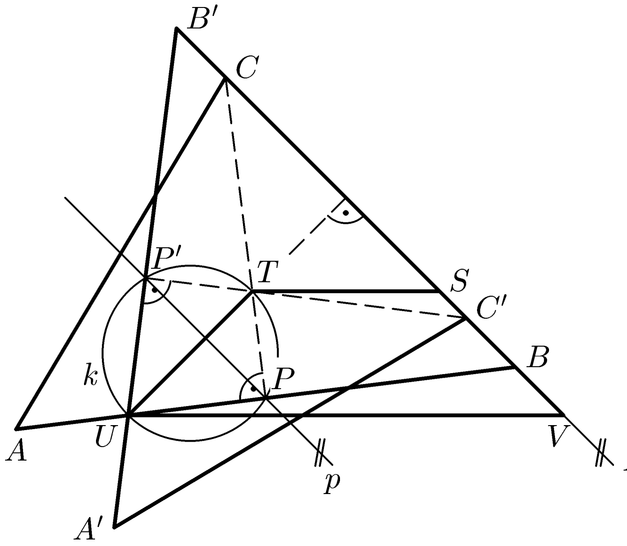


Obr. 45

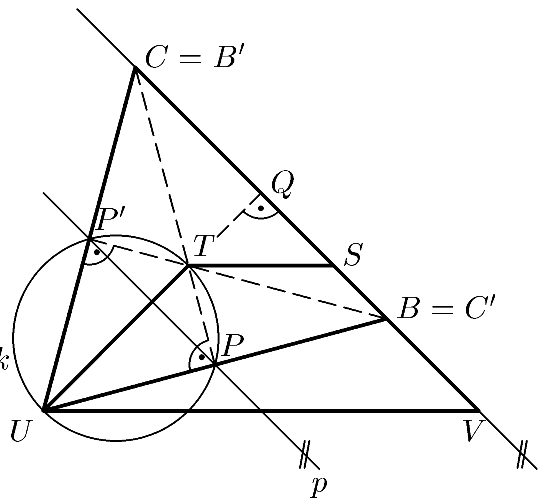
ABC, má jeho výška z vrcholu A veľkosť $3d$, teda bod P leží na priamke p, ktorá je s priamkou VS rovnobežná, má od nej vzdialenosť $\frac{3}{2}d$ a leží v polrovine VST. Odtiaľ už vyplýva *konštrukcia* trojuholníka ABC:

1. zostrojíme kružnicu k s priemerom TU;
2. zostrojíme v polrovine VST priamku $p \parallel VS$ vo vzdialenosti $\frac{3}{2}d$ od VS;
3. zostrojíme bod $P \in k \cap p$;
4. zostrojíme priamku $PB \perp TP$, $B \in VS$;
5. zostrojíme vrcholy A ($A \in PB$, $A \neq B$, $|AP| = |PB|$) a C ($C \in PT \cap VS$).

Diskusia: Pretože podľa predpokladu je $ST \parallel UV$ a $\frac{3}{2}|ST| < |UV|$, pretne priamka p stranu TU daného lichobežníka vo vnútornom bode, bude teda sečnicou kružnice k a pretne ju vo dvoch rôznych bodoch P a P' (obr. 45). Pre každý z nich dostávame jedno riešenie, trojuholníky ABC a $A'B'C'$. Z konštrukcie je ďalej zrejmé, že pokiaľ bude $TU \perp SV$, budú obidva body P, P' súmerne združené podľa osi TU, takže dostaneme dva zhodné (súmerne združené) trojuholníky ABC a $A'B'C'$ (obr. 46). Obe súmerné riešenia splynú v prípade, keď vyjde $A = U$. Pritom bude ťažisko T trojuholníka ABC zároveň priesečníkom jeho výšok, takže výsledný trojuholník ABC bude rovnostranný (obr. 47). To nastane práve vtedy, keď sú obe ramená daného lichobežníka navzájom kolmé a naviac platí $3|ST| = |UV|$, ako vyplýva z podobnosti trojuholníkov $UVQ \sim \sim TSQ$. V tomto jedinom prípade má úloha jedno riešenie. Vo všetkých ostatných prípadoch má úloha dve riešenia (ktoré sú pre $TU \perp SV$ zhodné).



Obr. 46



Obr. 47

A – II – 3

Umocnením oboch strán danej nerovnosti na tretiu dostaneme ekvivalentnú nerovnosť

$$\frac{a}{b} + 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}} + \frac{b}{a} \leqq 4 + 2\frac{a}{b} + 2\frac{b}{a}$$

alebo

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 4 \geqq 3\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right). \tag{1}$$

V predchádzajúcej nerovnosti položme $x = \sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$ $(x > 0)$. Po vynásobení oboch strán nerovnosti (kladným) číslom x^3 a jednoduchej úprave obdržíme ekvivalentnú nerovnosť

$$x^6 - 3x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 1 \geqq 0.$$

Najprv zistíme, či rovnica $x^6 - 3x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ nemá celočíselný koreň. Taký koreň musí deliť absolútny člen, takže sú len dve možnosti, 1 a -1. Ľahko overíme, že uvedená rovnica má koreň $x = 1$, a po delení dvojčlenom $(x-1)$ zistíme, že ide dokonca o koreň dvojnásobný a že platí rozklad

$$x^6 - 3x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 1 = (x-1)^2(x^4 + 2x^3 + 2x + 1).$$

Pre každé $x > 0$ je $x^4 + 2x^3 + 2x + 1 > 0$. Platí teda

$$x^6 - 3x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 1 = (x-1)^2(x^4 + 2x^3 + 2x + 1) \geqq 0,$$

čo sme mali dokázať. Rovnosť v predchádzajúcej nerovnosti pritom nastáva práve vtedy, keď $x = 1$, t.j. práve vtedy, keď platí $a = b$.

Druhé riešenie. Použitím nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom pre trojicu kladných čísel $\frac{a}{b}$, 1, 1 dostaneme

$$\frac{a}{b} + 1 + 1 \geqq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}},$$

a podobne

$$\frac{b}{a} + 1 + 1 \geqq 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

V oboch predchádzajúcich nerovnostiach nastáva rovnosť práve vtedy, keď $a = b$. Ich súčtom potom vyjde

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 4 \geqq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}},$$

čo je nerovnosť (1).

Tretie riešenie. Podľa nerovnosti medzi mocninovými priemermi stupňa $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{2}$ dostávame pre kladné čísla $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$ nerovnosť (pozri napr. J. Herman, R. Kučera, J. Šimša: Metody řešení matematických úloh I, str. 174)

$$\left(\frac{\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}}}{2}\right)^3 \leqq \left(\frac{\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}}{2}\right)^2,$$

v ktorej nastáva rovnosť práve vtedy, keď $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$, t.j. práve vtedy, keď $a = b$.

Pretože $\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 = (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$, dostávame odtiaľ po jednoduchej úprave dokazovanú nerovnosť, v ktorej nastáva rovnosť práve vtedy, keď $a = b$.

A – II – 4

Nech E je vnútorným bodom takého konvexného štvoruholníka $ABCD$, ktorý vyhovuje podmienkam úlohy. Uvažujme priamky X_1Y_1, X_2Y_2 a X_3Y_3, ktoré prechádzajú bodom E a pretínajú po rade strany AB a CD v bodoch X_1 a Y_1, X_2 a Y_2, X_3 a Y_3 (obr. 48). Ak všetky tri uvažované priamky delia štvoruholník $ABCD$ na dve časti s rovnakým obsahom, rovnajú sa aj obsahy trojuholníkov EX_1X_2 a EY_1Y_2, resp. EX_2X_3 a EY_2Y_3.

Pretože tieto trojuholníky majú vždy zhodné vnútorné uhly pri vrchole E, vyplýva z rovnosti ich obsahov rovnosť

$$|EX_1| \cdot |EX_2| = |EY_1| \cdot |EY_2|,$$

resp.

$$|EX_2| \cdot |EX_3| = |EY_2| \cdot |EY_3|.$$

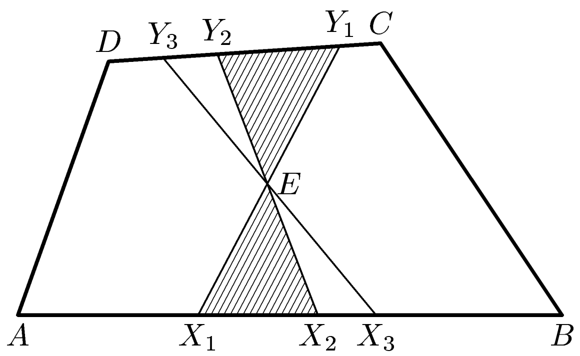
Z oboch predošlých rovností dostávame

$$\frac{|EX_1|}{|EX_3|} = \frac{|EY_1|}{|EY_3|}.$$

Trojuholníky EX_1X_3 a EY_1Y_3 sú teda podobné (podľa vety sus) a majú ten istý obsah. Sú preto stredovo súmerné podľa stredu E a platí teda $X_1X_3 \parallel Y_1Y_3$. Štvoruholník $ABCD$ má teda nutne rovnobežné strany AB a CD.

Naopak každý (konvexný) štvoruholník $ABCD$, v ktorom platí $AB \parallel CD$, vyhovuje podmienkam úlohy. Za bod E potom zvolíme stred úsečky spájajúcej stredy rovnobežných strán AB a CD; požadovaná vlastnosť takého bodu je zrejmá.

Záver: Podmienkam úlohy vyhovujú práve všetky konvexné štvoruholníky $ABCD$, v ktorých $AB \parallel CD$.



Obr. 48

A – III – 1

Označme $a_n = 4 \cdot 3^{2^n} + 3 \cdot 4^{2^n}$. Ukážeme najprv, že pre každé prirodzené číslo n je rozdiel $a_{n+2} - a_n$ deliteľný trinástimi. Po úpravách dostaneme rovnosť

$$a_{n+2} - a_n = 4 \cdot (81^{2^n} - 3^{2^n}) + 3 \cdot (256^{2^n} - 4^{2^n}). \tag{1}$$

Položme v známom vzorci

$$A^p - B^p = (A - B)(A^{p-1} + A^{p-2}B + \ldots + B^{p-1}),$$

ktorý platí pre každé prirodzené p a pre ľubovoľné dve reálne čísla A a B, najprv $p = 2^n$, $A = 81$, $B = 3$ a potom $p = 2^{n-1}$, $A = 256^2$, $B = 4^2$. Pretože je $81 - 3 = 78 = 13 \cdot 6$

a tiež $256^2 - 4^2 = (256-4)(256+4) = 252 \cdot 260 = 13 \cdot 20 \cdot 252$, sú obidva sčítance na pravej strane rovnosti (1) čísla deliteľné číslom 13. Preto je aj rozdiel $a_{n+2} - a_n$ deliteľný číslom 13. Číslo a_1 nie je deliteľné 13-timi, lebo $a_1 = 84 = 13 \cdot 6 + 6$, zatiaľčo číslo a_2 číslom 13 deliteľné je ($a_2 = 1\,092 = 13 \cdot 84$). Použitím princípu matematickej indukcie už ľahko zistíme, že a_n je deliteľné číslom 13 práve vtedy, keď n je párne. Tým je dôkaz ukončený.

Iné riešenie. Zostavme tabuľku zvyškov pri delení čísla $a_n = 4 \cdot 3^{2^n} + 3 \cdot 4^{2^n}$ trinástimi.

n	1	2	3	4	5	...
3^{2^n}	9	3	9	3	9	...
4^{2^n}	3	9	3	9	3	...
$4 \cdot 3^{2^n}$	10	12	10	12	10	...
$3 \cdot 4^{2^n}$	9	1	9	1	9	...
a_n	6	0	6	0	6	...

Zvyšky oboch čísel tvaru N^{2^n} určujeme rekurentne pomocou rovností $N^{2^{n+1}} = N^{2^n} \cdot N^{2^n} = \left(N^{2^n}\right)^2$. Pretože $3^2 = 9$ a $9^2 = 81 \equiv 3 \pmod{13}$, vidíme, že v druhom aj treťom riadku tabuľky sa pravidelne strieda trojka s deviatkou, zvyšky čísla a_n pri delení trinástimi sa teda (vzhľadom na číslo n) opakujú s periódou 2. Číslo a_n je teda deliteľné trinástimi práve vtedy, keď je n párne.

A – III – 2

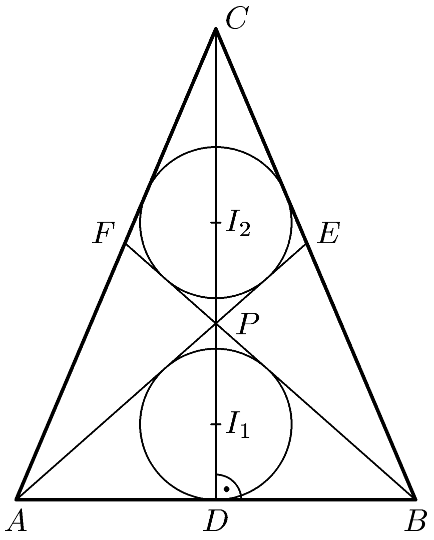
Pretože priamka CD je osou súmernosti dvoch vrcholových uhlov APB a EPF, leží stred I_1 kružnice vpísanej trojuholníku ABP na úsečke DP a zároveň stred I_2 kružnice vpísanej štvoruholníku $PECF$ ležia na úsečke CP (obr. 49). Naviac platí $|I_1P| = |I_2P|$, lebo obe spomínané kružnice sú zhodné. Stredy O_1, O_2 kružníc vpísaných trojuholníkom ADP a BCP (obr. 50) potom ležia po rade na úsečkách AI_1, BI_2, lebo polpriamky AI_1 a BI_2 sú osi odpovedajúcich uhlov DAP a CBP. Z rovnosti $|I_1P| = |I_2P|$ naviac vyplýva, že trojuholníky API_1 a BPI_2 majú rovnaký obsah, pretože sa rovnajú aj príslušné výšky $|AD| = |BD|$.

Označme r_1, r_2 polomery vpísaných kružníc trojuholníkom ADP a BCP. Ak vyjadríme pomocou nich obidva spomínané obsahy ($S(XYZ)$ označuje obsah trojuholníka XYZ), dostaneme

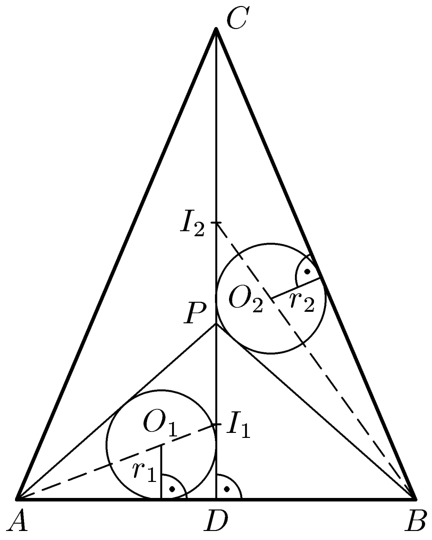
$$S(API_1) = S(AO_1P) + S(O_1PI_1) = \frac{1}{2} \cdot |AP| \cdot r_1 + \frac{1}{2} \cdot |I_1P| \cdot r_1 = \frac{r_1}{2}(|AP| + |I_1P|),$$
$$S(BPI_2) = S(BO_2P) + S(O_2PI_2) = \frac{1}{2} \cdot |BP| \cdot r_2 + \frac{1}{2} \cdot |I_2P| \cdot r_2 = \frac{r_2}{2}(|BP| + |I_2P|).$$

Vzhľadom na to, že $S(API_1) = S(BPI_2)$, $|I_1P| = |I_2P|$ a $|AP| = |BP|$, dostávame $r_1 = r_2$, čo sme mali dokázať.

Iné riešenie. Vzhľadom na súmernosť trojuholníka ABC podľa osi CD stačí dokázať, že sa zhodujú kružnice vpísané trojuholníkom BDP a BPC.

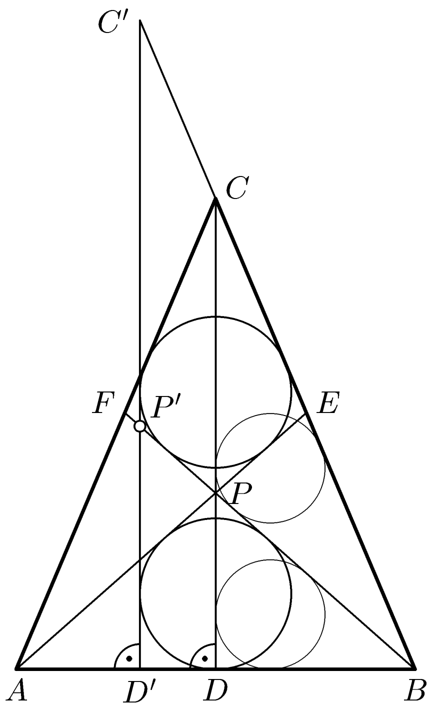


Obr. 49



Obr. 50

Vonkajšie spoločné dotyčnice zhodných vpísaných kružníc mnohouholníkom ABP a $PECF$ sú rovnobežné s úsečkou CD, teda kolmé na priamku AB. Uvažujme tú z nich, ktorá pretína úsečky AD, PF a polpriamku opačnú k CB. Tieto priesečníky označme po rade D', P', C' (obr. 51).



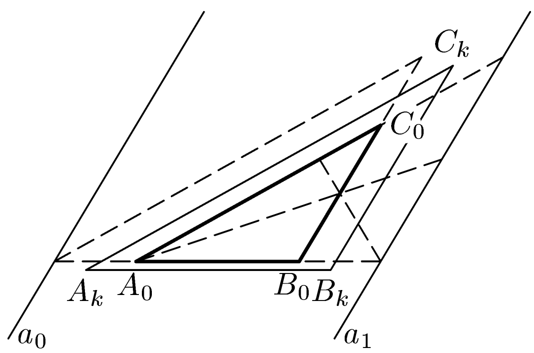
Obr. 51

V rovnoľahlosti, ktorá zobrazí trojuholník $BD'C'$ na trojuholník BDC, zodpovedajú trojuholníkom $BD'P'$ a $BP'C'$ trojuholníky BDP a BPC. Pretože kružnica vpísaná štvoruholníku $PECF$ je zároveň vpísaná aj trojuholníku $BP'C'$ a kružnica vpísaná trojuholníku ABP je zároveň vpísaná trojuholníku $BD'P'$ a obe uvedené kružnice sú podľa predpokladu zhodné, sú zhodné aj ich obrazy v spomínanej rovnoľahlosti, teda kružnice vpísané trojuholníkom BDP a BPC.

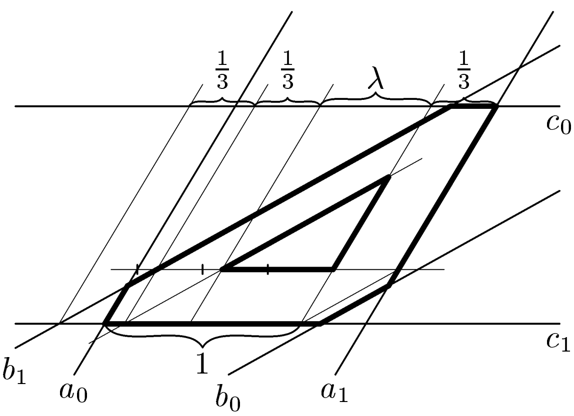
A – III – 3

Nech trojuholník ABC s obsahom 1 je vzorom všetkých 2 000 trojuholníkov $A_kB_kC_k$, $k \in \{1, 2, \ldots, 2\,000\}$, v rôznych posunutiach. Ak každý z týchto trojuholníkov obsahuje ťažisko všetkých ostávajúcich, vyplýva z riešenia úlohy 49–A–I–4, že prienikom všetkých týchto trojuholníkov je trojuholník $A_0B_0C_0$, ktorý je podobný trojuholníku ABC, pričom jeho strany A_0B_0, B_0C_0, C_0A_0 sú po rade rovnobežné sa stranami AB, BC, CA a pre pomer podobnosti λ naviac platí $\lambda \in \langle \frac{1}{3}; 1\rangle$.

Ak je $A_kB_kC_k$ ($k \in \{1, 2, \ldots, 2\,000\}$) ľubovoľný z daných trojuholníkov, je trojuholník $A_0B_0C_0$ jeho časťou, preto leží vrchol A_k v polrovine $B_0C_0A_0$ vo vzdialenosti nanajvýš v_a od hraničnej priamky B_0C_0, kde v_a je veľkosť výšky trojuholníka ABC prislúchajúcej k vrcholu A. Na druhú stranu je i vzdialenosť strany B_kC_k od vrcholu A_0 nanajvýš v_a. Pretože naviac trojuholník $A_0B_0C_0$ obsahuje ťažisko všetkých takýchto trojuholníkov $A_kB_kC_k$, nemôže byť vzdialenosť strany B_kC_k od strany $B_0C_0 \parallel B_kC_k$ väčšia ako $\frac{1}{3}v_a$. Vzdialenosť vrcholu A_0 od strany B_0C_0 je λv_a, spolu je teda vzdialenosť oboch rovnobežných priamok B_kC_k, B_0C_0 nanajvýš $\min(\frac{1}{3}, 1-\lambda)\cdot v_a$. Vidíme, že všetky dané trojuholníky ležia vnútri pásu ohraničeného dvoma rovnobežkami $a_0 \parallel a_1 \parallel B_0C_0$ (obr. 52), ktorých vzdialenosť od B_0C_0 je v_a a $\min(\frac{1}{3}, 1-\lambda)\cdot v_a$. Analogické tvrdenie môžeme vysloviť aj pre ďalšie dva smery C_0A_0 a A_0B_0. Zjednotenie všetkých daných trojuholníkov musí teda ležať v prieniku všetkých troch odpovedajúcich pásov.



Obr. 52



Obr. 53

Rozlíšime teraz dva prípady podľa toho, čomu sa rovná $\min(\frac{1}{3}, 1-\lambda)$.

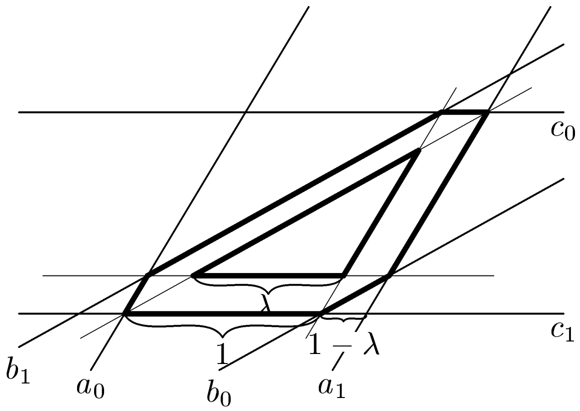
1. Nech $\frac{1}{3} \leqq \lambda < \frac{2}{3}$. Prienikom zodpovedajúcich troch pásov je šesťuholník, ktorý vznikne z trojuholníka T určeného trojicou priamok (a_1, b_1, c_1) odstránením troch trojuholníčkov T_a, T_b, T_c určených trojicami priamok (a_0, b_1, c_1), (a_1, b_0, c_1) a (a_1, b_1, c_0).

Na obr. 53 sú vyznačené niektoré pomerné vzdialenosti vzhľadom na $|AB|$, s ktorých pomocou zistíme, že trojuholník T je podobný trojuholníku ABC s pomerom podobnosti $1+\lambda$ a trojuholníky T_a, T_b, T_c sú podobné trojuholníku ABC s pomerom podobnosti $\lambda-\frac{1}{3}$. Z vypočítaných pomerov je zároveň zrejmé, že pre $\lambda=\frac{1}{3}$ sa trojuholníky T_a, T_b, T_c stiahnu do jediného bodu, takže uvedený šesťuholník sa zredukuje na trojuholník T.

Pre obsah $S(\lambda)$ vyznačeného útvaru potom (využijúc $\lambda<\frac{2}{3}$) platí

$$\begin{aligned} S(\lambda) &= (1+\lambda)^2-3\Big(\lambda-\frac{1}{3}\Big)^2= \\ &= -2\lambda^2+4\lambda+\frac{2}{3}=-2(\lambda-1)^2+\frac{8}{3}<\frac{8}{3}-2\cdot\frac{1}{9}=\frac{22}{9}. \end{aligned}$$

2. Nech $\frac{2}{3}\leqq\lambda\leqq 1$. Prienikom odpovedajúcich troch pásov je opäť šesťuholník (obr. 54), pričom odpovedajúci trojuholník T je podobný trojuholníku ABC s pomerom



Obr. 54

podobnosti $3-2\lambda$ a trojuholníky T_a, T_b, T_c sú podobné trojuholníku ABC s pomerom podobnosti $1-\lambda$ (v tomto prípade sa šesťuholník zredukuje na trojuholník T pre $\lambda=1$).

Pre obsah $S(\lambda)$ v tomto prípade platí

$$\begin{aligned} S(\lambda) &= (3-2\lambda)^2-3(1-\lambda)^2= \\ &= \lambda^2-6\lambda+6=(\lambda-3)^2-3\leqq\frac{49}{9}-3=\frac{22}{9} \end{aligned}$$

s rovnosťou pre $\lambda=\frac{2}{3}$.

Zistili sme, že zjednotenie všetkých trojuholníkov $A_kB_kC_k$ $(k=1,2,\ldots,2\,000)$ je pre $\lambda\neq\frac{2}{3}$ časťou rovinného útvaru, ktorého obsah je menší ako $\frac{22}{9}$. Pre $\lambda= =\frac{2}{3}$ je potom časťou šesťuholníka s obsahom $\frac{22}{9}$. Strana tohto šesťuholníka, ktorá leží napr. na priamke a_0, môže obsahovať len konečne veľa vrcholov A_i daných trojuholníkov $A_iB_iC_i$, takže v šesťuholníku určite nájdeme trojuholníček kladného obsahu, ktorý do uvažovaného zjednotenia nepatrí. Obsah zjednotenia uvažovaných trojuholníkov je preto aj v tomto prípade menší ako $\frac{22}{9}$. Tým je dôkaz hotový.

A – III – 4

Zo zadania vyplýva, že každá z rovníc $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ má dva reálne korene, pritom všetky štyri korene oboch uvažovaných rovníc sú navzájom rôzne. Označme x_1, x_2 korene rovnice $f(x) = 0$. Platí teda $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, kde a je reálne číslo, $a \neq 0$. Číslo x_1 je podľa zadania aj koreňom rovnice $g\bigl(f(x)\bigr) = 0$, platí teda $g\bigl(f(x_1)\bigr) = g(0) = 0$. Odtiaľ vyplýva, že rovnica $g(x) = 0$ má jeden koreň 0. Označme b ($b \neq 0$) druhý koreň tejto rovnice. Je teda $g(x) = cx(x - b)$, kde c je reálne číslo, $c \neq 0$. Čísla 0 a b sú podľa zadania aj koreňmi rovnice $g\bigl(f(x)\bigr) = 0$:

$$g\bigl(f(0)\bigr) = cf(0)\bigl(f(0) - b\bigr) = 0 \qquad \text{a} \qquad g\bigl(f(b)\bigr) = cf(b)\bigl(f(b) - b\bigr) = 0.$$

Nakoľko čísla 0 a b nemôžu byť koreňmi rovnice $f(x) = 0$, vyplýva odtiaľ $f(0) = f(b) = b$.

Na číselnej osi sú preto ako body 0 a b, tak aj body x_1 a x_2 súmerne združené podľa x-ovej súradnice vrcholu paraboly $y = f(x)$. Čísla 0, b, x_1 a x_2 (tvoriace podľa zadaní aritmetickú postupnosť) môžu teda byť usporiadané dvoma spôsobmi:

• Čísla x_1 a x_2 ležia vnútri intervalu s krajnými bodmi 0 a b. Potom $x_1 = \frac{1}{3}b$ a $x_2 = \frac{2}{3}b$ (pri vhodnej voľbe indexov), teda

$$b = f(0) = a\Bigl(-\frac{b}{3}\Bigr)\Bigl(-\frac{2b}{3}\Bigr) = \frac{2ab^2}{9},$$

takže $b = \dfrac{9}{2a}$ a

$$f(x) = a\Bigl(x - \frac{3}{2a}\Bigr)\Bigl(x - \frac{3}{a}\Bigr) = ax^2 - \frac{9}{2}x + \frac{9}{2a}.$$

• Čísla 0 a b ležia vnútri intervalu s krajnými bodmi x_1 a x_2. Potom $x_1 = -b$ a $x_2 = 2b$ (pri vhodnej voľbe indexov), teda

$$b = f(0) = ab(-2b) = -2ab^2,$$

takže $b = -\dfrac{1}{2a}$ a

$$f(x) = a\Bigl(x - \frac{1}{2a}\Bigr)\Bigl(x + \frac{1}{a}\Bigr) = ax^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2a}.$$

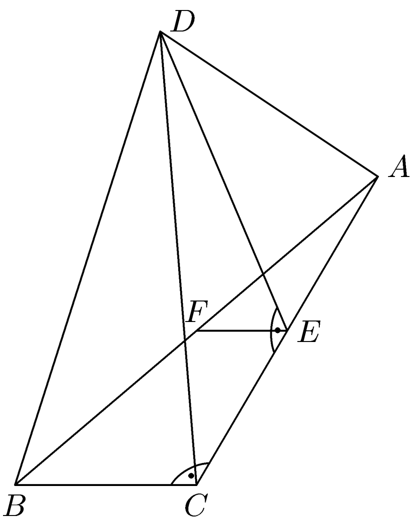
Záver: Úlohe vyhovujú všetky kvadratické funkcie f tvaru

$$f(x) = ax^2 - \frac{9}{2}x + \frac{9}{2a} \qquad \text{alebo} \qquad f(x) = ax^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2a},$$

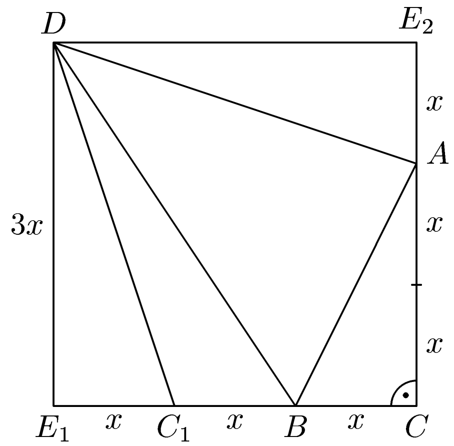
kde a je ľubovoľné nenulové reálne číslo.

A – III – 5

Nech $ABCD$ je uvažovaný ihlan s podstavou ABC, kde $|\sphericalangle ACB| = 90°$. Podľa textu úlohy bol model rozrezaný pozdĺž oboch odvesien AC a BC podstavy a ďalej pozdĺž ťažnice z vrcholu D jednej zo stien BCD, ACD. Pri reze pozdĺž ťažnice v stene ABD by totiž nebolo možné rozvinúť model do roviny. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme ďalej, že rez je vedený pozdĺž ťažnice DE v stene ACD (obr. 55) tak, že po rozvinutí do roviny vznikne útvar s hranicou $BCAE_2DE_1C_1B$ a pravým uhlom pri vrchole C (obr. 56). Pretože tento útvar je štvorec (označme ho $\mathcal{C}$), sú uhly AE_2D a DE_1C_1 pravé (žiadny z nich nemôže byť priamy, lebo ich súčet je 180°). Preto je ťažnica DE trojuholníka ACD zároveň jeho výškou a body E_1, E_2 sú vrcholy štvorca $\mathcal{C}$.

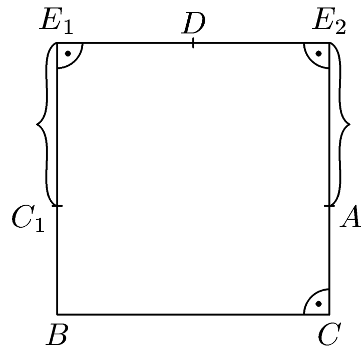


Obr. 55



Obr. 56

Predpokladajme, že sú vrcholy E_1 a E_2 štvorca $\mathcal{C}$ susedné. Z rovnosti $|E_1C_1| = |E_2A|$ a z toho, že $\mathcal{C}$ má vrchol C, vyplýva, že $\mathcal{C} = CE_2E_1B$, a tak $|BC| = |BE_1|$. To ale odporuje rovnosti $|BC| = |BC_1|$ (obr. 57). Tak sme (sporom) dokázali, že vrcholy E_1 a E_2 štvorca $\mathcal{C}$ *nie sú* susedné, preto k vrcholom $\mathcal{C}$ patrí (okrem bodov E_1, E_2 a C) nutne aj bod D (z úseku E_2DE_1 hranice $BCAE_2DE_1C_1B$).



Obr. 57

Popísané body rozdeľujú hranicu štvorca $\mathcal{C} = CE_2DE_1$ na úseky, ktorých dĺžky sú vyznačené na obr. 56 pomocou výhodného označenia $x = \frac{1}{3}a$. Dĺžky ostatných hrán ihlana spočítame podľa Pytagorovej vety:

$$|DC| = |DA| = \sqrt{(3x)^2 + (x)^2} = x\sqrt{10},$$
$$|DB| = \sqrt{(3x)^2 + (2x)^2} = x\sqrt{13}, \quad |AB| = x\sqrt{5}.$$

Aby sme zistili objem ihlana $ABCD$, potrebujeme určiť veľkosť jeho telesovej výšky.

Ak označíme F stred hrany AB, vidíme, že hrana AC je kolmá na rovinu EFD, lebo $AC \perp BC \parallel EF$ a $AC \perp DE$. Rovina EFD je teda kolmá na základňu ABC.

Telesová výška ihlana je preto výškou (z vrcholu D) trojuholníka DEF. Pretože DF tvorí ťažnicu trojuholníka ABD, zo známeho vzorca pre veľkosť ťažnice dostaneme

$$2|DF|^2 = |DA|^2 + |DB|^2 - \frac{1}{2}|AB|^2 = \frac{41}{2}x^2,$$

takže strany trojuholníka DEF majú dĺžky $|DF| = \frac{1}{2}x\sqrt{41}$, $|DE| = 3x$ a $|EF| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}x$. Podľa Herónovho vzorca je obsah S takého trojuholníka rovný

$$S = \frac{x^2}{4}\sqrt{\left(3 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{41}}{2}\right)\left(3 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{41}}{2}\right)\left(3 + \tfrac{\sqrt{41}}{2} - \tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{\sqrt{41}}{2} + \tfrac{1}{2} - 3\right)} = \\ = \frac{x^2}{16}\sqrt{\left(7 + \sqrt{41}\right)\left(7 - \sqrt{41}\right)\left(5 + \sqrt{41}\right)\left(\sqrt{41} - 5\right)} = \frac{x^2\sqrt{2}}{2},$$

a tak má jeho výška v z vrcholu D veľkosť $v = \dfrac{2S}{|EF|} = 2x\sqrt{2}$. Objem V ihlana $ABCD$ je preto rovný

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}|AC| \cdot |BC| \cdot v = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,x^3 = \frac{2\sqrt{2}}{81}\,a^3.$$

Záver: Objem uvažovaného ihlana je $\dfrac{2\sqrt{2}}{81}\,a^3$.

Poznámka.

Zo štvorca možno popísaným spôsobom štvorsten $ABCD$ požadovaných vlastností vytvoriť vtedy, keď je súčet dvoch z troch predpokladaných stenových uhlov pri vrchole D väčší ako uhol tretí. Pretože ich súčet je $90°$, stačí overiť, že každý z týchto troch uhlov je menší ako $45°$. Nerovnosť $|\sphericalangle CDB| < 45°$ je zrejmá, zostávajúce dve nerovnosti sú dôsledkom výpočtov, podľa ktorých $\cos|\sphericalangle ADB| = \frac{9}{\sqrt{130}} > \frac{\sqrt{2}}{2}$ a $\operatorname{tg}|\sphericalangle CDA| = \operatorname{tg}(2|\sphericalangle C_1DE_1|) = \frac{3}{4} < 1$.

A – III – 6

Rovnosť $1\,000a + 100b + 10c + d + 1 = (10a + c + 1)(10b + d + 1)$ možno upraviť na tvar

$$100a(9 - b) + 10a(9 - d) + 10b(9 - c) + c(9 - d) = 0.$$

Pritom každý zo štyroch sčítancov na ľavej strane je nezáporné celé číslo. Preto bude táto rovnosť splnená práve vtedy, keď bude každý z nich rovný nule. Pretože je $a > 0$, musí byť $b = d = 9$ a následne i $c = 9$. V tom prípade rovnici vyhovuje ľubovoľná číslica a, $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Riešením úlohy sú teda práve všetky nasledujúce štvormiestne čísla: 1 999, 2 999, 3 999, 4 999, 5 999, 6 999, 7 999, 8 999 a 9 999.

Prípravné sústredenia pred MMO

Pred medzinárodnou matematickou olympiádou (MMO) sa každoročne koná jedno výberové a jedno prípravné sústredenie pre najlepších riešiteľov tretieho kola kategórie A. Po prvom z nich SK MO vyberie 6 najlepších študentov do reprezentačného družstva Slovenska a určí dvoch náhradníkov. Druhé sústredenie je zamerané na prípravu šesťčlenného reprezentačného družstva.

Na výberovom sústredení pred MMO sa zúčastnilo 10 súťažiacich, najúspešnejších riešiteľov tretieho kola MO kategórie A. Sústredenie sa konalo v dňoch 26.4.–30.4.2000 v Bratislave. Každý deň študenti riešili sériu troch úloh pri rovnakých podmienkach ako na MMO. V poobedňajších hodinách sa konal spoločný rozbor úloh s lektorom. Na konci sústredenia sa získané body za jednotlivé dni sčítali a s prihliadnutím na výsledky tretieho kola MO a iné výsledky (predchádzajúca účasť na MMO, výsledky korešpondenčného seminára SK MO) bolo vybrané šesťčlenné družstvo, ktoré sa zúčastní MMO.

Výsledky sústredenia:

1.	*Vladimír Zajac*	81	6.	*Peter Májek*	55
2.	*Balázs Keszegh*	73	7.	*Peter Pravda*	47
3.	*Katarína Quittnerová*	69	8.	*Tomáš Kulich*	44
4.	*Miroslava Sotáková*	63	9.	*Marian Ertl*	40
5.	*Tomáš Jurík*	59	10.	*Josef Ševčík*	28

Úlohy zadávali lektori z Bratislavy:

Ján Bábeľa, Martin Hriňák a Ján Špakula, MFF UK, úlohy 1 – 6,
Juraj Földes, MFF UK, úlohy 7 – 10,
Mgr. Richard Kollár, MFF UK, úlohy 11 – 14,
Eugen Kováč, MFF UK, úlohy 15 – 18.

Pre vybrané družstvo sa organizovalo ešte jedno prípravné sústredenie v dňoch 18.–23.6.2000 v zariadení IUVENTY na Zochovej chate. Tohtoročné prípravé sústredenie prebehlo bez väčších problémov. Toto sústredenie bolo zamerané viac na vedomostnú prípravu študentov a jeho obsahom boli prednášky na vybrané témy. Lektormi boli:

Eugen Kováč, MFF UK Bratislava (Teória čísel),
Ján Špakula, MFF UK Bratislava (Kombinatorika)
Ján Bábeľa, MFF UK Bratislava (Nerovnosti)
Mgr. Richard Kollár MFF UK Bratislava (Analýza)
Mgr. Vojtech Bálint, MFF UK Bratislava (Geometria),
Juraj Földes, MFF UK Bratislava (Geometria)

Zadania súťažných úloh výberového sústredenia pred MMO

1. Nech a, b, c sú tri prirodzené čísla s vlastnosťami: a^3 je deliteľné b, b^3 je deliteľné c a c^3 je deliteľné a. Ukážte, že $(a+b+c)^{13}$ je deliteľné abc.

2. Dokážte, že existuje mnohočlen $p(x)$ s celočíselnými koeficientmi taký, že pre každé $x \in \langle \frac{1}{10}, \frac{9}{10} \rangle$ platí

$$\left| p(x) - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{1000}.$$

3. Nech $ABCDEF$ je konvexný šesťuholník taký, že $|AB| = |BC|$, $|CD| = |DE|$, $|EF| = |FA|$. Dokážte, že (predĺžené) výšky trojuholníkov BCD, DEF, FAB z vrcholov po rade C, E, A sa pretínajú v jednom bode.

4. Majme dané postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$, pre ktoré platia nasledujúce vzťahy:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + b_n, & b_{n+1} &= b_n + c_n, \\ c_{n+1} &= c_n + d_n, & d_{n+1} &= d_n + a_n. \end{aligned}$$

Dokážte, že ak existujú $k \geqq 1$, $m \geqq 1$ také, že platí

$$\begin{aligned} a_{k+m} &= a_m, & b_{k+m} &= b_m, \\ c_{k+m} &= c_m, & d_{k+m} &= d_m, \end{aligned}$$

potom $a_2 = b_2 = c_2 = d_2 = 0$.

5. Nech P, Q, R sú po rade stredy kružnicových oblúkov BC, CA, AB kružnice opísanej danému trojuholníku ABC. K, L, M nech ďalej označujú po rade stredy jeho strán BC, CA, AB a I stred kružnice tomuto trojuholníku vpísanej. Dokážte, že platí

$$|AI| \cdot |BI| \cdot |CI| = 8 \cdot |KP| \cdot |LQ| \cdot |MR|.$$

6. Pre n prirodzené riešte v obore reálnych čísel rovnicu

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - x_{n+1} = \sqrt{x_1 + x_2 + \ldots + x_n - x_{n+1}} - \frac{n+1}{4}.$$

7. Je daných n reálnych čísel

$$1 \geqq x_1 \geqq x_2 \geqq \ldots x_n > 0$$

a reálne číslo $a \in \langle 0, 1 \rangle$. Dokážte nerovnosť

$$(1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^a \leqq 1 + x_1^a + \frac{1}{2}(2x_2)^a + \frac{1}{3}(3x_3)^a + \ldots \frac{1}{n}(nx_n)^a.$$

8. Nech $ABCD$ je štvoruholník vpísaný do kružnice so stredom O. Nech P je priesečník uhlopriečok AC a BD. Stredy opísaných kružníc trojuholníkom ABP, BCP, CDP a DAP sú poporadí O_1, O_2, O_3 a O_4. Dokážte, že priamky OP, O_1O_3 a O_2O_4 sa pretínajú v jednom bode.

9. Majme číslo

$$N = 0\,2\,5\,8\,6\,5\,4\,1\,3\,9\,8\,9\,7\,3\,2\,.$$

Keď sa pozráme zľava, tak sa nám číslo N rozpadne na šesť rastúcich a klesajúcich reťazcov cifier

$$0258,\ 86541,\ 139,\ 99,\ 89,\ 9732\,.$$

Uvažujme len maximálne reťazce, t.j. reťazce idúce od jednej zmeny smeru (z rastúcej na klesajúcu alebo naopak) k druhej. Pripusťme, aby naše číslo začínalo 0, ale aby malo každé dve susedné cifry rôzne. Aký je priemerný počet maximálnych reťazcov v týchto n-ciferných číslach?

10. Je daných n celočíselných aritmetických postupností $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$. Dokážte, že ak každé dve postupnosti majú spoločný člen, tak potom majú všetky postupnosti spoločný člen. Dokážte, že ak môžu mať postupnosti reálne hodnoty, tak tvrdenie nemusí platiť.

11. Vrcholy A, B, C ostrouhlého trojuholníka ABC ležia po rade na stranách B_1C_1, C_1A_1 s A_1B_1 trojuholníka $A_1B_1C_1$ tak, že platí $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle A_1B_1C_1|$, $|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle B_1C_1A_1|$ a $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle C_1A_1B_1|$. Dokážte, že ortocentrá (priesečníky výšok) trojuholníkov ABC a $A_1B_1C_1$ sú rovnako vzdialené od stredu kružnice opísanej trojuholníku ABC.

12. V pravouhlom súradnicovom systéme je každému mrežovému bodu (bod s celočíslelnými súradnicami) priradené reálne číslo tak, že žiadnym dvom mrežovým bodom nie je priradené to isté číslo. Nech A je ľubovoľná neprázdna konečná množina mrežových bodov v tomto systéme, ktorá je stredovo symetrická vzhľadom na počiatok O súradnicového systému, $O \notin A$. Dokážte, ze potom existuje mrežový bod X roviny taký, že ak A_X je obraz množiny X v posunutí o vektor $\overrightarrow{OX}$, tak aspoň polovica čísel priradených bodom možiny A_X je väčšia ako číslo priradené bodu X.

13. Označme $d(n)$ počet kladných celočíselných deliteľov prirodzeného čísla n. Nájdite všetky prirodzené čísla, pre ktoré platí $n = (d(n))^2$.

14. Všetky tri vrcholy trojuholníka majú obe súradnice celočíselné, dĺžka jednej zo strán je $\sqrt{n}$, kde n nie je deliteľné žiadnou druhou mocninou prvočísla. Dokážte, že pomer polomeru vpísanej a opísanej kružnice tomuto trojuholníku je iracionálne číslo.

15. Nájdite všetky funkcie $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ také, že pre všetky celé čísla x, y platí

$$h(x+y) + h(xy) = h(x)h(y) + 1.$$

16. Karty očíslované číslami $1, 2, \ldots, 32$ sú náhodne zoradené vedľa seba. V jednom ťahu môžeme vybrať nejaký blok po sebe idúcich kariet, ktorých čísla sú zoradené vzostupne alebo zostupne, a položiť ho v opačnom poradí. Napríklad ...11 $\underline{4\ 5\ 10}$ 26 8 ... môže byť zmenené na ...11 $\underline{10\ 5\ 4}$ 26 8 ... Dokážte, že po najviac 58 ťahoch môžeme zoradiť karty tak, že ich čísla budú zoradené vzostupne alebo zostupne.

17. Nech $ABCD$ je tetivový štvoruholník, k je kladné reálne číslo. Nech E a F sú body postupne na stranách AB a CD také, že $|AE|:|EB| = |CF|:|FD| = k$. Nech P je taký bod na úsečke EF taký, že $|PE|:|PF| = |AB|:|CD|$. Dokážte, že pomer obsahov trojuholníkov APD a BPC nezávisí od čísla k.

18. Nájdite všetky dvojice (a, b) reálnych čísel také, že pre každé prirodzené číslo platí $a\lfloor bn\rfloor = b\lfloor an\rfloor$. (Pripomeňme, že $\lfloor x\rfloor$ znamená najväčšie celé číslo, ktoré je menšie alebo rovné x.)

