47. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

Správa o riešení úloh zo súťaže konanej v školskom roku 1997/1998

39. MEDZINÁRODNÁ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA
10. MEDZINÁRODNÁ OLYMPIÁDA V INFORMATIKE

IUVENTA

S pomocou spolupracovníkov spracovali
RNDr. Karel Horák, CSc.,
Richard Kollár, Jana Višňovská, Eugen Kováč
Tomáš Vinař, Bronislava Brejová a členovia Úlohovej komisie MO.

Zostavovateľ: Jana Višňovská, 1999

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

ISBN 80–88893–18–6

O priebehu 47. ročníka matematickej olympiády

Matematická olympiáda (MO) je súťažou žiakov základných a stredných škôl. Jej vyhlasovateľom je Ministerstvo školstva Slovenskej republiky v spolupráci s Jednotou slovenských matematikov a fyzikov. Tento ročník MO na Slovensku riadila Slovenská komisia matematickej olympiády (SK MO). Jednotlivé kolá odborne a organizačne zabezpečovali okresné a krajské komisie MO (KK MO). Cieľom súťaže je vyhľadávanie žiakov talentovaných v matematike, prebúdzanie a podpora ich záujmu o ňu, rozvíjanie ich matematických schopností a ich usmerňovanie a vedenie k samostatnej tvorivej činnosti. Vyvrcholením súťaže je príprava na úspešnú reprezentáciu Slovenskej republiky a účasť na medzinárodných súťažiach, najmä na Medzinárodnej matematickej olympiáde (MMO) a Medzinárodnej informatickej olympiáde (MIO). V školskom roku 1997/1998 sa uskutočnil už 47. ročník MO, pretože matematická olympiáda na Slovensku je pokračovateľom rovnakej súťaže z bývalého Československa. Aj v tomto ročníku boli úlohy vo všetkých kolách MO v Českej republike a na Slovensku rovnaké. S potešením možno konštatovať, že MO aj tentokrát prebehla vo všetkých 79 okresoch, a tiež vo všetkých 8 krajoch Slovenskej republiky. Personálne obsadenie SK MO v 47. ročníku súťaže bolo nasledovné.

Predsedníctvo SK MO tvorili:

doc. RNDr. Vladislav Rosa, CSc. z MFF UK Bratislava, predseda SK MO.
doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., FDS ŽU Žilina, podpredseda SK MO,
RNDr. Pavol Černek, CSc., MFF UK Bratislava, tajomník pre odborné otázky,
RNDr. Monika Krállová, MFF UK Bratislava, tajomník pre organizačné otázky,
PhDr. Oto Klostermann, zástupca MŠ SR,
Mgr. Viera Krajčovičová, zástupca IUVENTY,
RNDr. Andrej Blaho, CSc., MFF UK Bratislava, gestor kategórie P,
RNDr. Jozef Fulier, CSc., FPV UKF Nitra,
doc. RNDr. Tomáš Hecht, CSc., TATRY a.s. Bratislava,
Richard Kollár, MFF UK Bratislava,
prof. RNDr. Jozef Moravčík, CSc., SF ŽU Žilina.

Členmi predsedníctva sú ďalej predsedovia krajských komisií:

doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., FDS ŽU Žilina,
RNDr. Jaroslava Brincková, CSc., FHPV UMB Banská Bystrica,
Mgr. Milan Demko, PedF PU Prešov,
PaedDr. Hubert Gunár, Gymnázium Trenčín,
doc. RNDr. Pavol Híc, CSc., FPV TU Trnava,
RNDr. Vladimír Jodas, MC Bratislava,
RNDr. Božena Mihalíková, CSc., PF UPJŠ Košice,
prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc., FPV UKF Nitra.

SK MO ďalej tvorili:

RNDr. Milota Hilková, ZŠ Jilemnického, Revúca,
RNDr. Anton Hnát, Gymnázium Michalovce,
Mgr. Jozef Mészáros, Gymnázium s vyuč. jaz. maď. Galanta,
RNDr. Dagmar Mikulášová, Gymnázium Trenčín,
doc. RNDr. Ľudovít Niepel, CSc., MFF UK Bratislava,
RNDr. Dana Smutná, FPHV UMB Banská Bystrica,
Tomáš Vinař, MFF UK Bratislava,
Mgr. Dagmar Vongrejová, ZŠ Moskovská Žilina.

V priebehu 47. ročníka MO sa uskutočnilo jedno plenárne zasadnutie SK MO a tri zasadnutia predsedníctva SK MO. Zamerali sa na obsahové a organizačné zabezpečenie MO, finančné pokrytie súťaže, ďalšie aktivity (korešpondenčné semináre, sústredenia a pod.), ako aj na pokračovanie v partnerskej spolupráci s českou Ústřední komisí MO pri príprave súťažných úloh a termínovom zabezpečovaní prebiehajúceho i budúceho ročníka MO. Hostiteľom pri oboch zasadnutiach úlohových komisií bola v tomto ročníku česká strana. Úlohy MO sú prevažne pôvodné, za zadaním každej súťažnej úlohy preto v ďalšom texte v zátvorke uvádzame meno autora (resp. navrhovateľa) úlohy.

Organizácia súťaže zostala v 47. ročníku MO zachovaná: pre žiakov základných škôl bola rozdelená do piatich kategórií Z4 – Z8 určených žiakom 4. až 9. ročníka ZŠ a odpovedajúcich ročníkov osemročných gymnázií. Pre žiakov stredných škôl a im zodpovedajúcich ročníkov viacročných gymnázií bola súťaž organizovaná v štyroch kategóriách: C, B, A a P. Kategória C bola určená pre študentov prvých ročníkov, kategória B pre študentov druhých ročníkov a kategória A pre študentov tretích a štvrtých ročníkov stredných škôl. Kategória P, zameraná na úlohy z programovania a matematickej informatiky, bola určená žiakom všetkých ročníkov stredných škôl. Talentovaní žiaci mohli po súhlase svojho učiteľa matematiky súťažiť aj vo vyššej vekovej kategórii. Týkalo sa to aj žiakov ZŠ, ktorí tiež mohli súťažiť v niektorej z kategórií A, B ,C a P.

Súťaž v každej z kategórií pozostáva z niekoľkých postupových kôl, pričom v kategórii Z4 je najvyšším kolom školské kolo, v kategóriách Z5 – Z7 je to okresné kolo, v kategóriách Z8, C a B sa súťaž končí krajským kolo a v kategóriách A a P olympiáda vyvrcholila celoštátnym kolom.

Do celoštátneho kola bolo pozvaných 41 najlepších riešiteľov krajských kôl v kategórii A a 26 najlepších riešiteľov krajských kôl v kategórii P, pričom sa postupovalo podľa poradia zostaveného po koordinácii bodových hodnotení z jednotlivých krajov. V tomto kole je súťaž rozdelená do dvoch dní. V kategórii A riešia súťažiaci každý deň tri úlohy v časovom limite 4 hodiny, v kategórii P v rovnakom limite prvý deň tri teoretické a druhý deň dve praktické úlohy na počítači.

Celoštátne kolo 47. ročníka MO kategórie A sa uskutočnilo v dňoch 22.–25.3.1998 na *Gymnáziu na Párovskej ulici v Nitre* a celoštátne kolo 47. ročníka MO kategórie P v dňoch 25.–28.3.1998 na *Gymnáziu na Golianovej ulici v Nitre*. Na zabezpečení súťaže vrátane spoločenského programu a získania sponzorských vecných darov pre úspešných riešiteľov sa okrem Centra voľného času IUVENTA obetavo podieľali členovia krajskej komisie matematickej olympiády v Nitre, a najmä pracovníci a študenti oboch spomínaných gymnázií. Na úspešnom priebehu celoštátneho kola má mimoriadnu zásluhu predseda KK MO prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc. a taktiež vedenie UKF v Nitre.

Desať najúspešnejších riešiteľov tretieho kola MO kategórie A prijalo pozvanie na výberové sústredenie pred 39. Medzinárodnou matematickou olympiádou, ktoré sa konalo v dňoch 29.3.–4.4.1998 na MFF UK v Bratislave. Na základe výsledkov tohoto sústredenia, výsledkov predchádzajúcich kôl MO a s prihliadnutím na úspešnosť v korešpondenčnom seminári SK MO bolo na konci sústredenia vybrané šesťčlenné družstvo na reprezentáciu SR na MMO na Taiwane v dňoch 12.–21.7.1998. Tento výber absolvoval ešte jedno (prípravné) sústredenie v dňoch 4.–7.6.1998 *na Zochovej chate* a zároveň nás reprezentoval na treťom ročníku medzištátneho stretnutia s Českou republikou, ktoré sa konalo v dňoch 15.–20.6.1998 *na Zochovej chate*. Medzištátnemu stretnutiu ako aj MMO sú v tejto ročenke venované samostatné kapitoly.

Výberové sústredenie pre 12 najlepších riešiteľov v kategórii P sa uskutočnilo v dňoch 29.4.–2.5.1998 na MFF UK v Bratislave. V rámci náročného sústredenia, ktoré približovalo podmienky medzinárodnej súťaže, účastníci každý deň dopoludnia tvorili programy, ktoré v ten istý deň večer aj spoločne vyhodnocovali. Na základe dosiahnutých výsledkov schválila SK MO zloženie štvorčlenného družstva, ktoré v dňoch 5.–12.9.1998 reprezentovalo SR na MIO v Portugalsku. Toto družstvo pred MIO absolvovalo ešte jedno prípravné sústredenie v dňoch 28.8.–3.9.1998 na MFF UK v Bratislave. Rovnako bolo na základe výsledkov výberového sústredenia schválené štvorčlenné reprezentačné družstvo, ktoré sa v dňoch 20.–27.5.1998 zúčastnilo na Stredoeurópskej informatickej olympiáde v Chorvátsku. Obom súťažiam sú venované samostatné kapitoly.

