2007/2008
57. ročník MO *Riešenia úloh školského kola kategórie B*

---

1. *Keď ľubovoľné prvočíslo vydelíme tridsiatimi, bude zvyškom číslo* 1 *alebo prvočíslo. Dokážte.* (*Vojtech Bálint*)

Riešenie. Ľubovoľné prvočíslo p sa dá napísať v tvare $p = 30a + z$, kde a je celé nezáporné a $z \in \{1, 2, \dots 29\}$ je zvyšok po delení čísla p tridsiatimi (keď p je prvočíslo, môžeme nulový zvyšok z vylúčiť).

Ak p je prvočíslo menšie ako 30, zrejme $z = p$ je tiež prvočíslo.

Predpokladajme teda, že p je prvočíslo väčšie ako 30, t. j. $a \geqq 1$. Pripusťme, že zvyšok z nie je ani číslo 1 ani prvočíslo a označme q jeho najmenší prvočíselný deliteľ. Zrejme $q^2 \leqq z < 30 < 7^2$, odkiaľ $q < 7$, čiže $q \in \{2, 3, 5\}$. Keďže číslo 30 je deliteľné dvoma, tromi aj piatimi, je deliteľné prvočíslom q. Takže aj číslo $p = 30a + z$ je prvočíslom q deliteľné. Nemôže to teda byť prvočíslo.

Iné riešenie. Vyjadríme číslo p v tvare $p = 30a+z$. Keby bolo zvyškom z niektoré z čísel 0, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, bolo by p párne a pritom väčšie ako 2, takže by nebolo prvočíslom. Keby bolo zvyškom niektoré z čísel 9, 15, 21, 27, bolo by p deliteľné tromi a pritom väčšie ako 3 a nemohlo by byť prvočíslom. Nakoniec pri zvyšku 25 by bolo p deliteľné piatimi a pritom väčšie ako 5, opäť by to teda nebolo prvočíslo.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za vylúčenie všetkých devätnástich zvyškov (zložených čísel a nuly) dajte 6 bodov. Za vyjadrenie čísla p v tvare $p = 30a + z$, kde a je celé nezáporné a $z \in \{0, 1, \dots, 29\}$, dajte 1 bod; 2 body za postreh, že každé zložené číslo menšie ako 30 je deliteľné dvoma, tromi alebo piatimi a ďalšie 3 body za správne dokončenie dôkazu.

---

2. *Určte všetky dvojice* (a, b) *reálnych čísel, pre ktoré majú rovnice*

$$x^2 + (3a + b)x + 4a = 0, \quad x^2 + (3b + a)x + 4b = 0$$

spoločný reálny koreň. (*Jaroslav Švrček*)

Riešenie. Nech x_0 je spoločný koreň oboch rovníc. Potom platí

$$x_0^2 + (3a + b)x_0 + 4a = 0, \quad x_0^2 + (3b + a)x_0 + 4b = 0.$$

Odčítaním týchto rovníc dostaneme $(2a-2b)x_0+4(a-b) = 0$, odkiaľ po úprave získame $(a - b)(x_0 + 2) = 0$.

Rozoberieme dve možnosti:

Ak $a = b$, majú obidve dané rovnice rovnaký tvar $x^2 + 4ax + 4a = 0$. Aspoň jeden koreň (samozrejme spoločný) existuje práve vtedy, keď je diskriminant $16a^2 - 16a$ nezáporný, teda $a \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle 1, \infty)$.

Ak $x_0 = -2$, dostaneme z prvej aj z druhej rovnice $4 - 2a - 2b = 0$, teda $b = 2 - a$. Dosadením do zadania dostaneme rovnice

$$x^2 + (2a + 2)x + 4a = 0, \quad x^2 + (6 - 2a)x + 8 - 4a = 0,$$

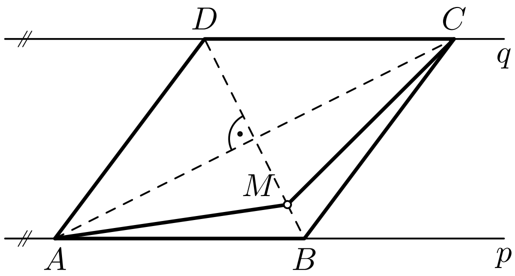
ktoré majú pri ľubovoľnej hodnote parametra a spoločný koreň -2.

Záver. Dané rovnice majú aspoň jeden spoločný koreň pre všetky dvojice (a, a), kde $a \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle 1, \infty)$, a pre všetky dvojice tvaru $(a, 2 - a)$, kde a je ľubovoľné.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za odvodenie podmienky $(a - b)(x_0 + 2) = 0$ dajte 2 body, 2 body za správny rozbor možnosti $a = b$, 2 body za nájdenie riešenia $b = 2 - a$.

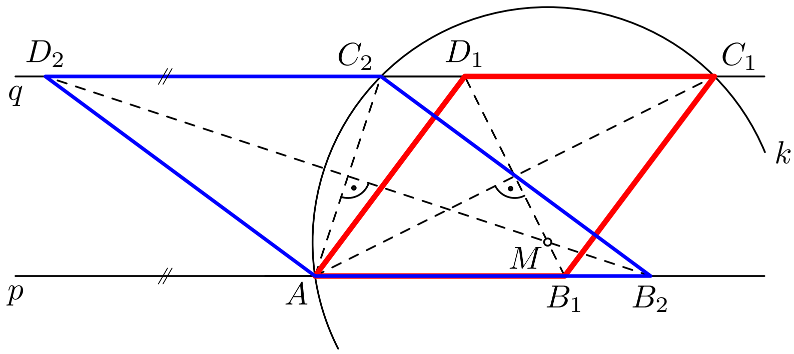
3. *V rovine sú dané dve rovnobežky p a q, bod A na priamke p a bod M ležiaci vnútri pásu medzi priamkami p a q. Zostrojte kosoštvorec alebo štvorec $ABCD$ tak, aby strana AB ležala na priamke p, strana CD na priamke q a aby uhlopriečka BD prechádzala bodom M.* (Jaromír Šimša)

Riešenie. Zo zhodnosti trojuholníkov ABM a CBM (sus) vyplýva $|CM| = |AM|$; preto musí bod C ležať na kružnici so stredom M a polomerom $|AM|$ (obr. 1). Uhlopriečky kosoštvorca (štvorca) sú na seba kolmé, preto body B a D ležia na kolmici vedenej bodom M na priamku AC.



