48. ROČNÍK
MATEMATICKEJ
OLYMPIÁDY
NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

Správa o riešení úloh zo súťaže konanej v školskom roku 1998/1999

40. MEDZINÁRODNÁ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA
11. MEDZINÁRODNÁ OLYMPIÁDA V INFORMATIKE

IUVENTA

S pomocou spolupracovníkov spracovali
RNDr. Karel Horák, CSc.,
Jana Višňovská, Eugen Kováč, Juraj Földes, Ján Špakula
Tomáš Vinař, Vladimír Koutný, Martin Pál a členovia Úlohovej komisie MO.

Zostavovateľ: Eugen Kováč, 1999

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX.

ISBN ???????

O priebehu 48. ročníka matematickej olympiády

Matematická olympiáda (MO) je súťažou žiakov základných a stredných škôl. Jej vyhlasovateľom je Ministerstvo školstva Slovenskej republiky v spolupráci s Jednotou slovenských matematikov a fyzikov. Tento ročník MO na Slovensku riadila Slovenská komisia matematickej olympiády (SK MO). Jednotlivé kolá odborne a organizačne zabezpečovali okresné a krajské komisie MO (KK MO). Cieľom súťaže je vyhľadávanie žiakov talentovaných v matematike, prebúdzanie a podpora ich záujmu o ňu, rozvíjanie ich matematických schopností a ich usmerňovanie a vedenie k samostatnej tvorivej činnosti. Vyvrcholením súťaže je príprava na úspešnú reprezentáciu Slovenskej republiky a účasť na medzinárodných súťažiach, najmä na Medzinárodnej matematickej olympiáde (MMO) a Medzinárodnej informatickej olympiáde (MIO). V školskom roku 1998/1999 sa uskutočnil už 48. ročník MO, pretože matematická olympiáda na Slovensku je pokračovateľom rovnakej súťaže z bývalého Československa. Aj v tomto ročníku boli úlohy vo všetkých kolách MO v Českej republike a na Slovensku rovnaké. S potešením možno konštatovať, že MO aj tentokrát prebehla vo všetkých 79 okresoch, a tiež vo všetkých 8 krajoch Slovenskej republiky. Personálne obsadenie SK MO v 48. ročníku súťaže bolo nasledovné.

Predsedníctvo SK MO tvorili:

doc. RNDr. Vladislav Rosa, CSc. z MFF UK Bratislava, predseda SK MO.
doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., FDS ŽU Žilina, podpredseda SK MO,
RNDr. Pavol Černek, CSc., MFF UK Bratislava, tajomník pre odborné otázky,
RNDr. Monika Krállová, MFF UK Bratislava, tajomník pre organizačné otázky,
PhDr. Oto Klostermann, zástupca MŠ SR,
Ivan Lukáč, zástupca IUVENTY,
RNDr. Andrej Blaho, CSc., MFF UK Bratislava,
RNDr. Jozef Fulier, CSc., FPV UKF Nitra,
doc. RNDr. Tomáš Hecht, CSc., MFF UK Bratislava,
Mgr. Jana Višňovská, MFF UK Bratislava,
prof. RNDr. Jozef Moravčík, CSc., SF ŽU Žilina.

Členmi predsedníctva sú ďalej predsedovia krajských komisií:

doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., FDS ŽU Žilina,
RNDr. Jaroslava Brincková, CSc., FHPV UMB Banská Bystrica,
Mgr. Milan Demko, PedF PU Prešov,
RNDr. Soňa Pavlíková, CSc. , TU Trenčín,
doc. RNDr. Pavol Híc, CSc., PF TU Trnava,
RNDr. Vladimír Jodas, MCMB Bratislava,
RNDr. Božena Miháliková, CSc., PF UPJŠ Košice,
prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc., FPV UKF Nitra.

SK MO ďalej tvorili:

Bronislava Brejová, MFF UK Bratislava,
RNDr. Milan Cirjak, MC Prešov,
RNDr. Milota Hilková, ZŠ Jilemnického, Revúca,
RNDr. Anton Hnát, Gymnázium Michalovce,
Mgr. Jozef Mészáros, Gymnázium s vyuč. jaz. maď. Galanta,
RNDr. Dagmar Mikulášová, Gymnázium Trenčín,
RNDr. Dana Smutná, FPHV UMB Banská Bystrica,
Tomáš Vinař, MFF UK Bratislava,
Mgr. Dagmar Vongrejová, ZŠ Moskovská Žilina.

V priebehu 48. ročníka MO sa uskutočnilo jedno plenárne zasadnutie SK MO a tri zasadnutia predsedníctva SK MO. Zamerali sa na obsahové a organizačné zabezpečenie MO, finančné pokrytie súťaže, ďalšie aktivity (korešpondenčné semináre, sústredenia a pod.), ako aj na pokračovanie v partnerskej spolupráci s českou Ústřední komisí MO pri príprave súťažných úloh a termínovom zabezpečovaní prebiehajúceho i budúceho ročníka MO. Hostiteľom pri oboch zasadnutiach úlohových komisií bola v tomto ročníku česká strana. Úlohy MO sú prevažne pôvodné, za zadaním každej súťažnej úlohy preto v ďalšom texte v zátvorke uvádzame meno autora (resp. navrhovateľa) úlohy.

Organizácia súťaže zostala v 48. ročníku MO zachovaná: pre žiakov základných škôl bola rozdelená do piatich kategórií Z4 – Z9 určených žiakom 4. až 9. ročníka ZŠ a odpovedajúcich ročníkov osemročných gymnázií. Pre žiakov stredných škôl a im zodpovedajúcich ročníkov viacročných gymnázií bola súťaž organizovaná v štyroch kategóriách: C, B, A a P. Kategória C bola určená pre študentov prvých ročníkov, kategória B pre študentov druhých ročníkov a kategória A pre študentov tretích a štvrtých ročníkov stredných škôl. Kategória P, zameraná na úlohy z programovania a matematickej informatiky, bola určená žiakom všetkých ročníkov stredných škôl. Talentovaní žiaci mohli po súhlase svojho učiteľa matematiky súťažiť aj vo vyššej vekovej kategórii. Týkalo sa to aj žiakov ZŠ, ktorí tiež mohli súťažiť v niektorej z kategórií A, B ,C a P.

Súťaž v každej z kategórií pozostáva z niekoľkých postupových kôl, pričom v kategórii Z4 je najvyšším kolom školské kolo, v kategóriách Z5 – Z7 je to okresné kolo, v kategóriách Z9, C a B sa súťaž končí krajským kolom a v kategóriách A a P olympiáda vyvrcholila celoštátnym kolom.

Do celoštátneho kola bolo pozvaných 36 najlepších riešiteľov krajských kôl v kategórii A a 25 najlepších riešiteľov krajských kôl v kategórii P, pričom sa postupovalo podľa poradia zostaveného po koordinácii bodových hodnotení z jednotlivých krajov. V tomto kole je súťaž rozdelená do dvoch dní. V kategórii A riešia súťažiaci každý deň tri úlohy v časovom limite 4 hodiny, v kategórii P v rovnakom limite prvý deň tri teoretické a druhý deň dve praktické úlohy na počítači.

Celoštátne kolo 48. ročníka MO kategórie A sa uskutočnilo v dňoch 12.–13.4.1999 v *Modre* a celoštátne kolo 48. ročníka MO kategórie P v dňoch 14.–17.4.1999 v *Modre*. Na úspešnom priebehu celoštátneho kola má mimoriadnu zásluhu predseda KK MO doc. RNDr. Vladislav Rosa, CSc., taktiež obetaví študenti MFF UK Bratislava a riaditeľ

SOU OV v Modre.

Desať najúspešnejších riešiteľov tretieho kola MO kategórie A prijalo pozvanie na výberové sústredenie pred 40. Medzinárodnou matematickou olympiádou, ktoré sa konalo v dňoch 26.4.–30.4.1999 na MFF UK v Bratislave. Na základe výsledkov tohoto sústredenia, výsledkov predchádzajúcich kôl MO a s prihliadnutím na úspešnosť v korešpondenčnom seminári SK MO bolo na konci sústredenia vybrané šesťčlenné družstvo na reprezentáciu SR na MMO v Bukurešti v dňoch 10.–22.7.1999. Tento výber absolvoval ešte jedno (prípravné) sústredenie v dňoch 20.–25.6.1999 *na Zochovej chate* a zároveň nás reprezentoval na piatom ročníku medzištátneho stretnutia s Českou republikou, ktoré sa konalo v dňoch 8.–11.6.1999 *v Bílovci*. Medzištátnemu stretnutiu ako aj MMO sú v tejto ročenke venované samostatné kapitoly.

Výberové sústredenie pre 11 najlepších riešiteľov v kategórii P sa uskutočnilo v dňoch 6.6.–11.6.1999 na MFF UK v Bratislave. V rámci náročného sústredenia, ktoré približovalo podmienky medzinárodnej súťaže, účastníci každý deň dopoludnia tvorili programy, ktoré v ten istý deň večer aj spoločne vyhodnocovali. Na základe dosiahnutých výsledkov schválila SK MO zloženie štvorčlenného družstva, ktoré v dňoch 9.–16.10.1999 reprezentovalo SR na MIO v Turecku. Toto družstvo pred MIO absolvovalo ešte jedno prípravné sústredenie v dňoch 28.8.–3.9.1999 na MFF UK v Bratislave. Rovnako bolo na základe výsledkov výberového sústredenia schválené štvorčlenné reprezentačné družstvo, ktoré sa v dňoch 2.–9.9.1999 zúčastnilo na Stredoeurópskej informatickej olympiáde v Brne. Obom súťažiam sú venované samostatné kapitoly.

Ako už bolo spomenuté, súčasťou celoročnej prípravy na MO sú aj rôzne korešpondenčné semináre (KS) a sústredenia na okresnej a krajskej úrovni. Aj v tomto ročníku prebiehalo niekoľko KS s celoslovenskou pôsobnosťou a to:

Bratislavský korešpondenčný matematický seminár (BKMS),
Stredoslovenský korešpondenčný seminár (SSS),
Košický korešpondenčný seminár (STROM),
Korešpondenčný seminár z programovania (KSP).

Stručná informácia o týchto aktivitách, spolu s kontaktnými adresami, možno nájsť v samostatnej kapitole.

Výsledky celoštátneho kola, kategória A

Víťazi

1.	Peter NOVOTNÝ	4 G V.Okružná Žilina	7	7	7	4	7	3	35
2.	Michal FORIŠEK	4 G Popr. nábr. Poprad	7	1	6	6	0	7	27
3.	Balázs KESZEGH	3 G Fazekas Budapest	7	7	3	2	0	7	26
	Katarína QUITTNEROVÁ	1 G Bilíková Bratislava	7	5	1	0	6	7	26
5.	Marian ERTL	3 G Prievidza	7	7	0	2	5	3	24
	Martin HRIŇÁK	4 G Alejová Košice	7	7	3	1	0	6	24
	Miroslava SOTÁKOVÁ	3 G Poštová Košice	6	7	7	1	0	3	24
8.	Kristína ČERNEKOVÁ	4 G kpt. Jaroše Brno	7	7	3	1	0	5	23
	Josef ŠEVČÍK	3 G Gröss. Bratislava	7	4	7	2	0	3	23

Ďalší úspešní riešitelia

10.	Peter HUSZÁR	4 G Selyeho Komárno	4	7	5	2	0	4	22
	Martin POTOČNÝ	4 G J.Hronca Bratislava	7	7	1	2	4	1	22
12.	Alena KOVÁROVÁ	4 G Gröss. Bratislava	7	3	1	1	4	5	21
	Peter PRAVDA	3 G Prievidza	7	7	1	2	2	2	21
14.	Vladimír ZAJAC	3 G Gröss. Bratislava	7	7	4	0	0	2	20
15.	Tomáš KULICH	2 G Prievidza	3	0	4	0	5	7	19
16.	Marian KRÁTKY	4 G JGT Banská Bystrica	3	0	7	0	5	1	16
	Jakub ŠALAMON	4 G Gröss. Bratislava	7	5	2	2	0	0	16
18.	István GYÜRKI	3 G Želiezovce	7	1	2	1	0	3	14
	Anna KORDULIAKOVÁ	3 G Alejová Košice	7	1	1	1	1	3	14

Ostatní riešitelia

20.	Tomáš GALBAVÝ	3 G Gröss. Bratislava	7	0	3	3	0	0	13
	Jozef ŠKORUPA	4 G Liptovský Mikuláš	0	7	1	0	1	4	13
	Martin TROJÁK	3 G V.Okružná Žilina	3	7	1	0	0	2	13
23.	Tomáš JURÍK	3 G Poštová Košice	6	4	1	0	0	1	12
24.	Peter MOLNÁR	3 G Poštová Košice	3	0	4	1	0	3	11
25.	Radoslav FULEK	3 G V.Okružná Žilina	2	0	1	0	3	4	10
	Peter MÁJEK	3 G J.Hronca Bratislava	5	1	1	1	0	2	10
	Michal POKORNÝ	2 G Gröss. Bratislava	7	0	0	3	0	0	10
28.	Peter ČENDULA	2 G Liptovský Mikuláš	3	0	3	0	0	3	9

	Keve KURUCZ	3 G Selyeho Komárno	6	0	1	2	0	0	9
	Peter VAVRÁK	3 G J.Hronca Bratislava	6	0	1	2	0	0	9
31.	Róbert BURSA	3 G Alejová Košice	2	0	2	0	2	1	7
	Petra FENCÍKOVÁ	4 G Alejová Košice	2	0	2	2	0	1	7
	Ľubor LADICKÝ	4 G Nové Mesto n. Váhom	4	0	1	0	0	2	7
	Roman NEDELA	3 G JGT Banská Bystrica	0	7	0	0	0	0	7
	Filip VÍTEK	3 G J.Hronca Bratislava	2	0	1	1	0	3	7
36.	Mário TRUBAČIK	4 G Dubnica	0	0	1	0	0	3	4

Úspešnosť jednotlivých úloh je zaznamenaná v tabuľke.

Počet bodov	**Spolu**	**Číslo úlohy**					
		1.	2.	3.	4.	5.	6.
7 bodov	39	17	13	4	0	1	4
6 bodov	8	4	0	1	1	1	1
5 bodov	9	1	2	1	0	3	2
4 body	13	2	2	3	1	2	3
3 body	24	5	1	5	2	1	10
2 body	25	4	0	4	10	2	5
1 bod	35	0	4	15	9	2	5
0 bodov	63	3	14	3	13	24	6
Priemer	2,66	4,97	3,22	2,47	1,25	1,25	2,81

Výsledky celoštátneho kola, kategória P

Víťazi

1.	Richard KRÁĽOVIČ	4 G J. Hronca Bratislava	10	8	6	6	9	39
2.	Michal FORIŠEK	4 G Popradské nábr. Poprad	10	7	10	3	3	33
3.	Ján SENKO	4 SPŠE Komenského Košice	8	5	10	3	5	31
4.	Michal BREZNICKÝ	4 G Konštantínova Prešov	8	4	10	0	7	29
5.	Ján LUNTER	5 G J.G.Tajovského B.Bystrica	9	3	10	6	0	28
6.	Dávid PÁL	4 G J. Hronca Bratislava	9	5	8	0	3	25

Ďalší úspešní riešitelia

7.	Vladimír KOUTNÝ	4 G J. Hronca Bratislava	9	5	2	3	5	24
8.	Ján ORAVEC	2 G J.G.Tajovského B.Bystrica	5	4	9	1	1	20
	Tomáš KEZES	4 G Nové Zámky	8	2	5	-	5	20
10.	Jozef ŠIŠKA	4 Ev. gym. B.Bystrica	4	5	7	0	2	18
11.	Peter KOŠINÁR	3 G J. Hronca Bratislava	8	3	3	3	0	17
12.	Martin POTOČNÝ	4 G J. Hronca Bratislava	-	6	10	-	0	16
	Branislav KATRENIAK	4 SPŠ Laskomerského Brezno	6	5	5	0	0	16

Ostatní riešitelia

14.	Matej SAPÁK	3 G J. Hronca Bratislava	9	2	3	0	1	15
	Ivan PILIŠ	4 G Veľká Okružná Žilina	2	3	5	-	5	15
	Ľubomír ČECH	3 G Senecká Pezinok	6	2	2	0	5	15
17.	Peter BELLA	1 G J. Hronca Bratislava	4	0	8	0	0	12
	Miroslav BAJTOŠ	3 G J. Hronca Bratislava	6	3	0	3	-	12
19.	Josef ŠEVČÍK	3 G Grösslingová Bratislava	2	2	7	0	-	11
	Štefan VARGA	3 G J. Hronca Bratislava	3	4	4	0	0	11
21.	Miroslav RUDIŠIN	2 G Šrobárova Košice	0	4	6	0	0	10
	Vladimír WIEDERMANN	4 G Nedožerského Prievidza	2	-	8	-	0	10
23.	Július WEISSENSTEINER	4 G Nám. SNP 9 Piešťany	0	4	4	1	0	9
24.	Slavomír KATUŠČÁK	3 G Konštantínova Prešov	4	3	0	0	0	7
	Jana GAJDOŠÍKOVÁ	4 G J. Hronca Bratislava	2	5	0	0	0	7
	Marián POTOČNÝ	3 G J. Hronca Bratislava	0	7	-	0	0	7

Výsledky krajských kôl

Z každého kraja a z každej z kategórii A, B, C, P a Z8 sú uvedení všetci, resp. aspoň prvých 10 úspešných riešiteľov. V kategóriách B, C, Z8, ak nie je uvedené inak, sú všetci žiaci študentmi 2., resp. 1., resp. 8. ročníka. Gymnázia so zameraním na matematiku, študijný odbor 01 sú tieto:
Gymnázium Grösslingová, Bratislava,
Gymnázium Párovská, Nitra,
Gymnázium Veľká Okružná, Žilina,
Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica,
Gymnázium Alejová, Košice,
Gymnázium Poštová, Košice.

Kraj Bratislava

Kategória A

1.	Josef ŠEVČÍK	3, Gymnázium Grösslingová
2.	Peter MÁJEK	3, Gymnázium J.Hronca
3.	Vladimír ZAJAC	3, Gymnázium Grösslingová
4.	Kristína ČERNEKOVÁ	4,Gymnázium kpt. Jaroše Brno
5.–9.	Alena KOVÁROVÁ	4, Gymnázium Grösslingová
	Michal POKORNÝ	2, Gymnázium Grösslingová
	Katarína QUITTNEROVÁ	1, Gymnázium Bilíkova
	Jakub ŠALAMON	4, Gymnázium Grösslingová
	Peter VAVRÁK	3, Gymnázium J.Hronca
10.	Martin POTOČNÝ	4, Gymnázium J.Hronca

Kategória B

1.	Jana SZOLGAYOVÁ	Gymnázium Grösslingová
2.	Tomáš FARKAŠ	Gymnázium Grösslingová
3.–4.	Daniel BOBOVSKÝ	Gymnázium Grösslingová
	Branislav NOVOTNÝ	Gymnázium Grösslingová
5.	Michal POKORNÝ	Gymnázium Grösslingová
6.	Gejza WIMMER	Gymnázium Grösslingová

7.–9.	Juraj FIELHAUER	Gymnázium Grösslingová
	Tomáš HAJAS	Gymnázium J.Hronca
	Robert MATUS	Gymnázium Dunajská
10.–11.	Andrej DUDÍK	Gymnázium Grösslingová
	Miroslav POMŠÁR	Gymnázium J.Hronca

Kategória C

1.–4.	Peter BELLA	Gymnázium J.Hronca
	Michal MIKUŠ	Gymnázium J.Hronca
	Andrej OSUSKÝ	Gymnázium J.Hronca
	Katarína QUITTNEROVÁ	Gymnázium Bilíkova
5.–6.	Peter DZURIANIN	Gymnázium Grösslingová
	Jozef TVAROŽEK	Gymnázium J.Hronca
7.	Štefan ŠURINA	Gymnázium J.Hronca
8.	Tomáš VOROBJOV	Gymnázium J.Hronca
9.–10.	Matúš HAVRAN	Gymnázium J.Hronca
	Martin SVETLÍK	Gymnázium Grösslingová

Kategória Z9

1.–2.	Kristián DANEV	ZŠ a G Košická
	Edita ROLLOVÁ	G Grösslingová
3.	Jakub ZÁVODNÝ	G Grösslingová
4.–6.	Janiga PETER	ZŠ a G Košická
	Ľuba KRIVÁ	G Grösslingová
	Tomáš MIKUŠ	ZŠ a G Košická
7.	Barbora ŠKANDÍKOVÁ	G Grösslingová
8.–10.	Veronika BREZOVÁ	G Grösslingová
	Branislav ŠTEPITA	Evan. Lýceum Palisády
	Juraj ŽIŽÁK	G Sv. rodiny

Kategória P

1.	Richard KRÁĽOVIČ	4, Gymnázium J.Hronca
2.	Dávid PÁL	4, Gymnázium J.Hronca
3.–4.	Peter KOŠINÁR	3, Gymnázium J.Hronca
	Matej SAPÁK	3, Gymnázium J.Hronca
5.–7.	Jana GAJDOŠÍKOVÁ	4, Gymnázium J.Hronca
	Vladimír KOUTNÝ	4, Gymnázium J.Hronca
	Josef ŠEVČÍK	3, Gymnázium Grösslingová

8.–9.	Miroslav BAJTOŠ	3, Gymnázium Grösslingová
	Martin POTOČNÝ	4, Gymnázium J.Hronca
10.	Štefan VARGA	3, Gymnázium J.Hronca

Kraj Nitra

Kategória A

1.	Balázs KESZEGH	3, Gymnázium maď., Komárno
2.	Peter HUSZÁR	4, Gymnázium maď., Komárno
3.	Keve KURUCZ	3, Gymnázium maď., Komárno
4.	István GYÜRKI	3, Gymnázium maď., Želiezovce
5.	Daniel HETÉNYI	4, Gymnázium Párovská, Nitra

Kategória B

1.	Miloš MEDŘÍK	Gymnázium Párovská, Nitra
2.	Gergely JAKAB	Gymnázium maď., Šahy
3.	Zoltán ÁDÁM	Gymnázium maď., Komárno
4.	Zoltán MICS	Gymnázium maď., Šahy
5.	Peter KRČAH	Gymnázium Párovská, Nitra
6.	Slavka ĎURIŠOVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
7.–9.	Endre KURUCZ	Gymnázium maď., Komárno
	Mária LACKOVÁ	Gymnázium Levice
	Tomáš LAKATOS	Gymnázium Nové Zámky
10.–12.	Monika BABIAKOVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
	Ľudovít HALÁS	Gymnázium Párovská, Nitra
	Gábor MINÁRIK	SPŠE Komárno

Kategória C

1.	Pavol CVIK	9,Gymnázium Levice
2.–3.	Viktor BACHRATÝ	Gymnázium Nové Zámky
	Dénes KUCSERA	Gymnázium maď., Komárno
4.	Igor KRUK	Gymnázium Šahy
5.	Ladislav HATYINA	Gymnázium maď., Komárno
6.–10.	János KLACSO	Gymnázium maď., Šahy
	Róbert KOMÁROMY	Gymnázium Nové Zámky
	Lívia KOMÁROVÁ	Gymnázium maď., Komárno
	Vladimír MOLNÁR	Gymnázium Párovská, Nitra
	Daniel ŽATKO	Gymnázium J.Kráľa, Zlaté Moravce

Kategória Z9

1.	Imre KUKEL	Gymnázium maď., Komárno
2.	Peter KOLTAI	Gymnázium maď., Komárno
3.	Pavol CVIK	Gymnázium Levice
4.	Eva STREDOVÁ	Gymnázium Štúrovo
5.–8.	Marek BOČÁNEK	Gymnázium Ľ.J. Šuléka, Komárno
	Martin MOLNÁR	ZŠ Jesenského, Levice
	Stanislav HAVRAN	Gymnázium J.Kráľa, Zlaté Moravce
	Juraj ĎURECH	Gymnázium Golianova, Nitra

Kategória P

1.	Tomáš KEZES	4, Gymnázium Nové Zámky

Kraj Trnava

Kategória A

1.	Katarína SEKÁČOVÁ	3, Gymnázium Piešťany

Kategória B

1.	Filip VALAŠEK	Gymnázium J.Bottu, Trnava
2.	Kamil CHOVANEC	Gymnázium Sereď
3.–6.	Katarína BARCALOVÁ	Gymnázium maď. Šamorín
	Roman JURÁŠ	Gymnázium Skalica
	Laco MÁRTA	Gymnázium maď. Šamorín
	Alexander PAKÁC	Gymnázium maď. Šamorín
7.	Juraj NEČAS	Gymnázium Skalica
8.	Lenka NÉMETHOVÁ	Gymnázium Dunajská Streda
9.–11.	Gaál BENEDEK	Gymnázium maď. Galnanta
	Balázs HEGI	Gymnázium maď. Šamorín

Kategória C

1.	Matúš ONDREJIČKA	Gymnázium Senica
2.	Jana FIALOVÁ	Gymnázium J.Hollého, Trnava
3.	Ladislav SZABÓ	Gymnázium maď. Dunajská Streda
4.	Terézia MILLOVÁ	Gymnázium Senica
5.–10.	Gyoncyi BÚSS	Gymnázium Šamorín
	Monika NAGYOVÁ	Gymnázium maď. Dunajská Streda
	Peter NIKODEM	Gymnázium Skalica
	Ondrej BEŇAČKA	Gymnázium Piešťany
	Tomáš JANÍK	Gymnázium Piešťany
	Marek ČELÍN	SPŠE Piešťany

Kategória Z9

1.	Mária DANADOVÁ	Gymnázium Senica
2.	Štefan BARTOŠ	Gymnázium maď. Galanta
3.	Tomáš VARGA	Gymnázium maď. Galanta
4.–7.	Zuzana MASTENOVÁ	Gymnázium M.R. Štefánika, Trnava
	Milan MAJERNÍK	Gymnázium Skalica
	Ingrid MALATINSKÁ	Gymnázium Senica
	Peter ZUBČÁK	ZŠ Koperníkova, Trnava
8.	Peter ŽITNÝ	ZŠ Holubyho ul., Piešťany
9.	Andrej ĎURIŠ	IV. ZŠ Nerudova ul., Trnava

Kategória P

1.	Július WEISSENSTEINER	4, Gymnázium Piešťany

Kraj Trenčín

Kategória A

1.	Tomáš KULICH	2, Gymnázium Prievidza
2.–3.	Mário TRUBAČEK	4, Gymnázium Dubnica nad Váhom
	Marián ERTL	3, Gymnázium Prievidza
4.	Peter PRAVDA	3, Gymnázium Prievidza

Kategória B

1.	Tomáš KULICH	Gymnázium Prievidza
2.	Martin STRAPKO	Gymnázium Púchov
3.	Slavomír PŠENÁK	Gymnázium Púchov
4.–6	Tomáš TRÚCHLY	Gymnázium Dubnica nad Váhom
	Rudolf ŽIVČIC	Gymnázium Dubnica nad Váhom
	Mária BENDOVÁ	Gymnázium Prievidza
7.–8.	Viktor ISKRA	Gymnázium Dubnica nad Váhom
	Tomáš KOTRÍK	Gymnázium Dubnica nad Váhom
9.	Michal ZACHAR	Gymnázium Prievidza
10.	Pavol FÜLÖP	PGJB Trenčín

Kategória C

1.–3.	Juraj LADICKÝ	Gymnázium Partizánske
	Roman MIRC	Gymnázium MRŠ., Nové Mesto nad Váhom
	Miroslav KAČENA	PGJB Trenčín
4.	Ivan PRÁŠEK	Gymnázium Bánovce nad Bebravou
5.–6.	Lucia TIEREROVÁ	Gymnázium Partizánske
	Michal PECÚCH	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
7.	Robert ZVONÁR	Gymnázium Dubnica nad Váhom
8.–9.	Michal LICHVÁR	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
	Ľuboš GERGEL	SPŠE Myjava

Kategória Z9

1.	Michal STAŇO	ZŠ H.Galoviča, Pruské
2.	Tomáš BALÁŽ	I. ZŠ Hviezdoslavova, Nová Dubnica
3.	Zuzana RYCHTÁRECHOVÁ	ZŠ Duklianska, Bánovce nad Bebravou
4.	Milan HULÍK	ZŠ Slovanská, Považská Bystrica
5.	Mariana MARUŠINCOVÁ	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
6.–7.	Tomáš MIKULA	Gymnázium Nováky
	Jana MARTIŠKOVÁ	ZŠ Horné Sŕnie
8.–12.	Katarína STEHLÍKOVÁ	ZŠ sv. J. Klčové, Nové Mesto nad Váhom
	Martin ČEPELA	ZŠ Komenského, Stará Turá
	Jozef HRIC	Gymnázium L. Novomeského, Stará Turá
	Juraj TOMÁŠIK	Gymnázium Handlová
	Lýdia GÁBIKOVÁ	ZŠ Horné Sŕnie

Kategória P

1.	Vladimír WIEDERMANN	4, Gymnázium Prievidza
2.	Marián ŠIŠMIŠ	4, Gymnázium Bánovce nad Bebravou
3.	Ondrej GÁLIK	4, Gymnázium Prievidza

Kraj Žilina

Kategória A

1.	Peter NOVOTNÝ	4, Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
2.	Martin TROJÁK	3, Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
3.–4.	Peter ČENDULA	2, Gymnázium Liptovský Mikuláš
	Jozef ŠKORUPA	4, Gymnázium Liptovský Mikuláš
5.–6.	Radoslav FULEK	3, Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
	Michal PEŠTA	2, Gymnázium Liptovský Mikuláš

Kategória B

1.	Branislav MIKULÁŠ	Gymnázium V. Paulinyho Tótha, Martin
2.	Jozef JURÍČEK	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
3.–4.	Martin DUBEC	Gymnázium Hlinská, Žilina
	Juraj LAŠŠUTH	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
5.	Ema BIELIKOVÁ	Gymnázium V. Paulinyho Tótha, Martin
6.–7.	Michal KOPERA	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
	Jaroslav ŠEVČÍK	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina

Kategória C

1.	Peter PETROVSKÝ	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
2.–3.	Jakub DAUBNER	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
	Erika TROJÁKOVÁ	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
4.–5.	Jarmila KECEROVÁ	Gymnázium Dolný Kubín
	Peter POLJAK	Gymnázium Hlinská Žilina
6.–8.	Roman BOHOVIC	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
	Miroslav URBANEK	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
	Tomáš ŠKEREŇ	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
9.	Michal CIGANIČ	Gymnázium sv.Františka Žilina
10.	Gabriela ROTHOVÁ	Gymnázium Dolný Kubín

11.	Michal HUDEK	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina

Kategória Z9

1.	Štefan POLÁČEK	ZŠ Behy, Námestovo
2.	Marek MORAVČÍK	ZŠ Moskovská, Žilina
3.	Peter KOŽÁR	Gymnázium Letricha, Martin
4.–5.	Martin LUCKÝ	Gymnázium Varšavská, Žilina
	Lenka ČIERNIKOVÁ	Gymnázium Námestovo
6.	Miroslav MAKÝŠ	Gymnázium V. Paulinyho Tótha, Martin
7.–10.	Martina BLAHUTOVÁ	ZŠ Čs. brigády, Martin
	Martin KLAUDINY	Gymnázium Varšavská, Žilina
	Ivana ŠUTÁ	ZŠ Kysucký Lieskovec
	Mirko ZÍBOLEN	Gymnázium V. Paulinyho Tótha, Martin

Kategória P

1.	Ivan PILIŠ	4, Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
2.	Dávid IGNIČ	4, Gymnázium Liptovský Hrádok
3.	Rastislav ŠIMONÍK	4, Gymnázium V. Paulinyho Tótha, Martin
4.	Peter NOVOTNÝ	4, Gymnázium Veľká Okružná, Žilina

Kraj Banská Bystrica

Kategória A

1.–2.	Zuzana KASÁROVÁ	2, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
	Dušan LACIKA	3, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
3.	Roman NEDELA	3, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
4.–5.	Ján ORAVEC	4, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
	Peter VALENTÍNY	4, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica

Kategória B

1.	Ján ORAVEC	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
2.	Róbert LUKOŤKA	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
3.	Dávid HAGARA	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
4.	Stanislav MIKLÍK	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
5.	Martin KRUPÁR	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica

6.–7.	Ján GREGOR	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
	Katka HLAVCSEKOVÁ	Gymnázium Tornaľa
8.	Peter MIKLIAN	Gymnázium Haličská cesta, Lučenec
9.	Tomáš LIPTÁK	Gymnázium Daxnera, Rimavská Sobota

Kategória C

1.	Michal ŽILKA	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
2.	Miroslav BUKVAJ	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
3.	Michal VALKOVIČ	OŠG, Banská Bystrica
4.	Marián BOĎA	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
5.	Peter NOCIAR	SPŠ J.Murgaša, Banská Bystrica
6.–7.	Stanislava LEITMANOVÁ	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
	Marián SALAJ	SPŠ J.Murgaša, Banská Bystrica
8.	Branislav BOŠANSKÝ	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
9.–12.	Matúš DIRBÁK	Gymnázium Rimavská Sobota
	Erik HORNIČÁK	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
	Lukáš KALINA	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
	Ľudmila KODYŠOVÁ	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica

Kategória Z9

1.	Hana BUDÁČOVÁ	ZŠ Haličská, Lučenec
2.–5.	Tomáš BABIAK	ZŠ Bakossova, Banská Bystrica
	Tomáš DUŠA	ZŠ Bakossova, Banská Bystrica
	Marek KASÁR	ZŠ Mazorníkovo, Brezno
	Radovan RAGAČ	I. ZŠ Hriňová

Kategória P

1.	Jozef ŠIŠKA	4, Ev. gymnázium, Banská Bystrica
2.	Ján LUNTER	5L, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
3.	Ján ORAVEC	2F, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
4.	Branislav KATRENIAK	4, SPŠE Brezno

Kraj Košice

Kategória A

1.	Martin HRIŇÁK	4, Gymnázium Alejová, Košice
2.	Tomáš JURÍK	3, Gymnázium Poštová, Košice
3.	Petra FENCÍKOVÁ	4, Gymnázium Alejová, Košice
4.–5.	Miroslava SOTÁKOVÁ	3, Gymnázium Poštová, Košice
	Anna KORDULIAKOVÁ	3, Gymnázium Alejová, Košice
6.	Robert BURSA	3, Gymnázium Alejová, Košice
7.	Peter MOLNÁR	3, Gymnázium Poštová, Košice

Kategória B

1.	Zuzana VLČKOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
2.	Veronika SKŘIVÁNKOVÁ	Gymnázium Poštová, Košice
3.	Zuzana SOPKOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
4.–6.	Daniela KUBEJOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
	Miroslav BLAŠKO	Gymnázium Alejová, Košice
	Draslav HREŇO	Gymnázium P.Horova, Michalovce
7.–10.	Stanislav SURGENT	Gymnázium Poštová, Košice
	Boris ZÁPOTOCKÝ	Gymnázium Poštová, Košice
	Tomáš TOPERCER	Gymnázium Školská, Spišská Nová Ves
	Július JUHASZ	Gymnázium P.Horova, Michalovce

Kategória C

1.	Radovan BAUER	Gymnázium Poštová, Košice
2.	Stanislav KOVALČIN	Gymnázium Alejová, Košice
3.	Lenka BABIAKOVÁ	Gymnázium Poštová, Košice
4.	Martina VIŠŇOVSKÁ	Gymnázium Poštová, Košice
5.–6.	Margaréta HIEKELOVÁ	Gymnázium Poštová, Košice
	Tomáš MAŠKULÍK	Gymnázium P.Horova, Michalovce
7.	Michal KNAP	Gymnázium Sobrance
8.–9.	Peter BEZDĚK	Gymnázium Šrobárová, Košice
	Ivan MURKO	Gymnázium Javorová, Spišská Nová Ves
10.–11.	Peter SASÁK	Gymnázium Alejová, Košice
	Ján BORSÍK	ZŠ Starozagorská, Košice

Kategória Z9

1.–2	Štefan DANČO	ZŠ P.O. Hviezdoslava Veľké Kapušany
	Miroslava CINKAISOVÁ	ZŠ Janigova, Košice
3.–4.	Darina POLOVKOVÁ	ZŠ Kožuchová, Spišská Nová Ves
	Anna SLEBODNÍKOVÁ	Gymnázium Javorová, Spišská Nová Ves
5.–10.	Matúš BENKOVIČ	Gymnázium Javorová, Spišská Nová Ves
	Františka ŠEVČÍKOVÁ	ZŠ Markušovce
	Gabriel KARÁDY	Gymnázium Kráľovský Chlmec
	Rudolf KOLNÍK	ZŠ Park Angelinum, Košice
	Vladislav POKORNÝ	ZŠ Hroncova, Košice
	Michal KOHÚT	ZŠ Petzvalova, Košice

Kategória P

1.	Ján SENKO	4, SPŠE Košice
2.	Miroslav RUDIŠIN	2, Gymnázium Šrobárova, Košice
3.–5.	Marianna POĽACKÁ	4, Gymnázium Trebišov
	Miroslav JAHODA	3, Gymnázium Školská, Spišská Nová Ves
	Marián HROMIAK	4, SPŠE Partizánska, Michalovce

Kraj Prešov

Kategória A

1.	Michal FORIŠEK	4, Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad

Kategória B

1.	Peter BANDA	Gymnázium Konštantínova, Prešov
2.	Igor GOMBOŠ	Gymnázium P.O. Hviezdoslava, Kežmarok
3.–5.	Jana ONDKOVÁ	Gymnázium L.Stöckela, Bardejov
	Martin SEDLACKÝ	Gymnázium Mudroňova, Prešov
	Peter ZAREMBA	Gymnázium Komenského, Humenné
6.–8.	Daniel JOŠČÁK	Gymnázium Konštantínova, Prešov
	Dušan MARUŠČÁK	Gymnázium Stropkov
	Juraj REVIĽÁK	Gymnázium Konštantínova, Prešov

9.	Ľudmila HOSTOVÁ	Gymnázium L.Stöckela, Bardejov

Kategória C

1.	Eva SKOPALOVÁ	Gymnázium Popr. nábrežie, Poprad
2.	Dávid DERENÍK	Gymnázium Snina
3.	Daniela FORIŠEKOVÁ	Gymnázium D. Tatarku, Poprad
4.	Jana KATUŠČÁKOVÁ	Gymnázium Konštantínova, Prešov
5.–8.	Lenka BÁTORYOVÁ	Gymnázium P.O. Hviezdoslava, Kežmarok
	Eduard HYBLER	Gymnázium P.O. Hviezdoslava, Kežmarok
	Jana MÚDRA	Gymnázium sv. Mikuláša, Prešov
	Martin VOJTEK	Gymnázium Konštantínova, Prešov
9.–10.	Vladimír LIPTÁK	Gymnázium Konštantínova, Prešov
	Juraj SLOVÍK	Gymnázium D. Tatarku, Poprad

Kategória Z9

1.–2.	Katarína KVAŠŇÁKOVÁ	ZŠ Šmeralova, Prešov
	Michal RJAŠKO	Gymnázium Vranov nad Topľou
3.–5.	Lenka ČAČKOVÁ	Gymnázium Vranov nad Topľou
	Peter MARINIČ	ZŠ Šmeralova, Prešov
	Vladimír ŽÁK	I. ZŠ Komenského, Bardejov
6.–8.	Rastislav PJONTEK	ZŠ Dr. Fischera, Kežmarok
	Lucia TOMÁŠOVÁ	ZŠ Dr. Fischera, Kežmarok
	Jozef TOMKO	VI. ZŠ Bardejov
9.	Martin OROLÍN	ZŠ Švábovce
10.–13.	Zuzana BAJTOŠOVÁ	CZŠ a Gymnázium sv. Mikuláša, Prešov
	Tomáš MALATIN	Gymnázium Popr. nábrežie, Poprad
	Monika PATLEVIČOVÁ	IV. ZŠ Karpatská, Svidník
	Miroslava VARGOVÁ	Gymnázium Kežmarok

Kategória P

1.	Michal FORIŠEK	4, Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad
2.	Slavomír KATUŠČÁK	3, Gymnázium Konštantínova, Prešov
3.	Michal BREZNICKÝ	4, Gymnázium Konštantínova, Prešov
4.	Peter BANDA	4, Gymnázium Konštantínova, Prešov

Zadania súťažných úloh

Kategória C

C – I – 1

Dané je štvormiestne číslo (v desiatkovej sústave). Zmenou poradia jeho číslic možno zostaviť práve osem ďalších štvormiestnych čísel. Súčet najmenších troch zo všetkých týchto deviatich čísel je 12 528. Určte číslice daného čísla.

(P. Černek)

C – I – 2

V obdĺžniku $ABCD$ platí $|AB| > |BC|$. Oblúk AC kružnice, ktorej stred leží na strane AB, pretína stranu CD v bode M. Dokážte, že priamky AM a BD sú navzájom kolmé.

(L. Boček, J. Švrček)

C – I – 3

Zistite, či je číslo $19^{1998} + 98^{1999}$ deliteľné deviatimi.

(P. Leischner)

C – I – 4

Adam a Braňo sa zúčastnili na turnaji hranom systémom každý s každým jeden zápas, na ktorom mal každý hráč odohrať denne práve jeden zápas. Adam a Braňo však ochoreli a ako jediní nedokončili turnaj. Braňo odstúpil o päť dní prv ako Adam. Spolu sa odohralo 350 zápasov. Koľko zápasov odohral Adam? Hral s Braňom?

(P. Černek)

C – I – 5

Daný je trojuholník ABC, v ktorom $|\measuredangle BAC| = 150°$, $|AB| = 4\,\mathrm{cm}$ a $|AC| = 6\,\mathrm{cm}$. Zostrojte trojuholník s dvojnásobným obsahom, ktorého dve strany sú zhodné s niektorými dvomi stranami trojuholníka ABC. Nájdite všetky riešenia.

(P. Černek)

C – I – 6

Pre ľubovoľnú dvojicu reálnych čísel a, b spĺňajúcu vzťah $a + b = 1$ platí

$$\sqrt{a^2 + a + 1} + \sqrt{b^2 + b + 1} > 2.$$

Ak sú naviac čísla a, b nezáporné, platí tiež

$$\sqrt{a^2+a+1}+\sqrt{b^2+b+1}<3.$$

Obidve tvrdenia dokážte.

(P. Leischner, J. Švrček)

C – S – 1

Nájdite všetky dvojice a, b nezáporných reálnych čísel, pre ktoré platí

$$\sqrt{a^2+b}+\sqrt{b^2+a}=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a+b}.$$

(J. Šimša)

C – S – 2

Určte najväčšie štvorciferné číslo n, pre ktoré je súčet $n^{19}+99^n$ deliteľný desiatimi.

(J. Švrček)

C – S – 3

V rovine je daný obdĺžnik $ABCD$, nad ktorého stranami AB a BC (ako nad priemermi) sú zvonku obdĺžnika zostrojené po rade polkružnice k a l. Nájdite úsečku XY čo najväčšej dĺžky d tak, aby platilo $X \in k$ a $Y \in l$. Dĺžku d potom vyjadrite pomocou dĺžok $a = |AB|$ a $b = |BC|$.

(J. Švrček)

C – II – 1

Zistite, ktoré dvojice pravidelných mnohouholníkov majú veľkosti vnútorných uhlov v pomere $2:3$.

(S. Bednářová)

C – II – 2

Nájdite najväčšie trojciferné číslo n, pre ktoré je súčet

$$1^2+2^3+3^4+4^5+\ldots+n^{n+1}$$

deliteľný tromi.

(J. Šimša)

C – II – 3

Zostrojte lichobežník $ABCD$, pre ktorý platí:

$$|AC| = 8\,\mathrm{cm},\ \ |BD| = 6\,\mathrm{cm},\ \ |AB| + |CD| = 10\,\mathrm{cm}$$

a stred kružnice opísanej trojuholníku ACD leží na základni AB.

(P. Leischner)

C – II – 4

Dokážte, že pre každé tri reálne čísla x, y, z, ktoré spĺňajú nerovnosti

$$0 < x < y < z < 1,$$

platí tiež nerovnosť

$$x^2 + y^2 + z^2 < xy + yz + zx + z - x.$$

(J. Bábeľa)

KATEGÓRIA B

B – I – 1

Na lúke sú deti aj dospelí. Počet percent chlapcov zo všetkých detí je rovný počtu percent dievčat zo všetkých prítomných osôb a tiež počtu všetkých dospelých. Koľko chlapcov, dievčat a dospelých je na lúke?

(Ľ. Fabšo, P. Černek)

B – I – 2

Uvažujme zhodné polkružnice, ktoré ležia v danom pravom uhle a ktorých koncové body ležia každý na inom ramene pravého uhla. Určte množinu, ktorú vyplnia body všetkých týchto polkružníc.

(J. Zhouf)

B – I – 3

Nájdite všetky trojmiestne čísla v desiatkovej sústave, ktoré sú rovné tretine čísla s tým istým zápisom v inej číselnej sústave.

(P. Černek)

B – I – 4

Daný je rovnostranný trojuholník ABC. Na strane BC nájdite bod P tak, aby kružnica vpísaná trojuholníku ABP a kružnica pripísaná k strane PC trojuholníka APC boli zhodné.

(J. Švrček)

B – I – 5

Z gule s polomerom R je oddelený guľový odsek s výškou v ($v < R$). Do tohto odseku je vpísaná guľa K s polomerom $\frac{v}{2}$. Ďalej je do odseku vpísaných osem zhodných menších gulí, z ktorých každá sa dotýka gule K. Žiadne dve z nich nemajú spoločný vnútorný bod a každá z nich sa dotýka práve dvoch ostatných. Určte pomer $v : R$.

(J. Zhouf)

B – I – 6

Nájdite všetky možné hodnoty súčtu $x + y$, kde reálne čísla x, y spĺňajú rovnosť $x^3 + y^3 = 3xy$.

(J. Šimša)

B – S – 1

Na ihrisku je menej ako 500 detí. Pritom počet percent chlapcov zo všetkých detí sa rovná počtu všetkých dievčat. Koľko chlapcov a koľko dievčat je na ihrisku? Nájdite všetky možnosti.

(P. Černek)

B – S – 2

V trojuholníku ABC poznáme $a = |BC|$, polomer ϱ kružnice vpísanej a polomer ϱ_a kružnice pripísanej k strane BC. Dokážte, že vzdialenosť stredov oboch kružníc sa rovná $\sqrt{a^2 + (\varrho_a - \varrho)^2}$.

(P. Leischner)

B – S – 3

Kvadratická rovnica $x^2 - 35x + 334 = 0$, ktorej koeficienty sú zapísané v číselnej sústave so základom z ($z \geqq 6$), má dva rôzne reálne korene. Určte z a obidva korene.

(J. Šimša)

B – II – 1

Nájdite všetky štvorice prirodzených čísel a, b, c, d, pre ktoré platí

$$\begin{aligned} ab + cd &= 1\,999,\\ ac + bd &= 1\,999,\\ ad + bc &= 1\,999. \end{aligned}$$

(J. Bábeľa)

B – II – 2

Daný je pravouhlý trojuholník ABC, nad ktorého odvesnami AB a BC (ako nad priemermi) sú zvonku trojuholníka zostrojené po rade polkružnice k a l. Vrcholom B veďte priamku p, ktorá pretína polkružnice k a l po rade v bodoch X a Y tak, aby štvoruholník $AXYC$ mal čo najväčší obvod.

(J. Šimša, J. Švrček)

B – II – 3

Nájdite všetky možné hodnoty výrazu

$$\frac{x+y}{x^2+y^2},$$

kde x a y sú ľubovoľné reálne čísla spĺňajúce podmienku $x + y \geqq 1$.

(J. Šimša)

B – II – 4

Nech A a B sú rôzne body roviny. Ďalej je daný orientovaný uhol ω ($0° < \omega < 90°$). Pre ľubovoľný bod X označme po rade X_A, X_B obrazy bodu X v otočeniach okolo stredov A a B o uhol ω. Nájdite všetky také body X, pre ktoré je trojuholník XX_AX_B rovnostranný.

(E. Kováč)

Kategória A

A – I – 1

Nájdite najmenšie prirodzené číslo, ktoré možno dostať doplnením zátvoriek do výrazu

$$15 : 14 : 13 : 12 : 11 : 10 : 9 : 8 : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2\,.$$

(P. Černek)

A – I – 2

Nájdite všetky kladné čísla k, pre ktoré platí: zo všetkých trojuholníkov ABC, v ktorých $|AB| = 5\,\mathrm{cm}$ a $|AC| : |BC| = k$, má najväčší obsah rovnoramenný trojuholník.

(P. Černek)

A – I – 3

Pre ktoré celé čísla a je maximum aj minimum funkcie

$$y = \frac{12x^2 - 12ax}{x^2 + 36}$$

celé číslo?

(P. Černek)

A – I – 4

Označme $\tau(k)$ počet všetkých kladných deliteľov prirodzeného čísla k a nech číslo n je riešením rovnice $\tau(1{,}6n) = 1{,}6\tau(n)$. Určte hodnotu podielu $\tau(0{,}16n) : \tau(n)$.

(P. Černek)

A – I – 5

Dokážte, že existuje trojuholník ABC, v ktorom pri zvyčajnom označení platia obidve *pytagorejské* rovnosti $t_a^2 + t_b^2 = t_c^2$ a $v_a^2 + v_b^2 = v_c^2$. Ďalej ukážte, že pre vnútorné uhly takého trojuholníka platí $|\alpha - \beta| = 90°$ a $\cos\gamma = \frac{2}{5}\sqrt{5}$.

(J. Šimša)

A – I – 6

Z papiera bol zlepený model štvorstena, ktorého každé dve protiľahlé hrany sú zhodné. Rozhodnite, či môžeme model rozrezať pozdĺž troch úsečiek tak, aby ho potom bolo možné rozvinúť do roviny a vznikol pritom obdĺžnik. Existujú pre pravidelný štvorsten dva takéto spôsoby rozrezania, pri ktorých vzniknú nezhodné obdĺžniky?

(M. Hejný, P. Leischner)

A – S – 1

Dokážte, že existuje ostrouhlý trojuholník ABC, ktorého ťažnice z vrcholov A a B sú po rade zhodné so stranami AC a AB.

(J. Šimša)

A – S – 2

V rovine sú dané dva rôzne body A a B. Nájdite všetky reálne čísla $k > 1$, pre ktoré platí: Zo všetkých trojuholníkov ABC, v ktorých $|AC| : |BC| = k$, má najväčší možný vnútorný uhol pri vrchole A rovnoramenný trojuholník.

(J. Šimša, L. Boček)

A – S – 3

Ukážte, že pre každé prirodzené číslo n je súčin

$$\left(4-\frac{2}{1}\right)\left(4-\frac{2}{2}\right)\left(4-\frac{2}{3}\right)\dots\left(4-\frac{2}{n}\right)$$

celé číslo.

(R. Horenský)

A – II – 1

Aritmetický priemer niekoľkých navzájom rôznych prvočísel sa rovná 27. Určte, aké najväčšie prvočíslo medzi nimi môže byť.

(S. Bednářová, P. Černek)

A – II – 2

Daný je štvorec $ABCD$. Dokážte, že pre všetky body P toho oblúka AB kružnice štvorcu opísanej, ktorý neobsahuje body C, D, má výraz

$$\frac{|AP| + |BP|}{|CP| + |DP|}$$

rovnakú hodnotu. Určte ju.

(J. Švrček)

A – II – 3

V ľubovoľnom trojuholníku ABC označme M a N po rade stredy strán BC a AC. Dokážte, že ťažisko trojuholníka ABC leží na kružnici opísanej trojuholníku CMN práve vtedy, keď platí rovnosť

$$4 \cdot |AM| \cdot |BN| = 3 \cdot |AC| \cdot |BC|.$$

(J. Šimša)

A – II – 4

Nájdite reálne čísla a, b, c, d, pre ktoré všetky riešenia x nerovnice

$$\frac{ax^2+bx+c}{a+dx-x^2} \leqq 2x$$

tvoria množinu $\{0\} \cup (4, +\infty)$.

(P. Černek)

A – III – 1

Do čitateľa aj menovateľa zlomku

$$\frac{29 : 28 : 27 : 26 : 25 : 24 : 23 : 22 : 21 : 20 : 19 : 18 : 17 : 16}{15 : 14 : 13 : 12 : 11 : 10 : 9 : 8 : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2}$$

smieme opakovane vpisovať zátvorky, a to vždy na rovnaké miesta pod seba.

a) Určte najmenšiu možnú celočíselnú hodnotu výsledného výrazu.

b) Nájdite všetky možné celočíselné hodnoty výsledného výrazu.

(J. Šimša)

A – III – 2

Vo všeobecnom štvorstene $ABCD$ označme E a F stredy ťažníc z vrcholov A a D. Určte pomer objemov štvorstenov $BCEF$ a $ABCD$. (Ťažnicou v štvorstene je spojnica vrcholu s ťažiskom protiľahlej steny.)

(P. Leischner)

A – III – 3

Ukážte, že existuje trojuholník ABC, v ktorom pri obvyklom označení strán a ťažníc platí $a \neq b$ a zároveň $a + t_a = b + t_b$. Ďalej dokážte existenciu takého čísla k, že pre každý spomínaný trojuholník platí $a + t_a = b + t_b = k(a + b)$. Nakoniec nájdite všetky pomery $a : b$ strán a, b takých trojuholníkov.

(J. Šimša)

A – III – 4

V istom jazyku sú len dve písmena A a B. Pre slová tohto jazyka platí:

1) Jednopísmenové slová neexistujú, dvojpísmenové slová sú len AB a BB.
2) Postupnosť písmen dĺžky $n > 2$ je slovo práve vtedy, keď vznikne z nejakého slova tohto jazyka s počtom písmen menším ako n, a to tak, že v tomto slove písmená A ponecháme na mieste a každé písmeno B súčasne nahradíme nejakým (nie nutne rovnakým) slovom tohto jazyka.

Dokážte, že počet n-písmenových slov tohto jazyka je pre každé n rovný číslu

$$\frac{2^n + 2 \cdot (-1)^n}{3}.$$

(P. Hliněný, P. Kaňovský)

A – III – 5

V rovine je daný ostrý uhol APX. Zostrojte štvorec $ABCD$ tak, aby bod P ležal na strane BC a aby polpriamka PX preťala stranu CD v takom bode Q, že bod P leží na osi uhla BAQ.

(J. Šimša)

A – III – 6

Nájdite všetky dvojice reálnych čísel a a b, pre ktoré má sústava rovníc

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} = a, \qquad \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = b$$

s neznámymi x a y riešenie v obore reálnych čísel.

(J. Šimša)

Riešenia súťažných úloh

Kategória C

C – I – 1

Najprv zistíme, koľko štvorciferných čísel je možné zostaviť z pevne zvolenej štvorice číslic. V ďalších úvahách budeme nenulové cifry označovať malými písmenami. Rôzne písmená nikdy neoznačujú rovnakú číslicu, symbol 0 označuje nulu.

Štvorice číslic (a, a, a, a) a $(a, 0, 0, 0)$ určujú každá len jedno štvorciferné číslo, cifry a, a, a, 0 tri: $a\,aa0$, $a\,a0a$, $a\,0aa$. Z číslic a,a,a,b $(a \neq b)$ je možné zostaviť len štyri štvorciferné čísla: $a\,aab$, $a\,aba$, $a\,baa$, $b\,aaa$.

Z cifier a, a, 0, 0 zostavíme len tri čísla $a\,a00$, $a\,0a0$, $a\,00a$. Pre cifry a, a, b, b $(a \neq b)$ máme spolu šesť možností: $a\,abb$, $a\,bab$, $a\,bba$, $b\,aab$, $b\,aba$, $b\,baa$. To je stále málo.

Číslice a, a, b, 0 určujú práve deväť čísel: $a\,ab0$, $a\,a0b$, $a\,ba0$, $a\,b0a$, $a\,0ab$, $a\,0ba$, $b\,aa0$, $b\,a0a$, $b\,0aa$. Analogickým postupom zistíme, že vyšetrovanie ďalších možností už k počtu 9 nevedie. Prehľad všetkých možných výsledkov je uvedený v nasledujúcej tabuľke.

Typ	$a\,000$	$a\,aaa$	$a\,aa0$	$a\,aab$	$a\,a00$	$a\,abb$	$a\,ab0$	$a\,b00$	$a\,abc$	$a\,bc0$	$a\,bcd$
Počet	1	1	3	4	3	6	9	6	12	18	24

Dané číslo má teda cifry a, a, b, 0, kde a, b sú rôzne nenulové číslice.

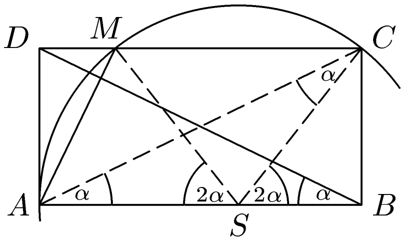
Rozlíšme dve situácie a zapíšme v každej z nich písomné sčítanie troch najmenších čísel:

$$\begin{array}{rr@{\qquad\qquad}rr}
\text{I.} & a < b & \text{II.} & a > b \\
 & a\,0ab & & b\,0aa \\
 & a\,0ba & & b\,a0a \\
 & a\,a0b & & b\,aa0 \\
\hline
 & 12\,528 & & 12\,528
\end{array}$$

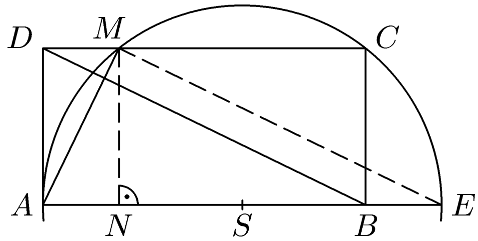
V prípade I je z ľavých dvoch stĺpcov zrejmé, že $a = 4$, a z pravého stĺpca dostaneme $2b+4 = 8$ alebo $2b+4 = 18$. Podmienke $a < b$ vyhovuje len $b = 7$. Ľahko sa presvedčíme, že cifry $a = 4$ a $b = 7$ sú riešením úlohy.

V II. prípade je z pravých dvoch stĺpcov vidieť, že číslo $2a$ má poslednú číslicu 8 a zároveň 2 alebo 1. To však nie je možné.

Iná možnosť vyšetrenia situácie I: Naznačený súčet môžeme prepísať v tvare $3\,000a + 100a + 10(a + b) + a + 2b = 12\,528$. Úpravou ľahko zistíme, že $a = 4 + \dfrac{28 - 4b}{1\,037}$. Z podmienky, že posledný zlomok je celé číslo k, vyjde $b = 7 - \dfrac{1\,037k}{4}$, $a = 4 + k$. Je zrejmé, že a, b budú číslice len pre $k = 0$. Analogicky možno postupovať aj v prípade II.



Obr. 1



Obr. 2

Záver: Číslice hľadaného čísla sú 4, 4, 7 a 0.

C – I – 2

Označme S stred danej kružnice a α veľkosť uhla CAB, $\alpha < 45°$ (obr. 1). Potom tiež $|\sphericalangle SAC| = |\sphericalangle SCA| = \alpha$, lebo trojuholník ASC je rovnoramenný. Jeho vonkajší uhol BSC má teda veľkosť 2α. Trojuholník MSC je tiež rovnoramenný, a preto súmerný podľa osi základne MC. Obrazom uhla BSC v tejto súmernosti je uhol ASM, ktorého veľkosť je teda tiež 2α. Z rovnoramenného trojuholníka ASM potom máme $|\sphericalangle BAM| = |\sphericalangle SAM| = \frac{1}{2}(180° - 2\alpha) = 90° - \alpha$, a odtiaľ je už kolmosť priamok AM a BD zrejmá, lebo $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle CAB| = \alpha$.

Iné riešenie. V súlade s obr. 2. označme AE priemer danej kružnice a N pätu kolmice z bodu M na priamku AB. Z vlastností obdĺžnika $ANMD$ a zo symetrie vzhľadom na os strany AE vyplýva $|DM| = |AN| = |BE|$ a naviac sú úsečky DM a BE rovnobežné. Preto je $BEMD$ rovnobežník. Priamka BD je teda rovnobežná s priamkou ME, ktorá je kolmá na priamku AM podľa Tálesovej vety.

C – I – 3

Položme $x = a + b$, kde $a = 19^{1\,998}$ a $b = 98^{1\,999}$. Zrejme platí

$$a = 19^{1\,998} = (18+1)^{1\,998} = (18+1)(18+1)\dots(18+1).$$

Keby sme teraz všetky zátvorky posledného výrazu bez ďalších úprav roznásobili, boli by všetky členy súčtu deliteľné osemnástimi až na člen, ktorý je rovný súčinu všetkých jednotiek. Preto je $a = 18m + 1$, kde $m \in \mathbb{N}$. Analogicky zistíme, že

$$b = 98^{1\,999} = (99-1)^{1\,999} = (99-1)(99-1)\dots(99-1)$$

a odtiaľ $b = 99n - 1$ pre vhodné $n \in \mathbb{N}$, lebo celkový počet uzátvorkovaných činiteľov na pravej strane je nepárny.

Číslo $x = 18m + 1 + 99n - 1 = 9(2m + 11n)$ je deliteľné deviatimi.

C – I – 4

Každý deň boli hráči rozdelení do dvojíc, v ktorých mali zohrať svoj zápas. Počet všetkých hráčov bol teda párny, označme ho $2n$. Denne sa malo odohrať n zápasov, turnaj bol naplánovaný na $2n-1$ dní. Predpokladajme, že Adam odstúpil d dní pred koncom turnaja a Braňo $d+5$ dní pred koncom.

Pokiaľ Adam hral s Braňom, odpadlo kvôli ich chorobe z pôvodne plánovaných $n(2n-1)$ zápasov toľko, koľko ich obaja neodohrali, t.j. spolu $2d+5$ zápasov. Pokiaľ spolu nehrali, odpadlo len $2d+4$ zápasov. Podľa toho platí buď

$$n(2n-1) = 355 + 2d, \quad \text{alebo} \quad n(2n-1) = 354 + 2d.$$

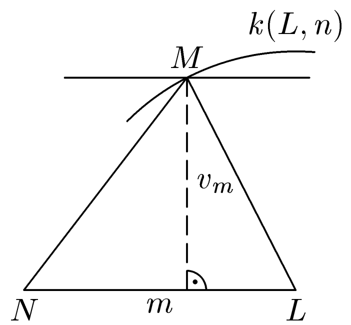
Z rovníc vyplýva jednak odhad $2n^2 > 354$, ale tiež $n(2n-5) < 344$, lebo podľa významu čísla d platí $d+5 \leqq 2n-1$. Z prvej nerovnosti tak dostaneme $n > 13$, z druhej $n < 15$ (pre $n \geqq 15$ je $n(2n-5) \geqq 375$). Preto nutne $n = 14$. Zároveň vidíme, že ľavá strana každej z oboch predchádzajúcich rovníc je pre $n = 14$ párna, takže môže platiť len druhá z nich. Z nej vypočítame $d = 12$. Turnaj teda trval $2n-1 = 27$ dní a Adam odstúpil 12 dní pred jeho koncom. Odohral 15 zápasov a s Braňom nehral.