Ako už bolo spomenuté, súčasťou celoročnej prípravy na MO sú aj rôzne korešpondenčné semináre (KS) a sústredenia na okresnej a krajskej úrovni. Aj v tomto ročníku prebiehalo niekoľko KS s celoslovenskou pôsobnosťou a to:

Bratislavský korešpondenčný matematický seminár (BKMS),
Stredoslovenský korešpondenčný seminár (SSS),
Košický korešpondenčný seminár (STROM),
Korešpondenčný seminár z programovania (KSP).

Stručnú informácia o týchto aktivitách, spolu s kontaktnými adresami, možno nájsť v samostatnej kapitole.

Výsledky celoštátneho kola, kategória A

Víťazi

1.	Kristína ČERNEKOVÁ	3 G Grösslingová Bratislava	7	7	7	7	7	7	42
	Peter KOZÁK	3 G J. Hronca Bratislava	7	7	7	7	7	7	42
3.	Vladimír ZAJAC	2 G Grösslingová Bratislava	6	7	7	7	7	7	41
4.	Juraj FÖLDES	4 G J. Hronca Bratislava	6	7	7	7	7	3	37
5.	Peter HUSZÁR	3 G maď. Komárno	5	3	7	7	7	6	35
	František KARDOŠ	4 G Alejová Košice	7	0	7	7	7	7	35
7.	Ján ŠPAKULA	4 G Poštová Košice	6	7	0	7	7	7	34
8.	Cyril ADAMUŠČÍN	4 G Bardejov	5	1	7	7	7	6	33
9.	Matúš MEDO	4 G Poštová Košice	5	6	0	7	7	6	31

Ďalší úspešní riešitelia

10.	Peter NOVOTNÝ	3 G Veľká Okružná Žilina	7	0	7	7	2	7	30
	Vratko POLÁK	4 G Vrútky	5	1	5	6	7	6	30
12.	Richard KRÁĽOVIČ	3 G J. Hronca Bratislava	7	0	7	2	7	6	29
13.	Miroslava SOTÁKOVÁ	2 G Javorová Sp. Nová Ves	7	6	7	6	2	0	28
14.	Pavol NOVOTNÝ	4 G Veľká Okružná Žilina	6	7	0	7	1	6	27
15.	Daniel NAGAJ	4 G Bardejov	7	0	2	4	7	6	26
	Zuzana SLOSARČÍKOVÁ	3 G J. Hronca Bratislava	6	0	7	7	0	6	26
17.	Peter BODÍK	4 G Poštová Košice	5	2	0	7	7	4	25
	Michal FORIŠEK	3 G Popradské náb. Poprad	6	0	3	7	2	7	25
19.	Peter JACKO	4 G Poštová Košice	7	3	0	7	1	6	24
	Jozef ŠEVČÍK	2 G Grösslingová Bratislava	5	0	5	7	7	0	24

Ostatní riešitelia

21.	Tomáš JURÍK	2 G Poštová Košice	1	1	1	7	7	5	22
	Ján SOMORČÍK	4 G Párovská Nitra	6	7	0	5	1	3	22
23.	Miroslav KLADIVA	4 G Poštová Košice	7	0	3	5	0	6	21
	Jozef MIŠKUF	3 G Poštová Košice	6	0	0	7	2	6	21
	Slavomír NEMŠÁK	4 G Konštantínova Prešov	7	5	0	7	2	0	21
	Viera RŮŽIČKOVÁ	4 G Veľká Okružná Žilina	6	0	6	7	0	2	21
	Peter VARŠA	4 G Veľká Okružná Žilina	7	0	0	7	4	3	21
	Michal ZÁVODNÝ	4 G J.G.Tajovského B.Bystrica	1	0	7	0	7	6	21

29.	Martina GANCÁROVÁ	4 G Grösslingová Bratislava	7	0	3	3	4	3	20
	Marián KLEIN	4 G Poštová Košice	7	0	0	6	2	5	20
	Peter ŠEFČÍK	4 G Grösslingová Bratislava	6	0	0	7	7	0	20
32.	Martin HRIŇÁK	3 G Alejová Košice	7	0	0	7	2	3	19
	Martin POTOČNÝ	3 G J. Hronca Bratislava	6	7	0	1	0	5	19
34.	Martin ALTER	4 G Šrobárová Košice	5	0	1	7	1	3	17
35.	Miloš HAŠAN	4 G J. Hronca Bratislava	7	0	2	5	1	0	15
36.	Róbert AMBRIŠKO	4 G Alejová Košice	7	0	0	0	2	5	14
	Daniel HETÉNYI	3 G Párovská Nitra	6	0	0	7	1	0	14
	Marián VRÁBEL	3 G D. Tatarku Poprad	6	0	0	5	1	2	14
39.	Dávid PÁL	3 G J. Hronca Bratislava	3	0	6	1	1	0	11
40.	Peter MÁJEK	2 G J. Hronca Bratislava	6	0	0	0	0	3	9
41.	Martin TAMÁŠ	4 G Bardejov	0	0	0	0	1	4	5

Úspešnosť jednotlivých úloh je zaznamenaná v tabuľke.

Počet bodov	**Spolu**	**Číslo úlohy**					
		1.	2.	3.	4.	5.	6.
7 bodov	85	16	8	12	25	17	7
6 bodov	33	14	2	2	3	0	12
5 bodov	18	7	1	2	4	0	4
4 body	5	0	0	0	1	2	2
3 body	14	1	2	3	1	0	7
2 body	14	0	1	2	1	8	2
1 bod	18	2	3	2	2	9	0
0 bodov	59	1	24	18	4	5	7
Priemer	4,03	5,76	2,05	2,95	5,46	3,71	4,24

Výsledky celoštátneho kola, kategória P

Víťazi

1.	Stanislav FUNIAK	5 G Sučany	10	7	7	10	9	43
2.	Richard KRÁĽOVIČ	3 G J. Hronca Bratislava	10	8	10	5	8	41
3.	Ján VÁLKY	4 G Sereď	10	8	7	5	9	39
4.	Dávid PÁL	3 G J. Hronca Bratislava	10	7	3	9	0	29
	Pavol ČERNÝ	4 G J. Hronca Bratislava	10	9	3	5	2	29
6.	Peter RAFAJ	4 G J.G.Tajovského B.Bystrica	6	7	8	5	2	28

Ďalší úspešní riešitelia

7.	Ján SENKO	3 SPŠEl Košice	6	2	7	10	2	27
	Michal FORIŠEK	3 G Popradské nábr. Poprad	8	4	7	6	2	27
9.	Peter BODÍK	4 G Poštová Košice	7	8	7	4	0	26
10.	Ján LUNTER	4 G J.G.Tajovského B.Bystrica	10	3	4	3	4	24
	Michal MATOUŠEK	4 G Hlinská Žilina	10	4	7	2	1	24
12.	Michal ČANECKÝ	3 G Veľká Okružná Žilina	7	4	7	2	2	22
	Tomáš KEZES	3 G Nové Zámky	10	5	4	2	1	22
	Michal BREZNICKÝ	3 G Konštantinova Prešov	10	0	7	3	2	22

Ostatní riešitelia

15.	Richard PAVLENKO	4 G Konštantinova Prešov	7	1	6	5	2	21
16.	Ivan PILIŠ	3 G Veľká Okružná Žilina	5	4	7	2	1	19
	Peter HALICKÝ	3 G J. Hronca Bratislava	10	0	7	1	1	19
	Peter VARŠA	4 G Veľká Okružná Žilina	10	3	5	1	0	19
19.	Jana GAJDOŠÍKOVÁ	3 G J. Hronca Bratislava	8	2	6	0	1	17
	Branislav KATRENIAK	3 SPŠ Brezno	7	0	5	3	2	17
21.	Dana BIERNACKÁ	4 G Veľká Okružná Žilina	10	1	0	2	1	14
	Ján KMEŤ	3 G Prievidza	7	3	0	1	3	14
23.	Marianna POĽACKÁ	3 G Trebišov	4	4	2	1	0	11
24.	Roland BOTT	4 G maď. Dunajská Streda	2	2	2	2	2	10
25.	Ladislav BLAHO	3 G Grösslingová Bratislava	0	4	1	3	0	8
	Ivan MASARYK	3 G J. Hronca Bratislava	0	2	4	2	0	8

Výsledky krajských kôl

Z každého kraja a z každej z kategórii A, B, C, P a Z8 sú uvedení všetci, resp. aspoň prvých 10 úspešných riešiteľov. V kategóriach B, C, Z8, ak nie je uvedené inak, sú všetci žiaci študentmi 2., resp. 1., resp. 8. ročníka. Gymnázia so zameraním na matematiku, študijny odbor 01 sú tieto:
Gymnázium Grösslingová, Bratislava,
Gymnázium Párovská, Nitra,
Gymnázium Veľká Okružná, Žilina,
Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica,
Gymnázium Alejová, Košice,
Gymnázium Poštová, Košice.