6. česko-slovenské stretnutie

Modra – Piesok, 7.–10. júna 2000

V dňoch 7.–10.6.1999 sa v príjemnom prostredí zariadenia Iuventy pri Zochovej chate uskutočnil už šiesty ročník matematickej súťaže medzi olympionikmi Českej a Slovenskej republiky. Túto súťaž usporadúvajú striedavo obidve zúčastnené krajiny; prvý ročník sa konal v Jevíčku, druhý v Žiline, tretí v Bílovci, štvrtý na Zochovej chate a piaty opäť v Bílovci. Český tím doprevádzali tento rok *RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.* a *Mgr. Pavel Calábek*. Vedúcimi Slovenského tímu boli *Eugen Kováč* a *Juraj Földes*.

Táto súťaž je spolu s výberovým a prípravným sústredením súčasťou dlhodobej prípravy na medzinárodnú matematickú olympiádu (MMO). Na rozdiel od spomínaných sústredení si tu môžu študenti precvičiť svoje schopnosti vo veľmi podobných podmienkach, ako ich čakajú na MMO. Na riešenie úloh majú štyri a pol hodiny, čo je o pol hodiny viac ako vo všetkých kolách našej MO. Aj tematické zameranie a náročnosť úloh je oveľa bližšia MMO ako napríklad celoštátnemu kolu. Okrem týchto dôležitých faktov, je toto stretnutie aj stretnutím v pravom slova zmysle. Súťažiaci z dvoch historicky spätých krajín sa majú možnosť spoznať a naviazať priateľstvá, ktoré výrazne pomáhajú aklimatizácii v cudzom a ďalekom prostredí MMO. Toto stretnutie zároveň prispieva k uchovávaniu tradície spoločnej československej olympiády a spolu so spoločnou tvorbou úloh je prejavom, ktorým najvyššie orgány MO v oboch republikách dávajú najavo svoj záujem o vzájomnú spoluprácu. Výsledky súťaže sú uvedené v tabuľke.

Por.	Meno	Ročník, Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$
1.	Vladimír Zajac	4 G Gröss., Bratislava	7	7	2	7	7	7	37
2.	Miroslava Sotáková	4 G Poštová, Košice	7	7	1	6	7	2	30
3.	Tomáš Jurík	4 G Poštová, Košice	7	2	2	6	7	1	25
4.	Katarína Quittnerová	2 G Bilíkova, Bratislava	7	1	0	7	4	1	20
5.	Jan Kynčl	3 G Jilemnice	7	0	3	7	1	1	19
6.	Peter Májek	4 G J. Hronca, Bratislava	7	1	0	7	1	1	17
7.	Jaroslav Hájek	2 G M.K. Bílovec	7	1	1	4	1	2	16
8.	Jozef Křišťan	3 G Plzeň	6	0	4	1	2	1	14
9.	Jan Herman	3 G Kpt. Jaroše, Brno	7	0	0	6	0	0	13
10.	Tomáš Kulich	3 G Prievidza	7	0	0	0	1	0	8
11.–12.	Rudolf Stolař	3 G Kpt. Jaroše, Brno	2	0	0	0	0	0	2
11.–12.	Ondřej Suchý	3 G Plzeň	0	0	0	2	0	0	2

Tento ročník bol pre slovenské družstvo asi najúspešnejší, keď okrem výborného výsledku družstva potešil individuálne najmä *Vladimír Zajac*.

Po neúspechoch v posledných dvoch rokoch sa nášmu družstvu podarilo zvíťaziť v tradičnom volejbalovom stretnutí v pomere setov 3 : 0.

Zadania úloh 6. česko-slovenského stretnutia

Úloha 1.
Dokážte, že ak kladné reálne čísla a, b, c spĺňajú nerovnosť

$$5abc > a^3 + b^3 + c^3,$$

potom existuje trojuholník s dĺžkami strán a, b, c.

(Bielorusko, MO 98/99)

Úloha 2.
Daný je trojuholník ABC a jemu vpísaná kružnica k. Kružnice k_a, k_b, k_c pretínajú ortogonálne kružnicu k a úsečky BC, CA, AB sú (v tomto poradí) ich tetivami. Kružnice k_a, k_b sa druhýkrát pretínajú v bode C', kružnice k_c, k_a v bode B' a kružnice k_b, k_c v bode A'. Dokážte, že polomer kružnice opísanej trojuholníku $A'B'C'$ je polovicou polomeru kružnice k.
Poznámka. Hovoríme, že dve kružnice sa pretínajú *ortogonálne*, ak ich dotyčnice v každom spoločnom bode sú navzájom kolmé.

(jury MMO 99)

Úloha 3.
Nech n je prirodzené číslo. Dokážte, že n je mocninou 2 práve vtedy, keď existuje celé číslo m také, že $2^n - 1$ je deliteľom $m^2 + 9$.

(jury MMO 98)

Úloha 4.
Nech $P(x)$ je polynóm s celočíselnými koeficientami. Dokážte, že potom polynóm

$$Q(x) = P(x^4)P(x^3)P(x^2)P(x) + 1$$

nemá celočíselný koreň.

(E. Kováč)

Úloha 5.
Nech $ABCD$ je rovnoramenný lichobežník so základňami AB a CD. Kružnica vpísaná trojuholníku BCD sa dotýka strany CD v bode E. Nech F je taký bod na osi uhla DAC, že priamky EF a CD sú navzájom kolmé. Kružnica opísaná trojuholníku ACF pretína priamku CD v bodoch C a G. Dokážte, že trojuholník AFG je rovnoramenný.

(USA, MO 98/99)

Úloha 6.
Každé celé číslo je ofarbené jednou z farieb červená, modrá, zelená a biela. Nech x a y sú nepárne celé čísla také, že $|x| \neq |y|$. Dokážte, že existujú nejaké dve prirodzené čísla rovnakej farby, ktorých rozdiel nadobúda jednu z hodnôt x, y, $x + y$ alebo $x - y$.

(jury MMO 99)

Riešenia úloh 6. československého stretnutia

Úloha 1.
Tvrdenie dokážeme sporom. Nech pre nejaké kladné reálne čísla a, b, c platí nerovnosť zo zadania, a nech neexistuje trojuholník s dĺžkami strán a, b, c. To znamená, že pre ne neplatí aspoň jedna z trojuholníkových nerovností. Bez ujmy na všeobecnosti nech $c \geqq a+b$, čiže $c = a+b+x$, kde $x \geqq 0$. Po dosadení dostávame

$$5ab(a+b+x) > a^3 + b^3 + (a+b)^3 + 3(a+b)^2x + 3(a+b)x^2 + x^3,$$

alebo

$$2a^2b + 2ab^2 > 2a^3 + 2b^3 + abx + 2(a^2+b^2)x + 3(a+b)x^2 + x^3.$$

Vzhľadom na to, že posledné štyri členy na pravej strane sú nezáporné, dostávame $2a^2b + 2ab^2 > 2a^3 + 2b^3$, čo možno upraviť na ekvivalentnú nerovnosť $(a+b)\,(a-b)^2 < 0$, ktorá zrejme neplatí. Tým sme dostali spor.

Úloha 2.
Nech kružnica k má stred I a polomer r. Ďalej nech D, E, F sú postupne jej dotykové body so stranami BC, CA, AB a P, Q, R sú postupne stredy úsečiek EF, FD, DE. Ďalej sformulujeme a dokážeme lemu.

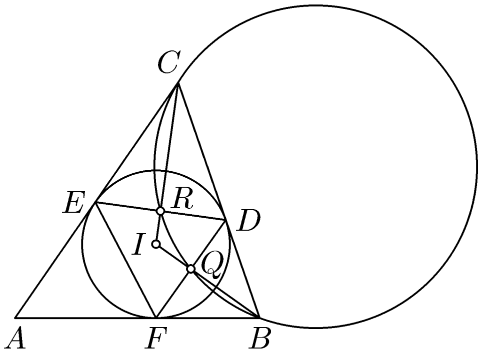
Lema. Kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ sa pretínajú ortogonálne práve vtedy, keď $r_1^2 + r_2^2 = |S_1S_2|^2$.

Dôkaz. Nech sa kružnice k_1 a k_2 pretínajú ortogonálne, pričom X, Y sú ich spoločné body. Potom dotyčnica ku k_2 v bode X je priamka, ktorá je kolmá na S_2X. Potom z ortogonality vyplýva, že priamka S_2X je dotyčnicou ku kružnici k_1, takže mocnosť bodu S_2 ku kružnici k_1 je $|S_2S_1|^2 - r_1^2 = |S_2X|^2 = r_2^2$.

Obrátene, nech platí rovnosť $|S_2S_1|^2 = r_1^2 + r_2^2$. Potom zrejme $|S_1S_2| < r_1 + r_2$, takže kružnice k_1, k_2 sa pretínajú v dvoch bodoch. Označme ich X, Y. Potom trojuholník S_1S_2X je pravouhlý, čiže $S_1X \perp S_2X$. To ale znamená, že priamky S_1X, S_2X sú postupne dotyčnicami ku kružniciam k_2, k_1. Tieto priamky sú navzájom kolmé (analogicky to platí v bode Y), takže kružnice k_1, k_2 sa pretínajú ortogonálne. Tým je dôkaz lemy ukončený.

Ďalej dokážeme, že body Q a R ležia na kružnici k_a. Označme O_a jej stred a r_a jej polomer. Zrejme $BDIF$ je deltoid, takže Q je päta kolmice z bodu D na BI. Potom z *Euklidovej vety o odvesne* pre trojuholník IBD dostávame $|IQ| \cdot |IB| = |ID|^2 = r^2$. Podobne aj $|IR| \cdot |IC| = r^2$. To znamená, že body B, C, R, Q ležia na nejakej kružnici, ktorú označíme l. Pritom body Q a R ležia na úsečkách IB a IC, takže bod I leží zvonku kružnice l. Využitím vyššie uvedených rovností dostávame, že mocnosť bodu I ku kružnici l je r^2, čo podľa lemy znamená, že kružnice k a l sa pretínajú ortogonálne.

Avšak, ako si ľahko uvedomíme, bodmi B a C môže prechádzať najviac jedna kružnica, ktorá pretína ortogonálne kružnicu k. Takže kružnice k_a a l splynú, a body Q a R ležia na kružnici k_a.



Obr. 58

Analogicky sa dokáže, že body R, P ležia na kružnici k_b a body P, Q na kružnici k_c. Takže $A' \equiv P$, $B' \equiv Q$ a $C' \equiv R$. To znamená, že polomer kružnice opísanej trojuholníku $A'B'C'$ je rovný polovici polomeru kružnice k (pretože k je kružnica opísaná trojuholníku DEF). Tým sme dokázali, čo bolo treba.

Úloha 3.
Najprv ukážeme, že ak $2^n - 1$ delí $m^2 + 9$ pre nejaké celé číslo m, tak n je mocninou čísla 2. V opačnom prípade má n nejakého nepárneho deliteľa $l \geqq 3$, a pretože $2^l - 1$ delí $2^n - 1$, tak delí aj $m^2 + 9$. Ale pre $l \geqq 3$ máme $2^l - 1 \equiv -1 \pmod 4$, a teda $2^l - 1$ má prvočíselného deliteľa p takého, že $p \equiv -1 \pmod 4$. Najprv sa zaoberajme prípadom, keď $p \neq 3$. Pretože $p \mid m^2 + 3^2$, tak z *Malej Fermatovej vety* vyplýva

$$1 \equiv m^{p-1} \equiv \left(m^2\right)^{(p-1)/2} \equiv (-9)^{(p-1)/2} \equiv (-1)^{(p-1)/2} \cdot 3^{p-1} \equiv -1 \pmod p.$$

To ale nie je možné, takže $p = 3$. Potom ale pre nepárne l platí $2^l \equiv -1 \not\equiv 1 \pmod 3$, čo je spor.

Nech teraz $n = 2^k$. Pre $n = 1$ tvrdenie zrejme platí. Ďalej nech $k \geqq 1$. Potom

$$2^n - 1 = 3\left(2^2 + 1\right)\left(2^{2^2} + 1\right) \dots \left(2^{2^{k-1}} + 1\right).$$

Takže ak $2^n - 1$ delí $m^2 + 9$, tak ho delia aj čísla tvaru $2^{2^l} + 1$ pre každé $l = 1, 2, \dots, k - 1$. Ďalej platí, že pre $\alpha \neq \beta$ sú čísla $2^{2^\alpha} + 1$ a $2^{2^\beta} + 1$ nesúdeliteľné. To preto, že ak $d > 2$ by bol ich najväčší spoločný deliteľ a $\alpha > \beta$, potom $-1 \equiv 2^{2^\alpha} \equiv \left(2^{2^\beta}\right)^{2^{\alpha-\beta}} \equiv 1 \pmod d$, čo je spor. Takže nutne $d = 1$ (zrejme $d \neq 2$, lebo sú obe nepárne). Potom podľa *Čínskej zvyškovej vety* (pretože čísla $2^{2^l} + 1$ sú po dvoch nesúdeliteľné) existuje prirodzené číslo $c$také, že

$$c \equiv 2^{2^l} \pmod{2^{2^{l+1}}} \qquad \text{pre každé } l = 0, 1, \dots, k-2$$

Potom $c^2+1\equiv 0 \pmod{2^{2^{l+1}}}$ pre $l=0,1,\dots,k-2$, a teda 2^n-1 delí $(3c)^2+9$.

Úloha 4.

Všimnime si, že pre celé číslo n platí $n^3\equiv n \pmod 3$. Jednoducho to môžeme nahliadnuť overením všetkých zvyškových tried modulo 3, alebo priamo z *Malej Fermatovej vety*. Potom tiež $n^4\equiv n^2 \pmod 3$. Avšak, ak $P(x)$ je polynóm s celočíselnými koeficientami, tak aj $P(n^3)\equiv P(n) \pmod 3$ a $P(n^4)\equiv P(n^2) \pmod 3$. Polynóm $Q(x)$ má zrejme celočíselné koeficienty. Z posledných dvoch kongruencií dostávame

$$Q(n)\equiv \big(P(n)P(n^2)\big)^2+1 \pmod 3.$$

Ale ľahko sa overí, že pre každé celé číslo m platí $m^2+1\not\equiv 0 \pmod 3$. Takže pre každé celé číslo n platí $Q(n)\not\equiv 0 \pmod 3$, z čoho vyplýva, že polynóm $Q(x)$ nemôže mať celočíselný koreň. Tým sme dokázali, čo bolo treba.

Úloha 5.

Ukážeme, že $|FA|=|FG|$. Budeme postupovať odzadu. Na polpriamke opačnej k DC vezmime bod P taký, že $|DP|=|DA|$ a podobne na polpriamke opačnej k CD vezmime bod Q taký, že $|CQ|=|CA|$. Potom využitím známych faktov o úsekoch na stranách pri vpísanej kružnici dostávame

$$|PE|=|PD|+|DE|=|DA|+\frac{|BD|+|CD|-|BC|}{2}=\frac{|BD|+|CD|+|BC|}{2},$$
$$|QE|=|QC|+|CE|=|AC|+\frac{|BD|+|CD|-|BC|}{2}=\frac{|BD|+|CD|+|BC|}{2}.$$

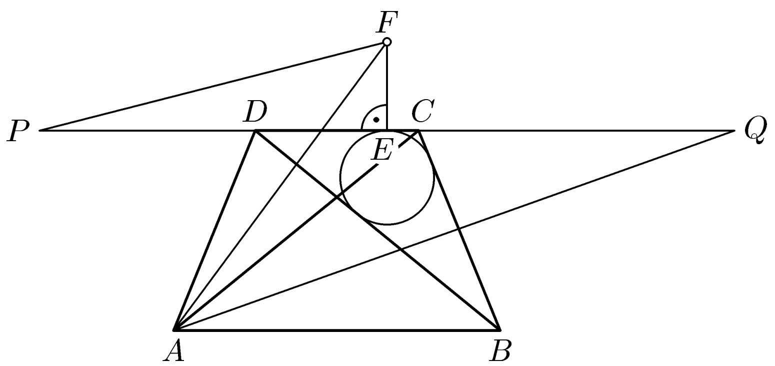
To znamená, že priamka EF je osou úsečky PQ. Špeciálne to znamená, že stred O kružnice opísanej trojuholníku APQ leží na priamke EF, a teda priamky DO, CO sú postupne osami úsečiek AP, AQ. To znamená, že

$$|\sphericalangle DAO|=|\sphericalangle OPD|=|\sphericalangle CQO|=|\sphericalangle OAC|,$$

takže body O a F splývajú. Naviac

$$|\sphericalangle AOP|=2|\sphericalangle AQP|=|\sphericalangle AQC|+|\sphericalangle CAQ|=\pi-|\sphericalangle QCA|=|\sphericalangle ACP|.$$

Odtiaľ vyplýva, že body A, C, F, P ležia na kružnici. Takže nutne $P\equiv G$, a teda $|FP|=$ $=|FG|=|FA|$. Tým sme dokázali, čo bolo treba.



Obr. 59

Úloha 6.
Tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladajme, že existuje ofarbenie, t.j. funkcia $f : \mathbb{Z} \to$ $\to \{C, Z, M, B\}$ taká, že pre každé celé číslo a platí

$$f(\{a, a+x, a+y, a+x+y\}) = \{C, M, Z, B\}.$$

Vezmime teraz množinu $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ (možno ju reprezentovať ako množinu všetkých mrežových bodov v rovine) a jej ofarbenie $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \{C, M, Z, B\}$ také, že

$$g(i, j) = f(ix + jy)$$

pre všetky $i, j \in \mathbb{Z}$. Podľa vyššie uvedeného predpokladu dostávame, že v ofarbení g majú vrcholy každého jednotkového štvorca navzájom rôzne farby. Ďalej sformulujeme a dokážeme dve lemy.

Lema 1. Ak existuje stĺpec $\{i\} \times \mathbb{Z}$, ktorý nie je periodický s periódou 2 (t.j. jeho ofarbenie nie je periodické s periódou 2), potom existuje riadok $\mathbb{Z} \times \{j\}$, ktorý je periodický s periódou 2.

Dôkaz. Predpokladajme, že stĺpec $\{i\} \times \mathbb{Z}$ nie je periodický s periódou 2. Potom v ňom môžeme nájsť tri po sebe idúce vrcholy s navzájom rôznymi farbami. Bez ujmy na všeobecnosti nech sú to $\begin{matrix} B \\ M \\ C \end{matrix}$. Ak uvážime susedné jednotkové štvorce, dostaneme situáciu

$$\begin{matrix} C\,B\,C \\ Z\,M\,Z, \\ B\,C\,B \end{matrix} \qquad \text{a ďalej} \qquad \begin{matrix} B\,C\,B\,C\,B \\ M\,Z\,M\,Z\,M. \\ C\,B\,C\,B\,C \end{matrix}$$

Je zrejmé, že riadky budú periodické s periódou 2.

Lema 2. Ak pre nejaké celé číslo k je riadok $\mathbb{Z} \times \{k\}$ periodický s periódou 2, potom pre každé $j \in \mathbb{Z}$ je riadok $\mathbb{Z} \times \{j\}$ periodický s periódou 2. Naviac pre $l \equiv j \pmod 2$ sú riadky $\mathbb{Z} \times \{k\}$ a $\mathbb{Z} \times \{j\}$ ofarbené rovnakými farbami a pre $l \not\equiv j \pmod 2$ rôznymi farbami.

Dôkaz. Nech riadok $\mathbb{Z} \times \{l\}$ vyzerá (bez ujmy na všeobecnosti) takto: $\dots CMCMC \dots$, pričom nad niektorým C sa nachádza B. Využitím pravidla pre jednotkové štvorce dostávame

$$\begin{matrix} \dots B\,Z\,B\,Z\,B \dots \\ \dots CMCMC \dots \end{matrix}, \qquad \text{a ďalej} \qquad \begin{matrix} \dots CMCMC \dots \\ \dots B\,Z\,B\,Z\,B \dots \\ \dots CMCMC \dots \end{matrix} \qquad \text{alebo} \qquad \begin{matrix} \dots M\,C\,M\,C\,M \dots \\ \dots B\,Z\,B\,Z\,B \dots . \\ \dots C\,M\,C\,M\,C \dots \end{matrix}$$

Analogicky to platí pre riadok pod $\mathbb{Z} \times \{l\}$.

Tieto lemy zrejme zostávajú v platnosti, ak zameníme riadky za stĺpce a naopak. Takže môžeme predpokladať, že napr. riadky sú periodické s periódou 2. Ďalej nech $g(0, 0) = C$, $g(1, 0) = M$. Potom $g(y, 0) = M$ (pretože y je nepárne). Pretože x je nepárne, tak dostávame $g(\mathbb{Z} \times \{x\}) = \{B, Z\}$. Ale z rovnosti $g(y, 0) = f(xy) = g(0, x)$ dostávame spor.

41. Medzinárodná matematická olympiáda

41. ročník Medzinárodnej matematickej olympiády (MMO) sa uskutočnil v dňoch 16. až 25. júla 2000 v meste Taejon v Južnej Kórei.

Medzinárodná matematická olympiáda je súťažou jednotlivcov. Každá zúčastnená krajina na ňu vysiela reprezentačné družstvo zložené najviac zo šiestich súťažiacich, sprevádzané dvoma vedúcimi. Slovenské družstvo tvorili *Vladimír Zajac* zo 4. ročníka Gymnázia Grösslingová v Bratislave, *Balázs Keszegh* zo 4. ročníka Maďarského gymnázia v Komárne, *Katarína Quittnerová* z 2. ročníka Gymnázia Bilíkova v Bratislave, *Miroslava Sotáková* zo 4. ročníka Gymnázia Poštová v Košiciach, *Tomáš Jurík* zo 4. ročníka Gymnázia Poštová v Košiciach, a *Peter Májek* zo 4. ročníka Gymnázia Jura Hronca v Bratislave. Vedúcim delegácie a odborným vedúcim bol *doc. RNDr. Vladislav Rosa, CSc.* zo Slovenskej štátnej inšpekcie Bratislava, pedagogickým vedúcim bol *Juraj Földes* z MFF UK v Bratislave.

Pravidlá súťaže sú veľmi podobné pravidlám nášho celoštátneho kola. Súťaží sa dva dni, študenti dostanú každý deň 3 úlohy v ich rodnom jazyku, na vyriešenie ktorých majú 4,5 hodiny. Po skončení súťaže riešenia prezrú vedúci príslušnej krajiny a svoj návrh hodnotenia podľa vopred pripravených bodovacích schém obhajujú pred koordinátormi. Za správne vyriešenú úlohu môže súťažiaci získať maximálne 7 bodov. Výsledky slovenského družstva uvádza nasledujúca tabuľka:

Meno	1	2	3	4	5	6	súčet	cena
Tomáš Jurík	7	7	0	0	3	2	19	3.
Balázs Keszegh	7	6	1	4	0	7	25	2.
Peter Májek	0	2	0	4	0	2	8	–
Katarína Quittnerová	7	7	0	6	0	0	20	3.
Miroslava Sotáková	7	1	1	5	0	7	21	2.
Vladimír Zajac	7	1	0	6	0	4	18	3.

Na 41. ročníku MMO sa zúčastnilo 82 štátov celého sveta. Aj keď je MMO oficiálne individuálnou súťažou najlepších matematických talentov z celého sveta, s obrovským záujmom sa sleduje aj umiestnenie jednotlivých krajín. Družstvo Slovenska skončilo v neoficiálnom poradí krajín na veľmi dobrom 18.–19. mieste. Slovenskému družstvu sa podarilo zlepšiť dobrý výkon z minulého roka a posunúť sa o tri priečky vyššie. Stalo sa už takmer tradíciou, že piati zo súťažiacich sa vracajú z MMO s medailou. Oproti minulému roku sa medailová bilancia nezmenila, ale súťažiaci získali o 23 bodov viac, čo je určite úspechom. Po štyroch rokoch sa konečne podarilo znovu pokoriť 100 bodovú hranicu. Tím Českej republiky neobstál v tohtoročnej MMO najlepšie, ako ukazuje tabuľka výsledkov českého družstva:

Meno	1	2	3	4	5	6	súčet	cena
Jaroslav Hájek	0	0	0	2	0	0	2	–
Jan Herman	7	2	0	2	0	0	11	3.
Jan Houštek	7	2	1	7	4	0	21	2.
Jan Kynčl	7	1	4	2	0	2	16	3.
Rudolf Stolař	0	1	0	3	0	0	4	–
Ondřej Suchý	7	0	0	2	0	2	11	3.

Ako vidno z tabuľky výsledkov slovenského družstva, najlepšie sme si poradili s 1. a 4. úlohou. Prvá z nich bola ľahká geometria a druhá ľahká kombinatorika. Vynikajúco sme vyriešili šiestu úlohou, ťažká geometria, ako šiesta najúspešnejšia krajina. Tým sme potvrdili svoje dobré výsledky v geometrikých úlohách. Najhoršie sme dopadli na netradičnej tretej úlohe a piatej úlohe — ťažkej teórii čísel. Treba poznamenať, že tieto úlohy patrili medzi najťažšie na tohtoročnej olympiáde.

Prekvapujúco nízka bola hranica 11 bodov na zisk bronzovej medaily. Na striebornú medailu bolo treba získať 21 a na zlatú 30 bodov. Škoda jediného bodu, ktorý chýbal *Kataríne Quittnerovej* na zisk striebornej medaily.

Najúspešnejšie krajiny boli opäť „tradičné“, poradie prvej desiatky je uvedené v tabuľke.

1.	Čína	7.	Bielorusko
2.	Rusko	8.	Taiwan
3.	USA	9.	Maďarsko
4.	Južná Kórea	10.	Irán
5.–6.	Bulharsko	18.–19.	Slovensko
5.–6.	Vietnam		

Plný počet bodov (42) získali (na rozdiel od predchádzajúceho roka) štyria súťažiaci — dvaja z Ruska, po jednom z Bieloruska a Číny.

Medzinárodná matematická olympiáda plní okrem súťažnej aj nemenej dôležitú spoločenskú úlohu. Majú sa tu možnosť stretnúť a zoznámiť matematické talenty z celého sveta. Tohtoročná súťaž prebehla bez väčších problémov. Okrem drobných prestojov a zdržaní, ktoré sú pri organizácii takejto akcie pochopiteľné, sa usporiadateľom nedalo nič vytknúť.

Slovenské družstvo sa dostalo po náročnom 11 hodinovom lete z Franfurktu nad Mohanom do Soulu, kde už na každú výpravu čakali usporiadatelia. Nasledovala asi dvojhodinová cesta autobusom do miesta konania olympiády — mesta Taejon. Taejon je niekoľkomiliónové mesto v strednej časti Južnej Kórei. Asi jediné, čo neprialo tohtoročnej medzinárodnej olympiáde, bolo počasie. Klíma v Južnej Kórei je podobná našej, jediný rozdiel je vo vlhkosti. A práve v tomto čase bolo obdobie dažďov. Súťažiaci boli ubytovaní v priestoroch Taejonskej univerzity. Mali k dispozícii ihriská, telocvičňu a bazén. Organizátori sa postarali o hodnotný program, v ktorom nechýbalo predstavenie tradičnej kórejskej kultúry. Hneď prvý deň sme navštívili tradičnú kórejskú dedinu, ktorá je obdobou našich skanzenov. Asi najväčšej pozornosti našej výpravy sa tešil budhistický kláštor. Na druhý deň sa konalo slávnostné otvorenie spojené s ukážkou miestnych tancov. Vďaka našej sprievodkyni sme mali možnosť navštíviť Taejon a vidieť obyčajný život. Nasledujúce dni mali súťažiaci možnosť absolvovať niekoľko exkurzií, okrem iného do Kyunglu, ktoré je jedno z najstarších miest v Kórei. Za jeden z vrcholov možno považovať kórejskú kultúrnu noc a najmä bubnový koncert, pretože bubon je v Kórei jeden z najpopulárnejších hudobných nástrojov. Všade možno vidieť bubny najrozmanitejších veľkostí, dokonca hneď na letisku v Soule stojí jeden asi dvojmetrový kolos. Na záver pripravili usporiadatelia záverečný ceremoniál, na ktorom vyhlásili najúspešnejších riešiteľov a odovzdali medaily.

Pred úplným ukončením MMO pozvali zástupcovia Spojených štátov amerických všetky zúčastnené krajiny na nasledujúcu 42. MMO, ktorá sa bude konať v prvej polovici júla 2001 v meste Washington. Ďalšie ročníky MMO by mali usporiadať Veľká Británia, Japonsko a Irán.

Zadania úloh MMO

Úloha 1.
Dve kružnice Γ_1 a Γ_2 sa pretínajú vo dvoch bodoch M a N. Nech priamka AB je ich spoločnou dotyčnicou, pričom bod A leží na kružnici Γ_1, bod B na Γ_2 a naviac bod M je k priamke AB bližšie než bod N. Nech CD je priamka rovnobežná s AB a prechádzajúca bodom M, pričom bod C leží na kružnici Γ_1 a bod D na Γ_2. Priamky AC a BD sa pretínajú v bode E; priamky BN a CD sa pretínajú v bode Q. Dokážte, že $|EP| = |EQ|$. *(Rusko)*

Úloha 2.
Nech a, b, c sú kladné reálne čísla také, že $abc = 1$. Dokážte nerovnosť

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leqq 1.$$

(Bielorusko)

Úloha 3.
Nech $n \geqq 2$ je prirodzené číslo a λ je kladné reálne číslo. Na začiatku máme na vodorovnej priamke n bĺch, nie všetky v jednom bode. V jednom kroku si môžeme zvoliť dve blchy v nejakých bodoch A a B, pričom A je naľavo od B, a blchu z bodu A necháme skočiť do bodu C, ktorý je napravo od B a platí $|BC| : |AB| = \lambda$.

Určte všetky hodnoty λ také, že pre ľubovoľný bod M na danej priamke a ľubovoľnú začiatočnú pozíciu bĺch, existuje konečná postupnosť krokov, po ktorej budú všetky blchy napravo od bodu M. *(USA)*

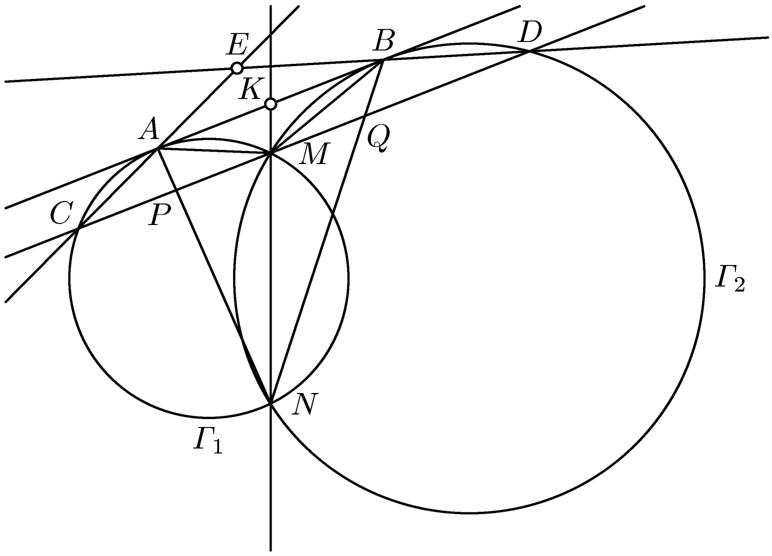
Úloha 4.
Kúzelník má sto kartičiek očíslovaných číslami $1, 2, \ldots, 100$. Rozdelí ich do troch krabíc (červenej, bielej a modrej) tak, že v každej krabici je aspoň jedna kartička. Divák z hľadiska vytiahne dve kartičky z dvoch rôznych krabíc a nahlas oznámi súčet čísel na týchto kartičkách. Na základe tejto informácie dokáže kúzelník určiť, z ktorej krabice nebola vytiahnutá žiadna kartička. Určte koľkými spôsobmi môže kúzelník rozdeliť kartičky do krabíc tak, aby tento trik fungoval. *(Maďarsko)*

Úloha 5.
Zistite, či existuje prirodzené číslo n také, že n má práve 2000 prvočíselných deliteľov a $2^n + 1$ je deliteľné n. *(Rusko)*

Úloha 6.
Nech AH_1, BH_2, CH_3 sú výšky v ostrouhlom trojuholníku ABC. Jemu vpísaná sa dotýka strán BC, CA, AB postupne v bodoch T_1, T_2, T_3. Uvažujme obrazy priamok H_1H_2, H_2H_3, H_3H_1 v osovej súmernosti postupne podľa priamok T_1T_2, T_2T_3, T_3T_1. Dokážte, že tieto obrazy vytvárajú trojuholník, ktorého vrcholy ležia na kružnici vpísanej trojuholníku ABC. *(Rusko)*

Riešenia úloh MMO

Úloha 1.
Nech K je priesečník priamok AB a MN. Využitím mocnosti bodu ku kružnici dostávame $|AK|^2 = |KN| \cdot |KM| = |BK|^2$, takže K je stred AB. Pretože $PQ \parallel AB$, tak M je stred PQ. Takže stačí dokázať, že $EM \perp PQ$.



Obr. 60

Pretože $CD \parallel AB$, tak body A a B sú postupne stredmi oblúkov CM a DM kružníc Γ_1 a Γ_2. To znamená, že trojuholníky ACM a BDM sú rovnoramenné. Potom z vlastností rovnobežiek vyplýva

$$|\sphericalangle BAM| = |\sphericalangle AMC| = |\sphericalangle ACM| = |\sphericalangle EAB|,$$
$$|\sphericalangle ABM| = |\sphericalangle BMD| = |\sphericalangle BDM| = |\sphericalangle EBA|.$$

Odtiaľ dostávame, že body E a M sú súmerne združené v osovej súmernosti podľa priamky AB, a teda $EM \perp AB$. A pretože $PQ \parallel AB$, tak $EM \perp PQ$, čo sme chceli dokázať.

Úloha 2.
Pretože platí $abc = 1$, môžeme túto nehomogénnu nerovnosť previesť na homogénnu vhodnou substitúciou premenných. Konkrétne môžeme a, b, c písať v tvare

$$a = \frac{x}{y}, \qquad b = \frac{y}{z}, \qquad c = \frac{z}{x}$$

pre nejaké kladné reálne čísla x, y, z (jedna z možností je napr. $x = 1$, $y = 1/a$, $z = 1/(ab)$). Prepísaním našej nerovností do nových premenných dostávame

$$(x - y + z)\,(y - z + x)\,(z - x + y) \leqq xyz.$$

Pritom najviac jedno z čísel $u = x - y + z$, $v = y - z + x$, $w = z - x + y$ je záporné, lebo súčet každých dvoch z nich je kladný. Ak je záporné práve jedno z nich, potom $uvw \leqq 0 < xyz$. Ak je niektoré z nich rovné 0, potom $uvw = 0 < xyz$. Ďalej predpokladajme, že $u > 0$, $v > 0$, $w > 0$. Použitím AG-nerovnosti dostávame

$$\sqrt{uv} = \sqrt{(x - y + z)\,(y - z + x)} \leqq \frac{(x - y + z) + (y - z + x)}{2} = x.$$

Analogicky platí $\sqrt{vw} \leqq y$, $\sqrt{wu} \leqq z$. Vynásobením posledných troch nerovností (na oboch stranách sú vždy kladné čísla) dostávame $uvw \leqq xyz$. Tým sme dokázali, čo bolo treba.

Poznámka. Z riešenia je zrejmé, že rovnosť nastáva práve vtedy, keď $a = b = c = 1$.

Úloha 3.
Rozumnou stratégiou na to, aby sme dostali blchy čo najviac vpravo je v každom kroku nechať blchu, ktorá je najviac vľavo, skočiť cez tú, ktorá je najviac vpravo. Touto stratégiou dostaneme po k krokoch konfiguráciu, v ktorej budú dôležité dva parametre: maximum vzdialeností medzi blchami (t.j. priemer množiny bĺch), ktorý označíme d_k a minimum vzdialeností medzi blchami, ktorú označíme δ_k. Zrejme $d_k \geqq (n-1)\delta_k$.

Po $(k+1)$-tom kroku sa nám objaví nová vzdialenosť medzi blchami, a to λd_k. Tá by mohla byť novým minimom, ak $\delta_{k+1} = \lambda d_k$; inak zrejme platí $\delta_{k+1} \geqq \delta_k$. V každom prípade však

$$\frac{\delta_{k+1}}{\delta_k} \geqq \min\left\{1, \frac{\lambda d_k}{\delta_k}\right\} \geqq \min\{1, (n-1)\lambda\}.$$

To znamená, že ak $\lambda \geqq 1/(n-1)$, tak $\delta_{k+1} \geqq \delta_k$ pre $k = 0, 1, 2, \dots$; teda minimum vzdialeností sa nezmenšuje. Takže poloha blchy najviac vľavo sa v každom kroku posunie doprava o viac než nejaká kladná konštanta. To znamená, že dokážeme blchy dostať tak ďaleko doprava ako len chceme.

Ďalej predpokladajme, že $\lambda < 1/(n-1)$. Ukážeme, že existuje začiatočná pozícia, z ktorej nedokážeme blchy dostať za nejaký bod M. Vlastne ukážeme, že to je vlastnosť všetkých začiatočných pozícií.

Pozície bĺch budeme označovať reálnymi číslami. Uvažujme ľubovoľnú konečnú postupnosť ťahov. Označme s_k súčet čísel reprezentujúcich pozície bĺch po k-tom kroku a w_k najväčšie z týchto čísel (t.j. pozíciu najpravejšej blchy). Uvedomme si, že $s_k \leqq nw_k$. Ukážeme, že postupnosť $w_0, w_1, w_2, \dots$ je ohraničená.

Nech v $(k+1)$-tom kroku skočí blcha z bodu A cez B a pristane v C. Nech tieto body sú postupne reprezentované číslami a, b, c. Potom $s_{k+1} = s_k + c - a$.

Podľa daného pravidla skákania platí $c - b = \lambda(b - a)$, čo je ekvivalentné s $\lambda(c - a) = (\lambda + 1)\,(c - b)$. Potom

$$s_{k+1} - s_k = c - a = \frac{1 + \lambda}{\lambda}(c - b).$$

Predpokladajme, že $c > w_k$; blcha, ktorá skočila skočila zaujala pozíciu najviac vpravo, t.j. $w_{k+1} = c$. Pretože b bola pozícia nejakej blchy po k-tom kroku, tak $b \leqq w_k$, a teda

$$s_{k+1} - s_k = \frac{1+\lambda}{\lambda}(c-b) \geqq \frac{1+\lambda}{\lambda}(w_{k+1} - w_k).$$

Táto nerovnosť zrejme platí aj keď $c \leqq w_k$; vtedy $w_{k+1} - w_k = 0$ a $s_{k+1} - s_k = c - a > 0$.

Uvažujme postupnosť čísel

$$z_k = \frac{1+\lambda}{\lambda}w_k - s_k, \qquad \text{pre } k = 0, 1, 2, \dots .$$

Z vyššie uvedenej nerovnosti vyplýva $z_{k+1} - z_k \leqq 0$, čiže postupnosť je nerastúca, a teda $z_k \leqq z_0$ pre $k = 0, 1, 2, \dots$.

Z predpokladu $\lambda < 1/(n-1)$ dostávame $1 + \lambda > n\lambda$, a môžeme písať

$$z_k = (n+\mu)w_k - s_k, \qquad \text{kde} \qquad \mu = \frac{1+\lambda}{\lambda} - n > 0.$$

Tak dostávame nerovnosť $z_k = \mu w_k + (nw_k - s_k) \geqq \mu w_k$. To znamená, že $w_k \leqq z_0/\mu$ pre každé $k = 0, 1, 2, \dots$. Takže pozícia blchy najviac vpravo nikdy nepresiahne nejakú konštantu (závislú na n, λ a začiatočnej konfigurácii, ale nie na postupnosti ťahov).

Celkove sú hľadanými hodnotami λ všetky reálne čísla z intervalu $\langle 1/(n-1), \infty)$.

Úloha 4.

Ukážeme, že hľadaný počet je 12. Každé číslo i ofarbime tou istou farbou ako je farba krabice, v ktorej sa nachádza kartička s číslom i. Všetky čísla, o ktorých budeme v riešení hovoriť budú prirodzené čísla nie väčšie než 100. Rozoberieme dva prípady.

Prípad 1. Ak existuje také i, že i, $i+1$, $i+2$ majú rôzne farby, povedzme **č**, **b**, **m**. Vzhľadom na to, že $i + (i+3) = (i+1) + (i+2)$, tak $i+3$ nemôže byť ani farby **b** (lebo tú farbu má $i+1$) ani farby **m** (lebo ju má $i+2$). To znamená, že $i+3$ je farby **č**. Vidíme, že tri susedné čísla rôznych farieb jednoznačne určujú nasledujúce číslo. Takto však pokračuje aj ďalej: za **čbm** musí nasledovať **č**, potom **b**, **m** atď. Tento argument môžeme použiť aj opačným smerom: trojicu **čbm** musí predchádzať **m**, atď.

Takže stačí priradiť farby číslam 1, 2, 3, čo môžeme urobiť šiestimi spôsobmi. Potom budú splnené podmienky zadania, lebo súčty **č** + **b**, **b** + **m**, **m** + **č** dávajú rôzne zvyšky po delení 3.

Prípad 2. Nech žiadne tri po sebe idúce čísla nie sú rôznych farieb. Nech 1 je farby **č** a nech i je najmenšie číslo, ktoré je farby inej ako **č**, povedzme, že je **b**. Ďalej nech k je najmenšie číslo farby **m**. Pretože tam nikde nemáme tri po sebe idúce čísla farieb **čbm**, tak platí $i + 1 < k$.

Ak by bolo $k < 100$, potom z rovnosti $i + k = (i-1) + (k+1)$ dostávame, že $k+1$ je farby **č**. Avšak podľa rovnosti $i + (k+1) = (i+1) + k$ má byť $i+1$ farby **m**, čo je spor s faktom, že k je najmenšie **m** číslo. Takže nutne musí byť $k = 100$.

Pretože $(i-1)+100 = i+99$, tak vidíme, že 99 je farby **b**. Ukážeme, že to musí vyzerať takto: 1 je **č**, 100 je **m** a všetky ostatné čísla sú **b**. Ak by bolo nejaké $t > 1$ farby **č**, potom z $t+99 = (t-1)+100$ vyplýva, že $t-1$ je **m**, ale najmenšie **m** číslo je 100.

Takže dostávame ofarbenie **čbb**...**bbm**, ktoré zrejme vyhovuje. Totiž ak oznámený súčet je najviac 100, potom nič nebolo vybraté z modrej krabice; ak je súčet 101, tak z bielej a ak je súčet väčší než 101, potom z červenej. Opäť zrejme dostávame 6 možností ofarbenia.

Úloha 5.

Odpoveď je *áno*. Indukciou vzhľadom na k dokážeme všeobecnejšie tvrdenie:

> *Pre každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $n = n(k) \in \mathbb{N}$ také, že $n \mid 2^n+1$, $3 \mid n$ a číslo n má práve k prvočíselných deliteľov.*

Základom indukcie môže byť $n(1) = 3$. Pri indukčnom kroku predpokladajme, že pre nejaké $k \geqq 1$ existuje číslo $n(k) = 3^l \cdot t$, kde $l \geqq 1$ a $3 \nmid t$, spĺňajúce podmienky. Potom je číslo $n = n(k)$ nepárne, a teda $3 \mid 2^{2n} - 2^n + 1$. Z rovnosti $2^{3n}+1 = (2^n+1)\,(2^{2n}-2^n+1)$ dostávame $3n \mid 2^{3n}+1$. Podľa lemy, ktorú uvedieme nižšie existuje prvočíslo p také, že $p \mid 2^{3n}+1$, ale $p \nmid 2^n+1$. Takže číslo $n(k+1) = 3p \cdot n(k)$ spĺňa podmienky pre $k+1$. Na dokončenie dôkazu nášho tvrdenia stačí uviesť a dokázať lemu.

Lema. Pre každé celé číslo $a > 2$ existuje prvočíslo p také, že $p \mid a^3+1$, ale $p \nmid a+1$.

Dôkaz. Predpokladajme, že tvrdenie lemy neplatí pre nejaké $a > 2$. Potom každý prvočíselný deliteľ čísla a^2-a+1 je aj deliteľom čísla $a+1$. Z rovnosti $a^2-a+1 = (a+1)\,(a-2)+3$ vyplýva, že 3 môže byť jediným prvočíselným deliteľom a^2-a+1, takže a^2-a+1 je mocninou 3. Potom musí byť aj $a+1$ násobkom 3, takže je ním aj $a-2$. To znamená, že a^2-a+1 je deliteľné 3, ale nie je deliteľné 9. Keďže je to mocnina 3, tak nutne $a^2-a+1 = 3$, čo je spor s nerovnosťou $a^2-a+1 > 3$ pre každé $a > 2$.

Úloha 6.

Nech M_1, M_2, M_3 sú obrazy bodov T_1, T_2, T_3 v osovej súmernosti postupne podľa osí uhlov CAB, ABC, BCA. Zrejme body M_1, M_2, M_3 ležia na kružnici vpísanej trojuholníku ABC. Dokážeme, že sú to vrcholy trojuholníka, o ktorom sa hovorí v zadaní, čím by bolo tvrdenie dokázané.

Kvôli súmernosti stačí dokázať, že obraz l_1 priamky H_2H_3 v súmernosti podľa T_2T_3 prechádza cez M_2. Označme I stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC. Všimnime si, že body T_2 a H_2 ležia v jednej polrovine určenej priamkou BI, pričom T_2 leží k priamke BI bližšie než H_2. Budeme uvažovať len prípad, keď bod C leží v tej istej polrovine určenej priamkou BI ako na obrázku (prípad, keď leží v druhej polrovine je veľmi podobný). Nech $|\sphericalangle CAB| = 2\alpha$, $|\sphericalangle ABC| = 2\beta$, $|\sphericalangle BCA| = 2\gamma$.

Lema. Obraz bodu H_2 v osovej súmernosti podľa priamky T_2T_3 leží na priamke BI.