C – I – 5

Trojuholník ABC ľahko zostrojíme, a tým konštrukčne určíme jeho výšky aj dĺžky všetkých strán. Hľadaný trojuholník označme LMN. Pri zhodných základniach oboch trojuholníkov sú výšky prislúchjúce týmto základniam v pomere ich obsahov, t.j. $2:1$. Trojuholník LMN je určený dĺžkami m, n strán LN, LM, ktoré sú zhodné s niektorými dvoma stranami daného trojuholníka, a výškou v_m. Prehľad všetkých možností udáva nasledujúca tabuľka (je treba si uvedomiť, že každá zo zvyšných situácií vedie na trojuholník zhodný s niektorým predchádzajúcim):

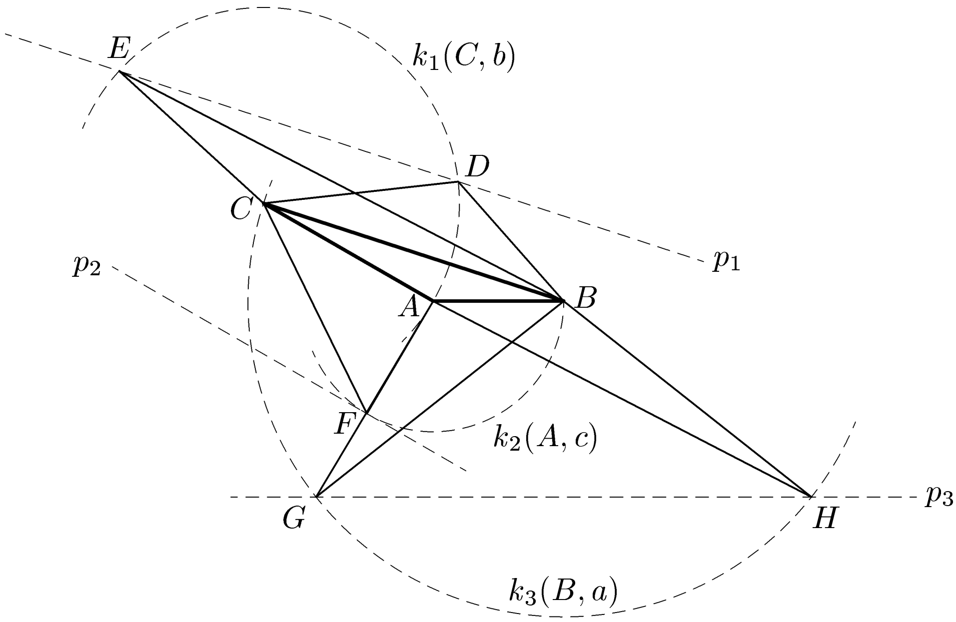
	I	II	III
m	a	b	c
v_m	$2v_a$	$2v_b$	$2v_c$
n	b	c	a

Konštrukciu trojuholníka LMN naznačuje obr. 3.



Obr. 3

Najprv zostrojíme úsečku NL dĺžky m. Tretí vrchol M je bodom prieniku kružnice $k(L, n)$ a priamky p rovnobežnej s priamkou NL vo vzdialenosti v_m. Pritom stačí uvažovať riešenie len v jednej polrovine určenej priamkou NL. Podľa počtu bodov tohoto prieniku môže mať každá zo situácií I až III všeobecne žiadne, 1 alebo 2 (uvažujeme len nezhodné) riešenia. To predstavuje až 6 nezhodných trojuholníkov KLM. V skutočnosti je ich pre dané číselné zadanie len päť. Platí totiž $2v_b = 2b \cdot \sin 150° = c$, a preto sa v prípade II kružnica k priamky p len dotkne.



Obr. 4

Všetky riešenia sú prehľadne zostrojené na obr. 4. Sú to trojuholníky CBD, CBE, ACF, BAG a BAH.

C – I – 6

Najprv je nutné overiť, či sú dané výrazy definované pre všetky reálne čísla a, b. Stačí dokázať, že pre každé reálne u je výraz $U = u^2 + u + 1$ nezáporný.

1. spôsob:

$$U = u^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}u + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Odtiaľ vidíme, že je dokonca

$$U = u^2 + u + 1 \geqq \frac{3}{4}, \tag{3}$$

pretože druhá mocnina reálneho výrazu je vždy nezáporná.

2. spôsob: Pre $u \geqq 0$ je zrejme výraz U kladný. Ak je $u < 0$, je

$$U > u^2 + u + 1 + u = (u+1)^2 \geqq 0.$$

3. spôsob: Predstavme si rovnosť $U = u^2 + u + 1$ ako kvadratickú rovnicu $u^2 + u + (1 - U) = 0$ s parametrom U. Tento vzťah je splnený pre nejaké reálne u, len keď je príslušný diskriminant nezáporný, t.j. $1 - 4(1 - U) \geqq 0$, a odtiaľ $U \geqq \frac{3}{4}$.

Ďalej je možné skúšať výraz

$$V = \sqrt{a^2 + a + 1} + \sqrt{b^2 + b + 1} \tag{4}$$

upravovať, aby sme ho mohli odhadnúť. Ako asi budú postupovať? Uvedieme niekoľko možností:

I. Dosadením $b = 1 - a$ do (3) dostaneme

$$V = \sqrt{a^2 + a + 1} + \sqrt{a^2 - 3a + 3}. \tag{5}$$

Tým sme sa však k cieľu veľmi nepriblížili. Skúsme ešte obidve strany rovnosti (5) umocniť:

$$\begin{aligned} V^2 &= a^2 + a^2 - 2a + 1 + 3 + 2\sqrt{a^2 + a + 1}\sqrt{a^2 - 3a + 3} = \\ &= a^2 + (a-1)^2 + 3 + 2\sqrt{a^4 - 2a^3 + a^2 + 3}. \end{aligned}$$

Výraz pod odmocninou sa dá ešte po vyňatí a z prvých troch členov upraviť, takže dostaneme

$$V^2 = 3 + a^2 + (a-1)^2 + 2\sqrt{3 + a^2(a-1)^2} \tag{6}$$

II. Rovnosť (4) umocníme priamo a pri ďalších úpravách opakovane nahrádzame súčty $a + b$ jednotkami:

$$\begin{aligned} V^2 &= a^2 + b^2 + 3 + 2\sqrt{a^2b^2 + ab(a+b+1) + a^2 + b^2 + a + b + 1} = \\ &= 3 + a^2 + 2\sqrt{3 + a^2b^2} + b^2. \end{aligned} \tag{7}$$

Dôkaz nerovnosti (1).

1. RIEŠENIE (bez umocňovania výrazu V): Ak sú a, b nezáporné, je $V > \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2$. Ak je $b < 0$, potom musí byť $a > 1$. Položme teda na pravej strane vzťahu (4) $a = 1$ a druhú odmocninu odhadneme pomocou (3). Dostaneme tak silnejší odhad, ako sa požaduje: $V > \sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{3} > \frac{5}{2}$.

2. RIEŠENIE. Keď uvážime, že druhá mocnina každého reálneho čísla je nezáporná, odhadneme z (6), že $V^2 \geqq 3 + 2\sqrt{3} > 4$, a po odmocnení dostaneme $V > 2$.

3. RIEŠENIE. Zo vzťahu (7) vidíme, že

$$\begin{aligned} V^2 &> 3 + \left(a^2 + 2\sqrt{a^2}\sqrt{b^2} + b^2\right) = \\ &= 3 + \left(\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}\right)^2 = 3 + (|a| + |b|)^2 \geqq 4, \end{aligned}$$

a teda $V > 2$.

Dôkaz nerovnosti (2).

1. RIEŠENIE. Pretože a, b sú nezáporné a nemôže platiť $a = b = 0$, platí

$$V < \sqrt{a^2 + 2a + 1} + \sqrt{b^2 + 2b + 1} = (a + 1) + (b + 1) = 3.$$

2. RIEŠENIE. Z podmienky $a + b = 1$ pre nezáporné čísla a, b máme $0 \leqq a \leqq 1$, $0 \leqq b \leqq 1$ a hodnotu výrazu V môžeme odhadnúť dosadením $a = b = 1$ do (7): $V^2 < 3 + 1 + 2\sqrt{4} + 1 = 9$, takže $V < 3$.

C – S – 1

Umocnením rovnice s nezápornými stranami a ďalšími ekvivalentnými úpravami postupne dostaneme

$$\begin{aligned}
a^2 + b + 2\sqrt{(a^2 + b)(b^2 + a)} + b^2 + a &= a^2 + b^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(a + b)} + a + b,\\
\sqrt{(a^2 + b)(b^2 + a)} &= \sqrt{(a^2 + b^2)(a + b)},\\
(a^2 + b)(b^2 + a) &= (a^2 + b^2)(a + b),\\
a^2b^2 + a^3 + b^3 + ab &= a^3 + ab^2 + ba^2 + b^3,\\
ab(ab + 1 - a - b) &= 0,\\
ab(a - 1)(b - 1) &= 0.
\end{aligned}$$

Hľadanými sú preto práve tie dvojice nezáporných čísel a, b, ktoré spĺňajú aspoň jednu z podmienok $a = 0$, $b = 0$, $a = 1$ alebo $b = 1$.

C – S – 2

Daný súčet je nepárny pre párne n. Je teda deliteľný desiatimi, len keď je n nepárne. Pre $n = 2k + 1$ dáva sčítanec $99^n = (100 - 1)^{2k+1} = 10A - 1$ pri delení desiatimi zvyšok 9, a preto druhý sčítanec n^{19} musí dať pri delení desiatimi zvyšok 1.

Dekadický zápis čísla $3^{19} = 3 \cdot (10 - 1)^9 = 10B - 3$ zrejme končí číslicou 7, a preto číslo tvaru $(10r \pm 3)^{19}$ nemôže dať pri delení desiatimi zvyšok 1. Rovnaký záver môžeme urobiť aj pre čísla tvaru $(10r - 1)^{19}$ a $(10r + 5)^{19}$. Odtiaľ vyplýva, že n môže byť jedine tvaru $10r + 1$, a najväčšie také štvorciferné číslo je 9 991. Číslo $n^{19} + 99^n$ je potom zrejme deliteľné desiatimi.

Iné riešenie. Pri číslach n^{19} a 99^n nás zaujímajú len ich posledné číslice. Pretože posledná cifra akejkoľvek mocniny n^k závisí len od exponentu k a poslednej číslice c

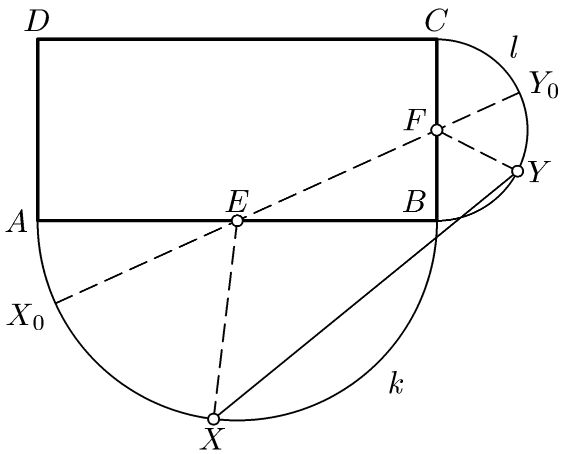
základu n, zostavíme tabuľku posledných číslic mocnín c^k pre $c = 0, 1, \dots, 9$:

$k \backslash c$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
3	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9
4	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1
5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Zo stĺpca tabuľky pre $c = 9$ vidíme, že číslo 99^n končí číslicou 1 alebo 9 podľa toho, či je n párne či nepárne, takže číslo n^{19} má podľa toho končiť číslicou 9 alebo 1. Z tabuľky ďalej vidíme, že čísla n^k a n^{k+4} končia vždy rovnakou cifrou. To teda platí aj pre čísla n^{19} a n^3. Z tretieho riadku uvedenej tabuľky ($k = 3$) však vidíme, že číslo n^3 nekončí číslicou 9 pre žiadne párne n (končí totiž číslicou 9 len pre nepárne n končiace číslicou 9), zato číslicou 1 končí pre práve tie nepárne n, ktoré sa končia číslicou 1. Najväčšie také štvorciferné číslo je $n = 9\,991$, ktoré je riešením úlohy.

C – S – 3

Stredy E, F polkružníc sú totožné so stredmi strán AB, BC (obr. 5). Polomery týchto



Obr. 5

polkružníc sú $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$ a z trojuholníka EBF ľahko pomocou Pytagorovej vety spočítame

$$|EF| = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Podľa trojuholníkovej nerovnosti (obr. 5) zrejme pre ľubovoľné dva body X, Y také, že X leží na polkružnici k a Y na polkružnici l, platí

$$|XY| \leqq |XE| + |EY| \leqq |XE| + |EF| + |FY|$$

s rovnosťou práve vtedy, keď body X, E, F a Y v tomto poradí ležia na priamke. Úsečka XY má teda najväčšiu dĺžku pre $X = X_0$, $Y = Y_0$, kde body X_0, Y_0 sú priesečníky polkružníc k, l s priamkou EF. Pre dĺžku úsečky X_0Y_0 potom platí

$$|X_0Y_0| = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} + \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}\bigl(a + b + \sqrt{a^2+b^2}\bigr).$$

C – II – 1

Pravidelný n-uholník ($n \geqq 3$) sa skladá z n navzájom zhodných rovnoramenných trojuholníkov, ktoré majú pri spoločnom hlavnom vrchole uhol veľkosti $\frac{1}{n}360°$. Veľkosť jeho vnútorného uhla je teda $\alpha_n = 180° - \frac{1}{n}360° = \frac{n-2}{n}180°$.

Zadanie úlohy tak vedie k rovnici

$$\frac{3(n-2)}{n} = \frac{2(m-2)}{m}, \tag{1}$$

ktorú upravíme na tvar

$$mn = 6m - 4n \quad \text{alebo} \quad n = 6 - 4\frac{m}{n}.$$

Odtiaľ vyplýva, že $n < 6$. Dosadením $n \in \{3, 4, 5\}$ nájdeme nasledujúce tri dvojice $[n, m] = [3, 4], [4, 8], [5, 20]$, ktoré vyhovujú rovnici (1).

Úlohe vyhovujú tri dvojice pravidelných mnohouholníkov: trojuholník a štvorec, štvorec a osemuholník, päťuholník a dvadsaťuholník.

C – II – 2

Najprv si všimneme, že pri delení tromi dávajú čísla k a k^3 vždy rovnaký zvyšok (to stačí overiť pre $k \in \{0, 1, 2\}$). To znamená, že aj všetky čísla $k, k^3, k^5, k^7, \ldots$ dávajú rovnaký zvyšok, ktorý závisí len od toho, aký zvyšok pri delení tromi dáva číslo k. Pre ľubovoľné prirodzené číslo n dávajú teda čísla

$$(n+6)^{n+7},\ n^{n+7},\ n^{n+1}$$

pri delení tromi rovnaký zvyšok. To znamená, že zvyšky jednotlivých sčítancov sa v skúmanom súčte

$$S(n) = 1^2 + 2^3 + 3^4 + 4^5 + \ldots + n^{n+1}$$

opakujú s periódu 6 (prvých šesť je 1, 2, 0, 1, 1, 0). Pretože $999 = 6 \cdot 166 + 3$, je jasné, že $S(999)$ dáva pri delení tromi rovnaký zvyšok ako $166 \cdot (1+2+0+1+1+0)+1+2+ + 0 = 833$, teda 2. Z uvedeného výpočtu ale hneď vidíme, že aj $S(998)$ dáva zvyšok 2, zatiaľčo $S(997)$ je deliteľné tromi. Hľadaným číslom je teda číslo 997.

Iné riešenie. Vyjdeme z rovnakej úvahy a všimneme si, že platí

$$S(n+18) \equiv S(n+12) + S(6) \equiv S(n+6) + 2S(6) \equiv S(n) + 3S(6) \equiv S(n) \pmod 3,$$

takže zvyšky čísel $S(n)$ sa opakujú s periódu 18. Výpočtom zisťujeme, že zvyšky čísel $S(1), S(2), S(3), S(4), \dots$ tvoria rad (zátvorkou je vyznačená jedna spomenutá perióda)

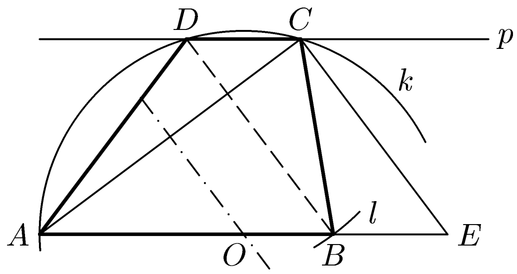
$$\underbrace{1, 0, 0, 1, 2, 2, 0, 2, 2, 0, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 0, 0,} 1, 0, 0, 1, 2, 2, \dots$$

Súčet $S(n)$ je teda deliteľný tromi, práve keď číslo n pri delení osemnástimi dáva niektorý zo zvyškov 2, 3, 7, 10, 17 alebo 0.

Pretože najväčšie trojciferné číslo je tvaru $999 = 18 \cdot 55 + 9$, je hľadané číslo $18 \cdot 55 + 7 = 997$.

C – II – 3

Predpokladajme, že $ABCD$ (obr. 6) je hľadaný lichobežník a posuňme úsečku BD o vektor $\overrightarrow{DC}$; obraz bodu B označme E.



Obr. 6

Pretože $|BD| = |EC|$ a $|AE| = |AB| + |CD|$, môžeme trojuholník ACE zostrojiť podľa vety *sss*. Stred O kružnice opísanej trojuholníku ACD potom zostrojíme ako priesečník osi úsečky AC s priamkou AE. Nakoniec zostrojíme vrchol D ako priesečník kružnice $k(O; |OA|)$ s priamkou p vedenou bodom C rovnobežne s AE a vrchol B ako priesečník kružnice $l(D, |CE|)$ s polpriamkou AE.

Úloha má vo zvolenej polrovine s hraničnou priamkou AE jediné riešenie.

Poznámka. Dĺžky sú zadané tak, že pre strany trojuholníka AEC platí rovnosť $|AE|^2 = |AC|^2 + |CE|^2$, takže trojuholník AEC je pravouhlý a stred O jeho opísanej kružnice je stredom úsečky AE. Túto skutočnosť možno samozrejme využiť pri konštrukcii.

C – II – 4

Označme písmenami L, P po rade výrazy na ľavej a pravej strane dokazovanej nerovnosti. Potom je

$$\begin{aligned} P - L &= x(y-x) + y(z-y) + z(x-z) + (z-x) = \\ &= x(y-x) + y(z-y) + (z-x)(1-z) > 0, \end{aligned}$$

lebo všetky tri sčítance posledného výrazu sú podľa zadania kladné.

Iné riešenie. Pretože $0 < y - x < 1$, je $(y-x)^2 < y - x$. Podobne je tiež $(z-y)^2 < z - y$ a $(z-x)^2 < z - x$. Dostávame tak nerovnosti

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2xy + (y-x)^2 < 2xy + y - x,\\ y^2 + z^2 &= 2yz + (z-y)^2 < 2yz + z - y,\\ x^2 + z^2 &= 2xz + (z-x)^2 < 2xz + z - x, \end{aligned}$$

ktorých sčítaním

$$2(x^2 + y^2 + z^2) < 2(xy + yz + xz) + 2(z - x),$$

čo je ekvivalentné s dokazovanou nerovnosťou.

Kategória B

B – I – 1

Označme po rade c, d a v počet chlapcov, dievčat a dospelých na lúke. Platí

$$\frac{100c}{c+d} = \frac{100d}{c+d+v} = v.$$

Z prvej rovnosti vyplýva $d^2 = c^2 + vc$, čo dosadíme do rovnosti medzi prvým a tretím výrazom, ktorú vopred upravíme do tvaru $vd = (100 - v)c$ a umocníme na druhú. Po úprave dostaneme

$$v^3 = 200c(50 - v).$$

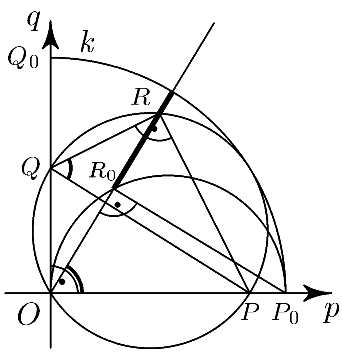
Odtiaľ vyplýva, že v je deliteľné 10 a $v < 50$. Vyskúšaním všetkých štyroch možností ($v = 10$, $v = 20$, $v = 30$, $v = 40$) zistíme, že celé c dostaneme jedine pre $v = 40$. Potom $c = 32$, $d = 48$. Na lúke je 32 chlapcov, 48 dievčat a 40 dospelých.

B – I – 2

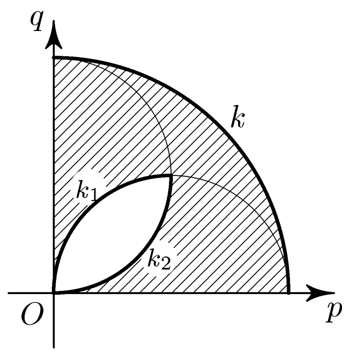
Označme p, q ramená daného pravého uhla, O jeho vrchol, P, Q príslušné koncové body priemeru uvažovanej polkružnice a $|PQ| = 2r$. Zvoľme pevne vnútorný bod R polkružnice a skúmajme, aký útvar body R vyplnia. Trojuholníky QPR a PQO sú pravouhlé, preto body O, P, Q, R ležia na jednej kružnici (obr. 7). Odtiaľ podľa vety o obvodových uhloch vyplýva, že

$$|\sphericalangle RQP| = |\sphericalangle ROP|.$$

Nakoľko je $|\sphericalangle RQP|$ pre pevný bod R uvažovanej polkružnice konštantný, leží bod R na polpriamke s počiatkom O, ktorá zviera s polpriamkou p uhol s veľkosťou $|\sphericalangle RQP|$.



Obr. 7



Obr. 8

Pre vzdialenosť $|OR|$ zrejme platí $|OR| \leqq |PQ|$, pretože OR je tetiva kružnice s priemerom PQ.

Vzhľadom na to, že hľadaná množina je zrejme súmerná podľa osi daného pravého uhla, stačí vyšetriť prípad, kedy $|\sphericalangle POR| \geqq 45°$. V tomto prípade je $|\sphericalangle RQO| \geqq 90°$, takže $|OR| \geqq |QR|$. Označme P_0 bod polpriamky OP, pre ktorý $|OP_0| = |PQ|$, R_0 jeho kolmý priemet na polpriamku OR (obr. 7). Pretože trojuholníky OP_0R_0 a QPR sú zhodné pravouhlé trojuholníky, je $|OR_0| = |QR|$. Pre vzdialenosť $|OR|$ teda platí $|OR_0| \leqq |OR| \leqq 2r$. Bod R teda leží v tej časti polpriamky OR, ktorá je ohraničená kružnicou k_1 nad priemerom OP_0 a štvrťkružnicou k so stredom O a polomerom OP_0. Analogicky pre $|\sphericalangle POR| \leqq 45°$ dostaneme, že hľadané body R ležia v časti polpriamky OR, ktorá je ohraničená kružnicou k_2 nad priemerom OQ_0 a štvrťkružnicou k.

Ostáva ukázať, že celá množina vyšrafovaná na obr. 8 je hľadanou množinu bodov R. Na to si stačí uvedomiť, že pokiaľ bod R leží vnútri štvrťkružnice k a mimo aspoň jednej z kružníc k_1, k_2, existuje aspoň jedna (prípadne dve, ak leží bod mimo oboch kružníc k_1, k_2) kružnica s daným priemerom $2r$ prechádzajúca bodmi O a R, ktorej stred leží vnútri útvaru ohraničeného polpriamkami p, q a štvrťkružnicou k. Táto kružnica bude mať vnútorný dotyk s kružnicou k a pretne každú z úsečiek OP_0, OQ_0. Uvedené priesečníky budú krajnými bodmi hľadanej polkružnice obsahujúcej uvažovaný bod R.

Záver: Hľadanou množinou bodov je útvar (vrátane hranice) vyšrafovaný na obr. 8, t.j. štvrťkruh so stredom O a polomerom $2r$ bez vnútra „šošovky“ ohraničenej dvomi štvrťkružnicami s polomerom r.

B – I – 3

Hľadané číslo v desiatkovej sústave má tvar

$$100A + 10B + C; \quad A, B, C \in \{0, 1, \dots, 9\},\ A \neq 0.$$

Ak je z neznámy základ inej číselnej sústavy, má podľa podmienky úlohy platiť

$$100A + 10B + C = \frac{1}{3}(Az^2 + Bz + C),$$

odkiaľ dostávame rovnicu

$$A(z^2 - 300) = B(30 - z) + 2C.$$

Zrejme je $z \geqq 18$, lebo $17^2 < 300$. Rozoberme jednotlivé prípady:

Ak je $z = 18$, je $12A = 6B + C$. Riešením sú tieto trojice (A, B, C): $(1, 2, 0)$, $(1, 1, 6)$, $(2, 4, 0)$, $(2, 3, 6)$, $(3, 6, 0)$, $(3, 5, 6)$, $(4, 8, 0)$, $(4, 7, 6)$, $(5, 9, 6)$.

Ak je $z = 19$, je $61A = 11B + 2C$. Riešením je trojica $(A, B, C) = (1, 5, 3)$.

Ak je $z = 20$, je $50A = 5B + C$. Riešením je trojica $(A, B, C) = (1, 9, 5)$.

Pre $z \geqq 21$ už rovnosť nenastane pre žiadnu trojicu (A, B, C), lebo ľavá strana rovnice je vždy väčšia alebo rovná 141 a pravá strana je vždy menšia alebo rovná 99.

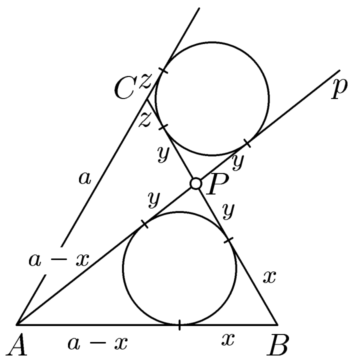
Spolu vyhovuje 11 čísel: 116, 120, 153, 195, 236, 240, 356, 360, 476, 480 a 596.

B – I – 4

Nech a označuje dĺžku strany rovnostranného trojuholníka ABC. Ďalej označme dĺžky úsekov dotyčníc z bodov A, B, C a P k obom uvažovaným kružniciam rovnako ako na obr. 9. Polomery oboch zhodných kružníc označme r. Z obrázku je zrejmé, že platí

$$a + z = a - x + 2y, \quad \text{odkiaľ} \quad x + z = 2y. \tag{1}$$

Pri vyjadrení dĺžky a strany BC dostaneme ďalej



Obr. 9

$$x + 2y + z = a. \tag{2}$$

Zo vzťahov (1) a (2) bezprostredne vyplýva

$$x + z = 2y = \frac{a}{2}, \quad \text{teda} \quad y = \frac{a}{4}. \tag{3}$$

Ďalej vidíme, že platí dvojica vzťahov

$$x = r \cdot \operatorname{cotg} 30^\circ = r \cdot \sqrt{3} \quad \text{a} \quad z = r \cdot \operatorname{cotg} 60^\circ = r \cdot \frac{\sqrt{3}}{3},$$

z ktorých vyplýva

$$x = 3z. \tag{4}$$

Dosadením (3) a (4) do (2) dostaneme po jednoduchej úprave

$$\frac{a}{2} = x + z = 3z + z = 4z, \quad \text{odkiaľ} \quad z = \frac{a}{8}.$$

Celkovo teda

$$|BP| = x + y = 3z + y = \frac{3}{8}a + \frac{1}{4}a = \frac{5}{8}a, \quad |CP| = a - |BP| = \frac{3}{8}a.$$

Odtiaľ už okamžite vyplýva konštrukcia bodu P.

B – I – 5

Označme S stred gule, z ktorej je odrezaný odsek, O stred gule K a Q stred jednej menšej vpísanej gule s polomerom r. Pätu kolmice z bodu Q na priamku SO označme P. Obr. 10 predstavuje rez útvaru rovinou SOQ. Pre vyznačené úsečky platí

$$|QO| = \frac{v}{2} + r,\ |PO| = \frac{v}{2} - r,\ |QS| = R - r,\ |PS| = R + r - v.$$

Z pravouhlých trojuholníkov OQP a QSP vyplývajú rovnosti

$$\left(\frac{v}{2} + r\right)^2 - \left(\frac{v}{2} - r\right)^2 = |QP|^2 = (R - r)^2 - (R + r - v)^2,$$

odkiaľ

$$|PQ|^2 = 2rv, \quad r = \frac{2Rv - v^2}{4R}. \tag{1}$$

Vzdialenosť stredu každej menšej gule od osi odseku je $|PQ|$, vzdialenosť stredov Q_1, Q_2 dvoch susedných menších gulí je $2r$. Ak použijeme kosínusovú vetu na trojuholník Q_1Q_2P, dostaneme (obr. 11)

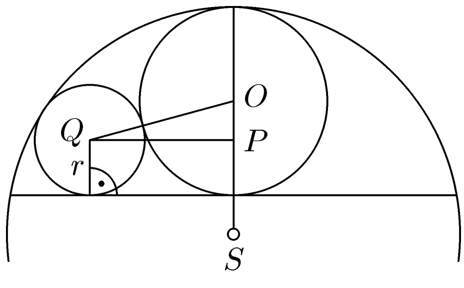
$$\cos\varphi = \frac{2|QP|^2 - 4r^2}{2|QP|^2} = 1 - \frac{r}{v}. \tag{2}$$

Nakoľko menších gulí má byť osem, je $\varphi = 45°$ a $\cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Ak z druhej rovnosti v (1) vyjadríme

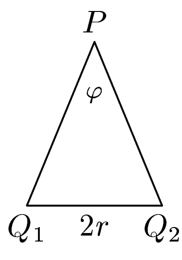
$$\frac{r}{v} = \frac{2R - v}{4R} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{v}{R},$$

dostávame odtiaľ podľa (2)

$$\frac{v}{R} = 2\left(1 - 2\frac{r}{v}\right) = 2\bigl(2\cos\varphi - 1\bigr) = 2\bigl(\sqrt{2} - 1\bigr).$$



Obr. 10



Obr. 11

B – I – 6

Hľadáme vlastne všetky tie hodnoty parametra s, pre ktoré má sústava rovníc

$$x^3 + y^3 = 3xy,$$
$$x + y = s$$

riešenie v obore reálnych čísel. Z druhej rovnice vyjadríme $y = s - x$ a dosadíme do prvej rovnice, ktorú budeme riešiť vzhľadom na neznámu x:

$$\begin{gathered} x^3 + (s-x)^3 = 3x(s-x), \\ x^3 + s^3 - 3s^2x + 3sx^2 - x^3 = 3sx - 3x^2, \\ 3(s+1)x^2 - 3s(s+1)x + s^3 = 0. \end{gathered}$$

Táto rovnica zrejme nemá riešenie pre $s = -1$. Pre $s \neq -1$ dostávame kvadratickú rovnicu, ktorá má v obore reálnych čísel riešenie, práve keď je jej diskriminant D nezáporný. Výpočtom

$$D = 9s^2(s+1)^2 - 12(s+1)s^3 = 3s^2(s+1)(3-s)$$

zisťujeme, že $D \geqq 0$, práve keď $-1 \leqq s \leqq 3$, čo spolu s podmienku $s \neq -1$ dáva hľadanú množinu možných hodnôt súčtov s: je to polouzavretý interval $(-1, 3\rangle$.

Spätne je vidieť, že pre každé s z intervalu $(-1, 3\rangle$ existuje číslo x, ktoré je koreňom vyššie uvedenej kvadratickej rovnice, a že toto číslo x a zodpovedajúca hodnota $y = s - x$ spĺňajú rovnicu $x^3 + y^3 = 3xy$.

Pre úplnosť vypočítame tie čísla x, y, ktoré sú pre ľubovoľné $s \in (-1, 3\rangle$ riešením uvažovanej sústavy:

$$x_{1,2} = \frac{3s(s+1) \pm s\sqrt{3(s+1)(3-s)}}{6(s+1)} = \frac{s}{2} \pm s\sqrt{\frac{3-s}{12(s+1)}}.$$

Po dosadení do $y = s - x$ zisťujeme, že danému s prináležia dve dvojice

$$[x, y] = \left\{ \frac{s}{2} + s\sqrt{\frac{3-s}{12(s+1)}}, \frac{s}{2} - s\sqrt{\frac{3-s}{12(s+1)}} \right\}$$

či

$$[x, y] = \left\{ \frac{s}{2} - s\sqrt{\frac{3-s}{12(s+1)}}, \frac{s}{2} + s\sqrt{\frac{3-s}{12(s+1)}} \right\}.$$

Rovnosť $x^3 + y^3 = 3xy$ možno pre nájdené x a y buď overiť dosadením a priamym výpočtom, alebo pomocou Viètových vzorcov pre korene uvedenej kvadratickej rovnice

$$x + y = s, \quad xy = \frac{s^3}{3(s+1)},$$

podľa ktorých

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = s^3 - 3s\,\frac{s^3}{3(s+1)} = \frac{s^3}{s+1} = 3xy.$$

B – S – 1

Označme po rade c, d počet chlapcov a dievčat na ihrisku. Potom platí

$$\frac{100c}{c+d} = d.$$

Odtiaľ

$$c = \frac{d^2}{100-d} = \frac{100^2 - (100^2 - d^2)}{100-d} = \frac{10\,000}{100-d} - d - 100.$$

Pretože c je celé nezáporné číslo, musí byť $100 - d$ kladným deliteľom čísla 10 000, t.j. výraz $100 - d$ môže nadobúdať len hodnoty: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 40, 50, 80. Naviac ale podľa zadania úlohy musí byť splnená podmienka $c + d < 500$, teda

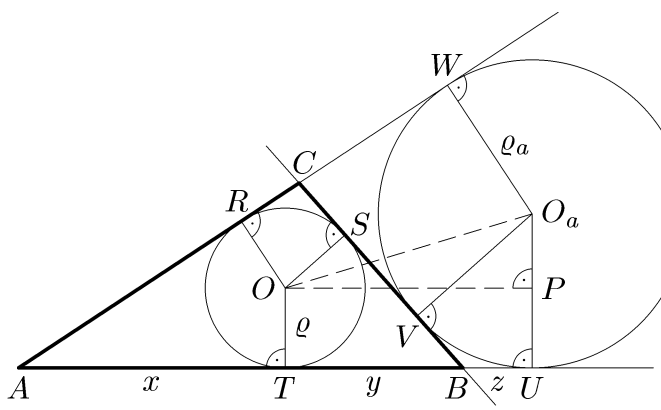
$$\frac{10\,000}{100-d} < 600,$$

odkiaľ vyplýva $100-d > 16$. Pre hodnoty $100-d$ rovné 20, 25, 40, 50, 80 tak dostaneme postupne všetky riešenia

$$(c, d) = (320, 80),\ (225, 75),\ (90, 60),\ (50, 50),\ (5, 20).$$

B – S – 2

Označme podľa obr. 12 odpovedajúce úseky dotyčníc k obom vpísaným kružniciam



Obr. 12

$|AT| = |AR| = x$, $|BT| = |BS| = y$, $|BU| = |BV| = z$. Naviac ešte platí $|CR| = |CS|$, $|CW| = |CV|$, takže

$$\begin{aligned}|AW| = |AR| + |RC| + |CW| = |AR| + |RC| + |CS| + |SV| = \\ = x + 2|CS| + y - z\end{aligned}$$

a zároveň

$$|AW| = |AU| = x + y + z.$$

Je teda $|CS| = z$ a tiež

$$a = |CB| = z + y = |TU| = |OP|.$$

Z pravouhlého trojuholníka OPO_a podľa Pytagorovej vety potom dostávame

$$|OO_a| = \sqrt{|OP|^2 + |PO_a|^2} = \sqrt{a^2 + (\varrho_a - \varrho)^2},$$

čo bolo treba dokázať.

B – S – 3

Daná rovnica

$$x^2 - (3z + 5)x + (3z^2 + 3z + 4) = 0$$

má dva rôzne reálne korene, práve keď je jej diskriminant D kladný,

$$\begin{aligned}D = (3z + 5)^2 - 4(3z^2 + 3z + 4) = -3z^2 + 18z + 9 = \\ = -3(z^2 - 6z - 3) = -3\big((z - 3)^2 - 12\big) > 0,\end{aligned}$$

odkiaľ $z < 3 + \sqrt{12}$. Podľa zadania je však $z \geqq 6$, preto vyhovuje jedine $z = 6$. Daná rovnica má potom v desiatkovej sústave tvar

$$x^2 - 23x + 130 = 0$$

s koreňmi $x_1 = 10$, $x_2 = 13$. (V sústave so základom $z = 6$ budú mať nájdené korene zápis $x_1 = 14$, $x_2 = 21$.)

B – II – 1

Po odčítaní druhej rovnice od prvej a tretej rovnice od druhej dostaneme dve rovnice, ktoré majú po jednoduchej úprave tvar

$$(a - d)(b - c) = 0, \qquad (a - b)(c - d) = 0.$$

Odtiaľ vyplýva, že zo štyroch čísel a, b, c, d sú aspoň tri rovnaké. Nech je napr. $a = b = c$. Po dosadení do prvej rovnice pôvodnej sústavy dostaneme

$$a^2 + ad = a(a + d) = 1\,999.$$

Nakoľko 1 999 je prvočíslo, vyhovuje jedine $a = 1$ a $a + d = 1\,999$. Odtiaľ vyplýva, že

$$a = b = c = 1, \qquad d = 1\,998.$$

Zámenou dostaneme ďalšie tri riešenia

$$a = b = d = 1,\ c = 1\,998; \quad a = c = d = 1,\ b = 1\,998; \quad b = c = d = 1,\ a = 1\,998.$$

Dosadením sa ľahko presvedčíme, že všetky štyri štvorice vyhovujú zadaniu.

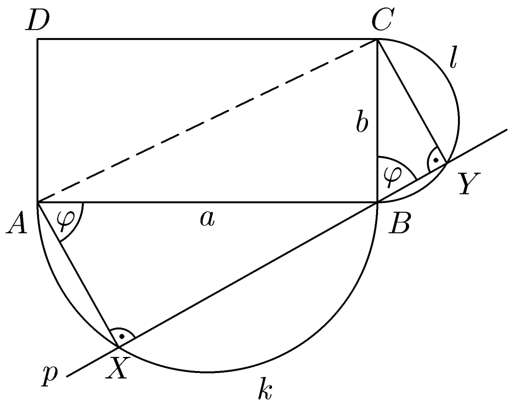
B – II – 2

Označme $|AB| = a$, $|BC| = b$ a φ veľkosť uhla XAB ($0 < \varphi < 90°$, obr. 13). Zrejme je tiež $|\sphericalangle CBY| = 90° - |\sphericalangle ABX| = |\sphericalangle XAB| = \varphi$. Pretože dĺžka strany AC štvoruholníka $AXYC$ od polohy bodov X, Y nezávisí, stačí vyšetrovať dĺžku d lomenej čiary $AXYC$, pre ktorú platí

$$\begin{aligned} d &= |AX| + |XB| + |BY| + |YC| = \\ &= a\cos\varphi + a\sin\varphi + b\cos\varphi + b\sin\varphi = \\ &= (a+b)(\sin\varphi + \cos\varphi) = \\ &= \sqrt{2}(a+b)\Bigl(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi\Bigr) = \\ &= \sqrt{2}(a+b)\sin(\varphi + 45°) \leqq \sqrt{2}(a+b). \end{aligned}$$

Pritom v poslednej nerovnosti nastane rovnosť práve vtedy, keď $\varphi + 45° = 90°$, t.j. práve vtedy, keď $\varphi = 45°$.

Odtiaľ jednoducho vyplýva konštrukcia priamky p.



Obr. 13

Poznámka. Hodnota d je maximálna práve vtedy, keď je maximálna hodnota d^2, preto môžeme miesto d vyšetrovať hodnotu d^2:

$$d^2 = (a+b)^2(\sin^2\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi + \cos^2\varphi) = (a+b)^2(1 + \sin 2\varphi) \leqq 2(a+b)^2.$$

Odtiaľ vychádza, že $d \leqq \sqrt{2}(a+b)$, pričom maximálnu hodnotu d dosahuje práve vtedy, keď $\sin 2\varphi = 1$, tj. $\varphi = 45°$.

Iné riešenie. Ako sme už zistili vyššie, je $|\sphericalangle CBY| = |\sphericalangle XAB|$, takže oba pravouhlé trojuholníky BCY a ABX sú podobné s koeficientom podobnosti $\lambda = |BC| : |AB| = b : a$. Pre dĺžku d lomenej čiary $AXYC$ teda platí, že $d = (1+\lambda)(|AX| + |XB|)$ bude maximálna, práve keď bude maximálny súčet $|AX| + |XB|$. Z rovnosti $(|AX| + |XB|)^2 = a^2 + 2|AX||XB|$ vyplýva, že uvedený súčet bude maximálny práve vtedy, keď bude maximálny obsah $\frac{1}{2}|AX||XB|$ trojuholníka ABX, teda práve keď bude trojuholník ABX rovnoramenný, t.j. $|AX| = |XB|$ a $\varphi = 45°$.

B – II – 3

Aby sme určili obor hodnôt daného výrazu za podmienky $x+y \geqq 1$, nájdeme pre každé $s \geqq 1$ všetky tie čísla p, pre ktoré má sústava rovníc

$$x + y = s, \qquad \frac{x+y}{x^2+y^2} = p$$

v obore reálnych čísel riešenie (z predpokladu $s \geqq 1$ zrejme vyplýva, že je $p > 0$).

Z prvej rovnice vyjadríme $y = s - x$ a dosadíme do druhej rovnice. Po úprave dostaneme pre neznámu x kvadratickú rovnicu

$$2px^2 - 2psx + s(ps-1) = 0.$$

Tá má reálne riešenie práve vtedy, keď je jej diskriminant $D = 4ps(2-ps)$ nezáporný. Pretože sú obe čísla s a p kladné, nerovnosť $D \geqq 0$ platí práve vtedy, keď $ps \leqq 2$. To znamená, že uvažovaná sústava rovníc má reálne riešenie pre každé $p \leqq \dfrac{2}{s} \leqq 2$ a špeciálne pre $s = 1$ pre každé kladné $p \leqq 2$.

Skúmaný výraz teda nadobúda všetky hodnoty z intervalu $(0, 2\rangle$.

Iné riešenie. Z Cauchyho nerovnosti $(x+y)^2 \leqq 2(x^2+y^2)$, ktorá platí pre ľubovoľné reálne čísla x a y, vyplýva za predpokladu $x + y \geqq 1$ odhad

$$0 < \frac{x+y}{x^2+y^2} \leqq \frac{x+y}{\frac{1}{2}(x+y)^2} = \frac{2}{x+y} \leqq 2.$$

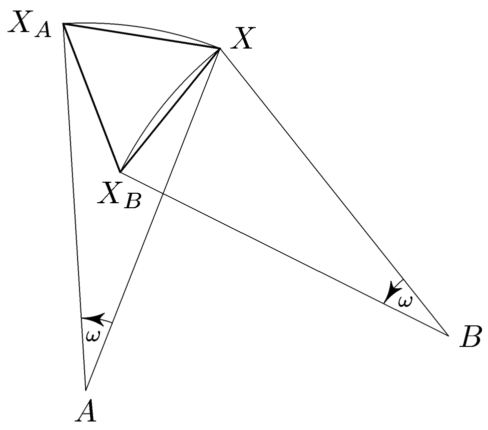
Naopak pre každé $p \in (0, 2\rangle$ stačí položiť napr. $x = y = \dfrac{1}{p}$. Potom

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} = p \quad \text{a} \quad x + y = \frac{2}{p} \geqq 1.$$

Hľadanú množinu hodnôt teda tvorí polouzavretý interval $(0, 2\rangle$.

B – II – 4

Predpokladajme, že bod X má požadovanú vlastnosť, t.j. že trojuholník XX_AX_B je rovnostranný. Potom sú trojuholníky AXX_A a BXX_B zhodné, lebo sú rovnoramenné so zhodným vrcholovým uhlom a zhodnou základňou (obr. 14). Preto $|AX| = |BX|$. A pretože $|\sphericalangle X_AXX_B| = 60°$, je trojuholník BXX_B obrazom trojuholníka AXX_A v otočení okolo vrcholu X o uhol 60°. V tomto otočení je obrazom bodu A bod B, preto $|\sphericalangle AXB| = 60°$. To znamená, že trojuholník ABX je rovnostranný. Také body X existujú v rovine práve dva a obidva majú vlastnosť z textu úlohy: Ak je X ľubovoľný z nich, potom trojuholníky AXX_A a BXX_B sú priamo zhodné podľa vety *sus*, preto prvý z nich je obrazom druhého v tom otočení okolo stredu X, v ktorom bod B prejde do bodu A, čo je otočenie o 60 stupňov. V ňom je bod X_A obrazom bodu X_B, takže trojuholník XX_AX_B je skutočne rovnostranný.



Obr. 14

Kategória A

A – I – 1

Uvažujme najprv len také úpravy daného výrazu (doplneného o prípadné zátvorky), ktorými prevedieme naznačené delenia na násobenia bez toho, aby sme konkrétne čísla medzi sebou krátili. Po takých úpravách dostaneme nakoniec zlomok

$$\frac{15\cdot a_1a_2\dots a_k}{14\cdot a_{k+1}a_{k+2}\dots a_{12}}, \tag{1}$$

kde každé z dvanástich čísel $2,3,\dots,13$ leží práve v jednej z dvoch skupín činiteľov $P=\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$, $Q=\{a_{k+1},a_{k+2},\dots,a_{12}\}$. Pokiaľ žiadnu zátvorku nedoplníme, dostaneme $\dfrac{15}{14\cdot 13\cdot 12\cdot\ldots\cdot 2}$, teda $P=\emptyset$; naopak prípad $Q=\emptyset$ nastane napríklad doplnením jednej dvojice zátvoriek:

$$15:(14:13:12:\ldots:2)=\frac{15\cdot 13\cdot 12\cdot\ldots\cdot 2}{14}.$$

Pretože $15!=2^{11}\cdot 3^6\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13$, môžeme každý podiel, ktorý možno popísaným spôsobom dostať, vyjadriť v tvare

$$\frac{2^{\alpha_2}\cdot 3^{\alpha_3}\cdot\ldots\cdot 13^{\alpha_{13}}}{2^{\beta_2}\cdot 3^{\beta_3}\cdot\ldots\cdot 13^{\beta_{13}}}, \tag{2}$$

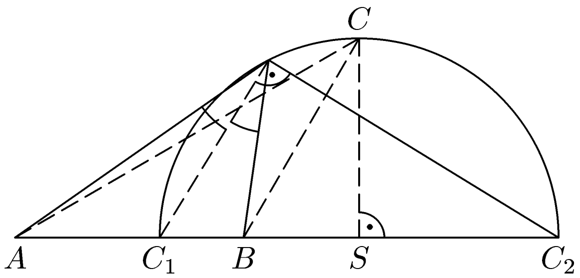
kde $\alpha_2+\beta_2=11$, $\alpha_3+\beta_3=6$, … Najmenšie prirodzené číslo, ktoré sa takému zlomku (2) rovná, je $2\cdot 5\cdot 11\cdot 13$, pretože práve vypísané prvočinitele vystupujú v rozklade čísla 15! s nepárnymi mocninami. A pretože

$$\begin{aligned}2\cdot 5\cdot 11\cdot 13&=\frac{15\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 8\cdot 7\cdot 3}{14\cdot 9\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 2}=\\&=\frac{15}{\frac{14}{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}\cdot\frac{9}{8\cdot 7}\cdot 6\cdot 5\cdot\frac{4}{3}\cdot 2}=\\&=15:(14:13:12:11:10):(9:8:7):6:5:(4:3):2,\end{aligned}$$

je číslo $1\,430=2\cdot 5\cdot 11\cdot 13$ riešením úlohy.

A – I – 2

Pre $k=1$ uvedenej charakterizácii vyhovuje ľubovoľný rovnoramenný trojuholník s danou základňou AB a ľubovoľne veľkou výškou z vrcholu C. Medzi nimi zrejme neexistuje trojuholník s najväčším obsahom. Zrejme $k \neq 1$ (pre $k = 1$ maximum neexistuje). Obe čísla k a $\frac{1}{k}$ skúmanú vlastnosť zároveň buď majú, alebo nie.



Obr. 15

Predpokladajme teda (bez ujmy na všeobecnosti), že $k > 1$. Na priamke AB existujú dva rôzne body C_1, C_2, pre ktoré platí $\frac{|AC_1|}{|BC_1|} = \frac{|AC_2|}{|BC_2|} = k$. Všetky body C v rovine, pre ktoré $|AC| : |BC| = k$, ležia na Apollóniovej kružnici so stredom S zostrojenej nad priemerom C_1C_2 (obr. 15). Odtiaľ je zrejmé, že trojuholník ABC bude mať najväčší obsah pre vrchol C v strede oblúka C_1C_2 (v ľubovoľnej z polrovín určených priamkou AB). Za predpokladu $k > 1$ pre takto zvolený bod C platí $|AC| > |BC|$ a tiež $|AC| > |AS| > |AB|$, takže trojuholník ABC bude rovnoramenný práve vtedy, keď bude $|AB| = |BC|$. Odtiaľ zostavíme rovnicu pre odpovedajúcu hodnotu k.

Pre bod C_1 predovšetkým platí

$$|BC_1| = \frac{1}{k+1}|AB|, \qquad |BC_2| = \frac{1}{k-1}|AB|,$$

takže z rovnosti $|C_1C_2| = |BC_1| + |BC_2|$ vychádza

$$|SC_1| = \frac{1}{2}\,|C_1C_2| = \frac{k}{k^2-1}|AB|.$$

Ešte vypočítame

$$|BS| = |SC_1| - |BC_1| = \left(\frac{k}{k^2-1} - \frac{1}{k+1}\right)|AB| = \frac{1}{k^2-1}|AB|$$

a

$$|BC|^2 = |BS|^2 + |SC|^2 = |BS|^2 + |SC_1|^2 = \frac{1+k^2}{\left(k^2-1\right)^2}|AB|^2.$$

Preto z podmienky $|AB| = |BC|$ vychádza rovnica

$$1 + k^2 = k^4 - 2k^2 + 1, \quad \text{alebo} \quad k^2\left(k^2-3\right) = 0,$$

ktorá má jediné kladné riešenie $k = \sqrt{3}$.

Úlohe vyhovujú dve kladné čísla k, $k = \sqrt{3}$ a $k = 1/\sqrt{3}$.

Iné riešenie (bez Apollóniovej kružnice). Predpokladajme opäť (bez ujmy na všeobecnosti), že $k > 1$ je pevné. Označme C_0 pätu výšky z vrcholu C a $x = |AC_0|$ (obr. 16). Pre dané x spočítame závislosť $v = v(x)$, nájdeme maximum tejto funkcie a nakoniec sa pozrieme, pre ktoré $k > 1$ tomuto extrému zodpovedá rovnoramenný trojuholník.

Zrejme je

$$|AC|^2 = x^2 + v^2, \quad |BC|^2 = (x - c)^2 + v^2, \tag{1}$$

kde $c = |AB|$ a $v = |CC_0|$, takže podmienka $|AC| = k|BC|$ je ekvivalentná rovnosti

$$x^2 + v^2 = k^2\bigl((x-c)^2 + v^2\bigr),$$

alebo

$$v^2 = -x^2 + \frac{2k^2c}{k^2-1}\,x - \frac{k^2c^2}{k^2-1}.$$

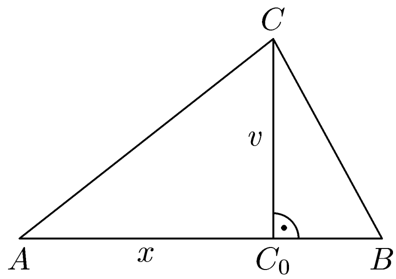
Ako vieme, nadobúda nájdená kvadratická funkcia maximum pre

$$x = \frac{k^2c}{k^2-1} > c$$

a tomu zodpovedá maximálna hodnota

$$v_{\max} = \frac{kc}{k^2-1}.$$

Pretože sme dostali $x > c$, znamená to, že $|AC| > c$, takže trojuholník ABC môže byť rovnoramenný, jedine keď $|BC| = |BA| = c$. Dosadením do druhej rovnosti v (1) dostaneme podmienku



Obr. 16

$$c^2 = \left(\frac{k^2c}{k^2-1} - c\right)^2 + \frac{k^2c^2}{(k^2-1)^2} = \frac{c^2\bigl(k^2+1\bigr)}{(k^2-1)^2},$$

odkiaľ pre $t = k^2$ vychádza kvadratická rovnica

$$t + 1 = (t-1)^2,$$

ktorá má jediný kladný koreň $t = 3$, takže $k = \sqrt{3}$. Záver je rovnaký ako v predchádzajúcom riešení.

A – I – 3

Budeme najprv zisťovať obor hodnôt uvedenej funkcie, t.j. pre ktoré reálne s existuje aspoň jedno reálne $x$také, že

$$y = \frac{12x^2 - 12ax}{x^2 + 36} = s.$$

Jednoduchou úpravou dostaneme rovnicu

$$(s-12)x^2+12ax+36s=0, \tag{1}$$

ktorá je kvadratická, pokiaľ $s \neq 12$. Z rovnice vyplýva, že $s=12$ patrí do oboru hodnôt, len keď $ax=-36$, teda len keď $a \neq 0$. Pre $a=0$ dostaneme pre x rovnicu $x^2=\dfrac{-36s}{s-12}$, z ktorej vychádza pre s nerovnosť $0 \leqq s < 12$, takže obor hodnôt uvažovanej funkcie nemá pre $a=0$ maximum.

Predpokladajme preto, že $a \neq 0$ a $s \neq 12$. V tomto prípade je rovnica (1) kvadratická a bude mať v reálnom obore riešenie práve vtedy, keď jej diskriminant

$$D=12^2a^2-4\cdot 36s(s-12)=12^2(a^2-s^2+12s)$$

bude nezáporný, t.j. práve vtedy, keď

$$6-\sqrt{36+a^2} \leqq s \leqq 6+\sqrt{36+a^2}.$$

Krajné body nájdeného intervalu (ktorý zrejme obsahuje aj skôr nájdený prvok oboru hodnôt $s=12$) sú minimum a maximum danej funkcie. Pokiaľ to majú byť celé čísla, musí pre vhodné prirodzené číslo b platiť $36+a^2=b^2$, teda $(b-a)(b+a)=36$. Z každého rozkladu čísla 36 na súčin dvoch prirodzených činiteľov $36=mn$ dostaneme $a=\frac{1}{2}(m-n)$, $b=\frac{1}{2}(m+n)$, čo sú celé čísla, len ak majú m a n rovnakú paritu ($m \equiv n \pmod 2$). A pretože $a \neq 0$, vyhovuje jedine rozklad $36=2\cdot 18$, odkiaľ $b=10$, $a=\pm 8$.

Odpoveď: Požadovanú vlastnosť majú práve dve celé čísla a, a to $a=8$ a $a=-8$.

A – I – 4

Ak rozklad čísla n na prvočinitele je $n=\prod_{i=1}^{k} p_i^{s_i}$, kde $p_1,\dots,p_k$ sú rôzne prvočísla a $s_1,\dots,s_k$ nezáporné celé čísla, platí pre počet jeho kladných deliteľov vzorec $\tau(n)= \prod_{i=1}^{k}(s_i+1)$.

Aby daná rovnica mala vôbec zmysel, musí byť jej riešenie n také prirodzené číslo, pre ktoré je aj $1{,}6n=\frac{8}{5}n$ prirodzené, takže $n=2^\alpha 5^\beta n'$, kde $\beta \geqq 1$ a n' je nesúdeliteľné s $2\cdot 5$. Danú rovnicu potom môžeme prepísať ako

$$(\alpha+4)\beta\tau(n')=\frac{8}{5}(\alpha+1)(\beta+1)\tau(n'),$$

čo po krátení kladným číslom $\tau(n')$ a ďalšej úprave dá rovnicu

$$(3\beta+8)(4-\alpha)=40.$$

Vzhľadom k tomu, že $3\beta+8 \geqq 11$ a číslo $3\beta+8$ dáva pri delení tromi zvyšok 2, vyhovuje zo všetkých rozkladov čísla 40 na súčin jedine

$$3\beta+8=20, \qquad 4-\alpha=2,$$

teda $\alpha = 2$, $\beta = 4$, $n = 2^2 \cdot 5^4 n'$.

Pre podiel $\tau(0{,}16n) : \tau(n)$ tak vychádza

$$\frac{\tau\left(\frac{4}{25}n\right)}{\tau(n)} = \frac{\tau(2^4 \cdot 5^2)\tau(n')}{\tau(2^2 \cdot 5^4)\tau(n')} = \frac{5 \cdot 3}{3 \cdot 5} = 1.$$

A – I – 5

Pre veľkosti ťažníc t_a, t_b, t_c trojuholníka ABC platí rovnosť

$$t_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) \tag{1}$$

a ďalšie dve, ktoré dostaneme cyklickou zámenou. S ich pomocou zistíme, že prvá z daných rovností je ekvivalentná rovnosti

$$a^2 + b^2 = 5c^2. \tag{2}$$

Podobne zo vzorcov $2S = av_a = bv_b = cv_c$ pre obsah S trojuholníka ABC dostaneme, že druhá rovnosť je ekvivalentná rovnosti

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}, \quad \text{alebo} \quad c^2(a^2 + b^2) = a^2b^2. \tag{3}$$

Pre $c = 1$ tak dostávame sústavu rovníc $a^2 + b^2 = 5$, $a^2b^2 = 5$. Čísla a^2, b^2 sú teda korene kvadratickej rovnice $t^2 - 5t + 5 = 0$. Tá má dva rôzne kladné korene, preto

$$\{a^2, b^2\} = \left\{\tfrac{1}{2}\left(5 + \sqrt{5}\right), \tfrac{1}{2}\left(5 - \sqrt{5}\right)\right\}. \tag{4}$$

Ukážeme, že pre odpovedajúce hodnoty a, b a $c = 1$ platia trojuholníkové nerovnosti. Pretože $ab = \sqrt{5}$, je

$$(a + b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab = 5 + 2\sqrt{5} > 1 = c^2,$$
$$(a - b)^2 = (a^2 + b^2) - 2ab = 5 - 2\sqrt{5} < 1 = c^2,$$

t.j. $|a - b| < c < |a + b|$.

Tým je existencia trojuholníka ABC dokázaná (je jediný až na podobnosť a symetriu $A \leftrightarrow B$).

Pre jednoduchosť ďalších výpočtov položme aj naďalej $c = 1$. Z kosínusovej vety a zo vzorca (2) vypočítame

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - 1}{2ab} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}.$$

Podobne môžeme vypočítať aj hodnoty $\cos\alpha$ a $\cos\beta$. S využitím rovností (2) a (3) dostaneme

$$\cos\alpha = \frac{1+b^2-a^2}{2b} = \frac{1+2b^2-(a^2+b^2)}{2b} = b - \frac{2}{b},$$
$$\cos\beta = \frac{1+a^2-b^2}{2a} = \frac{1+2a^2-(a^2+b^2)}{2a} = a - \frac{2}{a},$$

a pretože $|a^2-b^2| = \sqrt{5}$, je jasné, že práve jedno z čísel $\cos\alpha$, $\cos\beta$ je záporné (jeden z uhlov α, β je tupý). Pritom

$$\cos^2\alpha = \frac{4}{b^2} + b^2 - 4 = \frac{4}{5}a^2 + b^2 - 4 = 1 - \frac{1}{5}a^2,$$
$$\cos^2\beta = \frac{4}{a^2} + a^2 - 4 = \frac{4}{5}b^2 + a^2 - 4 = 1 - \frac{1}{5}b^2,$$

takže $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$, odkiaľ vyplýva $\sin\alpha = |\cos\beta|$ a $\sin\beta = |\cos\alpha|$. Vzhľadom k nerovnosti $\cos\alpha\cos\beta < 0$ to znamená, že

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = 0,$$

teda $|\alpha-\beta| = 90°$.

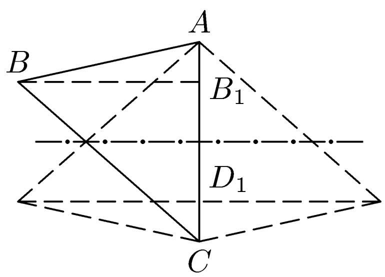
Pokiaľ sa rozhodneme hneď využiť vypočítané hodnoty (4) (keď budeme predpokladať, že $a > b$, bude $\cos\alpha < 0$), dostaneme po chvíľke počítania

$$\cos^2\alpha = \frac{5-\sqrt{5}}{10}, \quad \cos^2\beta = \frac{5+\sqrt{5}}{10},$$

odkiaľ už je opäť vidieť, že $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$. Záver je rovnaký ako prv.

A – I – 6

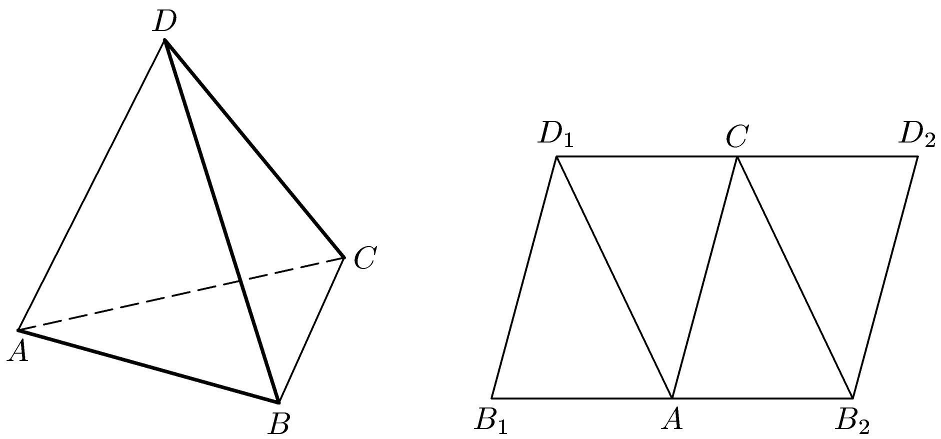
Najprv si uvedomíme, že štvorsten nemožno rozvinúť do roviny, ak nebude niektorý z vrcholov krajným bodom jednej z troch spomenutých úsečiek. Pretože štvorsten má spolu štyri vrcholy, musí jedna z troch úsečiek obsahovať dva z vrcholov, teda štvorsten musíme rozrezať podľa jednej z jeho hrán.