Kraj Bratislava

Kategória A

1.–2.	Peter KOZÁK	3, Gymnázium J.Hronca
	Vladimír ZAJAC	2, Gymnázium Grösslingová
3.–5.	Juraj FÖLDES	4, Gymnázium J.Hronca
	Peter MÁJEK	2, Gymnázium J.Hronca
	Martin POTOČNÝ	3, Gymnázium J.Hronca
6.–7.	Martina GANCÁROVÁ	4, Gymnázium Grösslingová
	Jozef ŠEVČÍK	2, Gymnázium Grösslingová
8.–9.	Kristína ČERNEKOVÁ	3, Gymnázium Grösslingová
	Peter ŠEFČÍK	4, Gymnázium Grösslingová
10.–11.	Richard KRÁĽOVIČ	3, Gymnázium J.Hronca
	Zuzana SLOSARČÍKOVÁ	3, Gymnázium J.Hronca

Kategória B

1.–3.	Samuel IMRIŠKA	Gymnázium J.Hronca
	Peter MÁJEK	Gymnázium J.Hronca
	Miroslav MASÁR	Gymnázium Grösslingová
4.–5.	Jozef ŠEVČÍK	Gymnázium Grösslingová
	Vladimír ZAJAC	Gymnázium Grösslingová

6.	Peter KOŠINÁR	Gymnázium J.Hronca
7.	Marián POTOČNÝ	Gymnázium J.Hronca
8.–10.	Peter ČIRKA	Gymnázium Grösslingová
	Juraj LALÍK	Gymnázium J.Hronca
	Juraj ONDERÍK	Gymnázium J.Hronca

Kategória C

1.	Katarína QUITTNEROVÁ	8, Gymnázium Bilíkova
2.	Jana SZOLGAYOVÁ	Gymnázium Grösslingová
3.	Juraj OPRŠAL	Gymnázium Vazovova
4.–6.	Tomáš HERC	Gymnázium Grösslingová
	Peter MATEJKA	Gymnázium Grösslingová
	Michal POKORNÝ	Gymnázium Grösslingová
7.–12.	Boris BURDILIAK	Gymnázium Hronská
	Tomáš HAJAS	Gymnázium J.Hronca
	Miroslav KRAJČÍ	Gymnázium Grösslingová
	Miroslav POMŠÁR	Gymnázium J.Hronca
	Peter PRIKRYL	Gymnázium J.Hronca
	Michal TVAROŽEK	Gymnázium J.Hronca

Kategória Z8

1.–4.	Martin ILČÍK	ZŠ Lazaretská
	Dušan MARKO	ZŠ Beňadická
	Katarína QUITTNEROVÁ	Gymnázium Bílikova
	Matej ZLATŇANSKÝ	Gymnázium Vazovova
5.–7.	Jana BAJTOŠOVÁ	Gymnázium Vazovova
	Michal MIKUŠ	ZŠ a G Košická
	Roman ŠARMÍR	ZŠ a G Košická
8.	Martin GRANČAY	Gymnázium Mercury
9.	Martin SLOTA	ZŠ Jesenského
10.	Martin AUGUSTÍN	ZŠ Nevädzová

Kategória P

1.	Richard KRÁĽOVIČ	3, Gymnázium J.Hronca
2.	Dávid PÁL	3, Gymnázium J.Hronca
3.	Ladislav BLAHO	3, Gymnázium Grösslingová
4.	Pavol ČERNÝ	4, Gymnázium J.Hronca
5.	Peter HALICKÝ	2, Gymnázium J.Hronca
6.	Ivan MASARYK	3, Gymnázium J.Hronca

7.	Jana GAJDOŠÍKOVÁ	3, Gymnázium J.Hronca
8.–9.	Samuel IMRIŠKA	2, Gymnázium J.Hronca
	Miloš HAŠAN	4, Gymnázium J.Hronca
10.–11.	Štefan VARGA	2, Gymnázium J.Hronca
	Vladimír TUŽINSKÝ	4, Gymnázium J.Hronca

Kraj Nitra

Kategória A

1.	Peter HUSZÁR	3, Gymnázium maď., Komárno
2.	Daniel HETÉNYI	3, Gymnázium Párovská, Nitra
3.	Ján SOMORČÍK	4, Gymnázium Párovská, Nitra
4.–6.	Katarína FEHÉROVÁ	2, Gymnázium maď., Komárno
	Róbert LENČÉŠ	4, Gymnázium Párovská, Nitra
	Beáta STEHLÍKOVÁ	3, Gymnázium Nové Zámky
7.–8.	Ján KOŘENEK	4, Gymnázium Párovská, Nitra
	Zoltán SZÁRAZ	3, Gymnázium maď., Komárno
9.	Andrej ZAJÍČEK	4, Gymnázium Párovská, Nitra
10.–11.	Jozef BUDINSKÝ	4, Gymnázium Šahy
	Filip VÍTEK	2, Gymnázium Párovská, Nitra

Kategória B

1.	Katalin FEHÉR	Gymnázium maď. Komárno
2.	Júlia LACKOVÁ	Gymnázium Levice
3.	Zuzana KÚKELOVÁ	Gymnázium Šaľa
4.–6.	István GYÜRKI	Gymnázium Želiezovce
	Barbora HALMEŠOVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
	Barbora HEŠŠOVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
7.	Ľubomír REBEK	Gymnázium Zlaté Moravce
8.–11.	Jana DUCHOŇOVÁ	Gymnázium Piaristické, Nitra
	Renata FILOVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
	Keve KURUCZ	Gymnázium maď. Komárno
	Ákos SZTANKAY	Gymnázium maď. Komárno

Kategória C

1.	Miloš MEDŘÍK	Gymnázium Párovská, Nitra
2.–3.	Attila DOBAI	Gymnázium J.Šuleka, Komárno

	Ľuboš FAZEKAŠ	Gymnázium Zlaté Moravce
4.–5.	Zoltán ADAM	Gymnázium maď., Komárno
	Gergely JAKAB	Gymnázium maď., Šahy
6.–8.	Peter KRČAH	Gymnázium Párovská, Nitra
	Tomáš LAKATOS	Gymnázium Nové Zámky
9.	Zoltán MICS	Gymnázium maď., Šahy
10.–11.	Emil BARTOVIC	Gymnázium Šaľa
	Zuzana MALÍKOVÁ	Gymnázium Šurany

Kategória Z8

1.–2.	Július KISS	ZŠ Nábrežná, Nové Zámky
	Jozef MESIARKIN	ZŠ Nábrežná, Nové Zámky
3.–4.	Peter ILIEV	ZŠ B. Němcovej, Nové Zámky
	Tomáš STRIBULA	ZŠ Cirkevná, Nová Dedina
5.	Imre KUKEL	Gymnázium H. Seleyho, Komárno
6.	Adela KAJANOVÁ	ZŠ Mostná, Nové Zámky
7.	Daniel ZAŤKO	ZŠ Robotnícka, Zlaté Moravce
8.–9.	Martin GÁLIS	ZŠ Krušovce
	Adrian MIHÁLIK	ZŠ maď. Ul. práce, Komárno
10.	Tomáš SÁGHY	ZŠ maď., Šaľa

Kategória P

1.	Tomáš KEZES	3, Gymnázium Nové Zámky
2.	Tomáš POTOK	4, Gymnázium Golianova, Nitra
3.–4.	Roland FILO	3, Gymnázium Párovská, Nitra
	Michal KYSELICA	4, Gymnázium Párovská, Nitra

Kraj Trnava

Kategória A

1.	Miroslav VRANKA	3, Gymnázium Sereď
2.	Peter LÍŠKA	4, Gymnázium J.Bottu, Trnava
3.	Július WEISSENSTEINER	3, Gymnázium Piešťany
4.	János SIMON	4, Gymnázium Veľký Meder
5.	Zsolt BENES	4, Gymnázium maď., Dunajská Streda
6.–8.	Tímea NAGYOVÁ	4, Gymnázium maď., Dunajská Streda
	Gábor NÉMETH	3, Gymnázium maď., Dunajská Streda
	Peter SIDÓ	2, Gymnázium maď., Dunajská Streda

Kategória B

1.–3.	Tomáš MEČÍŘ	Gymnázium Senica
	Adrián MOLNÁR	Gymnázium maď., Dunajská Streda
	Dušan SUCHOŇ	Gymnázium J.Hollého, Trnava
4.–5.	Gejza DOBÓCKY	Gymnázium Šamorín
	Ríha MÉSZÁROSOVÁ	Gymnázium Galanta
6.–11.	Tomáš BÉLI	Gymnázium maď., Dunajská Streda
	Róbert CSOKA	Gymnázium maď., Dunajská Streda
	Jozef HAVRAN	Gymnázium Galanta
	Tamás JUHÁSZ	Gymnázium Šamorín
	Katarína SEKÁČOVÁ	Gymnázium Piešťany
	Peter SIDÓ	Gymnázium maď., Dunajská Streda

Kategória C

1.	Jana KRÁTKA	Gymnázium Piešťany
2.	Juraj NEČAS	Gymnázium Skalica
3.–4.	Kamil CHOVANEC	Gymnázium Sereď
	Lenka NÉMETHOVÁ	Gymnázium Dunajská Streda
5.	Goál BENEDEK	Gymnázium Galanta
6.–7.	Roman JURÁŠ	Gymnázium Skalica
	Tomáš SZERDA	Gymnázium Šamorín
8.–9.	Stanislav RUSNÁK	Gymnázium A.Merci, Trnava
	Imrich PAPP	Gymnázium Galanta
10.	Michal KOVÁČ	SPŠE Piešťany

Kategória Z8

1.	Marek KÁČER	ZŠ Sereď
2.	Judit KONTSEKOVÁ	ZŠ maď. Šamorín
3.	Michal ZSUZSKOVICS	ZŠ maď. Váhovce
4.–5.	Búss GYONGYI	ZŠ maď. Šamorín
	Zoltán CSONGA	ZŠ maď. Dunajská Streda
6.–8.	Peter KUCHTA	ZŠ Holíč
	Adam MIHOČKA	ZŠ Trnava
	Lenka MALÍKOVÁ	Gymnázium Skalica
9.–10.	Peter SMAŽENKA	ZŠ Holíč
	Terézia MILLOVÁ	Gymnázium Senica

Kategória P

1.	Ján VÁLKY	4, Gymnázium Sereď
2.	Roland BOTT	4, Gymnázium maď. Dunajská Streda

Kraj Trenčín

Kategória A

1.–2.	Lenka BUŠOVÁ	3, Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
	Lubor LADICKÝ	3, Gymnázium M. R. Š., Nové Mesto nad Váhom
3.	Andrea KMOTORKOVÁ	4, Gymnázium Bánovce nad Bebravou
4.	Zuzana DZURÁKOVÁ	3, Gymnázium Prievidza
5.	Michal STRATILÍK	4, Gymnázium Dubnica nad Váhom
6.	Štefan GAŠPAR	4, Gymnázium Púchov
7.	Marek SÝS	3, Gymnázium Bánovce nad Bebravou
8.–9.	Michal HANÁČEK	3, Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
	Jozef ŽERAVÍK	3, Gymnázium Púchov