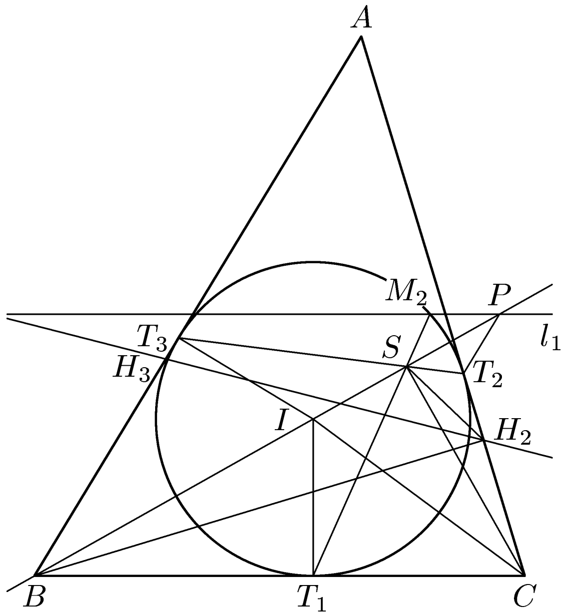
Dôkaz. Nech $l \perp T_2T_3$, $H_2 \in l$. Označme postupne P a S priesečníky BI s l a BI s T_2T_3.

Uvedomme si, že S leží na úsečkách T_2T_3 a BP. Takže stačí dokázať, že $|\sphericalangle PSH_2| = 2|\sphericalangle PST_2|$.

Vieme, že $|\sphericalangle PST_2| = |\sphericalangle BST_3|$, a z vlastnosti vonkajšieho uhla dostávame

$$|\sphericalangle BST_3| = |\sphericalangle AT_3S| - |\sphericalangle T_3BS| = (90^\circ - \alpha) - \beta = \gamma.$$

Ďalej $|\sphericalangle BST_1| = |\sphericalangle BST_3| = \gamma$, kvôli súmernosti podľa priamky BI. Uvedomme si, že body C a S ležia v rovnakej polrovine určenej priamkou IT_1, lebo $|\sphericalangle BT_1S| = 90^\circ + \alpha > 90^\circ$. Potom z rovností $|\sphericalangle IST_1| = |\sphericalangle ICT_1| = \gamma$ vyplýva, že štvoruholník SIT_1C je tetivový, takže $|\sphericalangle ISC| = |\sphericalangle IT_1C| = 90^\circ$. Potom je aj štvoruholník BCH_2S tetivový, lebo $|\sphericalangle BH_2C| = 90^\circ$. Odtiaľ dostávame $|\sphericalangle PSH_2| = |\sphericalangle BCA| = 2\gamma = 2|\sphericalangle PST_2|$, čo sme chceli dokázať.



Obr. 61

Všimnime si, že z dôkazu lemy tiež vyplýva $|\sphericalangle BPT_2| = |\sphericalangle SH_2T_2| = \beta$, kvôli súmernosti podľa T_2T_3 a z toho, že štvoruholník BCH_2S je tetivový. Potom, pretože M_2 je obraz T_2 podľa BI, dostávame $|\sphericalangle BPM_2| = |\sphericalangle BPT_2| = \beta = |\sphericalangle CBP|$, a teda priamka PM_2 je rovnobežná s BC. Aby sme dokázali, že M_2 leží na l_1, stačí dokázať, že l_1 je tiež rovnobežná s BC.

Predpokladajme, že $\beta \neq \gamma$; nech priamka CB pretína priamky H_2H_3 a T_2T_3 postupne v bodoch D a E. (Uvedomme si, že body D, E ležia na tej istej strane úsečky BC.) Jednoduchý výpočet uhlov dáva $|\sphericalangle BDH_3| = 2|\beta - \gamma|$, $|\sphericalangle BET_3| = |\beta - \gamma|$, a teda priamka l_1 je rovnobežná s BC. Tým je dôkaz ukončený.

Zadania súťažných úloh

Kategória P

Archív zadaní Matematickej olympiády, kategórie P sa nachádza na WWW stránke http://www.ksp.sk/mop.

P – I – 1

V továrni idú zahájiť výrobu nového typu výrobku. Táto výroba je daná presným technologickým plánom, ktorý hovorí, aké pracovné postupy treba vykonať a ako dlho každý z týchto postupov trvá. Pre každý postup P je ďalej známy zoznam postupov, ktoré musia byť vykonané predtým, ako sa vykoná postup P (nazvime ich *predchádzajúce postupy*).

Majitelia chcú výrobu zorganizovať tak, aby bolo možné vyrobiť prvý hotový výrobok v najkratšom možnom čase. V továrni možno súčasne vykonávať ľubovoľný počet postupov, ľubovoľný postup však možno začať vykonávať až potom, čo sa skončilo vykonávanie všetkých jemu predchádzajúcich postupov. Inak môžu byť postupy vykonávané v akomkoľvek poradí. Môžete predpokladať, že vykonanie podľa týchto pravidiel existuje.

Napíšte program, ktorý zo súboru `TOVAREN.IN` načíta technologický plán výroby nového výrobku a do súboru `TOVAREN.OUT` vypíše najkratší čas, v akom možno vyrobiť prvý nový výrobok.

Súbor `TOVAREN.IN` obsahuje v prvom riadku počet pracovných postupov N ($N \leq 100$). V ďalších N riadkoch sa nachádzajú informácie o jednotlivých pracovných postupoch, v i-tom riadku o pracovnom postupe číslo i. Informácia o pracovnom postupe sa skladá z niekoľkých čísel oddelených medzerou. Prvé číslo označuje, ako dlho postup trvá, a ďalšie čísla určujú čísla jemu predchádzajúcich postupov. Riadok je ukončený číslom -1. Na vyrobenie nového výrobku je potrebné vykonať všetkých N postupov. Postupy možno vykonávať v ľubovoľnom poradí, ak sa každý postup začne vykonávať až po vykonaní všetkých jemu predchádzajúcich postupov.

Súbor `TOVAREN.OUT` má obsahovať jediný riadok, v ktorom sa nachádza čas, za ktorý možno vyrobiť prvý nový výrobok.

Príklad

Súbor `TOVAREN.IN`

```
4
2 3 -1
3 3 -1
3 -1
1 1 2 -1
```

Súbor `TOVAREN.OUT`

```
7
```

P – I – 2

Je daná množina $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_N\}$ ($N \geq 1$), ktorú budeme nazývať *abeceda.* Prvky abecedy budeme nazývať *znakmi. Reťazcom* nad abecedou A je konečná postupnosť prvkov z množiny A (znakov). *Vybraný podreťazec* vznikne z reťazca vynechaním niektorých jeho znakov, pričom poradie ostatných znakov reťazca zachováme. *Permutácia* prvkov množiny A je reťazec, v ktorom sa každý prvok množiny A vyskytuje práve raz.

Príklad

Nech $N = 3$, $A = \{a, b, c\}$. Potom z reťazca *abcabccb* možno vytvoriť vybrané podreťazce napr. *ab*, *aac*, *bbcb*, *abbb*, *abc*, *cab.* Z nich len *abc* a *cab* sú permutácie množiny A.

Súťažná úloha

Nájdite čo najkratší reťazec nad abecedou $A = \{a, b, c, \ldots, o\}$ ($N = 15$), ktorý obsahuje všetky permutácie prvkov A ako vybrané podreťazce a každý znak sa v ňom vyskytuje nanajvýš N krát. Podrobne uveďte aj spôsob, akým ste tento reťazec našli a priložte a popíšte všetky algoritmy a programy, ktoré ste pri tom použili. Výsledný reťazec má byť uložený v súbore `P12.TXT`. Tento súbor bude obsahovať jediný riadok, v ktorom sa bude nachádzať tento reťazec.

Príklad

Napríklad pre abecedu $A = \{a, b, c\}$ ($N = 3$) vyhovuje reťazec *acbacab*, pretože sa v ňom nachádzajú permutácie *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba* ako vybrané podreťazce. Súčasne je tento reťazec aj najkratším takým reťazcom.

P – I – 3

V istej krajine existuje N politických strán. Každá zo strán má medzi obyvateľstvom určité preferencie, pričom každé dve strany majú rôzne preferencie. Agentúry na prieskum verejnej mienky vedia uskutočniť prieskum, ktorý pre ľubovoľné dve politické strany umožňuje presne zistiť, ktorá z nich má preferencie nižšie a ktorá vyššie. Tento prieskum je však pomerne drahý a dá sa vždy použiť iba pre dve strany.

Jedna agentúra chce zistiť, ktorá zo strán má najvyššie a ktorá najnižšie preferencie, a to tak, že pre rôzne dvojice strán vykoná takýto prieskum. Chce pritom vykonať čo najmenej prieskumov.

Napíšte program, ktorý bude riadiť činnosť agentúry. Tento program najprv načíta počet strán N ($1 \leq N \leq 100$). Strany pre jednoduchosť očíslujeme číslami $1, 2 \ldots, N$. Program potom v cykle vždy vypíše, pre ktoré dve strany sa má vykonať prieskum a načíta výsledok tohto prieskumu — číslo strany s väčšími preferenciami. Keď takýmto spôsobom zhromaždí dostatok údajov na to, aby určil, ktorá strana má najvyššie a ktorá najnižšie preferencie, vypíše odpoveď a skončí.

Dbajte najmä na to, aby váš program dal vždy správnu odpoveď a aby použil čo najmenej prieskumov. Odhadnite, koľko najviac prieskumov môže váš program použiť pre N strán.

Príklad

Uvedieme príklad činnosti programu pre 3 strany, pričom texty vypisované programom sú od začiatku riadku a odpovede užívateľa sú zadané v riadkoch začínajúcich znakom `>`.

```
Zadaj počet strán:
> 3
Urob prieskum 1,2
> 2
Urob prieskum 1,3
> 3
Urob prieskum 2,3
> 2
Najvyššie preferencie má strana 2, najnižšie 1
```

P – I – 4

Minského registrové stroje

Minského registrový stroj je jednoduché výpočtové zariadenie. K dispozícii má množinu registrov označených $R_0, R_1, R_2, \ldots$, pričom v každom registri môže byť uložené ľubovoľne veľké nezáporné celé číslo.

Minského registrový stroj môže mať jeden alebo viacero vstupov, ktorých hodnoty sú na začiatku výpočtu uložené v registroch $R_1, \ldots, R_k$, kde k je počet týchto vstupov. Ostatné registre sú na začiatku výpočtu inicializované na hodnotu nula. Po skončení výpočtu Minského registrového stroja je výsledkom hodnota uložená v registri R_0.

Každý Minského registrový stroj je riadený pevne daným programom. V programe sa môžu vyskytovať tieto príkazy:

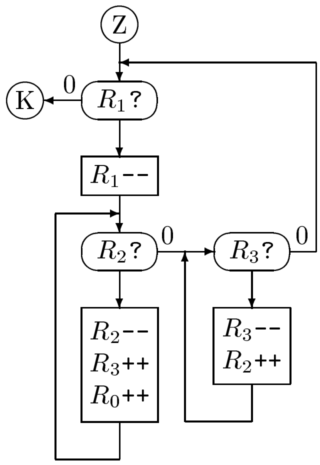
- **Zvýšenie** hodnoty v danom registri o 1
- **Zníženie** hodnoty v danom registri o 1 (ak je v registri nula, hodnota sa nezmení)
- **Test na nulu** zistí, či je v danom registri nula

Register je daný svojim číslom. Číslo registra je v príkaze vždy pevne zadané, nemožno teda na určenie registra použiť obsah iných registrov.

Programy budeme zakresľovať do schém, pričom zvýšenie hodnoty registra R_i budeme značiť obdĺžnikom s nápisom R_i`++`, zníženie hodnoty registra R_i budeme značiť obdĺžnikom s nápisom R_i`--`, test na nulu v registri R_i značíme oválom s nápisom R_i?. Začiatok programu značíme písmenom Z v krúžku a koniec programu značíme písmenom K v krúžku (program môže mať aj viacero koncov, ale iba jeden začiatok). Jednotlivé príkazy sú pospájané šípkami, ktoré určujú tok riadenia programu. Z obdĺžnika vychádza vždy jedna šípka. Z oválu vychádzajú dve šípky, pričom jedna z nich je označená nulou (po nej pokračuje výpočet vtedy, keď bola v testovanom registri nula, v opačnom prípade výpočet sleduje druhú šípku). Ak v programe za sebou nasleduje niekoľko príkazov zvýšenia alebo zníženia, možno ich zapísať pod seba do jedného obdĺžnika.

Príklad

Úloha. Zostrojte stroj, ktorý bude mať na vstupe čísla x a y (uložené v registroch R_1 a R_2) a ktorý vypočíta ich súčin $x \cdot y$ (uloží ho do registra R_0).



Riešenie. Stroj riešiaci túto úlohu vidíme na obrázku. Tento stroj vždy odčíta od registra R_1 jednotku a k registru R_0 pričíta číslo y (obsah registra R_2). To robí dovtedy, kým v registri R_1 nie je nula. Číslo y sa teda do registra R_0 pripočíta spolu x-krát, takže dostaneme správny výsledok.

Poďme sa teraz pozrieť na to, ako sa robí pripočítanie čísla y k R_0. Opäť v cykle znižujeme hodnotu registra R_2 a zvyšujeme hodnotu registra R_0, až kým nemáme v registri R_2 nulu. Vtedy sme do R_0 pridali presne y. Problém je ale v tom, že v registri R_2 máme teraz nulu a pre ďalší priebeh výpočtu tam potrebujeme dať späť y. Preto v cykle okrem zníženia R_2 a zvýšenia R_0 ešte zvýšime R_3. Tým po skončení cyklu máme hodnotu y uloženú v registri R_3. Stačí ju odtiaľ „presypať“ späť do registra R_2. To opäť robíme cyklom, v ktorom súčasne znižujeme R_3 a zvyšujeme R_2, kým v R_3 nie je nula. Vtedy máme v R_2 späť y a môžeme začať s ďalším kolom výpočtu.

Súťažné úlohy

a) Zostrojte Minského registrový stroj s jedným vstupom n, ktorý vypočíta číslo 2^n.

b) Zostrojte Minského registrový stroj s jedným vstupom n, ktorý vypočíta Fibonacciho číslo F_n. Váš stroj pritom môže používať iba registre R_0, R_1, R_2, R_3.

Fibonacciho čísla sú určené nasledujúcim vzťahom:

$$F_n = \begin{cases} 1 & \text{ak } 0 \le n < 2, \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{ak } n \ge 2. \end{cases}$$

P – II – 1

Vo výpočtovom stredisku je N počítačov očíslovaných od 1 po N, ktoré sú navzájom rôzne poprepájané jednosmernými spojeniami. Ak je „počítač i pripojený k počítaču j“, znamená to, že počítač i môže posielať správy počítaču j (avšak nie naopak). Ak je počítač i pripojený k počítaču j, môže, ale nemusí byť pripojený počítač j k počítaču i. (Žiadny počítač nie je pripojený sám k sebe.)

Do výpočtového strediska bol zakúpený nový centrálny počítač. Je potrebné, aby tento počítač mohol poslať správu všetkým ostatným počítačom. Treba ho preto pripojiť k niekoľkým ďalším počítačom tak, aby sa z neho dala poslať správa ľubovoľnému počítaču p buď priamo (t.j. centrálny počítač je pripojený k počítaču p), alebo cez niekoľko iných počítačov (t.j. existujú počítače $a_1, a_2, \ldots, a_k$ také, že centrálny počítač je pripojený k počítaču a_1, pre $i = 1, 2, \ldots k-1$ je počítač a_i pripojený k počítaču a_{i+1} a počítač a_k

je pripojený k počítaču p). Kvôli úspore káblov je nutné minimalizovať počet počítačov, ku ktorým bude pripojený centrálny počítač.

Súťažná úloha

Je daný počet počítačov N. Ďalej pre každý počítač i ($1 \leq i \leq N$) je daný počet počítačov d_i, ku ktorým je daný počítač pripojený, ako aj ich zoznam, $a_{i1}, a_{i2}, \ldots a_{id_i}$. Napíšte program, ktorý vypíše zoznam počítačov, ku ktorým je potrebné pripojiť centrálny počítač tak, aby ich počet bol minimálny. Ak možno centrálny počítač pripojiť viacerými spôsobmi, vypíšte ľubovoľný z nich.

Príklad

vstup:
$N = 7$
$d_1 = 1$, pripojenia: 2
$d_2 = 2$, pripojenia: 1 5
$d_3 = 1$, pripojenia: 6
$d_4 = 2$, pripojenia: 3 6
$d_5 = 1$, pripojenia: 3
$d_6 = 1$, pripojenia: 5
$d_7 = 0$, pripojenia: $\emptyset$

výstup:
2,4,7
(Iné možné riešenie je 1,4,7.)

P – II – 2

Nech $A = (a_1, a_2, \ldots, a_M)$ je postupnosť celých čísel. Postupnosť A' je *vybraná podpostupnosť* tejto postupnosti, ak vznikne z postupnosti A vynechaním niektorých jej členov, pričom poradie ostatných prvkov zachováme. Spoločná vybraná podpostupnosť postupností A, B je každá postupnosť C, ktorá je vybranou podpostupnosťou každej z postupností A, B.

Príklad

Nech $A = (1, 11, 2, 1, 4, 99)$, $B = (9, 4, 1, 2, 7, 1, 99)$. Postupnosť $(1, 2, 1, 99)$ je spoločnou vybranou podpostupnosťou postupností A, B. Postupnosť $(1, 2, 4)$ je vybranou podpostupnosťou postupnosti A, ale nie je vybranou podpostupnosťou postupnosti B, teda nie je ani spoločnou vybranou podpostupnosťou A a B.

Súťažná úloha

Majme dané dve postupnosti celých čísel $A = (a_1, a_2, \ldots, a_M)$ a $B = (b_1, b_2, \ldots, b_N)$ s dĺžkami M, resp. N. Tieto postupnosti sú uložené v poliach `a[1..M]`, resp. `b[1..N]`, ktoré nie je možné meniť.

Uvažujme takú vybranú podpostupnosť postupností A a B, ktorej súčet jednotlivých členov je najväčší možný. Napíšte program, ktorý vypíše súčet členov takejto postupnosti.

Poznámka: Existuje algoritmus, ktorý túto úlohu rieši v čase úmernom $M \cdot N$ a pamäti, ktorej veľkosť je úmerná menšiemu z čísel M, N.

Príklad

vstup:	**výstup:**
$M = 6, N = 7$	103
$A = (1, 11, 2, 1, 4, 99)$	
$B = (9, 4, 1, 2, 7, 1, 99)$	

Vybrané podpostupnosti so súčtom 103 sú dve: $(4, 99)$ a $(1, 2, 1, 99)$.

P – II – 3

V istej krajine sa práve skončili voľby. Každý volič v nich hlasoval za jedného z navrhovaných kandidátov. Víťazom volieb sa stane kandidát, za ktorého hlasovala nadpolovičná väčšina voličov. Máte k dispozícii výsledky hlasovania jednotlivých voličov a máte čo najrýchlejšie zistiť, ktorý kandidát vyhral voľby.

Súťažná úloha

Volieb sa zúčastnilo N voličov očíslovaných od 1 po N a M kandidátov očíslovaných od 1 po M (niektorí kandidáti však nemuseli získať ani jeden hlas). Výsledky hlasovania sú uložené v poli a, pričom platí, že volič i $(1 \leq i \leq N)$ hlasoval za kandidáta číslo $a[i]$. Toto pole nemôžte meniť.

Napíšte program, ktorý zistí, či existuje kandidát, za ktorého hlasovalo viac ako $\frac{N}{2}$ voličov. Ak áno, vypíše číslo tohto kandidáta, ak nie, vypíše, že takýto kandidát neexistuje.

Poznámka: Čísla M a N môžu byť *veľmi* veľké. Snažte sa, aby váš program pracoval čo najefektívnejšie a používal čo najmenej pamäte.

Príklad

vstup:	**výstup:**
N=9	Vyhral kandidát 2.
A=(2,3,2,2,3,50001,3,2,2)	

vstup:	**výstup:**
N=10	Nevyhral žiadny kandidát.
A={2,2,1,4,3,2,1,2,100,2}	

P – II – 4

Minského registrové stroje

Študijný text "Minského registrové stroje" k príkladu P–II–4 možno nájsť v zadaní príkladu P–I–4 na strane **107**. *Oproti domácemu kolu je popis registrového stroja rozšírený o nový druh inštrukcie.*

Každý Minského registrový stroj je riadený pevne daným programom. V programe sa môžu vyskytovať tieto inštrukcie:

- **Zvýšenie** hodnoty v danom registri o 1
- **Zníženie** hodnoty v danom registri o 1 (ak je v registri nula, hodnota sa nezmení)
- **Test na nulu** zistí, či je v danom registri nula

Pre účely tohto kola zavedieme ďalší druh inštrukcie:

- **Výpočet hodnoty funkcie F.** Táto inštrukcia zoberie obsah určeného vstupného registra x, vypočíta hodnotu $F(x)$ a uloží ju do určeného výstupného registra. Obsah vstupného registra po vykonaní tejto inštrukcie nie je definovaný (môže tam byť ľubovoľné nezáporné číslo). Stroj, ktorý môže obsahovať takúto inštrukciu, budeme nazývať *rozšírený* registrový stroj.

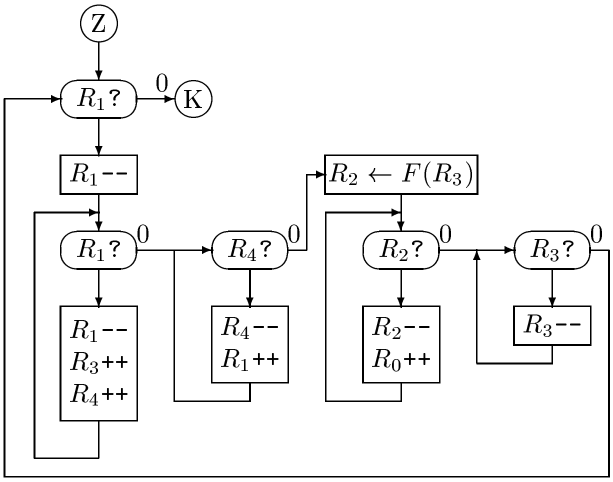
Register je daný svojim číslom. Číslo registra je v príkaze vždy pevne zadané, nemožno teda na určenie registra použiť obsah iných registrov.

Inštrukciu na výpočet funkcie F so vstupným registrom R_i a výstupným registrom R_j značíme obdĺžnikom s nápisom $R_j \leftarrow F(R_i)$ (vstupný a výstupný register musia byť navzájom rôzne).

Ak v programe za sebou nasleduje niekoľko príkazov zvýšenia, zníženia a výpočtu hodnoty funkcie, možno ich zapísať pod seba do jedného obdĺžnika.

Príklad

Úloha. Nech $F(x)$ je dopredu daná, avšak neznáma funkcia. Zostrojte rozšírený registrový stroj, ktorý bude mať na vstupe číslo n (uložené v registri R_1) a ktorý vypočíta súčet $F(0) + F(1) + \ldots + F(n-1)$ (uloží ho do registra R_0).



Riešenie. Stroj riešiaci túto úlohu vidíme na obrázku. Tento stroj pracuje v cykle. Pri každom prechode cyklom zníži hodnotu v registri R_1 o jednotku, vypočíta hodnotu funkcie $F(R_1)$ a pripočíta ju k registru R_0. Budeme potrebovať niekoľko pomocných registrov. Register R_3 bude slúžiť ako vstupný register pre výpočet funkcie F. Do tohto skopírujeme obsah registra R_1 tak, že najprv „presypeme“ obsah registra R_1 do registrov R_3 a R_4, potom naspäť obsah R_4 do R_1. Teraz môžeme použiť inštrukciu na výpočet funkcie F. Výsledok funkcie sa zapíše do registra R_2. Na dokončenie cyklu stačí „prisypať“ obsah R_2 do registra R_0 a vynulovať register R_3.

Súťažné úlohy

a) Nech $F(x)$ je nejaká dopredu daná, avšak neznáma rastúca funkcia. (Funkcia je rastúca, ak pre všetky x platí $F(x+1) > F(x)$.) Zostrojte rozšírený registrový stroj s jedným vstupom y, ktorý vypočíta funkciu $G(y)$, inverznú k funkcii F. Presnejšie, $G(y) = x$, kde x je najmenšie také nezáporné celé číslo, pre ktoré platí $F(x) \geq y$.

Príklad: Predpokladajme, že $F(x) = x^2 + 6$. Potom pre vstup $y = 5$ by mal stroj vypočítať hodnotu 0 (pretože $F(0) \geq 5$ a 0 je najmenšie nezáporné celé číslo). Pre vstup $y = 10$ je správny výstup 2, pre vstup $y = 11$ je výstupom 3.

b) Zostrojte Minského registrový stroj s jedným vstupom n, ktorý zistí, či zápis čísla n v dvojkovej sústave je palindrómom. Palindróm je postupnosť cifier, ktorá je rovnaká, keď sa číta spredu a zozadu (nie je dovolené dopisovať nuly na začiatok zápisu čísla). Stroj bude na konci výpočtu obsahovať v registri R_0 jednotku v prípade, že n je palindróm, alebo nulu v prípade, že n palindrómom nie je.

Napríklad, zápis čísla $0_{10} = 0_2$ alebo $21_{10} = 10101_2$ v dvojkovej sústave je palindróm, zápisy čísel $10_{10} = 1010_2$ a $11_{10} = 1011_2$ palindrómami nie sú.

P – III – 1

V centre mesta je N významných križovatiek očíslovaných 1 až N, ktoré sú určitým spôsobom spojené M cestami. Cesta je asfaltový koberec spájajúci dve konkrétne križovatky. Medzi dvoma križovatkami existuje najviac jedna cesta. Všetky cesty sú obojsmerné a na každú križovatku sa možno po týchto cestách zo všetkých ostatných križovatiek dostať, t.j. pre ľubovoľnú dvojicu križovatiek i a j, $i \neq j$, existujú križovatky $a_1, a_2, \ldots, a_k$ také, že $a_1 = i$, $a_k = j$ a pre $i = 1, 2, \ldots, k-1$ vedie medzi križovatkami a_i a a_{i+1} cesta. Pre účely tejto úlohy volajme križovatkou aj miesto, do ktorého vedie jediná cesta (prípadne dve cesty).

V rámci zvýšenia bezpečnosti premávky sa mestská rada rozhodla čo najviac ciest „zjednosmerniť“. To znamená, že ak medzi križovatkami i a j existuje cesta, po „zjednosmernení od i ku j“ (označujeme $i \to j$) bude po tejto ceste možné ísť z križovatky i do križovatky j, ale nie naopak. Mestská rada má jedinú podmienku: z každej križovatky sa musí dať dostať do všetkých ostatných križovatiek dodržujúc prikázaný smer jazdy.

Súťažná úloha

Je daný počet križovatiek N a ciest M. Ďalej je daných M dvojíc križovatiek $\{i, j\}$, $i \neq j$, takých, že medzi križovatkami i a j vedie cesta. Napíšte program, ktorý vypíše „zjednosmernené“ cesty a ich nový smer tak, aby bol počet zostávajúcich obojsmerných ciest minimálny. Ak je viac možností, vypíšte ľubovoľnú z nich.

Príklad

vstup:	**výstup:**
$N = 8$, $M = 10$	$2 \to 3$
$\{1, 2\}$	$3 \to 8$
$\{2, 3\}$	$8 \to 2$
$\{2, 8\}$	$4 \to 5$
$\{3, 4\}$	$5 \to 6$
$\{3, 8\}$	$6 \to 7$
$\{4, 5\}$	$7 \to 4$
$\{4, 7\}$	$5 \to 7$
$\{5, 6\}$	(Iné možné riešenie je presmerovať
$\{5, 7\}$	$\{5, 7\}$ na $7 \to 5$.)
$\{6, 7\}$	

P – III – 2

V istej krajine sa práve skončili voľby. Každý volič v nich hlasoval za jedného z navrhovaných kandidátov. Za poslancov miestneho zhromaždenia sú zvolení všetci kandidáti, za ktorých hlasovala viac ako jedna k-tina všetkých voličov. Všimnite si, že v takýchto voľbách je možné zvoliť najviac $k-1$ kandidátov (možno menej). Máte k dispozícii výsledky hlasovania jednotlivých voličov a máte čo najrýchlejšie zistiť, ktorí kandidáti boli zvolení do zastupiteľstva.

Súťažná úloha

Volieb sa zúčastnilo N voličov očíslovaných od 1 po N a M ($M \leq N$) kandidátov očíslovaných od 1 po M (niektorí kandidáti však nemuseli získať ani jeden hlas). Výsledky hlasovania sú uložené v poli a, pričom platí, že volič i ($1 \leq i \leq N$) hlasoval za kandidáta číslo $a[i]$. Toto pole nemôžete meniť. Ďalej máte dané číslo $k \geq 2$ (veľmi malé v porovnaní s N).

Napíšte program, ktorý vypíše čísla všetkých kandidátov, za ktorých hlasovalo viac ako $\frac{N}{k}$ voličov.

Poznámka: Čísla M a N môžu byť *veľmi* veľké. Snažte sa, aby váš program pracoval čo najefektívnejšie a používal čo najmenej pamäte.

Príklad

vstup:	**výstup:**
$N = 11$, $k = 3$, $M = 7$	Zvolení sú kandidáti 1, 2.
$A = (1, 2, 3, 2, 1, 1, 7, 2, 3, 2, 1)$	

vstup:	**výstup:**
$N = 8$, $k = 4$, $M = 4$	Nebol zvolený žiadny kandidát.
A=(1,2,3,3,4,2,4,1)	

P – III – 3

Minského registrové stroje

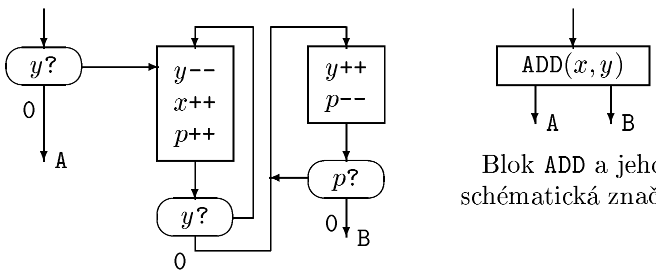
Študijný text "Minského registrové stroje" k príkladu P–III–3 možno nájsť v zadaní príkladu P–I–4 na strane **107***. Oproti domácemu kolu sa študijný text líši príkladom zostavenia Minského stroja z blokov.*

Každý Minského registrový stroj je riadený pevne daným programom. V programe sa môžu vyskytovať tieto príkazy:

- **Zvýšenie** hodnoty v danom registri o 1
- **Zníženie** hodnoty v danom registri o 1 (ak je v registri nula, hodnota sa nezmení)
- **Test na nulu** zistí, či je v danom registri nula

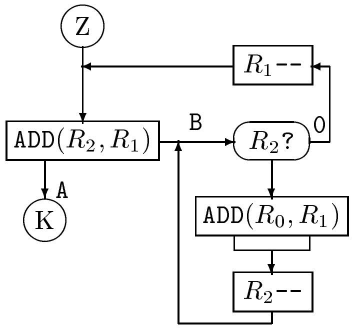
Použitie blokov. Pri zakresľovaní zložitejších schém sa nám môže stať, že niektoré časti potrebujeme použiť viackrát. Aby sme sa vyhli viacnásobnému kresleniu rovnakých skupín príkazov, budeme ich zoskupovať do blokov. *Blok* je skupina príkazov s jedným určeným počiatočným príkazom a jednou alebo viacerými výstupnými šípkami. Každý blok musíme najprv definovať, t.j. zakresliť príslušnú skupinu príkazov. Definovaný blok potom môžeme použiť na ľubovoľnom mieste pri zakresľovaní programu registrového stroja (prípadne pri definovaní iných blokov). Blok značíme obĺžnikom s menom bloku, z ktorého vychádza príslušný počet šípok. Pri definícii môžeme niektoré registre označiť premennými. Za tieto premenné sa dosadia konkrétne registre až na mieste, kde sa blok použije (v tomto prípade napíšeme do obdĺžnika za meno bloku do zátvoriek registre, ktoré sa majú dosadiť za jednotlivé premenné). Premenným, za ktoré nedosadíme žiadny register, sa nakoniec priradia nepoužité registre (každá kópia premennej má vlastný register). Použitie blokov najlepšie objasní príklad:

Úloha. Zostrojte stroj, ktorý bude mať na vstupe číslo n (uložené v registri R_1) a ktorý vypočíta súčet druhých mocnín čísel od 0 po n (uloží ho do registra R_0).



Blok ADD a jeho schématická značka

Riešenie. Najprv nadefinujeme blok ADD(x, y), ktorý k registru x pripočíta obsah registra y (obsah registra y sa zachová). Tento blok bude používať jeden pomocný register p, ktorému nie je explicitne priradený žiadny konkrétny register. Bude mať dve výstupné šípky: ak je v registri y nula, použije sa šípka A, v opačnom prípade použijeme šípku B.



Náš registrový stroj bude pracovať nasledovne: K obsahu registra R_0 (ktorý je na začiatku nulový) budeme postupne pripočítavať n^2, $(n-1)^2$, …, 1^2. V registri R_1 bude vždy uložené číslo x, ktorého druhú mocninu práve pripočítavame. Ak $x = 0$, končíme (vetva `A` bloku $ADD(R_2, R_1)$). V opačnom prípade pomocou $ADD(R_2, R_1)$ skopírujeme obsah R_1 do R_2 (obsah R_2 bol predtým nulový) a pomocou cyklu a ďalšieho bloku ADD pripočítavame do R_0 x-krát číslo x. (Všimnime si, že v R_2 je po prebehnutí tohto cyklu opäť nula.) Tento postup opakujeme, pričom znižujeme obsah R_1 o jednotku.

Súťažná úloha

Konečná množina nezáporných celých čísel $M = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ sa dá jednoznačne zakódovať do nezáporného celého čísla m takto: $m = \sum_{i=1}^{n} 2^{c_i}$. (V množine sa môže každý prvok nachádzať najviac raz, t.j. $c_i \neq c_j$ pre $i \neq j$.) Ak si predstavíme zápis čísla m v dvojkovej sústave, potom číslo c patrí do množiny M práve vtedy, ak c-ty bit zápisu m je jednotka. Bity číslujeme sprava doľava, t.j. najpravejší bit má číslo 0, jeho ľavý sused číslo 1, atď.

Zostrojte Minského registrový stroj, ktorý dostane na vstupe kód m nejakej množiny M a číslo s a zistí, či sa číslo s dá dostať ako súčet niektorých prvkov množiny M, t.j. či existuje taká množina $M' \subset M$, že $\sum_{c \in M'} c = s$. Číslo m je pred začiatkom výpočtu uložené v registri R_1, číslo s v registri R_2. Po skončení výpočtu má register R_0 obsahovať jednotku v prípade, že s je súčtom niektorých prvkov množiny M a nulu v opačnom prípade. Súčet nula prvkov má definitoricky hodnotu nula.

Príklad

Pre hodnoty $m = 203$ (11001011 v dvojkovej sústave, to znamená, že $M = \{0, 1, 3, 6, 7\}$), $s = 10$, je správny výsledok 1 ($10 = 3 + 7$). Pre $m = 203$, $s = 12$, je výsledok 0 (pretože 12 sa nedá dosiahnuť ako súčet čísel z množiny M). Pre m ľubovoľné, $s = 0$, je správny výsledok 1.

P – III – 4

Program: `pramen.pas/pramen.cpp`
Vstup: `pramen.in`
Výstup: `pramen.out`

V istom kúpeľnom mestečku je N minerálnych prameňov očíslovaných $1, 2, \dots, N$ navzájom pospájaných chodníčkami, pričom medzi každou dvojicou prameňov vedie chodníček. Turisti zväčša chcú ochutnať vodu z každého prameňa, ale keďže sú chodníčky neoznačené, občas sa stane, že nejakého zblúdilého turistu nájdu vo vedľajšej doline. Preto sa správca kúpeľov rozhodol dať ku každému prameňu práve jeden smerovník ukazujúci na ďalší prameň a to tak, že turista začínajúci pri ľubovoľnom prameni pokračujúc v smere smerovníkov prejde cez všetky pramene.

Správca dal vyrobiť N smerovníkov s číslami prameňov $1, \ldots, N$. Robotníci ale nerozmýšľali a rozmiestnili smerovníky k prameňom úplne náhodne. Tak pri každom prameni síce bol práve jeden smerovník ukazujúci k nejakému prameňu, ale mohlo sa stať, že ak turista začal pri jednom prameni, tak sa k niektorým prameňom vôbec nedostal. Mohlo sa dokonca stať, že smerovník pri niektorom prameni ukazoval naspäť na ten istý prameň, pri ktorom bol osadený.

Správca vie, že na robotníkov sa môže spoľahnúť len v tejto jednoduchej operácii: vzájomne vymeniť smerovníky pri dvoch pevne daných prameňoch p a q, t.j. ak smerovník pri prameni p ukazoval na prameň i a smerovník pri prameni q ukazoval na prameň j, tak po takejto výmene bude pri prameni p smerovník ukazovať na prameň j a pri prameni q bude smerovník ukazovať na prameň i.

Napíšte správcovi program, ktorý zistí, aké výmeny majú robotníci vykonať tak, aby sa dalo pomocou smerovníkov prejsť cez všetky pramene a počet výmen bol najmenší možný.

Vstupný súbor

Vstupný súbor `PRAMEN.IN` obsahuje na prvom riadku počet prameňov N ($1 \leq N \leq 30000$). Nasleduje N čísel (oddelených medzerami alebo koncami riadkov), i-te z nich je číslo prameňa, na ktorý ukazuje smerovník pri i-tom prameni.

Výstupný súbor

Prvý riadok výstupného súboru `PRANEM.OUT` obsahuje minimálny počet výmen M, ktoré je potrebné vykonať. Nasleduje M riadkov popisujúcich výmeny: $(i+1)$-vý riadok výstupného súboru ($1 \leq i \leq N$) obsahuje dve čísla p, q oddelené jednou medzerou, označujúce dvojicu prameňov, pri ktorých treba vymeniť smerovníky. Výmeny sa vykonávajú v uvedenom poradí.

Príklad

PRAMEN.IN	PRAMEN.OUT
7	2
5 1 4 6 2 3 7	1 3
	7 1

Poznámka: Uvedený výstupný súbor je jedným z možných správnych výstupných súborov.

P – III – 5

Program: `kina.pas/kina.cpp`
Vstup: `kina.in`
Výstup: `kina.out`

V istej krajine práve začal Medzinárodný Filmový Festival Umeleckej Kinematografie (MFF UK). V krajine je n $(1 \leq n \leq 50)$ miest označených číslami $1, 2, \ldots, n$. V každom meste je jedno kino. O každom kine je známe, aký film z ponuky filmov MFF UK očíslovaných $1, 2, \ldots, t$ $(1 \leq t \leq n)$ v ňom premietajú. Konkrétne, v kine v meste číslo i premietajú každý večer ten istý film číslo f_i. Mestá sú navzájom pospájané m obojsmernými cestami. O každej ceste c $(1 \leq c \leq m)$ vieme čísla miest z_c a k_c $(z_c \neq k_c)$, ktoré spája, ako aj jej dĺžku l_c $(0 \leq l_c \leq 1000)$. Medzi každou dvojicou miest vedie najviac jedna cesta.

Predpokladajme, že máte rozpis k večerov $(0 \leq k \leq 1000)$, pričom pre každý večer i $(1 \leq i \leq k)$ je určené číslo filmu p_i, ktorý by ste chceli v ten večer vidieť. Niektoré filmy sa na rozpise môžu vyskytnúť aj viackrát. Aby ste mohli večer vidieť naplánovaný film, musíte sa behom dňa dopraviť do niektorého mesta (nezáleží na tom do ktorého), v ktorom tento film uvádzajú. Keďže neradi cestujete, chceli by ste, aby celková vami precestovaná vzdialenosť bola čo najmenšia. Prvý deň ráno sa nachádzate v meste číslo 1. Pri prechádzaní z mesta do mesta je možné prechádzať cez ľubovoľne veľa iných miest. Z každého mesta sa dá dostať do každého a dá sa to stihnúť za jeden deň. Nezáleží na tom, v ktorom meste sa budete nachádzať po zhliadnutí posledného filmu.

Napíšte program, ktorý pre každé mesto načíta číslo filmu, ktorý v ňom premietajú, ďalej načíta popis jednotlivých ciest a rozpis filmov, ktoré máte v jednotlivé dni vidieť, a vypíše, v ktorom meste máte ísť ktorý večer do kina, aby vami precestovaná dráha bola minimálna, ako aj dĺžku tejto minimálnej dráhy.

Vstupný súbor

Vstupný súbor `kina.in` obsahuje na prvom riadku tri čísla n, m, k. Druhý riadok obsahuje n čísel $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Nasleduje m riadkov popisujúcich cesty, každý obsahuje trojicu čísel z_c, k_c, l_c. Posledný riadok obsahuje k čísel $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Každá dvojica po sebe nasledujúcich čísel v riadku je oddelená jednou medzerou. Môžete predpokladať, že každý film p_i $(1 \leq i \leq k)$, ktorý chcete vidieť, sa premieta aspoň v jednom meste.

Výstupný súbor

Výstupný súbor `kina.out` na prvom riadku obsahuje dĺžku celkovo precestovanej dráhy medzi mestami. Druhý riadok popisuje jednu optimálnu trasu. Obsahuje k čísel (každé dve nasledujúce oddelené medzerou), i-te číslo v poradí označuje mesto, v ktorom by ste podľa danej trasy mali vidieť film p_i.

Poznámka: Ak výstupný súbor obsahuje správnu minimálnu dĺžku, avšak buď neobsahuje popis optimálnej trasy, alebo obsahuje popis trasy, ktorý je chybný, bude hodnotený ako čiastočne správne riešenie polovičným počtom bodov za daný vstup.

Príklad

kina.in

```
6 7 7
2 1 2 3 1 4
1 2 13
2 3 7
3 4 5
4 1 4
1 5 8
5 3 10
2 6 0
1 2 1 4 3 2 1
```

kina.out

```
49
5 3 2 6 4 3 2
```

Riešenia súťažných úloh

Kategória P

P – I – 1

Vezmime pracovný postup i a označme h_i najkratší čas od spustenia výroby, v ktorom môže byť postup i dokončený. Keďže v továrni je možné vykonávať naraz ľubovoľný počet postupov, môžeme výrobu usporiadať tak, že každý postup i sa skutočne dokončí v čase h_i. Na vyrobenie celého výrobku potrebujeme dokončiť všetky pracovné postupy, takže celý výrobok možno dokončiť najskôr v čase $\max\{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$.

Otázkou zostáva, ako spočítať čas h_i. Ak postup i nemá žiadne predchádzajúce postupy, znamená to, že ho možno priamo spustiť. Hodnota h_i je teda priamo rovná trvaniu postupu i. Ak postup i má nejaké predchádzajúce postupy $p_1, p_2, \ldots, p_k$, treba tieto postupy najprv vykonať. Teda postup i môže začať najskôr v čase, ktorý je maximom časov $h_{p_1}, h_{p_2}, \ldots, h_{p_k}$. Ak vieme, kedy postup i začne a vieme dĺžku jeho trvania, vieme triviálne spočítať aj kedy skončí.

Hodnoty h_i budeme počítať rekurzívne. Program obsahuje funkciu `urci_cas`(i), ktorá rekurzívne vypočíta hodnotu h_i. Ak postup i nemá predchodcov, bude to jednoducho čas jeho trvania. Ak postup i už má predchodcov, spustí sa funkcia `urci_cas` pre každého predchodcu postupu i, z týchto časov sa nájde maximum a k nemu sa pripočíta čas trvania postupu i. Navyše, keď vypočítame hodnotu h_i pre nejaké i, uložíme si ju do poľa. Ak potom neskôr zavoláme funkciu `urci_cas` pre to isté i znovu, táto funkcia už nebude znovu počítať, ale jednoducho vráti už vypočítanú hodnotu z poľa.

Dokážeme najprv, že takýto program vždy skončí. Predpokladajme, že by sme počítali nejakú hodnotu h_i a pri jej výpočte by sme potrebovali vypočítať nejakú hodnotu h_{j_1} pre predchádzajúci postup j_1. Pri výpočte h_{j_1} by sme potrebovali vypočítať nejakú hodnotu h_{j_2} a tak by sme sa vnárali hlbšie a hlbšie, až by sme zistili, že na výpočet nejakého h_{j_k} potrebujeme vedieť h_i. To by spôsobilo nekonečné volanie rekurzie. Takýto prípad však môže nastať iba vtedy, ak nie je možné vykonať postup i, pretože postup i sa môže vykonať až po tom, ako skončí j_1 a j_1 možno vykonať až potom, ako skončí j_2 atď. a j_k možno vykonať až po tom, ako skončí i. Dostali sme teda cyklus, takže i nie je možné vykonať vôbec. V zadaní je však uvedené, že všetky postupy sa dajú vykonať, takže tento prípad nemôže nastať a algoritmus vždy skončí.

Na záver poďme analyzovať výpočtovú zložitosť algoritmu. Uvažujme, že pre každý postup máme zoznam predchádzajúcich postupov uložený v spájanom zozname. Označme n počet postupov a m celkový počet predchádzajúcich postupov pre všetky postupy v technologickom pláne výrobku. V prvej časti algoritmu načítame potrebné údaje. Táto časť má zložitosť $O(m + n)$.

V druhej časti algoritmu zavoláme funkciu `urci_cas`(i) pre každé i od 1 po n. V rámci každého takého volania sa funkcia môže ešte ďalej rekurzívne volať. Funkciu `urci_cas`(i)

voláme pre každé i raz z hlavnej časti algoritmu a pre každý postup, ktorému je postup i predchodcom, túto funkciu opäť zavoláme. Spolu sa teda vykoná $m + n$ volaní funkcie `urci_cas`. Pre každú hodnotu i sa ale hodnota `urci_cas`(i) počíta iba raz a pri ďalších volaniach sa iba nájde v poli v konštantnom čase. Máme teda presne m volaní funkcie `urci_cas`, ktoré prebehnú v konštantnom čase. Ostatných n volaní počíta hodnotu. Pri volaní, ktoré počíta hodnotu, sa prejde zoznam všetkých predchádzajúcich postupov a hľadá sa maximum z časov. Čas takéhoto volania je teda úmerný počtu predchádzajúcich postupov (ak vynecháme čas potrebný na vnorené rekurzívne volania). Celkový čas všetkých n volaní, ktoré počítajú hodnotu bude teda $O(m + n)$. Spolu všetkých $m + n$ volaní bude tiež trvať čas $O(m+n)$. Celková časová zložitosť algoritmu je teda $O(m+n)$. Pamäťová zložitosť je tiež $O(m + n)$.