Obr. 17

Rozoberieme postupne niekoľko možností, ako zvoliť ďalšie dve úsečky. Ale ešte predtým si uvedomíme, že štvorsten $ABCD$, ktorého protiľahlé hrany sú zhodné, má steny tvorené navzájom zhodnými ostrouhlými trojuholníkmi. To je zrejmé z toho, že ľubovoľné dve steny takého štvorstena (napr. tie so spoločnou hranou AC) sú zhodné trojuholníky, pričom protiľahlé vrcholy B a D ležia v rovnakej vzdialenosti od priamky AC v dvoch rovnobežných rovinách súmerne združených podľa roviny súmernosti úsečky AC. Odtiaľ vyplýva, že vzdialenosť vrcholov B, D nie je menšia ako vzdialenosť oboch rovín, t.j. vzdialenosť kolmých priemetov B_1, D_1 vrcholov B, D na priamku AC (obr. 17). A pretože hrany BD a AC sú mimobežné, je dokonca $|AC| = |BD| > |B_1D_1|$. To znamená, že oba priemety B_1, D_1 ležia vnútri hrany AC, takže uhly BAC, BCA pri zvolenej hrane AC sú ostré. Podobne zistíme, že aj tretí uhol ABC je ostrý.

Predpokladajme, že sme štvorsten $ABCD$ rozrezali pozdĺž hrany AB.

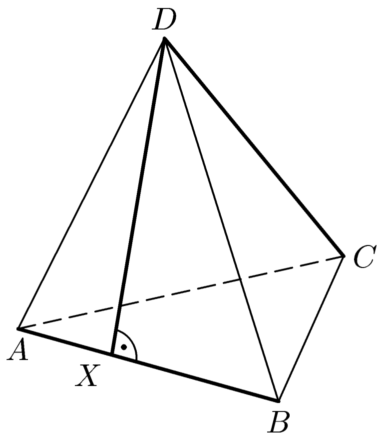


Obr. 18

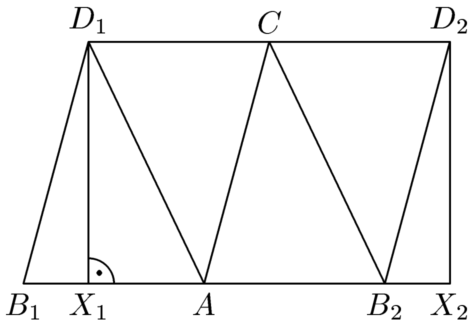
1. Rozrežeme štvorsten $ABCD$ pozdĺž susednej hrany BC. Pretože uhol pri vrchole B v trojuholníku ABC je ostrý, nemôžeme po ďalšom reze a prípadnom rozvinutí do roviny nikdy dostať pravouholník.

2. Rozrežeme štvorsten $ABCD$ pozdĺž protiľahlej hrany CD. Je jasné, že tretia úsečka rezu musí vychádzať z jedného z vrcholov, pretože inak sa nám nepodarí okolie žiadneho z vrcholov rozvinúť do roviny. Pokiaľ teraz štvorsten rozrežeme pozdĺž tretej hrany, dostaneme síce jeho sieť, ktorú tvorí rovnobežník (obr. 18), ale pretože dve z troch hrán, pozdĺž ktorých sme rezali, sú susedné, nemôže to byť pravouholník (pozri obr. 18). Ak ale vedieme rez povedzme z vrcholu D na hranu AB (inak trojhrany pri vrcholoch A a B neuvoľníme, obr. 19), a ak bude zároveň úsečka DX rezu výškou steny ABD, dostaneme po rozvinutí do roviny obdĺžnik, ako je zrejmé, ak zakreslíme rez do už raz uvažovanej rovnobežníkovej siete (obr. 20).

3. Pokiaľ z hrán štvorstena $ABCD$ rozrežeme jedine hranu AB, musí z každého zo zvyšných vrcholov C, D vychádzať jedna z úsečiek rezu. Ak preberieme jednotlivé možnosti, ľahko zistíme, že sa nám podarí uvažovaný štvorsten rozvinúť jedine vtedy, ak

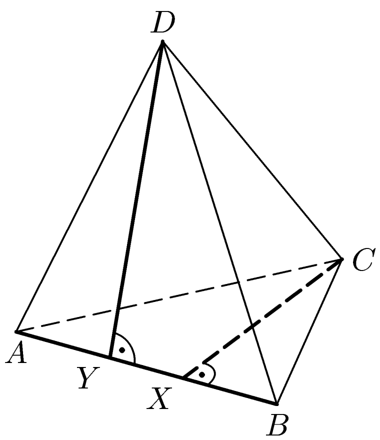


Obr. 19

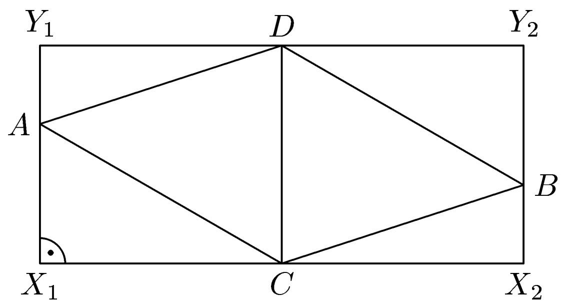


Obr. 20

budú končiť obidva rezy CX a DY na hrane AB. A pretože chceme po rozvinutí dostať obdĺžnik, neostáva iné ako predpokladať, že CX aj DY sú stenové výšky (obr. 21). Potom $|BX| = |AY|$ a $|BY| = |AX|$ a po rozvinutí potom skutočne dostaneme obdĺžnik (obr. 22) zložený z dvoch zhodných stien CDA, DCB so spoločnou hranou CD a pravouhlých trojuholníkov ADY, ACX, BCX, BDY, pre ktorých odvesny platí $|CX| = |DY|$.



Obr. 21



Obr. 22

Získali sme dva rôzne postupy, ako daný štvorsten rozrezať tak, že po rozvinutí do roviny vznikne obdĺžnik. Každý z uvedených postupov sa dá realizovať troma spôsobmi (podľa toho, ktorou hranou začneme), tie však v prípade pravidelného štvorstena dávajú ten istý obdĺžnik. Pre nepravidelný štvorsten však môžeme dostať až šesť rôznych obdĺžnikov.

Ďalej je zrejmé, že obidva popísané postupy dajú pre zvolenú hranu AB zhodné obdĺžniky práve vtedy, keď pre výšku CX trojuholníka ABC platí $|CX| = |AB|$. Pretože v prípade rovnostranného trojuholníka je $|CX| < |AB|$, dostaneme pre pravidelný štvorsten dva nezhodné obdĺžniky. (Pre pravidelný štvorsten naviac zrejme dostaneme $X = Y$.)

A – S – 1

Z rovností $t_a = b$, $t_b = c$ podľa známych vzorcov pre dĺžky ťažníc

$$t_a = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}} \quad \text{a} \quad t_b = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}}$$

dostaneme po umocnení a jednoduchej úprave

$$\begin{aligned} 2c^2 - 2b^2 - \ a^2 &= 0, \\ -2c^2 - \ b^2 + 2a^2 &= 0. \end{aligned}$$

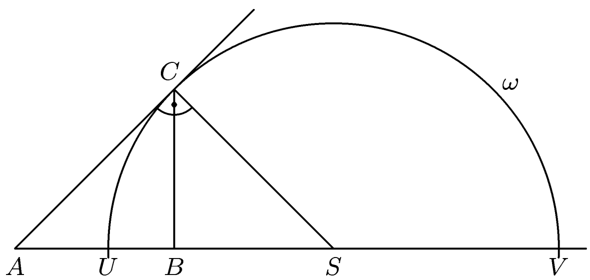
Sčítaním dostaneme $a^2 = 3b^2$ a dosadením do jednej z rovníc $2c^2 = 5b^2$. Obe rovnosti $t_a = b$, $t_b = c$ teda platia súčasne, práve keď $a^2 : b^2 : c^2 = 6 : 2 : 5$. Trojuholník so stranami $\sqrt{6}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ zrejme existuje a je ostrouhlý, lebo $6 < 2 + 5$, takže podľa kosínusovej vety má tento trojuholník oproti najdlhšej strane ostrý vnútorný uhol.

A – S – 2

Zo sínusovej vety $\sin\alpha : \sin\beta = a : b$ za podmienky $b = ka$, $k > 1$, vyplýva odhad

$$\sin\alpha = \frac{\sin\beta}{k} \leqq \frac{1}{k},$$

pritom rovnosť nastane, práve keď $\sin\beta = 1$, teda $\beta = 90°$. Preto najväčší uhol α má ten z uvažovaných trojuholníkov ABC, ktorý má pravý uhol pri vrchole B a jeho (ostrý) uhol pri vrchole A je určený rovnosťou $\sin\alpha = \frac{1}{k}$. Tento pravouhlý trojuholník je zrejme rovnoramenný, práve keď $\alpha = 45°$, teda keď $\frac{1}{k} = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, čo nastane len pre hodnotu $k = \sqrt{2}$.



Obr. 23

Iné riešenie. Predpokladajme, že číslo $k > 1$ je pevné. Ak zvolíme v rovine úsečku AB, vrcholy C všetkých uvažovaných trojuholníkov ABC vyplnia množinu všetkých bodov X s vlastnosťou $|AX|:|BX|=k$, teda Apollóniovu kružnicu ω. Uhol BAC bude maximálny, práve keď priamka AC bude dotyčnicou kružnice ω (a bod C bude jej bod dotyku, obr. 23).

Popíšme polohu krajných bodov U, V toho priemeru kružnice ω, ktorý leží na priamke AB. Bod U je vnútorným bodom úsečky AB, bod V vnútorným bodom polpriamky opačnej k polpriamke BA, pričom pochopiteľne platí

$$|AU|:|BU|=|AV|:|BV|=k.$$

Odtiaľ ľahko pomocou dĺžky $c=|AB|$ určíme, že

$$|AU|=\frac{kc}{k+1} \quad \text{a} \quad |AV|=\frac{kc}{k-1}.$$

Bod C na kružnici ω je bodom dotyku dotyčnice vedenej bodom A k tejto kružnici, práve keď platí (mocnosť bodu ku kružnici) rovnosť $|AC|^2=|AU|\cdot|AV|$, z ktorej po dosadení za $|AU|$ a $|AV|$ dostaneme

$$|AC|=\frac{kc}{\sqrt{k^2-1}}, \quad \text{takže} \quad |BC|=\frac{|AC|}{k}=\frac{c}{\sqrt{k^2-1}}.$$

Ľahko sa zistí, že trojuholník so stranami

$$\frac{c}{\sqrt{k^2-1}}, \quad \frac{kc}{\sqrt{k^2-1}}, \quad c$$

(ktorý je pravouhlý pre každé $k>1$) je rovnoramenný jedine pre $k=\sqrt{2}$.

Iné riešenie. Do kosínusovej vety $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ dosadíme $b=ka$ a vyjadríme z nej $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha=\frac{(k^2-1)a^2+c^2}{2kac}=\frac{(k^2-1)a}{2kc}+\frac{c}{2ka}.$$

Podľa nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom dvoch čísel platí

$$\frac{(k^2-1)a}{2kc}+\frac{c}{2ka}\geqq 2\sqrt{\frac{(k^2-1)a}{2kc}\cdot\frac{c}{2ka}}=\frac{\sqrt{k^2-1}}{k},$$

takže $\cos\alpha\geqq\cos\alpha_0$, alebo $\alpha\leqq\alpha_0$, kde α_0 je ostrý uhol určený rovnosťou

$$\cos\alpha_0=\frac{\sqrt{k^2-1}}{k}.$$

Maximálna hodnota $\alpha=\alpha_0$ sa dosiahne, keď sa obe priemerované čísla rovnajú, teda keď

$$\frac{(k^2-1)a}{2kc}=\frac{c}{2ka}, \quad \text{čiže} \quad c=a\sqrt{k^2-1}.$$

Pretože naviac $b = ka > a$, zisťujeme, že najväčší možný uhol α má rovnoramenný trojuholník jedine v prípade $c = a$; z rovnosti $a\sqrt{k^2-1} = a$ tak nachádzame (jedinú) hľadanú hodnotu $k = \sqrt{2}$.

A – S – 3

Činiteľ $4 - \dfrac{2}{k}$ môžeme pre ľubovoľné k, $1 \leqq k \leqq n$, upraviť na tvar

$$4 - \frac{2}{k} = \frac{2(2k-1)}{k} = \frac{2k(2k-1)}{k^2},$$

takže pre uvažovaný súčin platí

$$\prod_{k=1}^{n}\left(4 - \frac{2}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k(2k-1)}{k \cdot k} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} = \binom{2n}{n},$$

čo je celé číslo.

A – II – 1

Označme P skúmanú množinu prvočísel a ukážme najprv, že $2 \notin P$. Číslo 2 je jediné prvočíslo, ktoré nie je nepárne. Keby teda platilo $2 \in P$, bol by súčet *nepárneho* počtu prvočísel z P *párny*, a súčet *párneho* počtu naopak *nepárny*, takže uvažovaný aritmetický priemer by nemohol byť rovný nepárnemu číslu 27. Preto $2 \notin P$.

Pretože číslo 27 nie je prvočíslo, platí pre najväčší prvok p^* množiny P odhad $p^* > 27$. Teraz využijeme tento zrejmý poznatok: *Aritmetický priemer A skupiny reálnych čísel sa zmenší, kedykoľvek k tejto skupine pridáme číslo menšie ako A alebo z nej odstránime číslo väčšie ako A.* Doplňme preto do danej množiny P všetky chýbajúce prvočísla p, $2 < p < 27$, a odstráňme z nej všetky prvočísla p, $27 < p < p^*$. Dostaneme tak množinu deviatich prvočísel $\{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, p^*\}$, pre ktorých aritmetický priemer (ktorý už nemusí byť celým číslom!) platí odhad

$$\frac{3+5+7+11+13+17+19+23+p^*}{9} \leqq 27.$$

(Rovnosť nastane, pokiaľ sme ani žiadne prvočíslo nepridali, ani žiadne neodstránili.) Odtiaľ vychádza $p^* \leqq 145$. Najväčšie prvočíslo, ktoré spĺňa poslednú nerovnosť, je číslo 139.

Hodnota $p^* = 139$ je možná, ako ukazuje príklad

$$P = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 29, 139\},$$

ktorý objavíme, keď v súčte $3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23$ zameníme prvočíslo 23 prvočíslom o $145 - 139 = 6$ väčším. (Keby sme si vopred neuvedomili, že $2 \notin P$, dostali by sme z nerovnosti

$$\frac{2+3+5+7+11+13+17+19+23+p^*}{10} \leqq 27$$

slabší odhad $p^* \leqq 170$. Potom by bolo nutné postupne vylúčiť hodnoty $p^* = 167, 163, 157, 151, 149$. Pritom si asi uvedomíme, prečo $2 \notin P$.)

A – II – 2

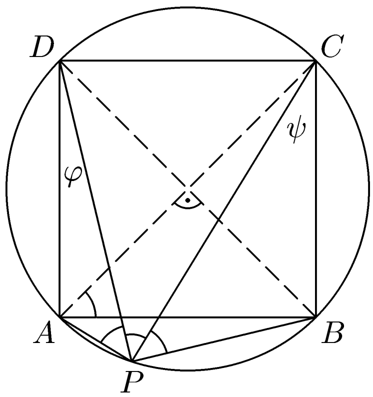
Pretože skúmaný podiel V nezávisí od veľkosti a strany daného štvorca (uvedený výraz je homogénny), budeme pre jednoduchosť predpokladať, že $a = 1$.

Pokiaľ $P = A$, je zrejme $V = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$. Pokiaľ platí tvrdenie úlohy, je $\sqrt{2}-1$ hľadaná hodnota skúmaného podielu.

Predpokladajme ďalej, že bod P je vnútorným bodom uvedeného oblúka. Podľa vety o obvodových uhloch je (obr. 24)

$$|\sphericalangle APD| = |\sphericalangle CPD| = |\sphericalangle CPB| = |\sphericalangle ACB| = \alpha,$$

kde α označuje veľkosť ostrého uhla príslušného tetive dĺžky $|AB|$ v kružnici opísanej danému štvorcu $ABCD$. Pretože uhol $\alpha = \frac{1}{3}|\sphericalangle APB|$ a uhol APB odpovedá stredovému uhlu $\frac{1}{2}\pi$, je $\alpha = \frac{1}{4}\pi$.



Obr. 24

Označme (obr. 24) $\varphi = |\sphericalangle ADP|$, $\psi = |\sphericalangle BCP|$, potom $\varphi + \psi = \alpha$, $|\sphericalangle PBC| = \pi - (\alpha + \psi)$, $|\sphericalangle PAD| = \pi - (\alpha + \varphi)$, takže podľa sínusovej vety

$$V = \frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\sin(\alpha+\varphi) + \sin(\alpha+\psi)} = \frac{2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}}{2\sin\frac{3(\varphi+\psi)}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}} = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{3}{2}\alpha} = \text{konšt.}$$

Tým je tvrdenie úlohy dokázané, a pretože $\alpha = \frac{1}{4}\pi$, dostaneme skutočne $V = \sqrt{2}-1$, ako sa ľahko presvedčíme napr. takto:

$$\sin\frac{3}{2}\alpha = \sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\left(1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) =$$
$$= \sin\frac{\alpha}{2}(3 - 4\sin^2\alpha) = \sin\frac{\alpha}{2}(1 + 2\cos\alpha),$$

lebo $2\sin^2\frac{1}{2}\alpha = 1 - \cos\alpha$.

Iné riešenie. Pokiaľ $P = A$, zistíme rovnako ako v prvom riešení, že hodnota skúmaného podielu je $\sqrt{2} - 1$. Ak je bod P vnútorným bodom uvedeného oblúka, sú obidva štvoruholníky $APBC$ i $APBD$ (obr. 24) tetivové, preto podľa Ptolemaiovej vety platí

$$|AP| \cdot |BC| + |BP| \cdot |AC| = |CP| \cdot |AB|,$$
$$|AP| \cdot |BD| + |BP| \cdot |AD| = |DP| \cdot |AB|.$$

Sčítaním oboch rovností a dosadením $|BC| = |AD| = |AB|$, $|BD| = |AC| = \sqrt{2}|AB|$ dostaneme

$$\big(|AP| + |BP|\big)\big(1 + \sqrt{2}\big) = |CP| + |DP|, \quad \text{alebo} \quad \frac{|AP| + |BP|}{|CP| + |DP|} = \sqrt{2} - 1.$$

Tým je tvrdenie úlohy dokázané. Výraz má pre každý bod P uvedeného oblúka hodnotu $\sqrt{2} - 1$.

A – II – 3

Pretože ťažisko T leží v opačnej polrovine s hraničnou priamkou MN ako vrchol C, ležia body C, M, N a T na jednej kružnici práve vtedy, keď pre uhly $\gamma = |\measuredangle MCN|$ a $\delta = |\measuredangle MTN|$ platí $\gamma + \delta = \pi$, alebo $\sin\gamma = \sin\delta$ (rovnosť $\gamma = \delta$ je a priori vylúčená: bod T leží vnútri trojuholníka ABC, takže $|\measuredangle ATB| > |\measuredangle ACB|$, alebo $\delta > \gamma$). Zapíšme teraz, že obsah trojuholníka ABT je rovný jednej tretine obsahu trojuholníka ABC:

$$\frac{1}{2} \cdot \Big(\frac{2}{3}|AM|\Big) \cdot \Big(\frac{2}{3}|BM|\Big) \cdot \sin\delta = \frac{1}{3} \cdot \Big(\frac{1}{2}|AC| \cdot |BC| \cdot \sin\gamma\Big).$$

Odtiaľ už okamžite vyplýva, že rovnosť $\sin\gamma = \sin\delta$ je ekvivalentná s rovnosťou zo zadania úlohy.

Iné riešenie. Využijeme vetu o mocnosti bodu ku kružnici. Označme T spomínané ťažisko, k kružnicu opísanú trojuholníku CMN a rozlíšme tri možné prípady ich vzájomnej polohy. (Zdôraznime, že vrcholy A a B vždy ležia vo vonkajšej oblasti kružnice k, lebo úsečky MC a NC sú jej tetivy.)

Ak je $T \in k$, potom $|AN| \cdot |AC| = |AT| \cdot |AM|$, teda

$$\frac{b}{2} \cdot b = \Big(\frac{2}{3}t_a\Big) \cdot t_a, \quad \text{alebo} \quad 4t_a^2 = 3b^2;$$

rovnako odvodíme aj rovnosť $4t_b^2 = 3a^2$. Vynásobením oboch rovností a následným odmocnením dostaneme $4t_at_b = 3ab$, čo je rovnosť zo zadania úlohy.

Ak bod T leží vo *vnútornej* oblasti kružnice k, potom platí nerovnosť $|AN| \cdot |AC| < |AT| \cdot |AM|$ (platí totiž rovnosť $|AN| \cdot |AC| = |AT'| \cdot |AM|$, kde T' je priesečník úsečky AT s kružnicou k, takže $|AT'| < |AT|$). Postupom z predchádzajúceho odstavca tentokrát vyjde nerovnosť $4t_at_b > 3ab$.

Ak bod T leží vo *vonkajšej* oblasti kružnice k, potom platí nerovnosť $|AN| \cdot |AC| > |AT| \cdot |AM|$ (platí totiž rovnosť $|AN| \cdot |AC| = |AT'| \cdot |AM|$, kde T' je druhý priesečník polpriamky TM s kružnicou k, takže $|AT'| > |AT|$). V tomto prípade vyjde nerovnosť $4t_a t_b < 3ab$.

Tým sa dôkaz blíži k záveru. Všimneme si jednu zaujímavosť, ktorá z neho vyplýva: rovnosť $4t_a t_b = 3ab$ v ľubovoľnom trojuholníku ABC platí, jedine keď zároveň $4t_a^2 = 3b^2$ a $4t_b^2 = 3a^2$.

A – II – 4

Danú nerovnicu ekvivalentne upravíme na

$$\frac{2x^3 + (a-2d)x^2 + (b-2a)x + c}{x^2 - dx - a} \geqq 0. \tag{1}$$

Nerovnicu tvaru $\dfrac{A(x)}{B(x)} \geqq 0$ vieme vyriešiť, ak poznáme reálne korene oboch mnohočlenov $A(x)$, $B(x)$. Odpovedajúce množiny ich reálnych koreňov označme A, B. Ak označíme R množinu riešení nerovnice $\dfrac{A(x)}{B(x)} > 0$, ktorá je zrejme ekvivalentná nerovnici $A(x)B(x) > 0$, bude množinou riešení pôvodnej nerovnice $\dfrac{A(x)}{B(x)} \geqq 0$ množina

$$(R \cup A) \setminus B\,.$$

Na riešenie nerovnice $A(x)B(x) > 0$ nemajú zrejme vplyv prípadné kvadratické trojčleny so záporným diskriminantom, ktoré nemajú reálne korene. A pretože nás zaujíma riešenie nerovnice $A(x)B(x) > 0$ najmä pre $x \notin A \cup B$, budeme miesto nej riešiť nerovnicu, ktorú dostaneme vydelením všetkými možnými párnymi mocninami koreňových činiteľov. Miesto nerovnice $A(x)B(x) > 0$ tak budeme riešiť nerovnicu

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_k) > 0,$$

kde $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k$ sú zvyšné (všetky jednoduché) reálne korene mnohočlena $A(x)B(x)$. Riešením poslednej nerovnice je pre $k = 1$ interval $(\alpha_1, +\infty)$, pre $k = 2$ zjednotenie $(-\infty, \alpha_1) \cup (\alpha_2, +\infty)$, pre $k \geqq 3$ nepárne zjednotenie $(\alpha_1, \alpha_2) \cup \dots \cup (\alpha_{k-2}, \alpha_{k-1}) \cup (\alpha_k, +\infty)$ a pre $k > 2$ párne zjednotenie $(-\infty, \alpha_1) \cup \dots \cup (\alpha_{k-2}, \alpha_{k-1}) \cup (\alpha_k, +\infty)$.

Vráťme sa teraz k nerovnici (1). Pretože $x = 0$ je jej riešením, musí byť nula koreňom čitateľa, nie však koreňom menovateľa, preto $c = 0$ a $a \neq 0$. Naviac z toho, že nula je „izolovaným“ bodom riešenia, vyplýva podľa našich predchádzajúcich úvah, že nula je koreňom párnej násobnosti, teda dvojnásobným. Preto je tiež $b - 2a = 0$.

Pretože naopak krajný bod druhého intervalu $x = 4$ do množiny riešení nepatrí, je koreňom menovateľa, takže $a + 4d = 16$. Po dosadení $a = 16 - 4d$ a rozklade menovateľa dostaneme ekvivalentnú nerovnicu

$$\frac{x^2(x + 8 - 3d)}{(x-4)(x-d+4)} \geqq 0.$$

Odtiaľ však vyplýva, že riešením nerovnice

$$(x-4)(x+8-3d)(x-d+4)>0$$

musí byť interval $(4,\infty)$, preto $3d-8=d-4$, alebo $d=2$, $a=8$, $b=16$, $c=0$. Pre tieto hodnoty tak dostávame nerovnicu

$$\frac{x^2(x+2)}{(x-4)(x+2)} \geqq 0,$$

ktorej množinou riešení je skutočne $\{0\} \cup (4,+\infty)$.

A – III – 1

a) Výsledný výraz možno vždy zapísať (bez krátenia) ako podiel $A:B$ dvoch súčinov A a B prirodzených čísel, pre ktoré platí

$$A \cdot B = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 29 = 29! = 2^{25} \cdot 3^{13} \cdot 5^6 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29.$$

(Exponenty prvočísel možno počítať bezprostredne po činiteľoch, alebo podľa známeho pravidla: prvočíslo p má v rozklade čísla $n!$ exponent rovný súčtu

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots, \tag{1}$$

kde $[x]$ označuje celú časť čísla x.) Tie prvočísla, ktoré majú v rozklade čísla 29! nepárny exponent, nemôžu z podielu $A:B$ „zmiznúť" ani po jeho krátení. Preto žiadna *celočíselná* hodnota výsledku nie je menšia ako číslo

$$H = 2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 = 1\,292\,646.$$

Na druhú stranu,

$$\begin{aligned}
&\frac{29:(28:27:26:25:24:23:22:21:20:19:18:17:16)}{15:(14:13:12:11:10:\ 9:\ 8:\ 7:\ 6:\ 5:\ 4:\ 3:\ 2)} = \\
&\quad = \frac{29 \cdot 14 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{15 \cdot 28 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \\
&\quad = \frac{29 \cdot 14^2}{28} \cdot \frac{27!}{(15!)^2} = 29 \cdot 7 \cdot \frac{2^{23} \cdot 3^{13} \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23}{\left(2^{11} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13\right)^2} = H.
\end{aligned}$$

(Opäť sa vyplatilo počítať exponenty podľa (1).) Číslo H je teda hľadaná najmenšia hodnota.

b) Pozrime sa teraz podrobnejšie na to, ako vyzerajú súčiny A a B z prvej vety riešenia, ak sú čitateľ a menovateľ zlomku uzátvorkované rovnakým spôsobom. Z každej zo štrnástich dvojíc pod sebou stojacich čísel

$$\{29,15\},\ \{28,14\},\ \{27,13\},\ \ldots,\ \{16,2\}$$

je jedno číslo činiteľom v súčine A, druhé číslo je činiteľom v súčine B (takže A, B majú po 14 činiteľoch). Výslednú hodnotu V potom môžeme zapísať tiež ako súčin

$$\left(\frac{29}{15}\right)^{\varepsilon_1}\left(\frac{28}{14}\right)^{\varepsilon_2}\left(\frac{27}{13}\right)^{\varepsilon_3}\left(\frac{26}{12}\right)^{\varepsilon_4}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{17}{3}\right)^{\varepsilon_{13}}\left(\frac{16}{2}\right)^{\varepsilon_{14}},$$

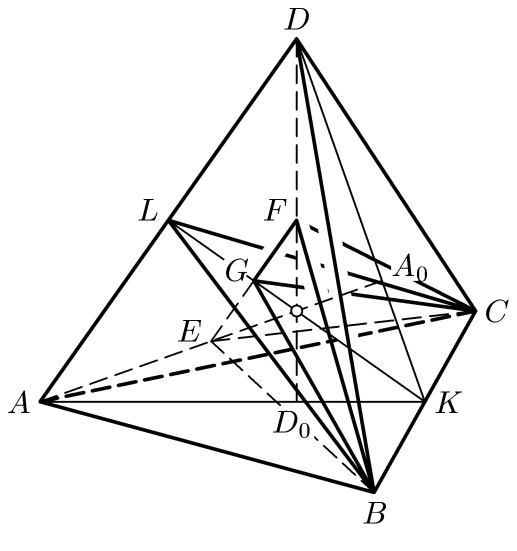
kde $\varepsilon_i = \pm 1$, pritom zrejme $\varepsilon_1 = 1$ a $\varepsilon_2 = -1$ bez ohľadu na uzátvorkovanie. Pretože zlomky $\frac{27}{13}$, $\frac{26}{12}$, $\frac{25}{11}, \ldots$, $\frac{16}{2}$ sú väčšie ako 1, výsledná hodnota V (či už je číslo celé, či nie) musí spĺňať odhad

$$V \leqq \frac{29}{15}\cdot\frac{14}{28}\cdot\frac{27}{13}\cdot\frac{26}{12}\cdot\ldots\cdot\frac{17}{3}\cdot\frac{16}{2} = H,$$

kde H je prirodzené číslo, určené v časti a) riešenia ako najmenšia možná celočíselná hodnota V. Odtiaľ vyplýva, že H je *jediná* možná celočíselná hodnota V. (Naviac sme ukázali, že pri rovnakom uzátvorkovaní čitateľa a menovateľa daného zlomku je *každá* hodnota výsledného výrazu menšia ako číslo H.)

A – III – 2

Označme K a L stredy hrán BC a AD a A_0, D_0 príslušné ťažiská stien oproti vrcholom A, D (obr. 25). Obe ťažnice AA_0, DD_0 ležia v rovine AKD, pričom ich priesečník T (ťažisko štvorstena) ich delí v pomere $3:1$ a zároveň je stredom spojnice KL (to je zrejmé z vlastností ťažiska: $T = \frac{1}{4}(A+B+C+D) = \frac{1}{2}\big(\frac{1}{2}(A+D)+\frac{1}{2}(B+C)\big) = \frac{1}{2}(K+ + L)$). Odtiaľ vyplýva, že je $|ET| : |AT| = |FT| : |DT| = 1:3$, takže $|EF| = \frac{1}{3}|AD|$.



Obr. 25

Rovina BCL rozpoľuje obidve úsečky AD aj EF, a preto tiež rozdeľuje obidva uvažované štvorsteny $ABCD$ aj $BCEF$ na časti rovnakého objemu. Označme G stred úsečky EF, pre príslušné objemy potom platí

$$\frac{V(BCEF)}{V(ABCD)} = \frac{V(BCGF)}{V(BCLD)} = \frac{|GF|}{|LD|} \cdot \frac{S(BCG)}{S(BCL)} = \\ = \frac{1}{3}\frac{|KG|}{|KL|} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

A – III – 3

Vieme, že

$$t_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2), \quad t_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2),$$

takže

$$t_a^2 - t_b^2 = \frac{3}{4}(b^2 - a^2).$$

Pretože podľa predpokladu úlohy $t_a - t_b = b - a \neq 0$, vychádza odtiaľ $t_a + t_b = \frac{3}{4}(b+a)$. Zo sústavy rovníc

$$t_a - t_b = b - a,$$
$$t_a + t_b = \frac{3}{4}(b + a)$$

určíme $t_a = \frac{1}{8}(7b - a)$, $t_b = \frac{1}{8}(7a - b)$, teda

$$a + t_a = b + t_b = \frac{7}{8}(a + b).$$

Preto je $k = \frac{7}{8}$.

Teraz zistíme, pre ktoré dĺžky $a \neq b$ existuje trojuholník ABC so stranami a, b a ťažnicami $t_a = \frac{1}{8}(7b - a)$, $t_b = \frac{1}{8}(7a - b)$. Predovšetkým musí byť $t_a > 0$, $t_b > 0$, čo je ekvivalentné nerovnosti $\frac{1}{7} < \frac{a}{b} < 7$. Poznáme všetky tri strany trojuholníka AB_1T:

$$|AB_1| = \frac{b}{2}, \quad |AT| = \frac{2}{3}t_a = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}(7b - a) = \frac{1}{12}(7b - a),$$
$$|B_1T| = \frac{1}{3}t_b = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}(7a - b) = \frac{1}{24}(7a - b).$$

Ak skúmame trojuholníkové nerovnosti pre tieto tri dĺžky, dostaneme podmienku

$$\frac{1}{3} < \frac{a}{b} < 3,$$

z ktorej je treba podľa predpokladu vylúčiť hodnotu $\dfrac{a}{b} = 1$. To je zároveň aj postačujúca podmienka: Zostrojený trojuholník AB_1T možno vždy doplniť na trojuholník ABC so stranou $b = |AC|$ a ťažnicami $t_a = |AA_1|$, $t_b = |BB_1|$. Konečne z rovnosti $t_a^2 - t_b^2 = \frac{3}{4}(b^2 - a^2)$ vidíme, že je i $a = |BC|$.

A – III – 4

Každej konečnej postupnosti písmen A, B hovorme reťazec. Všade ďalej $\cdots$ označuje vhodný (hoci aj prázdny) reťazec, zatiaľ čo $***$ použijeme na zápis reťazca z rovnakých písmen (napr. $\underbrace{B *** B}_{k}$ označuje reťazec k písmen B).

Dokážeme, že ľubovoľný reťazec je slovo (uvažovaného jazyka), práve keď spĺňa nasledujúcu podmienku:

P: *Reťazec končí písmenom B a buď začína písmenom A, alebo začína (či je dokonca celý tvorený) párnym počtom písmen B.*

Nutnosť podmienky P je zrejmá: spĺňajú ju obidve slová AB a BB dĺžky 2 a spĺňa ju aj každé nové slovo vzniknuté konštrukciou z bodu 2), pokiaľ podmienku P spĺňajú slová, ktorými pri konštrukcii nahrádzame jednotlivé písmená B.

Teraz indukciou vzhľadom na číslo n dokážeme, že každý reťazec dĺžky n spĺňajúci podmienku P je slovo. To zrejme platí pre $n = 1$ a $n = 2$; ak je $n > 2$, potom reťazec dĺžky n, ktorý spĺňa P, má jeden z tvarov

$$AA\cdots B,\ AB\cdots B,\ \underbrace{B *** B}_{2k}A\cdots B,\ \underbrace{B *** B}_{2k+2},$$

kde $2 \leqq 2k \leqq n - 2$. Našou úlohou je ukázať, že tieto štyri typy reťazcov vznikajú pomocou konštrukcie z bodu 2), pri ktorej písmená B nahrádzame reťazcami (dĺžky menšej ako n) spĺňajúcimi podmienku P (teda *slovami* podľa indukčného predpokladu).

Slovo $AA\cdots B$ vznikne ako $A(A\cdots B)$ zo slova AB. Slovo $AB\cdots B$ vznikne buď ako $A(B\cdots B)$ zo slova AB, alebo ako $(AB)(\cdots B)$ zo slova BB, podľa toho, či za jeho prvým písmenom A nasleduje párny resp. nepárny počet písmen B. Slovo $\underbrace{B *** B}_{2k}A\cdots B$ vznikne ako $(\underbrace{B *** B}_{2k})(A\cdots B)$ zo slova BB, slovo $\underbrace{B *** B}_{2k+2}$ ako $(\underbrace{B *** B}_{2k})(BB)$ zo slova BB. Tým je dôkaz indukciou hotový.

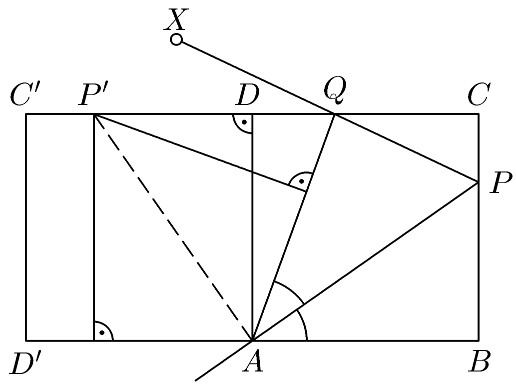
Teraz pomocou podmienky P už ľahko dokážeme, že pre počet p_n slov dĺžky n skutočne platí vzorec

$$p_n = \frac{2^n + 2 \cdot (-1)^n}{3},$$

ktorého platnosť je zrejmá pre $n = 1$ a $n = 2$, lebo $p_1 = 0$ a $p_2 = 2$. Preto vzorec bude dokázaný matematickou indukciou, ak ukážeme, že pre každé n platí rovnosť $p_{n+2} = 2^n + p_n$, ktorú čísla $\frac{1}{3}\left(2^n + 2 \cdot (-1)^n\right)$ zrejme spĺňajú. Rovnosť $p_{n+2} = 2^n + p_n$ však vyplýva okamžite z toho, že podľa vlastnosti P je každé slovo dĺžky $(n + 2)$ buď tvaru $A\cdots B$, kde $\cdots$ je ľubovoľný reťazec dĺžky n (tých je 2^n), alebo je tvaru $BB\cdots$, kde $\cdots$ je ľubovoľné z p_n slov dĺžky n.

A – III – 5

Uvažujme otočenie okolo stredu A o $90°$, ktoré zobrazí vrchol B hľadaného štvorca $ABCD$ na vrchol D, a označme P', C', D' obrazy bodov P, C, D v tomto otočení (obr. 26).



Obr. 26

Pretože $|\sphericalangle PAP'| = 90°$, vyplýva z vlastností osí susedných uhlov, že AP' je os uhla QAD'. Preto má bod P' rovnakú vzdialenosť od AD' aj od AQ (rovnú strane hľadaného štvorca). Tieto vzdialenosti sú výškami v trojuholníku AQP', ktorý potom musí byť rovnoramenný (so základňou AP'). Pretože bod P' môžeme zostrojiť, môžeme zostrojiť aj bod Q ako priesečník ramena PX s osou úsečky AP'. Zvyšok konštrukcie je už zrejmý.

A – III – 6

Ak má daná sústava riešenie (x, y) pre čísla $a = A$, $b = B$, má zrejme aj riešenie (kx, ky) pre ľubovoľné $k \neq 0$ a pre čísla $a = \dfrac{1}{k}A$, $b = kB$. Odtiaľ vidíme, že existencia riešenia danej sústavy závisí len od hodnoty súčinu ab.

Budeme teda najprv skúmať hodnoty výrazu

$$P(u, v) = \frac{(u+v)(u^3+v^3)}{(u^2+v^2)^2},$$

kde čísla u a v spĺňajú normalizačnú podmienku $u^2 + v^2 = 1$. Podľa nej platí

$$P(u, v) = (u+v)(u^3+v^3) = (u+v)^2(u^2 - uv + v^2) = \\ = (u^2 + 2uv + v^2)(1 - uv) = (1 + 2uv)(1 - uv).$$

Za podmienky $u^2 + v^2 = 1$ nadobúda súčin uv všetky hodnoty z intervalu $\langle -\frac12, \frac12 \rangle$ (ak je $u = \cos\alpha$ a $v = \sin\alpha$, je $uv = \frac12 \sin 2\alpha$). Preto stačí zistiť množinu hodnôt funkcie $f(t) = (1 + 2t)(1 - t)$ na intervale $t \in \langle -\frac12, \frac12 \rangle$. Z vyjadrenia

$$f(t) = -2t^2 + t + 1 = -2\Big(t - \frac{1}{4}\Big)^2 + \frac{9}{8}$$

vyplýva, že hľadanou množinou hodnôt je uzavretý interval s krajnými bodmi $f(-\frac{1}{2}) = 0$ a $f(\frac{1}{4}) = \frac{9}{8}$.

To teda znamená, že pokiaľ má daná sústava riešenie, musí pre jej parametre a a b platiť $0 \leqq ab \leqq \frac{9}{8}$, pritom rovnosť $ab = 0$ je možná, len keď $x + y = 0$, vtedy však $a = b = 0$.

Ak naopak niektoré čísla a a b spĺňajú nerovnosti $0 < ab \leqq \frac{9}{8}$, existujú podľa dokázaného čísla u a v také, že $u^2 + v^2 = 1$ a $(u + v)(u^3 + v^3) = ab$. Ak označíme $a' = u + v$ a $b' = u^3 + v^3$, potom z rovnosti $a'b' = ab \neq 0$ vyplýva, že obidva pomery $a : a'$ a $b' : b$ majú rovnakú hodnotu $k \neq 0$. Potom je ale dvojica $x = ku$ a $y = kv$ zrejme riešením sústavy rovníc zo zadania úlohy pre uvažované hodnoty a a b.

Prípravné sústredenia pred MMO

Pred medzinárodnou matematickou olympiádou (MMO) sa každoročne koná jedno výberové a jedno prípravné sústredenie pre najlepších riešiteľov tretieho kola kategórie A. Po prvom z nich SK MO vyberie 6 najlepších študentov do reprezentačného družstva Slovenska a určí dvoch náhradníkov. Druhé sústredenie je zamerané na prípravu šesťčlenného reprezentačného družstva.

Na výberovom sústredení pred MMO sa zúčastnilo 11 súťažiacich, najúspešnejších riešiteľov tretieho kola MO kategórie A. Sústredenie sa konalo v dňoch 26.4.–30.4.1999 v Bratislave. Každý deň študenti riešili sériu troch úloh pri rovnakých podmienkach ako na MMO. V poobedňajších hodinách sa konal spoločný rozbor úloh s lektorom. Na konci sústredenia sa získané body za jednotlivé dni sčítali a s prihliadnutím na výsledky tretieho kola MO a iné výsledky (predchádzajúca účasť na MMO, výsledky korešpondenčného seminára SK MO) bolo vybrané šesťčlenné družstvo, ktoré sa zúčastní MMO.

Výsledky sústredenia:

1.	*Balász Keszegh*	46,5	7.	*Martin Potočný*	28,5
2.	*Peter Novotný*	44,5	8.-9.	*Martin Hriňák*	28
3.-4.	*Miroslava Sotáková*	36,5	8.-9.	*Peter Huszár*	28
3.-4.	*Josef Šefčík*	36,5	10.	*Marián Ertl*	20
5.	*Michal Forišek*	33,5	11.	*Kristína Černeková*	8,5
6.	*Katarína Quittnerová*	30			

Úlohy zadávali lektori z Bratislavy:

Eugen Kováč a Ján Bábeľa, MFF UK, úlohy 1 – 6,
Eugen Kováč, Ján Bábeľa a Mgr. Ján Žabka, MFF UK, úlohy 7 – 9,
Mgr. Richard Kollár, MFF UK, úlohy 10 – 15,

Pre vybrané družstvo sa organizovalo ešte jedno prípravné sústredenie v dňoch 20.–25.6.1999 v zariadení IUVENTY na Zochovej chate. Napriek problémom so stravou a ubytovaním sa ho nakoniec podarilo uskutočniť. Toto sústredenie bolo zamerané viac na vedomostnú prípravu študentov a jeho obsahom boli prednášky na vybrané témy. Lektormi boli:

Mgr. Richard Kollár, MFF UK Bratislava (Invarianty),
RNDr. Jaroslav Guričan, CSc., MFF UK Bratislava (Teória čísel)
doc. RNDr. Ján Čižmár, CSc., MFF UK Bratislava (Geometria),
RNDr. Pavol Černek, CSc., MFF UK Bratislava (Diofantické rovnice)

Zadania súťažných úloh výberového sústredenia pred MMO

1. Dané je prvočíslo $p \geqq 3$. Na kružnici je daných p bodov $A_0, A_1, \dots, A_{p-1}$ (v tomto poradí). Priraďme bodu A_0 číslo 1, bodu A_1 číslo 2, bodu A_{1+2} číslo 3, bodu A_{1+2+3} číslo 4,..., bodu $A_{1+2+\dots+(k-1)}$ číslo k,..., bodu $A_{1+2+\dots+(p-1)}$ číslo p; pričom indexy berieme modulo p. Zistite, koľkým bodom je priradené aspoň jedno číslo.

2. Dve kružnice (rôznych polomerov) sa navzájom dotýkajú. Do väčšej z nich je vpísaný rovnostranný trojuholník, z vrcholov ktorého sú vedené dotyčnice k menšej kružnici. Dokážte, že dĺžka dotyčnice z niektorého vrcholu je súčtom dĺžok dotyčníc zo zvyšných dvoch vrcholov. (Dĺžkou dotyčnice sa myslí vzdialenosť od dotykového bodu).

3. Daný je n-boký ihlan $A_1A_2\dots A_nV$, pričom $n \geqq 4$. Rovina π pretína jeho bočné hrany VA_1, VA_2,..., VA_n postupne v bodoch $B_1, B_2, \dots, B_n$ tak, že mnohouholníky $A_1A_2\dots A_n$ a $B_1B_2\dots B_n$ sú navzájom podobné. Dokážte, že rovina π je rovnobežná s rovinou podstavy ihlana.

4. Nech $\tau(k)$ označuje počet kladných deliteľov prirodzeného čísla k. Nájdite všetky prirodzené čísla $n > 1$ také, že postupnosť $a_0, a_1, a_2, \dots$ určená vzťahmi $a_0 = n$, $a_k = \tau(a_{k-1})$ pre $k \in \mathbb{N}$, neobsahuje štvorec.

5. Na každé číslo 1,2,...,12 ručičkových hodín položíme mincu, ktorej jedna strana je biela a druhá je čierna. Ak tam máme aspoň jednu čiernu mincu (t.j. obrátenú čiernou hore), môžeme urobiť nasledujúci ťah: *Fixujeme jednu čiernu mincu a zmeníme farbu oboch jej susedov na opačnú.* Nájdite všetky začiatočné konfigurácie, z ktorých sa po nejakom konečnom počte ťahov môžeme dostať ku konfigurácii, v ktorej sú všetky mince, okrem tej na čísle 12, biele. Zistite aj počet všetkých takých počiatočných konfigurácii.

6. Dokážte, že spomedzi vrcholov ľubovoľného konvexného mnohouholníka možno vybrať tri po sebe idúce tak, že kružnica, ktorá nimi prechádza, pokrýva celý mnohouholník.

7. Daný je trojuholník ABC s obsahom S, a reálne číslo $t \in (0,1)$. Na jeho stranách BC, CA, AB sú postupne dané body P, Q, R, pričom platí

$$\frac{|BP|}{|CP|} = \frac{|CQ|}{|AQ|} = \frac{|AR|}{|BR|} = \frac{t}{1-t}\,.$$

a) Dokážte, že existuje trojuholník, ktorého strany majú rovnaké dĺžky ako úsečky AP, BQ, CR.
b) Označme S' obsah takého trojuholníka. Určte pomer $S'{:}S$ v závislosti od t.

8. Zistite, či existuje konvexná množina bodov v rovine $\mathcal{A}$, ktorá obsahuje nekonečne veľa mrežových bodov, a pritom na každej priamke leží len konečný počet mrežových bodov z $\mathcal{A}$.

9. Nech a, b sú prirodzené čísla také, že číslo

$$p = \frac{b}{4}\sqrt{\frac{2a-b}{2a+b}}$$

je prvočíslo. Určte všetky možné hodnoty p.

10. Dokážte, že obvod ľubovoľného rovinného rezu štvorstena je menší ako obvod jednej zo stien štvorstena.

11. Dané sú prirodzené čísla n a k a množina A taká, že

$$|A| \leqq \frac{n(n+1)}{k+1}.$$

Ďalej nech pre n-prvkové množiny A_i, $i = 1, 2, \ldots n+1$ platí

$$|A_i \cap A_j| \leqq k \qquad (i \neq j),$$

$$A = \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i.$$

Určte počet prvkov množiny A.

12. Nájdite takú polohu n priamok v rovine, aby súčet uhlov medzi všetkými dvojicami priamok bol maximálny.

13. Pre reálne číslo x označme $||x||$ vzdialenosť x od najbližšieho celého čísla. Nech $0 \leqq x_n < 1$, $n = 1, 2, \ldots$, a nech $\varepsilon > 0$. Dokážte, že existuje nekonečne veľa párov (m, n) indexov, pre ktoré platí

$$||x_n - x_m|| < \min\left(\varepsilon, \frac{1}{2|n-m|}\right).$$

14. Dané je nepárne prvočíslo p a prirodzené číslo c. Určte hodnotu zvyšku súčtu

$$\sum_{n=0}^{\frac{p-1}{2}} \binom{2n}{n} c^n$$

po delení p.

15. Daná je kružnica k so stredom O, priemerom AB a bodom M ležiacim na AB, pričom $|MB| < |MA|$. Bodom M je vedená tetiva kružnice, ktorá pretína k v bodoch C, D tak, že $|MD| > |MC|$. Označme P druhý priesečník (okrem O) kružníc opísaných trojuholníkom AOC a BOD. Dokážte, že $OP \perp PM$.

5. československé stretnutie

Bílovec, 8.– 11. júna 1999

V dňoch 8.–11.6.1999 sa v príjemnom prostredí Gymnázia v Bílovci uskutočnil už piaty ročník matematickej súťaže medzi olympionikmi Českej a Slovenskej republiky. Túto súťaž usporadúvajú striedavo obidve zúčastnené krajiny; prvý ročník sa konal v Jevíčku, druhý v Žiline, tretí v Bílovci a štvrtý na Zochovej chate. Vedúcimi tímov boli tento rok *doc. RNDr. Miroslav Šimša, CSc.* z Českej republiky a *Eugen Kováč* zo Slovenska, ktorí zároveň koordinovali opravovanie úloh.

Táto súťaž je spolu s výberovým a prípravným sústredením súčasťou dlhodobej prípravy na medzinárodnú matematickú olympiádu (MMO). Na rozdiel od spomínaných sústredení si tu môžu študenti precvičiť svoje schopnosti vo veľmi podobných podmienkach, ako ich čakajú na MMO. Na riešenie úloh majú štyri a pol hodiny, čo je o pol hodiny viac ako vo všetkých kolách našej MO. Aj tematické zameranie a náročnosť úloh je oveľa bližšia MMO ako napríklad celoštátnemu kolu. Okrem týchto dôležitých faktov, je toto stretnutie aj stretnutím v pravom slova zmysle. Súťažiaci z dvoch historicky spätých krajín sa majú možnosť spoznať a naviazať priateľstvá, ktoré výrazne pomáhajú aklimatizácii v cudzom a ďalekom prostredí MMO. Toto stretnutie zároveň prispieva k uchovávaniu tradície spoločnej československej olympiády a spolu so spoločnou tvorbou úloh je prejavom, ktorým najvyššie orgány MO v oboch republikách dávajú najavo svoj záujem o vzájomnú spoluprácu. Výsledky súťaže sú uvedené v tabuľke.

Por.	Meno	Ročník, Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	Súč.
1.	Peter Novotný	4 G V. Okružná, Žilina	7	7	7	7	7	0	35
2.	Martin Viščor	4 G tř. Kpt. Jaroše, Brno	7	7	2	7	2	0	25
3.	Miroslava Sotáková	3 G Poštová, Košice	7	6	5	2	1	1	22
4.–5.	Balász Keszegh	4 G Fazekas Budapest	7	4	1	2	7	0	21
4.–5.	Josef Ševčík	3 G Grösslingova, Bratislava	7	0	6	6	2	0	21
6.	Luboš Dostál	4 G a OA Stříbro	7	0	1	2	2	6	18
7.–8.	Katarína Quittnerová	1 G Bilíková, Bratislava	4	0	3	7	2	1	17
7.–8.	Lukáš Vokřínek	4 G tř. Kpt. Jaroše, Brno	3	0	5	7	2	0	17
9.	Zdeněk Dvořák	4 G Nové Město na Moravě	6	0	2	5	2	0	15
10.	Martin Hriňák	4 G Alejová, Košice	3	0	2	5	2	1	13
11.	Aleš Návrat	4 G tř. Kpt. Jaroše, Brno	7	4	0	0	0	0	11
12.	David Holec	4 G tř. Kpt. Jaroše, Brno	1	1	3	0	0	0	5

Tento ročník bol pre slovenské družstvo asi najúspešnejší, keď okrem výborného výsledku družstva potešil individuálne najmä *Peter Novotný*. Menej priaznivý výsledok však naše družstvo dosiahlo v už tradičnom volejbalovom stretnutí, kde sa traja členovia českého družstva ukázali ako vyspelí volejbalisti.

Zadania úloh 5. československého stretnutia

Úloha č.1

Pre ľubovoľné kladné čísla a, b, c dokážte nerovnosť

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\geqq 1.$$

(J. Bábeľa)

Úloha č.2

Daný je ostrouhlý trojuholník ABC s výškami AD, BE, CF. Predpokladajme, že priamky BC a EF majú spoločný bod P, a že rovnobežka s EF prechádzajúca bodom D pretne priamku AC v bode Q a priamku AB v bode R. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku PQR prechádza stredom strany BC.

(Jury MMO 1997)

Úloha č.3

Určte všetky prirodzené čísla k, pre ktoré existuje taká desaťprvková množina M kladných reálnych čísel, že práve k rôznych trojuholníkov má strany, ktorých dĺžky sú tri (nie nutne rôzne) prvky množiny M. (Za rôzne považujeme také trojuholníky, ktoré nie sú zhodné).

(J. Šimša)

Úloha č.4

Nájdite všetky prirodzené čísla k, pre ktoré platí: Ak je $F(x)$ ľubovoľný mnohočlen s celočíselnými koeficientami spĺňajúci nerovnosti $0 \leqq F(c) \leqq k$ pre každé $c \in$ $\in \{0, 1, \dots, k+1\}$, potom $F(0) = F(1) = \dots = F(k+1)$.

(R. Kučera, Jury MMO 1997)

Úloha č.5

Nájdite všetky funkcie $f : (1, \infty) \to (-\infty, \infty)$ spĺňajúce pre všetky čísla $x > 1$ a $y > 1$ rovnicu $f(x) - f(y) = (y - x) f(xy)$.

(P. Kaňovský)

Úloha č.6

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n \geqq 3$ je najmenší spoločný násobok čísel $1, 2, \dots, n$ väčší ako číslo 2^{n-1}.

(P. Kaňovský)

Riešenia úloh 5. československého stretnutia

Úloha 1.

Položme $x = b + 2c$, $y = c + 2a$, $z = a + 2b$. Potom $a = \frac{1}{9}(4y + z - 2x)$, $b = \frac{1}{9}(4z + x - 2y)$, $c = \frac{1}{9}(4x + y - 2z)$, takže dokazovaná nerovnosť získava tvar

$$\frac{4y + z - 2x}{9x} + \frac{4z + x - 2y}{9y} + \frac{4x + y - 2z}{9z} \geqq 1.$$

Ekvivalentnými úpravami dostaneme nerovnosť

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) + 3 \cdot \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y}\right) \geqq 15,$$

ktorá platí, lebo každý z výrazov v prvých troch zátvorkách je aspoň 2, zatiaľčo výraz vo štvrtej zátvorke je aspoň 3 (podľa nerovností medzi aritmetickým a geometrickým priemerom pre príslušné dvojice či trojice kladných čísel). Dodajme, že upravená nerovnosť rovnako vyplýva z jedinej AG-nerovnosti pre skupinu 15 čísel, ktorej výber je podľa tvaru ľavej strany zrejmý.

Iné riešenie. Z Cauchyho nerovnosti

$$(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 \leqq (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)$$

vyplýva odhad

$$(a + b + c)^2 \leqq \left(\frac{a}{b + 2c} + \frac{b}{c + 2a} + \frac{c}{a + 2b}\right)[a(b + 2c) + b(c + 2a) + c(a + 2b)]; \qquad (1)$$

z nerovnosti $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geqq 0$ zase vyplýva odhad

$$a(b + 2c) + b(c + 2a) + c(a + 2b) \leqq (a + b + c)^2.$$

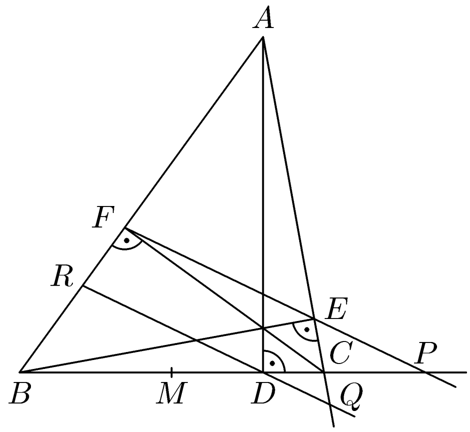
Dôsledkom oboch odhadov je nerovnosť

$$\begin{aligned} &a(b + 2c) + b(c + 2a) + c(a + 2b) \leqq \\ &\qquad \leqq \left(\frac{a}{b + 2c} + \frac{b}{c + 2a} + \frac{c}{a + 2b}\right)[a(b + 2c) + b(c + 2a) + c(a + 2b)], \end{aligned}$$

z ktorej po delení (kladným) výrazom $a(b+2c)+b(c+2a)+c(a+2b)$ vyjde dokazovaná nerovnosť.

Úloha 2.

Označme M stred úsečky BC (obr. 27). Z existencie bodu P vyplýva $|AB| \neq |AC|$, s ohľadom na symetriu môžeme predpokladať, že $|AB| > |AC|$. Potom B, M, D, C, P je poradie uvažovaných bodov na priamke BC. Z pravouhlých trojuholníkov ABE a ACF vyplýva $|AB| : |AC| = |AE| : |AF|$, takže trojuholníky ABC a AEF sú podobné, teda $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle AEF|$. Platí však tiež $|\sphericalangle AEF| = |\sphericalangle CQD|$ (lebo $DQ \parallel EF$) a $|\sphericalangle BDR| = |\sphericalangle QDC|$. Spolu vychádza, že trojuholník BDR je podobný trojuholníku QDC, čo vedie k rovnosti $|DB| \cdot |DC| = |DQ| \cdot |DR|$. Podľa nej a podľa rovnosti



Obr. 27

$$|DB| \cdot |DC| = |DP| \cdot |DM| \qquad (*)$$

(ktorú o chvíľu overíme) dostaneme $|DQ| \cdot |DR| = |DP| \cdot |DM|$, čo znamená, že body Q, R, M, P ležia na jednej kružnici.

Zostáva teda dokázať rovnosť $(*)$. Pretože body B, C, E, F ležia na kružnici, platí $|PB| \cdot |PC| = |PE| \cdot |PF|$. Kružnica opísaná trojuholníku DEF prechádza rovnako stredmi strán trojuholníka ABC (tzv. kružnica deviatich bodov), takže platí $|PE| \cdot |PF| = |PD| \cdot |PM|$. Porovnaním oboch rovností dostávame $|PB| \cdot |PC| = |PD| \cdot |PM|$. Ak položíme $|MB| = |MC| = u$, $|MD| = d$, $|MP| = p$, zapíše sa odvodená rovnosť ako $(p+u)(p-u) = (p-d)p$, alebo $u^2 = dp$. Dokazovaná rovnosť $(*)$ je ale tvaru $(u+d)(u-d) = (p-d)d$, čo je opäť ekvivalentné s $u^2 = dp$. Tým je celý dôkaz hotový.

Úloha 3.

Hľadané k sú čísla 55, 56, 57, …, 220, lebo $55 = \binom{11}{2}$ a $220 = \binom{12}{3}$ a pre ľubovoľnú n-prvkovú množinu M platí, ako dokážeme indukciou, toto tvrdenie:

$(*)$ *Označme $p(M)$ počet zmienených trojuholníkov. Množina všetkých hodnôt $p(M)$, kde M je n-prvková množina, tvorí interval celých čísel p určených nerovnosťami*

$$\binom{n+1}{2} \leqq p \leqq \binom{n+2}{3}. \qquad (1)$$

naviac $p(M) = \binom{n+2}{3}$ pre niektorú množinu M tvorenú číslami $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ takými, že $x_n < 2x_1$ a že medzi $\binom{n+1}{2}$ číslami

$$x_i + x_j \qquad (1 \leqq i \leqq j \leqq n) \qquad (2)$$

nie sú žiadne dve rovnaké.

Dôkaz $(*)$ začneme vysvetlením, prečo každá hodnota $p = p(M)$ spĺňa (1). Pravá nerovnosť platí preto, že $\binom{n+2}{3}$ je počet *všetkých* trojíc x, y, z $(x \leqq y \leqq z)$ vybratých z n čísel množiny M (niektoré také trojice však nemusia spĺňať trojuholníkové nerovnosti).

Ľavá nerovnosť v (1) vyplýva z toho, že ku každej z $\binom{n+1}{2}$ dvojíc x, y vybratých z M $(x \leqq y)$ možno priradiť trojuholník so stranami x, y, y.