Obr. 1

Konštrukcia. Zostrojíme kružnicu k so stredom M a polomerom $|AM|$. Priesečník tejto kružnice s priamkou q je bod C. Bodom M vedieme kolmicu na priamku AC. Jej priesečníky s priamkami p a q sú body B a D (obr. 2). Zostrojený štvoruholník má zrejme všetky požadované vlastnosti.



Obr. 2

Diskusia. Ak je vzdialenosť bodu M od priamky q väčšia ako jeho vzdialenosť od bodu A, nemá kružnica k s priamkou q spoločný bod a úloha nemá riešenie.

Ak má bod M rovnakú vzdialenosť od priamky q ako od bodu A, má kružnica k s priamkou q jediný spoločný bod C. Pokiaľ bod M neleží na osi pásu medzi rovnobežkami p a q, nie je priamka AC kolmá na p, preto kolmica vedená bodom M na priamku AC nie je s priamkou p rovnobežná a úloha má jedno riešenie. Pokiaľ ale bod M leží na osi pásu (je to teda priesečník osi pásu s kolmicou vedenou bodom A na priamku p), nemá úloha riešenie.

Ak je vzdialenosť bodu M od priamky q menšia ako jeho vzdialenosť od bodu A, pretína kružnica k priamku q v dvoch bodoch. Pokiaľ bod M leží na osi pásu medzi rovnobežkami p a q, leží jeden z priesečníkov na kolmici vedenej bodom A na priamku p a úloha má jedno riešenie; ak bod M na osi pásu neleží, má úloha dve riešenia.

Iné riešenie. Priesečník S uhlopriečok kosoštvorca (štvorca) $ABCD$ musí ležať na osi pásu medzi rovnobežkami p a q.

Ak leží bod M na osi pásu, musí platiť $S = M$; bod C je potom priesečník priamok AS a q, B a D sú priesečníky kolmice na priamku AC vedenú bodom M s priamkami p a q. Ak $AM \perp p$, nemá úloha riešenie, inak má jedno riešenie.

Ak bod M neleží na osi pásu, je uhol ASM pravý. Preto je bod S priesečníkom osi pásu s Tálesovou kružnicou nad priemerom AM. Body C, B, D potom nájdeme podobne ako je uvedené vyššie. Podľa počtu spoločných bodov osi pásu a Tálesovej kružnice má potom úloha dve riešenia, jedno riešenie alebo nemá žiadne riešenie.

Iné riešenie. Bod M leží na osi uhla ADC, preto má od priamok AD a q rovnakú vzdialenosť. Priamka AD je teda dotyčnicou kružnice, ktorá má stred M a dotýka sa priamky q.

Konštrukcia. Zostrojíme kružnicu h so stredom M, ktorá sa dotýka priamky q. Vrchol D hľadaného kosoštvorca (štvorca) je priesečník priamky q s dotyčnicou kružnice h prechádzajúcou bodom A. Body B a C potom už nájdeme ľahko.

Diskusia. Ak má bod M od bodu A menšiu vzdialenosť ako od priamky q, neprechádza bodom A žiadna dotyčnica kružnice h a úloha nemá riešenie.

Ak má bod M od bodu A rovnakú vzdialenosť ako od priamky q, leží bod A na kružnici h a prechádza ním jedna dotyčnica tejto kružnice. Pokiaľ pritom bod M leží na osi pásu medzi rovnobežkami p a q, je touto dotyčnicou priamka p, ktorá priamku q nepretína, a úloha nemá riešenie. Pokiaľ ale bod M na osi pásu neleží, dotyčnica je s priamkou q rôznobežná a úloha má jedno riešenie.

Ak má bod M od bodu A väčšiu vzdialenosť ako od priamky q, existujú dve dotyčnice kružnice h prechádzajúce bodom A. Pokiaľ pritom bod M leží na osi pásu, je jednou z dotyčníc priamka p a úloha má jedno riešenie; pokiaľ bod M na osi pásu neleží, sú obidve dotyčnice s q rôznobežné a úloha má dve riešenia.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov.

Pri postupe ako v prvom riešení dajte 2 body za nájdenie bodu C, 2 body za zostrojenie bodov B a D a dva body za úplnú diskusiu.

Pri postupe ako v druhom riešení za poznatok, že bod S leží na osi pásu, dajte 1 bod; za vyriešenie úlohy pre prípad, keď M leží na osi pásu, dajte 2 body (z toho 1 bod za diskusiu); za vyriešenie úlohy pre prípad, keď M na osi pásu neleží, dajte 3 body (z toho 1 bod za diskusiu).

Pri postupe ako v treťom riešení dajte 3 body za zostrojenie bodu D, 1 bod za dokončenie konštrukcie a 2 body za diskusiu.

Dôkaz správnosti konštrukcie je pri všetkých troch uvedených riešeniach natoľko zrejmý, že môže chýbať v inak úplných riešeniach ohodnotených 6 bodmi.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe do 15. februára.