Nakoniec dve poznámky. Ak by sme vypočítané hodnoty vo funkcii `urci_cas` neukladali do poľa, ale počítali vždy znovu, dostaneme algoritmus s exponenciálnou časovou zložitosťou. Všimnime si, že problém možno jednoducho pretransformovať do teórie grafov – postupy budú vrcholy a hrany (orientované) povedú vždy od postupu k jeho predchodcom. Úlohou je potom nájsť orientovanú cestu s najväčším súčtom časov vo vrcholoch. Algoritmus, ktorý sme uviedli, je v grafovej terminológii iba jednoduchou modifikáciou prehľadávania do hĺbky.

P – I – 2

Je známych viacero algoritmov na konštrukciu reťazca obsahujúceho všetky permutácie znakov danej abecedy ako podreťazce. Najprv uvedieme príklad jednoduchého algoritmu, ktorý pre N-prvkovú abecedu zostrojí reťazec dĺžky $N^2 - N + 1$. Potom ukážeme komplikovanejší algoritmus, ktorý zostrojí reťazec dĺžky iba N^2-2N+4 (pre $N \geq 3$). Či existuje aj kratší reťazec, nie je známe (existuje dolný odhad počtu znakov takéhoto reťazca, tento odhad je však nižší ako $N^2 - 2N + 4$).

Ukážme najprv jednoduchšiu konštrukciu. Majme N-prvkovú abecedu $\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$. V reťazci bude $N-1$ úsekov tvaru $a_1a_2 \dots a_N$ a ukončený bude znakom a_1. Napríklad pre abecedu $\{a, b, c\}$ zostrojíme reťazec *abcabca*. Reťazec obsahuje $(N-1)\cdot N+1 = N^2 - N + 1$ znakov. Pre $N = 15$ teda dostávame reťazec dĺžky 211.

Zostáva dokázať, že takto zostrojený reťazec skutočne obsahuje každú permutáciu ako vybraný podreťazec. Rozdeľme si teraz reťazec na $N - 1$ úsekov tvaru $a_2a_3 \dots a_N$. Medzi každými dvoma takými úsekmi, rovnako ako za posledným aj pred prvým takýmto úsekom sa nachádza znak a_1. Vezmime ľubovoľnú permutáciu znakov abecedy. Najprv z tejto permutácie vynechajme znak a_1. Zvyšok permutácie je určite vybraným podreťazcom nášho reťazca, lebo z každého úseku tvaru $a_2a_3 \dots a_N$ môžeme vybrať práve jeden znak tak, aby sme z j-teho úseku vyberali j-ty znak permutácie rôzny od a_1.

Nech je teraz a_1 v permutácii na i-tom mieste, t.j. pred ňou je $i - 1$ znakov. Potom z reťazca vyberieme i-ty výskyt znaku a_1 v poradí. Pred ním sa vyskytuje $i - 1$ úsekov tvaru $a_2a_3 \dots a_N$ a teda a_1 bude aj vo vybranom podreťazci na i-tom mieste. Dokázali sme, že pre ľubovoľnú permutáciu vieme nájsť taký vybraný podreťazec nášho reťazca, ktorý sa jej rovná.

Teraz ešte stručne popíšeme zložitejšiu konštrukciu. Tá bude vytvárať postupnosť reťazcov $T(1)$, $T(2)$, $T(3)$,..., pričom $T(N)$ obsahuje všetkých $N!$ permutácií N znakov ako podreťazce. Ukážeme spôsob, ako z $T(N)$ zostrojiť $T(N+1)$ (pre $N \geq 3$).

Reťazce $T(1)$, $T(2)$ a $T(3)$ zvolíme pevne: $T(1) = a_1$, $T(2) = a_1a_2a_1$ a $T(3) = a_1a_3a_2a_1a_3a_1a_2$. Sú to najkratšie možné reťazce pre $N = 1, 2, 3$ (možno dokázať overením všetkých možností).

Majme teraz abecedu $\{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$. K reťazcu $T(N)$ vytvoríme postupnosť *základných bodov*. Prvý základný bod reťazca $T(N)$ je index prvého výskytu znaku a_1 v $T(N)$. Pre $i > 1$ je i-ty základný bod index prvého výskytu znaku a_i za $(i-1)$-vým základným bodom v reťazci. Napríklad, v $T(3) = a_1a_3a_2a_1a_3a_1a_2$ je postupnosť základných bodov $(1, 3, 5)$.

Algoritmus pre konštrukciu reťazca $T(N)$ z reťazca $T(N-1)$:

1. Pre každé $i = 2, 3, \ldots, N-1$ vsunúť tesne pred i-ty základný bod reťazca $T(N-1)$ znak a_N.

2. Na koniec takto vzniknutého reťazca pripojiť úsek

$$a_2, a_3, \ldots, a_{N-3}, a_N, a_1, a_{N-1}.$$

Podľa prvého bodu algoritmu sme vložili $N-2$ znakov a podľa druhého bodu sme vložili $N-1$ znakov. Celkovo sa teda reťazec predĺži o $2N-3$ znakov. Všetky základné body reťazca $T(N-1)$ budú aj základnými bodmi reťazca $T(N)$ (len sa posunú kvôli vsúvaniu znakov a_N podľa bodu 1) a N-tým základným bodom sa stane znak a_N pridaný v bode 2. Napríklad pre $N = 4$ dostávame pomocou tohoto algoritmu $T(4) = a_1a_3a_4a_2a_1a_4a_3a_1a_2a_4a_1a_3$.

Reťazec $T(N)$ zostrojený našim algoritmom (pre $N \geq 3$) má dĺžku $N^2 - 2N + 4$. Toto tvrdenie dokážeme matematickou indukciou – dĺžka reťazca $T(3)$ je 7, čo je rovné $3^2 - 2 \cdot 3 + 4$. Predpokladajme teraz, že dĺžka $T(N-1)$ je $(N-1)^2 - 2(N-1) + 4$ a dokážeme, že potom dĺžka reťazca $T(N)$ je $N^2 - 2N + 4$. Reťazec $T(N)$ vznikol pridaním $2N-3$ znakov do reťazca $T(N-1)$, jeho dĺžka je $(N-1)^2 - 2(N-1) + 4 + 2N - 3 = N^2 - 2N + 4$. Dokázali sme, že dĺžka reťazca $T(N)$ je $N^2 - 2N + 4$.

Nakoniec zostáva dokázať, že reťazec $T(N)$ obsahuje všetkých $N!$ permutácií znakov abecedy ako podreťazce. Tento dôkaz je pomerne zdĺhavý, takže uvedieme len základnú myšlienku. Reťazec $T(N)$ rozdelíme na úseky. Prvý úsek začína prvým základným bodom a končí druhým základným bodom. Pre $2 \leq i \leq N-1$ bude i-ty úsek začínať znakom a_1, ktorý je hneď za i-tym základným bodom a končiť znakom a_i, ktorý sa vyskytuje prvýkrát za $(i+1)$-vým základným bodom.

Možno dokázať matematickou indukciou (vzhľadom na N), že každý z takto vytvorených úsekov obsahuje znaky $a_1, a_2 \ldots a_N$ a začína znakom a_1. Reťazec obsahuje $N-1$ takýchto úsekov a každý z nich obsahuje práve jeden základný bod s výnimkou prvého úseku, ktorý obsahuje dva základné body. Ďalšou vlastnosťou dvoch susedných úsekov i-teho a $(i+1)$-vého je ich prekrytie v dvoch znakoch, a síce a_1 a a_i.

Nech má teraz naša permutácia znak a_1 na i-tom mieste. Uvažujme prípad, že $i \leq N-1$. V permutácii vyberieme prvý výskyt znaku a_1 z i-teho úseku reťazca $T(N)$. Z i-teho úseku je možné použiť ešte jeden znak, lebo sa v ňom vyskytujú všetky znaky a to až za vybraným znakom a_1. Pred i-tým úsekom je $i-1$ úsekov a za ním je $N-i-1$ úsekov. Teda pri výbere jedného znaku z každého úseku dostaneme všetky permutácie so znakom a_1 v i-tej pozícii. Prekrytie susedných úsekov nespôsobí problémy, pretože pri výbere znaku a_1 z i-teho úseku je možné všetky ostatné znaky a_1 ignorovať a ďalšie spoločné znaky sa stávajú hraničnými prvkami úsekov. Hraničný prvok je považovaný za prvok patriaci len do jedného úseku.

Zostáva dokázať tvrdenie v prípade, že a_1 je v permutácii na N-tom mieste. Vtedy reťazec $T(N)$ je rozdelíme na úseky so základnými bodmi ako hraničnými bodmi úsekov. Počet úsekov je $N-1$ a každý z nich obsahuje znaky $a_1, a_2, \ldots a_N$. Ak na posledné miesto vyberieme posledný výskyt znaku a_1 v reťazci $T(N)$, tento znak nepatrí do žiadneho z vyššie spomínaných úsekov. Teda reťazec $T(N)$ obsahuje všetky permutácie so znakom a_1 na poslednom mieste.

Uvedený algoritmus pre $N = 15$ dáva nasledujúci reťazec dĺžky 199:
`acdefghijklmnobadefghijklmnocabefghijklmnodacbfghijklmnoeadbcghijklmnofa-`
`ebcdhijklmnogafbcdeijklmnohagbcdefjklmnoiahbcdefgklmnojaibcdefghlmnokajb-`
`cdefghimnolakbcdefghijnomalbcdefghijkonambcdefghijkloan`

P – I – 3

Túto úlohu si môžeme predstaviť aj tak, že máme pole n navzájom rôznych čísel $a[1]$, $a[2]$, …, $a[n]$ (preferencie strán) a máme nájsť najmenší a najväčší prvok tohto poľa, pričom ale k poľu môžeme pristupovať **iba** prostredníctvom funkcie `prieskum`(i, j), ktorá nám povie, či je $a[i] < a[j]$ alebo $a[j] < a[i]$.

Ukážme si najprv riešenie pre párne n. Rozdelíme všetky prvky poľa do dvojíc a v každej dvojici prvky porovnáme (pomocou funkcie `prieskum`). Prvky sa nám rozdelia na dve podmnožiny – do množiny X dáme tie, ktoré boli pri porovnaní v dvojici väčšie a do množiny Y tie, ktoré boli pri porovnaní menšie. Je zrejmé, že žiaden prvok z množiny X nebude najmenším prvkom, lebo od neho existuje aspoň jeden menší prvok (ten, ktorý bol s ním v dvojici). Preto keď hľadáme minimum, stačí hľadať medzi prvkami množiny Y. Podobne žiaden prvok z Y nebude najväčším prvkom poľa a preto stačí maximum hľadať medzi prvkami množiny X.

Najmenší z prvkov v množine Y nájdeme jednoducho. V premennej `min` si budeme pamätať najmenší nájdený prvok. Na začiatku to bude ľubovoľný prvok množiny Y. Potom budeme najmenší nájdený prvok porovnávať vždy s ďalším a ďalším prvkom množiny Y. Vždy keď bude porovnávaný prvok menší ako prvok v premennej `min`, stane sa on najmenším nájdeným prvkom (uloží sa do premennej `min`). Podobne budeme hľadať aj najväčší prvok v množine X.

V prípade, že n je nepárne, budeme postupovať rovnako, ibaže do dvojíc rozdelíme iba $n-1$ prvkov a posledný prvok nakoniec pridáme aj do množiny X aj do množiny Y. V niektorých prípadoch môžeme ešte jedno porovnanie ušetriť – ak sa tento posledný prvok stal najmenším prvkom množiny Y (a tým pádom aj celého poľa), tak ho môžeme z množiny X vynechať, lebo určite nebude súčasne aj najväčším prvkom. Prípad, keď $n = 1$, ošetríme zvlášť. Netreba nič porovnávať – jediná strana má súčasne najvyššie aj najnižšie preferencie.

Poďme teraz zistiť, koľko porovnaní v najhoršom prípade vykonáme pre dané n. Ak n je párne, vznikne nám $n/2$ dvojíc. Pre každú dvojicu spravíme jedno porovnanie, aby sme zistili, ktorý prvok je väčší. Množiny X a Y budú mať každá $n/2$ prvkov. Na nájdenie minima (alebo maxima) v množine s x prvkami použijeme $x-1$ porovnaní (do premennej `min` uložíme najprv prvý prvok, potom túto premennú porovnáme so všetkými ostatnými $x-1$ prvkami). Takže na nájdenie minima v množine Y spotrebujeme $n/2-1$ porovnaní a na nájdenie maxima v množine X tiež $n/2-1$ porovnaní. Spolu teda máme

$$\frac{n}{2}+\left(\frac{n}{2}-1\right)+\left(\frac{n}{2}-1\right)=\frac{3n-4}{2}$$

Pre nepárne n budeme mať $(n-1)/2$ dvojíc, takže na začiatku spravíme $(n-1)/2$ porovnaní vo dvojiciach. Množiny X a Y však budú mať $(n-1)/2+1$ prvkov, takže na nájdenie minima alebo maxima z takejto množiny potrebujeme $(n-1)/2$ porovnaní. Spolu teda máme

$$\frac{n-1}{2}+\frac{n-1}{2}+\frac{n-1}{2}=\frac{3n-3}{2}$$

Dostali sme teda, že pre n párne spravíme najviac $(3n-4)/2$ porovnaní a pre n nepárne spravíme najviac $(3n-3)/2$ porovnaní. Tento výsledok je možné zapísať aj jedným vzorcom s použitím celých horných a celých dolných častí takto:

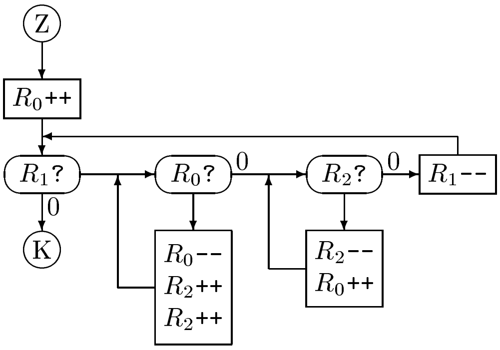
$$2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-2$$

Na záver si povedzme niečo o tom, ako implementovať popísaný algoritmus. Množiny X a Y nebudeme vytvárať na začiatku, ale priebežne. Najprv zoberieme prvé dva prvky v poli, porovnáme ich a menší z nich bude počiatočná hodnota premennej `min` a väčší bude počiatočná hodnota premennej `max`. Potom vezmeme vždy ďalšiu a ďalšiu dvojicu, porovnáme jej prvky navzájom a potom menší z nich porovnáme s premennou `min` (a ak treba, tak obsah `min` zmeníme) a väčší porovnáme s premennou `max`. Pre nepárne n treba nakoniec zvlášť spracovať posledný prvok. Takto naprogramovaný algoritmus bude mať časovú zložitosť lineárnu (t.j. $O(n)$) a pamäťovú zložitosť konštantnú.

P – I – 4

Časť a) Úlohou bolo zostrojiť stroj, ktorý pre vstup n vypočíta číslo 2^n. Číslo n máme uložené v registri R_1. Na začiatku výpočtu uložíme do R_0 číslo 1 (t.j. 2^0). Potom budeme postupovať tak, že v každom kroku znížime R_1 o 1 a register R_0 vynásobíme 2. To robíme dovtedy, kým v R_1 nie je 0. Vtedy máme v R_0 uložené číslo 2^n.

Zostáva popísať, ako násobíme register R_0 dvoma. Jedna možnosť je uložiť do niektorého ďalšieho registra hodnotu 2 a potom použiť algoritmus násobenia uvedený v príklade v študijnom texte. My však použijeme trochu zjednodušený algoritmus, ktorý sa dá použiť iba na násobenie konštantou. V cykle budeme znižovať R_0, až kým neklesne na nulu a za každým znížením dvakrát zvýšime hodnotu R_2. Takže po skončení cyklu máme v R_2 dvojnásobok hodnoty, akú sme mali pôvodne v R_0. Zostáva už len presunúť hodnotu z R_2 späť do R_0, čo spravíme ďalším cyklom, ktorý vždy raz zníži R_2 a zvýši R_0, až kým nebude v R_2 nula.

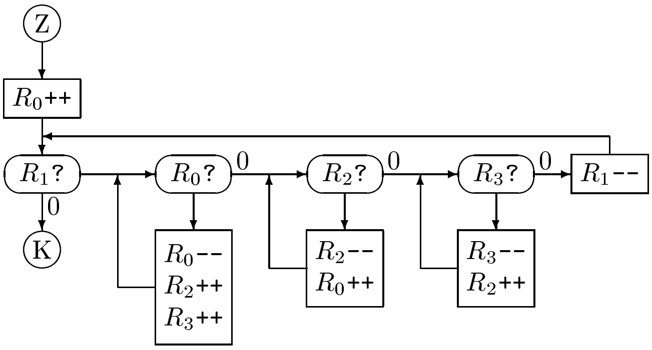


Časť b) Úlohou je vypočítať n-té Fibonacciho číslo F_n. Podľa definície $F_0 = F_1 = 1$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pre $n \geq 2$. Ak si však zavedieme pomocný člen tejto postupnosti $F_{-1} = 0$, bude platiť, že $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ aj pre $n = 1$, čo zníži počet prípadov, ktoré je treba v programe pre Minského stroj špeciálne ošetriť.

Náš stroj bude pracovať tak, že v cykle bude znižovať register R_1 a počítať ďalší člen Fibonacciho postupnosti, až kým nebude R_1 nula. Po k prechodoch tohto cyklu bude register R_0 obsahovať F_k a register R_2 bude obsahovať F_{k-1}. Spolu sa vykoná n prechodov, takže stroj správne vypočíta F_n.

Pred prvým vykonaním cyklu (t.j. po nula prechodoch) potrebujeme mať v registri R_0 číslo $F_0 = 1$ a v registri R_2 číslo $F_{-1} = 0$. To dosiahneme jednoducho príkazom R_0++.

Nakoniec preskúmajme, čo potrebujeme spraviť v tele cyklu. V registri R_0 máme číslo F_k a v registri R_1 číslo F_{k-1}. Chceme dosiahnuť, aby v registri R_0 bolo $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$, t.j. súčet registrov R_0 a R_2 a v registri R_2 aby bolo F_k, t.j. číslo, ktoré bolo pôvodne v R_0. Budeme postupovať tak, že hodnotu v R_0 pričítame k registrom R_2 a R_3 (a to tak, že budeme v cykle R_0 znižovať, až kým neklesne na nulu a zakaždým zvýšime R_2 aj R_3). Po skončení tejto operácie máme v R_0 nulu, v R_2 máme F_{k+1} a v R_3 máme F_k. Potrebujeme teraz ešte obsahy registrov premiestniť tak, aby sme do R_0 dostali obsah R_2 a do R_2 obsah R_3. To spravíme opäť obvyklým spôsobom (dvoma „presýpacími" cyklami).



P – II – 1

Jednotlivé počítače nazvime vrcholmi. Z vrchola i do vrchola j nech vedie hrana práve vtedy, keď je počítač i pripojený k počítaču j. Vznikne nám tak orientovaný graf G. Našou úlohou je vybrať množinu vrcholov M s minimálnym počtom prvkov takú, že pre ľubovoľný vrchol v existuje vrchol $u \in M$ taký, že z u do v vedie cesta (pripúšťame cestu dĺžky 0, t.j. $u = v$).

Množinu vrcholov U, pre ktorú platí, že

1. pre ľubovoľné dva vrcholy $u, v \in U, u \neq v$ existuje cesta z u do v vedúca len cez vrcholy patriace do U
2. zo žiadneho vrchola $w \in G$ nepatriaceho do U nevedie hrana do žiadneho vrchola $u \in U$

nazvime *maximálny silne súvislý komponent* (MSSK) grafu G (poznamenajme, že vrchol, do ktorého nevedie žiadna hrana, tvorí maximálny silne súvislý komponent). Každé dva rôzne MSSK sú disjunktné. Keby MSSK U a MSSK V $(U \neq V)$ neboli disjunktné, potom existuje u, ktorý patrí do obidvoch a vrchol v, ktorý patrí do U a nepatrí do V (alebo naopak). Z vrchola v vedie cesta do vrchola u. Na nej niekde musia za sebou nasledovať vrchol v', ktorý do V nepatrí a vrchol u', ktorý už do V patrí – množina V nemá vlastnosť 2 MSSK – spor.

Ľahko vidno, že z každého MSSK grafu G musí nejaký vrchol patriť do množiny M. Zároveň stačí, aby z každého MSSK bol v množine M jeden ľubovoľný vrchol.

Budeme ofarbovať vrcholy grafu rôznymi farbami. Začnime z ľubovoľného neofarbeného vrchola v a ofarbime farbou f všetky neofarbené vrcholy (vrátane v), do ktorých existuje cesta z v vedúca cez doteraz neofarbené vrcholy. Farbenie realizujeme prehľadávaním grafu do hĺbky. Vrchol v vyhlásime za *reprezentanta* farby f. Potom si zvolíme ďalšiu farbu f a iný neofarbený vrchol v a opakujeme, kým sa neminú všetky neofarbené vrcholy. Do každého vrchola zrejme existuje cesta z niektorého z reprezentantov. Niektorí reprezentanti sú však zbytoční: ak do vrchola r_1, reprezentujúceho farbu f_1 vedie cesta z vrchola r_2 reprezentujúceho farbu f_2, z r_2 sa dá dostať do všetkých vrcholov ofarbených farbou f_1 a preto r_1 je zbytočný.

Ako rýchlo zistiť, ktorí reprezentanti sú zbytoční? Nech r_i je zbytočný reprezentant. Potom existuje reprezentant r_j taký, že z r_j vedie do r_i cesta prechádzajúca len cez vrcholy ofarbené farbami f_j a f_i, pričom farby na ceste sa nestriedajú, t.j. cesta vedie najprv cez vrcholy farby f_j a potom cez vrcholy farby f_i. Posledný vrchol na tejto ceste ofarbený farbou f_j označme v, prvý vrchol ofarbený f_i nech je u. Vrcholy farby f_j boli zrejme ofarbované neskôr ako vrcholy farby f_i. Preto ak by sme v okamihu ofarbovania vrchola v vedeli, že z vrchola u sa dá dostať do vrchola r_i, veľmi ľahko by sme prišli na zbytočnosť r_i. Preto si pre každú farbu f_i a pre každý vrchol u ofarbený touto farbou spočítame, či sa z vrchola u dá dostať do reprezentanta farby f_i t.j. vrchola r_i. Táto práca sa dá tiež zveriť rekurzívnej ofarbovacej procedúre. Na záver treba skontrolovať, pre každú hranu, ktorá vedie medzi vrcholmi rôznych farieb, či sa z jej koncového vrchola dá dostať do reprezentanta farby koncového vrchola. Ak áno, označíme reprezentanta tejto farby ako zbytočného. Táto kontrola sa dá tiež robiť počas ofarbovania.

Procedúra `Prehladaj(v : integer)` dostane ako argument číslo vrchola, z ktorého má prehľadávať. Označme $N(v)$ množinu vrcholov, do ktorých vedie z v hrana. Pred spustením procedúry `Prehladaj` z vrchola r_i si poznačíme, že z vrchola r_i sa dá dostať do reprezentanta r_i. Táto procedúra:

- ofarbí vrchol v aktuálnou farbou f_i,
- rekurzívne sa zavolá pre všetky vrcholy $u \in N(v)$, ktoré ešte nie sú ofarbené,
- ak existuje vrchol $u \in N(v)$ farby f_i, z ktorého sa dá dostať do reprezentanta r_i, poznačí si, že aj z v sa dá dostať do r_i.
- ak existuje vrchol $u \in N(v)$ ofarbený farbou $f_j \neq f_i$ a pritom z u existuje cesta do reprezentanta r_j, poznačí si, že reprezentant r_j je zbytočný.

Ostáva ukázať, že množina všetkých reprezentantov, ktorí nie sú zbytoční, tvorí našu hľadanú množinu M. Ľahko vidno, že do každého zbytočného reprezentanta r vedie cesta z nejakého reprezentanta, ktorý nie je zbytočný. Nech to tak nie je. Potom existuje reprezentant r_1 taký, že z r_1 vedie do r cesta. Ak by aj ten bol zbytočný, existuje r_2 taký, že z neho vedie cesta do r_1 atď. Buď po nejakom čase prídeme k reprezentantovi, do ktorého už nič nevedie, alebo sa nám začnú reprezentanti opakovať, teda nejakí dvaja, r_i a r_j sa v postupnosti vyskytnú aspoň dvakrát. Jeden z nich musel byť ofarbovaný skôr, nech je to r_i. Potom ale z r_i vedie do r_j cesta, a preto by mal byť r_j ofarbený farbou f_i (alebo inou, použitou skôr ako f_i) – spor. Z množiny nezbytočných reprezentantov sa teda dá dostať do ľubovoľného reprezentanta, a teda aj do ľubovoľného vrchola. Zároveň žiadni dvaja reprezentanti nemôžu ležať v rovnakom MSSK (lebo inak by museli byť ofarbení rovnakou farbou), teda ich je naozaj minimálny možný počet.

Časová a pamäťová zložitosť: Prehľadávanie každého vrchola je úmerné počtu hrán, ktoré z neho vedú. Žiadny vrchol sa neprehľadáva viac než raz, preto celková časová zložitosť algoritmu je $O(M+N)$, kde M je celkový počet hrán v grafe. Pamäťová zložitosť je tiež $O(M+N)$, pretože si potrebujeme zapamätať celý graf.

P – II – 2

Riešenie tohto príkladu používa metódu dynamického programovania. Označme $A_i = a[1], a[2], \dots, a[i]$ postupnosť utvorenú z prvých i členov postupnosti a, analogicky $B_j = b[1], \dots, b[j]$. Budeme riešiť všeobecnejšiu úlohu: Pre každé i, j, $(0 \le i \le M,\ 0 \le j \le N)$ vypočítame, aký je maximálny súčet vybranej podpostupnosti postupností A_i a B_j. Tieto maximálne súčty si budeme zapisovať do tabuľky $p[0..M, 0..N]$, kde $p[i,j]$ je súčet maximálnej vybranej podpostupnosti postupností A_i a B_j. Hľadaný maximálny súčet bude teda hodnota $p[M,N]$.

Tabuľku p budeme vypĺňať po riadkoch s využitím predpočítanej informácie v predošlom riadku. Riadok $p[0]$ obsahuje samé nuly, pretože neexistuje vybraná podpostupnosť prázdnej postupnosti. Riadok $p[i]$ (pre $i > 0$) vyplníme podľa riadku $p[i-1]$ takto: Políčko $p[i,0]$ je zrejme nula. Políčko $p[i,j]$ (pre $j > 0$) vieme vyplniť pomocou hodnôt $p[i-1,j]$, $p[i,j-1]$ a $p[i-1,j-1]$. Ak sa čísla $a[i]$ a $b[j]$ nezhodujú, každá vybraná podpostupnosť postupností A_i a B_j je zároveň vybranou podpostupnosťou postupností A_{i-1} a B_j alebo A_i a B_{j-1}. Teda v tomto prípade je $p[i,j]$ rovné maximu z čísel $p[i-1,j]$ a $p[i,j-1]$. Ak $a[i] = b[j]$, každá vybraná podpostupnosť postupností A_i a B_j je vybranou podpostupnosťou postupností A_{i-1} a B_j alebo A_i a B_{j-1}, alebo vybranou podpostupnosťou postupností A_{i-1} a B_{j-1} s pridaným členom $a[i] = b[j]$. Preto $p[i, j]$ je rovné maximu z čísel $p[i-1, j]$, $p[i, j-1]$ a $p[i-1, j-1] + a[i]$.

Navrhnutý algoritmus má časovú zložitosť $O(M \cdot N)$. Pamäťová zložitosť je tiež $O(M \cdot \cdot N)$. Keďže každý riadok tabuľky p závisí iba na predchádzajúcom riadku, stačí si pamätať len posledné dva riadky (pri počítaní riadku $p[i]$ si pamätáme predchádzajúci riadok $p[i- - 1]$). Po takejto úprave bude pamäťová zložitosť algoritmu $O(M + N)$.

P – II – 3

Úlohu budeme riešiť v dvoch prechodoch. V prvom prechode nájdeme kandidáta – prvok, ktorý ako jediný môže mať nadpolovičnú väčšinu. V druhom prechode len overíme, či sa tento prvok nachádza v poli a viac ako $\frac{N}{2}$ krát.

Kandidáta budeme hľadať nasledovným spôsobom: pre každý prvok k, ktorý sa v poli a aspoň raz vyskytuje, si budeme počítať jeho *silu* s_k. Na začiatku položme silu všetkých prvkov rovnú 0. Silu prvkov budeme meniť takým spôsobom, aby v každom okamihu bola nenulová pre nanajvýš jeden prvok. Tento prvok nazvime kandidátom a označme ho K. Ak majú všetky prvky silu nulovú, kandidátom je buď prvok $a[1]$ (pred začiatkom výpočtu), alebo prvok, ktorý bol kandidátom v predchádzajúcom kroku.

Pri spracovávaní prvku $a[i]$ môžu nastať tieto situácie:

1. $K = a[i]$, t.j. ďalší spracovávaný hlas patrí kandidátovi. Zvýšime s_K o 1.
2. $K \neq a[i]$, $s_K > 0$, spracovávaný hlas nepatrí kandidátovi, preto znížime s_K o 1.
3. $K \neq a[i]$, $s_K = 0$. Zvýšime silu $s_{a[i]}$ prvku $a[i]$ o 1. Tým sa prvok $a[i]$ stane novým kandidátom K.

Tento postup opakujeme, kým nespracujeme všetky prvky poľa.

Je zrejmé, že si netreba pamätať silu všetkých prvkov, stačí si pamätať silu kandidáta a to, ktorý prvok je kandidátom. Na to nám stačia dve premenné typu `integer`.

Lema: Nech sa nejaký prvok K vyskytuje v poli a M krát, kde $M > \frac{N}{2}$. Potom po spracovaní všetkých prvkov poľa bude K kandidátom so silou $s_K \geq 2M - N > 0$.

Označme počet zvýšení sily kandidáta K ako k_+, počet znížení jeho sily k_-, počet zvýšení sily ľubovoľného iného kandidáta l_+ a počet znížení sily iných kandidátov l_-. Zníženie sily kandidáta K, ako aj zvýšenie sily iného kandidáta je spôsobené jedine výskytom prvku rôzneho od K. Takýchto operácií teda bude najviac $N - M$. Každý výskyt prvku K spôsobí buď zvýšenie sily K, alebo zníženie sily iného kandidáta (prvky rôzne od K si však môžu znižovať silu aj navzájom), preto týchto operácií bude najmenej M.

$$\begin{aligned} N - M &\geq k_- + l_+ \\ k_+ + l_- &\geq M \\ l_+ - l_- &\geq 0 \end{aligned}$$

Posledná nerovnosť vyplýva z toho, že počet znížení u žiadneho prvku nepresiahne počet zvýšení. Po sčítaní nerovností a úprave dostaneme

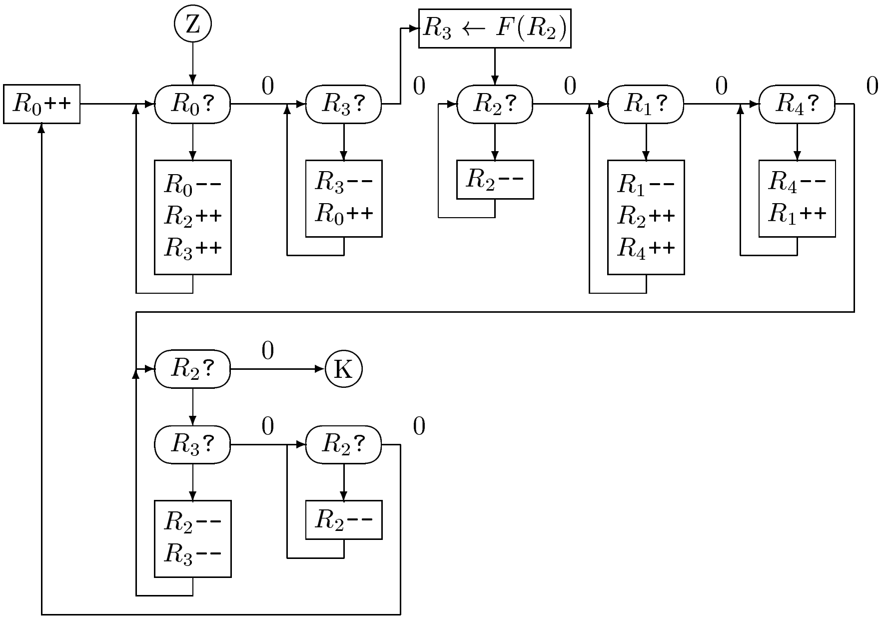
$$k_+ - k_- \geq 2M - N > 0$$

a teda po skončení algoritmu má prvok K kladnú silu. To je možné len tak, že bude na konci kandidátom. $\square$

Časová a pamäťová zložitosť: algoritmus vyžaduje dva prechody poľom, každý z nich je v čase $O(N)$. Pamäťová zložitosť je konštantná.

P – II – 4

Časť a)



Stroj, riešiaci túto úlohu, bude postupne skúšať ako x čísla $0, 1, 2, \ldots$. Vypočíta funkčnú hodnotu $F(x)$ v každom z týchto čísel a porovná ju s hodnotou y v registri R_1. Ak je väčšia alebo rovná, máme riešenie, ak nie, zvýšime hodnotu x o 1 a pokračujeme. V registri R_0 budeme uchovávať hodnotu x, v registri R_1 bude hodnota y. Funkčnú hodnotu $F(x)$ uložíme do registra R_3. Registre R_2 a R_4 slúžia ako pomocné registre. Jeden cyklus stroja sa bude skladať z týchto operácií:

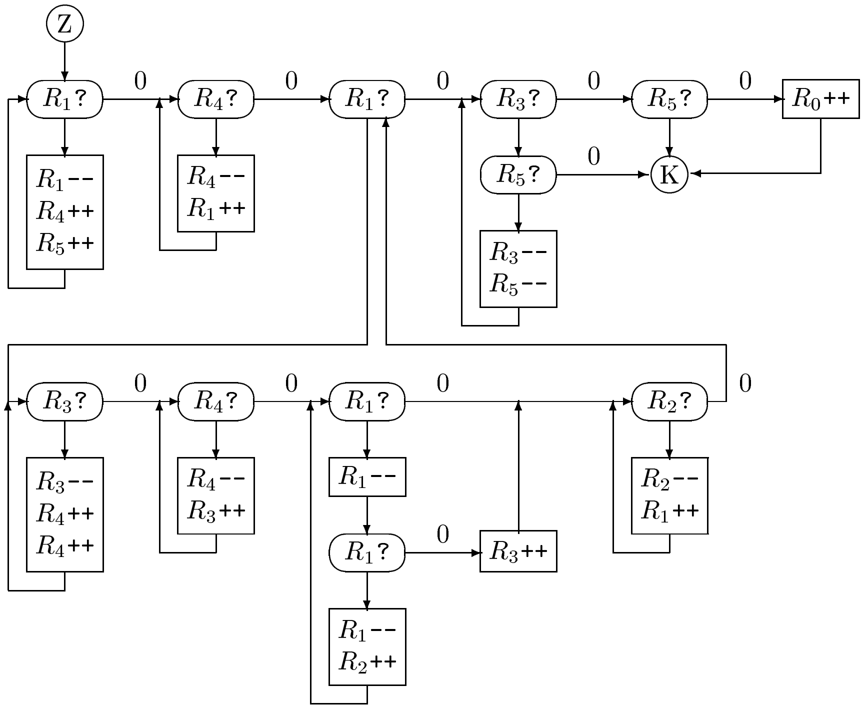
- Skopírovanie obsahu registra R_0 do registra R_2, ktorý bude slúžiť ako vstupný register pre výpočet funkcie F. Najprv presunieme obsah registra R_0 do registrov R_2 a R_3 (za každé zníženie registra R_0 raz zvýšime každý z registrov R_2 a R_3), potom presunieme naspäť obsah R_3 do registra R_0.

- Použijeme inštrukciu na výpočet funkcie F. R_2 je vstupný register, výsledok sa uloží do výstupného registra R_3. Po vykonaní tejto inštrukcie je obsah registra R_2 nedefinovaný, preto ho musíme vynulovať.

- Prekopírujeme obsah registra R_1 do registra R_2 za pomoci registra R_4 rovnakou technikou ako v prvom kroku.

- Porovnáme veľkosti čísel uložených v registroch R_2 a R_3. Postupne budeme od oboch registrov odpočítavať jednotku, až kým sa nám jeden z registrov nevynuluje. Ak sa prvý vynuluje register R_2 (alebo sa vynulujú oba registre naraz), znamená to, že $y \leq F(x)$. Keďže sme hodnoty x skúšali od najmenšieho, je to najmenšie x s touto vlastnosťou. Hodnota x je prezieravo uložená v registri R_0, takže môžeme skončiť. Ak sa naopak prvý vynuluje register R_3, znamená to, že $F(x) < y$ a preto musíme pokračovať v cykle. Vynulujeme register R_2 a vrátime sa na začiatok.

Časť b)



Činnosť stroja je založená na jednoduchej myšlienke: vstupné číslo n si skopírujeme do pomocného registra, vypočítame číslo, ktoré vznikne obrátením binárneho zápisu n (označme ho n_2^R). Potom porovnáme obe tieto čísla. Ak sú rovnaké, odpoveď stroja bude 1, v opačnom prípade bude odpoveď 0.

Poďme sa na činnosť stroja pozrieť trochu bližšie. Najprv obsah registra R_1, obsahujúceho vstupné číslo n, prekopírujeme za pomoci registra R_4 do registra R_5. Potom budeme v cykle v registri R_3 vyrábať číslo, ktoré vznikne otočením binárneho zápisu čísla n. Nech $n = 2^k b_k + 2^{k-1} b_{k-1} + \ldots + 2^0 b_0$ je binárny zápis čísla n. Po i prechodoch cyklu ($0 \leq i \leq k+1$) bude platiť:

$$\begin{aligned} R_1 &= 2^{k-i} b_k + 2^{k-i-1} b_{k-1} + \ldots + 2^0 b_i \\ R_3 &= 2^{i-1} b_0 + 2^{i-1} b_1 + \ldots + 2^0 b_{i-1} \end{aligned}$$

Na začiatku teda $R_1 = n$, $R_3 = 0$. V jednom prechode cyklom najprv vynásobíme obsah R_3 dvomi, potom vydelíme obsah R_1 dvomi. Obe tieto operácie sa dajú realizovať s jedným pomocným registrom tak, že na každé zníženie obsahu R_3 dvakrát zvýšime obsah pomocného registra, resp. na každé dve zníženia R_1 raz zvýšime obsah pomocného registra. Potom stačí len presypať obsah pomocného registra naspäť do R_3, resp. R_1. Ak nám pri delení vznikne zvyšok, vieme, že posledná cifra zápisu R_1 bola 1, a preto nastavíme poslednú cifru aj číslu v registri R_3 (t.j. pripočítame k R_3 jednotku).

Keď je v registri R_1 nula, zrejme platí $i > k$ a teda v R_3 je číslo n_2^R. Posledná vec, ktorú treba urobiť, je porovnať obsah registrov R_3 a R_5. Budeme postupne znižovať obsah oboch registrov o 1, až kým sa jeden z nich nebude nulový. V prípade, že je aj druhý nulový, zvýšime obsah registra R_0 (lebo n je palindróm). V opačnom prípade zanecháme v registri R_0 nulu a skončíme.

P – III – 1

Vytvoríme graf G, ktorého vrcholy sú križovatky a medzi vrcholmi i a j vedie hrana práve vtedy, ak sú križovatky i a j spojené cestou. Hranu, ktorej odobratie spôsobí rozpadnutie grafu na dve časti (komponenty súvislosti), nazývame *most*. Ukážeme, že mosty sú práve tie hrany, ktoré musia zostať obojsmerné. Zrejme hranu e z vrchola u do v, ktorá je mostom, nemôžeme orientovať (ak sme ju zorientovali povedzme z u do v, nedalo by sa dostať z v do u, pretože e je most). Z algoritmu vyplynie, že všetky ostatné hrany môžu byť „zjednosmernené“.

Algoritmus je založený na myšlienke prehľadávania grafu do hĺbky. Prehľadávanie do hĺbky je rekurzívna procedúra s jediným parametrom — vrcholom v. Tento vrchol označíme za už prehľadaný a rekurzívne voláme tú istú procedúru pre všetkých ešte neprehľadaných susedov vrchola v. Volajme týchto susedov *potomkami* vrchola v. Nazvime *hlavnou* každú hranu, ktorá vedie z predka do niektorého z jeho potomkov, a hrany, ktoré nie sú hlavné, volajme *spätné*.

Pre naše účely priradíme naviac pri prehľadávaní každému vrcholu v poradové číslo c_v označujúce, koľký v celkovom poradí bol vrchol v prvýkrát objavený. Zároveň každú ešte neorientovanú (obojsmernú) hranu orientujeme („zjednosmerníme“) smerom od vrchola v. Orientáciu už orientovaných hrán nemeníme.

Ukážeme, ako sa dá tento algoritmus použiť na nájdenie mostov v grafe. Aby sme zistili, či je hrana z u do v most, potrebujeme overiť, či sa dá dostať z v do u po hranách rôznych od hrany (u, v). Ak sa dá, hrana (u, v) mostom byť nemôže. Naopak, ak sa nedá, hrana (u, v) je most. Keďže každý most je hlavnou hranou, predpokladajme, že v je potomok u, teda prehľadávacia procedúra pre v bola spustená v prehľadávacej procedúre pre u. Nech w je vrchol s najmenším číslom c_w taký, do ktorého sa dá dostať z vrchola v po orientovaných hranách.

Ak je hrana (u, v) most, pre každý vrchol w' objavený volaním prehľadávacej procedúry z v platí $c_{w'} \geq c_v$. Zároveň žiaden z vrcholov, do ktorých sa vieme prehľadávaním z v dostať (nepoužívame hlavné, t.j. už orientované, hrany) nemohol byť v okamihu volania procedúry pre v objavený. Teda $c_w \geq c_v$.

Naopak, predpokladajme, že $c_v \leq c_w$. Označme P množinu prehľadaných vrcholov tesne pred spustením procedúry pre v a Q množinu vrcholov, ktoré objavíme touto procedúrou. Okrem hrany (u, v) nemôže viesť žiadna hlavná hrana z vrcholu z P do vrcholu z Q, ani naopak. (Ak by viedla z P do Q, vrchol v Q by bol už prehľadaný pred volaním procedúry, čo je spor. Ak by viedla z Q do P, táto hrana by nemohla byť hlavná, pretože vedie do už objaveného vrcholu — opäť spor.) Ak $c_v \leq c_w$, neexistuje žiadna spätná hrana z Q do P (inak by platilo $c_v > c_w$), a teda neexistuje žiadna hrana medzi P a Q okrem (u, v). Z toho vyplýva, že hrana (u, v) je most.

Zostáva nám ukázať, že hrany, ktoré nie sú mostami, sú orientované vhodne, t.j. že je možné prejsť z každého vrcholu do ľubovoľného iného vrcholu dodržujúc orientáciu hrán. Predpokladajme, že graf G nemá mosty. Nech u a v sú také vrcholy, že $c_u = 1$ a $c_v = 2$. Z predošlého vieme, že pre hlavnú hranu (u, v), ktorá nie je mostom, platí $c_v > c_w$, teda $c_w = 1$. Teda existuje orientovaný cyklus (postupnosť vrcholov $v_1, \ldots, v_k$ taká, že $v_1 = v_k$ a pre každé $i = 1, \ldots, k-1$ vedie z vrcholu v_i do v_{i+1} orientovaná hrana) prechádzajúci vrcholmi u, v. Označme S množinu vrcholov z cyklu. Pre množinu S platí, že sa vieme z každého do každého z jej vrcholov dostať po orientovaných hranách. Ak S obsahuje všetky vrcholy, ukázali sme, že orientácia grafu vyhovuje. V opačnom prípade nech x je vrchol mimo S taký, že existuje vrchol y v S, že z y vedie do x orientovaná hrana. Z x sa dá dostať po orientovaných hranách do niektorého vrcholu z S, pretože inak by bola hrana (y, x) most. Takže sa dá dostať aj z x do u, aj z u do x, a teda ak vrchol x pridáme do S, zostane zachovaná vlastnosť, že z každého do každého vrcholu v S sa dá dostať. Induktívne môžme pridať do S všetky vrcholy, z čoho vyplýva, že navrhnutá orientácia G je vhodná.

Analogickú argumentáciu možno použiť aj keď sa v grafe G mosty nachádzajú. Nech G_1 je (neorientovaný) graf, ktorý vznikne z G po odobraní všetkých mostov. Označme $C_1, \ldots, C_l$ komponenty súvislosti G_1 (z každého vrcholu v C_i sa dá dostať do každého vrcholu z C_i po hranách z G_1, pre $i = 1, \ldots, l$). Existuje aspoň jeden komponent C_i, do ktorého viedol jediný most. (Ak si zostrojíme graf, v ktorom každému komponentu zodpovedá jeden vrchol a dva vrcholy sú spojené hranou práve vtedy, keď medzi zodpovedajúcimi komponentami v G vedie most, tento graf je súvislý a neobsahuje kružnice, musí to byť teda strom. Každý strom má aspoň jeden list.) Pre tento komponent možno použiť argumenty z predchádzajúceho odstavca, C_i z grafu vynechať a induktívne pokračovať v dôkaze pre ostatné C_j.

Implementácia. Pre každý vrchol `v` je v poli `kriz` uložený zoznam jeho susedných vrcholov. Teda každá hrana je v tomto poli uložená dvojnásobne a tieto dve kópie na seba navzájom ukazujú pomocou smerníkov `dual`. Atribút `aktiv` hovorí, či sa dá v tom smere po danej hrane prechádzať (využíva sa pri orientovaní, keď povoľujeme len jeden z dvoch možných smerov hrany). Pole `sus[v]` uchováva počet susedov vrchola `v`, pole `c[v]` obsahuje c_v a v poli `naj[v]` je uložené číslo c_w. Najskôr pomocou procedúry `prehladaj` podľa vyššieuvedeného algoritmu orientujeme všetky hrany grafu, pričom mosty úplne vymažeme (obidvom hranám nastavíme `aktiv` na `false`). Potom vypíšeme všetky aktívne hrany.