Teraz dokážeme, že *každé* celé p spĺňajúce (1) je hodnotou $p(M)$ pre vhodnú n-prvkovú množinu M. Toto tvrdenie zrejme platí pre $n = 1$. Predpokladajme, že je to tak pre niektoré $n \geqq 1$, a zvoľme ľubovoľné celé p spĺňajúce nerovnosti

$$\binom{n+2}{2} \leqq p \leqq \binom{n+3}{3}. \tag{3}$$

Ukážeme, ako zostrojiť $(n+1)$-prvkové riešenie M rovnice $p(M) = p$. Začneme touto úvahou: Pokiaľ k ľubovoľnej n-prvkovej množine M' kladných čísel pridáme nový prvok x' taký, že $x' > 2 \cdot \max M'$, dostaneme $(n+1)$-prvkovú množinu M, pre ktorú $p(M) = p(M') + (n+1)$. Rozdiel $p(M) - p(M')$ je totiž rovný počtu trojuholníkov so stranami x', x', x, kde $x \in M$, teda číslu $n+1$. Preto zmienený spôsob rozšírenia M' na M môžeme použiť, pokiaľ dané číslo p z (3) spĺňa nerovnosti

$$\binom{n+1}{2} \leqq p - (n+1) \leqq \binom{n+2}{3},$$

čo je ekvivalentné s nerovnosťami

$$\binom{n+2}{2} \leqq p \leqq \binom{n+2}{3} + (n+1).$$

Porovnaním s (3) vidíme, že inú konštrukciu množiny M, ako je uvedené rozšírenie M', potrebujeme pre tie celé čísla p, pre ktoré platí

$$\binom{n+2}{3} + (n+1) < p \leqq \binom{n+3}{3},$$

čo sú zrejme čísla tvaru $p = \binom{n+2}{3} + (n+1) + q$, kde $q \in \left\{1, 2, \dots, \binom{n+1}{2}\right\}$. Podľa hodnoty q prevedieme takúto konštrukciu: Vezmime teraz za M' tú n-prvkovú množinu, o ktorej sa hovorí v závere tvrdenia $(*)$, a pridáme k nej taký prvok x_{n+1} väčší ako x_n, ktorý je zároveň menší ako práve q z čísel (2). To je možné, lebo podľa predpokladu je všetkých $\binom{n+1}{2}$ čísel (2) rôznych. Dostaneme tak množinu M s $n+1$ prvkami, pričom $p(M) - p(M') = (n+1) + q$, lebo okrem $n+1$ trojuholníkov so stranami x_{n+1}, x_{n+1}, x_i sa objaví q„nových“ trojuholníkov so stranami x_{n+1}, x_i, x_j $(i \neq n+1 \neq j)$ a žiadne iné. Pretože však $p(M') = \binom{n+2}{3}$, dostávame požadovanú rovnosť $p(M) = p$. Zostáva dodať, že v prípade $p = \binom{n+3}{3}$, keď $q = \binom{n+1}{2}$, takže pridávame ľubovoľné reálne číslo x_{n+1} z intervalu $(x_n, 2x_1)$, možno voliť číslo x_{n+1} tak, aby sa žiadne z čísel $x_i + x_{n+1}$ nerovnalo žiadnemu z čísel (2). Dôkaz celého tvrdenia $(*)$ je tak hotový.

Úloha 4.

Hľadané k sú práve tie, pre ktoré $k \geqq 4$. Toto tvrdenie vyplýva z protipríkladov $F(x) = x(2-x)$ pre $k = 1$, $F(x) = x(3-x)$ pre $k = 2$, $F(x) = x(4-x)(x-2)^2$ pre $k = 3$ a z nasledujúcej úvahy pre každé (pevné) $k \geqq 4$ a každý uvažovaný mnohočlen $F(x)$.

Najprv platí $F(k+1) - F(0) = 0$, pretože $F(k+1) - F(0)$ je násobok čísla $k+1$, ktorého absolútna hodnota neprevyšuje k. Preto $F(x) - F(0) = x(x-k-1)G(x)$, kde $G(x)$ je mnohočlen s celočíselnými koeficientami, a vyplývajú odtiaľ odhady

$$k \geqq |F(c) - F(0)| = c(k+1-c)|G(c)| \quad \text{pre každé } c \in \{1, 2, \dots, k\}. \tag{1}$$

Ak je $c \in \{2, 3, \dots, k-1\}$ (také c existuje, lebo $k \geqq 4$), potom

$$c(k+1-c) = 2(k-1) + (c-2)(k-1-c) \geqq 2(k-1) > k,$$

čo spolu s (1) znamená, že $|G(c)| < 1$, alebo $G(c) = 0$. Nájdené korene $2, 3, \dots, k-1$ mnohočlena $G(x)$ zaručujú rozklad

$$F(x) - F(0) = x(x-2)(x-3)\cdots(x-k+1)(x-k-1)H(x),$$

kde $H(x)$ je opäť mnohočlen s celočíselnými koeficientami. Zostáva vysvetliť, prečo $H(1) = H(k) = 0$. To je však ľahké, lebo pre obidve hodnoty $c = 1$ a $c = k$ platí $k \geqq |F(c) - F(0)| = (k-2)! \cdot k \cdot |H(c)|$, zároveň však $(k-2)! > 1$ (pripomeňme, že $k \geqq 4$), teda $|H(c)| < 1$.

Úloha 5.

Pre každé $t > 1$ dosadíme do danej rovnice za (x, y) postupne dvojice $(t, 2)$, $(t, 4)$ a $(2t, 2)$:

$$f(t) - f(2) = (2-t)f(2t), \;\; f(t) - f(4) = (4-t)f(4t), \;\; f(2t) - f(2) = (2-2t)f(4t).$$

Hodnotu $f(t)$ vylúčime, keď od prvej rovnosti odčítame druhú rovnosť; do výsledku potom za hodnotu $f(2t)$ dosadíme jej vyjadrenie z tretej rovnosti. Po úprave tak dostaneme rovnosť

$$f(4) + (t-3)f(2) = t(2t-5)f(4t) \quad \text{pre každé } t > 1.$$

Voľbou $t = \frac{5}{2}$ dostaneme $f(4) = \frac{1}{2}f(2)$, čo spätne dáva

$$\left(t - \frac{5}{2}\right)f(2) = t(2t-5)f(4t).$$

Odtiaľ vyplýva, že pre každé $t > 1$, $t \neq \frac{5}{2}$, platí

$$f(4t) = \frac{f(2)}{2t},$$

a tak podľa prostrednej z trojice rovností, ktorou sme riešenie začali, platí

$$f(t) = f(4) + (4-t)f(4t) = \frac{1}{2}f(2) + \frac{(4-t)f(2)}{2t} = \frac{2f(2)}{t}.$$

Nájdený vzorec pre hodnotu $f(t)$ platí však aj pre $t = \frac{5}{2}$, ako sa možno presvedčiť dosadením $x = \frac{5}{2}$ a $y = 2$ do pôvodnej rovnice. Ak položíme $c = 2f(2)$, ľahko sa rovnako presvedčíme, že funkcia

$$f(x) = \frac{c}{x} \quad (x > 1)$$

má požadované vlastnosti, nech je reálna konštanta c zvolená akokoľvek.

Úloha 6.

Pretože pre každé $n \geqq 3$ platí odhad

$$2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} < \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{[\frac{n-1}{2}]} = n \cdot \binom{n-1}{[\frac{n-1}{2}]},$$

stačí dokázať, že číslo $n \cdot \binom{n-1}{[\frac{n-1}{2}]}$ delí najmenší spoločný násobok čísel $1, 2, \ldots, n$.

Úvahou o prvočíselných rozkladoch dokážeme všeobecnejší poznatok, že pre každé $k < n$ je najmenší spoločný násobok čísel $n, n-1, \ldots, n-k$ násobkom čísla $n \cdot \binom{n-1}{k}$. Nech sú teda $k < n$ pevné prirodzené čísla, p ($\leqq n$) ľubovoľné prvočíslo a nech p^α je najvyššia mocnina p, ktorá delí najmenší spoločný násobok čísel $n, n-1, \ldots, n-k$, teda najvyššia mocnina p deliaca niektoré z týchto $k+1$ čísel, povedzme číslo $n - l$. Pre každé $i \leqq \alpha$ existuje medzi ostatnými k číslami $n - j$ ($0 \leqq j \leqq k$, $j \neq l$) práve $[\frac{l}{p^i}] + [\frac{k-l}{p^i}]$ násobkov čísla p^i, preto ich nie je viac ako $[\frac{k}{p^i}]$ (lebo $[x] + [y] \leqq [x+y]$), teda nie viac, ako je násobkov p^i medzi číslami $1, 2, \ldots, k$. Odtiaľ vyplýva, že prvočíslo p v rozklade čísla $n \cdot \binom{n-1}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{k!}$ vystupuje s exponentom neprevyšujúcim číslo α, exponent p v rozklade čísla $n - l$. Tak je dokázané, že číslo $n \cdot \binom{n-1}{k}$ skutočne delí najmenší spoločný násobok čísel $n, n-1, \ldots, n-k$.

40. Medzinárodná matematická olympiáda

40. jubilejný ročník medzinárodnej matematickej olympiády sa uskutočnil v dňoch 10. až 22. júla 1999 v Bukurešti v Rumunsku (ktoré organizovalo aj legendárny 1. ročník MMO).

Medzinárodná matematická olympiáda (MMO) je súťažou jednotlivcov. Každá zúčastnená krajina na ňu vysiela reprezentačné družstvo zložené najviac zo šiestich súťažiacich, sprevádzané dvoma vedúcimi. Slovenské družstvo tvorili *Peter Novotný* zo 4. ročníka Gymnázia Veľká Okružná v Žiline, *Michal Forišek* zo 4. ročníka Gymnázia na Popradskom nábreží v Poprade, *Katarína Quittnerová* z 1. ročníka Gymnázia Bilíkova v Bratislave, *Balász Keszegh* z 3. ročníka Maďarského gymnázia v Komárne, *Josef Ševčík* z 3. ročníka Gymnázia Grösslingová v Bratislave a *Miroslava Sotáková* z 3. ročníka Gymnázia Poštová v Košiciach. Vedúcim delegácie a odborným vedúcim bol *RNDr. Pavol Černek, CSc.* a pedagogickým vedúcim *doc. RNDr. Vladislav Rosa, CSc.*, obaja z MFF UK v Bratislave.

Pravidlá súťaže sú veľmi podobné pravidlám nášho celoštátneho kola. Súťaží sa dva dni, študenti dostanú každý deň 3 úlohy v ich rodnom jazyku, na ktorých vyriešenie majú 4,5 hodiny. Po skončení súťaže riešenia prezrú vedúci príslušnej krajiny a svoj návrh hodnotenia podľa vopred pripravených bodovacích schém obhajujú pred koordinátormi. Za správne vyriešenú úlohu môže súťažiaci získať maximálne 7 bodov. Výsledky slovenského družstva uvádza nasledujúca tabuľka:

Meno	1	2	3	4	5	6	súčet	cena
Michal Forišek	6	0	7	2	0	2	17	3.
Balász Keszegh	7	1	6	2	2	1	19	2.
Peter Novotný	7	1	0	2	1	1	12	3.
Katarína Quittnerová	7	0	0	2	2	1	12	3.
Miroslava Sotáková	5	1	0	0	2	1	9	–
Josef Ševčík	3	0	7	7	1	1	19	2.

Na 40. ročníku MMO sa zúčastnilo 81 štátov celého sveta. Aj keď je MMO oficiálne individuálnou súťažou najlepších matematických talentov z celého sveta, s obrovským záujmom sa sleduje aj umiestnenie jednotlivých krajín. Družstvo Slovenska skončilo v neoficiálnom poradí krajín tentokrát na veľmi čestnom 21. mieste. Slovenskému družstvu sa konečne podarilo prelomiť líniu neúspechov, ktoré prenasledovali Slovensko posledné dva roky. Opäť aj teraz sa piati zo súťažiacich vrátili z MMO s medailou, aj keď oproti minulému roku sa zvýšil počet strieborných medailí (o jednu).

Tím Českej republiky, ktorému sa darí zjavne práve opačne, ako tímu Slovenska (posledné dva roky skončili na 18. a 15. mieste), tentokrát skončil až za slovenským.

Najúspešnejšie krajiny boli opäť „tradičné“, poradie prvej desiatky je uvedené v tabuľke.

1.	Čína	6.	Bielorusko
	Rusko	7.	Južná Kórea
3.	Vietnam	8.	Irán
4.	Rumunsko	9.	Taiwan
5.	Bulharsko	10.	USA

Plný počet bodov (42) nezískal (na rozdiel od predchádzajúcich rokov) tento rok nikto. Na prvom mieste sa s 39 bodmi umiestnili traja súťažiaci (z Maďarska, Rumunska a Ukrajiny).

40. ročník MMO prebiehal v priestoroch Bukurešťskej univerzity Polytehnica. a tešil sa (ako sa pomaly stáva zvykom) veľkej pozornosti médií, vládnych i vedeckých kruhov.

Organizácia súťaže bola veľmi dobrá. Samotná súťaž prebehla presne podľa pripraveného scenára, nevyskytli sa žiadne komplikácie. Členovia medzinárodnej jury boli opäť ubytovaní v najluxusnejších prvotriednych hoteloch so všetkými potrebnými službami, najprv v Brašove, neskôr počas vyhodnocovania v Bukurešti.

Organizátori súťaže sa starali o svojich zverencov naozaj starostlivo a pozorne. Svedčí o tom už len výpočet podujatí v rámci spoločenského programu MMO, kde okrem „štandardných“ aktivít ako prehliadka Bukurešti, návšteva Etnografického múzea či Botanickej záhrady boli aj veľkolepý otvárací ceremoniál v Kráľovskom paláci, návšteva Umeleckého múzea s trezorom (zlatý poklad Rumunska), návšteva a prehliadka parlamentného paláca (jedna z piatich najmohutnejších stavieb na svete), „Barbecue party“ v areáli ubytovania, exkurzie na Sinaiu (bývale kráľovské sídlo) a do Transylvánskych Álp („Draculov zámok“). Záverečný ceremoniál s odovzdávaním medailí sa tiež uskutočnil v parlamentnom paláci za prítomnosti prezidenta, premiéra, ministrov, reprezentantov akadémie vied, univerzít aj verejného života. V rámci programu bola mimoriadne pôsobivá aj prezentácia miesta budúcej – 41. medzinárodnej matematickej olympiády – ktorá skončila výstižným heslom: „Do videnia na 41. ročníku MMO v roku 2000 v Južnej Kórei“.

Olympiáda bola aj tento rok veľmi úspešná, organizátori odviedli obrovský kus práce. Pred organizátorov nasledujúcich ročníkov postavili znova vysokú latku. Budúci 41. ročník MMO usporiada Južná Kórea, tie nasledujúce potom USA, Japonsko a Filipíny.

Zadania úloh MMO

V zátvorke za úlohou je uvedená krajina,
ktorá úlohu navrhla.

1. Určte všetky konečné množiny $\mathcal{S}$ aspoň troch bodov danej roviny, ktoré spĺňajú nasledujúcu podmienku: Pre každé dva rôzne body A a B z $\mathcal{S}$ je os úsečky AB osou súmernosti množiny $\mathcal{S}$.

(Estónsko)

2. Nech n je pevné celé číslo, pričom $n \geqq 2$.

(a) Určte takú najmenšiu konštantu C, že nerovnosť

$$\sum_{1 \leqq i < j \leqq n} x_i x_j \left(x_i^2 + x_j^2\right) \leqq C \biggl(\sum_{1 \leqq i \leqq n} x_i \biggr)^4$$

platí pre všetky reálne čísla $x_1, \ldots, x_n \geqq 0$.

(b) Pre túto konštantu C zistite, kedy nastane rovnosť.

(Poľsko)

3. Uvažujme štvorcovú dosku $n \times n$, kde n je pevné párne prirodzené číslo. Táto doska je rozdelená na n^2 jednotkových štvorcov. Povieme, že dva rôzne štvorce na doske sú *susedné,* ak majú spoločnú stranu.
N jednotkových štvorcov na doske je označených takým spôsobom, že každý štvorec (označený alebo neoznačený) je susedný s aspoň jedným označeným štvorcom.
Určte najmenšiu možnú hodnotu N.

(Bielorusko)

4. Určte všetky dvojice (n, p) takých prirodzených čísel, že

(i) p je prvočíslo,

(ii) $n \leqq 2p$,

(iii) číslo $(p-1)^n + 1$ je deliteľné číslom n^{p-1}.

(Taiwan)

5. Dve kružnice Γ_1 a Γ_2 ležia v kruhu ohraničenom kružnicou Γ a dotýkajú sa kružnice Γ po rade v rôznych bodoch M a N. Kružnica Γ_1 prechádza stredom kružnice Γ_2. Priamka prechádzajúca oboma priesečníkmi kružníc Γ_1 a Γ_2 pretína kružnicu Γ v bodoch A a B. Priamky MA a MB pretínajú kružnicu Γ_1 po rade v bodoch C a D.
Dokážte, že priamka CD sa dotýka kružnice Γ_2.

6. Určte všetky také funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, že rovnosť

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + x\,f(y) + f(x) - 1$$

platí pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$.

(Japonsko)

Riešenia úloh MMO

Úloha 1. Označme $\mathcal{O}_{PQ}$ osovú súmernosť podľa priamky, ktorá je osou úsečky PQ a nech T je ťažisko množiny $\mathcal{S}$. Potom pre všetky $A, B \in \mathcal{S}$ platí $\mathcal{O}_{AB}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$, a teda $\mathcal{O}_{AB}(T) = T$. To ale znamená, že T leží na osi úsečky AB, čiže $|AT| = |BT|$. To ale znamená, že pre každý bod X množiny $\mathcal{S}$ je vzdialenosť $|XT|$ konštantná, takže $\mathcal{S}$ je obsiahnutá v nejakej kružnici k so stredom T. Nech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sú všetky body množiny $\mathcal{S}$, pričom na kružnici k ležia v tomto poradí. Osová súmernosť $\mathcal{O}_{A_1A_3}$ zobrazí každú polrovinu s hraničnou priamkou A_1A_3 do seba, takže nutne $\mathcal{O}_{A_1A_3}(A_2) = A_2$, čiže $|A_1A_2| = |A_3A_2|$. Analogicky $|A_2A_3| = |A_3A_4| = \ldots = |A_nA_1|$. Pretože $\mathcal{S}$ je obsiahnutá v kružnici k, tak $A_1A_2 \ldots A_n$ je pravidelný n-uholník. Teda všetky množiny $\mathcal{S}$ spĺňajúce podmienky zadania sú množiny (všetkých) vrcholov pravidelných n-uholníkov.

Úloha 2. Dokazovaná nerovnosť je symetrická a homogénna, takže môžeme predpokladať, že $x_1 \geqq x_2 \geqq \ldots \geqq x_n \geqq 0$ a $\sum_i x_i = 1$. Potom nám stačí maximalizovať funkciu
$$F(x_1, \ldots, x) = \sum_{i<j} x_i x_j \big(x_i^2 + x_j^2\big)\,.$$

Pre $n \geqq 3$ sa pokúsime zväčšiť hodnotu funkcie F nahradením vektora $x = (x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, 0, \ldots, 0)$ vektorom $x' = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + x_{k+1}, 0, \ldots, 0)$ Potom

$$\begin{aligned}
F(x') - F(x) &= x_k x_{k+1} \left[3(x_k + x_{k+1}) \sum_{i=1}^{k-1} x_i - x_k^2 - x_{k+1}^2 \right] = \\
&= x_k x_{k+1} \big[3(x_k + x_{k+1})\,(1 - x_k - x_{k+1}) - x_k^2 - x_{k+1}^2 \big] = \\
&= x_k x_{k+1} \big[(x_k + x_{k+1})\,\big(3 - 4(x_k^2 + x_{k+1})\big) + 2x_k x_{k+1} \big]\,.
\end{aligned}$$

Ďalej z nerovnosti

$$1 \geqq x_1 + x_k + x_{k+1} \geqq \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1}) + x_k + x_{k+1}$$

dostávame $\frac{2}{3} \geqq x_k + x_{k+1}$, a teda

$$F(x') - F(x) > 0\,.$$

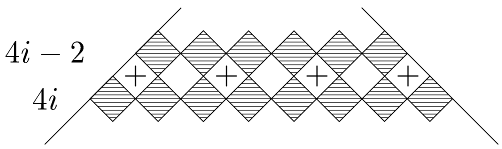
Ak toto nahradenie použijeme niekoľkokrát (pre $n = 2$ ho netreba použiť vôbec), dostávame

$$\begin{aligned}
F(x) \leqq F(a, b, 0, \ldots, 0) = ab(a^2 + b^2) = \frac{1}{2}(2ab)\,(1 - 2ab) \leqq \\
\leqq \frac{1}{8} = F\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0\Big)\,.
\end{aligned}$$

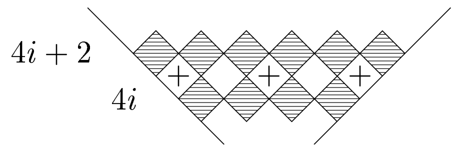
Takže hľadaná konštanta je $\frac{1}{8}$. Rovnosť sa pre ňu nadobúda vtedy a len vtedy, keď sú dve z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rovnaké (môžu byť aj nulové) a ostatné sú nuly.

Úloha 3. Ofarbime si šachovnicu bielou a čiernou farbou tradičným spôsobom. Označme $f(n)$ hľadanú hodnotu. Ďalej označme $b(n)$ minimálny počet bielych štvorcov, ktoré musia byť zafarbené, aby každý čierny štvorec mal medzi nimi suseda. Podobne definujme aj $c(n)$. Zrejme $f(n) = b(n) + c(n)$. Pretože $n = 2k$, kde $k \in \mathbb{N}$, tak zo symetrie vyplýva $b(n) = c(n)$.

Bude výhodnejšie, ak sa na šachovnicu pozrieme pozdĺž diagonál rovnobežných s najdlhšou čiernou uhlopriečkou (tú nazveme hlavnou diagonálou), ktorú uložíme vodorovne. Potom „dĺžky" čiernych diagonál budú $2, 4, \ldots, 2k, \ldots, 4, 2$. Označme si krížikom „nepárne" štvorce pod čiernymi diagonálami dĺžky $4i - 2$.



Obr. 28



Obr. 29

V prvom prípade (nad hlavnou diagonálou) sme označili $2i$ bielych štvorčekov a v druhom prípade (pod hlavnou diagonálou) $2i - 1$ bielych štvorčekov. Celkove sme teda označili $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + k = \frac{1}{2}k(k+1)$ bielych štvorčekov. Ľahko si možno všimnúť, že každý čierny štvorček má bieleho označného suseda. To znamená, že

$$b(n) \leqq \frac{k(k+1)}{2}. \tag{1}$$

Teraz uvažujme tých $\frac{1}{2}k(k+1)$ označených bielych štvorčekov — nemajú žiadneho spoločného čierneho suseda, takže potrebujeme označiť aspoň $\frac{1}{2}k(k+1)$ čiernych štvorcov na to, aby ich „pokryli". Takže

$$c(n) \geqq \frac{k(k+1)}{2}.$$

Odtiaľ už vyplýva

$$c(n) = b(n) = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Celkove teda máme $f(n) = k(k+1)$.

Poznámka. Podobne možo dokázať, že

$$f(n) = \begin{cases} 4k^2 - 1, & \text{ak } n = 4k - 1, \\ (2k+1)^2, & \text{ak } n = 4k + 1. \end{cases}$$

Úloha 4. Všimnime si, že $(1, p)$ a $(2, 2)$ spĺňajú všetky podmienky zadania. Ďalej predpokladajme, že $n \geqq 2$ a $p \geqq 3$. Ukážeme, že $n = p$. Pretože číslo $(p-1)^n + 1$ je nepárne, tak aj n musí byť nepárne (a tiež $n < 2p$). Označme q najmenšie prvočíslo, ktoré je deliteľom n. Potom $q \mid (p-1)^n+1$, a teda $(p-1)^2 \equiv -1 \pmod{q}$. To znamená, že $D(q, p-1) = 1$. Ale tiež $D(n, p-1) = 1$ (podľa výberu q). Z toho vyplýva existencia celých čísel u, v takých, že $un + v(q-1) = 1$. Potom z *malej Fermatovej vety* vyplýva

$$p-1 \equiv (p-1)^{un} \cdot (p-1)^{v(q-1)} \equiv (-1)^u \cdot 1^v \equiv -1 \pmod{q},$$

pretože u musí byť nepárne. To znamená, že $q \mid p$, a teda $p = q$. Odtiaľ dostávame, že $p \mid n$. Ale už vieme, že $n < 2p$. Takže nutne $n = p$.

Využitím práve dokázanej rovnosti $n = p$ dostávame

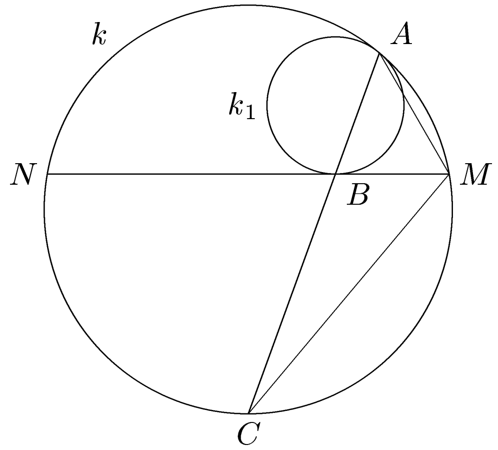
$$p^{p-1} \mid (p-1)^p + 1 = p^2 \left(p^{p-2} - \binom{p}{1} p^{p-3} + \ldots + \binom{p}{p-3} p + \binom{p}{p-2} + 1\right).$$

Pretože všetky členy v zátvorkách, okrem posledného, sú deliteľné číslom p, tak musí byť $p - 1 \leqq 2$, čiže $p \leqq 3$. Odtiaľ dostávame ďalšie riešenie $(3, 3)$.

Zhrnutím dostávame riešenia $(2, 2)$, $(3, 3)$ a $(1, p)$, kde p je ľubovoľné prvočíslo.

Úloha 5. *Lema. Nech MN je ľubovoľná tetiva kružnice k. Prepdokladajme, že sa kružnica k_1 dotýka úsečky MN v bode B, a že sa vnútorne dotýka kružnice k v bode A. Nech C je stred oblúka MN kružnice k, ktorý neobsahuje bod A. Potom body A, B, C ležia na priamke a platí $|CA| \cdot |CB| = |CM|^2$.*

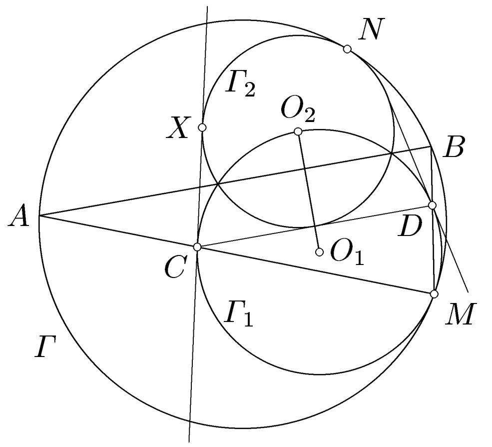
Dôkaz lemy. Rovnoľahlosť so stredom A, ktorá zobrazí kružnicu k_1 na kružnicu k, zobrazí MN na dotyčnicu kružnice k rovnobežnú s MN. Tá ale bude prechádzať bodom C (pozri obr. 30), takže sa v tejto rovnoľahlosti zobrazí bod B na bod C. To ale znamená, že body A, B, C ležia na jednej priamke.



Obr. 30

Ďalej si všimnime, že $|\sphericalangle NMC| = |\sphericalangle CAM|$, takže trojuholníky ACM a MCB sú podobné. Odtiaľ už priamo dostávame $|CA| \cdot |CB| = |CM|^2$.

Riešenie úlohy. Nech O_1 a O_2 sú postupne stredy kružníc Γ_1 a Γ_2 a t_1, t_2 sú ich spoločné dotyčnice. Nech α, β sú oblúky kružnice Γ, ktoré postupne „vyrezávajú“ priamky t_1, t_2, pričom tieto oblúky sú disjunktné. Podľa *lemy* má stred každého z nich rovnakú mocnosť ku kružniciam Γ_1 a Γ_2, takže ležia na ich chordále, ktorou je v tomto prípade ich spoločná tetiva. To znamená, že stredmi oblúkov α, β sú body A a B. Z *lemy* tiež dostávame, že priamky t_1 a t_2 sa dotýkajú Γ_1 v bodoch C a D. Potom v rovnoľahlosti so stredom M, ktorá zobrazí Γ_1 na Γ sa zobrazí aj CD na AB, takže $CD \parallel AB$. To ale znamená, že $CD \perp O_1O_2$ a O_2 je stred jedného z oblúkov CD na kružnici Γ_2.



Obr. 31

Označme X bod, v ktorom sa t_1 dotýka kružnice Γ_2. Potom z vlastností stredových, obvodových a úsekových uhlov dostávame $|\sphericalangle XCO_2| = \frac{1}{2}|\sphericalangle CO_1O_2| = |\sphericalangle DCO_2|$, takže O_2 leží na osi uhla XCD. Odtiaľ už vyplýva, že CD je dotyčnicou kružnice Γ_2.

Úloha 6. Označme $A = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ a $c = f(0)$. Dosadením $x = y = 0$ do rovnice zo zadania dostávame $f(-c) = f(c) + c - 1$, čo znamená, že $c \neq 0$. Ak položíme $x = f(y)$ dostávame, že pre každé $x \in A$ platí

$$f(x) = \frac{c+1}{2} - \frac{x^2}{2}\,. \tag{1}$$

Ukážeme, že $A - A = \mathbb{R}$ (kde $X - Y = \{x - y \mid x \in X,\ y \in Y\}$ znamená tzv. *algebraický rozdiel* množín X a Y). Dosadením $y = 0$ a využitím $c \neq 0$ dostávame

$$\{f(x-c) - f(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{cx + f(c) - 1 \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}\,.$$

Teraz už môžeme vypočítať hodnotu $f(x)$ pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}$. Ak zvolíme $y_1, y_2 \in A$ také, že $x = y_1 - y_2$, využitím (1) dostávame

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y_1 - y - 2) = f(y_2) + y_1y_2 + f(y_1) - 1 = \\ &= \frac{c+1}{2} - \frac{y_2^2}{2} + y_1y_2 + \frac{c+1}{2} - \frac{y_1^2}{2} - 1 = \\ &= c - \frac{(y_1 - y_2)^2}{2} = c - \frac{x^2}{2}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Porovnaním (1) a (2) tiež dostávame $c = 1$, takže

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}\,.$$

Ľahko sa overí, že táto funkcia je naozaj riešením úlohy.

Zadania súťažných úloh

Kategória P

Archív zadaní Matematickej olympiády, kategórie P sa nachádza na WWW stránke http://www.ksp.sk/mop.

P – I – 1

Jednou z metód šifrovania správ je použitie šifrovacej mriežky. Šifrovacia mriežka je štvorec rozdelený na $2N \times 2N$ štvorcových políčok, pričom dohodnutých N^2 políčok je vyrezaných. Mriežka sa položí na štvorcovú tabuľku rovnakých rozmerov ($2N \times 2N$ políčok) a do každého výrezu vpíšeme jeden znak správy, pričom postupujeme po riadkoch zhora nadol a v každom riadku zľava doprava. Tento postup ešte trikrát zopakujeme s mriežkou otočenou o 90°, 180° a 270° v smere hodinových ručičiek. Zašifrovaná správa sa získa prečítaním tabuľky po riadkoch. Aby sa daná mriežka dala použiť na šifrovanie, každá pozícia v tabuľke musí byť odkrytá popísaným spôsobom práve raz.

Napíšte program, ktorý čo najrýchlejšie zistí, či sa dá daná mriežka použiť ako šifrovacia mriežka. Vstupný súbor `MRIEZKA.IN` obsahuje $2N+1$ riadkov. Na prvom riadku je celé kladné číslo N, ($N \leq 100$). Každý z nasledujúcich $2N$ riadkov obsahuje presne $2N$ znakov `0` (nie je výrez) alebo `1` (je výrez) oddelených jednou medzerou. Výstupný súbor `MRIEZKA.OUT` bude obsahovať jediný riadok, na ktorom bude napísané `ANO`, ak predstavuje vstupný súbor šifrovaciu mriežku, v opačnom prípade na ňom bude napísané `NIE`.

Príklad

MRIEZKA.IN	MRIEZKA.OUT
2	ANO
0 0 1 0	
0 1 0 0	
0 0 0 0	
1 0 1 0	

P – I – 2

Popisovaný šifrovací systém vychádza z reálneho systému používaného počas 1. svetovej vojny. Po dobytí nepriateľského štábu v ňom bola nájdená tabuľka č. 1. Tabuľka obsahuje 6 riadkov po 6 stĺpcov vyplnených písmenami a číslicami. Jej riadky a stĺpce sú pomenované písmenami.

	A	**D**	**F**	**V**	**M**	**X**
A	Z	3	E	N	V	A
D	Y	C	X	J	P	Q
F	D	H	2	O	0	7
V	W	R	K	F	T	1
M	I	S	U	M	4	G
X	6	8	9	5	B	L

Tabuľka č. 1

Pri tabuľke bol nájdený prúžok papiera s nejakou zašifrovanou správou:

`DFAA VVVM AVXX DMDA VDMV FMXV`

Ďalej bola nájdená tabuľka č. 2, o ktorej vieme, že v jej záhlaví môžu byť jednotlivé stĺpce označené navzájom rôznymi písmenami abecedy. Spodná časť tabuľky však bola žiaľ rozmočená vodou a nečitateľná.

V	**Y**	**H**	**R**	**A**	**J**
V	F	V	D	D	A

Tabuľka č. 2

Súťažné úlohy

1. Zistite systém šifrovania a dešifrovania.
2. Uveďte dešifrovaný text nájdenej správy.
3. Spôsobuje zašifrovanie nárast dĺžky správy? Ak áno, aký je faktor nárastu?
4. Napíšte program, ktorý dokáže zašifrovať text, pričom použije tabuľku č. 1. Program načíta vstupný súbor `SIFRA.IN`, ktorý obsahuje

   - na prvom riadku otvorený (nezašifrovaný) pôvodný text ukončený znakom `#`,
   - na druhom riadku záhlavie tabuľky č. 2 ukončené taktiež znakom `#` (v našom prípade je to reťazec `VYHRAJ#`).

   Do výstupného súboru `SIFRA.OUT` program zapíše zašifrovanú správu (v našom prípade je to reťazec `DFAA VVVM AVXX DMDA VDMV FMXV`).

P – I – 3

Dvaja hráči hrajú nasledujúcu hru. Na začiatku hry sú dané tri kôpky zápaliek, pričom každá kôpka obsahuje vopred určený počet zápaliek (kôpka môže byť aj prázdna). Potom sa hráči striedajú vo svojich ťahoch, pričom začína prvý hráč. V jednom ťahu si hráč vyberie ľubovoľnú kôpku, na ktorej je aspoň jedna zápalka, a odoberie z nej nenulový počet zápaliek. Hra pokračuje tak dlho, kým je aspoň na jednej kôpke nenulový počet zápaliek. Hráč, ktorý nemá ťah, prehráva partiu.

Napíšte program, ktorý pre dané počty zápaliek zistí, či existuje víťazná stratégia pre prvého hráča a v prípade, že existuje, nájde pre prvého hráča jeho najlepší počiatočný ťah. Víťazná stratégia je postup, ktorý zabezpečuje hráčovi výhru bez ohľadu na to, ako hrá jeho súper.

Vstupom programu bude textový súbor `HRA.IN`. Tento súbor bude obsahovať N rôznych počiatočných pozícií ($1 \le N \le 20$). Číslo N bude uvedené v prvom riadku súboru. V ďalších N riadkoch bude uvedená vždy trojica čísel a, b, c, ktorá bude vždy označovať počty zápaliek na jednotlivých kôpkach. Môžete predpokladať, že čísla a, b, c budú celé a platí $0 \le a, b, c \le 255$. Výstupom programu bude textový súbor `HRA.OUT`, ktorý bude obsahovať N riadkov. Každý riadok bude zodpovedať príslušnej trojici čísel a, b, c uvedenej v súbore `HRA.IN`. Tento riadok bude obsahovať buď reťazec `NIE`, ak v danej pozícii neexistuje víťazná stratégia pre prvého hráča, alebo bude obsahovať trojicu čísel x, y, z, ktorá vznikne po prevedení najlepšieho počiatočného ťahu prvého hráča v prípade, že pre neho bude existovať víťazná stratégia.

Príklad

HRA.IN	HRA.OUT
2	1 0 1
1 6 1	NIE
1 1 0	

Poznámka: Existuje algoritmus, ktorý vyrieši úlohu v konštantnom čase.

P – 1 – 4

Normálne Markovove algoritmy

Konečnú množinu symbolov $T = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ nazveme **abecedou**. Prvky množiny T budeme nazývať **znaky** abecedy. Slovom P nad abecedou T nazveme každú konečnú postupnosť znakov abecedy T. **Prázdne slovo** budeme označovať symbolom Λ. Hovoríme, že **slovo** W **je podslovom slova** Q, ak existujú slová U, V (môžu byť aj prázdne), že $Q = UWV$.

Ak P a Q sú slová nad abecedou T, potom výrazy $P \to Q$ a $P \to \cdot Q$ nazývame **formulami substitúcie** v abecede T. Pritom predpokladáme, že šípka ($\to$) a bodka ($\cdot$) nie sú prvkami T. Niektoré zo slov P a Q môže byť aj prázdne. Formulu $P \to Q$ nazývame **obyčajnou** a formulu $P \to \cdot Q$ nazývame **koncovou**. Zápisom $P \to (\cdot)Q$ rozumieme buď formulu $P \to Q$ alebo $P \to \cdot Q$. **Schémou normálneho algoritmu** $\mathcal{A}$

v abecede T nazývame konečný zoznam formúl substitúcie v abecede T:

$$\begin{array}{l} P_1 \ \to (\cdot)Q_1 \\ P_2 \ \to (\cdot)Q_2 \\ \quad\vdots \\ P_r \ \to (\cdot)Q_r \end{array}$$

Algoritmus $\mathcal{A}$ pracuje v krokoch. V jednom kroku sa slovo P nad abecedou T nahradí slovom R (označujeme $\mathcal{A} : P \vdash R$) nasledujúcim spôsobom: v schéme algoritmu $\mathcal{A}$ nájdeme prvú formulu $P_m \to (\cdot)Q_m \quad (1 \leq m \leq r)$ takú, že P_m je podslovom P. R dostaneme z P substitúciou najľavejšieho výskytu slova P_m za Q_m.

Nech P je slovo nad abecedou T a nech R_1 je slovo, ktoré vzniklo po jednom kroku algoritmu t.j. $\mathcal{A} : P \vdash R_1$. Ak je $P_m \to \cdot Q_m$ koncová formula substitúcie, činnosť algoritmu $\mathcal{A}$ končí a jeho **hodnotou** je slovo R_1 a píšeme $\mathcal{A}(P) = R_1$. Ak je $P_m \to Q_m$ obyčajná formula substitúcie, aplikujeme na R_1 krok algoritmu a dostávame slovo R_2. Týmto spôsobom pokračujeme ďalej. Dostaneme postupnosť slov $P, R_1, \ldots, R_i \quad (i \geq 1)$, môžeme zapísať aj $\mathcal{A} : P \vdash R_1 \vdash R_2 \vdash \ldots \vdash R_i$ alebo tiež skrátene $\mathcal{A} : P \vdash {}^*R_i$.

Ak v určitom okamihu nastane situácia, že ani jedno zo slov $P_1, \ldots, P_r$ nie je podslovom R_i, potom činnosť algoritmu taktiež končí a R_i je hodnotou algoritmu $\mathcal{A}$. Môže sa ale stať, že popísaný postup nikdy nekončí. V takom prípade hovoríme, že algoritmus **nie je prípustný** pre slovo P.

Abecedu B nazveme **rozšírením** abecedy T, ak platí $T \subseteq B$. V mnohých prípadoch je nutné pri konštrukcii schémy algoritmu v abecede T použiť okrem znakov abecedy T aj ďalšie pomocné znaky. Potom hovoríme, že sme vytvorili schému algoritmu **nad abecedou** T (t.j. v nejakej abecede B, ktorá je rozšírením T).

Príklad

Nech $T = \{b, c\}$. Uvažujme schému normálneho algoritmu $\mathcal{A}$ v abecede T:

$$\begin{array}{lcl} b & \to & \cdot\Lambda \\ c & \to & c \end{array}$$

Ak slovo P obsahuje aspoň jeden znak b, výsledkom algoritmu $\mathcal{A}$ pre P je slovo, ktoré vznikne z P vynechaním prvého výskytu znaku b. Ďalej $\mathcal{A}(*) = *$. Pre neprázdne slová neobsahujúce znak b je algoritmus $\mathcal{A}$ neprípustný.

Príklad

Nech $T = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$. Uvažujme schému:

$$\begin{array}{lcl} a_0 & \to & \Lambda \\ a_1 & \to & \Lambda \\ & \vdots & \\ a_n & \to & \Lambda \end{array}$$

Algoritmus $\mathcal{A}$ prepisuje ľubovoľné slovo (nad abecedou T) na prázdne slovo. Takúto schému môžeme zapísať skrátene v tvare:

$$\xi \to \Lambda \quad (\xi \in T)$$

Takýto skrátený tvar schémy však môžeme použiť len vtedy, ak výsledok výpočtu nezávisí na poradí pravidiel v schéme.

Príklad

Nech $T = \{1\}$. Definujme induktívne $\overline{0} = 1$, a $\overline{n+1} = \overline{n}1$, t.j. $\overline{1} = 11$, $\overline{2} = 111$ atď. Slová $\overline{n}$ nazveme **čísla**.
Uvažujme schému

$$\Lambda \to \cdot 1$$

Pre ľubovoľné slovo P v T zrejme platí $\mathcal{A}(P) = 1P$, čo môžeme zapísať v tvare $\mathcal{A}(\overline{n}) = \overline{n+1}$ pre ľubovoľné prirodzené číslo n (uvedomte si, že každé slovo P začína prázdnym slovom Λ, t.j. $P = \Lambda P$).

Príklad

Nech T je abeceda. Pre slovo $P = a_1 a_2 \dots a_n$ nad T je slovo $\check{P} = a_n \dots a_1$ **zrkadlovým obrazom** slova P. Zostrojte normálny algoritmus $\mathcal{A}$, ktorý pre ľubovoľné slovo P vytvorí jeho zrkadlový obraz, t.j. $\mathcal{A}(P) = \check{P}$.

Uvažujme skrátenú schému algoritmu v abecede $B = T \cup \{\alpha, \beta\}$:

$$\begin{array}{rlcc}
\alpha\alpha & \to \beta & & (a)\\
\beta\xi & \to \xi\beta & (\xi \in T) & (b)\\
\beta\alpha & \to \beta & & (c)\\
\beta & \to \cdot\Lambda & & (d)\\
\alpha\nu\xi & \to \xi\alpha\nu & (\xi, \nu \in T) & (e)\\
\Lambda & \to \alpha & & (f)
\end{array}$$

Činnosť algoritmu pre slovo $P = a_1 a_2 \dots a_n$ môžeme popísať takto:

1. Najprv pomocou formuly (f) dostaneme zo slova P slovo αP.
2. Pomocou formuly (e) zo slova tvaru $U\alpha abV$ $(a, b \in T)$ dostaneme slovo $Ub\alpha aV$. Formula (e) sa teda aplikuje $(n-1)$-krát a zo slova $\alpha a_1 a_2 \dots a_n$ dostávame slovo $a_2 \dots a_n \alpha a_1$.
3. Kroky, analogické ku krokom 1 a 2, sa zopakujú $n+1$ krát, pričom v každom ďalšom behu sa formula (e) aplikuje o jeden krát menej. Postupne dostávame slová $a_2 \dots a_n \alpha a_1$, $a_3 \dots a_n \alpha a_2 \alpha a_1$, $\dots$, $\alpha a_n \dots \alpha a_2 \alpha a_1$, $\alpha\alpha a_n \dots \alpha a_2 \alpha a_1$.
4. Pomocou formuly (a) ďalej dostaneme slovo $\beta a_n \dots \alpha a_2 \alpha a_1$ a niekoľkonásobným použitím formúl (b), (c) a (d) nakoniec dostávame slovo $a_n a_{n-1} \dots a_1$, čo je $\check{P}$.

Zostrojili sme algoritmus $\mathcal{A}$ nad abecedou T a ukázali sme, že $\mathcal{A}(P) = \check{P}$.

Súťažné úlohy

1. Nech $H = \{1\}, M = \{1, *\}$. Každé prirodzené číslo n môže byť zapísané ako $\overline{n}$, čo je slovo nad abecedou H. Vektor $(n_1, \cdots, n_k), k \geq 1$, kde $n_1, \cdots, n_k$ sú prirodzené čísla, zapíšeme ako slovo $\overline{n_1} * \overline{n_2} * \cdots * \overline{n_k}$ nad abecedou M a označíme ho $(\overline{n_1, \cdots, n_k})$. Napríklad vektor $(\overline{3, 1, 2})$ označuje slovo $1111 * 11 * 111$. Napíšte

schému algoritmu $\mathcal{A}$ v M, ktorý je prípustný iba pre slová, ktoré sú číslami (t.j. $k = 1$) a pre ktorý platí $\mathcal{A}(\overline{n}) = \overline{0}$. Zdôvodnite jeho správnosť.

2. Je daná abeceda T, ktorá neobsahuje znaky α, β, γ a nech $B = T \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Zostrojte schému algoritmu $\mathcal{A}$ v abecede B, ktorý každé slovo nad abecedou T zdvojí (t.j. $\mathcal{A}(P) = PP$). Zdôvodnite jeho správnosť.

P – II – 1

Jednou z metód šifrovania správ je použitie šifrovacej mriežky. Šifrovacia mriežka je štvorec rozdelený na $2N \times 2N$ štvorcových políčok, pričom dohodnutých N^2 políčok je vyrezaných. Pri šifrovaní mriežku položíme na štvorcovú tabuľku rovnakých rozmerov ($2N \times 2N$ políčok) a do každého výrezu vpíšeme jeden znak správy, pričom postupujeme po riadkoch zhora nadol a v každom riadku zľava doprava. Tento postup ešte trikrát zopakujeme s mriežkou otočenou o $90°$, $180°$ a $270°$ v smere hodinových ručičiek. Zašifrovaná správa sa získa prečítaním tabuľky po riadkoch. Aby sa daná mriežka dala použiť na šifrovanie, každá pozícia v tabuľke musí byť odkrytá popísaným spôsobom práve raz.

Túto základnú metódu šifrovania môžeme použiť aj viacnásobne tak, že zašifrovaný text znova zašifrujeme tou istou mriežkou. V tomto prípade si teda používatelia šifry musia zvoliť nielen mriežku, ale aj číslo k, ktoré určuje počet opakovaní šifrovacieho procesu. Pre niektoré čísla k sa nám však môže stať, že ak zašifrujeme ľubovoľný text danou mriežkou k-krát, dostaneme vždy pôvodný text. Vašou úlohou je nájsť algoritmus, ktorý pre danú mriežku nájde najmenšie $k > 0$ s touto vlastnosťou.

Vstupom pre váš algoritmus je číslo N a matica $2N \times 2N$ obsahujúca nuly a jednotky, pričom jednotky označujú vyrezané štvorčeky a nuly nevyrezané. Môžete predpokladať, že mriežka na vstupe je správna (t.j. je možné použiť ju na šifrovanie). Pre túto mriežku má váš algoritmus nájsť najmenšie kladné číslo k také, že z každého textu po k-násobnom zašifrovaní dostaneme pôvodný text.

Príklad

Uvažujme napríklad mriežku:

0 1
0 0

Správna odpoveď je $k = 3$. Ak vezmeme napríklad reťazec `abcd`, tak po prvom zašifrovaní dostaneme `dacb`, po druhom `bdca` a po treťom zašifrovaní `abcd` (aby sme dokázali, že $k = 3$, bolo by treba ukázať, že pre každý reťazec po troch opakovaniach dostaneme pôvodný reťazec).

P – II – 2

Popisovaný šifrovací systém vychádza z reálneho systému používaného počas 1. svetovej vojny. Je daná tabuľka č. 1, ktorá obsahuje 6 riadkov po 6 stĺpcov vyplnených písmenami a číslicami.

	A	**D**	**F**	**V**	**M**	**X**
A	Z	3	E	N	V	A
D	Y	C	X	J	P	Q
F	D	H	2	O	0	7
V	W	R	K	F	T	1
M	I	S	U	M	4	G
X	6	8	9	5	B	L

Tabuľka č. 1

Zo šifrovaného textu najskôr vytvoríme "medzitext" tak, že každý znak vstupného reťazca nahradíme dvojicou označujúcou riadok a stĺpec, na ktorých sa znak v tabuľke nachádza (napríklad **B** nahradíme dvojicou **XM**). Medzitext potom zapíšeme po riadkoch do druhej (tzv. *permutačnej*) tabuľky. V záhlaví stĺpcov permutačnej tabuľky sa nachádzajú navzájom rôzne písmená. Abecedné poradie týchto písmen potom určuje poradie, v ktorom vypíšeme stĺpce tabuľky do zašifrovaného textu.

Ak napríklad v záhlaví permutačnej tabuľky máme postupne písmená `V`, `Y`, `H`, `R`, `A` a `J` a chceme zašifrovať text `KRYPTOGRAFIA`, dostaneme:

V	**Y**	**H**	**R**	**A**	**J**
V	F	V	D	D	A
D	M	V	M	F	V
M	X	V	D	A	X
V	V	M	A	A	X

Výsledný zašifrovaný text bude `DFAAVVVMAVXXDMDAVDMVFMXV`.

Bol nájdený dlhý zašifrovaný text, pričom nie je známe záhlavie permutačnej tabuľky a ďalej bol nájdený dlhý zoznam obvykle používaných záhlaví permutačnej tabuľky. Jednou z možností, ako zašifrovaný text odšifrovať, je vyskúšať obvykle používané záhlavia a zistiť, pri ktorých z nich sa dosiahne zmysluplný text. Problém však je v tom, že záhlaví je príliš veľa, a preto treba niektoré vylúčiť pomocou počítača.

Súťažná úloha

Napíšte algoritmus, ktorý dostane na vstupe zašifrovaný text dĺžky m a zoznam k používaných záhlaví (všetky záhlavia majú rovnakú dĺžku n, pričom m je násobkom n a $n \geq 4$) a pre každé záhlavie vypíše, či je *potenciálne zmysluplné* alebo nie.

Záhlavie je *potenciálne zmysluplné*, ak v texte, ktorý dostaneme rozšifrovaním pomocou tohoto záhlavia, *počet dvojíc po sebe nasledujúcich písmen typu spoluhláska–samohláska a samohláska–spoluhláska je aspoň trojnásobkom počtu dvojíc typu samohláska–samohláska alebo spoluhláska–spoluhláska.* Číslice sa nepovažujú za písmeno. Napríklad slovo `LEPIDLO5A` má 5 dvojíc písmen prvej skupiny a iba jednu dvojicu písmen druhej skupiny.

Pokúste sa, aby váš algoritmus fungoval čo najrýchlejšie za predpokladu, že počet záhlaví k je veľmi veľký (môže byť až 3 milióny) a dĺžka zašifrovaného textu m je veľká v porovnaní s dĺžkou jednotlivých záhlaví n (n je rádovo 10, m rádovo niekoľko tisíc). Urobte diskusiu zložitosti vzhľadom na parametre m, n, k.

P – II – 3

Dvaja hráči hrajú nasledujúcu hru. Na začiatku hry sú dané dve kôpky zápaliek. Na prvej kôpke je a zápaliek, na druhej kôpke b zápaliek ($a, b \geq 0$).

Potom sa hráči striedajú vo svojich ťahoch, pričom začína prvý hráč. V jednom ťahu si hráč vyberie ľubovoľnú kôpku, na ktorej je aspoň jedna zápalka a odoberie z nej 2^k alebo 3^k zápaliek, kde k je ľubovoľné nezáporné celé číslo (tak, aby na kôpke ostal nezáporný počet zápaliek). Hra pokračuje tak dlho, kým je aspoň na jednej kôpke nenulový počet zápaliek. Hráč, ktorý nemá ťah, prehráva partiu.

Navrhnite algoritmus, ktorý pre ľubovoľnú počiatočnú pozíciu a, b rozhodne, či pre ňu existuje víťazná stratégia pre prvého hráča. Víťazná stratégia je postup, ktorý zabezpečuje hráčovi výhru bez ohľadu na to, ako hrá jeho súper. Zdôvodnite správnosť navrhnutého algoritmu.

P – II – 4

Študijný text "Normálne Markovove algoritmy" k príkladu P-II-4 možno nájsť v zadaní príkladu P-I-4 na strane **90**.

Súťažná úloha

Každé prirodzené číslo n môže byť zapísané ako $\overline{n}$, pričom $\overline{0} = 1$, a $\overline{n+1} = \overline{n}1$, t.j. napríklad $\overline{1} = 11$, $\overline{2} = 111$ atď. Napíšte schému algoritmu $\mathcal{A}$ nad abecedou $H = \{1, :\}$, ktorý pre dve prirodzené čísla a, b určí hodnotu celočíselného podielu a div b.

Nech $b > 0$, $a \geq 0$. Pre vstup tvaru $\overline{a} : \overline{b}$ má byť výsledkom algoritmu slovo $(\overline{a \text{ div } b})$ a pre vstup $\overline{a} : \overline{0}$ má byť algoritmus neprípustný. Ak je vstupom iné slovo nad abecedou H, na správaní vášho algoritmu nezáleží. Zdôvodnite správnosť navrhnutého algoritmu.

Príklad

$\mathcal{A}(11111 : 111) = 111$
$\mathcal{A}(1111 : 11) = 1111$
$\mathcal{A}(11111 : 1111) = 11$
Algoritmus nie je prípustný napríklad pre slovo 1111 : 1.

P – III – 1

Jednou z metód šifrovania správ je použitie šifrovacej mriežky. Šifrovacia mriežka je štvorec rozdelený na $2N \times 2N$ štvorcových políčok, pričom dohodnutých N^2 políčok je vyrezaných. Pri šifrovaní sa mriežka položí na štvorcovú tabuľku rovnakých rozmerov ($2N \times 2N$ políčok) a do každého výrezu vpíšeme jeden znak správy, pričom postupujeme po riadkoch zhora nadol a v každom riadku zľava doprava. Tento postup ešte trikrát zopakujeme s mriežkou otočenou o $90°$, $180°$ a $270°$ v smere hodinových ručičiek. Zašifrovaná správa sa získa prečítaním tabuľky po riadkoch. Aby sa daná mriežka dala použiť na šifrovanie, každá pozícia v tabuľke musí byť odkrytá popísaným spôsobom práve raz.

Máme dané dve šifrovacie mriežky rovnakých rozmerov $2N \times 2N$. Tieto tabuľky sa používajú na šifrovanie reťazcov dĺžky $4N^2$, pričom jednotlivé znaky reťazcov sú zo špeciálnej abecedy obsahujúcej K znakov. Niekedy sa stane, že po zašifrovaní reťazca jednou z mriežok dostaneme ten istý reťazec. Vtedy sa na šifrovanie použije druhá z mriežok. Otázkou ostáva, koľko je takých reťazcov, ktoré nie je možné zmeniť zašifrovaním pomocou ani jednej z daných mriežok.

Navrhnite algoritmus, ktorý dostane ako vstup čísla N, K a dve šifrovacie mriežky rozmerov $2N \times 2N$. Pre tento vstup určí počet reťazcov dĺžky $4N^2$ obsahujúcich iba znaky z K-prvkovej abecedy, ktoré po zašifrovaní prvou mriežkou, aj po zašifrovaní druhou mriežkou zostanú nezmenené.

Príklad

Vstup:

$N = 2$, $K = 2$

Mriežky:

```
1 1 0 0    1 1 0 0
1 1 0 0    1 0 1 0
0 0 0 0    0 0 0 0
0 0 0 0    0 0 0 0
```

Výstup:

16

(Pre abecedu obsahujúcu písmená `a` a `b` je príkladom takého reťazca `abababbbbbbbbbbb`.)

P – III – 2

Dvaja hráči hrajú nasledujúcu hru. Na začiatku hry sú dané dve kôpky zápaliek. Na prvej kôpke je a a na druhej b zápaliek ($a, b > 0$). Ďalej sú dané dve celé kladné čísla p, q ($p < q$). V jednom ťahu musí hráč odobrať z jednej z týchto kôpok buď p alebo q zápaliek (tak, aby na kôpke ostal nezáporný počet zápaliek). Hráči sa vo svojich ťahoch postupne striedajú. Prehráva hráč, ktorý je na ťahu, ale žiadny ťah urobiť nemôže (tzn. keď je na každej kôpke menej ako p zápaliek).

Napíšte program, ktorý zo vstupu načíta štvoricu hodnôt a, b, p, q a zistí, či pre túto štvoricu existuje vyhrávajúca stratégia pre hráča, ktorý ťahá ako prvý. Dokážte, že váš program pracuje správne.

P – III – 3

Študijný text "Normálne Markovove algoritmy" k príkladu P-III-3 možno nájsť v zadaní príkladu P-I-4 na strane **90**.

Súťažné úlohy

a) Každé prirodzené číslo n môže byť zapísané ako $\overline{n}$, pričom $\overline{0} = 1$, a $\overline{n+1} = \overline{n}1$, t.j. napríklad $\overline{1} = 11$, $\overline{2} = 111$ atď. Zostrojte schému Markovovho algoritmu nad abecedou $T = \{1\}$, ktorá pre takto zapísané kladné celé číslo vypočíta dolnú celú časť jeho dvojkového logaritmu. Výsledok bude zapísaný tiež v rovnakom tvare. Vstupná hodnota nula nie je prípustná.

Poznámka: Dvojkový logaritmus kladného čísla X (zapisujeme $log_2 X$) je rovný takému číslu Y, pre ktoré platí $2^Y = X$. Dolná celá časť dvojkového logaritmu kladného celého čísla X (zapisujeme $\lfloor log_2 X \rfloor$) je rovná najväčšiemu celému číslu Y takému, že $2^Y \leq X$. Teda platí $\lfloor log_2 1 \rfloor = 0$, $\lfloor log_2 2 \rfloor = 1$, $\lfloor log_2 3 \rfloor = 1$, $\lfloor log_2 4 \rfloor = 2$, $\lfloor log_2 5 \rfloor = 2$, atď.

Príklad

vstup	výsledok
1	algoritmus nie je prípustný
11	1
111	11
1111	11
11111	111
111111	111

b) Zostrojte schému Markovovho algoritmu nad abecedou $T = \{0, 1\}$, ktorý je prípustný práve vtedy, keď je na vstupe binárny zápis nezáporného celého čísla deliteľného tromi.

Poznámka: Binárnym zápisom celého čísla rozumieme zápis tohto čísla v dvojkovej sústave, tzn. pomocou cifier 0 a 1. Binárny zápis kladného celého čísla začína vždy cifrou 1, vedúce nuly sa nepripúšťajú. Binárny zápis nuly tvorí jediný symbol 0.

Príklad

vstup	výsledok	zdôvodnenie
0	algoritmus je prípustný	číslo 0 je deliteľné 3
1	algoritmus nie je prípustný	číslo 1 nie je deliteľné 3
10	algoritmus nie je prípustný	číslo 2 nie je deliteľné 3
11	algoritmus je prípustný	číslo 3 je deliteľné 3
1100	algoritmus je prípustný	číslo 12 je deliteľné 3
1101	algoritmus nie je prípustný	číslo 13 nie je deliteľné 3
01100	algoritmus nie je prípustný	vedúca nula nie je v zápise čísla povolená

P – III – 4

Program: `sifra.pas/sifra.cpp`
Slovník: `slovnik.txt`
Pomocné súbory: `*.pom`
Vstup: `sifra.in`
Výstup: `sifra.out`

Uvažujme nasledujúci spôsob šifrovania, nazývaný Vigenèrova šifra. Kvôli jednoduchosti budeme šifrovať iba texty obsahujúce len malé písmená anglickej abecedy a medzery. Pri šifrovaní sa používa tajný kľúč, pozostávajúci iba z malých písmen anglickej abecedy. Písmená kľúča sa podpíšu pod jednotlivé písmená šifrovaného textu, ak je kľúč príliš krátky, použije sa viackrát. Každé písmeno potom zašifrujeme tak, že k nemu pripočítame pod ním podpísané písmeno kľúča. Toto sčítavanie sa robí tak, že obe písmená si nahradíme číslami od 0 do 25 predstavujúcimi ich polohu v abecede a tieto dve čísla sčítame. Ak je výsledok sčítania väčší ako 25, odčítame 26 a nakoniec nahradíme výsledné číslo opäť písmenom, ktoré je v abecede na zodpovedajúcom mieste. Medzery sa opisujú z pôvodného textu do šifrovaného textu bez zmeny.

Zašifrujme napríklad text `quicksort is an algorithm for sorting` pomocou kľúča `programming`. V tabuľke je v prvom riadku pôvodný text, v druhom riadku kľúč a v treťom výsledný text.

```
quicksort is an algorithm for sorting
programmi ng pr ogramming pro grammin
flwibsadb vy pe orxodubus uff yfrfuvt
```

Pri dešifrovaní sa postupuje podobne, namiesto pričítavania sa však kľúč odčítava. Ak šifrovanú správu odchytí osoba, ktorá nepozná kľúč, môže sa pokúsiť správu dešifrovať tak, že predpokladá, že správa bola písaná v niektorom prirodzenom jazyku a hľadá taký kľúč, aby dostala správu v tomto jazyku. Vašou úlohou bude teraz napísať program, ktorý pre daný zašifrovaný text hľadá nejaký "zmysluplný" kľúč.

Zašifrovaný text je umiestnený vo vstupnom súbore `sifra.in`. Je to postupnosť slov pozostávajúcich z malých písmen, pričom jednotlivé slová sú oddelené medzerou alebo koncom riadku (koniec riadku sa pri šifrovaní a dešifrovaní správa rovnako ako medzera). Súbor neobsahuje viac ako 10 000 znakov.

Vašou úlohou je napísať program, ktorý nájde pre zašifrovaný text v súbore `sifra.in` kľúč Vigenèrovej šifry a vypíše ho do súboru `sifra.out`. Prípustný je pritom iba taký kľúč, ktorého použitím na dešifrovanie súboru `sifra.in` dostaneme text, ktorý obsahuje iba povolené slová prirodzeného jazyka. Zoznam všetkých povolených slov prirodzeného jazyka sa nachádza v súbore `slovnik.txt`. Váš kľúč nesmie byť dlhší ako 50 znakov. Môžete predpokladať, že taký kľúč existuje, a že dĺžka textu je veľká v porovnaní s dĺžkou kľúča.

Poznámka: Na vašom počítači sa v pracovnom adresári nachádza súbor `slovnik.txt`, ktorý obsahuje zoznam všetkých povolených slov prirodzeného jazyka. Okrem samotného zdrojového súboru môžete vytvoriť a s riešením odovzdať niekoľko pomocných súborov s príponou `.pom`, ktoré pri testovaní umiestnime do aktuálneho adresára. V aktuálnom adresári sa bude nachádzať aj súbor `slovnik.txt`, ktorý bude totožný so súborom vo vašom pracovnom adresári (sada povolených slov bude teda pri testovaní rovnaká, ako v pôvodnom súbore `slovnik.txt`).

P – III – 5

Program: `nakup.pas/nakup.cpp`
Vstup: `nakup.in`
Výstup: `nakup.out`

V obchodnom dome predávajú n druhov tovarov v cenách $c_1, \ldots, c_n$. Aby obchodníci prilákali zákazníkov, ponúkajú ešte špeciálne zľavy typu "ak si kúpite tri balenia laku na vlasy a dve balenia odstraňovača starých náterov, bude to spolu 300". Každú zľavnenú ponuku možno charakterizovať počtami jednotlivých ponúkaných druhov tovarov p_{ij} (t.j. koľko si musíte kúpiť predmetov druhu j, aby bolo možné uplatniť i-tu zľavu) a cenou i-tej zľavnenej ponuky w_i (všetky ponuky sú výhodné, t.j. $w_i < \sum_j p_{ij} c_j$).