Kategória B

1.	Juraj SUCHÁR	Gymnázium Dubnica nad Váhom
2.	Martin MARTIŠKA	Gymnázium Prievidza
3.–4.	Marian ERTL	Gymnázium Prievidza
	Štefan KOSTELNÝ	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
5.	Andrej MINAROVIČ	Gymnázium Partizánske
6.	Marian VELACKA	Gymnázium Púchov
7.–9.	Barbora MURÁROVÁ	Gymnázium J. Braneckého, Trenčín
	René DLESK	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
	Lenka PAVLASOVÁ	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
10.–14.	Petra KOSAROVÁ	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
	Anna FRANEKOVÁ	Gymnázium Partizánske
	Michal JURÍČEK	Gymnázium Prievidza
	Miroslav ZÁMEČNÍK	Gymnázium M. R. Š., Nové Mesto nad Váhom
	Jana REPOŇOVÁ	Gymnázium Dubnica nad Váhom

Kategória C

1.	Matej ŠUSTR	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
2.–3.	Juraj ŠARINAY	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín

	Tomáš KULICH	Gymnázium Prievidza
4.	Gabriela ŠEVČÍKOVÁ	Gymnázium M. R. Š., Nové Mesto nad Váhom
5.–9.	Paulína IGAZOVÁ	Gymnázium Bánovce nad Bebravou
	Tomáš KOTRÍK	Gymnázium Dubnica nad Váhom
	Ján MAZANEC	Gymnázium Prievidza
	Michal OSÚCH	Gymnázium Dubnica nad Váhom
	Jarmila REGULOVÁ	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín

Kategória Z8

1.–3.	Juraj PIŠKO	V. ZŠ Trenčín
	Pavol SLAMKA	Gymnázium Prievidza
	Marek GROSOŠ	ZŠ Kostolné
4.–5.	Lukáš HUNANA	ZŠ J. Kráľa, Nová Dubnica
	Matej DUBOVÝ	VII. ZŠ Trenčín
6.–7.	Radoslav CHUDÝ	III. ZŠ Prievidza
	Michal LICHVÁR	V. ZŠ Trenčín
8.–12.	Matúš ONDREIČKA	ZŠ Brezová pod Bradlom
	Juraj BRÁZDIL	ZŠ Veľká Okružná, Partizánske
	Peter ŠVEC	ZŠ Mládežnícka, Púchov
	Alena KRIŠKOVÁ	ZŠ Handlová
	Katarína VÁNIKOVÁ	VII. ZŠ Trenčín

Kategória P

1.	Ján KMEŤ	3, Gymnázium Prievidza

Kraj Žilina

Kategória A

1.–2.	Peter NOVOTNÝ	3, Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
	Viera RŮŽIČKOVÁ	4, Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
3.	Vratko POLÁK	4, Gymnázium Vrútky
4.	Pavol NOVOTNÝ	4, Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
5.–6.	Stanislav FUNIAK	5, Gymnázium Sučany
	Peter VARŠA	4, Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
7.–8.	Andrej MINTÁL	4, Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
	Peter SVRČEK	4, Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
9.	Mária KUBÍČKOVÁ	4 Gymnázium Veľká Okružná, Žilina

10.	Vladimír KOZÁK	4, Gymnázium Sučany

Kategória B

1.	Martin TROJÁK	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
2.	Iveta HUDECOVÁ	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
3.	Radoslav FULEK	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
4.	Katarína BEHULIAKOVÁ	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
5.	Anna MÄKKÁ	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
6.	Dáša CHLÁDEKOVÁ	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
7.–9.	Renáta BROZOVÁ	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
	Ľuboš OBLUK	Gymnázium Martin
	Anton VAŠKO	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
10.–13.	František DEBNÁR	Gymnázium Liptovský Hrádok
	Michal DOROVSKÝ	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
	Miroslava CHLEPKOVÁ	Gymnázium Ružomberok
	Marek LOVÁS	Gymnázium sv. Františka, Žilina

Kategória C

1.–2.	Martin GUBIŠ	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
	Ľuboš KIANICA	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
3.–4.	Jozef JURÍČEK	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
	Jakub LEHOTSKÝ	Gymnázium Liptovský Hrádok
5.–8.	Andrej ARBET	Gymnázium Ružomberok
	Michal KOPERA	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
	Miroslav KRUŽEJ	Gymnázium Hlinská, Žilina
	Michal PEŠTA	Gymnázium Liptovský Mikuláš
9.–11.	Branislav MIKULÁŠ	Gymnázium Martin
	Jozef ŠIMŮN	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
	Mário VOZÁR	Gymnázium Liptovský Mikuláš

Kategória Z8

1.	Miroslav URBÁNEK	Gymnázium Čadca
2.	Peter PETROVSKÝ	ZŠ Hliny, Žilina
3.–5.	Jakub DAUBNER	ZŠ Zaymusa, Žilina
	Miroslav HUDEC	ZŠ Zaymusa, Žilina
	Michal KAŇOK	Gymnázium Čadca
6.–7.	Milan RUŽIČKA	ZŠ Zaymusa, Žilina
	Tomáš ŠKEREŇ	ZŠ Clem., Kysucké Nové Mesto

8.	Adriana ROTHOVÁ	ZŠ Hattalu, Dolný Kubín
9.	Michal HREHA	Gymnázium Liptovský Hrádok
10.–12.	Peter POLJAK	ZŠ Hliny, Žilina
	Veronika ŠKULAVÍKOVÁ	ZŠ Radoľa
	Veronika UJMIAKOVÁ	Gymnázium Tvrdošín

Kategória P

1.	Stanislav FUNIAK	5, Gymnázium Sučany
2.	Ivan PILIŠ	3, Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
3.–4.	Michal ČANECKÝ	3, Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
	Michal MATOUŠEK	4, Gymnázium Hlinská, Žilina
5.–6.	Peter VARŠA	4, Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
	Dana BIERNACKÁ	4, Gymnázium Veľká Okružná, Žilina

Kraj Banská Bystrica

Kategória A

1.	Michal ZÁVODNÝ	4, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
2.	Pavol ZAJAC	4, Gymnázium Komenského, Banská Bystrica
3.–6.	Alex ĎURIŠ	4, Ev. Gymnázium Tisovec
	Vladislav GAJDOŠÍK	4, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
	Andrea KRÁNEROVÁ	4, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
	Marián VÝBOH	4, SZŠ Banská Bystrica
7.–8.	Katarína STAJANČOVÁ	3, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
	Martin KOVÁČIK	4, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
9.–12.	Peter GAJDOŠ	4, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
	Michal KOLCÚN	4, Gymnázium Banská Štiavnica
	Viera MAŤOVÁ	4, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
	Peter RAFAJ	4, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica

Kategória B

1.–2.	Zuzana KASAROVÁ	1, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
	Peter PAŽÁK	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
3.	Roman NEDELA	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
4.	Jana IVANIKOVÁ	Gymnázium Rimavská Sobota
5.–7.	Július LANGA	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
	Ondrej SUCHÝ	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica

	Ján ŽILKA	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
8.–9.	Martin MICHALISKO	Ev. Gymnázium Tisovec
	Matej VEVERKA	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica

Kategória C

1.	Ján ORAVEC	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
2.	Martin KRUPÁR	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
3.–4.	Zuzana KASAROVÁ	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
	Stanislav MIKLÍK	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
5.–6.	Peter BOHUMEĽ	Gymnázium Lučenec
	Michal DEÁK	Gymnázium Rimavská Sobota
7.–9.	Dávid HAGARA	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
	Juraj KONEČNÝ	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
	Martin ONDRÍK	Gymnázium Žiar nad Hronom
10.	Tomáš LIPTÁK	Gymnázium Rimavská Sobota

Kategória Z8

1.	Vladimír REPISKÝ	ZŠ Župkov
2.	Branislav BOŠANSKÝ	ZŠ Magurská, Banská Bystrica
3.	Michal ŽILKA	ZŠ Kokava nad Rimavicou
4.	Ján ŽIŽKA	II. ZŠ Žiar nad Hronom
5.	Marek TESAŘ	ZŠ Haličská, Lučenec
6.	Peter MAŇKA	VI. ZŠ Zvolen
7.–8.	Michal MALÝ	IV. ZŠ Žiar nad Hronom
	Kamil NEPŠINSKÝ	ZŠ Mazorníkova, Brezno
9.	Stanislava LEITTMANOVÁ	ZŠ Golianova, Banská Bystrica
10.	Martin BOĎA	ZŠ tr. SNP, Banská Bystrica

Kategória P

1.	Ján LUNTER	4, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
2.	Peter RAFAJ	4, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
3.	Bronislav KATRENIAK	3, SPŠ Brezno

Kraj Košice

Kategória A

1.	Ján ŠPAKULA	4, Gymnázium Poštová, Košice
2.	Martin HRIŇÁK	3, Gymnázium Alejová, Košice
3.–4.	František KARDOŠ	4, Gymnázium Alejová, Košice
	Miroslav KLADIVA	4, Gymnázium Poštová, Košice
5.	Matúš MEDO	4, Gymnázium Poštová, Košice
6.–7.	Tomáš JURÍK	2, Gymnázium Poštová, Košice
	Miroslava SOTÁKOVÁ	2, Gymnázium Javorová, Spišská Nová Ves
8.–9.	Róbert AMBRIŠKO	4, Gymnázium Alejová, Košice
	Jozef MIŠKUF	3, Gymnázium Poštová, Košice
10.–12.	Peter BODÍK	4, Gymnázium Poštová, Košice
	Peter JACKO	4, Gymnázium Poštová, Košice
	Marián KLEIN	4, Gymnázium Poštová, Košice