Časová a pamäťová zložitosť. Pamäťová zložitosť algoritmu je $O(M + N) = O(M)$. Časová zložitosť je zhodná so zložitosťou prehľadávania do hĺbky, teda tiež $O(M)$ (po každej hrane prejdeme práve raz).

P – III – 2

Úlohu budeme riešiť analogicky ako v krajskom kole – v prvom prechode nájdeme kandidátov a v druhom overíme pre každého z nich, či sa nachádza v poli a viac ako $\frac{N}{k}$ krát.

Kandidátov je zjavne najviac $k-1$. Budeme ich hľadať nasledovne: pre každý prvok p, ktorý sa v poli a aspoň raz vyskytuje, si budeme počítať jeho *silu* s_p. Na začiatku položme silu všetkých prvkov rovnú 0. Silu prvkov budeme meniť takým spôsobom, aby v každom okamihu bola nenulová pre nanajvýš $k-1$ prvkov. Tieto prvky nazvime kandidátmi a označme ich $K_1, \ldots, K_{k-1}$.

Pri spracovávaní prvku $a[i]$ môžu nastať tieto situácie:

1. $\exists j; K_j = a[i]$, t.j. ďalší spracovávaný hlas patrí niektorému kandidátovi. Zvýšime s_{K_j} o 1.

2. $\forall j; K_j \neq a[i]$, $\forall u; s_{K_u} > 0$, spracovávaný hlas nepatrí žiadnemu kandidátovi, preto znížime každému kandidátovi silu o 1.

3. $\forall j; K_j \neq a[i]$, $\exists u; s_{K_u} = 0$. Zvýšime silu $s_{a[i]}$ prvku $a[i]$ o 1. Preto sa prvok $a[i]$ stane novým kandidátom K_u.

Tento postup opakujeme, kým nespracujeme všetky prvky poľa.

Je zrejmé, že si netreba pamätať silu všetkých prvkov, stačí si pamätať sily $k-1$ kandidátov a to, ktoré prvky sú kandidátmi. Na to nám stačia dve polia veľkosti $O(k)$.

Lema: Nech sa nejaký prvok P vyskytuje v poli a M krát, kde $M > \frac{N}{k}$. Potom po spracovaní všetkých prvkov poľa bude P kandidátom so silou $s_P > 0$.

Dôkaz: Nazvime operácie 1 a 3 zvýšením a operáciu 2 znížením. Dokážme najskôr, že znížení je najviac $\frac{N}{k}$. Sporom. Všimnime si, že sila každého prvku je nezáporné celé číslo, teda súčet síl všetkých prvkov je na konci určite nezáporný. Ak by bolo znížení viac ako $\frac{N}{k}$, (t.j. aspoň $\lfloor\frac{N}{k}\rfloor+1$) znamenalo by to, že sa celkový súčet síl znížil aspoň o $\left(\lfloor\frac{N}{k}\rfloor+1\right)\cdot$ $\cdot(k-1)$, zatiaľ čo sa zvýšil najviac o $N-\left(\lfloor\frac{N}{k}\rfloor+1\right)$. To ale znamená, že súčet síl prvkov na konci je

$$S \leq N - \left(\left\lfloor\frac{N}{k}\right\rfloor+1\right) - \left(\left\lfloor\frac{N}{k}\right\rfloor+1\right)\cdot(k-1) = N - k\cdot\left(\left\lfloor\frac{N}{k}\right\rfloor+1\right) < 0$$

čo je spor, preto je naozaj znížení najviac $\frac{N}{k}$.

Všimnime si teraz prvok P. Nech jeho výskyt A-krát spôsobil zníženie, B-krát zvýšenie. Opäť sporom. Ukážeme, že $s_P > 0$. Ak by mal prvok P na konci silu 0, znamenalo by to, že bolo aspoň $A+B$ znížení – A-krát ho spôsobil prvok P, B iných znížení muselo prvku P znížiť silu na 0. Počet znížení je teda aspoň $A+B=M>\frac{N}{k}$, čo je spor s vyššie dokázaným tvrdením, že zvýšení je najviac $\frac{N}{k}$. Preto má prvok P na konci nenulovú silu. To je možné len tak, že bude na konci kandidátom. □

Časová a pamäťová zložitosť. Algoritmus vyžaduje dva prechody poľom, každý z nich je v čase $O(k.N)$. Pamäťová zložitosť je $O(k)$.

P – III – 3

Stroj riešiaci túto úlohu je už pomerne zložitý a veľmi ťažko by sa kreslil naraz, bez toho, aby sme ho rozložili na menšie celky. Predtým, ako ho budeme konštruovať, si povedzme, ako by sa takýto problém riešil na normálnom počítači.

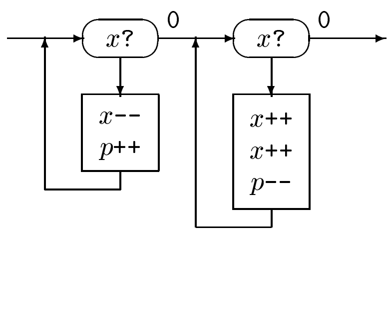
Prvé riešenie. Jeden z prístupov by bol backtrackom skúšať všetky možné podmnožiny množiny M, pre každú vypočítať súčet a overiť, či sa nerovná danému číslu s. Skončili by sme, ak by sme našli podmnožinu s vyhovujúcim súčtom, alebo keby sme vyskúšali všetky podmnožiny množiny M. Klasické backtrackové riešenie však používa zásobník, ktorý by sme pomocou registrového stroja simulovali len s veľkou námahou. Pekný trik, ako vyskúšať všetky podmnožiny množiny M je takýto: Množina M má kód m. Postupne budeme skúšať všetky také množiny N, ktorých kód n je menší alebo rovný m. Pre každú takúto množinu vypočítame kód prieniku $M \cap N$, čo je vlastne logický súčin (`AND`) po bitoch čísel m a n. Niektoré podmnožiny síce vygenerujeme viackrát, ale to vôbec nevadí. Pre každý prienik (t.j. pre jeho kód m `AND` n) potom spočítame súčet jeho prvkov a skontrolujeme, či sa náhodou nerovná hľadanému súčtu s.

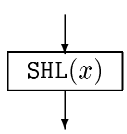
Blok pre bitový logický súčin skonštruujeme podobne ako blok pre logický súčet (`OR`, viď. ďalej). Na výpočet súčtu prvkov v množine môžeme použiť blok `SHR`(x), ktorý zisťuje hodnotu najnižšieho bitu čísla v registri x a zároveň register x celočíselne vydelí dvomi (viď. ďalej) a blok `ADD`(x, y), definovaný v príklade zo zadania.

Druhé riešenie. Ako vzorové uvádzame iné riešenie, ktoré využíva myšlienku dynamického programovania. Postupne budeme budovať množiny súčtov, ktoré sa dajú vytvoriť len z k najmenších prvkov množiny M. Označme tieto množiny $S_0, S_1, \ldots, S_k$ a ich kódy $s_1, s_2, \ldots, s_k$. Jediné číslo, ktoré sa dá utvoriť súčtom nula prvkov, je číslo 0. Preto $S_0 = \{0\}$ a $s_0 = 1$. Predstavme si, že už máme vytvorenú množinu S_i a nech $(i+1)$-vý najmenší prvok v množine M je p. Ku každému prvku z množiny S_i pripočítame číslo p. Dostaneme tak množinu S'_i, $S'_i = \{c + p \mid c \in S_i\}$. Keďže každý súčet z prvých $i+1$ prvkov sa dá dosiahnuť buď s použitím alebo bez použitia prvku p, množina S_{i+1} dostaneme zjednotením množín S_i a S'_i. Kód s'_i množiny S'_i dostaneme veľmi jednoducho: $s'_i = s_i 2^p$. Zjednotenie množín zase dosiahneme bitovým logickým súčtom ich kódov, t.j. $s_{i+1} = s_i$ `OR` s'_i. Pred tým, ako do detailov rozoberieme činnosť nášho stroja, si definujeme a popíšeme niekoľko blokov.

Všetky popisované bloky pre správnu činnosť predpokladajú, že všetky použité pomocné registre sú pred vstupom do bloku vynulované. Pred výstupom z bloku sa tieto registre opäť vynulujú.

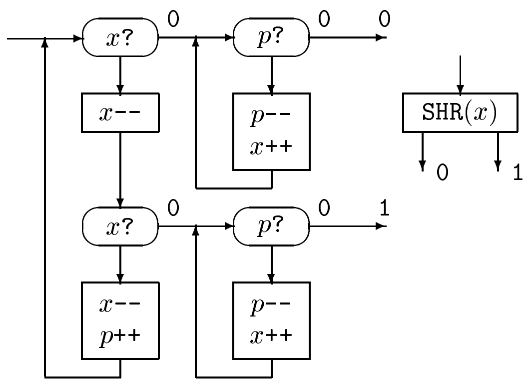
Popis blokov.





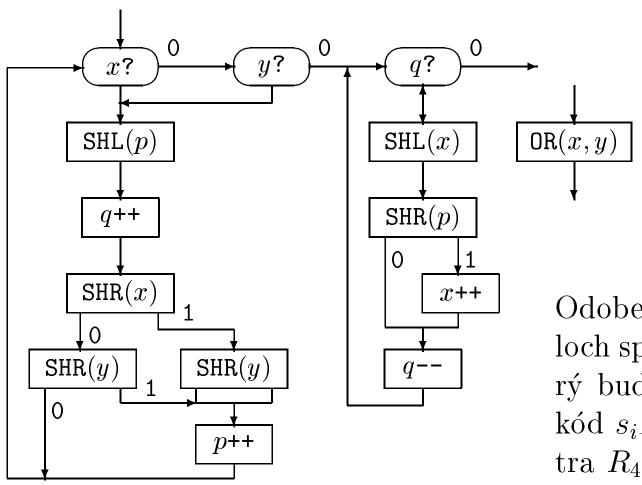
Blok `ADD`(x, y) bol popísaný a definovaný v zadaniach.

Blok `SHL`(x) vynásobí číslo v registri x dvomi. Potrebuje jeden pomocný register p, do ktorého "presype" obsah registra x, potom obsah p presýpa do x, pričom za každé zníženie registra p dvakrát zvýši obsah registra x.



Blok SHR(x) celočíselne delí číslo v registri x dvomi. Má dva výstupy označené 0 a 1, pričom výstup 0 sa použije, ak bolo číslo v registri x pri vstupe do bloku párne a výstup 1, ak bolo nepárne. Pracuje podobne ako blok SHL s tým, že najprv za každé dve zníženia registra x raz zvýšime pomocný register a potom presýpame obsah pomocného registra naspäť do x.

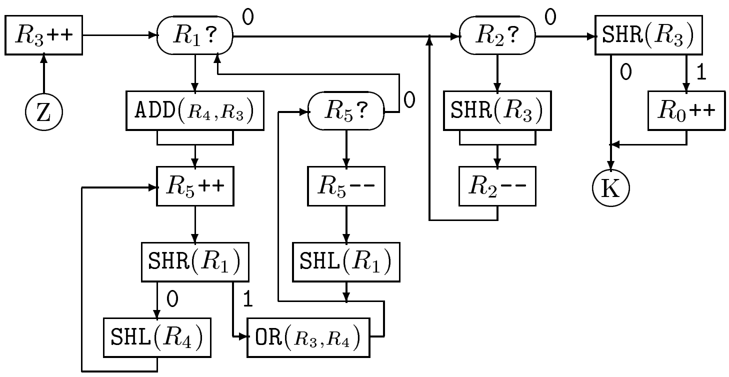
Blok OR(x, y) je najzložitejší. Jeho funkciou je priradiť do registra x bitový OR čísel uložených v registroch x a y a zároveň vynulovať register y. Budeme to robiť podobne ako vo vzorovom riešení krajského kola. Pomocou blokov SHR odoberieme posledný bit zo zápisu oboch čísel x,y. Ak je aspoň jeden z odobratých bitov jednotkový, pridáme na koniec zápisu čísla v pomocnom registri p jednotku (t.j. p vynásobíme dvomi pomocou bloku SHL a potom k nemu pripočítame jednotku), v opačnom prípade pridáme na koniec p nulu (t.j. vynásobíme ho dvomi). Takto sa nám bude v registri p postupne objavovať bitový súčet čísel x a y, avšak s bitmi zapísanými v obrátenom poradí. Na koniec teda musíme obsah registra p otočený zapísať do registra x, čo spravíme opäť odoberaním posledného bitu zápisu p a jeho pridávaním na koniec zápisu x. Aby sme vedeli, koľkokrát máme túto operáciu spraviť, počítame si počet platných bitov registra p v pomocnom registri q.



Nakoniec nám zostáva popísať samotný stroj. Skladá sa z dvoch hlavných cyklov. V prvom cykle sa v registri R_3 postupne počítajú kódy množín S_i, po skončení i-teho cyklu R_3 obsahuje kód s_i. Zároveň sa v každom prechode odoberie z množiny M jej najmenší prvok.
Odoberanie prvku sa robí v dvoch menších cykloch spolu s výpočtom kódu množiny S'_{i-1}, ktorý bude uložený v registri R_4. Na začiatku si kód s_{i-1} skopírujeme z registra R_3 aj do registra R_4. V prvom cykle postupne delíme obsah registra R_1 (t.j. kód množiny M) dvomi a obsah registra R_4 naopak násobíme dvomi, pričom si počítame počet prechodov cyklu v registri R_5. Keď sa nám nepodarí vydeliť obsah R_1 dvomi bezo zvyšku, narazili sme na najmenší prvok. V tomto okamihu máme v R_4 kód S'_{i-1}, ktorý pomocou bloku OR pridáme k obsahu R_3, čím nám v tomto registri vznikne kód množiny S_i. Na záver v druhom cykle po sebe upraceme, t.j. vynásobíme obsah R_1 takou mocninou dvojky, akou sme ho v prvom cykle vydelili. Všimnite si, že týmto postupom sa nám automaticky vynuloval najnižší nenulový bit registra R_1, t.j. odobrali sme najmenší prvok množiny M.

Keď z M odoberieme posledný prvok, jej kód uložený v registri R_1 sa vynuluje a riadenie prejde do druhého hlavného cyklu. V tomto cykle overíme, či číslo s uložené v registri

R_2, patrí do množiny, ktorej kód je uložený v registri R_3. Hodnotu R_3 stačí s krát vydeliť dvomi a potom zistiť, či posledný bit registra je 1.



P – III – 4

Smerovník pri prameni číslo i nech ukazuje na prameň číslo $s[i]$, pre $1 \leq i \leq N$. Hovoríme, že pramene $p_1, p_2, \ldots, p_k$ tvoria *cyklus*, ak od prameňa p_1 ukazuje smerovník k prameňu p_2, od p_2 k p_3 a tak ďalej, až od prameňa p_k k prameňu p_1.

Ak vyštartujeme z ľubovoľného prameňa p_1 a sledujúc smerovníky prechádzame postupne pramene $p_2, p_3, \ldots$, po najviac N krokoch sa nám stane, že prídeme k prameňu p_{k+1}, pri ktorom sme už boli, t.j. $p_{k+1} = p_j$ pre nejaké $j \leq k$. Keďže smerovník ukazujúci na prameň j bol vyrobený iba jeden, musí byť buď $p_k = p_{j-1}$, alebo $j = 1$. Ak je k najmenšie také, že $p_{k+1} = p_j$, $j \leq k$, potom $j = 1$, a teda pramene $p_1, \ldots, p_k$ tvoria cyklus. Takýmto spôsobom vieme pre každý prameň určiť cyklus, do ktorého patrí.

Vzorový program využíva fakt, že ak vymeníme smerovníky pri dvoch prameňoch, ktoré patria do rovnakého cyklu, tento cyklus sa nám rozdelí na dva, t.j. počet cyklov sa zvýši o 1. Ak naopak vymeníme smerovníky pri prameňoch z rôznych cyklov, tieto dva cykly sa spoja do jedného.

Označíme si pramene, ktoré patria do toho istého cyklu ako prameň 1. Postupne budeme hľadať ďalšie cykly, ktoré budeme pripájať k cyklu obsahujúcemu prameň 1. Vždy, keď nájdeme nový cyklus, označíme si všetky pramene, ktoré doňho patria a zároveň spravíme výmenu smerovníkov, ktorou sa tento cyklus pripojí k cyklu obsahujúcemu prvý prameň. Všimnime si, že novovzniknutý cyklus obsahuje práve doposiaľ označené pramene. Ďalší cyklus potom hľadáme medzi neoznačenými prameňmi.

Implementácia. Na označovanie prameňov používame pole s. Prameň j považujeme za označený, ak $s[j] \leq 0$. Nový cyklus začíname hľadať od takého neoznačeného prameňa i, že všetky pramene s číslom menším ako i sú označené. Prameň i ako reprezentanta nového cyklu označíme $s[i] = -1$, ostatné pramene cyklu označíme nulou. Keď pri prechádzaní cyklom opäť natrafíme na prameň i, cyklus sme uzatvorili. Rovnakým postupom hľadáme ďalší cyklus, pričom vieme, že každý prameň na tomto cykle má číslo väčšie ako i.

Na záver vymeníme jeden smerovník z každého cyklu so smerovníkom pri niektorom prameni z cyklu obsahujúceho prameň 1, t.j. postupne vymieňame smerovník pri prameni

1 so smerovníkmi pri prameňoch označených -1 (reprezentanti cyklov). Potrebný počet výmen je o jednotku menší ako počet cyklov.

Časová a pamäťová zložitosť. Pamäťová zložitosť je zrejme $O(N)$. Časová zložitosť algoritmu je tiež $O(N)$, pretože s každým prvkom poľa s pracujeme maximálne trikrát (dvakrát pri hľadaní cyklov a na záver robíme ešte jeden prechod poľom s).

P – III – 5

Úlohu zo zadania si trochu zjednodušme a venujme sa len podstate úlohy. Je jasné, že ak sa z akéhokoľvek dôvodu budeme presúvať medzi dvoma mestami, tak optimálne bude, ak sa medzi nimi budeme presúvať najkratšou možnou cestou. Nech teda $h_{i,j}$ $(1 \leq i, j \leq N)$ označuje dĺžku najkratšej cesty medzi mestom i a mestom j. Riešenie podúlohy, ako zistiť dĺžky najkratších ciest, je uvedené o pár odstavcov nižšie.

Takto zredukovanú úlohu budeme riešiť metódou dynamického programovania. Označme $E_{i,j}$ $(1 \leq i \leq N,\ 0 \leq j \leq K)$ **dĺžku** najkratšej trasy končiacej v deň j v meste i, takej, že sme videli filmy $p_1, p_2, \ldots, p_j$ a pritom sme posledný film p_j videli v meste i. Ak hodnota $E_{i,j}$ neexistuje (t.j. neexistuje trasa popísaných vlastností), položíme $E_{i,j} = \infty$.

Hodnoty $E_{i,j}$ budeme postupne počítať z iných skôr vypočítaných hodnôt $E_{i,j}$ a z hodnôt $h_{i,j}$. Začneme zrejme takto: $E_{1,0} = 0$ a $E_{i,0} = \infty$ $(2 \leq i \leq N)$.

Počítajme hodnotu $E_{i,j}$ pre $1 \leq j \leq N$. Máme dve možnosti: V meste i nehrajú film p_j. Trasa požadovaných vlastností končiaca v meste i neexistuje, preto $E_{i,j} = \infty$.

Druhá možnosť je, že film p_j v meste i hrajú. Rozoberme túto možnosť. Na to, aby sme videli filmy $p_1, p_2, \ldots, p_j$ sme museli vidieť filmy $p_1, p_2, \ldots, p_{j-1}$. Film p_{j-1} sme mohli vidieť v nejakom meste s. Do mesta s sme sa pritom zrejme dostali najkratšou trasou, končiacou v tomto meste. Dĺžka tejto trasy je $E_{s,j-1}$. Z mesta s do mesta i sme takisto museli ísť najkratšou cestou. Teda dĺžka takejto trasy bude $E_{s,j-1} + h_{s,i}$. Prostým vyskúšaním všetkých možných miest s dostaneme dĺžku najkrašej cesty $E_{i,j}$.

$$E_{i,j} = \min\ \{E_{s,j-1} + h_{s,i} \mid 1 \leq s \leq N\}$$

Najkratšia trasa, potrebná na zhliadnutie všetkých K filmov, končí v nejakom meste i. Stačí nám teda vybrať z dĺžok trás, ktoré končia v jednotlivých mestách, tú najmenšiu. Pre dĺžku optimálnej trasy E teda platí

$$E := \min\{E_{i,K} | 1 \leq i \leq N\}$$

Ostáva nám ešte zistiť, cez ktoré mestá vlastne optimálna trasa vedie. Označme $D_{i,j}$ mesto, z ktorého sme prišli v deň j do mesta i, ak by sme išli po optimálnej trase končiacej v meste i v deň j. Hodnotu $D_{i,j}$ budeme počítať súbežne s hodnotou $E_{i,j}$. $D_{i,j}$ bude vlastne to mesto s, pre ktoré bude $E_{s,j-1} + h_{s,i}$ minimálne.

Mesto, v ktorom končí hľadaná optimálna trasa (t.j. také, pre ktoré je $E_{i,K}$ minimálne), označme x_K. Potom predchádzajúce mesto na optimálnej trase bude $x_{K-1} = D_{x_K,K}$. Vo všeobecnosti mesto na optimálnej trase, z ktorého sme prišli do mesta x_i bude mesto $x_{i-1} = D_{x_i,i}$.

Nakoniec venujme pár slov otázke, ako vzdialenosti $h_{i,j}$ $(1 \leq i, j \leq N)$ medzi jednotlivými mestami počítať. Použijeme štandardný Floyd-Warshallov algoritmus. Vstupom tohto algoritmu je matica $h_{i,j}$ $(1 \leq i, j \leq N)$, obsahujúca dĺžky ciest, spájajúcich jednotlivé dvojice miest (pre cestu vedúcu medzi mestami i a j s dĺžkou l položíme $h_{i,j} = h_{j,i} = l$, ak medzi i a j nevedie žiadna cesta, položíme $h_{i,j} = h_{j,i} = \infty$). Výstupom algoritmu je matica h, v ktorej $h_{i,j}$ je minimálna vzdialenosť, ktorú musíme precestovať, aby sme sa dostali z mesta i do mesta j.

Algoritmus bude pracovať v N cykloch. Po vykonaní k-teho cyklu $(0 \leq k \leq N)$ bude platiť, že $h_{i,j}$ je dĺžka najkratšej trasy z mesta i do mesta j, ktorá prechádza len cez mestá s číslom menším alebo rovným k. Na začiatku (t.j. po vykonaní 0 cyklov) je v $h_{i,j}$ uložená dĺžka priamej trasy bez prechádzania cez iné vrcholy. Pri vykonávaní k-teho cyklu, dĺžka trasy $h_{i,j}$ môže byť buď rovnaká ako v predchádzajúcom cykle (ak nevyužijeme možnosť viesť trasu z mesta i do mesta j cez mesto k), alebo rovná $h_{i,k} + h_{k,j}$ (ak trasu z i do j vedieme cez mesto k). Vždy si samozrejme vyberieme kratšiu možnosť.

Implementácia. Dĺžky ciest načítavame priamo do poľa, v ktorom aj počítame vzdialenosti medzi mestami F-W algoritmom. Na výpočet si nepotrebujeme pamätať všetky hodnoty $E_{i,j}$, stačí si pamätať iba dva stĺpce pre j a $j+1$. Ak však chceme zrekonštruovať optimálnu trasu, potrebujeme si pamätať všetky hodnoty $D_{i,j}$.

Časová a pamäťová zložitosť. Časová zložitosť celého algoritmu bude $O(N^3 + KN^2)$, z toho $O(N^3)$ je Floyd-Warshallov algoritmus. Pamäťová zložitosť bude $O(N^2 + KN)$, kde $O(N^2)$ pamäte zaberá matica h a $O(NK)$ zaberajú matice E a D.

Poznámka. Existuje algoritmus, ktorý nepotrebuje úvodné predvypočítanie vzdialeností F-W algoritmom a ktorý na výpočet každého stĺpca matice E používa modifikáciu Dijkstrovho algoritmu. Tento algoritmus má časovú zložitosť $O(K(M \log N))$, resp. $O(KN^2)$ (podľa implementácie Dijkstrovho algoritmu) a pamäťovú zložitosť $O(M + NK)$.

7. Stredoeurópska informatická olympiáda

Siedma Stredoeurópska olympiáda v programovaní (Central European Olympiad in Informatics – CEOI) sa uskutočnila v dňoch 24. – 31. augusta 2000 v rumunskom meste Cluj-Napoca, kde sa pred šiestimi rokmi uskutočnila aj prvá CEOI. CEOI je súťažou stredoškolákov prevažne zo stredoeurópskych krajín. Každá zúčastnená krajina má právo vyslať štyroch súťažiacich, vedúceho výpravy a jeho zástupcu. Na CEOI sa každoročne zúčastňujú družstvá zakladajúcich krajín – Českej Republiky, Chorvátska, Maďarska, Poľska, Rumunska, Slovenskej Republiky a Slovinska. Tento rok organizátori navyše pozvali tímy z USA, Holandska, Moldavska a zúčastnil sa aj tím Nemecka, ktoré bolo tohto roku prijaté ako regulárny člen CEOI.

Družstvo Slovenska sa zúčastnilo v zložení Ján Oravec (gym. J.G. Tajovského, B. Bystrica), Marián Dvorský (gym. Košice, Šrobárova), Tomáš Záthurecký (gym. V. Paulínyho–Tótha, Martin) a Jozef Tvarožek (gym. J. Hronca, Bratislava) pod vedením Michala Forišeka a Richarda Kraľoviča (Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK).

S výnimkou Jána Oravca sa ešte žiadny zo študentov vyslaných na CEOI dovtedy nezúčastnil na žiadnej podobnej medzinárodnej súťaži, takže hlavným účelom CEOI bolo, aby nazbierali skúsenosti pred dôležitejšími súťažami v budúcnosti. Napriek tomu naši študenti dosiahli tradične dobrý výsledok a k ešte lepšiemu umiestneniu im chýbala snáď len tá povestná štipka šťastia – Tomášovi Záthureckému 7 bodov na medailu, Jozefovi Tvarožkovi 10 na striebro.

meno	body	
Ján Oravec	362	striebro
Marián Dvorský	356	striebro
Jozef Tvarožek	235	bronz
Tomáš Záthurecký	173	–

Celkové výsledky nás v neoficiálnom poradí krajín radia spolu s USA na tretie miesto za domácim Rumunskom a tradične výborným Poľskom. Všetci štyria naši zúčastnení študenti majú pred sebou ešte rok štúdia na strednej škole, a teda šancu na ešte lepší výsledok budúci rok.

Michal Forišek

Zadania úloh 7. Stredoeurópskej informatickej olympiády

Planéta X

Všetci obyvatelia planéty X stavajú svoje domy v trojuholníkovom tvare. Aby si ušetrili čas a námahu, používajú špeciálnu metódu ich konštrukcie. Celá stavba začne jednou rovnou stenou. Potom pri konštrukcii každého domu len pridajú dve nové steny k jednej už existujúcej, čím dostanú uzavretý trojuholníkový dom. Samozrejme, nové steny môžu byť neskôr tiež použité ako počiatočné steny pre nové domy. Niekedy, keď používajú tento postup, sa dostanú do situácie, že niektoré domy ležia vnútri iných (ako na obrázku). Táto situácia ale vôbec nevadí, lebo vo vnútorných domoch môžu žiť ich deti.

Aby si osvetlili domy, obyvatelia nainštalovali na každom rohu výslednej konštrukcie práve jednu žiarovku (táto žiarovka je spoločná pre všetky domy, ktoré tento roh obsahujú). Okrem toho je na každom rohu tlačítko. Keď sa stlačí tlačítko v niektorom rohu, prepne sa žiarovka v tomto rohu a všetky žiarovky v susedných rohoch. Dva rohy sú susedné, ak ležia na koncoch jednej steny. (Prepnutie znamená, že ak doteraz svietila, odteraz nesvieti a naopak.)

Súťažná úloha

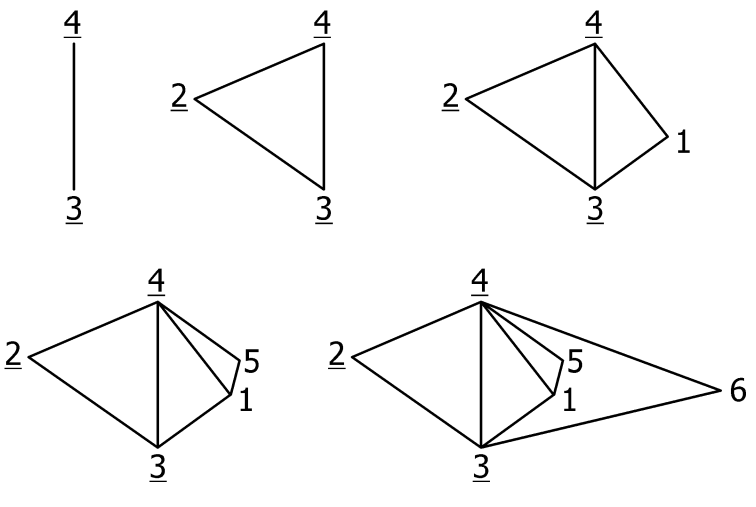
Napíšte program, ktorý nájde postupnosť stlačení tlačítiek, po stlačení ktorej budú všetky žiarovky rozsvietené, pričom sa začína z nejakého daného stavu žiaroviek.

Vstup: Prvý riadok vstupného súboru obsahuje jediné celé číslo N ($3 \leq N \leq 1000$) – počet rohov budovy. Tieto sú očíslované od 1 po N. Na každom z ďalších $2N-3$ riadkov sú dve celé čísla I, J, ktoré znamenajú, že medzi rohmi I a J vedie stena. Posledný $(2N-1)$. riadok obsahuje N celých čísel oddelených medzerami. Tieto celé čísla sú 0 a 1 a zodpovedajú počiatočnému stavu žiaroviek – i-te z nich je stav žiarovky v rohu číslo i a je to 0, ak žiarovka nesvieti a 1, ak svieti.

Vstupné údaje zaručene reprezentujú budovu, ktorá bola postavená podľa týchto pravidiel.

Výstup: Pokiaľ riešenie neexistuje, na prvom a jedinom riadku výstupného súboru má byť číslo 0. Pokiaľ riešenie existuje, má na prvom a jedinom riadku byť K celých čísel, oddelených medzerami – čísla rohov, na ktorých treba stlačiť tlačítko. Ak je riešení viac, môžete vypísať ľubovoľné z nich.

Na obrázku vidíte možnú postupnosť krokov výstavby ukážkového vstupu. Čísla rohov so žiarovkami, ktoré na začiatku svietia, sú podčiarknuté.



Príklad

Súbor `X.IN`

```
6
1 3
1 4
1 5
2 3
2 4
3 4
3 6
4 5
4 6
0 1 1 1 0 0
```

Súbor `X.OUT`

```
1 6
```

Cesty

Rumunské ministerstvo dopravy sa konečne rozhodlo opraviť rumunské cesty. Každá cesta je obojsmerná a spája dve mestá. Žiadne dve mestá nie sú spojené viac ako jednou cestou. Po existujúcej cestnej sieti sa dá dostať z ľubovoľného do ľubovoľného iného mesta.

Lenže ono to nie je také ľahké. Oprava cestnej siete znamená, že postupne je vždy jedna cesta uzavretá, opravená a znovu otvorená, potom sa začne s opravou ďalšej, atď. Je ale nutné, aby počas uzavretia ľubovoľnej z ciest bola cestná sieť stále spojitá. Aby tomu tak bolo, minister sa rozhodol, že najskôr budú postavené nové cesty. A to tak, aby bez ohľadu na to, ktorá cesta bude práve uzavretá (vždy naraz len jedna), bola cestná sieť spojitá. Samozrejme, počet postavených ciest by mal byť najmenší možný. Navyše žiadna nová cesta nesmie spájať dve mestá, ktoré už predtým boli nejakou cestou spojené.

Súťažná úloha

Napíšte program, ktorý nájde minimálny počet ciest, ktoré treba postaviť a ktoré dvojice miest majú spájať.

Vstup: Prvý riadok vstupného súboru obsahuje dve celé čísla N, M oddelené medzerou ($3 \leq N \leq 2\,500$, $2 \leq M \leq 20\,000$) – N je počet miest, M je počet ciest medzi nimi. Mestá sú číslované od 1 po N. Každý z nasledujúcich M riadkov obsahuje dve celé čísla I, J oddelené medzerou. Tieto čísla znamenajú, že medzi mestami I a J vedie cesta.

Výstup: Na prvom riadku výstupného súboru má byť jediné celé číslo K, ktoré udáva minimálny počet ciest, ktoré treba postaviť. Každý z nasledujúcich K riadkov obsahuje dve čísla miest, medzi ktorými treba postaviť cestu. Pokiaľ je optimálnych riešení viac, môžete si vybrať ľubovoľné z nich. Na poradí dvojíc miest vo výstupe nezáleží.

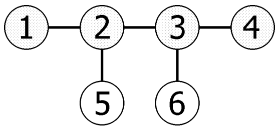
Príklad

Súbor `ROADS.IN`	Súbor `ROADS.OUT`
`4 3`	`2`
`1 2`	`1 4`
`2 3`	`1 3`
`2 4`	

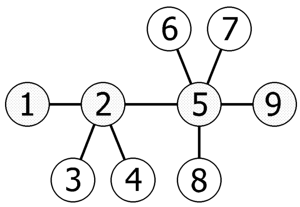
Buldozér

Definícia.

Buldozér[1] je druh stromu s nasledujúcou vlastnosťou: existuje v ňom nejaká cesta (volajme ju hlavná reťaz) taká, že každý vrchol leží buď na tejto hlavnej reťazi, alebo susedí s niektorým jej vrcholom. Na obrázkoch 62 a 63 máte dva príklady buldozérov. Vyfarbené vrcholy tvoria ich hlavné reťaze.



Obrázok 62



Obrázok 63

Hlavná reťaz nemusí byť jediná, napríklad v buldozéri napravo to môže byť aj cesta $3 - 2 - 5 - 9$.

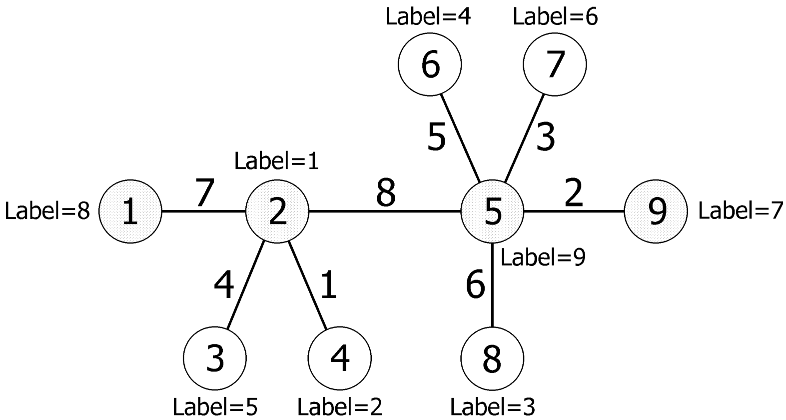
Súťažná úloha

Pre daný buldozér s N vrcholmi napíšte program, ktorý priradí jeho vrcholom ohodnotenia také, že:

- ohodnotenia vrcholov sú navzájom rôzne celé čísla od 1 do N, teda každé je použité práve raz
- žiadne dve hrany nemajú rovnakú absolútnu hodnotu rozdielu medzi ohodnoteniami svojich koncových vrcholov

Pre buldozér na obrázku 63 je jedno možné ohodnotenie vrcholov na obrázku 64. Na tomto obrázku sú navyše pri hranách uvedené príslušné absolútne hodnoty rozdielov ohodnotení ich koncových vrcholov.

[1]Caterpillar sa dá preložiť aj ako húsenica, ale vzhľadom na grafickú reprezentáciu sa nám preklad buldozér zdá omnoho výstižnejší `:-)`



Obrázok 64

Vstup: Prvý riadok vstupného súboru obsahuje jediné celé číslo N – počet vrcholov ($2 \leq$ $\leq N \leq 10\,000$). Každý z ďalších $N-1$ riadkov obsahuje dve celé čísla oddelené medzerou – čísla dvoch vrcholov, ktoré sú spojené hranou.

Vstupné údaje sú korektné a daný strom je naozaj buldozér.

Výstup: Pokiaľ požadované ohodnotenie neexistuje, výstupný súbor má obsahovať jediný riadok a na ňom slovo `IMPOSSIBLE`

Pokiaľ také ohodnotenie existuje, má výstupný súbor obsahovať jediný riadok a na ňom N celých čísel $L_1, \ldots, L_N$ oddelených medzerami – ohodnotenia vrcholov, pričom L_i je ohodnotenie i-teho vrchola. Ak existuje viacero riešení, môžete vypísať ľubovoľné z nich.

Príklad

Súbor `CP.IN`

```
9
1 2
6 5
5 7
4 2
2 3
8 5
2 5
5 9
```

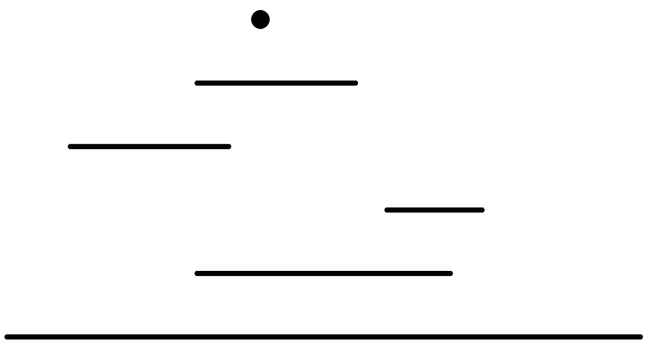
Súbor `CP.OUT`

```
8 1 5 2 9 4 6 3 7
```

Všimnite si, že tento vstup a výstup zodpovedajú buldozéru na obrázku 64.

Nevoľný pád

Predstavte si hru, ktorá sa hrá na zariadení, ktoré je na obrázku poniže.



Toto zariadenie sa skladá z vodorovných plošiniek rôznych dĺžok, ktoré sú umiestnené v rozličných výškach. Najnižšia plošinka je podlaha (má výšku 0 a je oboma smermi nekonečne dlhá). Z danej pozície je pustená loptička. Od tohto okamihu meriame čas, teda loptička je pustená v čase 0. Loptička na počudovanie padá konštantnou rýchlosťou 1 meter za sekundu. Keď sa loptička dotkne plošinky, začne sa kotúľať smerom k jednému z jej koncov, pričom hráč si môže vybrať, ktorý z nich to bude. Kotúľa sa taktiež rýchlosťou 1 meter za sekundu. Keď sa dostane na koniec plošinky, pokračuje v zvislom nevoľnom páde. Loptička sa rozpleští na mastný fľak, ak dopadne na nejakú plošinku po tom, čo bez dotyku plošinky padala vzdialenosť dlhšiu ako daná vzdialenosť MAX.

Súťažná úloha

Napíšte program, ktorý nájde spôsob, ako ovládať loptičku pri dopadoch tak, aby sa nerozpleštila a dotkla sa podlahy v najkratšom možnom čase.

Vstup: Prvý riadok vstupného súboru obsahuje štyri celé čísla N, X, Y, MAX ($1 \leq N \leq 1\,000$, $0 < Y \leq 20\,000$) oddelené medzerami. N je počet plošiniek okrem podlahy. X a Y sú začiatočné súradnice loptičky (X je vodorovná, Y zvislá). MAX je najväčšia výška, z akej môže loptička priamo padnúť bez toho, aby sa rozpleštila. Plošinky sú očíslované od 1 po N podľa poradia na vstupe.

Na každom z ďalších N riadkov sú 3 celé čísla X_{i1}, X_{i2}, H_i ($-20\,000 \leq X_{i1} < X_{i2} \leq 20\,000$, $0 < H_i < Y$) oddelené medzerami. Znamenajú, že i-ta plošinka leží vo výške H_i a siaha vo vodorovnom smere od súradnice X_{i1} po súradnicu X_{i2}.

Poznámky.

- Môžete ignorovať polomer loptičky a hrúbku plošiniek. Ak loptička dopadne presne na okraj plošinky, berie sa to ako normálny dopad na plošinku.
- Žiadne dve plošinky nemajú spoločný bod.
- Pre dané vstupy vždy bude existovať riešenie.
- Všetky rozmery sú udávané v metroch.

Výstup: Prvý riadok výstupného súboru má obsahovať jediné číslo – minimálny čas, v ktorom sa loptička môže dotknúť podlahy. Každý zo zvyšných riadkov až do konca súboru obsahuje tri celé čísla P, T, D oddelené medzerami. Tieto čísla znamenajú, že loptička sa dotkne plošinky P v čase T a začne sa kotúľať v smere D (0 je vľavo a 1 vpravo). Tieto riadky majú byť zoradené vzostupne podľa času a nemá medzi nimi byť dotyk loptičky s podlahou. Ak je viacero možných riešení, vypíšte ľubovoľné z nich.

Príklad

Súbor `FALL.IN`	**Súbor** `FALL.OUT`
3 8 17 20	23
0 10 8	2 4 1
0 10 13	1 11 1
4 14 3	3 16 1

Zápalky

Majme nasledujúcu hru dvoch hráčov: Na stole je N radov zápaliek, v i-tom z nich je S_i zápaliek, ktoré sú očíslované postupne od 1 po S_i. Hráči ťahajú striedavo. Jeden ťah pozostáva z odobratia jednej, dvoch alebo troch zápaliek. Tieto zápalky musia byť v jednom rade a musia byť očíslované postupne (teda musia tvoriť súvislý úsek).

Napr. ak je rad s 10 zápalkami a prvý hráč odstráni zápalky očíslované 4, 5 a 6, ostanú zápalky 1, 2, 3, 7, 8, 9 a 10. Druhý hráč môže odstrániť napr. zápalky 1, 2, 3, ale nie napr. 3, 7, 8, lebo nie sú očíslované postupne. Samozrejme v tejto pozícii existuje viacero možných ťahov.

Víťazom je hráč, ktorý odstráni zo stola poslednú zápalku.

Súťažná úloha

Napíšte program, ktorý bude hrať podľa víťaznej stratégie proti inému programu.

Vstup: Prvý riadok vstupného súboru obsahuje jediné celé číslo N – počet radov zápaliek ($1 \le N \le 10$). Druhý riadok obsahuje N celých čísel $S_1, \ldots, S_N$ ($1 \le S_i \le 10$) oddelených medzerami – počty zápaliek v jednotlivých radoch. Tretí riadok obsahuje jediné celé číslo X. Toto číslo je 0, ak váš program ťahá ako prvý a 1, ak ťahá ako druhý. Na daných vstupoch bude váš program vždy môcť vyhrať.

Interface: Váš program bude hrať proti inému programu. Interakcia medzi vašim programom a jeho súperom bude zabezpečená nasledovným rozhraním: V Pascale je to unit `STICKS` a v C/C++ header file `sticks.h` s nasledujúcimi rutinami:

```
procedure putMove(nr,label1,label2:integer);
void putMove(int nr, int label1, int label2);
```

– ňou oznamujete svoj ťah protihráčovi. Tento ťah je „odstráň z riadku `nr` zápalky očíslované `label1` až `label2` vrátane" (`label1`≤`label2`).

```
procedure getMove(var nr,label1,label2:integer);
void getMove(int *nr, int *label1, int *label2);
```

– ňou sa dozvedáte ťah protihráča. Tento ťah je v rovnakom formáte ako predchádzajúci. V C/C++ odovzdávajte ako argumenty pointre na premenné, do ktorých chcete dostať odpoveď.

Váš program by mal striedavo volať tieto dve rutiny, až kým už na stole nie sú žiadne zápalky. Naša knižnica ukončí hru, ak váš program spraví nelegálny ťah. V tomto prípade samozrejme body za test udelené nebudú.

Príklad

Súbor `STICKS.IN`

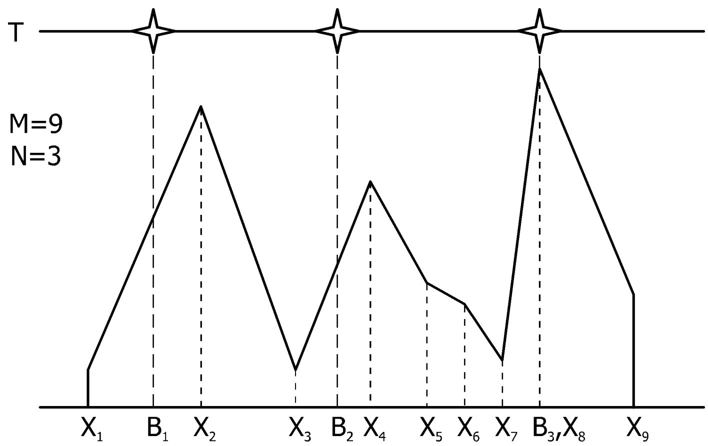
```
2
1 3
1
```

možná postupnosť ťahov v PASCALe

```
getMove(nr,k1,k2); → nr=2, k1=2, k2=2
putMove(1,1,1);
getMove(nr,k1,k2); → nr=2, k1=1, k2=1
putMove(2,3,3);
**** your program wins ****
```

Ožiarená krajina

Majme zjednodušený model krajiny (zložený z nadväzujúcich úsečiek) ako na tomto obrázku:



Nad krajinou letí N nepriateľských družíc v rovnakej výške T a na rôznych vodorovných súradniciach. Úlohou týchto družíc je ožiariť celú krajinu pod nimi. Bod krajiny je ožiarený, ak „vidí“ družicu priamo, teda ak úsečka, spájajúca ho s niektorou družicou, neobsahuje žiaden iný bod krajiny.

Súťažná úloha

Napíšte program, ktorý určí, koľko minimálne družíc treba zapnúť (vypnutá družica samozrejme nič neožaruje), aby sme ožiarili celú krajinu.

Vstup: Prvý riadok vstupného súboru obsahuje jediné celé číslo M ($1 \leq M \leq 200$) – počet bodov, v ktorých je udaná výška krajiny, vrátane oboch koncových bodov. Každý z ďalších M riadkov obsahuje dve celé čísla X_i, H_i ($1 \leq X_i, H_i \leq 10\,000$) oddelené medzerou. H_i je výška krajiny v bode s x-ovou súradnicou X_i. Pre všetky i, $1 \leq i < M$, je $X_i < X_{i+1}$. Každé dva susedné dané body určujú jednu úsečku z krajiny.