Z ponuky obchodného domu ste si vybrali nanajvýš 5 druhov predmetov a z každého druhu nanajvýš 6 kusov a chcete tento tovar nakúpiť čo najlacnejšie. Nie ste proti tomu, ak si z obchodného domu odnesiete aj čosi navyše, pokiaľ tým ušetríte.

Napíšte program, ktorý na vstupe dostane ceny tovarov, informácie o zľavnených ponukách a zoznam toho, čo má byť nakúpené a nájde optimálne využitie ponúk (t.j. koľkokrát má byť ktorá ponuka využitá, aby ste dosiahli najnižšiu možnú celkovú cenu danú súčtom cien ponúk a cien jednotlivých výrobkov, ktoré je nutné k ponukám doplniť, aby ste nakúpili všetko, čo potrebujete).

Vstupný súbor

Vstupný súbor `nakup.in` obsahuje postupne tieto údaje (oddelené medzerami alebo koncami riadkov):

- počet druhov tovarov n $(1 \le n \le 100)$,
- ceny jednotlivých tovarov $c_1, \dots, c_n$ $(1 \le c_i \le 100)$,
- počet vybraných druhov tovarov k $(1 \le k \le 5)$
- čísla vybraných druhov s_i spolu s počtami kusov m_i v tvare:

$$s_1\ m_1\ s_2\ m_2\ \dots\ s_k\ m_k,$$

  $(1 \le s_i \le n$, $1 \le m_i \le 6$, každý druh sa v zozname vyskytuje nanajvýš raz),
- počet zľavnených ponúk m $(1 \le m \le 100)$,
- pre i-tu ponuku zoznam výrobkov q_{ij}, z ktorých pozostáva, spolu s ich počtami r_{ij} a celkovou cenou ponuky w_i v tvare:

$$q_{i1}\ r_{i1}\ q_{i2}\ r_{i2}\ q_{i3}\ r_{i3} \dots\ 0\ w_i$$

  $(1 \le q_{ij} \le n$, $1 \le r_{ij} \le 100$, $1 \le w_i \le 100)$.

Výstupný súbor

Výstupom programu bude minimálna dosiahnutá cena $w_{\min}$ spolu so zoznamom využitých ponúk v tvare $d_1\ e_1\ d_2\ e_2\ \dots\ d_q\ e_q$, kde d_i sú čísla využitých ponúk a e_i čísla udávajúce, koľkokrát bola ktorá ponuka využitá. Vypisujte iba tie ponuky, kde e_i je nenulové. Výstupy programu zapíšte do výstupného textového súboru `nakup.out`. Jednotlivé čísla budú oddelené medzerami alebo koncami riadkov.

Príklad

`nakup.in`

```
10
10 11 12 13 14
15 16 17 18 19
5
1 3 2 5 4 2
8 2 9 1
3
1 1 2 2 4 1 0 20
1 1 2 1 3 1 0 10
5 3 6 3 0 30
```

`nakup.out`

```
102
1 2
2 1
```

Poznámka: Uvedený výstupný súbor je jedným z možných správnych výstupných súborov.

Riešenia súťažných úloh

Kategória P

P – I – 1

Mriežku budeme nazývať *korektnou*, keď pomocou nej do toho istého políčka pod mriežkou môžeme zapísať viac krát iba keď je mriežka rovnako otočená. Mriežka budeme nazývať *úplnou*, keď vieme zapísať do každého políčka pod ňou. Mriežka je použiteľná na šifrovanie práve vtedy, keď je korektná a súčasne úplná.

Na políčko papiera so súradnicami $[x, y]$ sa pri rôznom natočení mriežky môžu dostať políčka mriežky so súradnicami $[x, y], [2N - y + 1, x], [2N - x + 1, 2N - y + 1], [y, 2N - - x + 1]$. Ak je mriežka nekorektná, musia existovať súradnice $[x, y]$ také, že viac ako jedno z týchto štyroch políčok mriežky bude vystrihnuté. Ak je neúplná, musia existovať súradnice $[x, y]$ také, že žiadne z týchto štyroch políčok mriežky nie je vystrihnuté. Aby bola mriežka korektná a úplná, musí pre všetky súradnice $[x, y]$ platiť, že práve jedno z políčok $[x, y], [2N - y + 1, x], [2N - x + 1, 2N - y + 1], [y, 2N - x + 1]$ je vystrihnuté.

Nad políčko papiera so súradnicami $[x, y]$ sa však môžu dostať tie isté políčka mriežky ako nad políčka so súradnicami $[2N-y+1, x], [2N-x+1, 2N-y+1], [y, 2N-x+1]$. Preto, ak sa nad ľubovoľné z týchto štyroch políčok papiera môže dostať práve jeden vystrihnutý štvorček mriežky, aj pre ostatné tri to platí (a nemusíme to teda už kontrolovať). Keď si rozdelíme papier na štyri štvorce rozmerov $N \times N$, každé z týchto štyroch políčok bude v inom štvorci. Teda nám stačí skontrolovať iba jeden takýto štvorec (napr. ľavý horný).

V programe je štvrtina papiera reprezentovaná maticou `a`. Pred načítaním údajov sa celá vymaže (nastaví na `false`). Pri načítaní každej diery sa zistí, aká bude jej poloha, keď sa mriežka natočí tak, aby táto diera bola v ľavom hornom štvorci. Na tieto súradnice sa do poľa a zapíše `true`. Ak tam už predtým bolo `true`, mriežka je nekorektná, lebo sa dá dvakrát zapisovať na to isté miesto. Nakoniec treba ešte skontrolovať, či sa dalo písať na každé miesto. To sa v programe realizuje počítadlom dier, ktoré sa zvýši s každou dierou. Ak je mriežka korektná a dier je N^2, je aj úplná. Tento algoritmus má tú výhodu, že netreba ukladať do pamäti celú mriežku, ale iba jej štvrtinu.

P – I – 2

Ide o obmenu skutočne používaného šifrovacieho systému, ktorý je kombináciou substitučnej a transpozičnej šifry - tzv. kombinovaná šifra.

1. Pri šifrovaní otvoreného (nezašifrovaného) textu sa najprv vykoná substitúcia podľa tabuľky č.1, čím dostaneme medzišifru. Na túto medzišifru potom uplatníme transpozíciu podľa tabuľky č.2. Medzery a iné znaky, ktoré nie sú v tabuľke č.1, sa vynechajú.

- Každý znak otvoreného textu nájdeme v tabuľke č. 1 a do medzišifry zapíšeme záhlavie riadku a stĺpca, v ktorých sa nachádza. Napríklad Q sa prepíše na DX, 5 na XV, I na MA.
- Medzišifru postupne zapisujeme do riadkov tabuľky č.2, ktorej záhlavie tvorí kľúč transpozičnej šifry. Po zaplnení prvého riadku pokračujeme na druhom riadku a takto postupujeme tak dlho, kým nezapíšeme celú medzišifru. Ak celý posledný riadok nevyplníme, necháme na zvyšných miestach medzery. V tejto časti úlohy je dôležité si všimnúť, že záhlavie tabuľky podľa zadania obsahuje rôzne písmená abecedy. Abecedné poradie týchto písmen totiž určuje kľúč pre transpozičnú šifru. Výsledný zašifrovaný text získame tak, že vypíšeme jednotlivé stĺpce tabuľky v poradí podľa abecedného poradia písmen v záhlaví. Napríklad pre tabuľku uvedenú v zadaní sa najprv vypíše stĺpec označený A, potom stĺpec označený H atď., až ako posledný sa vypíše stĺpec označený Y.

Postup pri dešifrovaní je zrejmý z popisu šifrovania.

2. Text pôvodnej správy zo zadania je teda "KRYPTOGRAFIA".
3. Šifrovanie spôsobuje nárast správy v prvej časti (substitúcia) - faktor nárastu je 2. Prípadne je možné započítať aj medzery oddeľujúce jednotlivé stĺpce vo výslednom zašifrovanom texte. Tento nárast bude o P znakov, kde P stĺpcov tabuľky.
4. Program pre šifrovanie textu v Pascale nájdete nižšie.

P – I – 3

Zadefinujme najprv pojmy *vyhrávajúca* a *prehrávajúca* pozícia (vzhľadom k hráčovi, ktorý je práve na ťahu) takto:

1. Pozícia $(0, 0, 0)$ je pre hráča na ťahu prehrávajúca.
2. Pozícia (a, b, c), kde $a + b + c > 0$, je pre hráča na ťahu prehrávajúca, ak pre ľubovoľný ťah je pozícia, do ktorej sa dostaneme, pre druhého hráča vyhrávajúca.
3. Pozícia (a, b, c), kde $a + b + c > 0$, je pre hráča na ťahu vyhrávajúca, ak existuje ťah, pre ktorý pozícia, do ktorej sa dostaneme, je pre druhého hráča prehrávajúca.

Keďže počet zápaliek vo všetkých troch kopách je konečný a v každom ťahu je odobratá aspoň jedna zápalka, hra musí skončiť a jeden z hráčov vyhrať. Preto každá pozícia v našej hre je vyhrávajúca alebo prehrávajúca. V ďalšom texte nech $\oplus$ označuje operáciu xor.

Tvrdenie 1. Majme pozíciu (a, b, c), pričom $a \oplus b \oplus c \neq 0$. Potom existuje ťah taký, že po jeho uskutočnení sa dostaneme do pozície $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ takej, že $\bar{a} \oplus \bar{b} \oplus \bar{c} = 0$.

Dôkaz. Zapíšme čísla a, b, c v dvojkovej sústave:

$$a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i 2^i, \quad b = \sum_{i=0}^{\infty} b_i 2^i, \quad c = \sum_{i=0}^{\infty} c_i 2^i, \quad (a_i, b_i, c_i \in \{0, 1\}).$$

Keďže čísla a, b, c sú konečné, existuje číslo m také, že pre ľubovoľné $i > m$ je $a_i = b_i = c_i = 0$.

Pretože ale $a \oplus b \oplus c \neq 0$, musí existovať index i taký, že číslo $a_i + b_i + c_i$ je nepárne. Nech k je najväčší taký index. Potom číslo $a_k + b_k + c_k$ je nepárne, a teda aspoň jedno z čísel a_k, b_k, c_k je 1. Bez ujmy na všeobecnosti, nech je to číslo a_k. Pre ľubovoľné $i \in N_0$ označme $\bar{a}_i = (b_i + c_i) \bmod 2$. Ďalej položme

$$\bar{a} = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{a}_i 2^i.$$

Zrejme je $\bar{a} = b \oplus c$, teda $\bar{a} \oplus b \oplus c = 0$. Pretože pre $i > k$ je zrejme $\bar{a}_i = a_i$ a ďalej je $a_k = 1 > 0 = \bar{a}_k$, je zrejme $\bar{a} < a$.

Ťahom $a - \bar{a}$ z kopy a teda dostaneme pozíciu $(\bar{a}, b, c)$, pričom $\bar{a} \oplus b \oplus c = 0$, čo bolo treba dokázať. □

Tvrdenie 2. Nech množina M je definovaná nasledujúcim predpisom:

$$M = \{(a, b, c) | a \oplus b \oplus c = 0\}.$$

Potom množina M je množina práve všetkých prehrávajúcich pozícií.

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou vzhľadom na $a + b + c$. Pozícia $(0, 0, 0)$ je z definície prehrávajúca. Nech teraz pre všetky pozície (a, b, c), kde $a+b+c \leq k$ platí, že $(a, b, c) \in M$ práve vtedy, keď (a, b, c) je prehrávajúca pozícia. Ukážeme, že toto tvrdenie potom platí aj pre $k + 1$.

Nech teda $a + b + c = k + 1$ a nech $a \oplus b \oplus c = 0$. Chceme ukázať, že táto pozícia je prehrávajúca. Nech hráč potiahne do pozície $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$. Zrejme $\bar{a} \oplus \bar{b} \oplus \bar{c} \neq 0$ (hráč totiž zmenil binárny zápis jediného čísla z čísel a, b, c a teda na miestach, kde sa tento zápis zmenil sa zmení aj xor súčet). Podľa indukčného predpokladu je teda $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ vyhrávajúca a teda (a, b, c) je prehrávajúca.

Nech naopak $a \oplus b \oplus c \neq 0$. Potom podľa tvrdenia 1 existuje ťah do prehrávajúcej pozície a preto je táto pozícia vyhrávajúca. □

Teraz už ľahko zostrojíme algoritmus s konštantnou časovou a pamäťovou zložitosťou. Označme $x = b \oplus c$, $y = a \oplus c$, $z = a \oplus b$. Zrejme je $x \oplus b \oplus c = a \oplus y \oplus c = a \oplus b \oplus z = 0$, teda $(x, b, c), (a, y, c), (a, b, z) \in M$.

Ak $x < a$, potom možno ťahať do pozície (x, b, c) a teda tento ťah možno použiť ako vyhrávajúci pre prvého hráča. Podobne ak $x \geq a$ a $y < b$ možno potiahnuť do (pre druhého hráča) prehrávajúcej pozície (a, y, c) a ak $x \geq a$, $y \geq b$ a $z < c$, možno potiahnuť do (pre druhého hráča) prehrávajúcej pozície (a, b, z).

Ak $x \geq a$, $y \geq b$ a $z \geq c$, potom z dôkazu tvrdenia 1 ľahko vidíme, že $a \oplus b \oplus c = 0$ a teda sme v prehrávajúcej pozícii.

Poznámka. Z definície vyhrávajúcej a prehrávajúcej pozície bolo priamo možné odvodiť exponenciálny (v prípade použitia rekurzie) alebo dokonca aj polynomiálny (použitím dynamického programovania) algoritmus pre riešenie úlohy. V skutočnosti bolo možné takýto algoritmus pre malé čísla použiť na objavenie faktu, že prehrávajúce pozície sú tie, pre ktoré $a \oplus b \oplus c = 0$.

P – I – 4

Normálne Markovove algoritmy

Úloha 1.

Aby bol algoritmus neprípustný pre slovo P, stačí, aby sa aplikovalo pravidlo, ktoré ponechá slovo v pôvodnom stave. Ak sa v slove nachádza znak $*$, potom je týmto slovom reprezentovaný vektor a nie číslo. V tomto prípade má byť algoritmus neprípustný, preto stačí zistený znak $*$ ponechať bez zmeny. Ak sa v slove nachádzajú dva znaky 1 za sebou, prepíšeme ich na jeden znak 1.

$$\begin{array}{rcl} * & \to & * \\ 11 & \to & 1 \end{array}$$

Ak bolo teda slovom reprezentované číslo, prepíše sa zodpovedajúca postupnosť znakov 1 na jediný znak 1 pomocou druhého pravidla. Potom už nemožno aplikovať žiadne pravidlo, a preto algoritmus skončí s hodnotou $\overline{0}$. Ak bol slovom reprezentovaný vektor, použije sa prvé pravidlo, ktoré zanechá slovo v pôvodnom stave, pre takéto slová je teda algoritmus neprípustný.

Úloha 2.

Algoritmus najprv na začiatok slova zapíše symbol α (pravidlo 7). Potom postupne presúva tento symbol na koniec slova, pričom všetky znaky z abecedy T zdvojí a za každú dvojicu pridá znak β (pravidlo 4). Potom sa postupne druhé znaky z takýchto dvojíc presúvajú na koniec slova. Postupuje sa takto: prvý symbol β v slove sa nahradí symbolom γ (pravidlo 5) a táto γ sa spolu so symbolom, ktorý je tesne pred ňou presúva až na koniec slova – tesne pred symbol α (pravidlá 1 a 2). Tam symbol γ zanikne (pravidlo 3). Takto sa postupne presunie na koniec posledný znak z prvej dvojice, druhej dvojice, …, až z poslednej dvojice, takže nakoniec sú všetky v správnom poradí. Zostáva iba vymazať symbol α (koncové pravidlo 6).

$$\begin{array}{rlcr} \xi\gamma\eta & \to \eta\xi\gamma & (\xi,\eta \in T) & (1) \\ \xi\gamma\beta & \to \beta\xi\gamma & (\xi \in T) & (2) \\ \gamma\alpha & \to \alpha & & (3) \\ \alpha\xi & \to \xi\xi\beta\alpha & (\xi \in T) & (4) \\ \beta & \to \gamma & & (5) \\ \alpha & \to \cdot\Lambda & & (6) \\ \Lambda & \to \alpha & & (7) \end{array}$$

Pre lepšie pochopenie si skúste odsimulovať činnosť algoritmu pre niektoré slová aj pre prázdne slovo Λ, pre ktoré algoritmus musí byť tiež prípustný.

Pri zostavovaní schémy je nutné dbať na to, aby obsahovala pravidlá v správnom poradí.

P – II – 1

Pri šifrovaní ľubovoľného textu pomocou šifrovacej mriežky sa iba mení poradie jednotlivých písmen v texte. Pre danú mriežku rozmerov $2N \times 2N$ a pre $i \in \{1, 2, \dots, (2N)^2\}$ označme $f(i)$ číslo pozície, na ktorú sa dostane i-ty znak vstupného textu po zašifrovaní. Napríklad pre mriežku uvedenú v zadaní sa text `abcd` zašifruje na `dacb`, a teda $f(1) = 2$ (lebo prvé písmeno – a sa dostalo na druhé miesto), $f(2) = 4$, $f(3) = 3$ a $f(4) = 1$. Zobrazenie f je vlastne *permutáciou* prvkov $\{1, 2, \dots, (2N)^2\}$.

Ďalej označme $f^j(i)$ číslo pozície, na ktorú sa dostane i-ty znak vstupného textu po j-násobnom zašifrovaní. V našom príklade po dvoch zašifrovaniach dostávame text `bdca`, teda napríklad $f^2(1) = 4$. Zobrazenie f^j môžeme definovať aj rekurzívne: $f^0(i) = i$ a $f^{j+1}(i) = f(f^j(i))$.

Je zrejmé, že ak nájdeme j také, že $f^j(i) = i$ pre každé $i = 1, 2, \dots, (2N)^2$, po j-násobnom zašifrovaní danou mriežkou vždy dostaneme pôvodný text. Dôležité je si uvedomiť, že ak naopak existuje i také, že $f^j(i) \neq i$, tak existuje nezašifrovaný text, ktorý sa po j-násobnom zašifrovaní zmení – stačí zvoliť nejaký text, v ktorom sú na pozíciách i a $f(i)$ rôzne písmená. Z uvedenej úvahy vyplýva, že hľadané číslo k bude najmenšie také kladné číslo, že pre všetky i platí $f^k(i) = i$. Toto číslo nazývame *rádom permutácie f*.

Poďme teraz skúmať, ako možno zistiť rád permutácie. Zvoľme si nejaké i a pozorujme, na ktoré políčka sa dostane i-ty znak pôvodného textu, keď ho budeme znovu a znovu šifrovať danou mriežkou, t.j. skúmajme postupnosť $f^0(i), f^1(i), f^2(i), f^3(i), \dots$ Nakoľko všetky hodnoty v tejto postupnosti sú z rozsahu $\{1, 2, \dots, (2N)^2\}$, musia existovať čísla a, b také, že $f^a(i) = f^b(i)$. Zvoľme a a b s touto vlastnosťou tak, aby b bolo najmenšie možné.

Sporom dokážeme, že $a = 0$. V opačnom prípade by totiž platilo, že $f(f^{a-1}(i)) = f(f^{b-1}(i))$. Súčasne ale $f^{a-1}(i) \neq f^{b-1}(i)$ (lebo b je najmenšie také, že $f^a(i) \neq f^b(i)$). Zobrazenie f by teda pre dva rôzne vstupy ($f^{a-1}(i)$ a $f^{b-1}(i)$) nadobúdalo rovnakú hodnotu, čo nemôže nastať (dve rôzne písmená sa nezapíšu do toho istého políčka).

Dokázali sme teda, že $a = 0$. Čo to ale znamená? i-te písmeno sa pri ďalšom a ďalšom opakovaní šifrovania najprv dostane na navzájom rôzne pozície $f^1(i), \dots, f^{b-1}(i)$ a po b opakovaniach sa vráti späť na pozíciu i. Celý tento cyklus dĺžky b sa bude stále opakovať, t.j. písmeno i sa bude nachádzať na mieste i po $0, b, 2b, 3b, \dots$ opakovaniach šifrovania.

Vezmime teraz niektorú inú pozíciu z cyklu – $l = f^j(i)$. Vidíme, že $f^u(l) = f^u(f^j(i)) = f^{u+j}(i)$, teda l bude prechádzať cez tie isté pozície ako i, ibaže v inom poradí. Ľahko sa tiež overí, že l-tý znak sa dostane na svoje miesto práve vtedy, keď je počet opakovaní násobkom čísla b. Množina pozícií $\{1, \dots, (2N)^2\}$ sa nám teda rozpadá na disjunktné cykly, pričom prvky nachádzajúce sa v jednom cykle si pri každom opakovaní šifrovania navzájom cyklicky posúvajú pozície.

Predstavme si, že pre každé i poznáme hodnotu b_i, ktorá určuje, po koľkých opakovaniach šifrovania sa i znovu dostane na svoje miesto. Platí, že $f^j(i) = i$ práve vtedy, keď j je násobkom čísla b_i. My hľadáme najmenšie k také, že pre všetky i bude platiť $f^k(i) = i$, hľadané číslo k bude teda najmenším spoločným násobkom čísel b_i pre $i \in \{1, \dots, (2N)^2\}$. Keďže pre prvky, ktoré sú v jednom cykle, je hodnota b_i rovnaká, stačí do najmenšieho spoločného násobku zahrnúť po jednom b_i z každého cyklu.

Algoritmus teda pracuje nasledovným spôsobom: Najprv sa simuláciou šifrovacieho procesu zistia hodnoty $f(i)$ (v programe sú uložené v poli `perm`). Toto je možné spraviť v čase $O(N^2)$. Potom pre jedno i z každého cyklu určíme hodnotu b_i (v programe premenná `dlzka`) a z týchto hodnôt priamo počítame najmenší spoločný násobok. Najmenší spoločný násobok dvoch čísel zisťujeme pomocou Euklidovho algoritmu v čase $O(\log k)$. Keďže sa táto procedúra zavolá najviac $(2N)^2$ krát, celková zložitosť výpočtu najmenšieho spoločného násobku je $O(N^2 \log k)$.

Zostáva popísať, ako zistiť hodnoty b_i pre jednotlivé i. Jednoducho prechádzame po prvkoch cyklu $i, f(i), f^2(i), \ldots$, až kým nenájdeme $f^j(i) = i$. Potom máme $j = b_i$. Pritom si značíme do poľa, cez ktoré prvky sme v cykle prešli. Hodnotu b_i počítame iba pre také i, pre ktoré ešte nemáme poznačené, že je ich cyklus už spracovaný. Takto dosiahneme, že pri výpočte všetkých potrebných hodnôt b_i prechádzame cez každý cyklus práve raz — keď neskôr prídeme k inému prvku už prejdeného cyklu, neprechádzame cyklus znovu. Keďže každý prvok leží práve v jednom cykle, súčet dĺžok cyklov je $O(N^2)$, a teda časová zložitosť tejto časti programu je $O(N^2)$.

Celková zložitosť je teda $O(N^2 \log k)$, kde N je rozmer mriežky a k je rád permutácie.

P – II – 2

Najprv trochu terminológie: nezašifrovaný text budeme nazývať *správou* (skladajúcou sa zo *znakov*) a zašifrovaný text budeme nazývať *kryptogramom* (zloženým zo *symbolov*). Zadaný kryptogram dĺžky m môžeme rozložiť na n *stĺpcov* po $d = \frac{m}{n}$ symboloch, j-tý symbol v i-tom stĺpci označíme t_{ij}. Postupnosť symbolov t_{ij} pre pevné j nazveme j-tym *riadkom* kryptogramu. Záhlavie K ovplyvňuje iba poradie, v akom sa stĺpce zapisujú, takže pre všetky záhlavia sa riadky skladajú z tých istých symbolov, iba v inom poradí, ktoré popíšeme permutáciou k ($k(i) = j$ práve vtedy, keď stĺpec prijatý ako j-tý v poradí má byť zapísaný do tabuľky ako i-ty). Ďalej nech $d(x, y)$ je znak, ktorý vznikne dekódovaním dvojice po sebe idúcich symbolov x, y.

Ak priradíme každej dvojici znakov a, b *váhu* $w(a, b)$ tak, že všetky dvojice spoluhláska–samohláska a samohláska–spoluhláska dostanú váhu 1, dvojice spoluhláska–spoluhláska a samohláska–samohláska váhu -3 a ostatné dvojice váhu 0, potom potenciálne zmysluplné budú práve tie kľúče, pomocou ktorých vzniknú správy, v ktorých je celková váha všetkých dvojíc susedných znakov nezáporná. Inými slovami, pre dekódovanú správu $a_1 \ldots a_{m/2}$ musí platiť

$$W = \sum_{i=1}^{m/2-1} w(a_i, a_{i+1}) \geq 0.$$

Uvažujme najprv jednoduchší prípad, keď je n párne. Teda každý riadok kryptogramu po spätnom preusporiadaní podľa záhlavia zodpovedá celému počtu znakov, takže vyjde

$$W = \sum_{j=1}^{d} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n-3 \\ i \bmod 2 = 1}} \underbrace{w\Big(d(t_{k_i j}, t_{k_{i+1}, j}), d(t_{k_{i+2}, j}, t_{k_{i+3}, j})\Big)}_{\text{„vnútorné“ dvojice}} + \sum_{j=1}^{d-1} \underbrace{w\Big(d(t_{k_{n-1}, j}, t_{k_n, j}), d(t_{k_1, j+1}, t_{k_2, j+1})\Big)}_{\text{dvojice na hranici riadkov}}.$$

My si však môžeme predpočítať hodnoty váh pre všetky dvojice znakov vzniknuté z každej štvorice stĺpcov a analogicky hodnoty pre „posunuté“ dvojice na rozhraní riadkov:

$$C_{ijkl} = \sum_{z=1}^{d} w(d(t_{iz}, t_{jz}), d(t_{kz}, t_{lz})), \quad C^{*}_{ijkl} = \sum_{z=1}^{d-1} w(d(t_{iz}, t_{jz}), d(t_{k,z+1}, t_{l,z+1}))$$

(to zvládneme v čase $O(n^4 \cdot d)$) a z týchto hodnôt potom jednoducho v čase $O(n)$ získame W:

$$W = C^{*}_{k_{n-1},k_n,k_1,k_2} + \sum_{\substack{1 \le i \le n-3 \\ i \bmod 2 = 1}} C_{k_i,k_{i+1},k_{i+2},k_{i+3}}.$$

Pre nepárne n sa navyše musíme vedieť vyrovnať s tým, že rozhranie medzi nepárnymi a párnymi riadkami kryptogramu nerozdelí dvojicu znakov, ale dokonca znak (dvojicu symbolov), zatiaľ čo ostatné rozhrania sú v polovici dvojice znakov (štvorice symbolov). Preto musíme spracovávať zvlášť párne a nepárne riadky a dva rôzne typy prechodov cez okraj. Predpočítame si preto všeobecnejšie hodnoty C^{pq}_{ijkl} zodpovedajúce celkovej váhe dvojíc vzniknutých zo štvorice stĺpcov i, j, k, l na párnych ($p = 0$) resp. nepárnych ($p = 1$) riadkoch s posunutím cez okraj daným počtom symbolov q presahujúcim do ďalšieho riadku ($q = 0$ pre vnútorné dvojice, $q = 2$ odpovedá C^* pre párne n, $q = 1$ a $q = 3$ sú prechody s rozdelenými znakmi pre nepárne n). Tieto hodnoty spočítame takisto v čase $O(n^4 \cdot d)$ podľa vzťahu

$$C^{pq}_{ijkl} = \sum_{\substack{1 \le z \le d \\ z \bmod 2 = p}} w(d(T^{0q}_{iz}, T^{1q}_{jz}), d(T^{2q}_{kz}, T^{3q}_{lz})), \quad \text{kde } T^{aq}_{ij} = \begin{cases} t_{ij} & \text{pre } a < 4 - q \\ t_{i,j+1} & \text{pre } a \ge 4 - q \end{cases}$$

Z týchto hodnôt v čase $O(n)$ vypočítame W pre ľubovoľné záhlavie K, a to ako pre párne, tak aj pre nepárne n.

Výsledná časová zložitosť algoritmu teda je $O(n^4 d + kn) = O(n^3 m + kn)$, pamäťová $O(n^4 + m)$.

Program pracuje presne podľa tohoto algoritmu, iba si do tabuľky doplní za posledný riadok ešte jeden riadok zaplnený neplatnými znakmi, aby sa vyhol ošetrovaniu presahov z posledného riadku.

P – II – 3

Vyhrávajúca stratégia pre hráča na ťahu existuje práve pre tie pozície (a, b), pre ktoré $a \bmod 5 \ne b \bmod 5$. Dokážeme, že hráč, ktorý je na ťahu v takejto pozícii, vždy môže ťahať tak, aby dostal súpera do pozície (a', b'), v ktorej $a' \bmod 5 = b' \bmod 5$ a naopak každým ťahom z pozície, v ktorej $a \bmod 5 = b \bmod 5$ sa dostávame do pozície (a', b'), v ktorej $a' \bmod 5 \ne b' \bmod 5$. Každým ťahom ubudnú na stole nejaké zápalky. Takto sa hra po konečnom počte ťahov dostane do pozície $(0, 0)$. V tejto pozícii platí, že $a \bmod 5 = b \bmod 5$, čo znamená, že v tejto pozícii bude hráč i, ktorý tým pádom prehráva. Zostáva dokázať dve tvrdenia, ktoré sme využívali.

Tvrdenie 1. Majme pozíciu (a, b), pričom $a \bmod 5 \ne b \bmod 5$. Potom existuje ťah taký, že po jeho uskutočnení sa dostaneme do pozície (a', b') pre ktorú platí, že $a' \bmod 5 = b' \bmod 5$.

Dôkaz. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $a > b$ a označme $k = (a - b) \bmod 5$. Platí, že $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, t.j. k je povolený ťah. Takisto platí, že $k \leq a$ a teda z kopy a môžeme potiahnuť k zápaliek, čím sa dostaneme do situácie $(a', b') = (a - k, b)$, pre ktorú platí, že $a' \bmod 5 = b' \bmod 5$. □

Tvrdenie 2. Majme pozíciu (a, b), pričom $a \bmod 5 = b \bmod 5$. Potom každým ťahom sa dostaneme do pozície (a', b'), pre ktorú platí, že $a' \bmod 5 \neq b' \bmod 5$.

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme sporom: predpokladajme, že $a \bmod 5 = b \bmod 5$ a že existuje ťah do pozície (a', b'), pre ktorú platí, že $a' \bmod 5 = b' \bmod 5$. Jedna z kôpok a a b sa nezmení, takže na kôpke, z ktorej odoberáme zápalky, musí zostať zvyšok po delení 5 nezmenený. To ale znamená, že odoberaný počet zápaliek musí byť deliteľný piatimi. Žiadne z čísel 2^k, 3^k pre k prirodzené však nie je násobkom 5. Zvyšok po delení piatimi sa teda po ťahu musel zmeniť, čo je spor s predpokladom. □

Na základe dokázaných tvrdení teraz ľahko zostrojíme algoritmus s konštantnou časovou a pamäťovou zložitosťou – stačí overiť, či $a \bmod 5 = b \bmod 5$.

P – II – 4

Algoritmus celočíselného delenia dvoch celých nezáporných čísel zapísaných v unárnej sústave je založený na postupnom odčítaní deliteľa od delenca. Najprv skontrolujeme, či zadané vstupné dáta (dvojica čísel) nepredstavujú delenie nulou — v takom prípade nebude algoritmus pre tieto dáta prípustný a umelo docielime zacyklenie výpočtu. V opačnom prípade odoberieme zo zápisu každého z čísel jeden znak 1, aby počet jedničiek v zápise čísla zodpovedal hodnote tohoto čísla. Nasleduje vlastné odčítanie: z delenca postupne odoberieme toľko znakov 1, koľko sa ich nachádza v deliteli, potom (pokiaľ sa nám to podarí) si do výsledku pripíšeme jednu čiarku. To opakujeme tak dlho, kým sa celý delenec nezruší. Potom už stačí iba zmazať deliteľa a počet čiarok zapísaných do výsledku určuje hodnotu hľadaného celočíselného podielu. Nakoniec prepíšeme zaznamenané čiarky na znaky 1 a pripojíme ešte jeden znak 1, aby bol zápis výsledku v požadovanom tvare v unárnej číselnej sústave.

Popísaný postup realizuje nasledujúca schéma Markovovho algoritmu. Schéma používa pomocné symboly z abecedy $\{a, b, c, d, e, f, g\}$.

$$
\begin{aligned}
1{:}11 &\to b1 & (1)\\
: &\to\ : & (2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1b1 &\to bc & (3)\\
c1 &\to 1c & (4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rll}
bc \to dca & & (5) \\
ec \to ca & & (6) \\
e \to fa & & (7) \\
cf \to f1 & & (8) \\
df \to b & & (9) \\
b1 \to g & & (10) \\
g1 \to g & & (11) \\
gc \to g & & (12) \\
ga \to 1g & & (13) \\
g \to 1 & & (14)
\end{array}
$$

Pravidlom (1) sa zisťuje, či sa nejedná o delenie nulou. Pokiaľ nie, vykoná sa zároveň odstránenie „nadbytočných" znakov 1 z delenca i deliteľa a oddeľovacia dvojbodka sa zmení na znak b (aby sa toto pravidlo nemohlo pri výpočte uplatniť viackrát). Ak vstupné dáta predstavovali delenie nulou, pravidlo (1) sa neuplatní a výpočet prejde na pravidlo (2), ktoré zaistí zacyklenie výpočtu pre takto neprípustné dáta.

Pravidlá (3) a (4) zaisťujú jedno odčítanie deliteľa od delenca. Pomocou pravidla (3) sa postupne z delenca odstraňujú jednotlivé znaky 1 a za každý z nich je jeden znak 1 z deliteľa dočasne preznačený na symbol c (ako príznak, že už bol použitý). Súbežne s tým je pomocou pravidla (4) zaistené presúvanie 1 pred c v rámci deliteľa. Postupne vykonávané odčítanie skončí buď tým, že sa minú jedničky v deliteli alebo tým, že sa minú jedničky v delenci (prípadne v oboch zároveň).

Ak sa podarilo odčítať od delenca celého deliteľa, uplatní sa pravidlo (5) a následne sa zrealizuje celý blok výpočtu pomocou pravidiel (5)–(9). Ten slúži na pripísanie jedničky do výsledného podielu. Podiel je vytváraný v spracovávanom slove na konci, bezprostredne nasleduje za deliteľom. Aby sa ľahko odlíšil, je zatiaľ vytváraný pomocou symbolov a. V pravidle (5) je oddeľovací znak b dočasne zmenený na d (aby sa toto pravidlo neuplatnilo opakovane) a zároveň je „vyslaný" symbol e, aby pomocou pravidla (6) prešiel na koniec deliteľa. Tam pravidlo (7) pripíše do výsledku jeden symbol a, zároveň pritom zmení e na f. Symbol f postupuje pomocou pravidla (8) späť doľava a cestou preznačuje znaky c v deliteli opäť na 1, aby bol deliteľ pripravený na ďalšie kolo odčítania. Po prechode celým deliteľom je f zrušený a pritom sa oddeľovač d zmení späť na b. Slovo je tak pripravené na ďalšie odčítanie pomocou pravidla (3).

Ak sme pri odčítaní neodčítali celého deliteľa a v delenci už nie sú jedničky, proces odčítania predstavovaný pravidlami (3)–(4) sa zastaví a pravidlo (5) sa neuplatní. Výpočet teda prejde na „ukončovací" blok (10)–(14). V ňom je najprv oddeľovací symbol b, ktorý sa teraz nachádza na začiatku slova, zmenený na g. Ten potom postupne zmaže celého deliteľa, ktorý môže byť v danej chvíli tvorený sčasti symbolmi 1 a sčasti symbolmi c (11)–(12). Ďalej pomocou pravidla (13) premeníme znaky a vo výslednom podiele na 1 a nakoniec pomocou pravidla (14) pripíšeme do podielu ešte jednu jedničku a g zrušíme.

P – III – 1

Túto úlohu pretransformujeme na jednoduchú úlohu z teórie grafov. Vytvoríme graf G, ktorého vrcholy budú čísla $1, 2, \dots 4N^2$ a medzi vrcholmi i a j povedie hrana, ak sa písmeno, ktoré bolo v pôvodnom texte na pozícii i, premiestni po zašifrovaní jednou alebo druhou mriežkou na pozíciu j, alebo naopak, ak sa písmeno z pôvodnej pozície j môže dostať zašifrovaním pomocou niektorej z mriežok na pozíciu i.

Označme teraz P počet komponentov súvislosti grafu G. Dokážeme, že počet textov, ktoré sa po zašifrovaní oboma mriežkami nezmenia, je K^P (K je počet znakov abecedy).

Majme ľubovoľný text t, ktorý sa po zašifrovaní jednou aj druhou mriežkou nezmení. Označme t_i znak, ktorý je v texte t na i-tej pozícii. Najprv si uvedomme, že ak sú vrcholy i a j v grafe G spojené hranou, tak $t_i = t_j$. To vyplýva z konštrukcie grafu G – ak písmeno t_i prejde po zašifrovaní jednou alebo druhou mriežkou na pozíciu j, tak musí byť rovnaké, ako písmeno, ktoré bolo na pozícii j v texte t (inak by sa text zmenil). Podobne možno postupovať pre prípad, že naopak t_j sa šifrovaním dostane na pozíciu i.

Rozšírením tejto úvahy možno odvodiť, že pre ľubovoľné dva vrcholy i a j nachádzajúce sa v jednom komponente súvislosti platí, že $t_i = t_j$. Ak sú totiž i a j v tom istom komponente, spája ich nejaká cesta. Každé dva po sebe idúce vrcholy na tejto ceste sú spojené hranou a teda na im zodpovedajúcich pozíciách v t musia byť rovnaké znaky. Využitím tranzitívnosti rovnosti (ak $t_a = t_b$ a $t_b = t_c$, tak $t_a = t_c$) dostaneme z týchto rovností aj rovnosť pre koncové vrcholy cesty ($t_i = t_j$).

Dokázali sme, že ak sa t nezmení zašifrovaním pomocou ani jednej z mriežok, tak na všetkých pozíciách z jedného komponentu súvislosti sú rovnaké písmená. Teraz dokážeme, že ak naopak na všetkých pozíciách z jedného komponentu súvislosti sú rovnaké písmená, tak text t bude mať po zašifrovaní jednou aj druhou mriežkou na pozíciách z tohto komponentu pôvodné hodnoty. Majme teda vrchol i z nášho komponentu. Na pozíciu i však po zašifrovaní ľubovoľnou z mriežok vždy prejdú iba znaky z pozícií spojených s i hranou a tie sú v tom istom komponente a majú teda tú istú hodnotu.

Vidíme, že t sa nezmení zašifrovaním práve vtedy, keď sú v každom komponente na všetkých pozíciách rovnaké znaky. Každý z komponentov môže mať priradený jeden z K znakov, pričom znaky môžeme komponentom priraďovať nezávisle, celkový počet možností je teda K^P.

Algoritmus je teda jednoduchý. Na základe mriežky (simuláciou šifrovania) zostavíme graf G a pomocou prehľadávania do šírky alebo do hĺbky zistíme počet jeho komponentov P. Potom stačí umocniť K na P. Graf G má $4N^2$ vrcholov, pričom každý vrchol má stupeň najviac 4. Celkový počet hrán je teda najviac $8N^2$. Časová zložitosť prehľadávaním grafu a aj celková zložitosť algoritmu je teda $O(N^2)$. Pamäťová zložitosť je tiež $O(N^2)$.

P – III – 2

Pozíciu hry, keď na prvej kôpke ostáva x a na druhej kôpke y zápaliek, označíme (x, y). Hra sa teda začína na pozícii (a, b) a končí v okamihu, keď sa prvýkát dostane do stavu (x, y) pre nejaké x, y také, že $x < p$ a $y < p$.

Ťahom rozumieme dvojicu čísel (t, u) z množiny $M = \{(p, 0), (q, 0), (0, p), (0, q)\}$. Ak v pozícii (x, y) vykonáme ťah (t, u), hra prejde do pozície $(x - t, y - u)$. V pozícii (x, y) je prípustné previesť ťah (t, u) práve vtedy, keď je $t \leq x$ a $u \leq y$.

Pozíciu (x, y) budeme volať vyhrávajúcou, ak v nej existuje vyhrávajúca herná stratégia pre hráča, ktorý je práve na ťahu. V opačnom prípade označujeme pozíciu ako prehrávajúcu.

Vo vyhrávajúcej pozícii musí existovať aspoň jeden prípustný ťah, ktorý hru prevedie do prehrávajúcej pozície (tento ťah je potom súčasťou vyhrávajúcej stratégie). Naopak, ľubovoľný ťah prípustný v prehrávajúcej pozícii musí viesť do nejakej vyhrávajúcej pozície (nech ťahá súper akokoľvek, opäť budeme mať k dispozícii ťah vedúci k výhre). Najprv dokážeme nasledujúcu vetu:

Veta 1 *Pozícia (x, y) je vyhrávajúca práve vtedy, keď je vyhrávajúca pozícia (x_1, y_1), kde x_1 a y_1 sú zvyšky po delení čísel x, y číslom $p + q$.*

Dôkaz: Dôkaz urobíme matematickou indukciou podľa hodnoty $x + y$.

1. Pre $x + y < p + q$ tvrdenie zrejme platí ($x_1 = x$, $y_1 = y$).

2. Nech tvrdenie platí pre všetky x, y také, že $x + y < s$, kde $s \geq p + q$. Nech x, y sú ľubovoľné čísla také, že $x + y = s$.

   (a) Ak je pozícia (x_1, y_1) vyhrávajúca, potom nutne existujú $(t, u) \in M$ také, že pozícia $(x_1 - t, y_1 - u)$ je prehrávajúca ($x_1 - t \geq 0, y_1 - u \geq 0$). Keďže $(x - t) + (y - u) < s$, podľa indukčného predpokladu je pozícia $(x - t, y - u)$ prehrávajúca a teda pozícia (x, y) je vyhrávajúca, lebo prvý hráč môže od čísla x odčítať číslo t a od čísla y číslo u.

   (b) Ak je pozícia (x_1, y_1) prehrávajúca, potom sporom predpokladajme, že pozícia (x, y) je vyhrávajúca. Potom hráč, ktorý je na ťahu, môže svojím ťahom prejsť k prehrávajúcej pozícii. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že vyhrávajúcim ťahom je odpočítanie čísla p od čísla x (ďalšie 3 možnosti sa dajú vyriešiť analogicky). Potom pozícia $(x - p, y)$ je prehrávajúca. Ak x_2 je zvyšok po delení čísla $x - p$ číslom $p + q$, podľa indukčného predpokladu je pozícia (x_2, y_1) prehrávajúca. Ak $x_1 \geq p$, je $(x_2, y_1) = (x_1 - p, y_1)$, ak je $x_1 < p$, potom $(x_2, y_1) = (x_1 + q, y_1)$. V oboch prípadoch dostávame spor, lebo zrejme nemôžu byť súčasne prehrávajúce pozície (x_1, y_1) a $(x_1 - p, y_1)$ ani (x_1, y_1) a $(x_1 + q, y_1)$.

□

Ďalej budeme analyzovať pozície (x, y) v prípade, že $x < p + q$ a $y < p + q$. Najprv spočítame paritu počtu ťahov zostávajúcich do konca hry v pozícii $(x, 0)$, kde $0 \leq x < p + q$:

1. Ak je $x < q$, hráči môžu iba odčítavať hodnotu p a teda prevedú práve $\lfloor x/p \rfloor$ ťahov.
2. Ak je $x \geq q$, hráči môžu buď previesť práve jeden ťah (v prípade, že odpočítajú číslo q), alebo prevedú práve $\lfloor x/p \rfloor$ ťahov (v prípade, že v prvom ťahu odpočítajú číslo p, v ďalších ťahoch už môžu odpočítavať iba číslo p, q už odpočítať nemôžu).

Teda platí:

A) Ak je $\lfloor x/p \rfloor$ nepárne, má hra vždy nepárny počet ťahov.

B) Ak je $\lfloor x/p \rfloor$ párne a $x < q$, hra má vždy párny počet ťahov.

C) Ak je $\lfloor x/p \rfloor$ párne a $x \geq q$, hra môže mať párny alebo nepárny počet ťahov, rozhoduje o tom prvý ťah.

Teraz uvažujme o všeobecnej počiatočnej pozícii (a, b). Keďže začínajúci hráč vyhráva práve vtedy, keď je celkový počet ťahov nepárny, ľahko ukážeme, že platí nasledujúce tvrdenie.

Veta 2 *Pozícia (a, b) je pre $a < p + q$, $b < p + q$ prehrávajúca práve vtedy, keď nastane práve jedna z dvoch možností:*

1. *$\lfloor a/p \rfloor$, $\lfloor b/p \rfloor$ sú obe nepárne*
2. *$\lfloor a/p \rfloor$, $\lfloor b/p \rfloor$ sú obe párne a $\lfloor a/q \rfloor + \lfloor b/q \rfloor$ je párne.*

Dôkaz: Rozoberieme 9 možností podľa toho, akú z podmienok A, B, C čísla a, b spĺňajú. Ak žiadne z čísel a, b nespĺňa podmienku C, výsledok nezáleží na hre hráčov a zrejme párny počet ťahov nastane práve vtedy, keď buď obe spĺňajú A, alebo obe spĺňajú B. Ak práve jedno z čísel a, b spĺňa podmienku C, prvý hráč toto číslo môže vhodne znížiť tak, aby vyhral, lebo počet ťahov druhým číslom je pevne určený. Nakoniec, ak spĺňajú obe čísla podmienku C, vyhráva druhý hráč, pretože po ľubovoľnom ťahu prvého hráča môže druhý hráč s nepoužitým číslom previesť rovnakú operáciu a tým dosiahnuť párny počet ťahov. Teda pozícia (a, b) je prehrávajúca, ak obe čísla a, b spĺňajú podmienku A,B alebo C, čo hneď dáva dokazované tvrdenie. □

Z dokázaných tvrdení vyplýva:

Pre ľubovoľné celé nezáporné čísla a, b je pozícia (a, b) prehrávajúca práve vtedy, keď nastane práve jedna z možností

1. $\lfloor a_1/p \rfloor$, $\lfloor b_1/p \rfloor$ sú obe nepárne
2. $\lfloor a_1/p \rfloor$, $\lfloor b_1/p \rfloor$ sú obe párne a $\lfloor a_1/q \rfloor + \lfloor b_1/q \rfloor$ je párne, kde a_1, b_1 sú zvyšky po delení čísel a, b číslom $p + q$.

P – III – 3

a) Riešením úlohy je nasledujúca schéma:

$$
\begin{array}{lcll}
X1 & \to & 1X & (1)\\
X & \to &] & (2)\\
[11 & \to & 1[& (3)\\
[1 & \to & [& (4)\\
[] & \to & |]1 & (5)\\
1| & \to & |1 & (6)\\
|] & \to & .\Lambda & (7)\\
| & \to & [& (8)\\
11 & \to & [1X & (9)\\
1 & \to & 1 & (10)
\end{array}
$$

Ak vstupné slovo obsahuje jedinú jednotku reprezentujúcu hodnotu nula, opakovane sa bude vykonávať formula 10 a dôjde k zacykleniu výpočtu (algoritmus je pre nulu neprípustný).

Ak je na vstupe kladné číslo N (zapísané ako $N+1$ jednotiek), najprv sa vykoná formula 9, ktorá na začiatok slova umiestni zátvorku [a odstráni jednu nadbytočnú jednotku používanú v zvolenom kódovaní čísel. Opakovaným prevádzaním formuly 1 sa potom premiestni pomocný symbol X na pravý okraj slova, kde sa formulou 2 premení na zátvorku]. Po použití trojice pravidiel 9, 1, 2 bude vstupné slovo prevedené na tvar [11111111], teda N jednotiek v zátvorkách.

Ďalej sa vždy opakovaním formuly 3 vydelí číslo dvoma, pomocou pravidla 4 sa prípadne odstráni zostávajúca nepárna jednotka a použitím 5 sa pričíta jedna jednotka do výsledku, ktorý sa vytvára na pravom okraji slova za znakom]. Formuly 6 a 8 potom zaistia obnovenie situácie pred ďalším delením. Po dosiahnutí nulového výsledku delení sa uplatní pravidlo 7, ktoré vymaže ostávajúce pomocné symboly a výpočet ukončí.

Popísaný algoritmus je založený na skutočnosti, že dolná celá časť dvojkového logaritmu čísla N udáva, koľkokrát môžeme číslo opakovane celočíselne vydeliť dvoma, než dostaneme nulový výsledok. Formula 6 sa uplatní i v prípade nulového podielu a pripíše jednu 1 k výsledku — vo výsledku sa preto objaví vždy o jednu 1 viac, než koľko je správna hodnota dvojkového logaritmu. To však presne odpovedá zvolenému kódovaniu čísel.

b) Riešením zadanej úlohy je nasledujúca schéma:

$$
\begin{array}{lcll}
X01 & \rightarrow & X01 & (1) \\
X00 & \rightarrow & X00 & (2) \\
X0 & \rightarrow & .\Lambda & (3) \\
X1 & \rightarrow & B & (4) \\
 & & & \\
A0 & \rightarrow & A & (5) \\
A1 & \rightarrow & B & (6) \\
B0 & \rightarrow & C & (7) \\
B1 & \rightarrow & A & (8) \\
C0 & \rightarrow & B & (9) \\
C1 & \rightarrow & C & (10) \\
 & & & \\
A & \rightarrow & .\Lambda & (11) \\
B & \rightarrow & B & (12) \\
C & \rightarrow & C & (13) \\
 & & & \\
\Lambda & \rightarrow & X & (14)
\end{array}
$$

Formula 14 najprv umiestni na začiatok vstupného slova pomocný symbol X. Podľa začiatku zadaného slova sa potom vykoná jedna z formúl 1-4. Binárny zápis čísla nemôže začínať nulou a pritom obsahovať viac ako jednu cifru — v takom prípade sa uplatní pravidlo 1 alebo 2 a dôjde k zacykleniu výpočtu nad neprípustným vstupom. Ak vstupné slovo obsahuje jedinú nulu, pravidlo 3 zaistí ukončenie výpočtu — algoritmus je prípustný, pretože nula je bezo zvyšku deliteľná tromi. Konečne, ak začína binárny zápis čísla cifrou 1, je táto cifra nahradená pomocným symbolom B a výpočet pokračuje v ďalšej časti schémy.

Formuly 5-10 prevádzajú jednoduchú analýzu zadaného reťazca, ktorý obsahuje kladné celé číslo korektne zapísané v dvojkovej sústave. Číslo spracovávame zľava doprava cifru po cifre a sledujeme, aký zvyšok po delení tromi dáva číslo predstavované už spracovanými dvojkovými číslicami. Podľa hodnoty tohto zvyšku meníme pomocný symbol na A, B alebo C (A pre zvyšok 0, B pre zvyšok 1, C pre zvyšok 2). Formula 4 odobrala z dvojkového zápisu čísla vedúcu jednotku a pomocný symbol nastavila na B, lebo číslo jedna dáva po delení tromi zvyšok 1.

Ak už máme prečítanú z ľavej strany vstupného reťazca skupinu dvojkových cifier predstavujúcich nejaké číslo V, môžeme rozlíšiť tri prípady podľa zvyšku po delení čísla V tromi:

(a) V je bezo zvyšku deliteľné tromi (stav A)

- ak pridáme k jeho dvojkovému zápisu cifru 0, dostaneme hodnotu $2V$, ktorá je tiež deliteľná tromi (formula 5)
- ak pridáme k jeho dvojkovému zápisu cifru 1, dostaneme hodnotu $2V+1$, ktorá dáva pri delení tromi zvyšok 1 (formula 6).

(b) V dáva po delení tromi zvyšok 1, je teda tvaru $V = 3k + 1$ (stav B)

- ak pridáme k jeho dvojkovému zápisu cifru 0, dostaneme hodnotu $2V = 6k + 2$, ktorá dáva pri delení tromi zvyšok 2 (formula 7)
- ak pridáme k jeho dvojkovému zápisu cifru 1, dostaneme hodnotu $2V + 1 = 6k + 3$, ktorá je bezo zvyšku deliteľná tromi (formula 8).

(c) V dáva po delení tromi zvyšok 2, je teda tvaru $V = 3k + 2$ (stav C)

- ak pridáme k jeho dvojkovému zápisu cifru 0, dostaneme hodnotu $2V = 6k + 4$, ktorá dáva pri delení tromi zvyšok 1 (formula 9)
- ak pridáme k jeho dvojkovému zápisu cifru 1, dostaneme hodnotu $2V + 1 = 6k + 5$, ktorá dáva pri delení tromi zvyšok 2 (formula 10).

Po spracovaní celého vstupného slova určuje posledný pomocný symbol, aký je výsledný zvyšok po celočíselnom delení zadaného čísla tromi. Ak je výsledným symbolom A, zadané číslo bolo deliteľné tromi a formula 11 preto výpočet úspešne ukončí. V prípade symbolov B a C išlo o dvojkový zápis čísla, ktoré nebolo deliteľné tromi - pomocou pravidla 12 alebo 13 sa teda zaistí zacyklenie výpočtu nad neprípustným vstupným slovom.

P – III – 4

Na riešenie tejto úlohy neexistuje jednoznačne najlepšie riešenie, uvedieme teraz preto niekoľko techník, ktoré možno pri riešení použiť. Zdrojový text vzorového programu neuvádzame, riešitelia ho dostanú na diskete, spolu so vstupnými súbormi. Štandardne sa Vigenèrova šifra dešifruje pomocou frekvencií výskytov jednotlivých písmen v danom prirodzenom jazyku. Nakoľko náš slovník nie je príliš veľký a v zašifrovanom texte sú zachované medzery, možno s úspechom použiť aj vhodne upravené prehľadávanie všetkých možností (z množiny všetkých kľúčov vyberieme dostatočne malú podmnožinu možných kľúčov a tie vyskúšame). Uvedieme hlavné myšlienky obidvoch riešení.

Riešenie pomocou frekvencií výskytov je síce rýchle, nie vždy však nájde správne riešenie. Preto je pomerne vhodné spojiť túto techniku ešte s prehľadávaním všetkých možností. Napríklad môžeme skúsiť uhádnuť riešenie pomocou frekvencií, a ak takto nenájdeme správne riešenie, spustíme ešte prehľadávanie všetkých možností. Prípadne môžeme pomocou frekvencií výskytov uhádnuť dĺžku kľúča a skúšať už iba túto dĺžku.

Riešenie pomocou frekvencií výskytov. Toto riešenie je založené na tom, že v texte v prirodzenom jazyku sa niektoré písmená (napríklad samohlásky) vyskytujú častejšie ako iné písmená. Frekvenciou písmena v texte budeme nazývať počet výskytov tohto písmena v texte vydelený celkovým počtom písmen. Ak si pre niekoľko dlhých textov v tom istom jazyku spočítame frekvencie jednotlivých písmen, uvidíme, že sú pomerne podobné. Pri dešifrovaní textu sa snažíme nájsť také heslo, aby sa vzniknuté frekvencie čo najviac podobali na frekvencie použitého prirodzeného jazyka.

Malé písmená anglickej abecedy označme číslami 0 (`a`) až 25 (`z`). Vynechajme teraz zo zašifrovaného textu medzery a písmená zašifrovaného textu označme porade $c_0, c_1, \dots, c_{l-1}$, kde l počet písmen v zašifrovanom texte. Kľúč budeme označovať $K = k_0 k_1 \dots k_{d-1}$. Nájdenie kľúča sa skladá z dvoch podúloh: v prvej fáze musíme zistiť dĺžku kľúča d a v druhej samotný kľúč K.

Predpokladajme teraz, že poznáme dĺžku kľúča d. Písmená si rozdelíme do d skupín podľa toho, ktorým písmenom kľúča boli zašifrované. Prvú skupinu budú teda tvoriť písmená $c_0, c_d, c_{2d}, \dots$, tie boli zašifrované znakom kľúča k_0. Vo všeobecnosti skupinu zašifrovanú znakom kľúča k_i tvoria znaky $c_i, c_{d+i}, c_{2d+i}, \dots$.

Pokúsime sa teraz určiť písmeno k_i. Ak ním odšifrujeme jeho skupinu písmen, mali by sa ich frekvencie podobať rozdeleniu frekvencií jednotlivých znakov v bežnom texte. Musíme si stanoviť kritérium, ktoré určí, nakoľko sa dve rozdelenia frekvencií navzájom podobajú. Pri štatistických výpočtoch sa obvykle používa nasledujúci vzťah (p_j je frekvencia výskytu písmena j v bežnom texte, f_{j,k_i} je frekvencia výskytu písmena j v našej skupine po odšifrovaní pomocou k_i):

$$o_{k_i} = \sqrt{\sum_{j=0}^{25} (f_{j,k_i} - p_j)^2},$$

pričom frekvencia sa podobajú tým viac, čím je nižšie o_{k_i}. Vyskúšame teda, pre ktoré k_i bude táto suma minimálna (všimnime si, že platí $f_{a,b} = f_{a\oplus i, b\oplus i}$ pre $i = 0, 1, \dots, 25$, $\oplus$ je sčítanie modulo 26; z čísel $f_{a,b}$ nám teda stačí počítať len $f_{0,0}, f_{1,0}, \dots f_{25,0}$).

Takýmto spôsobom by sme boli schopní efektívne pre danú dĺžku s veľkou pravdepodobnosťou nájsť kľúč. Táto metóda funguje pre dostatočne dlhé šifrové texty, pre spoľahlivý chod postačuje okolo 50 znakov šifrového textu na jeden znak kľúča.

Ostáva problém s určením dĺžky kľúča. Najjednoduchšou metódou je vyskúšať všetky dĺžky od 1 po určené maximum, nájsť pre danú dĺžku kandidáta na kľúč, dešifrovať ním šifrový text a overiť, či sme dostali text skladajúci sa zo slov v slovníku. Inou možnosťou je pokúsiť sa určiť aj dĺžku štatisticky – vyberieme takú dĺžku kľúča, aby štatistická odchýlka frekvencií výskytu písmen v šifrovom texte dešifrovanom pomocou nájdeného kľúča (danej dĺžky) od hodnôt p_i bola minimálna. Ak je reťazec K kľúčom, takisto budú aj KK, KKK, … atď. Preto minimálnu odchýlku dostaneme pre viacero dĺžok, z ktorých samozrejme vyberieme minimálnu.

Prehľadávanie všetkých možností Pri prehľadávaní všetkých možností skúšame všetky možné dĺžky kľúča od 1 až po 50 a snažíme sa nájsť prvú, pre ktorú existuje vyhovujúci kľúč. Pre každú dĺžku ďalej skúšame jednotlivé kľúče.

Samozrejme, že všetkých kľúčov dĺžky k je 26^k, čo je už pre pomerne nízke k veľmi veľké číslo. Preto nemôžeme bezhlavo skúšať všetky možnosti. Dobré riešenie dostaneme takto. Náš kľúč budeme vytvárať postupne. Začneme s kľúčom, v ktorom budú namiesto písmen znaky $*$, ktoré znamenajú, že dané písmeno kľúča ešte nie je určené (t.j. môže tam byť ľubovoľné písmeno). Potom postupne po jednej budeme hviezdičky nahrádzať písmenami, pričom pre každú hviezdičku rekurzívne skúšame všetky možnosti nahradenia ostatných hviezdičiek. Dôležité však je, že zakaždým keď niektorú hviezdičku nahradíme písmenom, skontrolujeme konzistentnosť doteraz vytvoreného kľúča so zašifrovaným textom (a slovníkom). Znamená to, že v každom slove zašifrovaného textu odšifrujeme pomocou nášho kľúča písmená, ktoré sme už v kľúči určili a na pozície zodpovedajúce hviezdičkám dáme hviezdičky. Potom zisťujeme, či sa dajú hviezdičky v rozšifrovanom slove nahradiť tak, aby sme dostali slovo zo slovníka (t.j. hľadáme v slovníku slovo, ktoré sa s naším nezašifrovaným slovom zhoduje na všetkých nehviezdičkových pozíciách). Akonáhle zistíme, že niektoré slovo po takomto čiastočnom rozšifrovaní nejde doplniť na slovo zo slovníka, vieme, že v našom doteraz vytvorenom kľúči je niektoré písmeno nesprávne, nemá teda zmysel skúšať nahrádzať v ňom ďalšie hviezdičky písmenami.

Skúsenosti ukazujú, že ak skúšame napríklad nesprávnu dĺžku kľúča, tak väčšinou hneď po dosadení prvého písmena do kľúča zistíme, že táto možnosť nie je správna, stačí teda vyskúšať 26 možností. Podobne veľmi rýchlo sa týmto spôsobom objaví aj prípad, keď umiestnime na niektoré miesto zlé písmeno. Na prvý pohľad sa môže zdať, že prehľadávať po doplnení každého písmena do kľúča každé slovo zašifrovaného textu a pre každé takéto slovo ešte prehľadávať veľkú časť slovníka sa neoplatí, takýmto prehľadávaním nám však ubudne veľmi veľa možností.

Pri tomto spôsobe riešenia je vhodné slovník reprezentovať tak, že slová máme rozdelené do zoznamov podľa dĺžky, aby sme pri vyhľadávaní nemuseli zbytočne prezerať aj slová iných dĺžok. V týchto zoznamoch už však nemusíme slová špeciálne usporadúvať, vyhľadávame v nich lineárne.

Popíšeme teraz ešte jedno zlepšenie. Je založené na jednoduchej myšlienke: slov niektorých dĺžok (veľmi krátkych a veľmi dlhých slov) je pomerne málo. Ak by sme text dešifrovali ručne, skúšali by sme na tieto miesta dosadzovať jednotlivé slová, čo by nám určilo časť kľúča. Takto získanú časť kľúča by sme sa potom snažili rozšíriť.