Kategória B

1.	Miroslava SOTÁKOVÁ	Gymnázium Javorová, Spišská Nová Ves
2.–3.	Tomáš JURÍK	Gymnázium Poštová, Košice
	Anna KORDULIAKOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
4.–6.	Pavol ORAVEC	Gymnázium Alejová, Košice
	Michal VAŠKO	Gymnázium Alejová, Košice
	Peter ŽÁRSKY	Gymnázium Alejová, Košice
7.–9.	Tomáš ANDRAŠINA	Gymnázium Alejová, Košice
	Ján BUŠA	Gymnázium Poštová, Košice
	Marek JENDREJ	Gymnázium Poštová, Košice
10.	Katarína BIROŠOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice

Kategória C

1.	Peter KLEŠČ	Gymnázium Poštová, Košice
2.	Veronika SKŘIVÁNKOVÁ	Gymnázium Poštová, Košice
3.–4.	Daniela KUBEJOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
	Ján UHRÍN	Gymnázium P. Horova, Michalovce
5.–10.	Juraj FEČANIN	Gymnázium Poštová, Košice
	Michal HRIVŇÁK	Gymnázium Poštová, Košice
	Július KOČIŠ	Gymnázium Moldava
	Martin MACKO	Gymnázium Spišská Nová Ves
	Zuzana SOPKOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice

	Michal VARGA	Gymnázium Poštová, Košice

Kategória Z8

1.	Tomáš DZETKULIČ	I. ZŠ Michalovce
2.	Radovan BAUER	ZŠ Park Angelinum, Košice
3.–5.	Matúš HALÁS	ZŠ Park Angelinum, Košice
	Ján KATRENIČ	ZŠ Hutnícka, Spišská Nová Ves
	Ján MAZÁK	ZŠ Jenisejská, Košice
6.	Martina VIŠŇOVSKÁ	ZŠ Park Angelinum, Košice
7.–8.	Margaréta HIEKOVÁ	ZŠ Gelnica
	Stanislav TAKÁČ	CZŠ Bernolákova, Košice
9.	Tomáš KOHAN	ZŠ Javorová, Spišská Nová Ves
10.	Michal KNAP	II. ZŠ Sobrance

Kategória P

1.	Peter BODÍK	4, Gymnázium Poštová, Košice
2.	Ján SENKO	3, SPŠE Košice
3.	Marianna POĽACKÁ	3, Gymnázium Trebišov

Kraj Prešov

Kategória A

1.–2.	Cyril ADAMUŠČIN	4, Gymnázium Bardejov
	Slavomír NEMŠÁK	4, Gymnázium Konštantínova, Prešov
3.–4.	Michal FORIŠEK	3, Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad
	Daniel NAGAJ	4, Gymnázium Bardejov
5.	Martin TAMÁŠ	4, Gymnázium Bardejov
6.–7.	Lucia MRÓZOVÁ	4, Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad
	Marián VRÁBEL	3, Gymnázium D.Tatarku, Poprad
8.	Martin GUZI	4, Gymnázium Konštantínova, Prešov
9.	Branislav SAXA	4, Gymnázium Konštantínova, Prešov
10.	Martin LANG	3, Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad

Kategória B

1.–2.	Slavomír MIŠKOVEC	Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad
	Alexandra SAXOVÁ	Gymnázium Konštantínova, Prešov
3.	Slavomír KATUŠČÁK	Gymnázium Konštantínova, Prešov
4.	Miloš ČERNÁK	Gymnázium Kežmarok
5.–7.	František GALČÍK	Gymnázium Stropkov
	Helena HOVANCOVÁ	Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad
	Jaroslava VERNARCOVÁ	Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad
8.–9.	Martin DZURENKO	Gymnázium J. A. R., Prešov
	Juraj LACA	Gymnázium Svidník
10.–18.	Radovan ČAJA	Gymnázium D. Tatarku, Poprad
	Marek GAJDOŠ	Gymnázium D. Tatarku, Poprad
	Peter GRILLI	Gymnázium Konštantínova, Prešov
	Martin KOŠALKO	Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad
	Ivana KUPČIHOVÁ	Gymnázium Konštantínova, Prešov
	Matúš SENAJ	Gymnázium Stropkov
	Viliam SLODIČÁK	Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad
	Lukáš SOHA	Gymnázium Humenné
	Igor TKÁČ	Gymnázium Humenné

Kategória C

1.	Blanka HAJDÚKOVÁ	Gymnázium Snina
2.–5.	Zuzana KUNDRÍKOVÁ	Gymnázium J. A. R., Prešov
	Juraj REVIĽÁK	Gymnázium Konštantínova, Prešov
	Martin SEDLACKÝ	Gymnázium J. A. R., Prešov
	Ján ŠTOFIRA	Gymnázium Snina
6.–10.	Peter BENO	Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad
	Erika HÖNSCHOVÁ	Gymnázium D. Tatarku, Poprad
	Veronika HUSÁROVÁ	Gymnázium Lipany
	Daniel JOŠČÁK	Gymnázium Konštantínova, Prešov
	Michal STAŠ	Gymnázium Stropkov

Kategória Z8

1.	Eva SKOPALOVÁ	ZŠ Dolný Smokovec
2.–3.	Lenka BABJAKOVÁ	ZŠ Spišská Stará Ves
	Jana THOMKOVÁ	ZŠ Kudlovská, Humenné
4.–5.	Jozef ONDEČKO	ZŠ M. Nešpora, Prešov
	Vladimír LIPTÁK	ZŠ Šmeralova, Prešov

6.–8.	Lenka BÁTORYOVÁ	ZŠ Dr. Fischera, Kežmarok
	Nora HANCOVÁ	ZŠ Študentská, Snina
	Pavol RUSNÁK	ZŠ Májové nám., Prešov
9.–12.	Dávid DERENÍK	ZŠ Budovateľská, Snina
	Peter KOVÁČIK	ZŠ Šmeralova, Prešov
	Jana MÚDRA	Gymnázium sv. Mikuláša, Prešov
	Jozef ŠKRIPKO	ZŠ Šmeralova, Prešov

Kategória P

1.	Michal FORIŠEK	3, Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad
2.–3.	Michal BREZNICKÝ	3, Gymnázium Konštantínova, Prešov
	Richard PAVLENKO	4, Gymnázium Konštantínova, Prešov
4.	Slavomír KATUŠČÁK	2, Gymnázium Konštantínova, Prešov

Zadania súťažných úloh

Kategória C

C – I – 1

Pre ľubovoľné trojciferné číslo určíme jeho zvyšky po delení číslami 2, 3, 4, …, 10 a získaných deväť čísel potom sčítame. Zistite najmenšiu možnú hodnotu takéhoto súčtu.

(J.Šimša)

C – I – 2

Nájdite všetky trojuholníky ABC, pre ktoré platí $a+v_a = b+v_b$ pri obvyklom označení strán a výšok trojuholníka.

(P.Černek)

C – I – 3

Sto detí sa rozdelilo do troch družstiev A, B a C. Potom, čo jedno dieťa prestúpilo z A do B, jedno z B do C a jedno z C do A, sa priemerná hmotnosť detí zvýšila v družstve A o 120 g, v družstve B o 130 g, zatiaľ čo v družstve C sa znížila o 240 g. Koľko detí bolo v jednotlivých družstvách?

(P.Černek)

C – I – 4

Vo vnútri daného pravouhlého rovnoramenného trojuholníka ABC s preponou AB zvolíme ľubovoľne bod X. Ďalej zostrojíme priamky p a q, ktoré prechádzajú bodom X tak, že $p \parallel AB$ a $q \perp AB$. Trojuholník ABC vytína na priamke p úsečku KL, na priamke q úsečku MN. Určte všetky body X, pre ktoré platí $|KL| = 2 \cdot |MN|$.

(J.Šimša)

C – I – 5

Riešte sústavu

$$\begin{aligned} 7[x] + 2y &= 117{,}4 \\ 5x + 2[y] &= 91{,}9 \end{aligned}$$

kde $[a]$ je tzv. celá časť reálneho čísla a, t.j. celé číslo, pre ktoré platí $[a] \leqq a < [a] + 1$. Napríklad $[3{,}7] = 3$ a $[-3{,}7] = -4$.

(P.Černek)

C – I – 6

Zostrojte deltoid so stranami 12 cm a 13 cm, ktorý je svojimi uhlopriečkami rozdelený na štyri trojuholníky, ktoré sú štyrmi stenami nejakého štvorstena. Zhotovte papierový model tohoto štvorstena.

(S.Bednářová, P.Černek)

C – S – 1

V obore reálnych čísel riešte rovnicu

$$[3x-5]=5x-8,$$

kde $[a]$ je celá časť reálneho čísla a, t.j. celé číslo, pre ktoré platí $[a] \leqq a < [a]+1$. Napríklad $[3{,}7]=3$ a $[-3{,}7]=-4$.

(P.Černek)

C – S – 2

Nájdite najmenšie trojciferné číslo, ktoré je deliteľné práve polovicou z čísel

$$2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 12,\ 16,\ 18,\ 24,\ 27,\ 36.$$

(P.Černek)

C – S – 3

Daný je rovnoramenný pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB. Označme P stred jeho výšky z vrcholu C, M priesečník priamky AP s odvesnou BC a N priesečník priamky BP s odvesnou AC. Dokážte, že pravouholník $KLMN$, ktorého strana KL leží na prepone AB, je štvorec.

(J.Šimša)

C – II – 1

Z troch rôznych nenulových číslic sme zostavili všetkých šesť možných trojciferných čísel. Tieto čísla sme zoradili od najväčšieho po najmenšie. Zistili sme, že štvrté číslo v tomto rade je aritmetickým priemerom prvého a piateho čísla. Z ktorých číslic boli čísla zostavené? Zistite všetky možnosti.

(J.Zhouf)

C – II – 2

Daný je rovnoramenný pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB. Určte množinu všetkých bodov X tohoto trojuholníka s nasledujúcou vlastnosťou: Ak vedieme bodom X priamku rovnobežnú s AB a priamku kolmú na AB, vytne na nich trojuholník ABC dve zhodné úsečky.