Na ďalšom, teda $(M+2)$. riadku sú dve celé čísla N, T ($1 \leq N \leq 200$, $1 < T \leq \leq 10\,000$) oddelené medzerou. N je počet družíc a T je výška, v ktorej letia. Pre všetky i, $1 \leq i \leq M$, je $T > H_i$. Družice sú očíslované od 1 po N. Na $(M+3)$. riadku je N celých čísel $B_1, \ldots, B_N$ ($X_1 \leq B_1 < B_2 < \ldots < B_N \leq X_M$) oddelených medzerami – vodorovné súradnice družíc.

Výstup: Prvý riadok výstupného súboru má obsahovať jediné číslo K – minimálny počet družíc, ktoré treba zapnúť. Druhý riadok obsahuje K celých čísel $L_1, \ldots, L_K$ – čísla družíc, ktoré treba zapnúť, vzostupne utriedené podľa vodorovnej súradnice.

Môžete predpokladať, že pre dané vstupy má úloha riešenie. Pokiaľ je optimálnych riešení viac, vypíšte ľubovoľné.

Príklad

Súbor `LIGHT.IN`

```
6
1 1
3 3
4 1
7 1
8 3
11 1
4 5
1 5 6 10
```

Súbor `LIGHT.OUT`

```
2
1 4
```

12. Medzinárodná informatická olympiáda

V dňoch 23. – 30. septembra 2000 sa v Beijingu v Číne konala medzinárodná informatická olympiáda (IOI 2000). Olympiády sa zúčastnilo celkovo 71 družstiev stredoškolákov zo 70 krajín celého sveta. Našu výpravu na olympiáde tvorilo štvrčlenné družstvo v zložení Marián Dvorský (gym. Košice, Šrobárova), Peter Košinár (gym. J. Hronca, Bratislava), Ján Oravec (gym. J.G. Tajovského, B. Bystrica) a Tomáš Záthurecký (gym. V. Paulínyho–Tótha, Martin) spolu s dvomi vedúcimi Gabrielou Andrejkovou (UPJŠ Košice) a Danou Pardubskou (FMFI UK Bratislava).

Slovenské družstvo už tradične napriek silnej konkurencii dosiahlo dobrý výsledok (aj keď trochu slabší, ako v predchádzajúcich dvoch rokoch), keď sa všetci štyria študenti vrátili s medailami.

meno	body	
Ján Oravec	527	striebro
Marián Dvorský	520	striebro
Peter Košinár	370	bronz
Tomáš Záthurecký	350	bronz

Celkové výsledky nás v neoficiálnom hodnotení krajín radia na 13. miesto, pričom krajiny umiestené pred nami (Rusko, Poľsko, Čína, USA, ...) sa už dlhé roky radia medzi špičku v tejto oblasti.

Treba povedať, že nebyť zaváhania v druhom dni (spôsobeného prílišnou snahou), mohli byť výsledky oveľa lepšie. Dokonca i pri danom zisku bodov mali chlapci zlato na dosah – chýbalo trošku toho "športového" šťastia. Aj napriek tomu, že chlapci sú svojím umiestnením sklamaní (tak veľmi chceli zlato!), sú ich výsledky rozhodne úspechom. Bola to pre každého z nich prvá medzinárodná olympiáda, ktorá sa pre každého z nich stane hnacím motorom do ďalšieho ročníka olympiády. Ako ich poznáme, budú sebe aj ostatným chcieť dokázať, že majú na viac. Držme im k tomu palce!

D. Pardubská, G. Andrejková, M. Forišek

Zadania úloh 12. Medzinárodnej informatickej olympiády

Parkovanie

Parkovisko pri Veľkom múre je tvorené dlhým radom parkovacích miest. Jeden koniec radu považujeme za ľavý, druhý koniec považujeme za pravý. Parkovisko je plné áut. Každé auto je nejakého typu, pričom viaceré autá môžu byť rovnakého typu. Typy sú určované celými číslami. Skupina pracovníkov parkoviska sa rozhodla usporiadať zaparkované autá v rastúcom poradí zľava doprava podľa typu. Použijú pritom metódu, ktorá pozostáva z niekoľkých kôl. V jednom kole môže každý pracovník preparkovať jedno auto.

Preparkovať auto znamená odísť z jeho pozície a zaparkovať ho na pozíciu, ktorá bola v tom istom kole uvoľnená. Môže sa stať, že niektorí pracovníci sa práce v niektorých kolách nezúčastňujú. Kvôli efektívnosti uprednostňujeme malý počet kôl.

Predpokladajte, že N je počet áut, W je počet pracovníkov. Napíšte program, ktorý pre daný typ parkujúcich áut a počet pracovníkov nájde taký spôsob preusporiadania áut, ktorý vyžaduje nanajvýš $\lceil N/(W-1)\rceil$ kôl, to znamená $N/(W-1)$ zaokrúhlené nahor. Minimálny počet kôl nie je nikdy väčší ako $\lceil N/(W-1)\rceil$.

Majme nasledujúci príklad. Na parkovisku je 10 áut typov 1, 2, 3, 4 a 4 pracovníci. Počiatočné umiestnenie áut zľava doprava určené ich typmi je 2 3 3 4 4 2 1 1 3 1. Minimálny počet kôl je 3, pričom kolá je možné vykonať tak, aby umiestnenie áut po jednotlivých kolách bolo nasledovné:

2 1 1 4 4 2 3 3 3 1 – po 1. kole,
2 1 1 2 4 3 3 3 4 1 – po 2. kole a
1 1 1 2 2 3 3 3 4 4 – po 3. kole.

Vstup: Názov vstupného súboru je `CAR.IN`. Prvý riadok vstupného súboru obsahuje tri celé čísla. Prvé číslo N určuje počet áut, $2 \le N \le 20000$. Druhé číslo M určuje počet typov áut, $2 \le M \le 50$. Typy áut sú celé čísla od 1 po M. Existuje aspoň jedno auto každého typu. Tretie celé číslo W je počet pracovníkov, $2 \le W \le M$. Druhý riadok obsahuje N celých čísel, pričom i-te číslo je typ i-teho auta v rade (počítame zľava doprava).

Výstup: Názov výstupného súboru je `CAR.OUT`. Prvý riadok výstupného súboru obsahuje jedno celé číslo R, ktoré určuje počet kôl v riešení. Nasledujúcich R riadkov popisuje kolá usporiadané od 1 po R. V každom riadku prvé celé číslo C určuje počet áut, ktoré sú v danom kole presúvané. Potom nasleduje $2C$ celých čísel, ktoré určujú pozície áut. Pozície áut sú určené celými číslami od 1 po N, pričom počítať začíname na ľavom konci. Prvá dvojica popisuje presun jedného z áut: prvé celé číslo je pozícia zľava pred začatím kola a druhé je jeho pozícia zľava po skončení kola. Ďalšia dvojica popisuje presun ďalšieho auta, atď. Týchto R riadkov nemusí byť určených jednoznačne. Váš program má nájsť jedno z možných riešení.

Príklad

Súbor `CAR.IN`	**Súbor** `CAR.OUT`
`10 4 4`	`3`
`2 3 3 4 4 2 1 1 3 1`	`4 2 7 3 8 7 2 8 3`
	`3 4 9 9 6 6 4`
	`3 1 5 5 10 10 1`

Čiastočný kredit: Predpokladajte, že výstup vášho programu pre vyhodnocovaný beh je R a $\lceil N/(W-1)\rceil$ je Q. Ak výstup vášho programu nepopisuje týchto R kôl korektne alebo nevedie k požadovanému poradiu áut, získavate 0 bodov. Inak sa bodový zisk počíta z maximálneho možného bodového zisku nasledovne:

$R \le Q$	100% bodový zisk
$R = Q + 1$	50% bodový zisk
$R = Q + 2$	20% bodový zisk
$R \ge Q + 3$	0% bodový zisk

Palindróm

Palindróm je symetrický reťazec, to znamená reťazec, ktorý sa číta rovnako zľava doprava aj sprava doľava. Napíšte program, ktorý pre daný reťazec určí minimálny počet znakov, ktoré doňho treba vložiť, aby z neho vznikol palindróm.

Napríklad, reťazec `Ab3bd` možno pretransformovať na palindróm vložením 2 znakov (`dAb3bAd` alebo `Adb3bdA`). Avšak vloženie menej ako 2 znakov na vytvorenie palindrómu z daného reťazca nestačí.

Vstup: Názov vstupného súboru je `PALIN.IN`. Prvý riadok obsahuje jedno celé číslo N – dĺžku vstupného reťazca, $3 \leq N \leq 5000$. Druhý riadok obsahuje jeden reťazec dĺžky N. Reťazec je tvorený z veľkých písmen od '`A`' po '`Z`', malých písmen od '`a`' po '`z`' a číslic od '`0`' po '`9`'. Malé a veľké písmená je potrebné rozlišovať.

Výstup: Názov výstupného súboru je `PALIN.OUT`. Prvý riadok obsahuje jedno celé číslo – požadovaný minimálny počet vkladaných znakov.

Príklad

Súbor `PALIN.IN`	**Súbor** `PALIN.OUT`
`5` `Ab3bd`	`2`

Medián

Nový experiment zahŕňa N objektov očíslovaných od 1 po N. Vieme, že N je nepárne. Každý objekt má rôznu, ale neznámu pevnosť vyjadrenú prirodzeným číslom Y, $1 \leq Y \leq$ $\leq N$. Objekt s mediánovou pevnosťou je taký objekt X, pre ktorý je počet objektov s menšou hodnotou pevnosti ako X rovnaký ako počet objektov s väčšou hodnotou pevnosti ako X. Napíšte program, ktorý určí objekt s mediánovou pevnosťou. Pozor, jediným spôsobom na porovnanie pevnosti je použitie zariadenia, ktoré spomedzi troch daných rôznych objektov určí ten s mediánovou pevnosťou.

Knižnica: K dispozícii máte knižnicu `device` s troma operáciami:

- `GetN`, bez parametrov, ktorú treba zavolať raz – na začiatku; vráti hodnotu N.
- `Med3`, ktorá sa volá s troma rôznymi číslami objektov ako argumentami; vráti číslo objektu s mediánovou (strednou) pevnosťou.
- `Answer`, ktorú treba zavolať raz (na konci) s jedným číslom objektu ako parametrom. Oznamuje číslo objektu X s mediánovou pevnosťou a správne ukončuje vykonávanie vášho programu.

Knižnica `device` vytvára dva textové súbory: `MEDIAN.OUT` a `MEDIAN.LOG`. Prvý riadok súboru `MEDIAN.OUT` obsahuje jedno celé číslo – číslo objektu, ktoré bolo odovzdané knižnici volaním `Answer`. Druhý riadok bude obsahovať jedno celé číslo – počet volaní `Med3` vykonaných počas behu vášho programu. Dialóg medzi vaším programom a knižnicou sa zaznamenáva v súbore `MEDIAN.LOG`.

Inštrukcie pre programátorov v Pascale: Vložte príkaz volania knižnice
`uses device;`
do zdrojového kódu.

Inštrukcie pre programátorov v C/C++: V zdrojovom kóde použite inštrukciu
`#include "device.h"`
Vytvorte projekt `MEDIAN.PRJ` a pridajte doň súbory `MEDIAN.C` (resp. `MEDIAN.CPP`) a `DEVICE.OBJ`.

Experimentovanie: S knižnicou môžete experimentovať vytvorením textového súboru `DEVICE.IN`. Súbor musí obsahovať dva riadky. Prvý riadok musí obsahovať jedno celé číslo – počet objektov N. Druhý riadok musí obsahovať celé čísla od 1 po N v nejakom poradí – i-te celé číslo je pevnosť objektu s číslom i.

Príklad

Súbor `DEVICE.IN`

```
5
2 5 4 3 1
```

Vyššie uvedený súbor `DEVICE.IN` popisuje vstup pre 5 objektov s nasledujúcimi pevnosťami:

Číslo objektu	1	2	3	4	5
Pevnosť	2	5	4	3	1

Nasleduje správna postupnosť 5 volaní knižnice:

1. `GetN` (v Pascale) alebo `GetN()` (v C/C++) vráti 5.
2. `Med3(1,2,3)` vráti 3.
3. `Med3(3,4,1)` vráti 4.
4. `Med3(4,2,5)` vráti 4.
5. `Answer(4)`

Obmedzenia:

- Pre počet objektov N platí $5 \leq N \leq 1499$ a N je nepárne.
- Pre čísla objektov i platí $1 \leq i \leq N$.
- Pre pevnosti Y objektov platí $1 \leq Y \leq N$, pričom všetky pevnosti sú rôzne.
- Meno knižnice v Pascale: `device.tpu`
- Deklarácie funkcií a procedúry v Pascale:

```
function GetN: integer;
function Med3(x,y,z:integer):integer;
procedure Answer(m:integer);
```

- Mená knižníc v C/C++: `device.h`, `device.obj` (použite large memory model)

- Hlavičky funkcií v C/C++:
```
int GetN(void);
int Med3(int x, int y, int z);
void Answer(int m);
```

- Nie je povolené použiť viac ako 7777 volaní funkcie `Med3` (v jednom behu).

- Váš program nesmie čítať z / zapisovať do žiadneho súboru.

Stavebnica

Jednotková kocka je kocka veľkosti $1 \times 1 \times 1$, ktorej rohy majú celočíselné súradnice x, y, z. Dve kocky sú spojené, ak majú spoločnú stenu. 3-rozmerný objekt (skrátene objekt) je neprázdna množina pospájaných jednotkových kociek (pozri Obr. 65). Objem objektu je počet jednotkových kociek, z ktorých sa skladá. Blok je objekt s objemom maximálne 4. Dva bloky sú rovnakého typu, ak jeden možno dostať z druhého posunutím a rotáciou (nie zrkadlovým obrazom). Je daných presne 12 typov blokov (pozri Obr. 66). Farby na obrázkoch iba pomáhajú sprehľadniť štruktúru objektov; nemajú žiadny iný význam.

Množina D blokov je rozkladom objektu S, ak zjednotenie blokov z D sa rovná S a žiadne dva rôzne bloky z D nemajú spoločnú jednotkovú kocku.

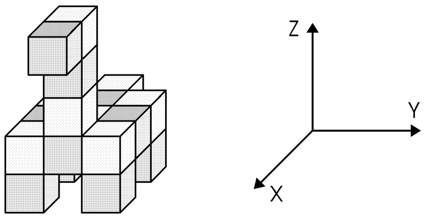
Vašou úlohou je napísať program, ktorý pre daný popis typov blokov a objekt S určí najmenšiu množinu blokov, ktoré tvoria rozklad S. Je potrebné uviesť iba typy týchto blokov toľkokrát, koľkokrát sa v rozklade vyskytujú.

Vstup: Vo vstupných súboroch je jednotková kocka určená riadkom s tromi celými číslami x, y, z. Tieto čísla sú súradnicami toho rohu, pre ktorý je $x + y + z$ minimálne.

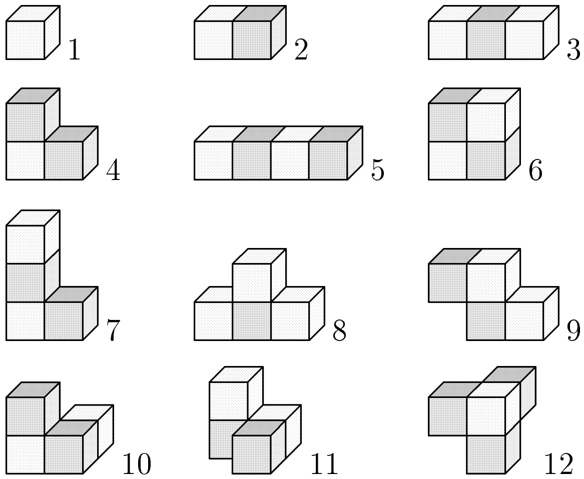
Meno vstupného súboru popisujúceho typy blokov je `TYPES.IN`. Obsahy tohto súboru sú vymenované nižšie a sú rovnaké pre všetky behy vyhodnocovania. Súbor obsahuje popis 12 blokov z Obr. 66 utriedených podľa čísla typu. Každý blok je popísaný skupinou po sebe idúcich riadkov. Prvý riadok obsahuje celé číslo I určujúce typ bloku ($1 \leq I \leq$ ≤ 12). Druhý riadok obsahuje objem V bloku ($1 \leq V \leq 4$). Každý zo zvyšných V riadkov obsahuje 3 celé čísla x, y, z, ktoré určujú jednotkovú kocku bloku ($1 \leq x, y, z \leq 4$).

Meno vstupného súboru popisujúceho objekt je `BLOCK.IN`. Prvý riadok obsahuje objem V objektu ($1 \leq V \leq 50$). Každý zo zvyšných V riadkov obsahuje 3 celé čísla x, y, z, ktoré určujú jednotkovú kocku objektu ($1 \leq x, y, z \leq 7$).

Výstup: Meno výstupného súboru je `BLOCK.OUT`. Prvý riadok musí obsahovať jedno celé číslo M – najmenší počet blokov, ktoré tvoria rozklad vstupného objektu. V druhom riadku je zoznam M identifikátorov typov blokov, ktoré tvoria rozklad vstupného objektu. Pre každý vstupný súbor môže existovať niekoľko rôznych riešení, váš program má vypočítať iba jedno z nich.



Obr. 65 – Kôň



Obr. 66 – 12 typov blokov

Príklad

Súbor `TYPES.IN`

```
1
1
1 1 1
2
2
1 1 1
1 2 1
3
3
1 1 1
1 2 1
1 3 1
4
3
1 1 1
1 2 1
1 1 2
5
4
1 1 1
1 2 1
1 3 1
1 4 1
6
4
1 1 1
1 2 1
1 1 2
1 2 2
7
4
1 1 1
1 2 1
1 1 2
1 1 3
8
4
1 1 1
1 2 1
1 3 1
1 2 2
9
4
1 2 1
1 3 1
1 1 2
1 2 2
10
4
2 1 1
1 2 1
2 2 1
2 1 2
11
4
1 1 1
1 2 1
2 2 1
1 1 2
12
4
2 2 1
2 1 2
1 2 2
2 2 2
```

Súbor `BLOCK.IN`

```
18
2 1 1
4 1 1
2 3 1
4 3 1
2 1 2
3 1 2
4 1 2
1 2 2
2 2 2
3 2 2
4 2 2
2 3 2
3 3 2
4 3 2
4 2 3
4 2 4
4 2 5
5 2 5
```

Súbor `BLOCK.OUT`

```
5
7 10 2 10 12
```

Poznámka:

1. Uvedený vstupný súbor `BLOCK.IN` popisuje objekt „kôň“ na Obr. 65.

2. Iné riešenia pre druhý riadok výstupného súboru, ktorý popisuje typy použitých blokov:
   ```
   2 7 10 11 12
   2 7 11 11 12
   4 4 7 10 11
   4 4 9 10 11
   ```

Pošta

Krajinou vedie diaľnica, pozdĺž ktorej sa nachádzajú dediny. Diaľnica je reprezentovaná celočíselnou osou a pozície dedín sú určené jedinou celočíselnou súradnicou. Žiadne dve dediny nie sú na rovnakej pozícii. Vzdialenosť medzi dvomi pozíciami je určená absolútnou hodnotou rozdielu ich celočíselných súradníc.

Na dedinách, nie nutne v každej z nich, sa budú budovať pošty. Dedina a pošta v nej majú rovnakú pozíciu. Pošty chceme umiestniť tak, aby celkový súčet všetkých vzdialeností z každej dediny k najbližšej pošte bol minimálny.

Napíšte program, ktorý pre dané pozície dedín a počet pôšt vypočíta minimálnu možnú sumu všetkých vzdialeností medzi každou dedinou a k nej najbližšou poštou, ako aj tejto sume odpovedajúce pozície pôšt.

Vstup: Meno vstupného súboru je `POST.IN`. Prvý riadok obsahuje dve celé čísla – prvé je počet dedín V, $1 \leq V \leq 300$, druhé udáva počet pôšt P, $1 \leq P \leq 30$, $P \leq V$. Druhý riadok obsahuje V celých čísel v rastúcom poradí. Týchto V celých čísel určuje pozície dedín. Pre každú pozíciu X platí, že $1 \leq X \leq 10000$.

Výstup: Meno výstupného súboru je `POST.OUT`. Prvý riadok obsahuje jedno celé číslo, ktoré určuje minimálny možný súčet všetkých vzdialeností medzi každou dedinou a k nej najbližšou poštou, podľa toho, čo je uvedené v druhom riadku. Druhý riadok obsahuje P celých čísel v rastúcom poradí. Tieto celé čísla sú pozície rôznych dedín, v ktorých sa budú budovať pošty. Môže existovať viacero rôznych riešení pre umiestnenia pôšt, váš program má vypísať len jedno z nich.

Príklad

Súbor `POST.IN`
```
10 5
1 2 3 6 7 9 11 22 44 50
```

Súbor `POST.OUT`
```
9
2 7 22 44 50
```

Čiastočný kredit:

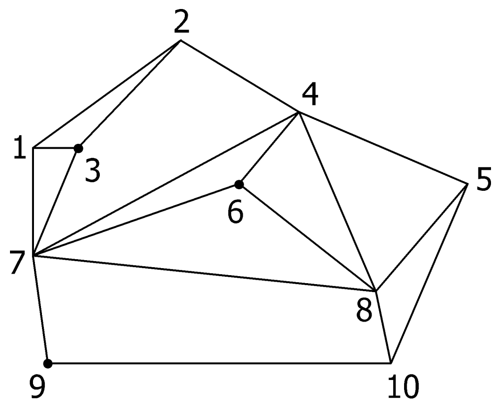
$q = S/S_{min}$	c
q = 1.0	10
1.0 < q ≤ 1.1	5
1.1 < q ≤ 1.15	4
1.15 < q ≤ 1.2	3
1.2 < q ≤ 1.25	2
1.25 < q ≤ 1.3	1
1.3 < q	0

Ak výstup vášho programu nezodpovedá výstupným požiadavkám, váš bodový zisk je 0. Inak, váš bodový zisk sa bude počítať podľa tabuľky uvedenej vľavo nasledovne: Ak vaším programom vypočítaná suma je S a skutočná minimálna možná suma je S_{min}, potom pre $q = S/S_{min}$ sa váš bodový zisk c nachádza v pravom stĺpci tabuľky.

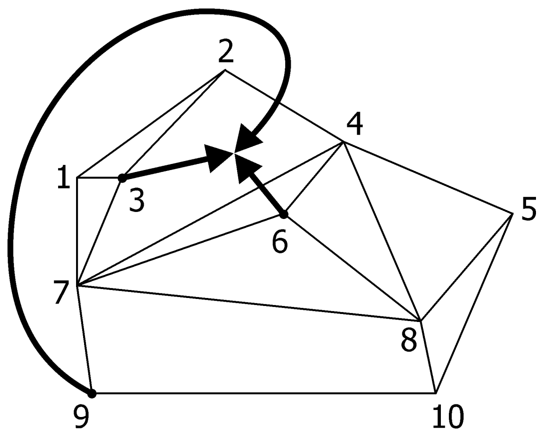
Múry

V krajine sú vybudované veľké múry tak, že každý veľký múr spája presne dve mestá. Veľké múry sa navzájom nekrižujú. Krajina je teda rozdelená na také oblasti, že prechod z jednej oblasti do inej znamená prechod cez mesto alebo cez veľký múr. Pre každú dvojicu miest A a B existuje nanajvýš jeden múr s jedným koncom v A a druhým v B a navyše z A do B sa vždy dá ísť tak, že ideme cez mesto alebo pozdĺž veľkého múru. Vstupný formát určuje ďalšie obmedzenia.

V týchto mestách žijú členovia klubu KSP. V každom meste žije alebo iba jeden člen KSP alebo ani jeden. Členovia sa chcú stretnúť v niektorej z oblastí (mimo akéhokoľvek mesta). Na cestovanie používajú bicykle. Kvôli doprave nechcú vojsť do žiadneho mesta a chcú prechádzať cez tak málo múrov, ako je to len možné, pretože prechod cez múr spôsobuje problémy. Pri ceste na miesto stretnutia musí každý člen prejsť cez nejaký (možno 0) počet veľkých múrov. Chcú nájsť takú optimálnu oblasť, že súčet týchto počtov (skrátene *cross-sum*) je minimálny.



Obr. 67



Obr. 68

Mestá sú označené celými číslami od 1 do N, kde N je počet miest. Na obrázku 67 zodpovedajú označené vrcholy mestám a čiary spájajúce vrcholy reprezentujú veľké múry. Predpokladajme, že traja členovia žijú v mestách 3, 6, 9. Potom optimálna oblasť stretnutia a odpovedajúce cesty členov sú znázornené na obrázku 68. Cros-sum je 2: člen z mesta 9 musí prejsť veľký múr medzi mestami 2 a 4 a ten z mesta 6 musí prejsť cez veľký múr medzi mestami 4 a 7.

Napíšte program, ktorý pre dané mestá, oblasti a počet domovských miest členov klubu KSP vypočíta optimálnu oblasť a minimálnu cross-sum.

Vstup: Meno vstupného súboru je `WALLS.IN`. Prvý riadok obsahuje jedno celé číslo M – počet oblastí, $2 \leq M \leq 200$. Druhý riadok obsahuje jedno celé číslo N – počet miest, $3 \leq N \leq 250$. Tretí riadok obsahuje jedno celé číslo L – počet členov klubu KSP, $1 \leq L \leq 30$, $L \leq N$. Štvrtý riadok obsahuje L rôznych celých čísel v rastúcom poradí – označenia tých miest, v ktorých členovia klubu KSP žijú.

Potom nasleduje $2M$ riadkov, jedna dvojica pre každú oblasť: prvé dva z $2M$ riadkov opisujú prvú oblasť, nasledujúce dva druhú, atď. Prvý riadok dvojice určuje počet miest

I na hranici tejto oblasti. Druhý riadok dvojice obsahuje I celých čísel – označenia týchto I miest v poradí, v ktorom sa môžu prechádzať pri obchádzaní tejto oblasti v smere hodinových ručičiek s výnimkou nasledujúceho prípadu. Posledná oblasť je „vonkajšia oblasť“, ktorá obkolesuje všetky mestá a ostatné oblasti; preto poradie označení odpovedá obchádzaniu proti smeru hodinových ručičiek. Poradie oblastí určuje celočíselné názvy týchto oblastí: názov prvej oblasti je 1, druhej 2, atď. Pripomíname, že vstup zahŕňa všetky plochy tvorené mestami a veľkými múrmi včítane „vonkajšej oblasti“.

Výstup: Meno výstupného súboru je `WALLS.OUT`. Prvý riadok obsahuje jedno celé číslo – minimálnu cross-sum. Druhý riadok obsahuje jedno celé číslo – názov optimálnej oblasti. Riešením môže byť viacero rôznych názvov oblastí a váš program má vypočítať iba jeden z nich.

Príklad

Nasledujúci vstupný a výstupný súbor zodpovedajú príkladu uvedenému v texte.

Súbor `WALLS.IN`
```
10 10
3
3 6 9
3
1 2 3
3
1 3 7
4
2 4 7 3
3
4 6 7
3
4 8 6
3
6 8 7
3
4 5 8
4
7 8 10 9
3
5 10 8
7
7 9 10 5 4 2 1
```

Súbor `WALLS.OUT`
```
2
3
```

Korešpondenčný seminár SK MO

V 49. ročníku matematickej olympiády SK MO prebiehal pre najúspešnejších olympionikov predchádzajúceho ročníka MO zo Slovenska korešpondenčný seminár SK MO. Tento korešpondenčný seminár vznikol už v 24. ročníku MO preto, aby bolo umožnené venovať individuálnu starostlivosť aj tým študentom, ktorí nenavštevovali triedy so zameraním na matematiku. V súčasnosti, pretože existuje veľké množstvo iných matematických korešpondenčných seminárov (napríklad krajských, ktorým je venovaná samostatná kapitola), a pretože počet škôl so zameraním na matematiku stúpol, seminár SK MO sa zameriava na zlepšenie prípravy všetkých študentov, ktorí preukázali svoje schopnosti v predchádzajúcich ročníkoch MO. Keďže úlohy tohto seminára svojou náročnosťou prevyšujú akúkoľvek inú matematickú súťaž pre stredoškolákov, seminár sa stáva dôležitou súčasťou prípravy aj na medzinárodnú matematickú olympiádu. V 44. ročníku MO bol KS SK MO prvýkrát zorganizovaný samostatne na Slovensku. Pozostáva tradične z piatich sérií po sedem úloh. Do riešenia sa v tomto ročníku zapojilo 20 študentov.

Korešpondenčný seminár viedol *Eugen Kováč* a opravovanie zabezpečovali študenti a pracovníci MFF UK (všetko bývalí olympionici).

Celkové poradie KS SK MO 1999/2000

1. *Tomáš Jurík*, 4 Gymnázium Poštová, Košice, 89 bodov;
2. *Katarína Quittnerová*, 2 Gymnázium Bilíkova, Bratislava, 88 bodov;
3. *Miroslava Sotáková*, 4 Gymnázium Poštová, Košice, 80 bodov;
4. *Ján Oravec*, 3 Gymnázium J.G. Tajovského, Banská Bystrica, 44 bodov;
5. *Peter Sidó*, 3 Gymnázium Dunajská Streda, 43 bodov.

Uvádzame všetky príklady tohto ročníka súťaže spolu s riešeniami, prevažne študentskými. Príklady boli vyberané z príkladov zo jury MMO a z národných olympiád, či iných súťaží týchto krajín: Poľsko, Rakúsko, Bielorusko, Bulharsko a Irán.

Zadania súťažných úloh KS SK MO

Prvá séria

1.1 Dokážte, že existuje nekonečne veľa prirodzených čísel tvaru $1998k+1$, $k \in \mathbb{N}$, v ktorých dekadickom zápise sú všetky cifry rovnaké.

(Bielorusko, MO 97/98)

1.2 Daný je trojuholník ABC. Na priamke AC sú dané body M, N tak, že $|MA| = |AB|$, $|NC| = |CB|$ (pričom body ležia na priamke v poradí M, A, C, N). Nech BK je spoločná tetiva kružníc opísaných trojuholníkom MCB a NAB. Dokážte, že BK je osou uhla ABC.

(Bielorusko, MO 97/98)

1.3 Nech $a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n$ sú kladné reálne čísla. Označme $k = \dfrac{a_n}{a_1}$. Dokážte nerovnosť

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}} \geqq \frac{2k}{k^2+1}\cdot\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\,.$$

(Bielorusko, MO 97/98)

1.4 Hokejového turnaja sa zúčastnilo n družstiev, kde n je nepárne prirodzené číslo. Hralo sa systémom každý s každým (po jednom zápase), pričom za výhru boli 2 body, za remízu 1 bod a za prehru nič. Po skončení turnaja nemali žiadne dve družstvá rovnaký počet bodov. Určte najväčší možný počet remíz v turnaji.

(Bielorusko, MO 97/98)

1.5 V rovine je daný konvexný šesťuholník $ABCDEF$ taký, že $BCEF$ je rovnobežník a ABF je rovnostranný trojuholník. Ďalej viete, že $|BC| = 1$, $|AD| = 3$, $|CD| + |DE| = 2$. Určte obsah šesťuholníka $ABCDEF$.

(Bielorusko, MO 97/98)

1.6 Nech a je reálne číslo, pre ktoré platí $0 \leqq a \leqq 1$. Dokážte, že neexistuje funkcia $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ taká, že pre všetky kladné reálne čísla x platí

$$f\left(f(x)+\frac{1}{f(x)}\right) = x + a\,.$$

(Bielorusko, MO 97/98)

1.7 Nech s, t sú nenulové celé čísla. Ďalej nech (x, y) je ľubovoľná (usporiadaná) dvojica celých čísel. V jednom ťahu môžeme z dvojice (x, y) urobiť dvojicu $(x+ + t, y - s)$. Hovoríme, že dvojica (x, y) je *dobrá*, ak po nejakom (aj nulovom) počte ťahov z nej dostaneme dvojicu čísel, ktoré sú súdeliteľné.
a) Zistite, či je dvojica (s, t) *dobrá*.
b) Dokážte, že pre ľubovoľné nenulové s a t existuje dvojica (x, y), ktorá nie je *dobrá*.

(Bielorusko, MO 97/98)

Druhá séria

2.1 Reálne čísla a_i, b_i, c_i, d_i sú také, že $0 \leqq c_i \leqq a_i \leqq b_i \leqq d_i$ a $a_i + b_i = c_i + d_i$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Dokážte nerovnosť

$$\prod_{i=1}^{n} a_i + \prod_{i=1}^{n} b_i \leqq \prod_{i=1}^{n} c_i + \prod_{i=1}^{n} d_i\,.$$

(zborník Poľských a Rakúskych MO)

2.2 Nech $ABCDE$ je konvexný päťuholník vpísaný do kružnice. Označme a, b, c a d postupne vzdialenosti bodu A od priamok BC, CD, DE a BE. Vyjadrite d pomocou a, b, c.

(zborník Poľských a Rakúskych MO)

2.3 Nech A, B sú reálne čísla rôzne od nuly. Dokážte, že potom nie je funkcia $f(x) = A \sin x + B \sin(\sqrt{2} \cdot x)$ periodická.

(zborník Poľských a Rakúskych MO)

2.4 Uvažujme nekonečnú šachovnicu, ktorej polia sú ofarbené bielou a čiernou farbou obvyklým spôsobom. Nech $\mathcal{S}$ je množina 1976 polí šachovnice taká, že každé dve polia v $\mathcal{S}$ môžu byť spojené cestou pozostávajúcou z postupnosti susedných polí (t.j. majú spoločnú stranu) z $\mathcal{S}$. Dokážte, že v množine $\mathcal{S}$ je aspoň 494 bielych polí. Ďalej dokážte, že existuje taká množina $\mathcal{S}$, v ktorej je práve 494 bielych polí.

(zborník Poľských a Rakúskych MO)

2.5 Dokážte, že $\left[n\sqrt{3}\right]$ je mocninou čísla 2 pre nekonečne veľa $n \in \mathbb{N}$.

(zborník Poľských a Rakúskych MO)

2.6 Nech ABC je rovnoramenný trojuholník so základňou AB. Nech U je stred jemu opísanej kružnice a M je stred kružnice pripísanej k strane AB (táto kružnica sa dotýka strany AB a predĺžení strán CA a CB). Dokážte, že $2|CU| < |CM| < 4|CU|$.

(zborník Poľských a Rakúskych MO)

2.7 Nájdite všetky trojice (x, y, z) prirodzených čísel také, že y je prvočíslo, y a 3 nie sú deliteľmi z a platí $x^3 - y^3 = z^2$.

(Bulharsko, MO 98/99)

Tretia séria

3.1 Nájdite všetky hodnoty reálneho parametra a také, že pre každé reálne číslo x platí nerovnosť

$$a^{\cos 2x} + a^{2\sin^2 x} \leqq 2.$$

(Bulharsko, MO 98/99)

3.2 Daný je ostrouhlý trojuholník ABC taký, že $|AC| > |BC|$. Nech CD, AP a BQ sú jeho výšky a M je stred strany AB. Označme postupne k_1 a k_2 kružnice opísané trojuholníkom PQC a DRP, kde R je priesečník priamok AB a PQ.
a) Dokážte, že MP je spoločná dotyčnica kružníc k_1 a k_2.
b) Dokážte, že priamky RH a CM sú navzájom kolmé (kde H je ortocentrum trojuholníka ABC).

(Bulharsko, MO 98/99)

3.3 Nájdite všetky polynómy $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ s celočíselnými koeficientami také, že $f(a_i) = 0$ pre $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

(Bulharsko, MO 98/99)

3.4 Daný je pravidelný n-uholník. V jednom z jeho vrcholov je napísané číslo 1, a v ostatných číslo 0. V jednom kroku môžme zmeniť čísla v troch po sebe idúcich vrcholoch na opačné (t.j. 1 na 0 a 0 na 1).
a) Zistite či pre $n = 1999$ možno po konečnom počte krokov dostať nuly vo všetkých vrcholoch.
b) Nájdite všetky hodnoty n, pre ktoré je možné po konečnom počte krokov dostať nuly vo všetkých vrcholoch.

(Bulharsko, MO 98/99)

3.5 Určte počet prirodzených čísel n takých, že $4 \leqq n \leqq 1023$, a v ich binárnom rozvoji sa nenachádzajú za sebou tri rovnaké číslice.

(Bulharsko, MO 98/99)

3.6 Nájdite najmenšie prirodzené číslo n také, že súčet štvorcov všetkých jeho (prirodzených) deliteľov je rovný $(n+3)^2$.
(Bulharsko, MO 98/99)

3.7 Zistite, či existujú dve kocky také, že každá stena prvej z nich a každá stena druhej z nich majú neprázdny prienik (môže ním byť aj hrana alebo vrchol).
(zborník Poľských a Rakúskych MO)

Štvrtá séria

4.1 V obore celých čísel riešte rovnicu $x^2(y-1)+y^2(x-1)=1$.
(zborník Poľských a Rakúskych MO)

4.2 Na tanečnú zabavu prišlo 8 dievčat a niekoľko chlapcov. V priebehu večera každý chlapec požiadal (práve raz) každé dievča o tanec. Dievča sa pri požiadaní o tanec môže rozhodnúť, či si pôjde zatancovať, alebo„dá chlapcovi košom". Je známe, že pre každých dvoch chlapcov dve dievčatá tancovali s oboma, dve tancovali len s prvým, dve tancovali len s druhým a posledné dve netancovali so žiadnym z nich. Určte najväčší možný počet chlapcov na zábave.
(Bulharsko, MO 98/99)

4.3 Vrcholy A, B a C ostrouhlého trojuholníka ABC ležia postupne na stranách B_1C_1, C_1A_1 a A_1B_1 trojuholníka $A_1B_1C_1$, ktorý jepodobný trojuholníku ABC. Dokážte, že ortocentrá trojuholníkov ABC a $A_1B_1C_1$ sú rovnako vzdialené od stredu kružnice opísanej trojuholníku ABC.
(Bulharsko, MO 98/99)

4.4 Pre každé prirodzené číslo n nájdite všetky dvojice reálnych čísel (a,b), pre ktoré existuje spojitá funkcia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ taká, že pre každé reálne číslo x platí

$$\underbrace{f(f(f(\dots f}_{n\text{-krát}}(x)\dots)))=ax+b\,.$$

(Bielorusko, MO 98/99)

4.5 Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť prirodzených čísel taká, že pre každé $n\geqq 1$ platí

$$(n-1)a_{n+1}=(n+1)a_n-2(n-1)$$

a a_{1999} je deliteľné 2000. Nájdite najmenšie $n\geqq 2$ také, že a_n je deliteľné 2000.
(Bulharsko, MO 98/99)

4.6 Nech $A_1A_2A_3$ je nerovnoramenný trojuholník a I je stred jemu vpísanej kružnice. Nech k_i je menšia z kružníc, ktorá prechádza bodom I a dotýka sa strán A_iA_{i+1} a A_iA_{i+2} (sčítanie indexov berieme modulo 3). Pre $i = 1, 2, 3$ nech B_i je druhý priesečník kružníc k_{i+1} a k_{i+2}. Dokážte, že stredy kružníc opísaných trojuholníkom A_1B_1I, A_2B_2I a A_3B_3I ležia na jednej priamke.

(jury MMO 97)

4.7 Pre každú konečnú množinu U nenulových vektorov v rovine definujme $\ell(U)$ ako dĺžku vektora, ktorý je súčtom všetkých vektorov v U. Daná je konečná množina V nenulových vektorov v rovine. Jej podmnožinu B nazveme maximálmou, ak $\ell(B) \geqq \ell(A)$ pre každú neprázdnu podmnožinu A množiny V.
a) Nájdite množiny štyroch a piatich vektorov, ktoré majú postupne 8 a 10 maximálnych množín.
b) Dokážte, že pre ľubovoľnú množinu V obsahujúcu $n \geqq 1$ vektorov je počet jej maximálnych podmnožín najviac $2n$.

(jury MMO 97)

Piata séria

5.1 Nech x_1, x_2, x_3, x_4 sú kladné reálne čísla také, že $x_1x_2x_3x_4 = 1$. Dokážte, že platí

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 \geqq \max\left\{x_1 + x_2 + x_3 + x_4,\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right\}.$$

(Irán, MO 97/98)

5.2 Do tabuľky $n \times n$ ($n \geqq 2$) sú vpísané čísla $0, 1, -1$, pričom v každom riadku a v každom stĺpci je práve jedna 1 a práve jedna -1. Dokážte, že výmenou riadkov a tiež výmenou stĺpcov možno dostať tabuľku, ktorá bude mať na každom mieste číslo opačné ako bolo v pôvodnej tabuľke.

(Irán, MO 97/98)

5.3 *Ľavým blokom* prirodzeného čísla N nazveme blok po sebe idúcich cifier jeho desiatkového zápisu, ktorý začína prvou cifrou zľava (napr. 137 je ľavým blokom čísla 13729, ale nie čísla 5137). Konečnú neprázdnu množinu M prirodzených čísel nazveme *špeciálnou*, ak pre všetky $a, b \in M$, $a \neq b$ číslo a nie je ľavým blokom čísla b. Dokážte, že pre každú špeciálnu množinu M platí

$$\sum_{n\in M} \frac{1}{n} \leqq 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{9}.$$

(Irán, MO 97/98)

5.4 Daný je trojuholník ABC. Na predĺžení strany BC (za bodom C) je daný bod D, pre ktorý $|CD| = |AC|$. Kružnica opísaná trojuholníku ACD pretína kružnicu s priemerom CB v bodoch C a P. Predpokladajme, že priamky BP a AC sa pretínajú v bode E a priamky CP a AB v bode F. Dokážte, že body E, F a D ležia na jednej priamke.

(Irán, MO 97/98)

5.5 Určte všetky reálne čísla a také, že funkcia $f(x) = \{ax + \sin x\}$ je periodická ($\{y\}$ znamená desatinnú časť reálneho čísla y).

(Bielorusko, MO 98/99)

5.6 Dokážte, že neexistujú prirodzené čísla a, b také, že $(36a + b)(a + 36b)$ je mocninou 2.

(zborník Poľských a Rakúskych MO)

5.7 Dokážte, že konvexná a uzavretá množina bodov $\mathcal{K}$ v rovine, ktorá je obsiahnutá v trojuholníku s minimálnym obsahom, obsahuje stredy jeho strán.

(Irán, MO 97/98)

Riešenia súťažných úloh KS SK MO

Prvá séria

1.1 *(Katarína Quittnerová)* Ukážeme, že všetky čísla tvaru $a_n = \underbrace{11\ldots1}_{27n+1}$ (je to číslo obsahujúce $27n+1$ jednotiek), kde $n \in \mathbb{N}$, dávajú po delení 1998 zvyšok 1, a teda sú tvaru $1998k+1$ (pre vhodné $k \in \mathbb{N}$). Týchto čísel je nekonečne veľa, takže tým bude dôkaz hotový.

Keďže $1998 = 2 \cdot 999$, a $D(2,999) = 1$ (pričom $D(a,b)$ znamená najväčší spoločný deliteľ čísel a, b), stačí nám ukázať, že $a_n \equiv 1 \pmod 2$ a $a_n \equiv 1 \pmod{999}$. Prvá kongruencia je zrejmá. A dokázať druhú tiež nie je ťažké. Pretože $1000 \equiv 1 \pmod{999}$, tak

$$a_n = 1000^{9n} + 111 \cdot 1000^{9n-1} + \ldots + 111 \cdot 1000 + 111 \equiv$$
$$\equiv 1 + 9n \cdot 111 = 1 + 999n \equiv 1 \pmod{999}\,.$$

Tým je úloha vyriešená.

1.2 *(Miroslava Sotáková, István Gyürki)* Označme X priesečník úsečiek AC a BK. Potom pre mocnosť bodu X ku kružnici opísanej trojuholníku NAB platí

$$|BX| \cdot |KX| = |NX| \cdot |AX| = |AX| \bigl(|CX| + |CN|\bigr) = |AX| \cdot |CX| + |AX| \cdot |CN|\,.$$

Podobne pre mocnosť bodu X ku kružnici opísanej trojuholníku MCB platí

$$|BX| \cdot |KX| = |CX| \cdot |MX| = |CX| \bigl(|AX| + |AM|\bigr) = |CX| \cdot |AX| + |CX| \cdot |AM|\,.$$

Porovnaním týchto dvoch vzťahov dostaneme $|AX| \cdot |CN| = |AM| \cdot |CX|$. Keďže $|BC| = |CN|$ a $|MA| = |AB|$, potom

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AX|}{|CX|}\,.$$

Ale to je nutná, a ako sa ľahko overí, aj postačujúca podmienka na to, aby priamka BX bola osou uhla ABC. Tým sme dokázali, čo bolo treba.

1.3 Nech x, y sú reálne čísla také, že $x > y \geqq 1$. Potom $(x-y)\left(1 - \dfrac{1}{xy}\right) > 0$, a teda $x + \dfrac{1}{x} > y + \dfrac{1}{y}$. Aby sme zvolili $y = 1$ a $x \geqq 1$, podobne dostaneme $x + \dfrac{1}{x} \geqq 2$. Tým sme vlastne dokázali, že funkcia $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ je na intervale $\langle 1, \infty)$ rastúca, a že ho zobrazuje do intervalu $\langle 2, \infty)$. Dokázané hneď využijeme. Zrejme totiž pre všetky $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i < j$ platí $\dfrac{a_n}{a_1} \geqq \dfrac{a_j}{a_i} \geqq 1$. Potom dostávame

$$\frac{a_n}{a_1} + \frac{a_1}{a_n} \geqq \frac{a_j}{a_i} + \frac{a_i}{a_j} \geqq 2.$$

Vzťah využijeme pri nasledujúcej úprave

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) =$$

$$= \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} \left(\frac{a_j}{a_i} + \frac{a_i}{a_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i} \leqq \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{a_n}{a_1} + \frac{a_1}{a_n}\right) + n.$$

Dosadíme $k = \dfrac{a_n}{a_1}$, a dostávame

$$\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{a_n}{a_1} + \frac{a_1}{a_n}\right) + n \leqq \frac{n(n-1)}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right) + \frac{n}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right) =$$

$$= \frac{n^2}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right) = \frac{n^2(k^2+1)}{2k}.$$

Tým sme dokázali

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \leqq \frac{n^2(k^2+1)}{2k}.$$

Z toho už vhodným prenásobením, či predelením (zrejme všetky členy sú kladné) dostaneme dokazovanú nerovnosť.