Ukážeme teraz, ako túto myšlienku využiť v programe. Predpokladajme napríklad, že v zašifrovanom texte je na niektorom mieste slovo dĺžky 2 začínajúce na a a že žiadne slovo dĺžky 2 v slovníku sa nezačína písmenom z. Potom by sme vedeli, že v kľúči na mieste, ktoré sa podpísalo pod dané miesto, určite nebolo písmeno b, lebo pomocou písmena b sme písmeno a mohli dostať iba z písmena z (a písmeno z na danej pozícii byť nemôže).

Takýchto obmedzení môžeme na základe slovníka nájsť viac a pre každú pozíciu kľúča vytvoríme zoznam hodnôt, ktoré sa na tomto mieste v kľúči môžu vyskytnúť. V priaznivom prípade sa stane, že na niektorej pozícii nám zostane nula možností – znamená to, že sme zvolili nesprávnu dĺžku kľúča a treba skúšať iný kľúč.

Ak však máme pre každú pozíciu kľúča aspoň jednu možnosť, môžeme použiť získané informácie pri prehľadávaní. Prehľadávame v podstate rovnako ako predtým – vždy dosadíme jedno písmeno do kľúča a overíme správnosť kľúča. Skúšame však iba tie možnosti, ktoré predtým nevylúčili. Navyše je výhodné začať tými pozíciami kľúča, ktoré majú najmenej možností.

Pre prirodzené texty sa pri tomto spôsobe riešenia často stáva, že pre nesprávnu dĺžku kľúča získame pre niektorú pozíciu nula možností, takže k samotnému prehľadávaniu ani nepríde. Naopak, ak skúšame správnu dĺžku kľúča, tak nám pre mnohé (niekedy aj pre všetky) pozície zostane iba jedna možnosť, ktorú môžeme priamo do kľúča dosadiť.

P – III – 5

Zadanie najprv obmedzíme na vybrané druhy výrobkov. Zrušíme ponuky neobsahujúce nami vybrané druhy výrobkov. Z každej ponuky vyškrtáme výrobky, ktoré nie sú vybrané. Pokiaľ niektorá ponuka obsahovala väčší počet predmetov, ako chceme nakúpiť, obmedzíme ho na nakupovaný počet. Ak po zoškrtaní dostaneme viacero ponúk s rovnakými počtami vybraných predmetov, necháme iba tú najlacnejšiu. Z podmienok zadania triviálne vyplýva, že takto upravená úloha bude mať rovnaké riešenie, ako pôvodná. Budeme ju riešiť dynamickým programovaním.

Máme teda predmety očíslované 1 až k ($k \leq 5$) s cenami c_i a z každého z týchto predmetov chceme nakúpiť m_i ($m_i \leq 6$) kusov s využitím ponúk, pričom i-ta ponuka zlacňuje sadu s p_{ij} kusmi j-teho tovaru na cenu w_i.

Najskôr si zadefinujeme konfigurácie a operácie s nimi:

- **Konfiguráciami** nazveme postupnosti $c_1, \ldots, c_k$ celých nezáporných čísel, kde c_i vyjadruje, koľko kusov i-teho druhu tovaru nakupujeme, pričom tento počet nesmie prekročiť m_i.

- Konfigurácie možno **sčítavať** po zložkách, pričom ak ľubovoľná zložka presiahne m_i, obmedzíme ju na m_i (sčítanie konfigurácií x a y označme $x \oplus y$). Zrejme platí $x \oplus y = y \oplus x$.

- Konfigurácia y je **rozšírením** konfigurácie x (píšeme $x \preceq y$, prípadne $x \prec y$, ak navyše $x \neq y$), ak pre každé i je $x_i \leq y_i$. Zrejme platí $x \preceq x \oplus y$.

- Konfigurácia je **triviálna**, ak obsahuje jediný kus jediného tovaru (konfiguráciu obsahujúcu jeden kus i-teho predmetu označme T_i).

- Konfigurácia je **prostá**, ak ju možno dostať sčítaním ponúk (bez pridávania jednotlivých predmetov).

Keďže pre každú konfiguráciu e je vždy $e_i \leq 6$, môžeme sa na konfigurácie pozerať ako na zápisy čísel v sedmičkovej sústave a podľa toho ich očíslovať číslami v rozsahu 0 až $7^5 - 1 = 16806$. Označme v_e takýto kód konfigurácie e. Je jasné, že prevod e na v_e a naopak možno urobiť v čase $O(k)$.

Označme ďalej w_e minimálnu cenu, za ktorú možno nakúpiť konfiguráciu e. Je zrejmé, že $w_{x \oplus y} \leq w_x + w_y$. Navyše ak $x \preceq y$, potom $w_x \leq w_y$.

Naším cieľom je nájsť konfiguráciu e, ktorá je rozšírením zadanej konfigurácie m a jej w_e je najmenšie možné. Keďže nákup sa vždy skladá zo zlacnených ponúk doplnených jednotlivými predmetmi, možno každú konfiguráciu e rozložiť na prostú konfiguráciu p a niekoľko triviálnych konfigurácií k_i tak, že $e = p \oplus \sum_i k_i$ a teda $w_e = w_p + \sum_i w_{k_i}$ pre nejaké vyhovujúce p a postupnosť k_i. Ak by sme teda vedeli spočítať ceny w_p pre všetky prosté konfigurácie, máme úlohu vyriešenú, pretože stačí preskúmať tie možnosti, kde prosté konfigurácie doplníme triviálnymi tak, aby výsledná konfigurácia obsahovala všetky požadované predmety z m.

Ceny prostých konfigurácií spočítame dynamickým programovaním, pričom budeme postupovať od konfigurácií s najmenším v_p až po konfigurácie s najväčším v_p. Pre prázdnu konfiguráciu (jej kód je nula) je jej cena nulová. Keďže optimálne zaplatenie každej neprázdnej prostej konfigurácie zahŕňa prikúpenie nejakej zľavnenej ponuky k niektorej menšej prostej konfigurácii, stačí položiť

$$\begin{aligned} w_p &= \min\{w_{q_i} + w_j;\ q_i \oplus p_j = p, \\ &\quad q_i \prec p \text{ je prostá konfigurácia, } p_j \text{ je konfigurácia zľavnenej ponuky}\}. \end{aligned}$$

To možno ľahko urobiť, keďže v okamihu počítania minimálnej ceny konfigurácie p sú ceny všetkých menších potrebných konfigurácií w_i už vypočítané ($q_i \prec p$, a teda $v_{q_i} < v_p$).

Zadanie však vyžaduje nielen výpočet w_e, ale tiež, ktoré ponuky sme pre minimálny nákup použili. Na to stačí pri výpočte minima pripojiť aj informáciu o tom, pre ktoré i, j sa minimum dosahuje a podľa toho potom prostú konfiguráciu p, ktorej rozšírením získame optimálne zaplatenie e, rozložiť na ponuky (odobratím poslednej pridanej ponuky získame menšiu prostú konfiguráciu, ktorú rozložíme tým istým spôsobom).

Časová zložitosť. Prípravná fáza (filtrovanie zadania) trvá $O(nm)$, výpočet minimálnych cien prostých konfigurácií $O(smk)$ (kde $s = (1 + \max_i m_i)^k$) je počet všetkých konfigurácií), výpočet minimálnej ceny zadanej konfigurácie $O(sk)$ a spätné vyhľadanie optimálneho zaplatenia $O(s)$. Celkovo teda $O((1 + \max_i m_i)^k mk + nm)$.

Pamäťová zložitosť. $O((1 + \max_i m_i)^k + mk + n)$.

6. Stredoeurópska informatická olympiáda

Šiesta Stredoeurópska olympiáda v programovaní (Central European Olympiad in Informatics — CEOI) sa konala v dňoch 2. – 9. septembra 1999 v Brne. CEOI je súťažou stredoškolákov; každá zúčastnená krajina má právo vyslať štyroch súťžiacich, vedúceho výpravy a zástupcu vedúceho. Pravidelne sa jej zúčastňujú zakladateľské krajiny Česká Republika, Chorvátsko, Maďarsko, Poľsko, Rumunsko, Slovenská Republika a Slovinsko. Tento rok organizátori využili právo pozvať tímy z Nemeckej spolkovej republiky, Bosny a Hercegoviny a USA. Z Českej republiky sa okrem oficiálneho tímu zúčastnili ďalšie dva – Česká republika B a tím z Gymnázia Jarošova v Brne.

Družstvo Slovenska sa zúčastnilo v zložení Michal Breznický (gym. Prešov), Vladimír Koutný (gym. J. Hronca Bratislava), Ján Oravec (gym. J.G. Tajovského B. Bystrica) a Dávid Pál (gym. J. Hronca Bratislava) pod vedením Martina Pála a Jána Senka (Matematicko-fyzikálna fakulta UK).

Vzhľadom na to, že na CEOI bolo vyslané "B" družstvo (najlepší štyria študenti sa zúčastnia Medzinárodnej informatickej olympiády v Turecku), neočakával sa taký dobrý výsledok, ako vlani. Slovenské družstvo získalo dve bronzové medaily (Ján Oravec a Dávid Pál).

Slovensko sa súťaže zúčastnilo vďaka sponzorskej podpore Slovenskej informatickej spoločnosti, ktorá financovala cestovné náklady.

Martin Pál

Zadania úloh 6. Stredoeurópskej informatickej olympiády

Objednávky

Vedúci zásobovania (VZ) si utriedil všetky druhy tovaru abecedne podľa názvov na visačkách. Všetky druhy, majúce mená začínajúce rovnakým písmenom, sú uložené v rovnakom sklade (v tej istej budove) označenom týmto písmenom. Počas dňa VZ prijíma a knihuje objednávky tovaru, ktoré majú byť dodané zo skladov. Každá objednávka obsahuje iba jeden druh tovaru. VZ spracúva požiadavky v takom poradí, v akom ich dostal.

Poznáte dopredu všetky objednávky, ktoré bude dnes VZ spracovávať, ale neviete, v akom poradí. Zistite všetky možné poradia, v akých môže VZ navštíviť sklady, ak chce splniť všetky požiadavky pre daný deň jednu po druhej.

Vstup: Vstupný súbor `ORDERS.IN` obsahuje jediný riadok so všetkými označeniami požadovaných tovarov (v náhodnom poradí). Každý druh tovaru je reprezentovaný začiatočným písmenom na visačke. Sú použité iba malé písmená anglickej abecedy. Počet objednávok neprekročí 200.

Výstup: Výstupný súbor `ORDERS.OUT` má obsahovať všetky možné poradia, v ktorých môže VZ navštevovať sklady. Každý sklad je reprezentovaný jedným malým písmenom anglickej abecedy—začiatočným písmenom na visačke tovaru. Každé poradie skladov vypíšte do výstupného súboru iba raz, každé poradie na zvláštny riadok. Všetky riadky obsahujúce poradia musia byť utriedené podľa abecedy (pozri príklad). Žiadny výstupný súbor neprekročí 2 megabajty.

Príklad:

ORDERS.IN	ORDERS.OUT
`bbjd`	`bbdj`
	`bbjd`
	`bdbj`
	`bdjb`
	`bjbd`
	`bjdb`
	`dbbj`
	`dbjb`
	`djbb`
	`jbbd`
	`jbdb`
	`jdbb`

Hra s paritami

Vy a kamarát hrávate nasledujúcu hru. Váš kamarát napíše postupnosť skladajúcu sa z núl a jednotiek. Vy si vyberiete súvislú podpostupnosť (napr. podpostupnosť od tretej po piatu cifru vrátane) a spýtate sa ho, či táto podpostupnosť obsahuje párny alebo nepárny počet jednotiek. Váš priateľ odpovie na vašu otázku, a vy sa ho môžete opäť spýtať na nejakú inú podpostupnosť atď. Vašou úlohou je uhádnuť celú postupnosť cifier.

Podozrievate vášho priateľa, že nie všetky jeho odpovede sú správne a chcete ho usvedčiť z nepravdy. Rozhodli ste sa teda napísať program, ktorý vám s tým pomôže. Program dostane postupnosť vašich otázok spolu s odpoveďami, ktoré ste dostali od vášho priateľa. Cieľom tohto programu je nájsť prvú odpoveď, ktorá je dokázateľne zlá, t.j. existuje postupnosť, ktorá súhlasí s odpoveďami na všetky predchádzajúce otázky, avšak neexistuje postupnosť, ktorá súhlasí aj s touto odpoveďou.

Vstup: Prvý riadok vstupného súboru `PARITY.IN` obsahuje jedno číslo udávajúce dĺžku postupnosti núl a jednotiek. Táto dĺžka je menšia alebo rovná 1 000 000 000. V druhom riadku je jedno kladné celé číslo určujúce počet položených otázok a odpovedí na ne. Počet otázok a odpovedí na ne je menší alebo rovný 5 000. Nasledujúce riadky špecifikujú otázky a odpovede. Každý riadok obsahuje jednu otázku a odpoveď na ňu: dve celé čísla (pozícia prvej a poslednej cifry zvolenej súvislej podpostupnosti) a jedno slovo špecifikujúce odpoveď, ktoré je buď `even` pre párny počet jednotiek alebo `odd` pre nepárny počet jednotiek.

Výstup: Vo výstupnom súbore `PARITY.OUT` sa nachádza jediný riadok obsahujúci jedno celé číslo X. Číslo X udáva, že existuje postupnosť núl a jednotiek vyhovujúca prvým X paritným podmienkam, avšak neexistuje žiadna postupnosť vyhovujúca prvým $X + 1$

paritným podmienkam. Ak existuje postupnosť núl a jednotiek vyhovujúca všetkým zadaným podmienkam, bude číslo X rovné počtu všetkých položených otázok.

Príklad 1:

PARITY.IN	PARITY.OUT

`10`
`5`
`1 2 even`
`3 4 odd`
`5 6 even`
`1 6 even`
`7 10 odd`
	`3`

Príklad 2:

PARITY.IN	PARITY.OUT

`10`
`5`
`1 2 even`
`1 4 even`
`2 4 odd`
`1 10 even`
`3 10 even`
	`5`

Telefónne čísla

V dnešnom svete sa často stretávame s množstvom telefónnych čísiel, ktoré sú stále dlhšie a dlhšie. Potrebujete si takéto čísla pamätať. Jedna z metód, ako to spraviť, je priradiť číslam písmená (viď. obrázok).

1 ij	**2** abc	**3** def
4 gh	**5** kl	**6** mn
7 prs	**8** tuv	**9** wxy
	0 oqz	

Týmto spôsobom sa dá každému slovu alebo skupine slov priradiť jednoznačné číslo, teda môžete si pamätať slová namiesto čísiel. Je jasné, že to má svoje čaro, ak je možné nájsť jednoduchý vzťah medzi slovom a danou osobou. Takto si môžte zapamätať, že telefónne číslo vášho priateľa šachistu 941837296 sa dá prečítať ako WHITEPAWN a číslo vášho obľúbeného učiteľa 2855304 ako BULLDOG.

Napíšte program, ktorý nájde najkratšiu postupnosť slov (t.j. majúcu najmenší možný počet slov), ktorá zodpovedá danému číslu a danému zoznamu slov. Priradenie písmen čísliciam je popísané na obrázku hore.

Vstup: Prvý riadok vstupného súboru `PHONE.IN` obsahuje telefónne číslo, ktorého prepis máte nájsť. Číslo pozostáva z najviac 100 cifier. Druhý riadok obsahuje celkový počet slov v slovníku (maximum je 50 000). Každý z nasledujúcich riadkov obsahuje jedno slovo, ktoré pozostáva z maximálne 50 malých písmen anglickej abecedy. Celková veľkosť vstupného súboru nepresiahne 300 kilobajtov.

Výstup: Jediný riadok výstupného súboru `PHONE.OUT` obsahuje najkratšiu postupnosť slov, ktorú našiel váš program. Nasledujúce slová sú od seba oddelené jednou medzerou. Ak úloha nemá riešenie, tento riadok obsahuje text '`No solution.`' Ak existuje viac riešení majúcich minimálny počet slov, vypíšte ľubovoľné z nich.

Príklad:

PHONE.IN	PHONE.OUT
7325189087	reality our
5	
it	
your	
reality	
real	
our	

(ďalšia možnosť '`real it your`' zodpovedajúca tomu istému číslu je dlhšia)

Hra na šachovničke

Mladí programátori už od škôlky radi hrávajú nasledovnú hru. Na šachovnici s rozmermi 4 x 4 (šachovničke) je 8 bielych a 8 čiernych kameňov (šutrov), na každom políčku presne jeden šuter. Takúto konfigurácia šutrov nazývame pozícia hry. Dva šutre susedia, ak sú na políčkach, ktoré majú spoločnú hranu (nie roh). To znamená, že každý šuter má nanajvýš štyroch susedov. Jediný prípustný ťah v našej hre je výmena ľubovoľných dvoch susedných šutrov. Vašou úlohou je nájsť najkratšiu postupnosť ťahov transformujúcu danú počiatočnú pozíciu na danú koncovú pozíciu.

Vstup: Počiatočná pozícia hry je popísaná prvými 4 riadkami vstupného súboru `GAME.IN`. V každom riadku sú štyri symboly, definujúce farbu každého kameňa v riadku zľava doprava. Riadky vstupu popisujú riadky na šachovničke zhora nadol. Symbol `0` znamená biely šuter a symbol `1` znamená čierny šuter. Medzi symbolmi nie je žiadna medzera. Piaty riadok je prázdny. Nasledujúce štyri riadky popisujú koncovú pozíciu tým istým spôsobom.

Výstup: Prvý riadok výstupného súboru `GAME.OUT` obsahuje počet ťahov N. Nasledujúcich N riadkov popisuje postupnosť ťahov počas hry. Jeden riadok popisuje jeden ťah a obsahuje 4 kladné celé čísla R_1, C_1, R_2, C_2 oddelené jednou medzerou. Sú to súradnice susedných políčok pre daný ťah, t.j. políčok $[R_1, C_1]$ a $[R_2, C_2]$, kde R_1 (resp. R_2) je číslo riadku na šachovničke a C_1 (resp. C_2) je číslo stĺpca šachovničky. Riadky na šachovničke sú číslované od 1 (horný riadok) po 4 (spodný riadok) a stĺpce sú číslované od 1 (ľavý stĺpec) po 4 (pravý stĺpec), teda súradnice ľavého horného políčka sú $[1, 1]$. Ak existuje viacero najkratších postupností ťahov transformujúcich danú počiatočnú pozíciu na danú koncovú pozíciu, môžete vypísať ľubuvoľnú z nich.

Príklad:

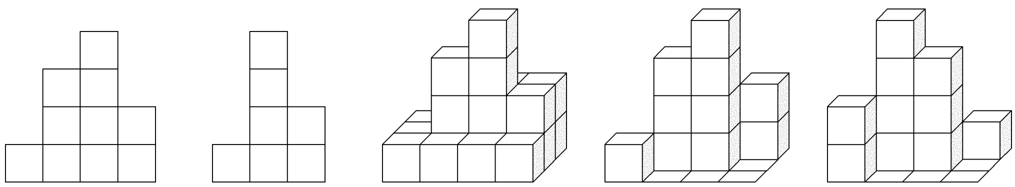
```
GAME.IN
1111
0000
1110
0010
1010
0101
1010
0101
```

`GAME.OUT` **(Jedno zo správnych riešení)**

```
4
1 2 2 2
1 4 2 4
3 2 4 2
4 3 4 4
```

Mesto z kociek

Deti sa radi hrajú s drevenými kockami. Obyčajne stavajú vysoké veže, ale malý Janko sníva o úplne iných veciach. On postaví mesto. Jeho otecko mu kúpil obdĺžnikový stolík so šírkou rovnou K kociek a dĺžkou L kociek. Janko sa rozhodol, že si ešte pred stavaním mesta nakreslí veľký projekt. Na stolík si nakreslil štvorcovú sieť $K \times L$ štvorcov. Na niektoré z týchto štvorcov chce položiť vežu skladajúcu sa z jednej alebo viacerých kociek. Ostatné štvorce budú prázdne. Pretože je stolík veľmi veľký, Jankovi sa nechce robiť plán pre každý jeden štvorec. Chce sa iba rozhodnúť, ako má vyzerať jeho mesto spredu a zboku. Nakreslil si teda dva pohľady (dvojrozmerné priemety plánovaného mesta) na papier. Na nasledujúcom obrázku si môžete pozrieť príklady týchto náčrtov a príslušné mestá z drevených kociek.



Predný priemet Bočný priemet Maximálne mesto Minimálne mesto (predný a zadný pohľad)

Jankov otecko sa obáva, že nebude mať dosť kociek na dokončenie Jankovho vysnívaného mesta. Preto od vás chce, aby ste napísali program, ktorý bude počítať minimálne a maximálne množstvo kociek, z ktorých sa dá Jankovo výsnívané mesto postaviť. Navyše, váš program má rozhodnúť, či sa to vôbec dá.

Vstup: Prvý riadok vstupného súboru `TOWN.IN` obsahuje dve kladné celé čísla K, L— šírku a dĺžku stolíka (vyjadrenú počtom kociek). Ani šírka, ani dĺžka nie je väčšia ako 100 000 kociek. Nasledujúce riadky vstupného súboru obsahujú popis predného priemetu mesta. Popis pozostáva z postupnosti výšok viditeľných budov na každom štvorčeku zľava doprava (výška je tiež meraná v kockách). V každom riadku je práve jedno číslo, teda počet riadkov popisujúcich predný priemet je rovné K—šírke stolíka. Podobne, nasledujúcich L riadkov vstupného súboru obsahuje pravý priemet mesta. Výšky veží z drevených kociek sú teraz zapísané odpredu dozadu. Môžete predpokladať, že v meste nie je žiadna budova vyššia ako 5 000 kociek. Môžete predpokladať, že maximálny počet kociek, potrebných na postavenie celého mesta, neprekročí 2 000 000 000 kociek.

Výstup: Výstupný súbor `TOWN.OUT` obsahuje jediný riadok. Ak nie je možné postaviť mesto, spĺňajúce dané priemety, vypíšte text '`No solution.`' V opačnom prípade tam vypíšte dve čísla oddelené jedinou medzerou. Prvé číslo je minimálny počet a druhé maximálny počet kociek, z ktorých môže malý Janko postaviť svoje vysnívané mesto podľa projektu.

Príklad 1:

TOWN.IN	TOWN.OUT
4 3 1 3 4 2 1 4 2	10 21

Príklad 2:

TOWN.IN	TOWN.OUT
2 2 4 1 1 3	No solution.

Okružná cesta

V Adelovciach na ostrove Zanzibar je cestovná kancelária. Jej šéf Brutus sa rozhodol ponúknuť svojím klientom, okrem mnohých iných atrakcií, prehliadku mesta. Chce na tejto atrakcii čo najviac zarobiť a preto sa rozhodol, že je dôležité nájsť najkratšiu možnú okružnú cestu. Vašou úlohou je napísať program, ktorý nájde takúto cestu.

V meste je N križovatiek očíslovaných od 1 po N a M obojsmerných ciest očíslovaných od 1 po M. Dve križovatky môžu byť spojené viacerými cestami, avšak žiadna cesta nespája žiadnu križovatku samu so sebou. Každá okružná cesta je postupnosť čísiel ciest $y_1, \ldots, y_k$, $k > 2$. Cesta y_i $(1 \leq i \leq k-1)$ spája križovatky x_i a x_{i+1} ,cesta y_k spája križovatky x_k a x_1. Čísla $x_1, \ldots, x_k$ majú byť rôzne. Dĺžka okružnej cesty je súčtom dĺžok všetkých ciest na nej, t.j. $L(y_1) + L(y_2) + \ldots + L(y_k)$, kde $L(y_i)$ je dĺžka cesty y_i $(1 \leq i \leq k)$. Váš program má nájsť takúto okružnú cestu, ktorej dĺžka je minimálna, alebo zistiť, že to nie je možné, pretože v meste neexistuje žiadna okružná cesta.

Vstup: Prvý riadok vstupného súboru `TRIP.IN` obsahuje dve celé kladné čísla: počet križovatiek $N \leq 100$ a počet ciest $M \leq 10\,000$. Každý z nasledujúcich M riadkov popisuje jednu cestu. Obsahuje 3 kladné celé čísla: číslo prvej križovatky, číslo druhej križovatky a dĺžku cesty, ktorá ich spája (kladné celé číslo menšie ako 500).

Výstup: Výstupný súbor `TRIP.OUT` sa skladá z jediného riadku. Tento riadok obsahuje buď reťazec '`No solution.`' v prípade, že neexistuje žiadna okružná cesta, alebo obsahuje čísla všetkých križovatiek na najkratšej okružnej ceste v poradí, v akom sa prechádzajú (t.j. čísla x_1 až x_k z našej definície okružnej cesty), oddelené jedinou medzerou. Ak existuje viacero okružných ciest s minimálnou dĺžkou, môžete vypísať ľubovoľnú z nich.

Príklad 1:

`TRIP.IN`
```
5 7
1 4 1
1 3 300
3 1 10
1 2 16
2 3 100
2 5 15
5 3 20
```

`TRIP.OUT` **(Jedna zo správnych odpovedí)**
```
1 3 5 2
```

Príklad 2:

`TRIP.IN`
```
4 3
1 2 10
1 3 20
1 4 30
```

`TRIP.OUT`
```
No solution.
```

11. Medzinárodná informatická olympiáda

V dňoch 9. – 16. októbra 1999 sa v Turecku v meste Antalya uskutočnil 11. ročník Medzinárodnej informatickej olympiády (IOI). Zúčastnilo sa na ňom 252 súťažiacich zo 65 krajín. Reprezentačné družstvo Slovenska bolo vybrané na základe výberového sústredenia, ktoré sa konalo v dňoch 6. – 11. 6. 1999 na Matematicko-fyzikálnej fakulte Univerzity Komenského. Výberového sústredenia sa zúčastnilo jedenásť najúspešnejších riešiteľov celoštátneho kola MO kategórie P. Štyria najúspešnejší účastníci tvorili družstvo na IOI, druhí štyria reprezentovali Slovensko na Stredoeurópskej informatickej olympiáde. Výsledky výberového sústredenia:

	meno	body		meno	body
1	Michal Forišek	408.1	7	Vladimír Koutný	297.7
2	Richard Kráľovič	369.3	8	Michal Breznický	291.7
3	Ján Senko	341.8	9	Jozef Šiška	269.5
4	Ján Lunter	312.5	10	Peter Košinár	259.4
5	Ján Oravec	311.4	11	Tomáš Kezes	212.8
6	Dávid Pál	304.3			

Slovensko reprezentovali Michal Forišek z gymnázia Popradské nábrežie, Poprad, Richard Kráľovič z gymnázia Novohradská, Bratislava, Ján Lunter z gymnázia Jozefa Gregora Tajovského, Banská Bystrica a Ján Senko z SPŠE Komenského, Košice. Vedúcou výpravy bola RNDr. Gabriela Andrejková z Prírodovedeckej fakulty Univerzity P.J. Šafárika Košice, pedagogickým vedúcim Martin Pál z Matematicko-fyzikálnej fakulty Univerzity Komenského.

Súťaž sa skladala z dvoch súťažných dní. Každý deň súťažiaci riešili tri úlohy algoritmického charakteru. Tento rok sa prípravy zhostili tureckí organizátori a to veľmi dôkladne – úlohy boli oproti minulým ročníkom výrazne ťažšie. Ich náročnosť bola umocnená aj náročnými testovacími dátami, takže aj pomerne efektívne programy získavali iba málo bodov.

Novinkou bol aj spôsob testovania. Testovanie súťažných programov neprebiehalo za účasti vedúceho výpravy súťažiaceho, ako po minulé roky, ale neverejne. Vedúci výpravy dostali k dispozícii výsledky testovania, programy súťažiacich, ako aj testovacie vstupy a výstupy pre jednotlivé úlohy a mali tri hodiny času na zistenie prípadných nezrovnalostí pri testovaní a na prípadné podanie protestu. Bohužiaľ, organizátori nedali k dispozícii použitý testovací software, a tak mali vedúci výpravy so súťažiacimi k dispozícii len pomerne ťažkopádne spôsoby ladenia.

Tento rok sa nám síce nepodarilo obhájiť prvé miesto z minulého roka, avšak tohtoročný výsledok – dve zlaté a jedna bronzová medaila – je uspokojujúci. Konkrétne výsledky

meno	body	
Michal Forišek	418	zlato
Richard Kráľovič	404	zlato
Ján Senko	210	bronz
Ján Lunter	107	–

nás radia v neoficiálnom hodnotení na piatu až ôsmu priečku (podľa metodiky bodovania) v neoficiálnom hodnotení krajín. Naši tradiční priatelia a súperi Česi (jedna zlatá, tri bronzové) a Poliaci (zlato, dve striebra a bronz) sa umiestnili porovnateľne s nami. Na prvých miestach sa umiestnili Vietnam (tri zlaté, jedna strieborná), Rusko (tri zlaté, jedna bronzová) a Čína (dve zlaté, dve strieborné medaily). Nám môže byť trochu ľúto, že Ján Lunter nezískal medailu a že Jánovi Senkovi sa nepodarilo zopakovať zlatú medailu z minulého roka.

Martin Pál

Zadania úloh 11. Medzinárodnej informatickej olympiády

Obchodík s kvetmi

Chcete usporiadať výklad vášho obchodu s kvetmi najlepším možným spôsobom. Máte F rôznych kytíc kvetov a najmenej toľko váz v rade. Vázy sú pripevnené na policu a sú číslované od 1 po V, kde V je počet váz, zľava doprava tak, že váza 1 je najľavejšia a váza V najpravejšia. Kytice sa dajú premiestňovať a sú jednoznačne identifikované celými číslami od 1 po F. Tieto *id*-čísla majú význam: určujú požadované poradie kytíc v rade váz tak, že kytica i musí byť vo váze naľavo od kytice j práve vtedy, keď $i < j$. Nech napríklad máme kyticu azaliek ($id = 1$), kyticu begónií ($id = 2$) a kyticu carafiátov ($id = 3$). Kytice musíme poukladať do váz, pričom musíme dávať pozor, aby ich *id*-čísla boli v správnom poradí. Kytica azaliek musí byť naľavo od kytice begónií a begónie musia byť naľavo od carafiátov. V prípade, že váz je viac ako kytíc, niektoré vázy ostanú prázdne. V jednej váze môže byť najviac jedna kytica.

Vázy (rovnako ako kytice) majú rôzne charakteristiky. Teda strčenie kytice do vázy má svoju estetickú hodnotu vyjadrenú celým číslom. Estetické hodnoty sú vyjadrené v tabuľke nižšie. Ak váza ostane prázdna, jej estetická hodnota bude rovná 0.

kytice	vázy 1	2	3	4	5
1 (azalky)	7	23	-5	-24	16
2 (begónie)	5	21	-4	10	23
3 (carafiáty)	-21	5	-4	-20	20

Podľa tabuľky napríklad azalky budú najlepšie vyzerať vo váze 2, ale vo váze 4 budú vyzerať otrasne.

Na dosiahnutie najlepšieho efektu máme maximalizovať súčet estetických hodnôt pre usporiadanie pri zachovaní požadovaného poradia kytíc. Ak existuje viac než jedno usporiadanie s maximálnou hodnotou súčtu, vypíšte ľubovoľné z nich (práve jedno).

Predpoklady:

- $1 \leq F \leq 100$, kde F je počet kytíc kvetov. Kytice sú očíslované od 1 po F.
- $F \leq V \leq 100$, kde V je počet váz.
- $-50 \leq A_{ij} \leq 50$, kde A_{ij} je estetická hodnota získaná strčením i-tej kytice do j-tej vázy.

Vstup: Vstupný súbor je textový a volá sa `FLOWER.INP`.

- Prvý riadok obsahuje dve čísla: F, V.
- Nasledujúcich F riadkov: Každý z týchto riadkov obsahuje V celých čísel tak, že A_{ij} je dané ako j-te číslo na riadku $(i+1)$ vstupného súboru.

Výstup: Výstupný súbor je textový súbor s menom `FLOWER.OUT` obsahujúci 2 riadky:

- Prvý riadok bude obsahovať súčet estetických hodnôt vášho usporiadania.
- Druhý riadok musí obsahovať usporiadanie ako zoznam F čísel tak, že k-te číslo na tomto riadku určuje vázu, do ktorej je vložená k-ta kytica.

Príklad:

```
FLOWER.INP
3 5
7 23 -5 -24 16
5 21 -4 10 23
-21 5 -4 -20 20
```

```
FLOWER.OUT
53
2 4 5
```

Vyhodnocovanie: Váš program môže bežať maximálne 2 sekundy. Body za čiastočne správne výstupy nie sú udeľované.

Skryté kódy

Je daná množina kódových slov a text. Predpokladajme, že text obsahuje správu, vytvorenú vnorením kódových slov doňho ďábelským (a možno nejednoznačným) spôsobom.

Kódové slová a text sú postupnosti vytvorené len z veľkých a malých písmen anglickej abecedy. Rozlišujeme malé a veľké písmená. *Dĺžka* kódového slova je definovaná obvyklým spôsobom. Napríklad kódové slovo `ALL` má dĺžku 3.

Písmená kódového slova sa nemusia vyskytovať v danom texte hneď po sebe. Napríklad kódové slovo `ALL` sa vždy vyskytuje v texte v postupnosti tvaru `A`u`L`v`L`, kde u a v označujú ľubovoľné (možno prázdne) postupnosti písmen. Hovoríme, že `A`u`L`v`L` je *pokrývajúca postupnosť* pre `ALL`. Vo všeobecnosti pokrývajúca postupnosť pre kódové slovo je definovaná ako súvislá podpostupnosť textu taká, že prvé a posledné písmeno podpostupnosti sú rovnaké ako v kódovom slove a je možné získať z nej kódové slovo vymazaním niektorých (možno žiadnych) písmen podpostupnosti. Poznamenajme, že kódové slovo sa môže vyskytovať v jednej alebo viacerých pokrývajúcich postupnostiach alebo sa v texte vôbec nemusí vyskytovať. Jedna pokrývajúca postupnosť môže byť pokrývajúcou postupnosťou pre viac ako jedno kódové slovo.

Pokrývajúca postupnosť je identifikovaná svojou štartovacou pozíciou (pozícia prvého písmena) a koncovou pozíciou (pozícia posledného písmena) v texte (prvé písmeno textu je pozícia 1). Hovoríme, že dve pokrývajúce postupnosti, povedzme c_1 a c_2, sa *neprerývajú*, ak štartovacia pozícia c_1 je väčšia než (>) koncová pozícia c_2 alebo naopak. Inak hovoríme, že dve pokrývajúce postupnoti sa *prekrývajú.*

Kvôli získaniu skrytej správy v texte sa podujmete nájsť riešenie. Riešenie je množina položiek, z ktorých každá obsahuje kódové slovo a pokrývajúcu postupnosť pre toto kódové slovo tak, že sú splnené nasledujúce podmienky:

a) Žiadne dve pokrývajúce postupnosti sa navzájom neprekrývajú
b) Pokrývajúca postupnosť nepresiahne dĺžku 1 000
c) Súčet dĺžok kódových slov je maximálny (každá z položiek prispieva k súčtu dĺžkou kódového slova, ktoré obsahuje)

V prípade, že existuje viac než jedno riešenie, vypíšte ľubovoľné (jedno) z nich.

Predpoklady:

- $1 \leq N \leq 100$, kde N je počet kódových slov.
- Maximálna dĺžka kódového slova je 100 písmen.
- $1 \leq$ dĺžka daného textu $\leq 1\,000\,000$ písmen.
- Hovoríme, že pokrývajúca postupnosť c pre kódové slovo w je sprava minimálna, ak žiadny vlastný prefix c (vlastný prefix c je súvislá podpostupnosť c začínajúca jej prvým písmenom kratšia ako c) je pokrývajúca postupnosť pre w. Napríklad pre kódové slovo `ALL`, `AAALAL` je sprava minimálna pokrývajúca postupnosť, pričom `AAALALAL` je tiež pokrývajúca, ale nie je sprava minimálna.
  Je zaručené, že v danom texte
  a) pre každú pozíciu v texte, počet sprava minimálnych postupností obsahujúcich túto pozíciu neprekročí 2 500
  b) počet sprava minimálnych postupností neprekročí 10 000

Vstup: Vstupom sú dva textové súbory: `WORDS.INP` a `TEXT.INP`. Súbor `WORDS.INP` obsahuje zoznam kódových slov a súbor `TEXT.INP` obsahuje text.

- Prvý riadok súboru `WORDS.INP` obsahuje hodnotu N. Každý z nasledujúcich N riadkov obsahuje kódové slovo, ktoré je postupnosťou písmen bez medzier. Kódové slová sú identifikované ich poradím výskytu v súbore `WORDS.INP`: celé čísla 1 až N slúžia ako identifikačné čísla pre kódové slová.
- Súbor `TEXT.INP` obsahuje postupnosť písmen (ukončenú znakom *end-of-line* nasledovaným znakom *end-of-file*). Tento súbor neobsahuje medzery.

Odporúčania pre programátorov v Pascale:

Radíme vám deklarovať vstupný súbor ako typ `text` namiesto typového súboru kvôli efektivite.

Výstup: Výstup musí byť textový súbor s menom `CODES.OUT`.

- Prvý riadok bude obsahovať súčet získaný vaším riešením.
- Každý z nasledujúcich riadkov bude určovať jednu položku vášho riešenia: riadok pozostáva z troch celých čísel i, s, e. Pritom i je identifikačné číslo kódového slova, ktoré sa vyskytuje v pokrývajúcej postupnosti určenej štartovacou pozíciou s a koncovou pozíciou e. Poradie výstupných riadkov, ktoré nasledujú za prvým riadkom, nie je dôležité.

Príklad:

WORDS.INP	CODES.OUT
4	12
RuN	2 9 21
RaBbit	1 4 7
HoBbit	1 24 28
StoP	

```
TEXT.INP
StXRuYNvRuHoaBbvizXztNwRRuuNNP
```

(Poznámka: Skrytá správa, ktorá sa dá získať z riešenia, je "`RuN RaBbit RuN`". (alternatívne riešenie môže byť "`RuN HoBbit RuN`"). Pamätajte na to, že správa sa nemá objaviť na výstupe.)

Vyhodnocovanie: Váš program môže bežať maximálne 10 sekúnd. Body za čiastočne správne výstupy nie sú udeľované.

Podzemné mesto

Ste uväznení v jednom podzemnom meste Cappadocie. Potulovaním sa v tme náhodou nájdete mapu mesta. Nanešťastie, na mape nie je žiadna značka, ktorá by vám prezradila, kde sa práve nachádzate. Vašou úlohou je zistiť to skúmaním mesta.

Mapa mesta je obdĺžniková mriežka s jednotkovými štvorcami. Každý štvorec je buď otvorený, označený písmenom '`O`', alebo je časťou veľkého múru a je označený písmenom '`W`'. Severný smer je na mape tiež označený. Našťastie máte poruke kompas, takže viete mapu správne orientovať. Na začiatku sa nachádzate na otvorenom štvorci.

Všetko začína volaním procedúry (alebo funkcie) `start` bez argumentov. Mesto môžte skúmať použitím procedúr (alebo funkcií) `look` a `move`.

Môžte klásť otázky formou volania funkcie `look(`*dir*`)`, kde *dir* označuje smer, v ktorom sa pozeráte, čo môže byť jeden zo znakov '`N`', '`S`', '`E`' alebo '`W`' označujúcich sever, juh, východ resp. západ. Predpokladajme, ža argument `dir` je '`N`'. Odpoveďou bude písmeno '`O`', ak štvorec na sever od vás je otvorený a '`W`', ak je tam weľký múr. Podobne, je možné pozrieť sa a získať informáciu o iných susedných štvorcoch.

Môžte urobiť krok na jeden zo susedných štvorcov volaním `move(`*dir*`)`, *dir* označuje smer vášho kroku ako je popísané vyššie. Môžte urobiť krok len na otvorený štvorec. Snaha pohnúť sa na weľký múr by bola krutou chybou. Je možné dosiahnuť ľubovoľný otvorený štvorec z ľubovoľného iného otvoreného štvorca.

Vašu úlohou je nájsť pozíciu otvoreného štvorca, na ktorom ste našli mapu chodením a pozeraním na čo najmenší počet volaní `look(dir)`. Keď nájdete pozíciu, musíte to oznámiť volaním `finish(`x`,`y`)`, kde x je horizontálna (západo-východná) súradnica a y je vertikálna (juho-severná) súradnica pozície.

Predpoklady:

- $3 \leq U \leq 100$, kde U je šírka mapy, t.j. dĺžka v počte štvorcov v horizontálnom smere (t.j. západo-východnom).

- $3 \le V \le 100$, kde V je výška mapy, t.j. dĺžka v počte štvorcov vo vertikálnom smere (t.j. juho-severnom).
- Mesto je obkolesené weľkým múrom, ktorý je zakreslený na mape.
- Juho-západný roh mesta má súradnice $(1,1)$ a severo-východný roh má súradnice (U,V).

Vstup: Vstupom je textový súbor s menom `UNDER.INP`.

- Prvý riadok obsahuje dve čísla: U, V.
- Každý z nasledujúcich V riadkov obsahuje riadok mapy v horizontálnom smere. Každý riadok pozostáva z U znakov, takže x-tý znak na $(V-y+2)$-tom riadku vstupného súboru obsahuje informáciu o pozícii (x,y) na mape: Je to buď písmeno 'W' označujúce weľký múr, alebo písmeno 'O' označujúce otvorený štvorec. Dáta na týchto riadkoch neobsahujú žiadne medzery.

Výstup: Žiadny výstupný súbor nebude vytvorený. Výsledok nájdený vaším programom musí byť oznámený volaním `finish(`x`,`y`)`.

Príklad:

```
UNDER.INP
    5 8
    WWWWW
    WWWOW
    WWWOW
    WOOOW
    WOWOW
    WOOWW
    WWOOW
    WWWWW
```

y (N)

x (E)

Možná interakcia, ktorá skončí správnym volaním `finish`:

`start()`	
`look('N')`	`'W'`
`look('E')`	`'O'`
`move('E')`	
`look('E')`	`'W'`
`finish(3,5)`	

Inštrukcie pre programátorov v Pascale: Vo vašom zdrojovom súbore máte mať:
`uses undertpu;`

Tento unit (tpu) poskytuje nasledujúce procedúry a funkcie:

```
procedure start; { musi byt volana prva }
function look (dir:char):char;
procedure move (dir:char);
procedure finish (x,y:integer); { musi byt volana posledna }
```

Inštrukcie pre programátorov v C/C++: Vo vašom zdrojovom súbore máte mať:
`#include "under.h"`

Tento hlavičkový súbor poskytuje nasledujúce deklarácie:

```
void start (void); /* musi byt volana prva */
char look (char);
void move (char);
void finish (int,int); /* musi byt volana posledna */
```

Takisto vytvoriť projekt nazvaný `under`, ktorý by mal obsahovať váš program a knižnicu pre interakcie s názvom `underobj.obj`. Na to potrebujete použiť ponuku menu IDE *project* a vybrať položku *open* na vytvorenie projektu a použiť *add item* na pripojenie vášho zdrojového súboru (`under.c` alebo `under.cpp`) a súboru `underobj.obj`. Použite voľbu kompilátora **LARGE memory model**. (Pozor: toto je zmena oproti pamäťovému modelu spomínanému v *Rules of Contest*)

Vyhodnocovanie: Váš program môže bežať maximálne 5 sekúnd.

Na získanie plného počtu bodov, A, za daný testovací vstup, počet volaní `look`, x, musí byť menší alebo rovný číslu M, určenému vyhodnocovacím programom. Poznamenajme, že M je zvolené väčšie ako (>) minimum. Špeciálne, M je nezávislé od poradia skúšania smerov v smere alebo proti smeru hodinových ručičiek. Môžte získať čiastočný počet bodov, ak počet volaní look je väčší než (>) M, ale menší ako (<) dvojnásobok M. Body, ktoré dostanete, sú vypočítané zaokrúhlením na najbližšie celé číslo hodnoty získané podľa nasledujúceho vzťahu:

$$\begin{array}{rl} A & \text{ak } x \le M \\ \dfrac{A(2M - x)}{M} & \text{ak } M < x < 2M \\ 0 & \text{ak } x \ge 2M \end{array}$$

Za nesprávne správanie vášho programu získate 0 bodov. Nesprávne správanie v tejto úlohe sú nasledujúce:

- Volanie knižničnej procedúry (alebo funkcie) s neakceptovateľným argumentom, napríklad znakom, ktorý neoznačuje smer.
- Pokus pohnúť sa do weľkého múru.
- Neschopnosť dodržať inštrukcie.

Ako vyskúšať váš program: Vytvorte textový súbor s menom `PLACE.TXT` obsahujúci pozíciu mapy. Spustite váš program. Získate výsledok v súbore `RESULT.TXT`.

Súbor `PLACE.TXT` má obsahovať jediný riadok obsahujúci horizontálne a vertikálne súradnice mapy. Potrebujete vytvoriť váš vlastný súbor vstupných dát `UNDER.INP`. Súbor `RESULT.TXT` bude obsahovať dva riadky. Prvý riadok bude obsahovať argumenty x a y z vášho volania `finish(`x`,`y`)`. V druhom riadku bude správa v tvare "`You used look nnn times`". Poznamenajme, že táto skúška je pre kontrolu kompatiblity vášho programu s knižnicou. Nemá nič do činenia s korektnosťou vášho riešenia.

Semafóry

V meste Dingilville je doprava usporiadaná neobvyklým spôsobom. Sú tam ulice a križovatky, ktoré ich spájajú. Medzi ľubovoľnými dvomi križovatkami je najviac jedna ulica. Žiadna ulica nespája križovatku samu so sebou. Čas potrebný na prejdenie ulice je rovnaký pre oba smery. Na každej križovatke je semafór, na ktorom svieti v každom okamihu modré alebo purpurové svetlo. Farby na semafóre sa menia periodicky: Modrá svieti určitú dobu, potom purpurová určitú (nie nutne tú istú) dobu atď. Prejsť z križovatky na križovatku po ulici môže vozidlo vtedy a len vtedy, ak svetlá na oboch križovatkách v momente jeho odchodu z prvej križovatky na druhú sú rovnakej farby. Presnejšie, v okamihu tesne po odchode vozidla z križovatky musia mať obe svetlá rovnakú farbu. Vozidlá môžu čakať na križovatkách. Máte k dispozícii mapu mesta, na ktorej je

- pre každú ulicu čas na jej prejdenie (celé číslo),
- doby trvania každej z dvoch farieb na každej križovatke (celé čísla),
- počiatočná farba svetla a čas zostávajúci do prvej zmeny farby na každej križovatke.

Vašou úlohou je nájsť cestu z danej počiatočnej križovatky do danej koncovej križovatky, ktorej prejdenie trvá minimálny čas. Cesta má začať v okamihu spustenia premávky. Ak existuje viacero takýchto ciest, vypíšte len jednu z nich.

Predpoklady:

- $2 \le N \le 300$, kde N je počet križovatiek. Križovatky sú očíslované číslami od 1 po N. Tieto čísla sa nazývajú identifikačné čísla.
- $1 \le M \le 14\,000$, kde M je počet ulíc.
- $1 \le l_{ij} \le 100$, kde l_{ij} je čas potrebný na prejdenie cesty vedúcej z križovatky i na križovatku j.
- $1 \le t_{ic} \le 100$, kde t_{ic} je doba trvania farby c na semafóre na križovatke i. Index c je buď B pre modrú alebo P pre purpurovú.
- $1 \le r_{ic} \le t_{ic}$, kde r_{ic} je zvyšujúci čas pre počiatočnú farbu na križovatke i.

Vstup: Vstupom je textový súbor s menom `LIGHTS.INP`.

- Prvý riadok obsahuje dve čísla: identifikačné číslo počiatočnej križovatky a identifikačné číslo cieľovej križovatky.
- Druhý riadok obsahuje dve čísla: N, M.
- Nasledujúcich N riadkov obsahuje informáciu o N križovatkách. $(i+2)$-hý riadok vstupného súboru obsahuje informáciu o i-tej križovatke: C_i, r_{ic}, t_{iB}, t_{iP}, kde C_i je buď '`B`' alebo '`P`', určujúce počiatočnú farbu semafóru na i-tej križovatke.
- Posledných M riadkov obsahuje informáciu o M uliciach. Každý riadok má tvar i, j, l_{ij}, kde i a j sú identifikačné čísla križovatiek, ktoré sú spojené touto cestou.

Výstup: Výstupom musí byť textový súbor s menom `LIGHTS.OUT`.

Ak cesta existuje:

- Prvý riadok bude obsahovať čas, ktorý je potrebný na prejdenie časovo minimálnej cesty z počiatočnej do cieľovej križovatky.
- Druhý riadok bude obsahovať zoznam križovatiek, ktoré ležia na vami nájdenej časovo minimálnej ceste. Vypíšte križovatky do výstupného súboru v poradí, v akom sa vyskytujú na ceste. To znamená, že prvé celé číslo v tomto riadku je identifikačné číslo prvej križovatky a posledné číslo je identifikačné číslo poslednej križovatky.

Ak cesta neexistuje:

- Jediný riadok obsahujúci číslo 0.

Príklad:

```
LIGHTS.INP
1 4
4 5
B 2 16 99
P 6 32 13
P 2 87 4
P 38 96 49
1 2 4
1 3 40
2 3 75
2 4 76
3 4 77
```

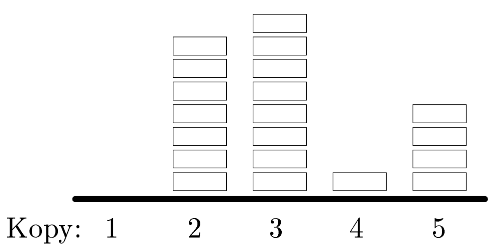
```
LIGHTS.OUT
127
1 2 4
```

Vyhodnocovanie: Váš program môže bežať maximálne 2 sekundy. Body za čiastočne správne výstupy nie sú udeľované.

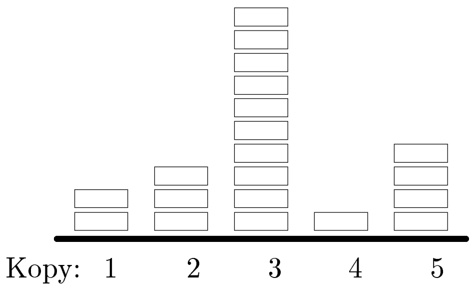
Kopy

Hra pre jedného hráča sa hrá s N kopami v rade, každá z nich obsahuje nula alebo viac kameňov (viď obr. 32). Kopy sú očíslované od 1 po N. V jednom ťahu si zvolíte kopu, napríklad p, a číslo, napríklad m. Z kopy p je následne prenesených m kameňov na každú s ňou susediacich kôp. Pozri príklad na obrázku 33 Kopa p má dvoch susedov $p-1$ a $p+1$, ak $1 < p < N$, suseda 2, ak $p = 1$, a suseda $N-1$, ak $p = N$. Aby bolo možné urobiť ťah, kopa p musí mať aspoň $2m$ kameňov, ak má dvoch susedov, a aspoň m kameňov, ak má len jedného suseda.

Cieľom hry je vyrovnať všetky kopy, t.j. dosianuť, aby mali všetky rovnaký počet kameňov na čo najmenší možný počet ťahov. V prípade, že existuje viac než jedno riešenie, vypíšte len jedno z nich.



Obr. 32: Päť kôp s 0, 7, 8, 1 a 4 kameňmi



Obr. 33: Tieto kopy po ťahu: $p = 2$, $m = 2$

Predpoklady:

- Je zaručené, že je možné vyrovnať kopy na nie viac ako 10 000 ťahov.
- $2 \leq N \leq 200$
- $0 \leq C_i \leq 2\,000$, kde C_i je počet kameňov v kope i na začiatku hry ($1 \leq i \leq N$).

Vstup: Vstupom je textový súbor s menom `FLAT.INP`, obsahujúci dva riadky.

- Prvý riadok: N
- Druhý riadok: obsahuje N celých čísel, i-te z nich je hodnota C_i.

Výstup: Výstupom je textový súbor `FLAT.OUT`.

- Prvý riadok: počet ťahov: (Toto číslo označme M)
- Každý z nasledujúcich M riadkov obsahuje dve celé čísla reprezentujúce ťah: p, m.

Ťahy vo výstupnom súbore musia byť vypísané v poradí, v akom sa majú vykonať, teda váš prvý ťah bude zapísaný v druhom riadku výstupného súboru.

Príklad:

FLAT.INP	FLAT.OUT
5	5
0 7 8 1 4	5 2
	3 4
	2 4
	3 1
	4 2

Vyhodnocovanie: Váš program môže bežať maximálne 3 sekundy.

Na získanie plného počtu bodov A za daný testovací vstup, počet vašich ťahov x musí byť menší alebo rovný ako číslo B, určené vyhodnocovacím programom. Číslo B nie je nutne minimálne. V skutočnosti, pre testovací vstup je B zvolené v závislosti od počtu ťahov podľa jednoduchej stratégie bez nadbytočných ťahov a v závisloti od priemerného počtu kameňov v kopách. Môžete získať čiastkové body. Počet bodov je vypočítaný zaokrúhlením na najbližšie celé číslo podľa nasledujúceho vzťahu:

$$\begin{array}{rl} A & \text{ak } x \le B \\ \dfrac{2A(\frac{3}{2}B - x)}{B} & \text{ak } B < x < \frac{3}{2}B \\ 0 & \text{ak } x \ge \frac{3}{2}B \end{array}$$

Pás zeme

Obyvatelia Dinginville hľadajú pozemok na stavbu letiska. K dispozícii je mapa kraja. Mapa kraja je obdĺžniková mriežka z jednotkových štvorcov, identifikovaných dvojicou súradníc (x, y), kde x je vodorovná a y zvislá súradnica. Nadmorské výšky jednotlivých štvorcov sú zakreslené na mape.

Vašou úlohou je nájsť obdĺžnikovú oblasť s maximálnou možnou plochou (t.j. obdĺžnikovú oblasť obsahujúcu najväčší možný počet štvorcov) takú, že:

a) rozdiel výšok medzi najvyšším a najnižším štvorcom v oblasti nepresahuje daný limit C a zároveň

b) šírka (t.j. počet štvorcov v západovýchodnom smere) je najviac 100.

V prípade, že existuje viacero takýchto oblastí, vypíšte len jednu z nich.

Predpoklady:

- $1 \le U \le 700$, $1 \le V \le 700$, kde U a V označujú rozmery mapy. Presnejšie, U je počet štvorcov v západo-východnom smere, V v juho-severnom smere.

- $0 \leq C \leq 10$
- $-30,000 \leq H_{xy} \leq 30\,000$, kde celé číslo H_{xy} je výška štvorca so súradnicami (x, y),
- $1 \leq x \leq U$, $1 \leq y \leq V$.
- Juhozápadný roh mapy má súradnice $(1, 1)$, severovýchodný roh má súradnice (U, V)

Vstup: Vstup je textový súbor s názvom `LAND.INP`.

- Prvý riadok obsahuje tri celé čísla U, V a C.
- Každý z nasledujúcich V riadkov obsahuje celé čísla H_{xy} pre $x = 1, \ldots, U$. Presnejšie, H_{xy} sa vyskytuje ako x-té číslo na riadku $(V - y + 2)$.

Výstup: Výstup musí byť texový súbor s názvom `LAND.OUT` pozostávajúci z jedného riadku, ktorý obsahuje štyri celé čísla určujúce nájdenú oblasť: $Xmin$, $Ymin$, $Xmax$, $Ymax$, kde $(Xmin, Ymin)$ sú súradnice juhozápadného rohu pozemku a $(Xmax, Ymax)$ sú súradnice severovýchodného rohu oblasti.

Príklad:

```
LAND.INP
10 15 4
41 40 41 38 39 39 40 42 40 40
39 40 43 40 36 37 35 39 42 42
44 41 39 40 38 40 41 38 35 37
38 38 33 39 36 37 32 36 38 40
39 40 39 39 39 40 40 41 43 41
39 40 41 38 39 38 39 39 39 42
36 39 39 39 39 40 39 41 40 41
31 37 36 41 41 40 39 41 40 40
40 40 40 42 41 40 39 39 39 39
42 40 44 40 38 40 39 39 37 41
41 41 40 39 39 40 41 40 39 40
47 45 49 43 43 41 41 40 39 42
42 41 41 39 40 39 42 40 42 42
41 44 49 43 46 41 42 41 42 42
45 40 42 42 46 42 44 40 42 41
```

```
      41 40 41 38 39 39 40 42 40 40
      39 40 43 40 36 37 35 39 42 42
      44 41 39 40 38 40 41 38 35 37
      38 38 33 39 36 37 32 36 38 40
      39 40 39|39 39 40 40 41|43 41
      39 40 41|38 39 38 39 39|39 42
      36 39 39|39 39 40 39 41|40 41
      31 37 36|41 41 40 39 41|40 40
      40 40 40|42 41 40 39 39|39 39
      42 40 44|40 38 40 39 39|37 41
      41 41 40|39 39 40 41 40|39 40
      47 45 49 43 43 41 41 40 39 42
 y    42 41 41 39 40 39 42 40 42 42
(N)   41 44 49 43 46 41 42 41 42 42
      45 40 42 42 46 42 44 40 42 41
        x (E)
```

```
LAND.OUT
4 5 8 11
```

Vyhodnocovanie: Váš program môže bežať maximálne 60 sekúnd. Body za čiastočne správne výstupy nie sú udeľované.

Korešpondenčný seminár SK MO

V 48. ročníku matematickej olympiády SK MO prebiehal pre najúspešnejších olympionikov predchádzajúceho ročníka MO zo Slovenska korešpondenčný seminár SK MO. Tento korešpondenčný seminár vznikol už v 24. ročníku MO preto, aby bolo umožnené venovať individuálnu starostlivosť aj tým študentom, ktorí nenavštevovali triedy so zameraním na matematiku. V súčasnosti, pretože existuje veľké množstvo iných matematických korešpondenčných seminárov (napríklad krajských, ktorým je venovaná samostatná kapitola), a pretože počet škôl so zameraním na matematiku stúpol, seminár SK MO sa zameriava na zlepšenie prípravy všetkých študentov, ktorí preukázali svoje schopnosti v predchádzajúcich ročníkoch MO. Keďže úlohy tohoto seminára svojou náročnosťou prevyšujú akúkoľvek inú matematickú súťaž pre stredoškolákov, seminár sa stáva dôležitou súčasťou prípravy aj na medzinárodnú matematickú olympiádu. V 44. ročníku MO bol KS SK MO prvýkrát zorganizovaný samostatne na Slovensku. Pozostáva tradične z piatich sérií po sedem úloh. Do riešenia sa v tomto ročníku zapojilo 16 študentov.

Korešpondenčný seminár viedol *Eugen Kováč* a opravovanie zabezpečovali študenti a pracovníci MFF UK (všetko bývalí olympionici).

Celkové poradie KS SK MO 1998/99

1. *Peter Novotný*, 4 Gymnázium Veľká Okružná, Žilina, 90,5 bodu;
2. *Tomáš Jurík*, 3 Gymnázium Poštová, Košice, 73,5 bodu;
3. *Martin Hriňák*, 4 Gymnázium Alejová, Košice, 71 bodov;
4. *Miroslava Sotáková*, 3 Poštová, Košice, 55,5 bodu;
5. *Peter Májek*, 3 Gymnázium J. Hronca, Bratislava, 53 bodov;
   Katarína Quittnerová, 1 Gymnázium Bilíkova, Bratislava, 53 bodov.

Uvádzame všetky príklady tohto ročníka súťaže spolu s riešeniami, prevažne študentskými. Príklady boli vyberané z príkladov zo jury MMO a z národných olympiád, či iných súťaží týchto krajín: Poľsko, Rakúsko, Kanada, Chorvátsko, Ukrajina, Bielorusko, Bulharsko.

Zadania súťažných úloh KS SK MO

Prvá séria

1.1 Nech n je nepárne prirodzené číslo. Predpokladajme, že celé nezáporné čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ sú riešením nasledujúcej sústavy rovníc:

$$\begin{aligned}(x_2 - x_1)^2 + 2(x_2 + x_1) + 1 &= n^2\,,\\ (x_3 - x_2)^2 + 2(x_3 + x_2) + 1 &= n^2\,,\\ &\vdots\\ (x_1 - x_n)^2 + 2(x_1 + x_n) + 1 &= n^2\,.\end{aligned}$$

Dokážte, že $x_1 = x_n$ alebo existuje j $(1 \leqq j \leqq n-1)$ také, že $x_j = x_{j+1}$.

(Polish–Austrian comp. 93/94)

1.2 Nech n je prirodzené číslo a nech P_0 je pevný vrchol pravidelného $(n+1)$-uholníka. Ostatné jeho vrcholy označíme v ľubovoľnom poradí P_1, P_2, ..., P_n. Každej strane $(n+1)$-uholníka priradíme prirodzené číslo nasledujúcim spôsobom: ak jej koncovými vrcholmi sú P_i a P_j, tak jej priradíme číslo $|i-j|$. Nech S je súčet všetkých čísel priradených stranám $(n+1)$-uholníka. (Zrejme S záleží od poradia označenia vrcholov.)
a) Aká je (pri pevnom n) najmenšia možná hodnota súčtu S?
b) Pre koľko rôznych poradí označenia vrcholov sa táto minimálna hodnota nadobúda?

(Polish–Austrian comp. 93/94)

1.3 V rovine sú dané dve rôzne rovnobežné priamky k, l a kružnica, ktorá nemá s priamkou k spoločný bod. Z bodu A ležiaceho na priamke k zostrojíme dotyčnice k danej kružnici, ktoré pretínajú priamku l v bodoch B, C. Nech m je priamka prechádzajúca bodom A a stredom úsečky BC. Dokážte, že všetky takto získané priamky m (odpovedajúce rôznym výberom bodu A) prechádzajú jedným pevným bodom.

(Poľsko, MO 93/94)

1.4 Nájdite všetky trojice racionálnych čísel x, y, z takých, že čísla

$$x+y+z, \qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}, \qquad xyz$$

sú prirodzené.

(Poľsko, MO 93/94)

1.5 Pre prirodzené číslo n označme $\mathcal{P}_n$ množinu všetkých podmnožín množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. V závislosti od čísla n určte počet všetkých funkcií $g : \mathcal{P}_n \to$ $\to \{1, 2, \dots, k\}$ (kde k je pevne dané prirodzené číslo) takých, že pre ľubovoľné

$A, B \in \mathcal{P}_n$ platí
$$g(A \cap B) = \min(g(A), g(B)).$$

(Poľsko, MO 93/94)

1.6 Kružnica vpísaná do trojuholníka ABC sa dotýka jeho strán AB a BC v bodoch P, Q. Priamka PQ pretína os uhla BAC v bode S. Dokážte, že priamky AS a SC sú navzájom kolmé.