(J.Šimša)

C – II – 3

Nájdite všetky kladné čísla x, pre ktoré je medzi desiatimi číslami

$$[x],\ [2x],\ [3x],\ [4x],\ [5x],\ [6x],\ [7x],\ [8x],\ [9x],\ [10x]$$

práve deväť rôznych. Symbol $[a]$ je celá časť reálneho čísla a, t.j. celé číslo, pre ktoré platí $[a] \leqq a < [a] + 1$. Napríklad $[3{,}7] = 3$ a $[4] = 4$.

(J.Šimša)

C – II – 4

Nájdite všetky lichobežníky $ABCD$ so základňami AB a CD, pre ktoré platí: $|AB| = 6\,\mathrm{cm}$, $|CD| = 4\,\mathrm{cm}$ a

$$|BC| + d_A = |AD| + d_B = |AB| + v,$$

kde v označuje výšku lichobežníka, d_A vzdialenosť bodu A od priamky BC a d_B vzdialenosť bodu B od priamky AD.

(P. Černek)

Kategória B

B – I – 1

Magický štvorec je štvorcová tabuľka prirodzených čísel, v ktorej je súčet všetkých čísel v každom riadku, v každom stĺpci aj na oboch uhlopriečkach rovnaký. Nájdite všetky magické štvorce 3×3, pre ktoré je súčin štyroch čísel v rohových poliach rovný 3 465.

(P.Černek)

B – I – 2

V rovine je daná priamka q a bod A, ktorý na nej neleží. Určte v tejto rovine množinu stredov S všetkých štvorcov $ABCD$ takých, že bod B leží na priamke q.

(J.Molnár)

B – I – 3

Dokážte, že pre každú trojicu x, y, z kladných čísel platí nerovnosť

$$\sqrt{xyz}\left(\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x}\right) \leqq \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}.$$

Zistite, kedy nastane rovnosť.

(J.Švrček)

B – I – 4

Daný je štvorsten, v ktorom sú každé dve protiľahlé hrany zhodné. Vo vnútri štvorstena existuje bod M, ktorý je rovnako vzdialený od všetkých jeho stien. Dokážte, že každá výška daného štvorstena je rovná štvornásobku vzdialenosti bodu M od jeho stien.

(P.Leischner)

B – I – 5

V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned}
x+2y+3z &= x^2-z^2+p,\\
y+2z+3x &= y^2-x^2+p,\\
z+2x+3y &= z^2-y^2+p,
\end{aligned}$$

kde p je reálny parameter. Preveďte diskusiu o počte riešení vzhľadom na parameter p.

(J.Šimša)

B – I – 6

Aký najväčší obsah môže mať konvexný štvoruholník, v ktorom obidve úsečky spájajúce stredy protiľahlých strán sú zhodné a majú danú dĺžku d?

(J.Zhouf)

B – S – 1

Určte všetky trojice (a, b, c) reálnych čísel, pre ktoré platí

$$\begin{aligned}
a+b+c &= 1,\\
ab+bc+ca &= abc.
\end{aligned}$$

(J.Švrček)

B – S – 2

Nech obidve úsečky spájajúce stredy protiľahlých strán konvexného štvoruholníka $ABCD$ majú rovnakú dĺžku. Dokážte, že uhlopriečky AC a BD sú navzájom kolmé a že platí rovnosť

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |DA|^2.$$

(J.Šimša)

B – S – 3

Nájdite všetky štvorcové tabuľky 3×3 prirodzených čísel, v ktorých je súčin všetkých čísel v každom riadku, v každom stĺpci aj na oboch uhlopriečkach rovnaký, a pre ktoré platí, že súčet štyroch čísel v ich rohových poliach je jednociferné číslo.

(J.Těšínský)

B – II – 1

V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} xy &= ax + ay, \\ xz &= 2x + 2z, \\ yz &= 3y + 3z, \end{aligned}$$

kde a je reálny parameter. Preveďte diskusiu o počte riešení vzhľadom na parameter a.

(J.Zhouf)

B – II – 2

Popíšte konštrukciu trojuholníka ABC, v ktorom pri zvyčajnom označení platí $t_a = 9\,\mathrm{cm}$, $t_b = 12\,\mathrm{cm}$ a $3c = 2t_c$.

(P.Černek)

B – II – 3

Daná je štvorcová tabuľka 3×3 prirodzených čísel, v ktorej je súčin všetkých čísel v každom riadku, v každom stĺpci aj na oboch uhlopriečkach rovný číslu s.

a) Dokážte, že číslo s je treťou mocninou prirodzeného čísla.

b) Pokiaľ je jedno z rohových čísel tabuľky rovné 1, je súčet všetkých štyroch rohových čísel druhou mocninou prirodzeného čísla. Dokážte.

(J.Tešínský)

B – II – 4

V danom ostrouhlom trojuholníku ABC označme A_1, B_1 päty výšok z vrcholov A, B.

Určte veľkosti jeho vnútorných uhlov pri vrcholoch B a C, ak je veľkosť uhla BAC rovná $40°$ a ak sú polomery vpísaných kružníc trojuholníkom A_1B_1C a ABC v pomere $1:2$.
(P.Leischner)

Kategória A

A – I – 1

Číslo $1\,997^{2^n} - 1$ je deliteľné číslom 2^{n+2} pre každé prirodzené číslo n. Dokážte.
(P.Kaňovský)

A – I – 2

Daný je ľubovoľný trojuholník ABC. Os vnútorného uhla BAC pretne stranu BC v bode, ktorý označíme U. Dokážte rovnosť

$$|AU|^2 = |AB| \cdot |AC| - |BU| \cdot |CU|.$$

Môže táto rovnosť platiť, ak nahradíme bod U iným vnútorným bodom strany BC?
(J.Šimša)

A – I – 3

V istom jazyku sú len dve písmená A a B. Pre slová tohoto jazyka platia nasledujúce pravidlá:

1) Jediné slovo dĺžky 1 je A.
2) Ľubovoľná skupina písmen $X_1X_2X_3\dots X_nX_{n+1}$, kde $X_i = \{A, B\}$ pre každý index i, tvorí slovo dĺžky $n+1$, práve keď obsahuje aspoň jedno písmeno A, a pritom nie je tvaru $X_1X_2\dots X_nA$, kde $X_1X_2\dots X_n$ je slovo dĺžky n. Nájdite

a) všetky slová dĺžky 4,
b) vzorec pre počet p_n všetkých slov dĺžky n.

(J.Zhouf)

A – I – 4

Daný štvorsten $ABCD$ má zhodné protiľahlé hrany: $|AB| = |CD| = p$, $|AC| = |BD| = q$ a $|AD| = |BC| = r$. Označme K stred hrany AB a L stred hrany CD.

a) Dokážte, že priamka KL je kolmá na obidve hrany AB a CD.
b) Ukážte, že najmenšia možná hodnota súčtu $|AE|^2 + |EF|^2 + |FC|^2$, kde E a F sú ľubovoľné body priečky KL, je rovná $\dfrac{2p^2+q^2+r^2}{6}$.

(P.Leischner)

A – I – 5

Guľôčky siedmych rôznych farieb sú rozdelené do siedmych vrecúšok tak, že v každých dvoch vrecúškach môžeme nájsť po jednej guľôčke tej istej farby. Dokážte:

a) Guľôčky niektorej farby sú zastúpené v aspoň troch vrecúškach.

b) Pokiaľ boli rozdelené z každej farby len 3 guľôčky, tak v žiadnom vrecúšku nenájdeme dve guľôčky tej istej farby.

Rozhodnite tiež, či je takéto rozdelenie guľôčok pri podmienke z tvrdenia b) vôbec možné.

(P.Hliněný)

A – I – 6

Daný je pravouhlý lichobežník so základňami a, c ($a > c$) a dlhším ramenom b. Zostrojte priamku, ktorá daný lichobežník rozdeľuje na dva navzájom podobné štvoruholníky. Preveďte diskusiu o počte riešení vzhľadom na dĺžky a, b, c.

(J.Švrček)

A – S – 1

Nájdite všetky trojuholníky ABC, pre ktoré platí rovnosť

$$|BC| \cdot |AX| = |AC| \cdot |BY|,$$

kde bod X je priesečníkom osi uhla BAC so stranou BC a bod Y priesečníkom osi uhla ABC so stranou AC.

(P.Černek)

A – S – 2

V istom jazyku sú len dva znaky A a B. Prípustné sú v ňom len také slová, v ktorých nestoja vedľa seba viac ako dva rovnaké znaky. Dokážte, že počty p_n všetkých prípustných slov dĺžky n možno určiť pomocou rovností $p_1 = 2$, $p_2 = 4$ a $p_{k+2} = p_{k+1} + p_k$ pre každé prirodzené číslo k.

(J.Zhouf)

A – S – 3

Dokážte, že všetky riešenia sústavy rovníc

$$\begin{aligned} ux + vy &= x^2 + xy, \\ vx + uy &= y^2 + xy, \\ xy + uv &= u^2 + v^2 \end{aligned}$$

v obore nenulových reálnych čísel majú tvar $x = y = u = v$.

(J.Šimša)

A – II – 1

Číslo $1\,997^{3^n} + 1$ je deliteľné číslom 3^{n+3} pre každé prirodzené číslo n. Dokážte.

(J.Šimša)

A – II – 2

V jednom rade je postavených n stĺpcov dámových kameňov tak, že medzi každými dvoma stĺpcami rovnakej výšky sa nachádza stĺpec vyšší. (Všetky kamene majú rovnakú výšku, niektoré stĺpce môžu byť tvorené aj jedným kameňom.) Najvyšší stĺpec obsahuje k kameňov. Pre dané k určte najväčšiu možnú hodnotu n.

(J.Kratochvíl)

A – II – 3

V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$x^2 - yz = a, \qquad y^2 - zx = a - 1, \qquad z^2 - xy = a + 1$$

s reálnym parametrom a. Preveďte diskusiu o počte riešení.