1.4 *(Katarína Quittnerová)* Označme družstvá číslami $1, 2, \ldots, n$. Nech $n = 2k + 1$, kde $k \in \mathbb{N}$. V celom turnaji sa udelilo $2\binom{n}{2} = n(n-1)$ bodov n družstvám. V priemere teda každé družstvo dostalo $\dfrac{n(n-1)}{n} = n - 1 = 2k$ bodov, čo je súčet bodov za jeho $n - 1 = 2k$ zápasov. Keď niektoré družstvo dostalo $2k + A$ bodov (kde $-2k \leqq A \leqq 2k$), tak pre $A > 0$ muselo uhrať aspoň A víťazstiev (inak by malo maximálne $2(A-1) + \big(2k - (A-1)\big) = 2k - A + 1$ bodov), a podobne v prípade $A < 0$ aspoň A prehier. Družstvo s $2k + A$ bodmi teda uhralo maximálne $2k - |A|$ remíz.

Označme teraz r_i počet remíz a $2k + A_i$ počet bodov družstva i (kde $i = 1, \ldots, n$ a $-2k \leqq A_i \leqq 2k$). Každé družstvo má iný počet bodov, takže čísla A_i sú navzájom rôzne, a pre súčet počtov remíz získaných jednotlivými družstvami platí

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \leqq \sum_{i=1}^{n} (2k - |A_i|) \leqq 2kn - (|0| + |1| + |-1| + |2| + |-2| + \ldots + |k| + |-k|) =$$

$$= 2kn - 2\frac{k(k+1)}{2} = (n-1)n - \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} = \frac{(n-1)(3n-1)}{4}.$$

Každá remíza sa pritom do tohto súčtu zarátala 2-krát (za každé družstvo raz), takže pre celkový počet remíz R platí odhad

$$R \leqq \frac{(n-1)\,(3n-1)}{8}.$$

Ešte ukážeme, že môže nastať $R = \frac{1}{8}(n-1)(3n-1)$, teda že hľadaným číslom je $\frac{1}{8}(n-1)\,(3n-1)$. Nech turnaj dopadne takto:

- Družstvo 1 vyhrá nad poslednými k družstvami $(k+1, \ldots, 2k+1)$ a s ostatnými remizuje.
- Družstvo 2 vyhrá nad poslednými $k-1$ družstvami $(k+2, \ldots, 2k+1)$ a s ostatnými remizuje.
- Takto postupujeme ďalej, až družstvo $k-1$ vyhrá len nad $k+1$, nič neprehrá a k so všetkými remizuje.

Počet remíz potom bude

$$\frac{1}{2}\big(k + (k+1) + (k+2) + \ldots + (2k-1) + 2k + (2k-1) + (2k-2) + \ldots + k\big) =$$
$$= \frac{1}{2}k(3k+1) = \frac{(n-1)\,(3n-1)}{8}.$$

Ľahko sa overí, že takto turnaj naozaj mohol skončiť.

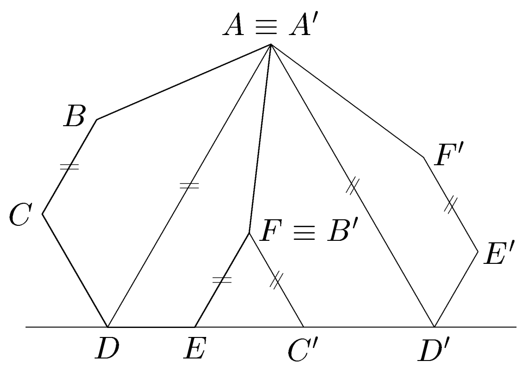
1.5 Otočme šesťuholník $ABCDEF$ okolo bodu A o $60°$ v smere jeho orientácie. Nech šesťuholník $A'B'C'D'E'F'$ je jeho obrazom v tomto otočení. Zrejme $A' \equiv A$. Keďže trojuholník ABF je rovnostranný, tak aj $B' \equiv F$. Potom úsečky BC a FC' zvierajú uhol $60°$ a zároveň $BC \parallel B'E$. Takže trojuholník $EB'C'$ je rovnostranný, a teda $|EC'| = 1$. Zrejme $|C'D'| = |CD|$, takže

$$|DE| + |C'D'| = |CD| + |DE| = 2.$$

Z rovnostrannosti trojuholníka ADD' vidíme, že

$$|DD'| = 3 = |DE| + |EC'| + |C'D'|.$$

To znamená, že body D, E, C', D' ležia na jednej priamke (v tomto poradí), čo si znázorníme na obrázku:



Obr. 69

Všimnime si, že obsah šesťuholníka $ABCDEF$ je rovný súčtu obsahov štvoruholníkov $ABCD$ a $ADEF$. Ďalej vieme, že otočenie je zhodné zobrazenie, teda $S_{ABCD} = S_{AB'C'D'}$. Teraz už jednoducho vypočítame obsah šesťuholníka $ABCDEF$:

$$S_{ABCDEF} = S_{ADEF} + S_{AB'C'D'} = S_{ADD'} - S_{FEC'} = \frac{1}{2} \cdot 3^2 \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}$$

(využili sme, že trojuholník ADD' je rovnostranný so stranou dĺžky 3). Tým je úloha vyriešená.

1.6 Tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladajme, že taká funkcia pre dané $a \in \langle 0, 1\rangle$ existuje.

Najprv dokážeme, že funkcia f musí byť prostá. Totiž ak $f(x_1) = f(x_2)$, tak

$$a + x_1 = f\left(f(x_1) + \frac{1}{f(x_1)}\right) = f\left(f(x_2) + \frac{1}{f(x_2)}\right) = a + x_2,$$

a teda $x_1 = x_2$. Z prostosti potom vyplýva, že k nej existuje aj inverzná funkcia f^{-1}. Navyše pre každé $x > a > 0$ je

$$f\left(f(x-a) + \frac{1}{f(x-a)}\right) = x,$$

takže

$$f^{-1}(x) = f(x-a) + \frac{1}{f(x-a)} \quad \text{pre } x > a. \tag{$*$}$$

Ak by funkcia f dosahovala v niektorom bode u_1 hodnotu $t_1 < 1$, zvoľme $t_2 = 1/t_1$. Potom $t_2 > 1 \leqq a$, a preto existuje aj $u_2 = f^{-1}(t_2)$. Všimnime si, že $t_1 \neq t_2$, a teda aj $u_1 \neq u_2$. Avšak

$$\begin{aligned} u_1 + a = f\left(f(u_1) + \frac{1}{f(u_1)}\right) = f\left(t_1 + \frac{1}{t_1}\right) = \\ = f\left(\frac{1}{t_2} + t_2\right) = f\left(\frac{1}{f(u_2)} + f(u_2)\right) = u_2 + a, \end{aligned}$$

teda $u_1 = u_2$, čo je spor. Preto oborom hodnôt funkcie f je interval $\langle 1, \infty\rangle$. Použitím AG-nerovnosti v $(*)$ zistíme, že pre $x > 1 \geqq a$ platí

$$f^{-1}(x) = f(x-a) + \frac{1}{f(x-a)} \geqq 2.$$

To znamená, že ak $f(x) > 1$, tak $x = f^{-1}\big(f(x)\big) \geqq 2$. Takže, pre $x \in (0, 2\rangle$ je $f(x) \leqq 1$, z čoho vyplýva $f(x) = 1$. To je ale spor s prostosťou funkcie f. Tým sme dokázali, že funkcia f neexistuje.

1.7 a) Ak začneme dvojicou (s,t), tak po n krokoch budeme mať dvojicu $(s+nt, t-$ $-ns)$. Ak $D(s,t)\neq 1$, tak nemáme čo dokazovať. Takže predpokladajme, že $D(s,t)=1$. Potom aj $D(st, s^2+t^2)=1$, a preto existuje prirodzené číslo n_0 také, že $stn_0 \equiv -s^2$ $(\mathrm{mod}\ s^2+t^2)$. Potom

$$\begin{aligned} D(s+n_0t, t-n_0s) &= D(s^2+n_0ts, t^2-n_0st) = \\ &= D(s^2+n_0ts, s^2+t^2) = D(0, s^2+t^2) > 1. \end{aligned}$$

Tým je dôkaz časti a) ukončený.

b) Nech $d = D(s,t)$. Potom existujú celé čísla x, y také, že $xs+yt=d$ (to je známe z teórie čísel). Ukážeme, že dvojica (x,y) nie je dobrá. Ak totiž $x+nt$ a $y-ns$ sú deliteľné nejakým číslom d_1, potom d_1 delí aj číslo

$$(x+nt)\frac{s}{d} + (y-ns)\frac{t}{d} = \frac{xs+yt}{d} = 1,$$

takže nutne $d_1 = 1$. To ale znamená, že čísla $x+nt$, $y-ns$ sú nesúdeliteľné pre každé $n\in\mathbb{N}$, a teda dvojica (x,y) nie je dobrá. Tým sme dokázali, čo bolo treba.

Druhá séria

2.1 Tvrdenie dokážeme indukciou. Pre $n=1$ je to zrejmé. Teraz predpokladajme, že tvrdenie platí pre $n \geqq 1$, a dokážeme ho pre $n+1$. Pre jednoduchosť označme

$$A = \prod_{i=1}^{n} a_i, \quad B = \prod_{i=1}^{n} b_i, \quad C = \prod_{i=1}^{n} c_i, \quad D = \prod_{i=1}^{n} d_i.$$

Pretože $a_{n+1}+b_{n+1} = c_{n+1}+d_{n+1}$, tak existujú s, x, y také, že

$$a_{n+1} = s-x, \quad b_{n+1} = s+x, \quad c_{n+1} = s-y, \quad d_{n+1} = s+y,$$

Podľa zadania platí $0 \leqq c_i \leqq a_i \leqq b_i \leqq d_i$ (pre $i = 1, 2, \ldots, n+1$), takže nutne $s \geqq$ $\geqq 0$ a $0 \leqq x \leqq y$. Ďalej musia platiť nerovnosti $B \leqq D$, $C \leqq A$ a $A \leqq B$. Potom $0 \leqq B-A \leqq D-C$. Odtiaľ dostávame

$$x(B-A) \leqq x(D-C) \leqq y(D-C).$$

Z indukčného predpokladu vyplýva $s(B+A) \leqq s(C+D)$. Sčítaním posledných dvoch nerovností, po úprave dostávame

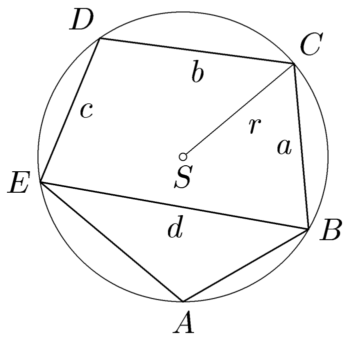
$$(s-x)A + (s+x)B \leqq (s-y)C + (s+y)D,$$

čo je vlastne dokazovaná nerovnosť pre $n+1$.

2.2 Uvažujme všeobecný trojuholník KLM so štandardne označenými stranami k, l a m a uhlom ω pri vrchole M. Zo sínusovej vety vieme, že $\dfrac{m}{\sin\omega} = 2r$, kde r je polomer kružnice opísanej trojuholníku KLM. Potom pre obsah trojuholníka KLM platí

$$S_{\triangle KLM} = \frac{1}{2} kl \sin\omega = \frac{klm}{4r}\,.$$

Tým sme dostali pomerne známy vzťah, ktorý však nezaškodí dokázať.



Obr. 70

Zároveň však $S_{\triangle KLM} = \frac{1}{2} v_m m$, pričom v_m je výška na stranu m. Vzťahy dáme do rovnosti a dostávame

$$v_m = \frac{kl}{4r}$$

Dokázaný vzťah aplikujme na trojuholníky ABC, ACD, ADE a ABE z pôvodnej úlohy. Zrejme platí (pozri obrázok)

$$a = \frac{|AB| \cdot |AC|}{2R}\,, \qquad b = \frac{|AC| \cdot |AD|}{2R}\,, \qquad c = \frac{|AD| \cdot |AE|}{2R}\,, \qquad d = \frac{|AB| \cdot |AE|}{2R}\,,$$

kde R je polomer kružnice opísanej päťuholníku $ABCDE$, a teda aj opísanej všetkým štyrom spomínaným trojuholníkom. Zrejme $bd = ac$, z čoho $d = \dfrac{ac}{b}$. A to je hľadaný vzťah.

2.3 *(Katarína Quittnerová)* Tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladajme, že funkcia f je periodická s kladnou periódou p. Z definície periodickosti funkcie f vyplýva, že pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí

$$A \sin x + B \sin \sqrt{2}x = A \sin{(x + p)} + B \sin\left(\sqrt{2}x + \sqrt{2}p\right), \tag{1}$$

čo po úprave dáva

$$\sin{(x + p)} - \sin x = -\frac{B}{A}\left(\sin\left(\sqrt{2}x + \sqrt{2}p\right) - \sin\sqrt{2}x\right). \tag{2}$$

Ak použijeme známy vzorček pre $\sin a - \sin b$, dostávame

$$\cos\left(x + \tfrac{1}{2}p\right) \sin \tfrac{1}{2}p = -\frac{B}{A} \cos\left(\sqrt{2}x + \tfrac{\sqrt{2}}{2}p\right) \sin \tfrac{\sqrt{2}}{2}p. \tag{3}$$

Pre lepšiu orientáciu označme $y = x + \frac{1}{2}p$. Môžu nastať dve možnosti:

1) Ak $\sin \frac{1}{2}p \neq 0$. Označme
$$C = -\frac{B}{A} \frac{\sin \frac{\sqrt{2}}{2}p}{\sin \frac{1}{2}p}.$$
C je v našom prípade pevné reálne číslo. Vzťah (3) môžeme prepísať v novom označení $\cos y = C \cos \sqrt{2}y$, pre všetky $y \in \mathbb{R}$. To však evidentne pre žiadne C neplatí.
2) Ak $\sin \frac{1}{2}p = 0$. Potom nutne $p = 2k\pi$ pre nejaké nenulové celé k. To ale znamená (keďže $\sqrt{2}$ nie je racionálne číslo), že $\sin \frac{\sqrt{2}}{2}p \neq 0$ a zo vzťahu (3) vyplýva, že pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí $\cos \sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}p = 0$, čo je nezmysel.

Tým sme dokázali, že funkcia f nie je periodická.

2.4 *(Katarína Quittnerová)* Majme množinu $\mathcal{S}$ spĺňajúcu podmienky zadania. Vytvorme teraz novú množinu $\mathcal{S}$' nasledujúcim spôsobom:

1° Do $\mathcal{S}$' dáme ľubovoľné (jedno) biele pole z $\mathcal{S}$ (zrejme také existuje). Pokračujeme krokom 2°.
2° Do $\mathcal{S}$' pridáme všetky čierne polia z $\mathcal{S}$, ktoré ešte nepatria do $\mathcal{S}$', a susedia s nejakým bielym poľom pridaným do $\mathcal{S}$ v predchádzajúcom kroku. Pokračujeme krokom 3°.
3° Vyberieme ľubovoľné biele pole z $\mathcal{S}$, ktoré ešte nepatrí do $\mathcal{S}$' a susedí s niektorým (zrejme čiernym) poľom z $\mathcal{S}$'. Ak také pole existuje, pridáme ho do $\mathcal{S}$' a pokračujeme krokom 2°. Ak neexistuje, skončíme.

Keďže $\mathcal{S}$ má konečný počet bielych polí, určite v niektorom kroku 3° skončíme. Keď skončíme, znamená to, že už žiadne pole susedné s niektorým poľom z $\mathcal{S}$' nepatrí do $\mathcal{S}$. (Čierne by sme pridali v niektorom kroku 2°, keďže susedí s nejakým bielym z $\mathcal{S}$'. Biele by sme pridali v poslednom kroku 3°.) Ale polia v $\mathcal{S}$ sú navzájom„spojené“, teda mimo $\mathcal{S}$' už nemôže existovať žiadne pole patriace do $\mathcal{S}$, takže nutne $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$. Odhadnime teraz počet polí v $\mathcal{S}$'. V prvom kroku 2° sme pridali maximálne 4 čierne polia, keď sme pred tým v kroku 1° pridali jedno biele pole. V každom ďalšom kroku 2° sme pridali maximálne 3 čierne polia (pretože biele pole,„na ktoré“ sme ich pridali, už jednou stranou susedilo so zvyškom množiny $\mathcal{S}$'), keď sme pred tým v kroku 3° pridali jedno biele pole. Ak označíme b počet bielych a c počet čiernych polí v $\mathcal{S}$, tak máme $c \leqq 4 + 3(b-1)$, čo znamená, že $1976 = b + c \leqq 4b + 1$. Takže $b \geqq \frac{1975}{4} = 493{,}75$, a teda $b \geqq 494$ (pretože b je prirodzené číslo). Tým sme dokázali, čo bolo treba.

Príkladom pre $b = 494$ môže byť 494 T-čiek zložených z jedného bieleho a troch (s ním susedných čiernych polí — vľavo, vpravo a pod ním), ktoré sú naukladané na seba.

2.5 Číslo $\sqrt{3}$ nie je ničím zvláštne. V skutočnosti ho môžme nahradiť ľubovoľným číslom $a \in (1, 2)$. Uvedieme preto riešenie, v ktorom budeme uvažovať čísla tvaru $[na]$, kde a je pevné číslo také, že $1 < a < 2$. Prirodzené číslo n nazveme *pekné*, ak $[na]$ je mocninou 2.

Tvrdenie budeme dokazovať sporom. Nech je teda pekných čísel konečne veľa. Vezmime prirodzené číslo k také, že $2^k > na$ pre každé pekné číslo n. Nech q je také (jediné) prirodzené číslo, že $qa < 2^k \leqq (q+1)a$ a položme $r = 2^k - qa$. Potom existuje (jediné) celé nezáporné číslo j, pre ktoré

$$\tfrac{1}{2}a < 2^j r \leqq a\,.$$

Pretože (podľa predpokladu) $a < 2$, tak $\frac{1}{2}a > a - 1$, a dostávame

$$a - 1 < 2^j r = 2^j(2^k - qa) \leqq a\,,$$

čo je ekvivalentné s

$$(2^j q + 1)a - 1 < 2^{j+k} \leqq (2^j q + 1)a\,.$$

Ak označíme $m = 2^j q + 1$, potom máme $[ma] = 2^{j+k}$, takže m je pekné. Ale zrejme pre m platí

$$ma = (2^j q + 1)a \geqq (q+1)a \geqq 2^k,$$

čo je spor s definíciou čísla k. Takže pekných čísel musí byť nekonečne veľa.

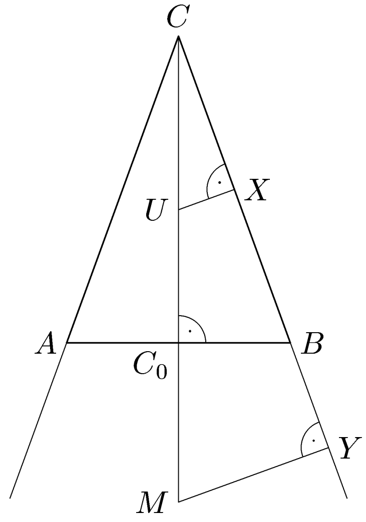
2.6 Označme $|AC| = |BC| = a$, $|AB| = c$. Ďalej označme body X, Y, C_0 podľa obrázka. Skúmajme podiel $|CM| : |CU|$. Pretože trojuholníky CUX a CMY sú podobné, tak $|CM| : |CU| = |CY| : |CX|$. Zrejme X je stred úsečky BC (pretože U je stred opísanej kružnice). Navyše platí $|YB| = |BC_0|$, pretože BM je os uhla, a teda trojuholníky BC_0M a BYM sú zhodné. Potom

$$\frac{|CM|}{|CU|} = \frac{|CY|}{|CX|} = \frac{a + \frac{1}{2}b}{\frac{1}{2}a} = \frac{2a+b}{a} = 2 + \frac{b}{a} > 2.$$

Z trojuholníkovej nerovnosti v trojuholníku ABC navyše vieme, že $2a > b$. Potom

$$\frac{|CM|}{|CU|} = 2 + \frac{b}{a} < 4,$$

čiže naozaj platí $2|CU| < |CM| < 4|CU|$, čo sme mali dokázať.



Obr. 71

2.7 *(Katarína Quittnerová)* Je zrejmé, že $x > y$. Tak si zaveďme substitúciu $x = y + u$. Po dosadení dostaneme

$$u(3y^2 + 3yu + u^2) = z^2. \tag{1}$$

Zrejme teda $u \mid z$, a následne $(3y, z) = 1$ implikuje $(u, 3y) = 1$. Potom však pre každé prvočíslo p v prvočíselnom rozklade u je $p \nmid 3y^2$, a teda aj $p \nmid 3y^2 + 3yu + u^2$. Navyše v prvočíselnom rozklade pravej strany rovnice (1) má p určite párny exponent, musí mať teda párny exponent aj na ľavej strane. Z toho je už zrejmé, že u je štvorec. Označme preto $u = v^2$ a nech $z = z_0 v$. Po vydelení rovnice (1) číslom v^2 dostaneme

$$3y^2 + 3yv^2 + v^4 = z_0^2, \tag{2}$$

$$3y(y + v^2) = (z_0 - v^2)\,(z_0 + v^2). \tag{3}$$

Určite teda $y \mid z_0 - v^2$ alebo $y \mid z_0 + v^2$. Rozlíšime tieto dva prípady.

1) Ak $y \mid z_0 - v^2$. Pre $z_0 - v^2 = ay$, $a \in \mathbb{N}$ dosadením do rovnice (2), a vydelením tejto rovnice číslom y dostaneme

$$3(y + v^2) = a(2v^2 + ay). \tag{4}$$

   Pre $a = 1$ však platí $3(y + v^2) > 2v^2 + y = a(2v^2 + ay)$, a pre $a \geqq 2$ zase platí $3y + v^2 < 4v^2 + 4y \leqq a(2v^2 + ay)$, čiže rovnica (3) nemá riešenie.

2) Ak $y \mid z_0 + v^2$. Pre $z_0 + v^2 = ay$, $a \in \mathbb{N}$ rovnicu (2) po dosadení upravíme vydelením číslom y na tvar

$$3(y + v^2) = a(ay - 2v^2), \tag{5}$$

$$(2a + 3)v^2 = (a^2 - 3)y. \tag{6}$$

Keďže $y \nmid v^2$, určite $2a + 3 = cy$, pre nejaké $c \in \mathbb{N}$, a teda $a = \frac{1}{2}(cy - 3)$, čím po dosadení a ďalších úpravách z rovnice (4) dostávame

$$c(cy^2 - 6y - 4v^2) = 3. \tag{7}$$

Následne môžu nastať už iba dva prípady pre c.

2.1) Pre $c = 3$ úpravou rovnice (5) dostaneme

$$3(y^2 - 2y) = 4v^2 + 1, \tag{8}$$

ale ľavá strana tejto rovnice je deliteľná 3, pričom pravá strana dáva po delení 3 iba zvyšky 1 a 2. Rovnica (6) teda tiež nemá riešenie.

2.2) Pre $c = 1$ rovnicu (5) upravíme na tvar

$$y^2 - 6y - (4v^2 + 3) = 0, \tag{9}$$

ktorý možno považovať za kvadratickú rovnicu s ohľadom na y. Potom $y = 3 \pm \pm 2\sqrt{v^2 + 3}$. Musí teda platiť $v^2 + 3 = w^2$ pre nejaké w také, že $2w \in \mathbb{N}$. Je však zrejmé, že aj $w \in \mathbb{N}$, a následne

$$3 = (w - v)(w + v) \tag{10}$$

má jediné riešenie $w - v = 1$, $w + v = 3$, teda $w = 2$, $v = 1$. Ďalej $y = 3 \pm \pm 2\sqrt{1 + 3} = 3 \pm 4$, z čoho vyhovuje jedine $y = 7$, $u = v^2 = 1$, $x = y + u = 8$, $a = \frac{1}{2}(cy - 3) = \frac{1 \cdot 7 - 3}{2} = 2$, $z_0 = ay - v^2 = 2 \cdot 7 - 1 = 13$ a $z = vz_0 = 13$.

Trojica $(x, y, z) = (8, 7, 13)$, ktorá evidentne spĺňa všetky podmienky, je teda jediným riešením úlohy.

TRETIA SÉRIA

3.1 Keďže $\cos 2x \in \langle -1, 1\rangle$, musí byť $a > 0$. Nerovnosť zo zadania sa dá upraviť na tvar

$$a^{1-r} + a^r - 2 \leqq 0,$$

kde $r = 2\sin^2 x$, čo môže byť ľubovoľné číslo z intervalu $\langle 0, 2\rangle$. Teraz si nájdeme maximum funkcie $f(r) = a^{1-r} + a^r - 2$ na intervale $\langle 0, 2\rangle$. Kandidátmi na toto maximum sú jednak body, v ktorých je derivácia $f'(r) = 0$ a tiež body $r = 0$ a $r = 2$, keďže ide o uzavretý interval (ktorý je kompaktnou množinou). Takže netreba počítať druhú deriváciu, stačí uvážiť zopár čísel. Ľahko možno vypočítať (máme na to vzorčeky) deriváciu

$$f'(r) = -a^{1-r}\ln a + a^r \ln a.$$

Zrejme $a = 1$ je riešením úlohy. Pre $a \neq 1$ je $f'(r) = 0$ práve vtedy, keď $r = \frac{1}{2}$, čo leží v intervale $\langle 0, 2\rangle$. Takže naša úloha je ekvivalentná so sústavou nerovníc

$$\begin{aligned} a &> 0\,, \\ f(0) &\leqq 0\,, \\ f(\tfrac{1}{2}) &\leqq 0\,, \\ f(2) &\leqq 0\,, \end{aligned} \qquad \text{čiže} \qquad \begin{aligned} a &> 0\,, \\ a-1 &\leqq 0\,, \\ 2(\sqrt{a}-1) &\leqq 0\,, \\ \frac{1}{a}+a^2-2 &\leqq 0\,. \end{aligned}$$

Z prvej a druhej rovnice máme $0 < a \leqq 1$. Potom tretiu možno upraviť na tvar $a^3 - 2a^2 + 1 \leqq 0$. Ľahko uhádneme koreň $a = 1$ polynómu na ľavej strane, a potom túto nerovnicu upravíme na tvar

$$(a-1)\left(a - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(a - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \leqq 0\,.$$

Odtiaľ už jednoducho dostávame, že riešením našej sústavy je interval $\left\langle \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1\right\rangle$.

Záverom už len stačí konštatovať, že nerovnosť zo zadania je splnená pre každé $x \in \mathbb{R}$ práve vtedy, keď $a \in \left\langle \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1\right\rangle$.

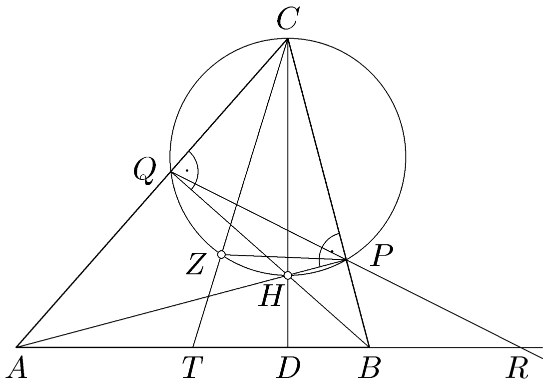
3.2 a) Označme si uhly v trojuholníku ABC štandartne α, β, γ. Zrejme body A, Q, P, B ležia na *Talesovej kružnici* nad priemerom AB a tiež body Q, Z, P, C ležia na jednej kružnici. Potom využijúc vetu o obvodových uhloch môžeme písať:

$$\begin{gathered} |\sphericalangle BAP| = 90^\circ - \beta = |\sphericalangle BQP|, \\ |\sphericalangle BQP| + |\sphericalangle PQC| = 90^\circ. \end{gathered}$$

Z toho vyplýva, že $|\sphericalangle PQC| = \beta$ a $|\sphericalangle QBC| = \alpha$. Analogicky by sme ukázali, že $|\sphericalangle BDP| = \beta$ a $|\sphericalangle DPB| = \alpha$. Taktiež platí $|\sphericalangle MDP| = 180^\circ - |\sphericalangle PDB| = 180^\circ - \gamma = \beta + \alpha$. Keďže trojuholník BMP je rovnostranný, tak $|\sphericalangle MPB| = \beta$. Uhol BPR je vrcholový k uhlu QBC, takže má veľkosť α. Už je teda jasné, že uhol MPR má rovnakú veľkosť ako uhol MDP, takže trojuholníky MDP a MPR sú podobné. Z tejto podobnosti vyplýva $|MP| : |MD| = |MR| : |MP|$, čo po úprave dáva $|MP|^2 = |MD| \cdot |MR|$. Využijúc známe fakty o mocnosti bodu M ku kružnici opísanej trojuholníku PDR dostávame, že MP je jej dotyčnica.

Ďalej si označme Z priesečník úsečky MC a kružnice opísanej trojuholníku QPC. Zrejme aj ortocentrum H trojuholníka ABC leží na tejto kružnici. Potom z vety o obvodových uhloch vyplýva, že $\beta = |\sphericalangle CQP| = |\sphericalangle CHP|$, a teda $|\sphericalangle MZP| = 180^\circ - \beta$. Lenže aj $|\sphericalangle MPC| = 180^\circ - \beta$, čo znamená, že trojuholníky MPC a MZP sú podobné.

Analogicky ako vyššie dostaneme $|MP|^2 = |MZ| \cdot |MC|$, čiže priamka MP je dotyčnica ku kružnici opísanej trojuholníku QPC.



Obr. 72

b) Z už dokázaného vieme, že $|MP|^2 = |MZ|\cdot|MC| = |MD|\cdot|MR|$. Po úprave máme $|MZ| : |MD| = |MR| : |MC|$, z čoho dostávame, že trojuholníky MZD a MRC sú podobné, a teda $|\sphericalangle MHD| = |\sphericalangle MRC|$. Potom ale súčet veľkostí uhlov BHC a BRC je 180°, čiže štvoruholník $DRCZ$ je tetivový. Vzhľadom na pravý uhol RDC možno o úsečke RC prehlásiť, že je priemerom *Talesovej kružnice*, na ktorej leží aj bod Z. To ale znamená, že $RH \perp MC$. Tým sme dokázali tvrdenie úlohy.

3.3 *(Tomáš Jurík)* Zrejme polynóm $f(x) = x^n$ vyhovuje zadaniu. Ďalej uvažujme len také polynómy, pre ktoré je aspoň jedno z čísel $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ nenulové.

Nech a_t je prvý (s najmenším indexom) nenulový člen. Pre jednoduchosť označme $m = n - t$, $c_i = a_{i+t}$ pre $i = 0, 1, \dots, m$. Vezmime polynóm

$$g(x) = x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \ldots + c_1 x + c_0 \,. \tag{1}$$

Potom $f(x) = g(x)x^m$. Pritom $g(x)$ už nemá nulový koreň, ale niektoré jeho koeficienty môžu byť aj nuly. Celkove teda pre každé $i = 0, 1, \dots, m-1$ platí buď $g(c_i) = 0$, alebo $c_i = 0$. Nech čísla $b_1, \dots, b_l$ sú navzájom rôzne a také, že

$$\{b_1, \dots, b_l\} = \{c_0, c_1, \dots, c_{m-1}\} \setminus \{0\} \,. \tag{2}$$

Všetky sú koreňmi polynómu $g(x)$; nech $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ sú postupne ich násobnosti. Z *Viètových* vzťahov vyplýva, že

$$c_0 = b_1^{\alpha_1} \ldots b_l^{\alpha_l} \cdot d \cdot (-1)^m \,, \tag{3}$$

kde d je súčin ostatných koreňov (s príslušnými násobnosťami) polynómu $g(x)$. Ukážeme, že d je celé číslo. Zrejme je racionálne. Vzhľadom na to, že vedúci koeficient $g(x)$ je 1, tak každý jeho racionálny koreň musí byť celočíselný. Totiž ak p/q je zlomok v základnom tvare, tak z rovnosti $q^m g(p/q) = 0$ vyplýva $q \mid 1$. Takže d musí nutne byť celé číslo. Z (2) vyplýva, že medzi číslami $b_1, \dots, b_l$ sa nachádza aj c_0. Ak ním predelíme rovnosť (3), dostávame, že pre každé $j = 1, \dots, l$ platí $b_j^{\alpha_j} \mid 1$. To znamená, že pre každé $i = 0, 1, \dots, m-1$ platí

$$c_i \in \{0, -1, 1, c_0\}$$

Ďalej ukážeme, že $c_0 \in \{-2, -1, 1\}$. Dokážeme to sporom. Už vieme, že $c_0 \neq 0$. Rozoberieme dva prípady.

1) Nech $c_0 \geqq 2$. Potom pre každé $i = 1, \dots, m-1$ platí $c_i \geqq -1$, a teda

$$g(c_0) \geqq c_0^m - c_0^{m-1} - \dots - c_0 + c_0 > 0$$

(uvedomte si prečo), čo je spor.

2) Nech $c_0 \leqq -3$. V prípade, že $c_{m-1} = c_0$, potom $c_0^m = c_{m-1}c_0^{m-1}$ a tiež

$$\begin{aligned} |g(c_0)| &\geqq |2c_0^m| - |c_{m-2}c_0^{m-2}| - \dots - |c_1 c_0| - |c_0| \geqq \\ &\geqq |2c_0^m| - |c_0^{m-2}| - \dots - |c_0^2| - |c_0| > 0\,, \end{aligned}$$

takže $g(c_0) \neq 0$, čo je spor. V prípade, že $c_{m-1} \neq c_0$, tak $|c_{m-1}| \leqq 1$ a podobne máme

$$\begin{aligned} |g(c_0)| &\geqq |c_0^m| - |c_{m-1}c_0^{m-1}| - |c_{m-2}c_0^{m-2}| - \dots - |c_1 c_0| - |c_0| \geqq \\ &\geqq |c_0^m| - |c_0^{m-1}| - |c_0^{m-1}| - \dots - |c_0^2| - |c_0| > 0 \end{aligned}$$

(využili sme $|c_0| \geqq 3$). Teda opäť $g(c_0) \neq 0$, čo je opäť spor.

Vráťme sa teraz k polynómu $f(x)$. Zhrnutím týchto úvah dostaneme, že pre každé $i = 0, 1, \dots, n-1$.

$$a_i \in \{-2, -1, 0, 1\}$$

Znovu máme dva prípady.

1) Existuje $a_i = -2$. Potom číslo -2 je koreňom polynómu. Potom nutne $a_{n-1} = 1$. V opačnom prípade„strhne" najvyššia mocnina znamienko na svoju stranu (dokážte si to sami, ale je to analogické ako, keď sme vyššie dokazovali $a_m \geqq -2$). Podobne sa dokáže, že $a_{n-2} \in \{-2, -1\}$. Ak $a_{n-2} = -2$ tak výraz $x^i + x^{i-1} - 2x^{i-2}$ nazveme reťazcom nultého rádu (označenie $R_0(x)$). Môžeme si všimnúť, že $R_0(-2) = 0$, $R_0(1) = 0$ a $R_0(-1) = 2(-1)^{i-1}$. Ak $a_{n-2} = -1$, potom zopakovaním rovnakých úvah dostaneme $a_{n-3} = 1$. Znovu máme pre a_{n-4} rovnaké možnosti ako pri a_{n-2}. Pre $a_{n-4} = -2$ definujme reťazec prvého rádu $R_1(x) = x^i + x^{i-1} - x^{i-2} + x^{i-3} - 2x^{i-4}$ s vlastnosťami $R_1(-2) = R_1(1) = 0$ a $R_1(-1) = 4(-1)^{i-1}$. Ak $a_{n-4} = -1$ pokračujeme ďalej a postupne definujeme reťazce vyšších rádov pričom vo všeobecnosti reťazec k-tého rádu bude vyzerať takto

$$R_k(x) = x^i + x^{i-1} - x^{i-2} + \dots + x^{i-(2k+1)} - 2x^{i-(2k+2)}$$

Pritom platí $R_k(-2) = R_k(1) = 0$ a $R_k(-1) = 2(k+1)(-1)^{i-1}$. Z konštrukcie vyplýva, že reťazce sú jediné polynómy, ktoré majú jediný koeficient rovný -2. Teda vo všeobecnosti všetky polynómy vyhovujúce zadaniu, ktoré majú aspoň jeden koeficient rovný -2 majú nasledujúci tvar. Jeden reťazec, potom ľubovoľný počet nulových členov, ďalší reťazec, atď. Na konci môžeme pridať ľubovoľný počet nulových členov. Ak sme mali aspoň jeden nulový koeficient, tak absolútny člen je rovný 0; ak žiaden nulový koeficient nebol, tak absolútny člen môže byť 0, alebo je to koniec posledného reťazca, teda je to -2. Ak sme mali iba reťazce typu $R_0(x)$, potom ich môžeme mať hocikoľko, a medzi nimi ľubovoľný počet nulových členov. Ak sme však mali aspoň jeden reťazec vyššieho rádu, tak si musíme dať pozor, aby súčet reťazcov v -1 bol 0 (vyskytol sa koeficient -1). Z konštrukcie vyplýva, že to sú všetky hľadané polynómy s aspoň jedným koeficientom -2.

2) Neexistuje $a_i = -2$. Teda $a_i \in \{-1, 0, 1\}$ pre $i = 0, \dots n-1$. Aj tu máme niekoľko možností.

2.1) Nech $a_i \in \{0, 1\}$. Táto vetva zrejme nemá riešenie.

2.2) $a_i \in \{-1\}$ táto vetva tiež nemá riešenie. Dokážte si sami (rozoberú sa dva prípady pre n párne a nepárne)

2.3) $a_i \in \{0, -1\}$. V tomto prípade musí platiť $a_0 = f(0) = 0$, a zároveň

$$\sum_{\substack{0 \leqq i \leqq n-1 \\ 2 \nmid i}} a_i = (-1)^n + \sum_{\substack{0 \leqq i \leqq n-1 \\ 2 \mid i}} a_i$$

Tieto dve podmienky sú nutné aj postačujúce na existenciu polynómu zo zadania. Možnosti $a_i \in \{-1, 1\}$ a $a_i \in \{-1, 0, 1\}$ sa rozoberú analogicky. Z postupu vyplýva, že nájdené polynómy sú všetky riešenia a zároveň spĺňajú podmienky zo zadania. Tým sme úlohu vyriešili.

3.4 *(Katarína Quittnerová)* Označme si čísla vo vrcholoch n-uholníka postupne $a_1, a_2, \dots, a_n$. Bez ujmy na všeobecnosti, nech na začiatku $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $\dots$, $a_n = 0$. Ukážeme, že vo všetkých vrcholoch môžeme dostať nuly práve vtedy, keď $3 \nmid n$.

Najprv ukážeme, že ak $n = 3k$, kde $k \in \mathbb{N}$, potom z pôvodnej pozície nemôžeme dostať pozíciu so samými nulami. Uvažujme súčet

$$S = a_1 + a_2 + a_4 + a_5 + \ldots + a_{3k-2} + a_{3k-1}.$$

Zrejme v každom kroku meníme práve jedno číslo s indexom deliteľným troma a práve dve čísla zo súčtu S. To však znamená, že parita súčtu S sa nám nemení. Keďže na začiatku je $S = 1$ nepárne, po žiadnom konečnom počte krokov nemôžeme dostať $S = 0$ párne, čo sme chceli dokázať.

Teraz ukážeme, ako dostaneme nuly vo všetkých vrcholoch pre $n = 3k+1$ a $n = 3k+$ $+2$. Zrejme v oboch prípadoch ľahko získame pozíciu so samými jednotkami. Teraz však stačí každý vrchol zobrať práve raz za stred menenej trojice (každý vrchol tak zmeníme práve trikrát) a dostaneme pozíciu so samými nulami.

Zostáva ešte odpovedať na prvú otázku zadania. Nakoľko $1999 \equiv 1 \pmod 3$, pre 1999 vrcholov možno po konečnom počte krokov dostať samé nuly.

Samozrejme, že všetky uvedené úvahy mali význam pre $n \geqq 3$, nakoľko v opačnom prípade nemožno hovoriť o pravidelnom n-uholníku.

3.5 *(Katarína Quittnerová)* Čísla, ktoré neobsahujú v binárnom rozvoji tri rovnaké číslice za sebou, budeme nazývať dobré. Označme p_n počet n-ciferných (v dvojkovej sústave) dobrých čísel. Pre hľadané dobré čísla platí $4 = (100)_2 \leqq n \leqq (1111111111)_2 = 1023$. Máme teda určiť súčet $p_3 + p_4 + \ldots + p_{10}$.

Označme $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_1$ dvojkové cifry n-ciferného čísla $a = \overline{c_n \ldots c_1}$, pričom $c_n = 1$. Pre $n \geqq 3$ ak číslo a je dobré, musí byť tvaru

$$a = \overline{10c_{n-2} \ldots c_1} \qquad \text{alebo} \qquad a = \overline{110c_{n-3} \ldots c_1}\,.$$

V prvom prípade môžeme číslu a priradiť $(n-1)$-ciferné číslo $b = \overline{1c^*_{n-2}c^*_{n-3} \ldots c^*_1}$, kde $c^*_i = 1 - c_i$ pre $i = 1, 2, \ldots, n-2$. Je zrejmé, že číslo b je dobré a tiež, že toto priradenie je prosté, a navyše každé dobré $(n-1)$-ciferné číslo môžeme dostať pre vhodné a. Preto je počet dobrých čísel tvaru $a = \overline{10c_{n-2} \ldots c_1}$ práve p_{n-1}. Rovnako sa ukáže, že dobrých čísel tvaru $a = \overline{110c_{n-3} \ldots c_1}$ je p_{n-2}, teda $p_n = p_{n-1} + p_{n-2}$.

Všimnime si, že $p_1 = 1$ a $p_2 = 2$. Ďalej už stačí len spočítať $p_3 = 3$, $p_4 = 5, \ldots$, $p_{10} = 89$ pomocou nájdeného rekurentného vzťahu, čím prídeme k hľadanému výsledku $p_3 + p_4 + \ldots + p_{10} = 228$.

Poznámka. Čísla $p_1, p_2, \ldots$ tvoria známu *Fibonacciho postupnosť*, ktorá je rekurentne určená takto:

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \text{ pre } n \in \mathbb{N}\,.$$

Pre ňu sa dá matematickou indukciou ľahko dokázať, že $F_0 + F_1 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$. Vzhľadom na to, že $p_n = F_{n+1}$, dostaneme v našom prípade $p_3 + p_4 + \ldots + p_n = F_{n+3} - 5$.

3.6 Označme S_n súčet štvorcov všetkých (prirodzených) deliteľov prirodzeného čísla n. Našou úlohou je vlastne nájsť najmenšie n vyhovujúce rovnosti $S(n) = (n+3)^2$. Nech n sa dá napísať ako súčin troch čísel väčších ako 1, t.j. $n = abc$, kde $2 \leqq a < b < c$. Potom

$$1 < a < b < ab < ac < bc < abc$$

sú navzájom rôzne delitele čísla n. Z AG-nerovnosti dostávame

$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \geqq 3\sqrt[3]{a^4b^4c^4} = 3abc\sqrt[3]{abc} > 3n\sqrt[3]{8} = 6n\,.$$

Naviac $a^2 + b^2 \geqq 8$, takže súčet štvorcov deliteľov čísla n je

$$S(n) \geqq 1 + a^2 + b^2 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2c^2 > 1 + 8 + 6n + n^2 = (n+3)^2\,.$$

Vidíme, že číslo n tohto tvaru nespĺňa podmienku zo zadania. Tohto tvaru je zrejme každé n, ktoré je deliteľné aspoň tromi navzájom rôznymi prvočíslami a takisto každé n deliteľné štvorcami dvoch rôznych prvočísel.

Zostáva nám už len rozobrať niekoľko možností (niektoré prípady sú rozobraté viackrát).

1) Nech $n = 1$. To zjavne nevyhovuje.
2) Nech $n = p$, kde p je prvočíslo. Potom $S(n) = 1 + p^2 < 9 + 6p + p^2 = (n + 3)^2$, takže takéto n nie je riešením.
3) Nech $n = p^k$, kde p je prvočíslo a $k \geqq 2$. Potom máme $S(n) = 1 + p^2 + \ldots + p^{2k}$. Zo zadania vyplýva $p^2 + p^4 + \ldots + p^{2k-2} = 6p^k + 8$, takže $p \mid 8$, čiže $p = 2$. Potom z poslednej rovnosti vyplýva $1 + p^2 + \ldots + p^{2k-4} = 6p^{k-2} + 2$, čo nie je možné.
4) Nech $n = pq$, kde $p > q$ sú prvočísla. Z rovnosti $S(n) = (n + 3)^2$, tak

$$1 + p^2 + q^2 + p^2q^2 = 9 + 6pq + p^2q^2,$$
$$p^2 - 6pq + q^2 - 8 = 0\,,$$

čo je kvadratická rovnica s neznámou p a parametrom q. Jej koreňmi sú

$$p_{1,2} = 3q \pm 2\sqrt{2(q^2 + 1)}\,.$$

Pretože $p > q \geqq 2$, tak nás zaujíma len koreň s plusom (ten druhý je záporný). Pre $q = 2, 3, 5$ nie je p celé číslo. Pre $q = 7$ dostávame $p = 41$. Ak $q > 7$, tak $p > 41$. Takže v tomto prípade ju najmenšie číslo s požadovanou vlastnosťou $7 \cdot 41 = 287$.
5) Nech $n = pq^2$, kde p, q sú rôzne prvočísla. Z rovnosti $S(n) = (n + 3)^3$ vyplýva

$$p^2 + q^2 + q^4 + p^2q^2 = 6pq^2 + 8\,.$$

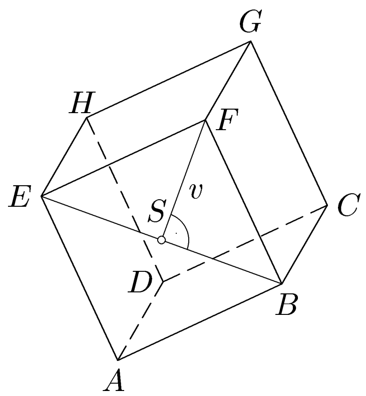
Ak $q \geqq 5$, tak $q^4 + p^2q^2 \geqq 2pq^3 \geqq 10pq^2 > 6pq + 8$. Takže nutne $q = 2$ alebo $q = 3$. Priamym dosadením ľahko zistíme, že to nie je možné.