(Poľsko, MO 93/94)

1.7 Nech a, b sú reálne čísla. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktoré pre všetky $x, y, z \in \mathbb{R}$ spĺňajú rovnosť
$$f(x, y) = a \cdot f(x, z) + b \cdot f(y, z).$$

(Polish–Austrian competition 93/94)

Druhá séria

2.1 Nájdite všetky prirodzené čísla x a y ktoré spĺňajú rovnosť
$$x + y^2 + z^3 = xyz,$$
pričom z je najväčší spoločný deliteľ čísel x a y.

(jury MMO, Kanada 95)

2.2 Na šachovnicu 8×8 umiestnime 32 bielych a 32 čiernych kameňov. Budeme hovoriť, že dva kamene tvoria *spriatelenú dvojicu*, ak sú rôznej farby a ležia v rovnakom riadku alebo v rovnakom stĺpci šachovnice. Nájdite najväčší a najmenší možný počet *spriatelených dvojíc* na šachovnici.

(KS Kanada, 95/96)

2.3 Nech O je bod vnútri konvexného štvoruholníka $ABCD$ s obsahom S. Nech K, L, M a N sú postupne vnútorné body jeho strán AB, BC, CD a DA. Dokážte, že ak $OKBL$ a $OMDN$ sú rovnobežníky, tak platí nerovnosť $\sqrt{S} \geqq \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$, kde S_1 a S_2 sú postupne obsahy štvoruholníkov $ONAK$ a $OLCM$.

(jury MMO, Kanada 95)

2.4 Rovnostranný trojuholník je rozdelený na n^2 zhodných rovnostranných trojuholníkov. Pavúk sedí v jednom z vrcholov tých trojuholníkov a mucha v nejakom inom. Pavúk a mucha sa striedavo posúvajú vždy do nejakého susedného vrcholu. Dokážte, že pavúk môže vždy chytiť muchu.

(Baltic MO, 93/94)

2.5 Máme k dispozícii tri neoznačené nádoby: prázdna m-litrová, prázdna n-litrová a plná $(m+n)$-litrová. Čísla m a n sú prirodzené a nesúdeliteľné. Dokážte, že pre každé číslo $k \in \{1, 2, \ldots, m+n-1\}$ možno prelievaním dostať v $(m+n)$-litrovej nádobe k litrov vody.

(Poľsko, MO 93/94)

2.6 Dokážte, že prirodzené číslo n je súčinom práve dvoch prvočísel s rozdielom 2 vtedy a len vtedy, keď

$$\varphi(n)\sigma(n) = (n-3)(n+1)\,,$$

kde $\sigma(n)$ znamená súčet všetkých kladných deliteľov čísla n a $\varphi(n)$ je počet prirodzených čísel menších alebo rovných n, ktoré sú nesúdeliteľné s n ($varphi(n)$ je tzv. *Eulerova funkcia*).

(KS Kanada, 95/96)

2.7 Dokážte, že súčty dĺžok protiľahlých hrán štvorstena sa rovnajú práve vtedy, keď sa rovnajú súčty uhlov zovretých stenami štvorstena pri týchto hranách.

(Poľsko, MO 93/94)

TRETIA SÉRIA

3.1 Nech $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ a nech $g : A \to A$ je funkcia definovaná pre $k \in A$ vzťahom $g(k) = 2n - k + 1$. Zistite, či existuje funkcia $f : A \to A$ taká, že pre ľubovoľné $k \in A$ platí $f(k) \neq g(k)$ a $f(f(f(k))) = g(k)$, ak
a) $n = 999$,
b) $n = 1000$.

(Chorvátsko, MO 97/98)

3.2 Dokážte, že pre $k \in \mathbb{N}$, $k \geqq 2$ rovnica

$$x_1^{x_1} + x_2^{x_2} + \ldots + x_k^{x_k} = x_{k+1}^{x_{k+1}}\,,$$

kde $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$ sú navzájom rôzne nenulové celé čísla, nemá riešenie.

(KS Kanada, 95/96)

3.3 V trojuholníku ABC platí $|AB| = 15$, $|BC| = 12$, $|AC| = 13$. Nech M je stred strany BC, K priesečník osi uhla ABC so stranou AC a O priesečník priamok AM a BK. Ďalej nech bod L je päta kolmice z bodu O na stranu AB. Dokážte, že $|\sphericalangle OLK| = |\sphericalangle OLM|$.

(Baltic MO, 93/94)

3.4 Zistite, či existuje prirodzené číslo $n > 1$, ktoré spĺňa nasledujúcu podmienku: Existuje rozklad množiny prirodzených čísel na n neprázdnych podmnožín takých, že ľubovoľný súčet $n-1$ čísel, pričom každé vyberieme z inej z $n-$ -1 podmnožín rozkladu, leží vo zvyšnej n-tej podmnožine.
Poznámka: Množiny $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tvoria rozklad množiny A, ak sú po dvoch disjunktné a platí $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = A$.

(jury MMO, Kanada 95)

3.5 Nech n je prirodzené číslo, $n \geqq 3$. Nech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú reálne čísla také, že $x_i < x_{i+1}$ pre $1 \leqq i \leqq n-1$. Dokážte, že

$$\frac{n(n-1)}{2}\sum_{i<j} x_i x_j > \left(\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)x_i\right)\left(\sum_{j=2}^{n}(j-1)x_j\right).$$

(jury MMO, Kanada 95)

3.6 V rovine sú dané štyri navzájom rôzne body A, B, C, D ležiace (v tomto poradí) na priamke p, pričom $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$.
a) Zostrojte (ak je to možné) bod P neležiaci na priamke p taký, že $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle CPD|$.
b) Dokážte, že taký bod P existuje práve vtedy, keď $(a+b)(b+c) < 4ac$.

(Polish–Austrian comp. 93/94)

3.7 Štvorec je rozdelený na 16 zhodných štvorčekov, ktoré majú spolu 25 vrcholov. Aký najmenší počet z nich (vrcholov) možno vybrať, aby medzi nevybratými vrcholmi nezostali štyri také, ktoré vytvárajú štvorec so stranami rovnobežnými so stranami pôvodného štvorca?

(Polish–Austrian comp. 93/94)

Štvrtá séria

4.1 Pre reálne čísla x, y, z platí $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 2$. Dokážte, že potom $x + y + z \leqq 2 + xyz$.

(Ukrajina, MO 98)

4.2 Daný je štvorsten $SABC$. Nech O je stred guľovej plochy, ktorá prechádza vrcholom S a pretína hrany SA, SB a SC postupne v bodoch A_1, B_1, C_1 takých, že body A, B, C, A_1, B_1, C_1 ležia na nejakej guľovej ploche. Dokážte, že priamka SO je kolmá na rovinu ABC.

(Ukrajina, MO 98)

4.3 V krajine Dištancia je n miest, pričom žiadne tri z nich neležia na jednej priamke. Vzdialenosťou dvoch jej častí $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ (z ktorých v každej leží aspoň jedno mesto) budeme rozumieť najmenšiu vzdialenosť medzi nejakým mestom z $\mathcal{A}$ a nejakým mestom z $\mathcal{B}$. Nech d je také číslo, že pre ľubovoľné rozdelenie krajiny na dve časti (pričom každá obsahuje aspoň jedno mesto) nebude ich vzdialenosť väčšia ako d. Dokážte, že je možné postaviť $n-1$ ciest (každá spája dve mestá), aby platili nasledujúce podmienky:
(i) dĺžka každej cesty neprevyšuje d,
(ii) z každého mesta sa možno dostať do každého iného.

(Ukrajina, MO 98)

4.4 Zistite, či existujú funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre každé reálne číslo x platia rovnosti
a) $f(g(x)) = x^2$, $g(f(x)) = x^3$,
b) $f(g(x)) = x^2$, $g(f(x)) = x^4$.

(Ukrajina, MO 98)

4.5 Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené číslo $n > 1$ existuje také prirodzené číslo m, že pre nejaké celé nenulové čísla $k_1, k_2, \ldots, k_{m+4}$ sú splnené rovnosti

$$mn = k_1 + k_2 + \ldots + k_{m+4} = k_1^{1997} + k_2^{1997} + \ldots + k_{m+4}^{1997}.$$

(Ukrajina, MO 98)

4.6 Daný je rovnoramenný trojuholník ABC, s uhlom pri vrchole B veľkosti $100°$. Vnútri trojuholníka leží bod D, pričom $|\sphericalangle ABD| = 25°$, $|\sphericalangle ACD| = 5°$. Na predĺžení ramena BA (za bodom A) leží bod E, pre ktorý platí $|AE| + |CD| = |AC|$. Zistite, či sú priamky AD a EC rovnobežné.

(Ukrajina, MO 98)

4.7 Nájdite všetky konečné množiny $M \subset \mathbb{R}$ obsahujúce aspoň dva prvky také, že pre ľubovoľné $a, b \in M$, $a \neq b$ platí $\frac{2}{3}a - b^2 \in M$.

(Bielorusko, MO 98)

PIATA SÉRIA

5.1 Nech m a n sú prirodzené čísla také, že $A = \dfrac{(m+3)^n + 1}{3m}$ je celé číslo. Dokážte, že potom je A nepárne celé číslo.

(Bulharsko, MO 98)

5.2 Daný je trojuholník ABC, ktorý nie je tupouhlý. Na jeho stranách AB, BC a CA sú zvonku zostrojené postupne štvorec, pravidelný n-uholník a pravidelný m-uholník ($m, n > 5$), pričom ich stredy sú vrcholmi rovnostranného trojuholníka. Dokážte, že $m = n = 6$ a vypočítajte veľkosti uhlov trojuholníka ABC.

(Bulharsko, MO 98)

5.3 Nech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sú reálne čísla, pričom nie všetky sú rovné nule. Dokážte, že rovnica

$$\sqrt{1 + a_1 x} + \sqrt{1 + a_2 x} + \ldots + \sqrt{1 + a_n x} = n$$

má najviac jeden nenulový koreň.

(Bulharsko, MO 98)

5.4 Strany a uhlopriečky pravidelného n-uholníka $\mathcal{P}$ sú ofarbené k farbami tak, že
(i) pre každú farbu f a ľubovoľné dva vrcholy A a B mnohouholníka $\mathcal{P}$ je úsečka AB ofarbená farbou f alebo pre nejaký vrchol C sú úsečky AC a BC ofarbené farbou f;
(ii) strany ľubovoľného trojuholníka s vrcholmi vo vrcholoch mnohouholníka $\mathcal{P}$ sú ofarbené najviac dvoma farbami.
Dokážte, že $k \leqq 2$.

(Bulharsko, MO 98)

5.5 Zistite, či existuje postupnosť kladných reálnych čísel $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} - \sqrt{x_n}\,.$$

(Bulharsko, MO 98)

5.6 V rovine je daných $n + 1$ bodov tak, že žiadne tri neležia na priamke. Určte všetky prirodzené čísla k spĺňajúce podmienku: Niektoré z bodov možno spojiť úsečkami tak, že ľubovoľných bodov je pospájaných práve k úsečkami.

(Bulharsko, MO 98)

5.7 Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Nech D, E, F sú päty jeho výšok spustených postupne z vrcholov A, B, C. Priamka prechádzajúca bodom D a rovnobežná s EF pretína priamky AC a AB postupne v bodoch Q a R. Priamky EF a BC sa pretínajú v bode P. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku PQR prechádza stredom strany BC.

(jury MMO, Argentína 97)

Riešenia súťažných úloh KS SK MO

PRVÁ SÉRIA

1.1 *(Peter Májek)* Položme $x_{n+1} = x_1$ a $k_i = x_i - x_{i-1}$ (pre $i = 2, 3, \ldots, n+1$). Nech tiež $k_{n+1} = k_1$. Keďže n je nepárne, n^2 dáva zvyšok 1 po delení 4. Zrejme čísla $x_i - x_{i-1}$ a $x_i + x_{i-1}$ majú rovnakú paritu. Ak by boli nepárne, potom $(x_i - x_{i-1})^2 + 2(x_i + x_{i-1}) + 1 \equiv 1 + 2 + 1 \equiv 0 \pmod 4$, čo nemôže nastať. Preto $k_i = x_i - x_{i-1}$ je pre každé $i = 2, 3, \ldots, n+1$ párne číslo. Ak odčítame dve po sebe idúce rovnice, po úprave dostávame

$$(x_{i+1} - x_{i-1})\,(x_{i+1} + x_{i-1} + 2 - 2x_i) = 0\,,$$

čo po dosadení dáva

$$(k_{i+1} + k_i)\,(k_{i+1} - k_i + 2) = 0\,.$$

To znamená, že pre každé $i = 1, 2, \ldots, n$ platí $k_{i+1} = -k_i$ alebo $k_{i+1} = k_i - 2$.

Predpokladajme sporom, že pre žiadne i neplatí $k_i = 0$. Potom máme postupnosť celých nenulových párnych čísel $k_1, k_2, \ldots, k_n, k_{n+1}$, kde každý člen získavame z predošlého pomocou niektorej z operácií $k_{i+1} = -k_i$, alebo $k_{i+1} = k_i - 2$. Pritom po použití nepárneho počtu (n) takýchto krokov máme dostať $k_{n+1} = k_1$. Všímajme si znamienko a absolútnu hodnotu čísel k_i. Po každom použití prvej operácie, pri ktorej sa znamienko zmení na opačné, je potrebné urobiť ďalšiu prvú operáciu, aby sa znamienko vrátilo na pôvodné (samozrejme, že je možné zmeniť znamienko aj druhou operáciou, ale v tom prípade by sme museli „prejsť cez nulu“). Celkovo sa teda urobí párny počet operácií zmeny znamienka (aby $k_{n+1} = k_1$). Ak po použití druhej operácie stúpne absolútna hodnota k_i a je väčšia ako k_1, musí sa neskôr použiť druhá operácia, aby absolútna hodnota k_i klesla. Ak použitím druhej operácie absolútna hodnota klesne a je menšia ako k_1, musí sa neskôr použiť druhá operácia, aby stúpla. Takže aj počet použití druhej operácie musí byť párny. Celkový počet operácií, po ktorých dostaneme opäť prvý člen, je teda párny. To je však spor s predpokladom, že n (počet operácií) je nepárne číslo. Preto musí existovať také $i \in \{2, 3, \ldots, n+1\}$, že $k_i = 0$, a teda $x_i = x_{i-1}$.

1.2 *(Katarína Quittnerová)*

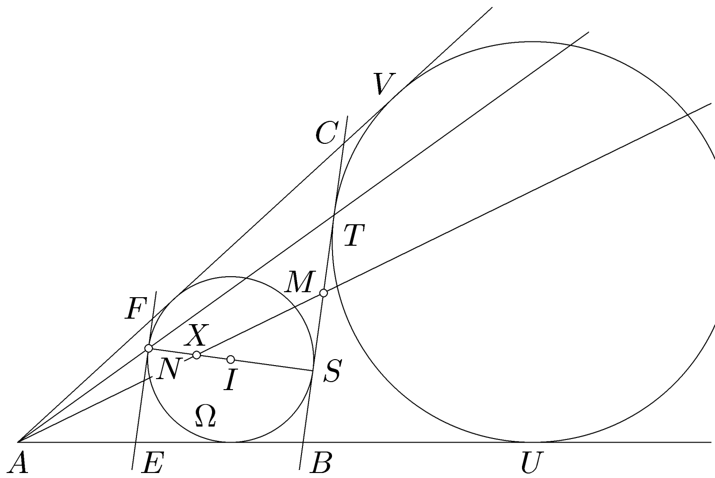
a) Z trojuholníkovej nerovnosti $|a| + |b| \geqq |a + b|$ (kde $a, b \in \mathbb{R}$) vyplýva, že súčet čísel priradených stranám medzi vrcholmi P_i a P_j (kde $0 \leqq i, j \leqq n$, $i \neq j$) v smere aj proti smeru hodinových ručičiek je aspoň $|i - j|$. Špeciálne pre $i = 0$ a $j = n$ dostávame $S \geqq 2n$. Hodnota $2n$ sa pritom nadobúda napríklad pre postupné označenie vrcholov $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$.

b) Nech $P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_k}$ sú vrcholy ležiace medzi P_0 a P_n v smere hodinových ručičiek (od P_0 k P_n) a $P_{j_1}, P_{j_2}, \ldots, P_{j_{n-k-1}}$ sú vrcholy ležiace medzi vrcholmi P_0 a P_n (od P_0 k P_n) proti smeru hodinových ručičiek. Súčet S bude zrejme minimálny (t.j. $S = 2n$) práve vtedy, keď $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ a $j_1 < j_2 < \ldots < j_{n-k-1}$

(opäť to vyplýva z trojuholníkovej nerovnosti). Ale množiny $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ a $J = \{j_1, j_2, \dots, j_{n-k-1}\}$ sú disjunktné a $I \cup J = \{1, 2, \dots, n-1\}$. To znamená, že počet rôznych poradí s minimálnym súčtom je rovný počtu podmnožín množiny $\{1, 2, \dots, n-1\}$, ktorý je 2^{n-1}.

1.3 Označme I stred a r polomer danej kružnice Ω. Nech N, S sú po rade najbližší a najvzdialenejší bod kružnice Ω od priamky k.

Úloha sa zrejme nezmení, ak namiesto l budeme uvažovať priamku $l' \not\equiv k$, ktorá je s ňou rovnobežná. Pretože ak dve dotyčnice ku kružnici Ω z bodu A pretínajú priamku l' v bodoch B', C', tak zrejme priamka m' prechádzajúca bodom A a stredom úsečky $B'C'$ bude identická s m (vyplýva to napríklad z rovnoľahlosti trojuholníkov ABC a $AB'C'$).



Obr. 34

Teda nech l je dotyčnica ku kružnici Ω v bode S. Označme h vzdialenosť priamok k a l. Zvoľme teraz $A \in k$. Zostrojme body $B, C \in l$ a označme $\{T\} = \overleftrightarrow{AN} \cap l$. Ďalej nech M je stred BC a $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$.

Uvažujme priamku rovnobežnú s k prechádzajúcu cez N a jej prieniky s AB a AC označme E a F. Zrejme v rovnoľahlosti so stredom A a koeficientom $h/(h-2r)$ sa trojuholník AEF zobrazí na trojuholník ABC a bod N na bod T. Máme teda rovnosť

$$\frac{|AN|}{|AT|} = \frac{h-2r}{h}\,. \tag{1}$$

Zrejme Ω je kružnica vpísaná do trojuholníka ABC a pripísaná trojuholníku AEF. Naviac sa dotýka priamky EF v bode N. Jej obraz v uvažovanej rovnoľahlosti bude teda kružnica pripísaná trojuholníku ABC, dotýkajúca sa priamky BC v bode T. Označme U, V body dotyku tejto kružnice s priamkami AB a AC. Pretože platí

$$|AB| + |BT| = |AB| + |BU| = |AU| = |AV| = |AC| + |CV| = |AC| + |CT|\,,$$

dostávame rovnosti

$$|BT| - |CT| = |AC| - |AB| = b - c\,, \qquad |BT| + |CT| = a\,.$$

Z toho vyplýva $|CT| = \frac{1}{2}(a - b + c)$. Ale S je bod dotyku kružnice vpísanej trojuholníku ABC, teda platí $|BS| = \frac{1}{2}(a - b + c)$. Odtiaľ máme $|BS| = |CT|$, takže body S, T sú rovnako vzdialené od B, C, a teda aj $|MS| = |MT|$.

Všimnime si teraz trojuholník NST a priamku m. Tá pretína priamky NS, ST, TN v bodoch X, M, A. Potom z Menelaovej vety dostávame

$$\frac{|NX|}{|XS|} \cdot \frac{|SM|}{|MT|} \cdot \frac{|TA|}{|AN|} = 1\,.$$

Keďže $|MS| = |MT|$, tak

$$\frac{|NX|}{|XS|} = \frac{|AN|}{|AT|}\,.$$

Z (1) a vzťahu $|NX| + |XS| = 2r$ dostávame ďalej

$$\frac{2r - |SX|}{|SX|} = \frac{h - 2r}{h}\,,$$

odkiaľ

$$|SX| = \frac{hr}{h - r}\,.$$

(Zrejme je $h - r \neq 0$.) Veľkosť $|SX|$ teda závisí len od h, r, ktoré sú nezávislé na výbere bodu A. To ale znamená, že bod X, ležiaci na NS vo vzdialenosti $hr/(h - r)$ od S, je spoločným bodom všetkých priamok m.

1.4 *(Katarína Quittnerová)* Čísla x, y, z sú korene rovnice $(\lambda - x)(\lambda - y)(\lambda - z) = 0$, teda

$$\lambda^3 - a\lambda^2 + b\lambda - c = 0\,, \tag{1}$$

kde $a = x + y + z$, $b = xy + xz + yz = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) xyz$ a $c = xyz$ sú podľa zadania prirodzené čísla. Keby niektoré z čísel x, y, z nebolo celé, potom by sa dalo napísať v tvare $\dfrac{p}{q}$, kde p, q sú celé, nesúdeliteľné a $q > 1$. Po dosadení do (1) a vynásobení q^2 by sme dostali, že $\dfrac{p^3}{q} = ap^2 - bpq + cq^2$ je celé číslo, čo je spor. Čísla x, y, z sú teda celé a nenulové (pretože xyz je prirodzené číslo). Navyše, buď sú všetky tri kladné, alebo sú práve dve záporné. Predpokladajme najprv, že práve dve sú záporné. Bez ujmy na všeobecnosti nech sú to y a z. Potom platí

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x} - \frac{1}{|y|} - \frac{1}{|z|} \geqq 1\,,$$

z čoho
$$\frac{1}{x} \geqq 1 + \frac{1}{|y|} + \frac{1}{|z|} > 1\,,$$
čo pre x kladné celé číslo nie je možné. Čísla x, y, z sú teda všetky tri celé kladné. Potom však $x+y+z$ a xyz sú prirodzené čísla a pôvodný problém sa redukuje na nájdenie takých prirodzených čísel x, y, z, že $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ je tiež prirodzené číslo. Bez ujmy na všeobecnosti, nech $x \geqq y \geqq z \geqq 1$. Zrejme platí
$$1 \leqq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leqq \frac{1}{z} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z} = \frac{3}{z} \leqq 3\,, \tag{2}$$
alebo tiež
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = n, \qquad \text{kde } n \in \{1, 2, 3\}.$$
Rozoberieme všetky možnosti.

1) Ak $n = 3$, potom z (2) vyplýva $x = y = z = 1$.
2) Ak $n = 2$, potom $z = 1$. Ak by bolo $z \geqq 2$, potom $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leqq \frac{3}{z} \leqq \frac{3}{2} < 2$, čo je spor. Máme teda $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$. Sporom analogicky ukážeme, že $y \leqq 2$, z čoho ľahko dopočítame $x = y = 2$.
3) Ak $n = 1$, potom $z \leqq 3$. Ak by bolo $z \geqq 4$, potom $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leqq \frac{3}{z} \leqq \frac{3}{4} < 1$, čo je spor. Pre $z = 1$ dostávame $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0$, čo pre x, y prirodzené zjavne nemá riešenie. Pre $z = 2$ dostávame $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$, čiže (sporom) $y \leqq 4$. Ľahko dorátame riešenia $y = 3$, $x = 6$ a $y = x = 4$. Pre $z = 3$ máme $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$, z čoho vyplýva $x = y = 3$.

Riešeniami sú teda ľubovoľné permutácie trojíc $\{1,1,1\}$, $\{1,2,2\}$, $\{2,3,6\}$, $\{2,4,4\}$ a $\{3,3,3\}$.

1.5 *(Katarína Quittnerová)* Z podmienky pre funkciu g vyplýva, že ak $A \subset B$, tak platí $g(A) \leqq g(B)$. Ak teda podmnožinám množiny $N = \{1, 2, \dots, n\}$ priradíme hodnoty z množiny $\{1, 2, \dots, k\}$, najmenšia z použitých hodnôt bude $g(\emptyset)$ a najväčšia $g(N) = m$.

Podmienku pre funkciu g môžeme indukciou rozšíriť do tvaru $g(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_l) = min(g(A_1), g(A_2), \dots, g(A_l))$, kde l je ľubovoľné prirodzené číslo.

Označme $N_i = N \setminus \{i\}$. Množinám $N_1, N_2, \dots, N_n$ priraďme ľubovoľné hodnoty z množiny $\{1, 2, \dots, m\}$. Všetky ostatné množiny sú jednoznačne určené ako prienik niekoľkých z množín $N_1, N_2, \dots, N_n$, čím je jednoznačne určená aj hodnota ich obrazu. Ľahko zistíme, že každá z takto definovaných funkcií vyhovuje zadaniu. Pre každé m

dostaneme m^n možností ohodnotenia množín $N_1, N_2, \dots, N_n$. Všetkých možností je teda $\sum_{m=1}^{k} m^n$.

1.6 *(Josef Ševčík)* Označme uhly trojuholníka α, β, γ. Označme V stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC. Zrejme platí $|PB| = |BQ|$, $|\sphericalangle BPQ| = \frac{1}{2}(\pi - \beta)$. Potom $|\sphericalangle APQ| = |\sphericalangle APS| = \pi - |\sphericalangle BPQ| = \frac{1}{2}(\pi + \beta)$. Zároveň $|\sphericalangle VCA| = \frac{1}{2}\gamma$ a $|\sphericalangle VAC| = \frac{1}{2}\alpha$. To znamená, že

$$|\sphericalangle AVC| = \pi - |\sphericalangle VCA| - |\sphericalangle VAC| = \frac{\pi + \beta}{2} = |\sphericalangle APS|\,.$$

Ďalej $|\sphericalangle PAS| = \frac{1}{2}\alpha = |\sphericalangle VAC|$. To znamená, že trojuholníky APS a AVC sú podobné (podľa vety uu). Odtiaľ dostávame

$$\frac{|AP|}{|AS|} = \frac{|AV|}{|AC|}\,,$$

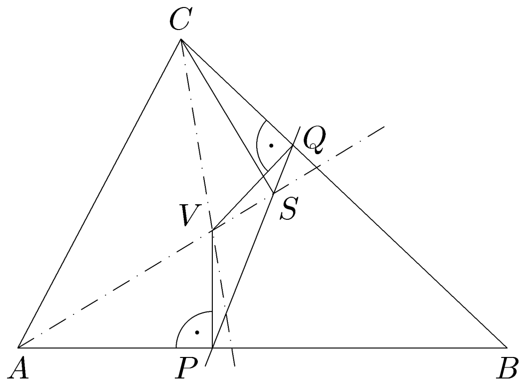
a teda

$$\frac{|AP|}{|AV|} = \frac{|AS|}{|AC|}\,.$$

Zároveň však platí $|\sphericalangle PAV| = \frac{1}{2}\alpha = |\sphericalangle SAC|$. To znamená, že aj trojuholníky PAV a SAC sú podobné. Potom ale

$$|\sphericalangle VPA| = |\sphericalangle CSA| = \frac{\pi}{2}\,,$$

čo je tvrdenie, ktoré bolo treba dokázať.



Obr. 35

1.7 Funkcia $f \equiv 0$ (identicky rovná nule) zrejme vyhovuje zadaniu. Ďalej predpokladajme, že

$$f \not\equiv 0\,. \tag{1}$$

Po dosadení $y = x$ do rovnice

$$f(x, y) = a \cdot f(x, z) + b \cdot f(y, z) \tag{2}$$

dostávame $f(x,x) = (a+b)\,f(x,z)$. To znamená, že $a+b=0$, alebo funkcia f nezávisí od druhej premennej.

Ak $a+b=0$, potom $f(x,x)=0$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$. Dosadením $z=y$ do (2) dostávame $f(x,y) = a[f(x,y) - f(y,y)] = a \cdot f(x,y)$. Potom z (1) vyplýva $a=1$, $b=-1$. Položme $g(x) = f(x,0)$. Potom ak do (2) dosadíme $z=0$, máme $f(x,y) = f(x,0) - f(y,0) = g(x) - g(y)$.

Ak $a+b \neq 0$, potom $f(x,y) = f(x,0)$. Opäť položme $g(x) = f(x,0)$. Z (2) potom dostávame $g(x) = a \cdot g(x) + b \cdot g(y)$, čiže

$$(1-a)\,g(x) = b \cdot g(y)\,.$$

Ak $a=1$ a $b=0$, môže byť g ľubovoľná funkcia. Ak $a \neq 1$, potom $g(x) = \dfrac{b}{1-a}\,g(y)$ pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$. Ale z (1) vyplýva $b = 1-a$ a g je teda konštantná funkcia. Rovnako pre $b \neq 0$.

Zhrnutie:

- Ak $a+b=1$ a $b \neq 0$, riešením je funkcia $f(x,y) \equiv c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je ľubovoľná konštanta.
- Ak $a=1$ a $b=0$, riešením je funkcia $f(x,y) = g(x)$, kde $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je ľubovoľná funkcia.
- Ak $a=1$ a $b=-1$, riešením je funkcia $f(x,y) = g(x) - g(y)$, kde $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je ľubovoľná funkcia.
- V ostatných prípadoch je riešením funkcia $f(x) \equiv 0$.

Zrejme v každom z prípadov vyhovuje nájdená funkcia zadaniu.

Druhá séria

2.1 *(Katarína Quittnerová)* Položme si $x = x_0 z$, $y = y_0 z$, potom $x_0 + y_0^2 z + z^2 = x_0 y_0 z^2$, takže $x_0 = x_1 z$,

$$x_1 + y_0^2 + z = x_1 y_0 z^2. \tag{1}$$

Pre všetky prirodzené k, l platí

$$kl \geqq k + l - 1, \tag{2}$$

pretože táto nerovnosť je ekvivalentná s $(k-1)(l-1) \geqq 0$. Z (1) vyplýva, že $x_1 + z$ je deliteľné y_0, takže musí $x_1 + z \geqq y_0$, a teda s využitím (2) aj $x_1 z \geqq y_0 - 1$. Pre $z \geqq 3$ teda platí

$$\begin{gathered}
x_1 y_0 z^2 = x_1 y_0 z(z-1) + x_1 y_0 z \geqq 2x_1 y_0 z + y_0 x_1 z \geqq z + x_1 y_0 z + y_0(y_0 - 1) \geqq \\
\geqq z + 3x_1 y_0 + y_0(y_0-1) \geqq z + 2x_1 y_0 + (x_1 + y_0 - 1) + (y_0^2 - y_0) = \\
= z + x_1 + y_0^2 + (2x_1 y_0 - 1) > z + x_1 + y_0^2,
\end{gathered}$$

čo je ale spor s (1), preto musí byť $z < 3$.

Pre $z = 1$ dostávame rovnicu $x_1 + y_0^2 + 1 = x_1 y_0$, ktorá je ekvivalentná s

$$(y_0 - 1)(x_1 - y_0 - 1) = 2 .$$

Keďže $y_0 - 1 \geqq 0$, môžu nastať iba dve možnosti a pre každú z nich dostaneme riešenie: $x = x_1 = 5$, $y = y_1 = 2$, alebo $x = x_1 = 5$, $y = y_0 = 3$.

Pre $z = 2$ dostávame z rovnosti (1)

$$x_1 + y_0^2 + 2 = 4x_1 y_0 .$$

Keďže $x_1 + 2$ je deliteľné y_0, musí $x_1 + 2 \geqq y_0$. S využitím tejto nerovnosti a (2) potom pre $y_0 \geqq 4$ vyplýva

$$4x_1y_0 \geqq 3x_1y_0 + (y_0 - 2)y_0 \geqq x_1 + 3y_0 - 1 + y_0^2 - 2y_0 \geqq x_1 + y_0^2 + 3 > x_1 + y_0^2 + 2 .$$

Musí preto $y_0 \leqq 3$. Rozobratím možností dostaneme ďalšie dve riešenia: $x = 4, y = 2$ a $x = 4, y = 6$.

Riešeniami sú potom usporiadané trojice $(x, y, z) = (5, 2, 1)$, $(5, 3, 1)$, $(4, 2, 2)$, $(4, 6, 2)$. Zrejme všetky spĺňajú podmienky zadania.

2.2 *(Katarína Quittnerová)* Najprv dokážeme, že pre ľubovoľné umiestnenie kameňov je počet *spriatelených dvojíc* nanajvýš 256 a najmenej 128.

Uvažujme ľubovoľný riadok. Počet *spriatelených dvojíc* v tomto riadku je potom zrejme

$$pq = p(8 - p) = (4 - (4 - p))(4 + (4 - p)) = 16 - (4 - p)^2 \leqq 16 ,$$

kde p, resp. q sú počty kameňov jednotlivých farieb. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme navyše predpokladať $p \geqq q$, pričom nazvime *dominantnou* početnejšiu farbu (teda tú, ktorá má v našom riadku p kameňov). Sčítaním cez všetky riadky a stĺpce dostávame horné ohraničenie počtu P všetkých *spriatelených dvojíc*

$$P \leqq (8 + 8) \cdot 16 = 256 .$$

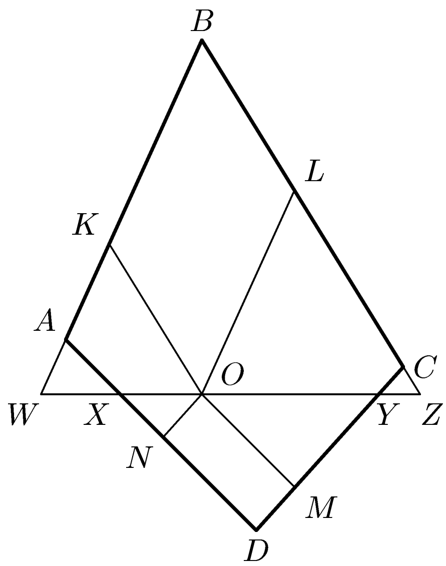
Vráťme sa však ešte k nášmu riadku a pre každý kameň v ňom uvažujme počet *spriatelených dvojíc*, v ktorých sa nachádza. Označme ďalej S súčet takýchto počtov pre všetky kamene z tohto riadku. Do súčtu S prispievajú pritom jednak riadkové *spriatelené dvojice* (počtom $2pq$ – každá dvakrát) a jednak stĺpcové *spriatelené dvojice*. Všimnime si aspoň stĺpce prislúchajúce ku kameňom *dominantnej* farby v našom riadku. Kameňov v týchto stĺpcoch je samozrejme $8p$, z nich však len 32 môže byť *dominantnej* farby. Zvyšných, najmenej $8p - 32$ kameňov však už musí byť druhej farby, a práve tieto kamene vytvárajú s kameňmi *dominantnej* farby v našom riadku stĺpcové *spriatelené dvojice*. Celkovo je teda

$$\begin{aligned} S &\geqq 2pq + 8p - 32 = 2p(8 - p) + 8p - 32 = \\ &= -2p^2 + 24p - 32 = 32 - 2(p - 8)(p - 4) \geqq 32 . \end{aligned}$$

Sčítaním hodnôt S pre všetky riadky dostaneme dvojnásobok celkového počtu *spriatelených dvojíc* (každá bola započítaná dvakrát), takže $2P \geqq 8 \cdot 32 = 256$, $P \geqq 128$.

Tým sme dostali horný aj dolný odhad P. Počet 256 môžeme dosiahnuť napríklad šachovnicovým (striedavým) usporiadaním bielych a čiernych kameňov, počet 128 môžeme dosiahnuť napríklad tak, že biele kamene budú v prvých štyroch stĺpcoch, čierne vo zvyšných.

2.3 Ak O leží na AC, potom štvoruholníky $ABCD$, $AKON$ a $OLCM$ sú podobné a platí $|AC| = |AO| + |OC|$. Potom $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$.



Obr. 36

Ďalej nech O neleží na AC. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že O a D ležia na rovnakej strane priamky AC. Bodom O preložme priamku a jej priesečníky s priamkami BA, AD, CD a BC označme po poradí W, X, Y a Z. Najprv uvažujme prípad, keď $W = X = A$. Potom $\dfrac{|OW|}{|OX|} = 1$, zatiaľ čo $\dfrac{|OZ|}{|OY|} > 1$. Otáčajme túto priamku okolo bodu O pokiaľ $Y = Z = C$. Potom $\dfrac{|OW|}{|OX|} > 1$ a $\dfrac{|OZ|}{|OZ|} = 1$. To znamená, že v nejakej polohe muselo platiť $\dfrac{|OW|}{|OX|} = \dfrac{|OZ|}{|OY|}$. Ďalej sa zaoberajme len týmto prípadom. Označme T_1, T_2, P_1, P_2, Q_1 a Q_2 po poradí obsahy útvarov $KBLO$, $NOMD$, WKO, OLZ, ONX a YMO. Potrebujeme dokázať, že $T_1 + T_2 \geqq 2\sqrt{S_1 S_2}$. Keďže trojuholníky WBZ, WKO a OLZ sú podobné, dostávame

$$\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} = \sqrt{P_1 + T_1 + P_2}\left(\frac{|WO|}{|WZ|} + \frac{|OZ|}{|WZ|}\right) = \sqrt{P_1 + T_1 + P_2}\,.$$

Odtiaľ $T_1 = 2\sqrt{P_1P_2}$. Podobne $T_2 = 2\sqrt{Q_1Q_2}$. Pretože $\dfrac{|OW|}{|OZ|} = \dfrac{|OX|}{|OY|}$, dostávame

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{|OW|^2}{|OZ|^2} = \frac{|OX|^2}{|OY|^2} = \frac{Q_1}{Q_2}\,.$$

Označme $\dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{Q_1}{Q_2} = k$. Potom

$$\begin{aligned} T_1 + T_2 &= 2\sqrt{P_1P_2} + 2\sqrt{Q_1Q_2} = 2\sqrt{P_1P_2}\,(1+k) = \\ &= 2\sqrt{(1+k)P_1(1+k)P_2} = 2\sqrt{(P_1+Q_1)(P_2+Q_2)} \geqq \\ &\geqq 2\sqrt{S_1S_2}\,. \end{aligned}$$

Tým je úloha vyriešená.

2.4 *(Katarína Quittnerová)* Označme si veľký trojuholník ABC a zvoľme si súradnicový systém tak, aby strana AB ležala na osi x a bod C mal y-ovú súradnicu kladnú.

Pavúka najprv pošleme do bodu C. Ak po ceste muchu chytí, sme hotoví.

Inak dokážeme, že pavúk môže (po prípadnom konečnom počte krokov v každej výške) stále zostupovať (teda zmenšovať svoju y-ovú súradnicu) tak, aby sa vždy po jeho kroku mucha nachádzala v rovnostrannom trojuholníku $A'B'C'$, kde C' je pozícia pavúka a $A'B'$ je časť úsečky AB (alebo $A' = B' = C'$ ako bod C' leží na strane AB). Po konečnom počte krokov teda pavúk muchu chytí. Dôkaz budeme robiť indukciou.

1° Prvý krok je zrejme splnený (pavúk je v bode C).

2° Nech je teraz pavúk v bode C_1, mucha v príslušnej zóne $A_1B_1C_1$ (nie v bode C_1) a mucha je „na ťahu“. Ak sa mucha posunie tak, že zostane v trojuholníku $A_1B_1C_1$ (a nevlezie do C_1), potom stačí, aby pavúk zliezol šikmo doprava alebo šikmo doľava tak, aby mal muchu opäť vo svojej zóne. Ak sa mucha posunie von z $A_1B_1C_1$ smerom doprava (smer doľava je analogický), potom sa pavúk posunie tiež doprava (vodorovne) a dostane tak muchu opäť do svojej zóny. V tomto prípade však mucha bude na pravom okraji novej zóny, takže v ďalšom kroku z nej buď nevyjde (a potom pavúk môže zostúpiť) alebo sa zase môže posunúť len smerom doprava von z pavúkovej zóny. Posuny smerom doprava však môže mucha urobiť len konečne veľa krát (kým nenarazí na pravú stenu trojuholníka ABC).

Zrejme pri žiadnom kroku nemôže pavúk vyjsť z pôvodného trojuholníka.

Tým je dôkaz hotový.

2.5 *(Katarína Quittnerová)* Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $m \geqq n$. Keďže $(m,n) = 1$, existuje prirodzené číslo $a \leqq n$ a celé nezáporné číslo b také, že $am - bn = k$ (násobky čísla m totiž dávajú všetky zvyšky po delení číslom n). Označme si M, N a O postupne m-litrovú, n-litrovú nádobu a $(m+n)$-litrovú nádobu. Odlejeme z O (cez N) $(b+1)$-krát n litrov do M, pričom vždy, keď sa nám do nej celý obsah N nezmestí, vylejeme M (m litrov) naspäť do O a zvyšok vody z N vylejeme do (teraz prázdnej) M. Týmto spôsobom v O zostane $z = a'm - bn$ litrov, kde $a' - 1$ je počet vyliatí nádoby M do O. Ak $a' > a$, potom $a' = a + 1$ (lebo inak $z \geqq 2m + k > m + n$), takže $z = m + k$ a stačí M vyliať do N a z O vyliať m litrov vody do M. Ak $a' < a$, potom $a' = a - 1$ (lebo inak $z \leqq -2m + k < 0$), takže $z = k - m$ a stačí doplniť M vodou z N doplna a potom vyliať M do O. Ak $a' = a$, sme hotoví. Tým sme dokázali, čo bolo treba.

2.6 Majme $n = pq$, kde pq sú prvočísla také, že $q = p + 2$. Potom podľa známych vzorčekov platí

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= (p-1)\,(q-1) = (p-1)\,(p+1)\,,\\ \sigma(n) &= \frac{p^2-1}{p-1}\cdot\frac{q^2-1}{q-1} = (p+1)\,(q+1) = (p+1)\,(p+3)\,,\\ (n-3)\,(n+1) &= (p(p+2)-3)\,(p(p+2)+1) = (p^2+2p-3)\,(p^2+2p+1) =\\ &= (p+3)\,(p-1)\,(p+1)^2\,.\end{aligned}$$

Odtiaľ už jasne vidíme, že platí $\varphi(n)\,\sigma(n) = (n-3)\,(n+1)$.

Majme teraz prirodzené číslo n s kanonickým rozkladom $n = p_1^{e_1}p_2^{e_2}\dots p_k^{e_k}$ také, že

$$\varphi(n)\,\sigma(n) = (n-3)\,(n+1)\,. \tag{1}$$

Potom platí

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\,,\\ \sigma(n) &= \frac{p_1^{e_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{e_2+1}-1}{p_2-1}\dots\frac{p_k^{e_k+1}-1}{p_k-1}\,.\end{aligned}$$

Dosadením do (1) dostávame

$$\begin{aligned}(n-3)\,(n+1) &= n\cdot\frac{p_1-1}{p_1}\dots\frac{p_k-1}{p_k}\cdot\frac{p_1^{e_1+1}-1}{p_1-1}\dots\frac{p_k^{e_k+1}-1}{p_k-1} =\\ &= \frac{p_1^{e_1}\dots p_k^{e_k}}{p_1\dots p_k}\cdot\left(p_1^{e_1+1}-1\right)\dots\left(p_k^{e_k+1}-1\right) =\\ &= p_1^{e_1-1}\dots p_k^{e_k-1}\cdot\left(p_1^{e_1+1}-1\right)\dots\left(p_k^{e_k+1}-1\right)\,.\end{aligned} \tag{2}$$

Potom pre každé $i = 1, 2, \dots, k$ platí $p_i^{e_i-1} \mid (n-3)\,(n+1)$. Keďže $p_i^{e_i-1} \mid n$ a najväčší spoločný deliteľ čísel n a $n+1$ je 1, tak nutne $p_i^{e_i-1} \mid n-3$, a teda $p_i^{e_i-1} \mid 3$. Kladnými deliteľmi trojky sú len čísla 1 a 3, takže buď $p_i^{e_i-1} = 1$ alebo $p_i^{e_i-1} = 3$. V prvom prípade dostávame $e_i = 1$ a v druhom $p_i = 3$, $e_i = 2$. Ale pretože máme kanonický rozklad, tak druhá možnosť môže nastať pre najviac jedno $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Môžu teda nastať dva prípady.

Ak $n = 3^2 \cdot p_1 \dots p_{k-1}$, potom dosadením do (2) a po malej úprave dostávame

$$26\left(p_1^2-1\right)\dots\left(p_{k-1}^2-1\right) = (3p_1\dots p_{k-1}-1)\,(9p_1\dots p_{k-1}+1)\,. \tag{3}$$

Pravá strana poslednej rovnosti určite nie je deliteľná tromi, ale $3 \mid p^2-1$ pre ľubovoľné prvočíslo $p \neq 3$. Takže musí byť $k=1$ a $n=9$. Vtedy ale neplatí rovnosť zo zadania ($6\cdot 13 \neq 6\cdot 10$).

Ak $n = p_1\dots p_k$, potom (2) má tvar

$$(p_1^2-1)\dots(p_k^2-1) = (n-3)\,(n+1)\,. \tag{4}$$

Rozoberieme niekoľko možností.

Ak $k=1$, potom $n=p$ a $\varphi(n)\,\sigma(n) = p^2-1 = p^2-2p-3+2p+4 > p_2-2p-3 = (n-3)\,(n+1)$. Takže táto možnosť nemôže nastať.

Ak $k=2$, potom $n=pq$, kde p,q sú rôzne prvočísla. Dosadením do (1) dostávame

$$\begin{aligned}\varphi(n)\,\sigma(n) = \left(p^2-1\right)\left(q^2-1\right) &= (pq-3)\,(pq+1) - ((p-q)^2-4) = \\ &= (n-3)\,(n+1) - ((p-q)^2-4)\,.\end{aligned}$$

To ale znamená, že $|p-q|=2$, a teda n je súčinom dvoch prvočísel s rozdielom 2.

Matematickou indukciou vzhľadom na k dokážeme, že pre $k \geqq 3$ platí $\varphi(n)\,\sigma(n) < (n-3)\,(n+1)$.

1° Ak $k=3$, potom $n = p_1p_2p_3$. Bez ujmy na všeobecnosti nech $p_1<p_2<p_3$. Zrejme $p_3-p_2 \geqq 2$, a teda $(p_2^2-1)\,(p_3^2-1) \leqq (p_2p_3-3)\,(p_2p_3+1)$. Položme $m=p_2p_3$, $p=p_1$. Postupnými úpravami dostávame

$$\begin{aligned}\varphi(mp)\,\sigma(mp) = \left(p_1^2-1\right)\dots\left(p_k^2-1\right)\left(p^2-1\right) &\leqq (m-3)\,(m+1)\left(p^2-1\right) = \\ &= m^2p^2-2mp^2-3p^2-m^2+2m+3 = \\ &= (mp-3)\,(mp+1)+2mp(1-p)+3(2-p)+m(2-m) < \\ &< (mp-3)\,(mp+1)\,.\end{aligned}$$

V poslednej nerovnosti sme využili $p \geqq 2$ a $m>2$.

2° Nech $k \geqq 3$ a nech pre $n = p_1p_2\dots p_k$ platí $\varphi(n)\,\sigma(n) < (n-3)\,(n+1)$. Ukážeme, že aj táto nerovnosť platí aj pre $n = p_1p_2\dots p_kp_{k+1}$. Stačí na to použiť rovnaký postup, aký sme použili v prvom kroku, ale pre čísla $m = p_1p_2\dots p_k$ a $p = p_{k+1}$ (pričom v prvej nerovnosti využívame indukčný predpoklad a v poslednej $p \geqq 2$ a $m>2$). Tým je hotový indukčný krok.

Celkovo teda dostávame, že môže nastať jedine prípad $k=2$, $n=pq$, kde p,q sú prvočísla, pre ktoré platí $|p-q|=2$. Tým sme dokázali, čo bolo treba

2.7 Pre štyri body U,V,X,Y, ktoré neležia v jednej rovine budeme symbolom $|\sphericalangle X(UV)Y|$ veľkosť ostrého uhla medzi rovinami, ktorých prienikom je priamka UV

a prechádzajú bodmi X, Y (t.j. ide o roviny UVX a UVY). Nech je daný štvorsten $ABCD$. Dokážeme ekvivalenciu nasledovných dvoch tvrdení:

$$|AB| + |CD| = |AC| + |BD|\,, \tag{1}$$
$$|\sphericalangle C(AB)D| + |\sphericalangle A(CD)B| = |\sphericalangle B(AC)D| + |\sphericalangle A(BD)C|\,. \tag{2}$$

Z tejto ekvivalencie potom vyplynie tvrdenie v zadaní.

Dôkaz implikácie (1)$\Longrightarrow$(2). Nech I je stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC a nech sa táto kružnica dotýka jeho strán AB, AC, BC postupne v bodoch E, F, K. Nech J je stred kružnice vpísanej trojuholníku BCD a nech sa táto kružnica dotýka jeho strán BD, CD, BC postupne v bodoch G, H, L. Potom z rovnosti (1) dostávame

$$|AE| + |BE| + |CH| + |DH| = |AF| + |CF| + |BG| + |DG|\,. \tag{3}$$

Z vlastností vpísanej kružnice ale vyplýva

$$\begin{aligned} |AE| &= |AF|, \qquad & |BE| &= |BK|, \qquad & |CF| &= |CK|,\\ |DG| &= |DH|, \qquad & |BG| &= |BL|, \qquad & |CH| &= |CL|. \end{aligned}$$

To znamená, že rovnosť (3) možno prepísať do tvaru

$$|BK| + |CL| = |BL| + |CK|\,.$$

A pretože $|BK| + |CK| = |BL| + |CL|$ $(= |BC|)$, tak $|BK| = |BL|$ a $|CK| = |CL|$, čiže body K a L splývajú.

Rovina IJK je zrejme kolmá na priamku BC. Potom sa priamky (v nej ležiace), ktoré prechádzajú bodmi I a J a sú postupne kolmé na roviny ABC a BC pretínajú v bode, ktorý označíme S. Úsečky IE, IF, IK sú rovnako dlhé (sú to polomery jednej kružnice). To znamená, že pravouhlé trojuholníky SIE, SIF, SIK sú zhodné. Odtiaľ dostávame rovnosti

$$|\sphericalangle SEI| = |\sphericalangle SFI|\,, \qquad |SE| = |SF| = |SK|\,. \tag{4}$$

Analogicky dostávame z trojuholníkov SJG, SJH, SJK rovnosti

$$|\sphericalangle SGJ| = |\sphericalangle SHJ|\,, \qquad |SG| = |SH| = |SK|\,. \tag{5}$$

Takže S je stredom guľovej plochy, ktorá sa dotýka hrán AB, AC, BC, BD, CD postupne v bodoch E, F, K, G, H.

Označme P a Q kolmé priemety bodu S do rovín ABD a ACD. Pravouhlé trojuholníky SPE a SPG majú spoločnú odvesnu SP a zhodné základne SE a SG (sú to úsečky rovnakej dĺžky ako SK), a teda platí rovnosť uhlov

$$|\sphericalangle SEP| = |\sphericalangle SGP|\,. \tag{6}$$

Analogicky dostávame aj

$$|\sphericalangle SFQ| = |\sphericalangle SHQ|\,. \tag{7}$$

Body E, F, G, H sú teda kolmými priemetmi bodu S na hrany AB, AC, BD, CD. Naviac

body S, E, P, I ležia v rovine kolmej na priamku AB,
body S, F, Q, I ležia v rovine kolmej na priamku AC,
body S, G, P, J ležia v rovine kolmej na priamku BD,
body S, H, Q, J ležia v rovine kolmej na priamku CD.

Odtiaľ dostávame (vyplýva odtiaľ prvá rovnosť, ostatné dostávame analogicky)

$$\begin{aligned}
|\sphericalangle C(AB)D| &= |\sphericalangle IEP| = |\sphericalangle IES| + |\sphericalangle SEP|\,,\\
|\sphericalangle A(C)D|B &= |\sphericalangle QHJ| = |\sphericalangle QHS| + |\sphericalangle SHJ|\,,\\
|\sphericalangle B(AC)|D &= |\sphericalangle IFQ| = |\sphericalangle IFS| + |\sphericalangle SFQ|\,,\\
|\sphericalangle A(BD)C| &= |\sphericalangle PGJ| = |\sphericalangle PGS| + |\sphericalangle SGJ|\,.
\end{aligned}$$

Rovnosť (2) je potom priamym dôsledkom vzťahov (4), (5), (6), (7). To platí ale len ak bod S leží vnútri štvorstena $ABCD$. V opačnom prípade, stačí v posledných rovnostiach príslušné uhly odčítať (ak napr. bod S leží v polpriestore opačnom k polpriestoru, ktorý je určený rovinou ABD a bodom C, tak sa odčítajú $|\sphericalangle SEP|$ a $|\sphericalangle SGP|$). Tým je implikácia (1)$\Longrightarrow$(2) dokázaná.

Pri dôkaze opačnej implikácie využijeme nasledovnú *Lemu* (je zrejmé, že naozaj platí).

Lema. V každom štvorstene je súčet dvoch uhlov pri nejakom vrchole väčší ako tretí uhol.

Dôkaz implikácie (2)$\Longrightarrow$(1). Predpokladajme, že platí rovnosť (2) a neplatí (1). Bez ujmy na všeobecnosti nech

$$|AB| + |CD| > |AC| + |BD| \tag{9}$$

(v opačnom prípade stačí príslušne zameniť označenie).

Uvažujme bod X posúvajúci sa pozdĺž hrany CD. Ak $X = C$, tak rozdiel $|BX| - |CX| = |BC| > |AB| - |AC|$. Ak $X = D$, potom $|BX| - |CX| = |BD| - |CD| < |AB| - |AC|$ (podľa (9)). To znamená, že existuje taká poloha bodu X, že $|BX| - |CX| = |AB| - |AC|$, čiže

$$|AB| + |CX| = |AC| + |BX|\,.$$

Ďalej nech X je pevný bod hrany CD spĺňajúci poslednú rovnosť. Táto rovnosť je pre štvorsten $ABCX$ analogická rovnosti (1). Potom pre tento štvorsten platí aj rovnosť analogická (2), čiže

$$|\sphericalangle C(AB)X| + |\sphericalangle A(CX)B| = |\sphericalangle B(AC)X| + |\sphericalangle A(BX)C|\,. \tag{10}$$

Pretože bod X leží na úsečke CD, tak platí

$$\begin{gathered}|\sphericalangle C(AB)D| = |\sphericalangle C(AB)X| + |\sphericalangle D(AB)X|\,,\\ |\sphericalangle B(AC)|D = |\sphericalangle B(AC)X|\,, \qquad\qquad |\sphericalangle A(BD)C| = |\sphericalangle A(BD)X|\,,\\ |\sphericalangle A(C)D|B = |\sphericalangle A(CX)B|\,.\end{gathered} \tag{11}$$

Taktiež platí

$$|\sphericalangle A(BX)C| = 180^\circ - |\sphericalangle A(BX)D|\,. \tag{12}$$

Po dosadení rovností (11) do (2) a rovnosti (12) do (10) dostávame

$$\begin{gathered}|\sphericalangle C(AB)X| + |\sphericalangle D(AB)X| + |\sphericalangle A(CX)B| = |\sphericalangle B(AC)X| + |\sphericalangle A(BD)X|\,,\\ |\sphericalangle C(AB)X| + |\sphericalangle A(CX)B| = |\sphericalangle B(AC)X| + 180^\circ - |\sphericalangle A(BX)D|\,,\end{gathered}$$

ktoré nám dokopy dávajú

$$|\sphericalangle D(AB)X| = |\sphericalangle A(BD)X| + |\sphericalangle A(BX)D| - 180^\circ\,. \tag{13}$$

Nech Z je ľubovoľný bod vnútri štvorstena $ABDX$. Označme postupne U, V, W kolmé priemety bodu Z do rovín BDX, BAX, BAD. Priemetmi bodov V a W na hranu AB je ten istý bod Y (je to priemet bodu Z na AB). V štvoruholníku $ZVYW$ sú uhly pri vrcholoch V a W pravé. To znamená, že

$$|\sphericalangle A(BD)X| = |\sphericalangle VYW| = 180^\circ - |\sphericalangle VWZ|\,.$$

Analogicky platí

$$|\sphericalangle A(BD)X| = 180^\circ - |\sphericalangle UZW|\,, \qquad |\sphericalangle A(BX)D| = 180^\circ - |\sphericalangle UZV|\,.$$

Potom z (13) dostávame

$$|\sphericalangle VZW| = |\sphericalangle UZW| + |\sphericalangle UZV|\,.$$

A to je už spor: pretože $ABDX$ je (nedegenerovaný) štvorsten, tak body Z, U, V, W neležia v jednej rovine, a teda aj $ZUVW$ je (nedegenerovaný) štvorsten. Potom dostávame spor s tvrdením *Lemy*. Tým je dokázaná aj druhá implikácia.

Odtiaľ už priamo vyplýva dokazované tvrdenie (my sme dokázali trošku silnejšie tvrdenie).

Tretia séria

3.1 Vyriešime všeobecný prípad. Označme $f^{(0)}(k) = f(k)$ a $f^{(n)}(k) = f(f^{(n-1)}(k))$ pre $n \in \mathbb{N}$. Je zrejmé, že $f^{(m+n)}(k) = f^{(m)}(f^{(n)}(k))$. Všimnime si tiež, že $g(g(k)) = g(2n - k + 1) = k$ pre všetky $k \in A$. Predpokladajme, že funkcia f spĺňajúca dané podmienky existuje. Keď si teraz zvolíme k, budeme skúmať $f^{(n)}(k)$ ako funkciu premennej n, máme $f^{(n+6)} = f^{(3)}(f^{(3)}(f^{(n)}(k))) = g(g(f^{(n)}(k))) = f^{(n)}(k)$. Z toho je zrejmé, že táto funkcia je periodická a pre najmenšiu kladnú periódu T platí $T \mid 6$. Ak by $T = 2$, máme $f(f(k)) = k$, z čoho potom aj $g(k) = f(f(f(k))) = f(k)$. To je ale spor so zadaním. Ďalej $T = 1$ dáva $f(k) = k$, čo opäť vedie na $f(f(k)) = k$. Pre $T = 3$ by sme dostali $2n - k + 1 = g(k) = f^{(3)}(k) = k$. To ale nikdy nenastane (kvôli parite). Ostáva teda jedine $T = 6$.

Zostrojme teraz pre každé $k \in A$ množinu $O_k = \{f^{(n)}(k);\ n \in \mathbb{N}_0\}$, ktorá obsahuje (vzhľadom na periódu $T = 6$) šesť prvkov. Keď teraz pre nejaké $l \in A$ platí $l \in O_k$, potom zrejme $O_l \subseteq O_k$ (lebo O_k obsahuje l a teda aj $f(l)$, $f^{(2)}(l)$, atď). Množiny O_k a O_l majú však obe práve šesť prvkov, preto $O_l = O_k$. Potom však $\{O_k; k \in A\}$ je rozkladom A na šesťprvkové množiny, čiže počet prvkov A musí byť deliteľný šiestimi, teda $6 \mid 2n$, z čoho dostávame nutnú podmienku existencie funkcie f: $3 \mid n$. To, že táto podmienka je aj postačujúca, ukážeme konštrukciou funkcie f pre každé n deliteľné tromi. Nech $n = 3m$ ($m \in \mathbb{N}$). Definujme funkciu f pre $k = 1, 2, \dots, n$ nasledovne: $f(k) = k + m$, $f(k + m) = k + 2m$, $f(k + 2m) = 2n - k + 1$, $f(k + 3m) = m - k + 1$, $f(k + 4m) = k + 3m$ a $f(k + 5m) = k + 4m$. Je zrejmé, že $f(k) \neq g(k)$ a $f^{(3)}(k) = g(k)$ si čitateľ ľahko overí sám.

Špeciálne pre $n = 999$ taká funkcia existuje a pre $n = 1000$ neexistuje.

3.2 *(Katarína Quittnerová)* Nech $z_1, z_2, \dots, z_m$ (kde $m \geqq 1$) sú celé čísla také, že $-1 > z_1 > z_2 > \dots > z_m$. Položme $A_p = \sum_{i=p}^{m} z_i^{z_i}$ (takže $A_1 = z_1^{z_1} + A_2$). Potom

$$|A_2| = \left|\sum_{i=2}^{m} z_i^{z_i}\right| \leqq \sum_{i=2}^{m} |z_i^{z_i}| = \sum_{i=2}^{m} |z_i|^{-|z_i|} < \sum_{i=2}^{m} |z_1|^{-|z_i|} < \sum_{j=|z_1|+1}^{\infty} |z_1|^{-j} =$$

$$= \sum_{j=|z_1|+1}^{\infty} \frac{1}{|z_1|^j} = \frac{1}{|z_1|^{|z_1|+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{|z_1|}} = |z_1|^{-|z_1|} \cdot \frac{1}{|z_1| - 1} \leqq |z_1|^{-|z_1|} .$$

To znamená, že $|A_2| < |z_1|^{-|z_1|}$. Potom

$$0 < |z_1|^{-|z_1|} - |A_2| \leqq |A_1| \leqq |z_1|^{-|z_1|} + |A_2| < 2|z_1|^{-|z_1|} \leqq 1$$

Pretože x^x je celé číslo pre $x \geqq -1$ celé nenulové, a A_1 nie je celé číslo (pretože $0 < |A_1| < 1$), tak buď medzi číslami x_i nie sú žiadne čísla menšie než -1 alebo všetky $x_1, \dots, x_k$ aj x_{k+1} sú menšie ako -1. Rozoberieme tieto prípady.

1) ak sú všetky menšie ako -1, môžeme uvažovať sumu $A_0 = A_1 - x_{k+1}^{x_{k+1}}$. Označme najväčšie (najmenšie v absolútnej hodnote) z čísel $x_1, \dots, x_{k+1}$ ako z. Potom $A_0 = z^z + A_0'$ (prípadne $A_0 = -(z^z + A_0')$ ak $z = x_{k+1}$). Analogickou úvahou dostaneme $|A_0'| < |z|^{-|z|}$, a teda $0 < |z|^{-|z|} - |A_0'| = |z|^{-|z|} - |-A_0'| \leqq |z^z + A_0'| = |A_0|$. Takže v tomto prípade rovnica nemá riešenie.
2) ak sú všetky $x_1, \dots, x_{k+1}$ aspoň -1, označme najväčšie z nich M. Pretože $k \geqq 2$ a čísla sú navzájom rôzne, tak $M \geqq 2$. Keby $M = x_i$ pre nejaké $i \leqq k$, potom

$$x_1^{x_1} + \dots + x_k^{x_k} \geqq M^M - 1 \geqq 2M^{M-1} - 1 >$$
$$> M^{M-1} - 1 + (M-1)^{M-1} > (M-1)^{M-1} \geqq x_{k+1}^{x_{k+1}} .$$

To je ale spor, teda nutne $M = x_{k+1}$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $x_{k+1} > x_k > \ldots > x_1$. Indukciou vzhľadom na k ukážme, že pre celé nenulové $x_i \geqq -1$ spĺňajúce nerovnosti $x_{k+1} > x_k > \ldots > x_1$ platí

$$x_1^{x_1} + \ldots + x_k^{x_k} < x_{k+1}^{x_{k+1}}\,.$$

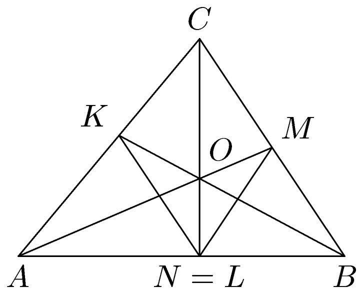
Pre $k = 1$ je tvrdenie zrejmé. Teraz nech tvrdenie platí pre $k-1$. Dokážeme, že platí aj pre k. Majme teda $x_{k+1} > x_k$. Potom $x_{k+1} \geqq 2$ a platí

$$x_{k+1}^{x_{k+1}} \geqq 2x_{k+1}^{x_{k+1}-1} \geqq 2x_{k+1}^{x_k} > 2x_k^{x_k} > x_k^{x_k} + \ldots + x_1^{x_1}\,.$$

Teda rovnica nemá ani v tomto prípade riešenie.