(P.Černek)

A – II – 4

V rovine, v ktorej je daná úsečka BD, nájdite množinu všetkých vrcholov A konvexných štvoruholníkov $ABCD$, pre ktoré súčasne platí:

a) stred O_C kružnice vpísanej trojuholníku BCD leží na kružnici opísanej trojuholníku ABD,

b) stred O_A kružnice vpísanej trojuholníku ABD leží na kružnici opísanej trojuholníku BCD.

(J.Zhouf)

A – III – 1

V obore kladných reálnych čísel riešte rovnicu

$$x \cdot \big[x \cdot \big[x \cdot [x]\big]\big] = 88,$$

kde $[a]$ je celá časť reálneho čísla a, t.j. celé číslo, pre ktoré platí $[a] \leqq a < [a] + 1$. Napríklad $[3{,}7] = 3$ a $[6] = 6$.

(J.Šimša)

A – III – 2

Dokážte, že z množiny ľubovoľných štrnástich rôznych prirodzených čísel možno pre niektoré číslo k ($1 \leqq k \leqq 7$) vybrať dve disjunktné k-prvkové podmnožiny $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$

a $\{b_1, b_2, \dots , b_k\}$ tak, aby sa súčty

$$A = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} \quad \text{a} \quad B = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_k}$$

navzájom líšili o menej ako 0,001, t.j. aby platilo $|A - B| < 0{,}001$.

(J.Šimša)

A – III – 3

Do daného štvorstena $ABCD$ je vpísaná guľa. Jej štyri dotykové roviny, ktoré sú so stenami štvorstena rovnobežné, z neho odtínajú štyri menšie štvorsteny. Dokážte, že súčet dĺžok všetkých 24-och ich hrán je rovný dvojnásobku súčtu dĺžok hrán celého štvorstena $ABCD$.

(P.Leischner)

A – III – 4

Do výrazu

$$\text{deň}^{\text{mesiac}} - \text{rok}$$

dosadzujeme ľubovoľný dátum tohto roku (1998) a potom zisťujeme najväčšiu mocninu čísla 3, ktorá delí výsledné číslo. Napr. pre 21. apríl vychádza číslo $21^4 - 1\,998 = 192\,483 = 3^3 \cdot 7\,129$, čo je násobok mocniny 3^3, nie však mocniny 3^4. Nájdite všetky dni, pre ktoré je odpovedajúca mocnina najväčšia.

(R.Kollár)

A – III – 5

Vo vonkajšej oblasti kružnice k je daný bod A. Všetky lichobežníky, ktoré sú do kružnice k vpísané tak, že ich predĺžené ramená sa pretínajú v bode A, majú spoločný priesečník uhlopriečok. Dokážte.

(P.Leischner)

A – III – 6

Nech a, b, c sú kladné čísla. Dokážte, že trojuholník so stranami a, b, c existuje, práve keď má sústava rovníc

$$\frac{y}{z} + \frac{z}{y} = \frac{a}{x}, \quad \frac{z}{x} + \frac{x}{z} = \frac{b}{y}, \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{c}{z}$$

riešenie v obore reálnych čísel.

(P.Černek, J.Zhouf)

Riešenia súťažných úloh

Kategória C

C – I – 1

Označme $S(n)$ súčet spomínaných zvyškov trojciferného čísla n. Vysvetlíme, prečo $S(n) \geqq 3$.

- Pre nepárne n je $S(n) \geqq 5$ (uvážte zvyšky po delení párnymi číslami 2, 4, 6, 8, 10). Nech je ďalej n párne.
- Ak $4 \nmid n$, tak $S(n) \geqq 4$ (n dáva po delení číslami 4 a 8 zvyšok aspoň 2). Nech n je ďalej deliteľné štyrmi.
- Ak $8 \nmid n$, tak $S(n) \geqq 4$ (zvyšok 4 po delení číslom 8). Preto nech je ďalej n deliteľné ôsmymi.
- Ak $3 \nmid n$, tak $S(n) \geqq 3$ (n dáva po delení číslami 3, 6, 9 zvyšok aspoň 1). Nech ďalej n je deliteľné ôsmymi a tromi.
- Ak $9 \nmid n$, tak $S(n) \geqq 3$ (zvyšok aspoň 3 po delení číslom 9). Nech ďalej $8|n$ a $9|n$.
- Ak $5 \nmid n$, tak $S(n) \geqq 3$ (zvyšok aspoň 1 po delení číslom 5 a zvyšok aspoň 2 po delení číslom 10).

Preto predpokladajme, že $5|n$, $8|n$ a $9|n$. Potom prichádzajú do úvahy už len čísla 360 a 720, pre ktoré $S(360) = 3$ a $S(720) = 9$. Tým je nerovnosť $S(n) \geqq 3$ dokázaná. Zároveň sme zistili, že $S(n) = 3$ napr. pre $n = 360$.

Iné riešenie. Zaoberajme sa len prípadom, keď číslo n nie je deliteľné nanajvýš dvoma z čísel 2, 3, ..., 10 (inak $S(n) \geqq 3$). Ak je tento „nedeliteľ" jediný, je to nutne číslo 7 (musí to byť prvočíslo, ktorého dvojnásobok je väčší ako 10), takže $360 \mid n$. Ak sú títo „nedelitelia" dvaja, musí to byť niektorá z dvojíc 5 a 10, 8 a 9, 7 a 8, 7 a 9, 4 a 8. V každom prípade $6 \mid n$, takže ľahko ukážeme, že jeden z oboch kladných zvyškov je väčší než 1, teda $S(n) \geqq 3$.

C – I – 2

Pre obsah S trojuholníka ABC platí

$$S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2}. \tag{1}$$

Po dosadení do danej rovnosti dostávame $a + \dfrac{2S}{a} = b + \dfrac{2S}{b}$. Jednoduchými úpravami ďalej $a - b = 2S\,\dfrac{a-b}{ab}$, z čoho $(a-b)(ab-2S) = 0$. Odtiaľ buď $a = b$ (a teda $v_a = v_b$), alebo $S = \dfrac{ab}{2}$ (čiže $v_a = b$, uhol ACB je pravý a $v_b = a$). Poľahky sa presvedčíme, že obidva prípady vyhovujú.

Zadaným podmienkam vyhovujú všetky rovnoramenné trojuholníky so základňou AB a všetky pravouhlé trojuholníky s preponou AB (a žiadne iné).

C – I – 3

Označme a, b a c po rade počty detí v družstvách A, B a C, ďalej nech $\overline{a}$, $\overline{b}$ a $\overline{c}$ je po rade priemerná hmotnosť (v gramoch) detí v družstvách A, B a C pred výmenou. Napokon označme a_1, b_1 a c_1 po rade hmotnosť (v gramoch) dieťaťa, ktoré prestúpilo z A do B, z B do C a z C do A.

Celková hmotnosť detí v družstve A bola pred výmenou $a \cdot \overline{a}$. Z podmienky v zadaní zostavíme nasledujúcu rovnicu

$$\frac{a \cdot \overline{a} - a_1 + c_1}{a} = \overline{a} + 120.$$

Po jednoduchej úprave vyjde

$$-a_1 + c_1 = 120a.$$

Obdobne dostaneme aj

$$\begin{aligned} -b_1 + a_1 &= 130b, \\ -c_1 + b_1 &= -250c. \end{aligned}$$

Sčítaním týchto troch rovníc dostávame (po vydelení desiatimi a ďalších úpravách)

$$\begin{aligned} 12a + 13b = 25c &= 25(100 - a - b), \\ 37a + 38b &= 2\,500, \\ 37(a + b) + b &= 2\,500 = 37 \cdot 67 + 21. \end{aligned}$$

Z podmienky $0 < b < 100$ a poslednej rovnice vyplýva, že môžu nastať len nasledujúce tri prípady:

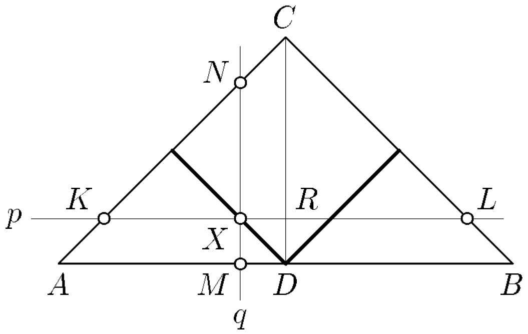
a) $a + b = 67$, $b = 21$; b) $a + b = 66$, $b = 58$; c) $a + b = 65$, $b = 95$.

Zrejme len prvé dva vedú k prípustným riešeniam ($a > 0$). Ešte overíme, či dve získané riešenia skutočne vyhovujú podmienkam úlohy. V prípade a) máme $a = 46$, $b = 21$, $c = 33$; $c_1 - a_1 = 5520$ a $a_1 - b_1 = 2730$, kým v prípade b) máme $a = 8$, $b = 58$, $c = 34$; $c_1 - a_1 = 960$ a $a_1 - b_1 = 7540$. Tieto výsledky zrejme môžu vyhovovať reálnej situácii.

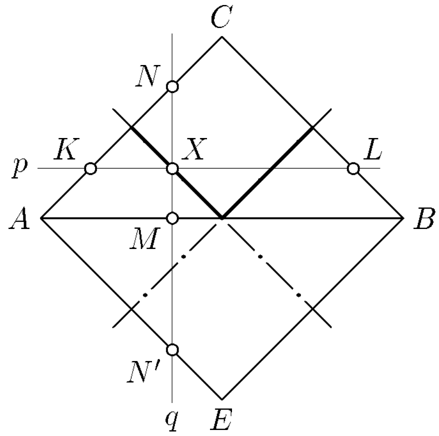
Odpoveď: Počty detí v družstvách A, B, C boli po rade buď 46, 21, 33 alebo 8, 58, 34.