Tým sme rozobrali všetky možnosti, takže najmenším číslom n takým, že $S(n) = (n + {} + 3)^2$ je $n = 287$.

3.7 *(Katarína Quittnerová)* Predpokladajme, že takéto dve kocky existujú. Nech sú to kocky $\mathcal{K} = ABCDEFGH$, $\mathcal{K}' = A'B'C'D'E'F'G'H'$, pričom $\mathcal{K}$' je väčšia z nich (ak sú zhodné, tak nech je to ľubovoľná z nich). Zvoľme si súradnicovú sústavu tak, aby vrcholy A', B', C', D' mali z-ovú súradnicu rovnú 0 a vrcholy E', F', G', H' rovnú 1.

Spodným, resp. vrchným bodom steny alebo kocky budeme nazývať bod tejto steny alebo kocky, ktorého z-ová súradnica je najmenšia, resp. najväčšia (týchto bodov môže byť aj viac). Zrejme spodným a vrchným vrcholom štvorca a kocky sú vždy (aj) niektoré dva ich protiľahlé vrcholy. Ak máme bod P, tak jeho súradnice nech sú (x_P, y_P, z_P).

Nech vrchol A kocky $\mathcal{K}$ je jej spodným vrcholom. Potom z-ová súradnica každého bodu tejto kocky je aspoň z_A. Ak majú mať steny kocky $\mathcal{K}$ neprázdny prienik so stenou $ABCD$, tak nutne $z_A \leqq 0$. Ukážeme, že aj $z_B, z_D, z_E \leqq 0$ (ide o vrcholy spojené hranou s A). Zrejme to stačí ukázať pre jeden z nich a pre ostatné je to analogické. Predpokladajme teda, že $z_B > 0$. Stena $BCGF$ je obrazom steny $ADHE$ v posunutí o vektor $\overrightarrow{AB}$, pričom B je obrazom A. Keďže A je spodným vrcholom steny $ADHE$, musí byť B spodným vrcholom steny $BCGF$. To ale znamená, že každý bod tejto steny má z-ovú súradnicu kladnú. Avšak potom nemajú steny $A'B'C'D'$ a $BCGF$ prienik. A to je spor. Takže nutne $z_B, z_D, z_E \leqq 0$.



Obr. 73

Pozrime sa teraz na z_F. V trojuholníku BFE pre z-ové súradnice bodov B, E platí $z_B, z_E \leqq 0$, takže aj stred S úsečky EB má $z_S \leqq 0$. Pritom $|BF| \leqq |B'F'| = 1$, takže pre výšku z bodu F na stranu $B'E'$ platí $v = |FS| = \frac{\sqrt{2}}{2}|BF| \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ďalej z trojuholníkovej nerovnosti máme $z_F \leqq z_S + |FS| \leqq \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$. Ale F je vrchný bod steny $ABFE$ (a A je jej spodný bod), takže každý bod steny $ABFE$ má z-ovú súradnicu menšiu ako 1. To ale znamená, že steny $ABFE$ a $E'F'G'H'$ nemajú prienik, čo je spor.

Zostáva už len skonštatovať, že hľadané kocky neexistujú.

Štvrtá séria

4.1 *(Jekaterina Fehér)* Pôvodnú rovnicu si prepíšeme do tvaru:

$$xy(x+y) - (x+y)^2 + 2xy - 1 = 0.$$

Zavedieme substitúciu $a = xy$, $b = x + y$, kde a, b sú celé čísla. Potom platí

$$ab - b^2 + 2a - 1 = 0.$$

Ak si vyjadríme z tejto rovnice a, dostávame

$$a = \frac{b^2+1}{b+2} = b - 2 + \frac{5}{b+2}.$$

Nakoľko a a b majú byť celé čísla, tak číslo $b + 2$ musí byť deliteľom 5. Takže preň dostávame štyri možnosti: $1, -1, 5$ a -5. Celkovo pre $[a, b]$ máme štyri riešenia $[2, -1]$, $[-10, -3]$, $[2, 3]$ a $[-10, -7]$. Zostáva tak pre tieto dvojice riešiť sústavu

$$\begin{aligned} xy &= a\,, \\ x + y &= b\,. \end{aligned}$$

To však nie je nič iné ako hľadanie koreňov kvadratickej rovnice tvaru

$$x^2 - bx + a = 0.$$

Postupne tak ľahko nájdeme štyri celočíselné riešenia pôvodnej úlohy: $[2, -5]$, $[-5, 2]$, $[2, 1]$ a $[1, 2]$.

4.2 *(Miroslava Sotáková)* Označme si dievčatá číslami $1, 2, \ldots, 8$. Zo zadania vyplýva, že každý chlapec tancoval práve so štyrmi dievčatami, takže mu môžeme priradiť jednu štvoricu čísel z množiny $1, 2, \ldots, 8$. Ukážeme, že nemôžeme vytvoriť 8 štvoríc tak, aby prienik ľubovoľných dvoch štvoríc boli práve dve čísla. (To by bolo v spore s podmienkou, že pre každých dvoch chlapcov dve dievčatá tancovali s oboma, dve len s jedným, dve len s druhým a dve netancovali ani s jedným.)

Predpokladajme, že existuje 8 takýchto štvoríc. Všimnime si jednu z nich. Bez ujmy na všeobecnosti nech je to štvorica $(1, 2, 3, 4)$. S ostatnými štvoricami má prienik práve dve čísla, zo štyroch čísel možno vytvoriť $\binom{4}{2} = 6$ dvojíc. Keďže chceme vytvoriť ešte aspoň 7 štvoríc, dve z nich budú mať so štvoricou $(1, 2, 3, 4)$ rovnaký prienik, bez ujmy na všeobecnosti nech je to dvojica $(1, 2)$. Keďže máme k dispozícii len 8 dievčat, jedna dvojica môže byť najviac v troch rôznych štvoriciach. Bez ujmy na všeobecnosti nech sú to štvorice $(1, 2, 3, 4)$, $(1, 2, 5, 6)$ a $(1, 2, 7, 8)$.

Dvojica $(3, 4)$ sa už nemôže vyskytovať v žiadnej štvorici, lebo by v tej štvorici musela byť aj dvojica $(5, 6)$, aj dvojica $(7, 8)$ (kvôli tomu, aby dve štvorice mali prienik práve dve čísla), čo nie je možné. Teda zo štvorice $(1, 2, 3, 4)$ môžeme v ďalších piatich štvoriciach použiť len $\binom{4}{2} - 2 = 4$ dvojice, čo znamená, že jedna bude aspoň vo dvoch štvoriciach. Bez ujmy na všeobecnosti nech je to dvojica $(1, 3)$.

Aby sme splnili podmienky úlohy, môžeme vytvoriť štvorice $(1, 3, 5, 7)$ a $(1, 3, 6, 8)$, alebo $(1, 3, 6, 7)$ a $(1, 3, 5, 8)$. Pozrime sa na prvý prípad (ten druhý by sa rozobral úplne analogicky). Do posledných troch štvoríc môžeme použiť len dvojice $(1, 4)$ a $(2, 3)$ (dvojicu $(2, 4)$ už použiť nemôžeme, lebo by vo štvorici s ňou musela byť aj dvojica $(5, 7)$, aj dvojica $(6, 8)$). Teda jedna z nich bude aspoň vo dvoch štvoriciach (dokonca práve vo dvoch, lebo jedna dvojica môže byť najviac v troch štvoriciach). Nech je to dvojica (a, b). Aby tie štvorice mali dvojprvkový prienik so štvoricou $(1, 2, 3, 4)$, tak musia vyzerať (a, b, e, f) a (a, b, g, h). Lenže aby posledná štvorica obsahujúca (c, d) mala s nimi dvojprvkový prienik, musela by obsahovať aj dvojicu (e, f) aj dvojicu (g, h). Ale to je spor.

Ostáva nám už len napísať 7 štvoríc (dievčat, s ktorými tancovali jednotliví chlapci), ktoré spĺňajú podmienky zadania. Pomerne ľahko možno nájsť napríklad štvorice

$$(1,2,3,4),\quad (1,2,5,6),\quad (1,2,7,8),\quad (1,3,5,7),\quad (1,3,6,8),\quad (1,4,5,6),\quad (1,4,6,7).$$

4.3 Označme H ortocentrum trojuholníka ABC. Pretože $|\sphericalangle CHB| = 180° - |\sphericalangle CAB| = 180° - |\sphericalangle C_1A_1B_1|$, tak bod A_1 leží na kružnici k_1 opísanej trojuholníku BHC. Podobne body B_1 a C_1 ležia postupne na kružniciach k_2 a k_3 opísaných trojuholníkom CHA a AHB. To znamená, že

$$|\sphericalangle B_1HC_1| = |\sphericalangle B_1HA| + |\sphericalangle C_1HA| = |\sphericalangle B_1CA| + |\sphericalangle C_1BA| = 2|\sphericalangle B_1A_1C_1|\,.$$

Podobne tiež $|\sphericalangle C_1HA_1| = 2|\sphericalangle C_1B_1A_1|$ a $|\sphericalangle A_1HB_1| = 2|\sphericalangle A_1C_1B_1|$, takže H je stred kružnice opísanej trojuholníku $A_1B_1C_1$.

Veďme vrcholmi trojuholníka ABC priamky rovnobežné s jeho protiľahlými stranami. Ich priesečníky nech sú A_0, B_0 a C_0, pričom platí, že trojuholníky $A_0B_0C_0$ a $A_1B_1C_1$ sú podobné. To ale znamená, že dĺžky úsečiek A_0H, B_0H a C_0H sú postupne priemery kružníc k_1, k_2 a k_3, ktoré sú rovnako dlhé (dokážte si sami). Odtiaľ je už zrejmé, že existuje zobrazenie, ktoré je zložením otočenia a rovnoľahlosti, obe so stredom H, v ktorom obrazom trojuholníka $A_1B_1C_1$ je trojuholník $A_0B_0C_0$. Ak označíme ich ortocentrá postupne H_1 a H_0, tak v tomto zobrazení musí byť obrazom bodu H_1 bod H_0. Takže $|\sphericalangle HH_1H_0| = |\sphericalangle HA_1A_0| = 90°$ a nám stačí už len dokázať, že stred O kružnice opísanej trojuholníku ABC je stredom úsečky HH_0.

Vzhľadom na to, že obraz trojuholníka ABC v rovnoľahlosti so stredom v jeho ťažisku T a koeficiemtom -2 je trojuholník $A_0B_0C_0$, tak $\overrightarrow{TH_0} = -2\overrightarrow{TH}$. A pretože $\overrightarrow{TH} = -2\overrightarrow{TO}$ (vyplýva to z *Eulerovej priamky*), tak dostávame $\overrightarrow{OH_0} = -\overrightarrow{OH}$. Tým je dôkaz hotový.

4.4 Skúmaním lineárnych funkcií môžeme prísť na niektoré riešenia. Nech $f(x) = cx+d$ potom

$$\underbrace{f(f(\dots f}_{n\text{-krát}}(x)\dots))) = c^n + d(1 + c + c^2 + \dots c^{n-1})$$

Porovnaním s funkciou, ktorú máme dostať, zistíme

$$c = \sqrt[n]{a}, \qquad d = \frac{b}{1 + c + c^2 + \dots c^{n-1}}.$$

Problémy nastanú iba v prípade $c = 0$, alebo ak je $a < 0$ a n je párne číslo. Rozoberme prvý prípad. Ak $0 = c = \sqrt[n]{a}$, potom zrejme $a = 0$. V tomto prípade stačí položiť $d = b$. Skúškou ľahko overíme, že funkcia $f(x) = b$ naozaj vyhovuje zadaniu pre $a = 0$. Ostáva nám zistiť, či existuje spojitá funkcia $f(x)$ pre ktorú platí

$$\underbrace{f(f(\dots f}_{n\text{-krát}}(x)\dots))) = ax + b,$$

pričom $a < 0$ a n je nepárne prirodzené číslo. Najprv dokážeme, že funkcia f je prostá, t.j. z rovnosti $f(x) = f(y)$ vyplýva $x = y$. Nech $f(x) = f(y)$. Potom zrejme $f(f(x)) = f(f(y))$. Takto postupne dostaneme

$$\underbrace{f(f(\dots f}_{n\text{-krát}}(x)\dots))) = \underbrace{f(f(\dots f}_{n\text{-krát}}(y)\dots))),$$

čo je ekvivalentné s rovnosťou $ax + b = ay + b$. Keďže $a \neq 0$ potom $x = y$. Teda funkcia $f(x)$ je prostá. V ďalšom využijeme nasledujúcu lemu (ktorú hneď aj dokážeme).

Lema. Ak $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá a prostá funkcia, potom je rýdzomonotónna (rastúca alebo klesajúca).

Dôkaz. Dokazujme sporom. Nech nie je funkcia rýdzomonotónna. Potom existujú čísla $x < y < z$ také, že $f(x) < f(y), f(y) > f(z)$, alebo $f(x) > f(y), f(y) < f(z)$. Rozoberme prvý prípad, s dodatočným predpokladom $f(x) < f(z)$ (rovnosť nemôže nastať, lebo $f(x)$je prostá funkcia). Ostatné možnosti sa rozoberú analogicky.

Keďže $f(x)$ je spojitá tak z *vety o medzihodnote* (hovorí sa jej tiež *Bolzanova veta*) vyplýva, že na intervale $\langle x, y\rangle$ existuje číslo c také, že $f(c) = f(y)$. To je ale spor s prostosťou $f(x)$. Teda nutne f musí byť rýdzomonotónna funkcia. Tým je lema dokázaná.

Vráťme sa k prípadu $a < 0$. Funkcia $ax+b$ je zrejme klesajúca. Nech je $f(x)$ rastúca. Potom je aj $f(f(x))$ rastúca (dokážte si to!). Podobne je aj funkcia

$$f(f(\dots f(x)\dots)) = ax + b$$

rastúca, čo je evidentne spor s klesajúcosťou $ax + b$. V prípade, že $f(x)$ je klesajúca potom je $f(f(x))$ rastúca funkcia (dokážte si to!). Jednoducho indukciou dokážeme, že po párnom počte iterácií (párne n) je funkcia rastúca, a po nepárnom počte iterácií (nepárne n) je funkcia klesajúca. Teda pre párne n dostávame spor. Z toho vyplýva, že pre $a < 0$ a párne n neexistuje funkcia $f(x)$ spĺňajúca podmienky zo zadania. Ostatné prípady sme overili na začiatku. Skúškou sa ľahko overí, že nájdené funkcie naozaj vyhovujú zadaniu.

4.5 Zrejme $a_1 = 0$ a pre $n \geqq 2$ platí

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n-1}a_n - 2\,.$$

To znamená, že postupnosť je jednoznačne určená svojim druhým členom. Pritom postupnosť $a_n = (n-1)\,(cn+2)$, kde $c = \frac{1}{2}a_2 - 1$ je ľubovoľné reálne číslo, vyhovuje rovnosti zo zadania. Takže všetky postupnosti vyhovujúce tejto rovnosti musia byť vyššie uvedeného tvaru. Členmi našej postupnosti sú však len celé čísla, pričom $2000 \mid$ $\mid a_{1999}$. Pritom

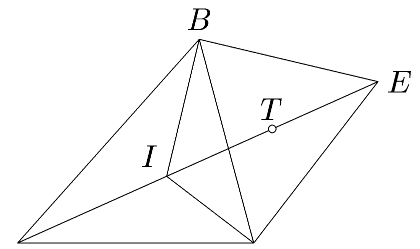
$$a_{1999} = 1998(c\cdot 1999 + 2) = c\cdot 2000\cdot 1998 + 2\cdot 1998 - 1998c.$$

To ale znamená, že $1000 \mid 1998 - 999c$, čiže $c = 1000m + 2$, kde $m \in \mathbb{Z}$. Odtiaľ dostávame, že $2000 \mid a_n$ práve vtedy, keď $1000 \mid (n-1)\,(n+1)$. Takže $n = 2k+1$, pričom $k(k+1)$ je deliteľné $250 = 2\cdot 5^3$. Vzhľadom na to, že čísla k a $k+1$ sú nesúdeliteľné, tak ľahko možno určiť, že najmenšie požadované n sa rovná $2\cdot 124 + 1 = 249$.

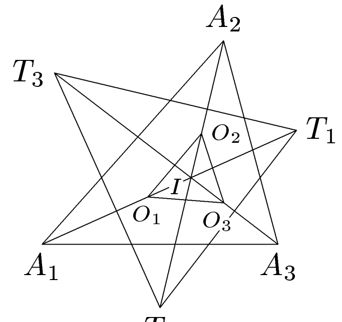
4.6 Pretože trojuholník $A_1A_2A_3$ nie je rovnoramenný, ľahko možno nahliadnuť, že A_iB_iI (pre $i = 1, 2, 3$) sú naozaj trojuholníky, a teda im možno opísať kružnicu.

Lema. Nech I je stred kružnice vpísanej trojuhoníku ABC a T je stred kružnice opísanej trojuholníku BIC. Potom T leží na osi uhla BAC.

Dôkaz. Narysujme si osi vonkajších uhlov pri vrcholoch B a C (pozri obrázok). Pretínajú sa v bode E, ktorý leží aj na osi uhla BAC. Pretože $BE \perp BI$ a $CE \perp CI$, tak štvoruholník $BECI$ je tetivový, pričom stred jemu opísanej kružnice leží na IE. Tento stred je však aj stredom kružnice opísanej trojuholníku BIC. Tým je lema dokázaná.



Obr. 74



Obr. 75

Vráťme sa teraz k našej úlohe. Pre $i = 1, 2, 3$ označme O_i stred kružnice k_i a T_i stred kružnice opísanej trojuholníku $A_{i+1}IA_{i+2}$. Ďalej označme Q_i priesečník priamok $O_{i+1}O_{i+2}$ a $T_{i+1}T_{i+2}$. Zrejme O_i leží na osi vnútorného uhla (trojuholníka $A_1A_2A_3$) pri vrchole A_i. Podľa lemy na tejto osi leží aj bod T_i. Teda priamky T_1O_1, T_2O_2 a T_3O_3 sa pretínajú v jednom bode. Podľa *Desarguesovej vety* body Q_1, Q_2 a Q_3 ležia na jednej priamke. Avšak $T_{i+1}T_{i+2}$ je osou úsečky A_iI a $O_{i+1}O_{i+2}$ je osou úsečky B_iI. To znamená, že bod Q_i je stred kružnice opísanej trojuholníku A_iB_iI.

Poznámka. V riešení sme využili *Desarguesovu vetu*, ktorá patrí medzi nie príliš známe. Viac o nej môžete nájsť napr. v brožúre A. Niederle: Zajímavé dvojice trojůhelníků, ŠMM 47, alebo v hocijakej knižke z projektívnej geometrie.

4.7 *(Tomáš Jurík)*

b) Maximálnym vektorom budeme nazývať súčet vektorov v niektorej z maximálnych množín. Bez ujmy na všeobecnosti, nech $\ell(A) = 1$, kde A je niektorá z maximálnych množín. Všetky maximálne vektory teraz ležia na kružnici k so stredom $(0, 0)$ a polomerom 1. Nech $V = \{\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n}\}$. Nakreslime teraz n kružníc $k_i(\vec{u_i}, 1)$. Keď nejaký maximálny vektor $\vec{v}$ zodpovedajúci maximálnej množine A leží na oblúku kružnice k, ktorý je v kruhu (prípadne na okraji) danom kružnicou k_i, tak veľkosť vektora $\vec{v} + \vec{u_i}$ je väčšia ako 1. Preto A musí obsahovať $\vec{u_i}$. Naopak, keď v leží mimo tohto kruhu, nemôže A obsahovať $\vec{u_i}$, lebo inak množina $A \setminus \{\vec{u_i}\}$ by mala súčet vektorov $\vec{v} - \vec{u_i}$, a ten by bol mimo kruhu ohraničeného kružnicou k.
Indukciou sa ľahko ukáže, že kružnice k_i rozdelia kružnicu k na najviac $2n$ častí. Keď si vezmeme niektorú z týchto častí spolu s jej okrajovými bodmi, stačí si všimnúť, v ktorých kruhoch leží a v ktorých neleží a vieme jednoznačne povedať, ktoré z vektorov $\vec{u_i}$ (a žiadne iné) sa musia nachádzať v množine A, ak súčet jej vektorov má ležať na tomto úseku. Takáto maximálna množina môže byť teda pre zvolený úsek nanajvýš jedna. Tým je tvrdenie dokázané.

a) Pre $n \geqq 4$ je možné skonštruovať vektory nasledujúcim spôsobom: Označme O

začiatok pravouhlej súradnicovej sústavy. Nech bod A má súradnice $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$. Zvoľme teraz body X_i, $i = 2, 3, \dots, n-1$, so súradnicami $(\cos\varphi_i, \sin\varphi_i)$, kde $60° = \varphi_1 < < \varphi_2 < \dots < \varphi_{n-1} = 120°$ a $\varphi_i + \varphi_{n-i} = 180°$ (množina týchto bodov je symetrická vzhľadom na os y). Teraz stačí zvoliť $\vec{u_1} = \overrightarrow{OX_1}$, $\vec{u_i} = \overrightarrow{X_{i-1}X_i}$, $i = 2, 3, \dots, n-1$ a $\vec{u_n} = \overrightarrow{OA}$. Je zrejmé, že maximálne vektory budú $\overrightarrow{OX_i}$ a $\overrightarrow{X_iO}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, spolu s $(1,0)$ a $(-1,0)$, teda $2n$ maximálnych vektorov. Ľahko sa možno presvedčiť, že žiadna množina A vytvorená z takto zvolených vektorov nebude mať $\ell(A) > 1$. To, že toto nie je jediná voľba vektorov zistíme napríklad pre $n = 5$, kde môžeme zvoliť vektory $\overrightarrow{OA_i}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, kde $A_1A_2A_3A_4A_5$ je pravidelný 5-uholník vpísaný do kružnice $k(O, 1)$.

Piata séria

5.1 Zrejme stačí dokázať nerovnosti

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 \geqq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}, \tag{1}$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 \geqq x_1 + x_2 + x_3 + x_4. \tag{2}$$

Z AG-nerovnosti dostávame

$$\begin{gathered} 3(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3) = \\ = (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + (x_1^3 + x_2^3 + x_4^3) + (x_1^3 + x_3^3 + x_4^3) + (x_2^3 + x_3^3 + x_4^4) \geqq \\ \geqq 3(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) = 3\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right). \end{gathered}$$

Odtiaľ už vyplýva nerovnosť (1).

Ďalej využijeme *nerovnosť medzi mocninnými priemermi*, ktorá hovorí, že ak sú kladné reálne čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ a $p > q > 0$, potom

$$\left(\frac{a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p}{n}\right)^{1/p} \geqq \left(\frac{a_1^q + a_2^q + \dots + a_n^q}{n}\right)^{1/q}.$$

Špeciálne pre $p = 3$, $q = 1$ po umocnení máme

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 \geqq \frac{1}{16}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^3.$$

Pritom z AG-nerovnosti máme $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqq 4\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4} = 4$. Z posledných dvoch nerovností dostávame

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 \geqq \frac{1}{16} \cdot 4^2 \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,$$

čo je nerovnosť (2).

Tým sme dokázali, čo bolo treba.

5.2 Všimnime si najskôr, že zámenou riadkov (stĺpcov) môžeme dosiahnuť ich ľubovoľné usporiadanie. Keďže každý riadok je unikátny (na mieste, kde obsahuje jednotku nemôže jednotku obsahovať žiadny iný riadok), stačí nám usporiadať stĺpce tak, aby ku každému pôvodnému riadku existoval inverzný riadok (s vymenenými 1 a -1). Potom už len usporiadame riadky na správne miesta. V ďalšom teda budeme uvažovať iba množinu n riadkov bez usporiadania.

Keďže každý riadok obsahuje práve jednu 1 aj -1, potom môžeme definovať funkciu $f: N_n \to N_n$ (kde $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$) tak, že $f(i)$ pre $i \in N_n$ udáva pozíciu 1 v riadku obsahujúcom -1 na i-tom mieste. Takto definovaná funkcia je permutáciou množiny N_n (každý stĺpec obsahuje práve jednu 1 aj -1), pre ktorú $f(i) \neq i$, $i \in N_n$. Navyše tiež ku každej takejto permutácii existuje n zodpovedajúcich riadkov. Všimnime si, ako sa transformuje funkcia f na f', keď pozície povymieňaných stĺpcov reprezentujeme permutáciou g. Keď je v novom usporiadaní -1 na i-tom mieste, pred usporiadaním bola na $g^{-1}(i)$-tom mieste, a následne 1 bola na $f(g^{-1}(i))$-tom mieste, ale teraz je už na $g(f(g^{-1}(i)))$-tom mieste, čiže $f' = g \circ f \circ g^{-1}$.

Zamyslime sa teraz nad tým, akú permutáciu f' chceme dosiahnuť. Ak riadok, ktorý mal na i-tom mieste -1, mal na $f(i)$-tom mieste 1, potom po usporiadaní má mať riadok s -1 na $f(i)$-tom mieste 1 na i-tom mieste, teda $f'(f(i)) = i$, čo môžeme zapísať ako $f' = f^{-1}$. Existenciu vhodnej permutácie g ukážeme konštrukčne.

Pre každý cyklus a_1, a_2, $\dots$,a_k permutácie f (t.j. $f(a_1) = a_2$, $\dots f(a_{k-1}) = a_k$, $f(a_k) = a_1$) definujme $g(a_i) = a_{k+1-i}$, $i \in N_k$. Všimnime si, že $g^{-1} = g$ a následne $f'(a_i) = g(f(g^{-1}(a_i))) = g(f(a_{k+1-i})) = g(a_{k+2-i}) = a_{i-1}$ pre $i \in N_k$ (pre $i = 1$ rozumieme $k+1$ v indexe ako 1 a 0 ako k), čo skutočne znamená $f' = f^{-1}$. Tým je tvrdenie dokázané.

5.3 *(Peter Sidó)* Trojciferné číslo s ciframi a, b, c si označme $\overline{abc}$. Rozšírme si označenie tak, že $\overline{ab}$ je číslo $10a+b$, kde b je jednociferné číslo, ale a môže byť viac ako jednociferné. Napríklad ak $a = 145$, $b = 5$ potom $\overline{ab} = 1455$.

Zrejme platí $\overline{xi} \geqq \overline{x0}$. Odtiaľ máme

$$\sum_{i=0}^{9} \frac{1}{\overline{xi}} < \sum_{i=0}^{9} \frac{1}{\overline{x0}} = \frac{10}{\overline{x0}} = \frac{1}{x}.$$

Ak sa v množine M nachádzalo číslo $\overline{xi}$, tak sa v M zrejme nenachádzalo číslo $\overline{x}$ (bolo by ľavým blokom). Podobne ak sa v množine nachádzalo číslo $\overline{x}$, tak sa tam nemohlo vyskytovať číslo $\overline{xi}$. Rozdeľme si množinu M na množiny M_A, kde do množiny M_A dáme všetky čísla $\overline{Ai}$ patriace do M. Do množiny M_0 dáme všetky jednociferné čísla. Zrejme zjednotenie všetkých množín M_A a množiny M_0 je celá množina M.

Vezmime množinu M_L, pre ktorú je L najväčší z indexov. Taký index vždy existuje, lebo množín je len konečný počet. Zrejme sa v tejto množine nachádzajú najväčšie čísla množiny M. Pokiaľ je $L > 0$, tak nahradíme všetky prvky množiny M_L číslom L

a naša suma sa (podľa predchádzajúcich úvah) zväčší. Nová množina, ktorá vznikne, je znovu špeciálna (premyslite si to). Znovu opakujeme celý postup. Keďže množín je konečný počet, lebo prvkov množiny M je konečný počet, tak sa nám náš postup raz zastaví (zmenšujem najväčšie číslo množiny M). Nakoniec dospejeme k tomu, že nemáme žiadnu množinu M_A pre $A > 0$. Teda všetky prvky sú v množine M_0. Keďže sme každým krokom súčet zväčšovali, tak potom

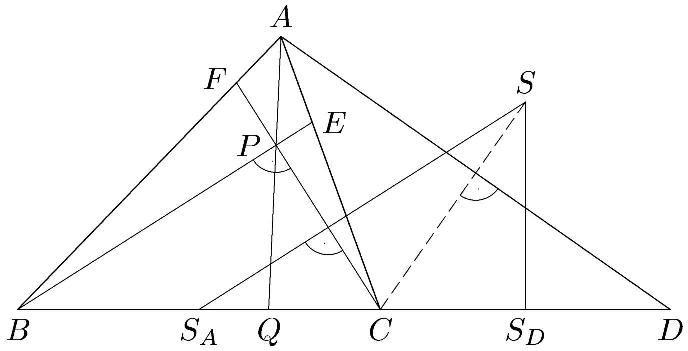
$$\sum_{n \in M} \frac{1}{n} \leqq 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{9},$$

čo je tvrdenie, ktoré sme mali dokázať.

5.4 *(Róbert Lukoľka)* Označme strany a uhly v trojuholníku obvyklým spôsobom. Predpokladajme najprv, že uhol α je ostrý. Označme Q priesečník priamok AP a BC, S_A stred strany BC, S_D stred úsečky CD, S stred kružnice opísanej trojuholníku ACD. Ďalej nech $\varphi = |\sphericalangle CDA|$, $\omega = |\sphericalangle SCD|$. Podľa zadania je trojuholník ACD rovnoramenný (so základňou AD), takže os strany AD prechádza vrcholom C (a zrejme aj bodom S), a teda $CS \perp AD$. Odtiaľ máme

$$\omega + \varphi = 90°. \tag{1}$$

Štvoruholník $APCD$ je podľa zadania tetivový, a preto $|\sphericalangle APC| + |\sphericalangle CDA| = 180°$, čiže $|\sphericalangle QPC| = 180° - |\sphericalangle APC| = |\sphericalangle CDA| = \varphi$. Naviac uhol BPC je pravý, takže z (1) dostávame $|\sphericalangle BPQ| = 90° - |\sphericalangle QPC| = 90° - \varphi = \omega$.



Obr. 76

Spojnica stredov Talesovej kružnice nad BC a kružnice opísanej trojuholníku ACD je zrejme kolmá na ich spoločnú tetivu, čiže $S_AS \perp PC$. To ale znamená, že $S_AS \parallel BP$ (lebo priamky S_AS a BP sú kolmé na CP). Ďalej uhly PBC a SS_AS_D zhodné (lebo sú súhlasné), a teda pravouhlé trojuholníky BPC a S_ASS_D sú podobné. Z toho máme

$$\frac{|PC|}{|PB|} = \frac{|SS_D|}{|S_AS_D|}. \tag{2}$$

Trojuholníky QCP a BQP majú spoločnú výšku v. Ak ich obsahy vypočítame dvoma spôsobmi, dostávame

$$\frac{|QC|}{|BQ|} = \frac{v \cdot |QC|}{v \cdot |BQ|} = \frac{2S_{\triangle QCP}}{2S_{\triangle BQP}} = \frac{|PC| \cdot |PQ| \cdot \sin\varphi}{|PQ| \cdot |PB| \cdot \sin\omega} = \frac{|PC|}{|PB|} \cdot \frac{\sin\varphi}{\sin\omega}. \tag{3}$$

Po dosadení (1) a (2) do (3) máme

$$\frac{|QC|}{|BQ|} = \frac{|SS_D|}{|S_AS_D|} \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{|SS_D|}{|S_AS_D|} \cdot \operatorname{tg}\varphi \tag{4}$$

Ďalej trojuholník CDS je rovnoramenný, a teda $SS_D \perp CD$. Z pravouhlého trojuholníka CS_DS potom využitím (1) dostávame

$$|SS_D| = |CS_D| \cdot \operatorname{tg}\omega = |CS_D| \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \varphi) = |CS_D| \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}\,. \tag{5}$$

Dosadením (4) do (5) a využitím $|CS_D| = \frac{1}{2}|CD| = \frac{1}{2}b$, $|S_AS_D| = \frac{1}{2}|BC| + \frac{1}{2}|CD| = \\ = \frac{1}{2}(a+b)$ máme

$$\frac{|QC|}{|BQ|} = \frac{|CS_D| \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}}{|S_AS_D|} \cdot \operatorname{tg}\varphi = \frac{|CS_D|}{|S_AS_D|} = \frac{b}{a+b}\,. \tag{6}$$

Priamky AQ, BE a CF sa pretínajú v jednom bode, takže z *Cèvovej vety* vyplýva

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BQ|}{|QC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1. \tag{7}$$

Dosadením (6) do (7) už konečne dostávame

$$1 = \frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{a+b}{b} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = \frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|}\,,$$

takže podľa *Menelaovej vety* máme, že body E, F, D ležia na jednej priamke.

V prípade $\alpha = 90^\circ$ zrejme $P \equiv A$, takže $E \equiv F \equiv A$, a teda body E, F, D ležia triviálne na jednej priamke.

V prípade $\alpha > 90^\circ$ je situácia rovnaká ako pre $\alpha < 90^\circ$, len rovnosť $|\sphericalangle QPC| = \varphi$ dostaneme z toho, že uhly QPC a ADC sú obvodové nad AC, a teda sú rovnaké.

5.5 Predpokladajme, že funkcia $f(x) = \{ax + \sin x\}$ je periodická s periódou $t > 0$. Potom dostávame

$$\begin{gathered}\{ax + \sin x\} = \{a(x+t) + \sin(x+t)\} \\ \{\sin x\} = \{at + \sin(x+t)\}.\end{gathered} \tag{1}$$

Dosadením $x = -t$ do (1) a využitím $\sin(-t) = \sin t$ dostaneme rovnosť

$$\{\sin t\} = \{at\}. \tag{2}$$

Po dosadení $x = 0$ do (1) a úpravách, s využitím (2) dostávame

$$0 = \{at + \sin t\} = \big\{\{at\} + \{\sin t\}\big\} = \big\{2\{\sin t\}\big\} = \big\{2\{at\}\big\}.$$

Ľahko nahliadneme, že na to, aby $\big\{2\{\sin t\}\big\} = 0$, nutne $\sin t \in \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$. Ľubovoľné riešenie t tak môžeme zapísať v tvare $t = r\pi$, $r \in \mathbb{Q}$. Zároveň $\big\{2\{at\}\big\} = 0$, čiže $2at = z$ pre nejaké celé číslo z. Potom ale $a = \dfrac{z}{2t} = \dfrac{z}{2r\pi}$. Funkcia f teda môže byť periodická iba pre $a = m/\pi$, kde m je racionálne číslo.

Teraz ukážeme, že pre ľubovoľné $a = m/\pi$, kde $m \in \mathbb{Q}$ je uvedená funkcia periodická. Nech $m = p/q$ je zlomok v základnom tvare. Uvažujme periódu $2q\pi$. Zrejme platí

$$f(ax + 2q\pi) = \{a(x + 2q\pi) + \sin(x + 2q\pi)\} = \{ax + 2q\pi \cdot m/\pi + \sin x\} = \\ = \{ax + 2p + \sin x\} = \{ax + \sin x\},$$

čiže funkcia f je periodická s periódou $2q\pi$.

Tým sme dokázali, že funkcia $f(x) = \{ax + \sin x\}$ je periodická práve vtedy, keď $a\pi$ je racionálne číslo (čiže $a = m/\pi$, kde $m \in \mathbb{Q}$).

5.6 Predpokladajme, že existuje n také, že

$$(36a + b)\,(36b + a) = 2^n.$$

Všimnime si, že hodnoty v obidvoch zátvorkách sú aspoň 37. To znamená, že nutne $n > 10$ a čísla a, b sú párne. Nech $a = 2a_1$, $b = 2b_1$, kde a_1, b_1 sú prirodzené čísla. Predelením štyrmi dostávame

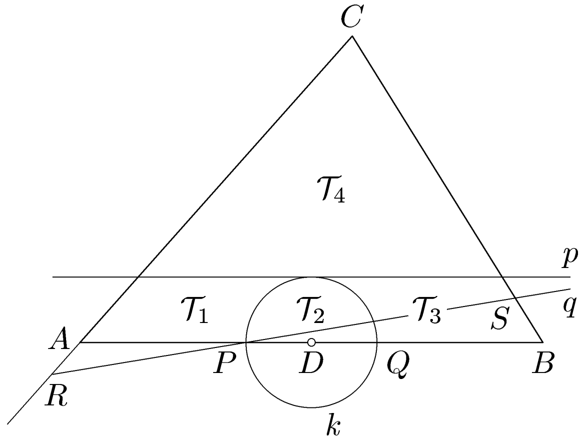
$$(36a_1 + b_1)\,(36b_1 + a_1) = 2^{n-2}.$$

Takýto postup môžeme opakovať dovtedy, kým nebude mocnina čísla 2 menšia ako 10, čím dôjdeme ku sporu.

5.7 *(Katarína Quittnerová)* V úvode si povedzme niečo o množinách bodov v rovine. Najprv si uvedomme, čo je vlastne *konvexná množina*. Je to množina bodov taká, že ak v nej ležia dva body, tak v nej leží aj celá úsečka, ktorá ich spája. Toto spĺňajú konvexné mnohouholníky, ale napríklad aj polrovina a kruh. Ďalej si uvedieme nejaké definície. Nech $\mathcal{M}$ je množina bodov v rovine. Hovoríme, že $\mathcal{M}$ je *otvorená*, ak okolo každého jej bodu možno opísať krúžok, ktorý celý leží v $\mathcal{M}$. Hovoríme, že $\mathcal{M}$ je *uzavretá*, ak okolo každého bodu, ktorý v nej neleží možno opísať krúžok, ktorý má s $\mathcal{M}$ prázdny prienik.

Tvrdenie dokážeme sporom. Nech $\mathcal{K}$ je (neprázdna) uzavretá a konvexná množina bodov v rovine, ktorá je obsiahnutá v trojuholníku ABC s minimálnym obsahom a neobsahuje stred strany RQ (označíme ho D). Z uzavretosti vyplýva, že existuje kruh (nech je ohraničený kružnicou k) so stredom D a polomerom $r > 0$, ktorý má s $\mathcal{K}$ prázdny prienik. Naviac nech $2r < c = |AB|$ (inak kružnicu zmenšíme). Označme

P, Q priesečníky kružnice k so stranou AB, pričom $|AP| < |AQ|$. Nech p je dotyčnica kružnice k, ktorá je rovnobežná s priamkou AB a leží v polrovine ABC.



Obr. 77

Priamka p a kružnica k rozdeľujú trojuholník ABC na štyri časti $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_3$ a $\mathcal{T}_4$ (pozri obrázok). Pritom $\mathcal{K}$ má s $\mathcal{T}_2$ prázdny prienik. Každá spojnica bodov X, Y, ktoré ležia postupne v $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_3$ má zrejme neprázdny prienik s $\mathcal{T}_2$. Potom z konvexnosti dostávame, že $\mathcal{K}$ musí mať prázdny prienik aspoň s jednou z častí $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3$. Bez ujmy na všeobecnosti nech je to $\mathcal{T}_3$. Vezmime teraz takú priamku q, ktorá prechádza bodom P a pre jej priesečníky R a S s priamkou AC a stranou BC platí $|RA| < r$, $|SB| < r$ (taká priamka zrejme existuje). Potom platí $|\sphericalangle APR| = |\sphericalangle BPS|$ (ide o vrcholové uhly), $|AP| = \frac{1}{2}c - r$, $|BP| = \frac{1}{2}c + r > |AP|$, $|RP| < |AP| + |AR| < \frac{1}{2}c - r + r = \frac{1}{2}c$, $|PS| \geqq |PB| - |BS| > > \frac{1}{2}c + r - r = \frac{1}{2}c > |RP|$. Z toho máme

$$S_{\triangle APR} = \frac{1}{2}|AP| \cdot |RP| \cdot \sin |\sphericalangle APR| < \frac{1}{2}|BP| \cdot |PS| \cdot \sin |\sphericalangle BPS| = S_{\triangle BPS}.$$

Potom ale $S_{\triangle RSC} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle BPS} + S_{\triangle APR} < S_{\triangle ABC}$. Pritom trojuholník PBS je celý obsiahnutý v zjednotení častí $\mathcal{T}_2$ a $\mathcal{T}_3$. Pritom ale $\mathcal{K}$ je obsiahnuté vo štvoruholníku $APSC$, ktorý je zase obsiahnutý v trojuholníku RSC. Z poslednej rovnosti však dostávame spor s minimalitou obsahu trojuholníka ABC.

Tým sme dokázali, čo bolo treba.

Iné korešpondenčné semináre

Okrem matematickej olympiády sú pre študentov základných aj stredných škôl počas školského roka organizované aj iné matematické súťaže. Patria medzi ne predovšetkým korešpondenčné semináre. Tieto súťaže sa v detailoch istotne líšia, avšak základné črty majú spoločné: počas školského roka prebiehajú dve časti (letná a zimná), ktoré pozostávajú zväčša z troch sérií úloh rozosielaných riešiteľom do škôl alebo domov. Riešenia súťažiaci vypracovávajú rovnakou formou ako v MO a v určenom termíne ich odosielajú na adresu príslušného seminára, odkiaľ sa po niekoľkých dňoch až týždňoch vrátia opravené spolu so vzorovými riešeniami a výsledkovou listinou. Mladší a menej skúsení riešitelia zväčša nemusia riešiť tie najzložitejšie príklady, aby aj oni mali šancu ovplyvniť poradie na prvých miestach. Na konci oboch častí súťaže sú približne tridsiati najúspešnejší riešitelia pozývaní na týždňové sústredenie, účasť na ktorom býva často najsilnejšou motiváciou na riešenie úloh. Nie je ale možné nespomenúť, že takýto pravidelný tréning sa odráža aj na výsledkoch dosahovaných v MO, a že drvivá väčšina reprezentantov Slovenska a Českej republiky na MMO, príp. MIO sa aktívne zapájala do viacerých z týchto seminárov.

Nižšie uvedené korešpondenčné semináre (KS) sú určené predovšetkým študentom stredných škôl, svojim záberom pokrývajú územie celého Slovenska a často majú aj riešiteľov z Českej Republiky. Je však možné, že vo svojom okolí nájdete aj menšie súťaže podobného druhu.

Bratislava — Bratislavský korešpondenčný matematický seminár — BKMS

Tento KS je organizovaný študentmi MFF UK v Bratislave zväčša (80%) bratislavského pôvodu. Série bývajú tematicky zamerané a obsahujú niekedy aj veľmi náročné úlohy. Okrem seminára ÚK MO sa práve tento najviac venuje príprave na MO v kategórii A. Sústredenia s pestrou celoslovenskou účasťou a takmer vždy aj so vzorkou „zahraničného“ účastníka z ČR mávajú asi najbohatší matematický program.

BKMS
RNDr. Jaroslav Guričan, CSc.
KATČ MFF UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

e-mail: bkms@pobox.sk
URL: http://www.bkms.sk/

Stredné Slovensko — Stredoslovenský korešpondenčný matematický seminár — SKMS

Tento KS je momentálne organizovaný skupinou študentov MFF UK v Bratislave, pochádzajúcich zo stredného, príp. východného Slovenska. Je pokračovateľom tradície stredoslovenských KS organizovaných v minulosti zo Žiliny a Banskej Bystrice.

Do súčasnej podoby sa SKMS prepracoval pred niekoľkými rokmi, keď sa organizácie ujala skupina bývalých riešiteľov, v tom čase študujúcich v Bratislave. Pre túto súťaž je charakteristický nízky vekový priemer riešiteľov, súťažné úlohy majú blízko ku kategórii B alebo C MO.

SKMS
KZDM MFF UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

e-mail: skms@host.sk
URL: http://skms.miesto.sk/

Východné Slovensko — Korešpondenčný seminár z matematiky STROM

Korešpondenčný seminár STROM je organizovaný z PF UPJŠ v Košiciach skupinou nadšencov, väčšinou bývalých riešiteľov seminára. Je pokračovateľom najstaršieho korešpondenčného seminára v bývalom Československu. Jednotlivé série bývajú tematicky zamerané, témy však často bývajú netradičné a niekedy sa obsahovo líšia od úloh v MO. Sústredenia s najmä „východoslovenskou“ účasťou majú takmer neprekonateľne družnú atmosféru.

STROM
PF UPJŠ
Jesenná 5
040 01 Košice

e-mail: strom@upjs.sk
URL: http://www.strom.sk/

Korešpondenčný seminár z programovania — KSP

Na rozdiel od predchádzajúcich KS, je KSP súťažou v programovaní. Všetky jeho súťažné úlohy sú, podobne ako na MIO, praktické. KSP je organizovaný zanietenou skupinkou študentov MFF UK v Bratislave, ktorí majú zároveň na starosti všetky ostatné súťaže v programovaní od COFAX-u až po MO–P. Sústredenia bývajú mierne netradične na jar a na jeseň.

KSP
KVI MFF UK
Mlynská Dolina
842 48 Bratislava

e-mail: ksp@ksp.sk
URL: http://www.ksp.sk/

Ak ste sa rozhodli do niektorého zo seminárov zapojiť, najrozumnejšie je požiadať o zaslanie úloh prvej série začiatkom septembra alebo začiatkom januára.

RNDr. Karel Horák, CSc. – Eugen Kováč
Mgr. Jana Višňovská – Juraj Földes – Ján Špakula
Vladimír Koutný – Martin Pál
Úlohová komisia MO

**Štyridsiatydeviaty ročník
Matematickej olympiády
na stredných školách**

Sadzbu programom TEX pripravili RNDr. Karel Horák, CSc., Eugen Kováč a Vladimír Koutný
Zostavil: Eugen Kováč
Recenzoval: doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.
Zodpovedný redaktor: Mgr. Dana Úradníčková
Grafická úprava obálky Vladimír Koutný a Richard Kollár
Neprešlo jazykovou úpravou
Náklad: 625 ks

Iuventa, Bratislava 2001

ISBN 80–88893–66–6
EAN 978–80–88893–66–0