3.3 Označme N priesečník priamky CO s AB. Priamky AM, BK, CN sa pretínajú v jednom bode O. Potom z *Cèvovej vety* vyplýva

$$\frac{|AN|}{|NB|} \cdot \frac{|BM|}{|MC|} \cdot \frac{|CK|}{|KA|} = 1\,.$$



Obr. 37

Priamka BK je osou uhla pri vrchole B, a teda platí

$$\frac{|CK|}{|KA|} = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{4}{5}\,. \qquad (1)$$

Keďže platí $|BM| = |CM|$ (pretože AM je ťažnica), tak dostávame

$$\frac{|NB|}{|AN|} = \frac{4}{5}\,. \qquad (2)$$

Na druhej strane $|AN| + |NB| = |AB| = 15$, potom

$$|AN| = \frac{25}{3}\,, \qquad |BN| = \frac{20}{3}\,.$$

Z (1) a (2) vyplýva, že priamky BC a KL sú rovnobežné. Nech D je päta výšky na stranu AB. Potom platí

$$|AD|^2 - |BD|^2 = (|AC|^2 - |CD|^2) - (|BC|^2 - |CD|^2) = \\ = |AC|^2 - |BC|^2 = 13^2 - 12^2 = 25\,.$$

Ďalej platí

$$|AN|^2 - |BN|^2 = \left(\frac{25}{3}\right)^2 - \left(\frac{20}{3}\right)^2 = 25\,.$$

Na strane AB je však iba jeden bod X, pre ktorý platí $|AX|^2 - |BX|^2 = 25$. Z toho, ale vyplýva, že N, D a L sú totožné body. Bod M je stredom opísanej kružnice trojuholníku BCN. Teda trojuholník CMN je rovnoramenný a platí

$$|\sphericalangle CNM| = |\sphericalangle NCM|.$$

Keďže priamka KN je rovnobežná s priamkou BC, potom

$$|\sphericalangle CNK| = |\sphericalangle NCM|.$$

Keďže bod L je totožný s bodom N, tak platí

$$|\sphericalangle OLK| = |\sphericalangle CNK| = |\sphericalangle NCM| = |\sphericalangle CNM| = |\sphericalangle OLM|.$$

3.4 *(Vladimír Marko)* Dokážeme, že také prirodzené číslo n neexistuje.

Pre $n = 2$ je súčet $n - 1$ čísel len jedno číslo, ktoré zrejme patrí len do tej množiny, v ktorej je, a teda toto n nevyhovuje.

Pre $n \geqq 3$ budeme postupovať sporom. Nech sa dá množina $\mathbb{N}$ rozdeliť na n podmnožín spĺňajúcich danú podmienku. Potom medzi týmito množinami (podľa *Dirichletovho princípu*) existuje množina $\mathcal{A}$, ktorá obsahuje aspoň dve čísla z množiny $\{1, 2, \dots, n+1\}$, zrejme je rozdiel medzi týmito dvomi číslami nanajvýš n. Rozlíšime dva prípady:

- Existuje taká množina $\mathcal{A}$, že rozdiel medzi niektorými jej prvkami je menší ako n, označme tieto čísla x a $x + d$, $d < n$. Vezmime teraz ľubovoľnú inú množinu $\mathcal{B}$ a jej ľubovoľný prvok y. Potom

$$y \in \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad y + d \in \mathcal{B} \cup \mathcal{A}. \tag{1}$$

  Ak by totiž $y + d \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C} \neq \mathcal{A}, \mathcal{B}$, potom by sme vzali súčet S ľubovoľných $n - 3$ čísel z množín iných ako $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ (prípadne pre $n = 3$ máme $S = 0$), potom $S + x + (y + d)$ má patriť $\mathcal{B}$ a $S + (x + d) + y$ má patriť $\mathcal{C}$, čo je spor, lebo $S + (x + d) + y = S + x + (y + d)$.

  Teraz vezmime množinu $\mathcal{A}$ tak, že najmenší rozdiel medzi jej dvomi prvkami d je najmenší zo všetkých množín rozkladu množiny $\mathbb{N}$. Potom čísla $x+1, x+2, \dots, x+d-1$ musia patriť rôznym množinám rôznym od $\mathcal{A}$. Čísla $x + d + 1, x + d + 2, \dots, x + 2d - 1$ podľa už dokázaného tvrdenia (1) patria buď $\mathcal{A}$, čo vzhľadom na minimalitu d nie je možné, alebo tej istej množine, ktorá obsahuje číslo o d menšie. Preto dvojice $(x + 1, x + d + 1)$, $(x + 2, x + d + 2)$ až $(x + d - 1, x + 2d - 1)$ patria do jednej množiny. Teraz však zrejme môžeme množinu $\mathcal{A}'$ obsahujúcu dvojicu $(x + 1, x + d + 1)$ zvoliť za počiatočnú a rovnakou úvahou dostaneme, že dvojica prvkov $(x + 1 + (d - 1), x + d + 1 + (d - 1)) = (x + d, x + 2d)$ patrí tej istej množine, čiže aj $x + 2d \in \mathcal{A}$. Dvojicu prvkov $(x + d, x + 2d)$ môžeme teraz zvoliť za $(x', x' + d)$ atď. Postupne dostávame, že v množine $\mathcal{A}$ ležia všetky prvky

$x, x+d, x+2d, \dots, x+kd, \dots$, prvky $x+1, x+d+1, x+2d+1, \dots, x+kd+1, \dots$ v ďalšej množine atď.

Tvrdenie (1) zrejme platí aj naopak (ľahko sa obrátia úvahy), čiže

$$y + d \in \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad y \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$$

a celú predchádzajúcu úvahu možno rozšíriť aj na čísla menšie ako x a dostávame rozklad $\mathbb{N}$ nie na n ale na d, $d < n$ množín, čo je spor.

- Neexistuje množina $\mathcal{A}$ s číslami $x, x+d$, $d < n$. Keďže sme však už dokázali, že $d \leqq n$, potom použitím úvah ako v predchádzajúcom prípade dostaneme rozklad množiny $\mathbb{N}$ na zvyškové triedy modulo n, čiže v jednotlivých množinách budú čísla dávajúce ten istý zvyšok po delení číslom n. Potom ak sčítame po jednom čísle z každej množiny a súčet označíme S, zrejme

$$S \equiv \sum_{i=1}^{n} i \pmod{n}.$$

Číslo $S-1$ musí patriť zvyškovej triede obsahujúcej 1, čiže $S-1 \equiv 1 \pmod{n}$ a podobne $S-2 \equiv 2 \pmod{n}$. Tak však dostávame, že zároveň $2 \equiv S \equiv 4 \pmod{n}$, čo nie je možné, lebo $2 \equiv 4 \pmod{n}$ len pre $n \leqq 2$. Opäť dostávame spor.

Tvrdenie je teda dokázané, hľadaný rozklad neexistuje.

3.5 *(Peter Novotný)* Položme

$$A = \frac{n(n-1)}{2} \sum_{i<j} x_i x_j - \left(\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) x_i \right) \left(\sum_{j=2}^{n} (j-1) x_j \right).$$

Potom je nerovnosť v zadaní ekvivalentná s $A > 0$. Majme $1 \leqq i < j \leqq n$. Ľahko možno zistiť, že koeficient v A pri $x_i x_j$ je $\frac{1}{2} n(n-1) - (n-i)(j-1) - (n-j)(i-1)$. A koeficient pri x_i^2 (pre $1 \leqq i \leqq n$) je $(n-i)(i-1)$. Teda

$$A = \sum_{i<j} x_i x_j \left(\frac{n(n-1)}{2} - (n-i)(j-1) - (n-j)(i-1) \right) - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 (n-i)(i-1).$$

Skúmajme ďalej súčet

$$B = \sum_{1 \leqq t < r \leqq s < p \leqq n} (x_p - x_r)(x_s - x_t) = \sum_{1 \leqq t < r \leqq s < p \leqq n} (x_p x_s - x_r x_s - x_p x_t + x_r x_t).$$

Podľa zadania platí $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. To znamená, že $B > 0$.

Ukážeme, že $B = A$. Na to stačí vypočítať koeficienty v B pri x_i^2 a pri $x_i x_j$. Nech teda $1 \leqq i \leqq n$. Po sčítaní B možno dostať x_i^2 len pre $i = r = s$. Potom p môže nadobúdať hodnoty $i+1, i+2, \dots, n$, čo je $n-i$ možností, a t môže nadobúdať hodnoty $1, 2, \dots, i-1$, čo je $i-1$ možností. Koeficient pri x_i^2 teda bude $-(n-i)(i-1)$.

Ďalej majme $1 \leqq i < j \leqq n$. Na určenie koeficientu pri $x_i x_j$ rozoberieme niekoľko možností (podľa toho ako ten člen dostaneme).

1) Ak $i = s$, $j = p$, tak máme $1 \leqq t < r \leqq i < j \leqq n$. Ľahko možno vypočítať, že koeficient pri $x_i x_j$ bude $\frac{1}{2}i(i-1)$.
2) Ak $i = r$, $j = s$, tak máme $1 \leqq t < i \leqq j < p \leqq n$. Dostávame koeficient $(n-j)(i-1)$.
3) Ak $i = t$, $j = p$, tak máme $1 \leqq i < r \leqq s < j \leqq n$. Dostávame koeficient $\frac{1}{2}(j-i)(j-i-1)$.
4) Ak $i = t$, $j = r$, tak máme $1 \leqq i < j \leqq s < p \leqq n$. Dostávame koeficient $\frac{1}{2}(n-j)(n-j+1)$.

Po roznásobení ľahko dostávame, že

$$\frac{n(n-1)}{2} - (n-i)(j-1) - (n-j)(i-1) =$$
$$= \frac{i(i-1)}{2} - (n-i)(j-1) - \frac{(j-i)(j-i-1)}{2} + \frac{(n-j)(n-j+1)}{2}.$$

Odtiaľ porovnaním koeficientov okamžite zistíme, že $A = B$. No a využitím $B > 0$ dostávame dokazovanú nerovnosť.

3.6 *(Tomáš Jurík)*

a) Zrejme P neleží na priamke p, teda PB je os uhla APC a PC os uhla BPD. Keďže os uhla delí protiľahlú stranu v pomere priľahlých strán, platí:

$$\frac{|AP|}{|CP|} = \frac{a}{b}, \qquad \frac{|BP|}{|DP|} = \frac{b}{c}.$$

Preto bod P musí ležať v priesečníku dvoch Apollóniových kružníc k_1, k_2 nad úsečkami AC a BD (v prípade $a = b$, príp. $b = c$ sa z Apollóniovej kružnice stáva priamka kolmá na p). Úloha má zrejme vždy nula alebo dve riešenia.

b) Vzhľadom na symetriu možno predpokladať $a \geqq c$. Rozlíšime niekoľko prípadov:

- $a = b > c$; vtedy je Apollóniovou kružnicou k_1 priamka kolmá na p v bode B a k_2 je kružnica s priemerom CX, kde X leží na polpriamke $\overrightarrow{CD}$. Zrejme v tomto prípade úloha nemá riešenie. Pre dĺžky a, b, c platí

$$(a+b)(b+c) = 2a(a+c) = 2a^2 + 2ac > 4ac,$$

nerovnosť v zadaní nie je splnená.

- $a > b = c$; v tomto prípade je Apollóniovou kružnicou k_2 priamka kolmá na p v bode C a k_1 je kružnica s priemerom BX, kde X leží na polpriamke $\overrightarrow{CD}$. Úloha má zrejme v tomto prípade vždy dve riešenia. Pre dĺžky a, b, c platí

$$(a+b)(b+c) = (a+b)2b = 2ab + 2b^2 < 4ab < 4ac,$$

nerovnosť v zadaní je splnená.

- $a = b = c$; obe Apollóniove kružnice sú priamky, a sú zrejme disjunktné. Pre dĺžky a, b, c platí
$$(a+b)\,(b+c) = 4a^2 = 4ac\,,$$
nerovnosť v zadaní nie je splnená.
- $a = c < b$; kružnica k_1 má priemer X_1B, kde X_1 leží na polpriamke $\overrightarrow{BA}$ a k_2 má priemer BX_2, kde X_2 leží na polpriamke $\overrightarrow{CD}$. Tieto kružnice sa zrejme nepretínajú a úloha nemá riešenie. Pre dĺžky a, b, c platí
$$(a+b)\,(b+c) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 > 4a^2 = 4ac\,,$$
nerovnosť v zadaní nie je splnená.
- $a = c > b$; kružnica k_1 má priemer BX_1, kde X_1 leží na polpriamke $\overrightarrow{CD}$ a k_2 má priemer X_2C, kde X_2 leží na polpriamke $\overrightarrow{BA}$. Tieto kružnice sa zrejme pretínajú a úloha má dve riešenia. Pre dĺžky a, b, c platí
$$(a+b)\,(b+c) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 < 4a^2 = 4ac\,,$$
nerovnosť v zadaní je splnená.
- $a > c > b$; geometrická situácia je rovnaká ako v prípade $a = c > b$, a teda úloha má dve riešenia. Pre dĺžky a, b, c platí
$$(a+b)\,(b+c) < 2a \cdot 2c = 4ac\,,$$
nerovnosť v zadaní je splnená.
- $b > a > c$; geometrická situácia je rovnaká ako v prípade $a = c < b$, a teda úloha nemá riešenie. Pre dĺžky a, b, c platí
$$(a+b)\,(b+c) > 2a \cdot 2c = 4ac\,,$$
nerovnosť v zadaní nie je splnená.
- $a > b > c$; kružnica k_1 má priemer BX_1, kde X_1 leží na polpriamke $\overrightarrow{CD}$ a k_2 má priemer CX_2, kde X_2 leží na polpriamke $\overrightarrow{CD}$. Tieto kružnice majú neprázdny prienik mimo p práve vtedy, keď majú neprázdny prienik úsečky BX_1 a CX_2, teda zrejme keď X_1 leží na úsečke CX_2 bez jej krajných bodov. Tentokrát musíme určiť presnú polohu bodov X_1, X_2. Označme vzdialenosti $|CX_1| = y_1$ a $|DX_2| = y_2$. Keďže $\dfrac{AX_1}{CX_1} = \dfrac{a}{b}$, tak $\dfrac{a+b+c}{y_1} = \dfrac{a}{b}$. Preto platí rovnosť $ay_1 = ab + b^2 + by_1$, ktorú možno upraviť na $y_1 = \dfrac{b(a+b)}{a-b}$. Podobne možno odvodiť, že $y_2 = \dfrac{c(b+c)}{b-c}$. Zrejme $X_1 \in CX_2$ práve vtedy, keď $|CX_1| < |CX_2|$, t.j. keď $|CX_1| < |DX_2| + |CD|$. Z tejto rovnosti po dosadení
$$\frac{b(a+b)}{a-b} < c + \frac{c(b+c)}{b-c} = \frac{2bc}{b-c}\,.$$

Jednoduchými ekvivalentnými úpravami ($b > c$) možno túto nerovnosť upraviť na

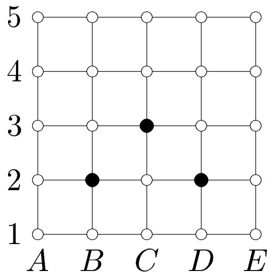
$$(a+b)\,(b+c) < 4ac\,.$$

Tým sme preverili všetky prípady a dokázali, že bod P existuje práve vtedy, keď je splnená nerovnosť zo zadania.

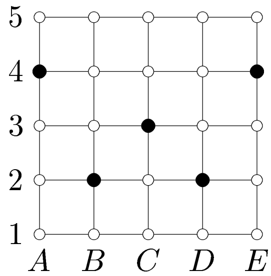
3.7 Na úvod pár úvah, ktoré využijeme v ďalšom texte. Označme 1. až 5. radom jednotlivé rady zdola nahor. Ľahko nahliadneme, že body 1. a 2. radu tvoria vrcholy štyroch štvorčekov 1×1, body 1. a 3. radu troch štvorčekov 2×2, body 1. a 4. radu dvoch štvorčekov 3×3 a 1. a 5. radu tvoria vrcholy jedného štvorca 4×4. To nás vedie k záveru, že z 1. a 2. radu musíme spolu vybrať aspoň dva vrcholy, aby nezostali štyri vrcholy tvoriace jeden zo spomínaných štvorčekov 1×1. Úvahu zovšeobecníme a dostávame, že na „zrušenie“ štvorčekov 1×1 v dvoch susedných radoch musíme z týchto dokopy odobrať aspoň dva vrcholy. Podobne na „zrušenie“ štvorčekov 2×2 s vrcholmi v dvoch radoch vzdialených 2, ako aj štvorčekov 3×3 s vrcholmi v dvoch radoch vzdialených 3, musíme odobrať z týchto radov spolu aspoň dva vrcholy. Naopak, na „zrušenie“ štvorca 4×4 stačí odobrať jeden vrchol.

Teraz ukážeme, že spolu musíme odobrať najmenej osem vrcholov. Dokážeme to sporom - predpokladajme, že stačí vybrať sedem vrcholov.

Lema. Z každého radu musíme vybrať aspoň jeden vrchol.



Obr. 38

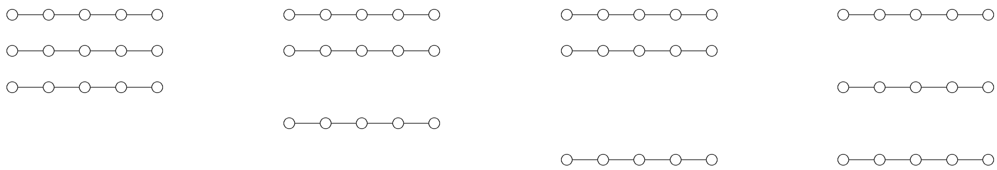


Obr. 39

Dôkaz. Najprv predpokladajme, že z 2. radu nemusíme odobrať žiaden vrchol. Tento je susedný s 1. a 3. radom. Nakoľko z 2. radu nevyberáme žiaden vrchol, musíme vybrať po dva vrcholy z 1. a 3. radu. Podobne na základe počiatočných úvah musíme aj zo 4. a 5. radu vybrať po 2 vrcholy. Spolu sme tak odobrali už osem bodov, čo je spor. Preto musíme nutne z 2. radu vybrať aspoň jeden vrchol. Analogicky musíme odobrať aspoň jeden vrchol aj z 3. a 4. radu. Predpokladajme však, že aspoň z 1. radu nemusíme vybrať žiaden vrchol. Potom však nutne z 2., 3. a 4. radu treba vybrať po dva body a z 5. radu aspoň jeden bod. Z 2. a 3. radu pritom nemôžeme odoberať vrcholy ľubovoľne, ale aby sme „zrušili“ všetky štvorčeky 1×1 a 2×2 s bodmi ležiacimi v 1. rade, musíme vybrať aspoň body B2, D2 a C3. (viď obr. 38)

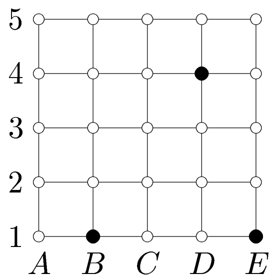
Na druhej strane, v 4. rade musíme ponechať bod C4 (inak by sme totiž „nezrušili“ všetky štvorčeky 3×3 s vrcholmi v 1. a 4. rade – dokážte si sami). Potom však, aby sme „zrušili“ všetky štvorčeky 2×2 s vrcholmi v 2. a 4. rade, nutne musíme odobrať body A4 a E4 (viď obr. 39). Tým sme však „nezrušili“ všetky štvorčeky 1×1 medzi 4. a 5. radom – to sa nám podarí iba ak odoberieme vrchol C5. Z 5. radu teraz už nemôžeme odobrať žiaden ďalší vrchol, a teda štvorec 4×4 sa už nedá „zrušiť“, čo je spor. Tým sme dokázali, že aj z 1. radu (a teda tiež z 5. radu) musíme odobrať aspoň jeden vrchol, čím je dôkaz *lemy* ukončený.

Získaný poznatok hneď využijeme. Ak totiž musíme z každého radu odobrať aspoň jeden vrchol a spolu môžeme odobrať iba 7 vrcholov, nutne existujú aspoň tri rady, z ktorých vyberieme práve jeden bod. Tieto (rady) môžu byť iba v takýchto vzájomných polohách:

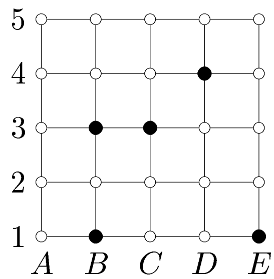


Obr. 40

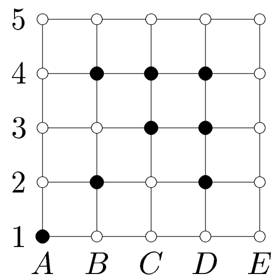
Ľahko sa presvedčíme, že s výnimkou tretej možnosti, nie je zo žiadnej inej možné odobrať tri vrcholy (z každého radu po jednom) tak, aby sme „zrušili“ všetky štvorčeky tvorené bodmi týchto troch radov (bez ujmy na všeobecnosti stačí začať tak ako na obrázkoch). Zostáva teda vyskúšať tretiu možnosť. Spočíva v rozložení znázornenom na obr. 41. Všimnime si teraz štvorčeky 2×2 medzi 3. a 5. radom. Ak neodoberieme vrchol C3, musíme kvôli nim odobrať body A3 a E3, tým sme však „nezrušili“ štvorček B3-C4. Preto musíme nutne odobrať vrchol C3 a po ňom aj vrchol B3 (jediná možnosť ako „zrušiť“ zároveň všetky štvorčeky 1×1 medzi 3. a 4. radom a taktiež štvorčeky 2×2 medzi 1. a 3. radom (viď. obr. 42). Z 2. radu však už nie sme schopní odobrať iba dva vrcholy, aby sme „zrušili“ všetky zvyšné štvorčeky, čo je spor.



Obr. 41



Obr. 42



Obr. 43

Tým sme dokázali, že potrebujeme odobrať minimálne osem vrcholov. Jeden zo spôsobov ako je to možné, ukazuje obr. 43. Mimochodom, vďaka dokázanému môžeme v pôvodnej úlohe (štvorčeková sieť 9×9) zdola ohraničiť minimálny počet odobraných vrcholov číslom $4 \cdot 8 = 32$.

Štvrtá séria

4.1 Zaoberajme sa najprv prípadom, keď je niektoré z čísel x, y, z záporné (nech $z < 0$). Potom z nerovnosti $(x-1)^2+(y-1)^2 \geqq 0$ dostávame $x+y \leqq 1+\frac{1}{2}(x^2+y^2) < 1+1 = 2$. Okrem toho $xy \leqq \frac{1}{2}(x^2+y^2) < 1$. Potom $z(xy-1) > 0$, čiže $xyz > z$. No a odtiaľ už dostávame $2 + xyz > x + y + z$.

Ďalej označme $A = 2 + xyz - (x + y + z)$, $B = x^2 + y^2 + z^2 - 2$ a zaoberajme sa prípadom, keď sú všetky čísla x, y, z nezáporné. Potom môžu nastať dve možnosti.

1) Ak $(x-1)(y-1)(z-1) \geqq 0$, potom

$$2A + B = (x + y + z - 2)^2 + 2(x-1)(y-1)(z-1) \geqq 0\,.$$

To znamená, že ak $B \leqq 0$, tak nutne $A \geqq 0$.

2) Nech $(x-1)(y-1)(z-1) < 0$. Ak by bolo jedno z čísel $x-1, y-1, z-1$ záporné a ostatné dve kladné, potom nie je splnená rovnosť $B \leqq 0$. Teda platí $0 \leqq x, y, z < 1$. Potom ale

$$A = (1-x)(1-y) + (1-xy)(1-z) \geqq 0\,.$$

Tým sme dokázali požadovanú nerovnosť.

4.2 *(Peter Májek)* Označme P stred guľovej plochy prechádzajúcej bodmi A, B, C, A_1, B_1, C_1. Premietnime si kolmo celý štvorsten $ABCS$ do roviny ABS. Priemety bodov O a P označme po rade O' a P'. Keďže bod O má rovnakú vzdialenosť od bodov S, A_1, B_1, tak aj jeho kolmý priemet bude mať rovnakú vzdialenosť od bodov S, A_1, B_1, a teda bude stredom kružnice opísanej trojuholníku SA_1B_1 (v rovine SA_1B_1). Analogicky by sme ukázali, že bod P' je stred kružnice, ktorá prechádza bodmi A, B, A_1, B_1.

Predpokladajme, že bod O' leží vnútri trojuholníka ABC. Ak by ležal na jeho obvode, alebo mimo neho, mohli by sme previesť analogické úvahy. Označme $\alpha = |\sphericalangle SAB|$, $\beta = |\sphericalangle SBA|$. Štvoruholník ABB_1A_1 je tetivový, takže

$$|\sphericalangle BB_1A_1| = \pi - \alpha\,, \qquad |\sphericalangle AA_1B_1| = \pi - \beta\,.$$

Ale uhly A_1B_1S a BB_1A_1 sú susedné, teda $|\sphericalangle A_1B_1S| = \alpha$ a $|\sphericalangle B_1A_1S| = \beta$. Ďalej označme B_0 pätu kolmice z bodu O' na úsečku AS a S_0 priesečník priamok SO' a AB. Z vety o obvodových a stredových uhloch vyplýva $|\sphericalangle SO'B_0| = \alpha$. Z podobnosti trojuholníkov AS_0S a $O'B_0S$ (majú dva zhodné uhly) dostávame $SO' \perp AB$. Odtiaľ a z kolmosti rovín SOO' a SAB vidno, že aj priamka AB je kolmá na rovinu SOO', a teda $SO \perp AB$. Analogicky by sme ukázali, že $SO \perp AC$, čo znamená, že priamka SO je kolmá na rovinu ABC. Tým sme dokázali, čo bolo treba.

4.3 Označme D množinu všetkých miest Dištancie. Zvoľme si ľubovoľné mesto M_1. Podľa zadania potom musí existovať nejaké mesto $M_2 \in D \setminus \{M_1\}$ vzdialené od M_1 nanajvýš d. Medzi mestami M_1 a M_2 postavíme prvú cestu.

Podobne musí byť vzdialenosť niektorého z miest M_1, M_2 od niektorého mesta $M_3 \in D \setminus \{M_1, M_2\}$ nanajvýš d. Tu postavíme druhú cestu.

Týmto spôsobom nájdeme postupne pre $k = 4, 5, \dots, n$ mesto M_k vzdialené nanajvýš d od niektorého z miest M_1, M_2, ..., M_{k-1}. Medzi týmito dvoma mestami postavíme $(k-1)$-vú cestu, čím mesto M_k „napojíme“ na sieť ciest medzi mestami M_1, M_2, ..., M_{k-1}, po ktorej sa dá dostať z každého mesta M_i do mesta M_j, i, $j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, $i \neq j$. Tým sme splnili podmienky zadania.

4.4 a) Predpokladajme, že f, g vyhovujú pre všetky $x \in \mathbb{R}$ podmienkam

$$f(g(x)) = x^2, \tag{1}$$
$$g(f(x)) = x^3. \tag{2}$$

Nech pre $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ platí $f(x_1) = f(x_2)$. Potom z $x_1^3 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2^3$ dostávame $x_1 = x_2$, čo znamená, že funkcia f je prostá. Ďalej pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí (dosadením $f(x)$ za x do (1) a aplikovaním f na obe strany rovnosti (2))

$$f(x)^2 = f(g(f(x))) = f(x^3)\,.$$

Ak dosadíme za x postupne $-1, 0, 1$, dostávame $f(0), f(-1), f(1) \in \{0, 1\}$, čo je ale spor s tým, že f je prostá, lebo máme len dve rôzne hodnoty pre tri rôzne argumenty. Teda také f, g neexistujú.

b) Funkcie s požadovanými vlastnosťami existujú, napríklad:

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{\sqrt[2]{|\ln|x||}} & \text{pre } x \neq 0, -1, 1, \\ 1 & \text{pre } x = -1, 1, \\ 0 & \text{pre } x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} |x|^{|\ln|x||} & \text{pre } x \neq 0, \\ 0 & \text{pre } x = 0. \end{cases}$$

Ostáva ešte overiť, že uvedené funkcie vyhovujú zadaným vzťahom (pozor na podmienky!).

4.5 Nech spomedzi čísel k_i je jedno rovné $-(n+2)^2$, ďalej $\big((n+2)^{1997} + (n+2)\big)$ čísel rovných $n+2$ a p čísel rovných -1 (hodnotu p určíme neskôr). Potom

$$\sum_i k_i = (n+2)^{1998} - p = \sum_i k_i^{1997}\,.$$

Pritom počet čísel k_i je $m + 4 = (n+2)^{1997} + (n+2) + 1 + p$. Naviac má platiť rovnosť

$$mn = \big((n+2)^{1997} + (n+2) + p - 3\big)\, n = \sum_i k_i = (n+2)^{1998} - p\,.$$

Odtiaľ dostávame pre p podmienku

$$p(n+1) = (n+2)^{1998} - n(n+2)^{1997} - n(n+2) + 3n\,.$$

Zrejme je výraz na pravej strane kladný. Stačí už len dokázať, že je deliteľný $n+1$. Ale $(n+2)^{1998} - n(n+2)^{1997} - n(n+2) + 3n \equiv 1 - (-1)1 - (-1)1 - 3 = 0 \pmod{n+1}$.

Tým sme dokázali, že pre nami zvolené m a čísla k_i sú splnené podmienky zadania.

4.6 *(Miroslava Sotáková)* Vypočítajme veľkosti uhlov $|\sphericalangle BAD| = \varphi_1$ a $|\sphericalangle BEC| = \varphi_2$. Tieto uhly sú rovnaké práve vtedy, keď sú priamky EC a AD rovnobežné. Označme T_1 resp. T_2 päty kolmíc z bodu D resp. C na priamku AB. Potom dostávame

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{|T_1D|}{|T_1A|}\,.$$

Bez ujmy na všeobecnosti nech $|BC| = |AB| = 1$. Potom zo sínusových viet dostávame

$$|BD| = \frac{\sin 35^\circ}{\sin 70^\circ}\,, \qquad |T_1D| = \frac{\sin 25^\circ \sin 35^\circ}{\sin 70^\circ}\,, \qquad |AT_1| = 1 - \frac{\cos 25^\circ \sin 35^\circ}{\sin 70^\circ}\,.$$

Dosadením a úpravou pomocou goniometrických vzorcov dostaneme

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \varphi_1 &= \frac{\sin 25^\circ \sin 35^\circ}{\sin 70^\circ - \sin 35^\circ \cos 35^\circ} = \frac{\sin 25^\circ}{2\cos 35^\circ - \cos 25^\circ} = \\ &= \frac{\sin(15^\circ + 10^\circ)}{2\cos(45^\circ - 10^\circ) - \cos(15^\circ + 10^\circ)}\,.\end{aligned}$$

Ďalej vieme, že

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}\,, \qquad \cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}\,.$$

Dosadením a úpravou dostaneme

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \varphi_1 &= \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \cos 10^\circ + \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \sin 10^\circ}{\sqrt{2}(\sin 10^\circ + \cos 10^\circ) - \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \cos 10^\circ + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \sin 10^\circ} = \\ &= \frac{(\sqrt{3} - 1)\cos 10^\circ + (\sqrt{3} + 1)\sin 10^\circ}{\sqrt{3}((\sqrt{3} - 1)\cos 10^\circ + (\sqrt{3} + 1)\sin 10^\circ)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,.\end{aligned}$$

Keďže $\varphi_1 < 90^\circ$, tak potom dostávame $\varphi_1 = 30^\circ$. Ďalej vidíme, že

$$|T_2C| = \sin 80^\circ = \cos 10^\circ,$$

$$|ET_2| = |AC| - |CD| + 1 + \cos 80^\circ = 2\cos 40^\circ - \frac{\sin 75^\circ}{\sin 70^\circ} + 1 + \sin 10^\circ\,.$$

Potom úpravami dostávame

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\cos 10^\circ}{2\cos 40^\circ - \frac{\sin 75^\circ}{\sin 70^\circ} + 1 + \sin 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ}{\sqrt{3}\cos 10^\circ + (1 - \frac{\sin 75^\circ}{\sin 70^\circ})} > \frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

Keďže aj $\varphi_2 < 90°$, dostávame $\varphi_1 > 30°$. Teda $\varphi_1 \neq \varphi_2$, čo znamená, že priamky EC, AD nie sú rovnobežné.

4.7 Množina M nemôže obsahovať nulu. Keby totiž $0 \in M$, vezmeme $x \in M$, $x \neq 0$ a postupnou voľbou $a_k = \left(\frac{2}{3}\right)^k x$, $b_k = 0$ (pre $k = 0, 1, 2, \dots$) dostaneme zo vzťahu $\frac{2}{3}a_k - b_k^2 \in M$, že množina M bude nekonečná, čo je spor.

Nech $a_1, a_2, \dots, a_n$ sú všetky prvky množiny M, pričom $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

Ak $a_n > 0$, potom pre prvky $b_k = \frac{2}{3}a_k - a_n^2$ $(k = 1, 2, \dots, n-1)$ množiny M platí $b_1 < b_2 < \dots < b_{n-1}$. Naviac $b_{n-1} < \frac{2}{3}a_{n-1} < \frac{2}{3}a_n < a_n$. To znamená, že nutne musí byť $a_k = b_k$, čiže $a_k = -3a_n^2$, pre $k = 1, 2, \dots, n-1$. Ale pretože čísla a_k sú navzájom rôzne, dostávame $n = 2$.

Nech $a_n < 0$. Označme si $c_{k,l} = \frac{2}{3}a_k - a_l^2$ (pre $k, l = 1, 2, \dots, n$). Predpokladajme najprv, že $n \geqq 4$. Pretože $n-1$ prvkov $c_{n,1} < c_{n,2} < \dots < c_{n,n-1}$ množiny M sa musí rovnať niektorým z n čísel $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, musí platiť $c_{n,1} = a_1$ alebo $c_{n,2} = a_2$. Podobne (pre $n-1$ čísel $c_{n-1,1} < c_{n-1,2} < \dots < c_{n-1,n-2} < c_{n-1,n}$ a pre $n-1$ čísel $c_{n-2,1} < c_{n-2,2} < \dots < c_{n-2,n-3} < c_{n-2,n-1} < c_{n-2,n}$) dostaneme $c_{n-1,1} = a_1$ alebo $c_{n-1,1} = a_2$ a tiež $c_{n-2,1} = a_1$ alebo $c_{n-2,1} = a_2$. To ale znamená, že dve z čísel $c_{n,1}$, $c_{n-1,1}$, $c_{n-2,1}$ (a teda aj z čísel $\frac{2}{3}a_n$, $\frac{2}{3}a_{n-1}$, $\frac{2}{3}a_{n-2}$) sa musia rovnať, čo je spor.

Vyšetríme ešte prípad $a_n < 0$ pre $n = 3$ (vtedy $a_{n-2} = a_1$ a $c_{n-2,1}$ nemusí patriť do M). Musí platiť $c_{3,2} > c_{3,1} > c_{2,1}$ a $c_{2,3} > c_{1,3} > c_{1,2}$. To znamená, že $\frac{2}{3}a_3 - a_2^2 = c_{3,2} = a_3$ a $\frac{2}{3}a_1 - a_2^2 = c_{1,2} = a_1$. Takže $\frac{1}{3}a_3 = -a_2^2 = \frac{1}{3}a_1$, čo nie je možné.

Zostáva nám jedine prípad $n = 2$. Potom pre prvky a_1, a_2 musí nastať jedna z možností:

1) $\frac{2}{3}a_1 - a_2^2 = a_1$, $\frac{2}{3}a_2 - a_1^2 = a_2$,
2) $\frac{2}{3}a_1 - a_2^2 = a_2$, $\frac{2}{3}a_2 - a_1^2 = a_1$,
3) $\frac{2}{3}a_1 - a_2^2 = a_1$, $\frac{2}{3}a_2 - a_1^2 = a_1$,
4) $\frac{2}{3}a_1 - a_2^2 = a_2$, $\frac{2}{3}a_2 - a_1^2 = a_2$.

Štvrtý prípad je (po zámene a_1 a a_2) rovnaký ako tretí prípad; ak teda v treťom prípade nebudeme predpokladať $a_1 < a_2$, štvrtý prípad riešiť nemusíme. Rozoberme teraz prípady 1), 2) a 3).

1) Z rovnosti $\frac{2}{3}a_1 - a_2^2 = a_1$ vyplýva $a_1 = -3a_2^2$. Po dosadení do rovnosti $\frac{2}{3}a_2 - a_1^2 = a_2$ a po úprave dostaneme

$$a_2\left(a_2 + \frac{1}{3}\right)\left(9a_2^2 - 3a_2 + 1\right) = 0,$$

pričom kvadratická rovnica $9a_2^2 - 3a_2 + 1 = 0$ nemá reálne korene. Keďže nemôže byť ani $a_2 = 0$ a pre $a_2 = -\frac{1}{3}$ dostávame $a_1 = -\frac{1}{3} = a_2$, tak tomuto prípadu nevyhovuje žiadna množina M.

2) Z rovnosti $\frac{2}{3}a_1 - a_2^2 = a_2$ vyplýva $a_1 = \frac{3}{2}(a_2^2 + a_2)$. Po dosadení do rovnice $\frac{2}{3}a_2 - a_1^2 = a_1$ a po úprave dostaneme

$$a_2\left(a_2 + \frac{1}{3}\right)\left(9a_2^2 + 15a_2 + 10\right) = 0,$$

kde kvadratická rovnica $9a_2^2 + 15a_2 + 10 = 0$ nemá reálne korene a pre $a_2 = -\frac{1}{3}$ dostávame $a_1 = -\frac{1}{3} = a_2$. Takže ani tomuto prípadu nevyhovuje žiadna množina M.

3) Z rovnosti $\frac{2}{3}a_1 - a_2^2 = a_1$ vyplýva $a_1 = -3a_2^2$. Po dosadení do rovnice $\frac{2}{3}a_2 - a_1^2 = a^1$ a úprave dostávame

$$a_2\left(a_2 + \frac{1}{3}\right)^2\left(a_2 - \frac{2}{3}\right) = 0\,.$$

Pre $a_2 = -\frac{1}{3}$ máme $a_1 = -\frac{1}{3} = \alpha_2$, takže nutne musí byť $a_2 = \frac{2}{3}$, $a_1 = -3a_2^2 = -\frac{4}{3}$.

Jedinou množinou vyhovujúcou podmienkam úlohy je teda $M = \{\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\}$ (ľahko sa možno presvedčiť, že naozaj vyhovuje).

Piata séria

5.1 Dokazujeme sporom. Predpokladajme teda, že A je párne číslo. Potom platí rovnosť $(m+3)^n + 1 = 6km$ pre nejaké celé k. Aby na ľavej strane rovnosti bolo párne číslo, musí byť m párne. Navyše $3 \mid m^n + 1$, z čoho vyplýva, že $m = 3t + 2$ a n je nepárne. Nech $m = 2^\alpha m_1$, kde m_1 je nepárne. Keďže n je nepárne, tak $3^n + 1$ je tvaru $3 \cdot 9^{n_1} + 1 \equiv 4 \pmod 8$, z čoho využitím faktu $2^\alpha \mid 3^n + 1$ dostaneme $\alpha \leqq 2$. Keďže $m_1 \mid 3^n + 1$, zavedením označenia $a = 3^{\frac{n+1}{2}}$ (a je celé číslo) dostávame $m_1 \mid a^2 + 3$. Potom podľa *lemy* (jej znenie a dôkaz sú na konci riešenia) musí byť $m_1 = 6t_1 + 1$. Čiže $m = 2^\alpha(6t_1 + 1)$ a súčasne $m = 3t + 2$ čo nám dáva $\alpha = 1$. Potom $m = 12t_1 + 2$ a zo vzťahu $(m+3)^n + 1 = 6km$ vyplýva, že $4 \mid 5^n + 1$, čo je však nemožné.

Lema. Nech m, a sú celé čísla, pričom $(m, 6) = 1$. Potom ak $m \mid a^2 + 3$, tak $m \equiv 1 \pmod 6$.

Skôr než prejdeme k dôkazu, uvedieme nejaký komentár. Vážnejších záujemcov o túto problematiku môžeme odkázať na hocakú učebnicu elementárnej teórie čísel (či už *Kolibiar: Algebra a príbuzné disciplíny* alebo skriptá *Šalát: Vybrané kapitoly z elementárnej teórie čísel*). Majme teda nepárne prvočíslo p, a skúmajme riešiteľnosť rovnice $x^2 - a \equiv 0 \pmod p$, pričom predpokladáme $(a, p) = 1$. Hovoríme, že a je *kvadratickým zvyškom (nezvyškom)*, ak kongruencia $x^2 \equiv a \pmod p$ má (nemá) riešenie. Ľahko sa dokáže, že ak a je kvadratickým zvyškom $\pmod p$, tak kongruencia $x^2 \equiv a \pmod p$ má práve dve riešenia. Ďalej zavedieme tzv. *Legendrov symbol*

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{ak } a \text{ je kvadratický zvyšok,} \\ -1, & \text{ak } a \text{ je kvadratický nezvyšok.} \end{cases}$$

Pomocou *Malej Fermatovej vety* možno dokázať, že $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \pmod p$. Ďalej platí tzv. *Gaussov zákon reciprocity:*

Veta. *Nech p, q sú nepárne prvočísla. Potom*

$$\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}.$$

Takto vybavení už môžeme prejsť k dôkazu *lemy.*

Dôkaz lemy. Najskôr si všimnime, že tvrdenie *lemy* stačí dokázať pre prvočísla (totiž ak by bolo $m \equiv 5 \pmod 6$, tak zrejme m musí mať nejakého prvočíselného deliteľa $p \equiv 5 \pmod 6$, pre ktorého opäť platí $p \mid a^2 + 3$). Uvažujme teda $m = p$, kde $p \neq 2, 3$ je prvočíslo. Podľa *Gaussovho zákona reciprocity* platí

$$\left(\frac{p}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{3-1}{2}} = (-1)^{\frac{p-1}{2}}. \qquad (*)$$

Rozoberieme dve možnosti. Ak $p \equiv 1 \pmod 3$, potom zrejme $\left(\frac{p}{3}\right) = 1$, a z $(*)$ dostávame $\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$. Potom

$$\left(\frac{-3}{p}\right) \equiv (-3)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot 3^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot \left(\frac{3}{p}\right) \equiv (-1)^{p-1} = 1 \pmod p.$$

Teda -3 je kvadratický zvyšok $(\mathrm{mod}\ p)$ pre $p \equiv 1 \pmod 3$. V prípade $p \equiv 2 \pmod 3$ zrejme platí $\left(\frac{p}{3}\right) = -1$, a z $(*)$ dostávame $\left(\frac{3}{p}\right) = -(-1)^{\frac{p-1}{2}}$. Potom analogicky ako v predchádzajúcom prípade dostávame $\left(\frac{-3}{p}\right) \equiv -1 \pmod p$, a teda -3 je kvadratický nezvyšok.

Celkovo sme teda dostali, že -3 je kvadratický zvyšok $(\mathrm{mod}\ p)$ práve vtedy, keď $p \equiv 1 \pmod 3$. Teda z $p \mid a^2 + 3$ nutne vyplýva $p \equiv 1 \pmod 6$ (pretože $p \neq 2, 3$). Tým je dôkaz *lemy* ukončený.

5.2 Nech vrcholy trojuholníka ABC majú súradnice $A = (-4, 4)$, $B = (4, 4)$ a $C = (4a, 4b)$, kde $b > 1$. Stred štvorca zostrojeného nad AB má súradnice $S_1 = (0, 0)$. Označme $\varphi = a^2 + (b-1)^2 - 1$. Je zrejmé, že podmienka ostrého uhla pri vrchole C je ekvivalentná s tým, že bod C leží mimo kružnice s priemerom AB alebo na nej, čo pri našom označení môžeme zapísať $\varphi \geqq 0$. Stred strany BC je $S_{BC} = (2a+2, 2b+2)$ a vektor kolmý na AB je napríklad $\overrightarrow{n_1} = (2b-2, 2-2a)$. Keďže stred S_2 n-uholníka zostrojeného nad BC leží na osi úsečky BC, platí $S_2 = S_{AB} + t \cdot \overrightarrow{n_1} = \big(2a + 2 + t \cdot (2b-2),\ 2b + 2 + t \cdot (2-2a)\big)$ pre nejaké $t \in \mathbb{R}^+$ (táto polpriamka je orientovaná „von“ z trojuholníka ABC). Všimnime si, že $|\overrightarrow{n_1}| = \frac{1}{2}|AB|$, teda t predstavuje pomer polomeru kružnice vpísanej n-uholníku a polovice dĺžky jeho strany, čo pre $n \geqq 6$ je

$$t = \operatorname{cotg} \frac{180^\circ}{n} \geqq \operatorname{cotg} \frac{180^\circ}{6} = \sqrt{3},$$

pričom rovnosť nastáva iba pre $n = 6$. Podobne stred S_3 m-uholníka zostrojeného nad AC je $S_3 = S_{AC} + u \cdot \overrightarrow{n_2}$ pre nejaké $u \geqq \sqrt{3}$, kde $S_{AC} = (2a-2, 2b+2)$ a $\overrightarrow{n_2} = (2-2b, 2a+2)$ je vektor kolmý na priamku BC. Potom $S_3 = \big(2a - 2 + u \cdot (2-2b),\ 2b+2+u \cdot (2a+2)\big)$. Keďže trojuholník ABC má byť rovnostranný, musí byť bod S_3 obrazom bodu S_2 v otočení o $60°$ okolo S_1. Toto otočenie $\mathcal{O}_{60°}$ môžeme zapísať

$$x' = \cos 60° \cdot x - \sin 60° \cdot y = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y\,,$$
$$y' = \sin 60° \cdot x + \cos 60° \cdot y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\,.$$

Využitím $S_3 = \mathcal{O}_{60°}(S_2)$ dostávame sústavu dvoch rovníc s neznámymi t, u, ktorú upravíme na tvar

$$\begin{aligned} t \cdot \big(b - 1 + \sqrt{3}(a-1)\big) + u \cdot (2b-2) \quad &= a - 3 + \sqrt{3}(b+1)\,,\\ t \cdot \big(1 - a + \sqrt{3}(b-1)\big) + u \cdot (-2a-2) &= b + 1 - \sqrt{3}(a+1)\,. \end{aligned}$$

Túto sústavu môžeme vyriešiť (napr. pomocou determinantov), čím získame (po úpravách vrátane použitia φ)

$$t = \frac{\varphi + 2(d-1) - 2(1+c) + 2(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}\varphi + 2(d-1)}\,,$$
$$u = \frac{\varphi + 2(d-1) - 2(1-c) + 2(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}\varphi + 2(d-1)}\,.$$

Je zrejmé, že menovateľ je kladný, preto keď uvážime nerovnosť $t \geqq \sqrt{3}$, môžeme ním násobiť, a úpravami získame $(c-d+2)\left(\sqrt{3}-1\right) \geqq \varphi \geqq 0$, čiže $c - d + 2 \geqq 0$. Teda bod C leží v polrovine určenej priamkou AC' a bodom B, kde $C' = (0, 8)$. Podobne keď uvážime, že $u \geqq \sqrt{3}$, dostaneme $-c-d+2 \geqq 0$, a teda bod C leží v polrovine danej priamkou BC' a bodom A. Potom však za podmienok $d > 1$ a $\varphi \geqq 0$ musí byť $C \equiv C'$. Teraz ľahko vypočítame $t = u = \sqrt{3}$, čiže $m = n = 6$, čím sme dokázali, čo bolo treba. Ostáva ešte prehlásiť, že uhly v trojuholníku ABC sú $45°$, $45°$ a $90°$.

5.3 Označme $f(x) = \sqrt{1 + a_1x} + \sqrt{1 + a_2x} + \ldots + \sqrt{1 + a_nx} - n$. Funkcia f je definovaná na intervale s krajnými bodmi $\max\{-1/a_k\,;\ a_k > 0\}$ a $\min\{-1/a_k\,;\ a_k < 0\}$ (kde maximum prázdnej množiny berieme v prvom prípade ako $-\infty$, v druhom ako $+\infty$). Na tomto intervale platí

$$f''(x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{4(1+a_ix)^{\frac{3}{2}}} < 0\,.$$

To znamená, že funkcia f je striktne (rýdzo) konkávna, a teda sa môže rovnať nule nanajvýš v dvoch bodoch. Ale pretože $f(0) = 0$, tak rovnica $f(x) = 0$ má nanajvýš jeden nenulový koreň.

5.4 Predpokladajme, že máme aspoň tri rôzne farby a, b, c. Skonštruujeme nekonečnú podmnožinu vrcholov $\mathcal{P}$, čo bude spor.

Nech $Z \in \mathcal{P}$ a A_1 je vrchol taký, že A_1Z má farbu a. Z (i) vyplýva, že existuje vrchol B_1 taký, že B_1Z a B_1A_1 má farbu b. Analogicky existuje vrchol C_1 taký, že C_1Z a C_1B_1 majú farbu c. Všimnime si trojuholníky C_1A_1Z a $C_1A_1B_1$. Z podmienky (ii) dostávame, že C_1A_1 má farbu c. Nech A_2 je taký vrchol, že A_2C_1 a A_2Z majú farbu a. Zrejme $A_1 \neq A_2$ a naviac A_2A_1 a A_2B_1 majú farbu a. Ďalej budeme postupovať indukciou (kreslite si obrázok!). Nech vrcholy $A_2, B_2, C_2, \dots, A_{k-1}, B_{k-1}, C_{k-1}$ sú také, že

$$\begin{aligned} &A_iA_j,\ A_iB_j,\ A_iC_j \text{ majú farbu } a,\\ &B_iA_j,\ B_iB_j,\ B_iC_j \text{ majú farbu } b,\\ &C_iA_j,\ C_iB_j,\ C_iC_j \text{ majú farbu } c, \end{aligned}$$

pre $2 \leqq j < i < k$. Vezmime vrchol A_k taký, že A_kC_{k-1} a A_kZ majú farbu a. Potom si všimnime trojuholníky ZA_kB_j a $C_{k-1}A_kB_j$ $(j < k)$, ZA_kC_j a $B_{j+1}A_kC_j$ $(j+1 < k)$, $A_kA_jB_j$ a $A_kA_jC_j$ $(j < k)$. Vidíme, že A_kB_j, A_kC_j a A_kA_j majú farbu a. Vrcholy B_k a C_k skonštruujeme analogicky.

Tým je dôkaz ukončený.

5.5 *(Katarína Quittnerová)* Dôkaz urobíme sporom. Má platiť $x_{n+2} > 0$, takže z požadovanej rovnosti

$$x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} - \sqrt{x_n} \tag{1}$$

vyplýva $x_{n+1} > x_n$ pre každé n. Keby $x_{n+1} \geqq 1$ pre nejaké n, potom

$$x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} - \sqrt{x_n} < \sqrt{x_{n+1}} \leqq x_{n+1}\,,$$

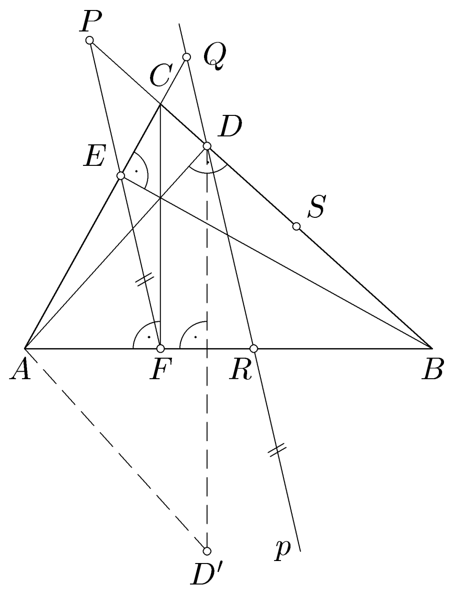
čo je spor. Preto $x_n < 1$. Rastúca postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je aj ohraničená, teda má limitu $L \in (0, 1\rangle$. Limitným prechodom v rovnosti (1) dostávame $L = \sqrt{L} - \sqrt{L} = 0$, čo je spor. Takže hľadaná postupnosť neexistuje.

5.6 *(Katarína Quittnerová)* Majme pospájanie daných bodov vyhovujúce zadaniu a označme si a počet všetkých úsečiek. Pre ľubovoľný bod je zvyšných n bodov pospájaných k úsečkami, takže z tohto bodu musí vychádzať $b = a-k$ úsečiek. Každá úsečka vychádza z dvoch bodov, takže $a = \frac{1}{2}(n+1)b$. Potom

$$k = a - b = \frac{(n-1)b}{2}\,. \tag{1}$$

Každý bod môže byť spojený maximálne s n bodmi, takže platí $0 \leqq b \leqq n$. Pre párne n navyše z (1) vyplýva $2 \mid b$. Dokážeme, že pre takéto b a čísla $k = \frac{1}{2}(n-1)b$ hľadané spojenie existuje. Označme si dané body $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ a položme $A_{n+1+j} = A_j$ a $A_{-n-1+j} = A_j$ pre $j = 1, 2, \dots, n+1$. Pre párne b (nech $b = 2c$) spojíme bod A_i s bodmi $A_{i-c}, A_{i-c+1}, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, A_{i+2}, \dots, A_{i+c}$, kde $i = 1, 2, \dots, n+1$. Pre nepárne b (a nepárne n) spojíme najprv pre $i = 1, 2, \dots, n+1$ bod A_i s bodom $A_{i+(n+1)/2}$. Potom budeme musieť spojiť ešte každý bod s ďalšími $b-1$ bodmi, čo môžeme urobiť analogicky ako pre párne b.

5.7 Keďže $|\sphericalangle BFC| = 90° = |\sphericalangle BEC|$, tak body B, C, E a F ležia na *Thalesovej kružnici* nad stranou BC. Potom podľa vety o stredovom a obvodovom uhle platí $|\sphericalangle EFC| = |\sphericalangle EBC| = 90° - \gamma$. Podobne $|\sphericalangle DFC| = 90° - \gamma = |\sphericalangle EFC|$, z čoho máme jednak, že FC je os uhla PFD ale aj, že obraz D' bodu D v osovej súmernosti podľa osi AB leží na priamke EF.



Obr. 44

Keď teraz dvakrát (pre trojuholníky PFD a PAD') využijeme to, že os uhla delí protiľahlú stranu v pomere priľahlých strán, dostaneme

$$\frac{|PC|}{|DC|} = \frac{|PF|}{|DF|} = \frac{|PF|}{|D'F|} = \frac{|PA|}{|D'A|} = \frac{|PC| + |CA|}{|DA|}.$$

Keď uvážime $|CA| = a$, $|DC| = b\cos\gamma$ a $|DA| = a - b\cos\gamma$, dostaneme vyriešením tejto rovnice

$$|PC| = \frac{ab\cos\gamma}{a - 2b\cos\gamma}.$$

Ďalej platí aj $|DS| = \frac{1}{2}a - b\cos\gamma$. Potom

$$\begin{gathered} |PD| \cdot |DS| = (|PC| + |CD|) \cdot |DS| = \\ = \left(\frac{ab\cos\gamma}{a - 2b\cos\gamma} + b\cos\gamma\right) \cdot \left(\frac{a}{2} - b\cos\gamma\right) = \\ = b\cos\gamma\,(a - b\cos\gamma) = |CD| \cdot |DB|. \end{gathered}$$

Teraz si všimnime, že $|\sphericalangle DRA| = |\sphericalangle EFA| = 90° - |\sphericalangle EFC| = \gamma$. Potom však aj $|\sphericalangle DRB| = |\sphericalangle DCQ|$ a trojuholníky DRB a DCQ sú podobné podľa vety *uu* (tiež $|\sphericalangle RDB| = |\sphericalangle CDQ|$). Z toho dostaneme

$$\frac{|DC|}{|DQ|} = \frac{|DR|}{|DB|},$$

a teda

$$|DQ| \cdot |DR| = |DB| \cdot |DC| = |PD| \cdot |DS|\,.$$

Vzhľadom na to, že D je vnútorným bodom oboch úsečiek PS a QR, z mocnosti bodu D ku kružnici opísanej trojuholníku PQR je zrejmé, že aj bod S na nej leží. Tým sme dokázali, čo bolo treba.

Iné korešpondenčné semináre

Okrem matematickej olympiády sú pre študentov základných aj stredných škôl počas školského roka organizované aj iné matematické súťaže. Patria medzi ne predovšetkým korešpondenčné semináre. Tieto súťaže sa v detailoch istotne líšia, avšak základné črty majú spoločné: počas školského roka prebiehajú dve časti (letná a zimná), ktoré pozostávajú zväčša z troch sérií úloh rozosielaných riešiteľom do škôl alebo domov. Riešenia súťažiaci vypracovávajú rovnakou formou ako v MO a v určenom termíne ich odosielajú na adresu príslušného seminára, odkiaľ sa po niekoľkých dňoch až týždňoch vrátia opravené spolu so vzorovými riešeniami a výsledkovou listinou. Mladší a menej skúsení riešitelia zväčša nemusia riešiť tie najzložitejšie príklady, aby aj oni mali šancu ovplyvniť poradie na prvých miestach. Na konci oboch častí súťaže sú približne tridsiati najúspešnejší riešitelia pozývaní na týždňové sústredenie, účasť na ktorom býva často najsilnejšou motiváciou na riešenie úloh. Nie je ale možné nespomenúť, že takýto pravidelný tréning sa odráža aj na výsledkoch dosahovaných v MO, a že drvivá väčšina reprezentantov Slovenska a Českej republiky na MMO, príp. MIO sa aktívne zapájala do viacerých z týchto seminárov.

Nižšie uvedené korešpondenčné semináre (KS) sú určené predovšetkým študentom stredných škôl, svojim záberom pokrývajú územie celého Slovenska a často majú aj riešiteľov z Českej Republiky. Je však možné, že vo svojom okolí nájdete aj menšie súťaže podobného druhu.

Bratislava — Bratislavský korešpondenčný matematický seminár — BKMS

Tento KS je organizovaný študentmi MFF UK v Bratislave zväčša (80%) bratislavského pôvodu. Série bývajú tematicky zamerané a obsahujú niekedy aj veľmi náročné úlohy. Okrem seminára ÚK MO sa práve tento najviac venuje príprave na MO v kategórii A. Sústredenia s pestrou celoslovenskou účasťou a takmer vždy aj so vzorkou „zahraničného“ účastníka z ČR mávajú asi najbohatší matematický program.

BKMS
RNDr. Jaroslav Guričan, CSc.
KATČ MFF UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

e-mail: bkms@pobox.sk
URL: http://www.bkms.sk

Stredné Slovensko — Stredoslovenský korešpondenčný seminár — SSS

Tento KS je momentálne organizovaný skupinou študentov MFF UK v Bratislave, pochádzajúcich zo stredného, príp. východného Slovenska. Je pokračovateľom tradície stredoslovenských KS organizovaných v minulosti zo Žiliny a Banskej Bystrice. Do súčasnej podoby sa SSS prepracoval pred niekoľkými rokmi, keď sa organizácie ujala skupina bývalých riešiteľov, v tom čase študujúcich v Prahe. Pre túto súťaž je charakteristický nízky vekový priemer riešiteľov, súťažné úlohy majú blízko ku kategórii B alebo C MO.

Stredoslovenský seminár
KZDM MFF UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

e-mail: jan.zabka@fmph.uniba.sk
URL: http://skms.miesto.sk

Východné Slovensko — Korešpondenčný seminár z matematiky STROM

Korešpondenčný seminár STROM je organizovaný z PF UPJŠ v Košiciach skupinou nadšencov, väčšinou bývalých riešiteľov seminára. Je pokračovateľom najstaršieho korešpondenčného seminára v bývalom Československu. Jednotlivé série bývajú tematicky zamerané, témy však často bývajú netradičné a niekedy sa obsahovo líšia od úloh v MO. Sústredenia s najmä „východoslovenskou" účasťou majú takmer neprekonateľne družnú atmosféru.

STROM
PF UPJŠ
Jesenná 5
040 01 Košice

e-mail: strom@upjs.sk

Korešpondenčný seminár z programovania — KSP

Na rozdiel od predchádzajúcich KS, je KSP súťažou v programovaní. Všetky jeho súťažné úlohy sú, podobne ako na MIO, praktické. KSP je organizovaný zanietenou skupinkou študentov MFF UK v Bratislave, ktorí majú zároveň na starosti všetky ostatné súťaže v programovaní od COFAX-u až po MO–P. Sústredenia bývajú mierne netradične na jar a na jeseň.

KSP
KVI MFF UK
Mlynská Dolina
842 48 Bratislava

e-mail: ksp@ksp.sk
URL: http://www.ksp.sk

Ak ste sa rozhodli do niektorého zo seminárov zapojiť, najrozumnejšie je požiadať o zaslanie úloh prvej série v polovici septembra alebo koncom januára.

Obsah

RNDr. Karel Horák, CSc. – Eugen Kováč
Jana Višňovská – Juraj Földes
Ján Špakula – Vladimír Koutný
Tomáš Vinař – Martin Pál
Úlohová komisia MO

Štyridsiatyôsmy ročník matematickej olympiády na stredných školách

Vydala IUVENTA v roku 2000
Sadzbu programom $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX pripravili RNDr. Karel Horák, CSc., Eugen Kováč a Vladimír Koutný
Grafická úprava obálky Richard Kollár
Neprešlo jazykovou úpravou
1.vydanie

ISBN ???????