C – I – 4

Označme R priesečník priamky p s výškou CD trojuholníka ABC (obr. 1) a M priesečník priamky q s preponou AB. Predpokladajme, že bod N leží na strane AC (prípad, keď leží na strane BC, vyriešime vďaka súmernosti trojuholníka ABC podľa osi CD analogicky).



Obr. 1



Obr. 2

Pretože $|KL| = 2\cdot|RC|$, požadovaná rovnosť $|KL| = 2\cdot|MN|$ platí, práve keď $|RC| = |MN|$, t.j. práve keď $NC \parallel MR$, t.j. práve keď $MDRX$ je štvorec. Preto DX je os uhla ADC kolmá na AC, a teda X leží vo vnútri úsečky DE, kde E je stred strany AC, alebo vo vnútri strednej priečky trojuholníka ABC rovnobežnej s BC. Z uvedeného postupu je jasné, že každý vnútorný bod tejto priečky vyhovuje zadaniu (krajné body D, E nevyhovujú, pretože nás zaujímajú len body X vo vnútri trojuholníka ABC). Obdobne pre bod N na strane BC dostaneme vnútro strednej priečky DF (obr. 1).

Odpoveď: Hľadanú množinu tvoria všetky vnútorné body dvoch stredných priečok trojuholníka ABC, ktoré sú rovnobežné s jeho odvesnami.

Iné riešenie. Trojuholník ABC doplňme na štvorec $AEBC$ (obr. 2). Hľadáme tie body X vo vnútri trojuholníka ABC, pre ktoré popísané priamky p a q vytínajú na štvorci $AEBC$ dve zhodné úsečky KL a NN'. Potom ale musia byť KLC a $NN'A$ dva zhodné rovnoramenné pravouhlé trojuholníky, to znamená, že priamky p a q sú súmerne združené podľa osi strany AC, t.j. práve keď bod X leží na tejto osi. Podobne pre bod N ležiaci na strane BC dostaneme, že bod X musí ležať na osi strany BC.

C – I – 5

Nech $x - [x] = x_0$ a $y - [y] = y_0$, čiže x_0, y_0 ($0 \leqq x_0, y_0 < 1$) sú tzv. necelé (desatinné) časti čísel x, y. Daná sústava prejde do tvaru

$$\begin{aligned} 7[x] + 2[y] &= 117{,}4 - 2y_0,\\ 5[x] + 2[y] &= 91{,}9 - 5x_0. \end{aligned}$$

V oboch rovniciach musí byť na pravej strane celé číslo, preto y_0 môže nadobúdať hodnotu 0,2 alebo 0,7. Rozoberme tieto prípady:

a) Nech $y_0 = 0{,}2$, teda $[y] = \dfrac{117 - 7[x]}{2}$.

Odčítaním rovníc dostávame $2[x] = 25{,}1 + 5x_0$. Keďže $0 \leqq 5x_0 < 5$, tak $[x]$ môže nadobúdať nanajvýš hodnoty 13, 14 a 15. Aby bolo $[y]$ celé musí byť zrejme $[x]$ nepárne. Potom dostávame

$[x]$	x_0	$[y]$	x	y
13	0,18	13	13,18	13,2
15	0,98	6	15,98	6,2

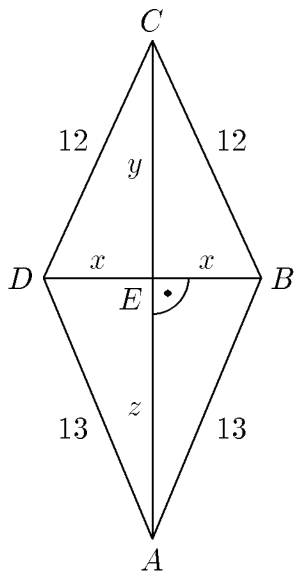
b) Nech $y_0 = 0{,}7$, teda $[y] = \dfrac{116 - 7[x]}{2}$.

Odčítaním rovníc dostávame $2[x] = 24{,}1 + 5x_0$. Keďže $0 \leqq 5x_0 < 5$, tak $[x]$ môže nadobúdať len hodnoty 13 a 14. Aby bolo $[y]$ celé musí byť zrejme $[x]$ párne. Potom dostávame

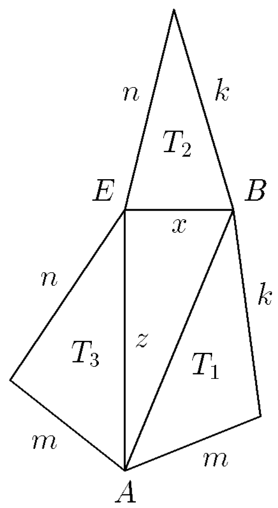
$[x]$	x_0	$[y]$	x	y
14	0,78	9	14,78	9,7

Sústava má tri riešenia: $x = 13{,}18$, $y = 13{,}2$; $x = 15{,}98$, $y = 6{,}2$ a $x = 14{,}78$, $y = 9{,}7$.

C – I – 6



Obr. 3



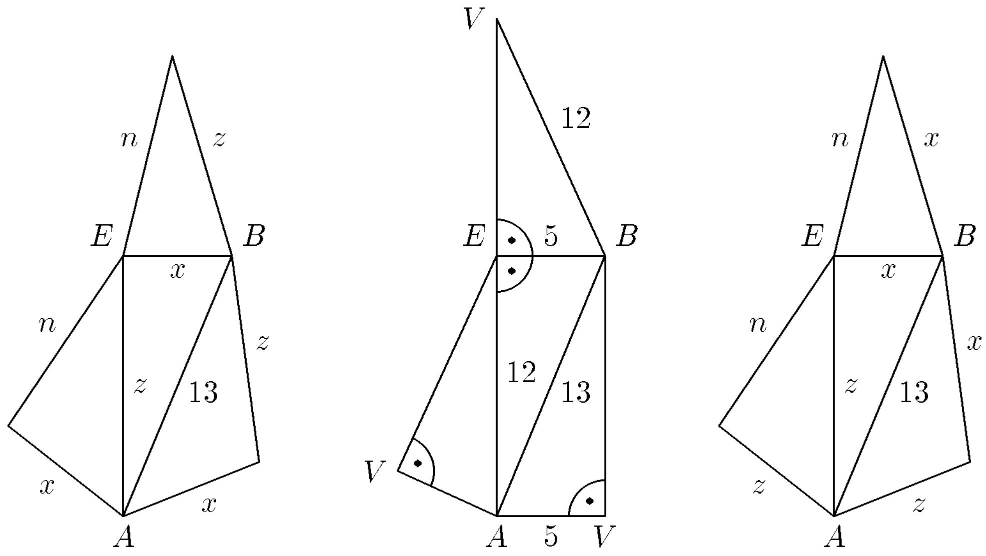
Obr. 4

Na obr. 3 je znázornený počiatočný deltoid, na obr. 4 sieť odpovedajúceho štvorstena. Z pravouhlých trojuholníkov vyplývajú pre úseky x, y a z uhlopriečok deltoidu nerovnosti

$$12 > x, \qquad 12 > y, \qquad 13 > z > y. \tag{$*$}$$

Potom nutne musí byť trojuholník T_1 zhodný s trojuholníkom AED (AB a AD sú najdlhšie zo všetkých strán uvažovaných trojuholníkov). Môžu nastať dva prípady:

a) Nech $k = z$ a $x = m$ (obr. 5). Potom musia byť trojuholníky so stranami $x, y, 12$ a x, z, n zhodné. Keďže $y < z$, tak nutne $y = n$ a $z = 12$. Potom $x = \sqrt{13^2 - z^2} = 5$.



Obr. 5 Obr. 6 Obr. 7

Sieť bude mať potom tvar uvedený na obr. 6 a hľadaný štvorsten $AEBV$ zrejme existuje: dostaneme ho tak, že trojuholník AEV otočíme okolo priamky AE o $90°$ (telesová výška z vrcholu V bude ležať vo vnútri steny AVE).

Konštrukcia zodpovedajúceho deltoidu je zrejmá, napr.

1. $\triangle ABE$; podľa vety sss: $|AB| = 13$ cm, $|BE| = 5$ cm a $|EA| = 12$ cm.
2. $\triangle EBC$; podľa vety Ssu: $|\sphericalangle CEB| = 90°$, $|BC| = 12$ cm a $C \notin \overrightarrow{EA}$.
3. D; E je stred úsečky DB.

b) $k = x$ a $x = z$ (obr. 7). Potom musia byť rovnoramenné trojuholníky so stranami z, z, n a x, x, m zhodné s pravouhlým trojuholníkom s odvesnami x, y a preponou 12. Odtiaľ vplýva $x = y = z$ a $m = n = 12$, čo je v spore s nerovnosťami $(*)$.

Úloha má teda jediné riešenie popísané v časti a).

C – S – 1

Číslo $k = 5x - 8$ je nutne celé. Odtiaľ $x = \frac{1}{5}(k + 8)$ a po dosadení do rovnice dostaneme

$$\left[\frac{3k - 1}{5}\right] = k.$$

To podľa definície celej časti vedie k nerovnostiam

$$k \leqq \frac{3k - 1}{5} < k + 1,$$

po úprave $-3 < k \leqq -\frac{1}{2}$. Číslo k je však celé, platí teda buď $k = -2$ (potom $x = 1{,}2$), alebo $k = -1$ (potom $x = 1{,}4$).

Daná rovnica má práve dve riešenia $x = 1{,}2$ a $x = 1{,}4$. (Skúška dosadením sa prevedie ľahko, pri našom postupe však nie je potrebná.)

Riešenie 2. Podľa definície celej časti musí platiť $5x - 8 \leqq 3x - 5 < (5x - 8) + 1$, po úprave $1 < x \leqq \frac{3}{2}$. Z tohoto intervalu teraz vyberieme tie x, pre ktoré je hodnota $5x - 8$ celočíselná: ak je $1 < x \leqq \frac{3}{2}$, tak $5 < 5x \leqq \frac{15}{2}$, takže $-3 < 5x - 8 \leqq -\frac{1}{2}$, teda $5x - 8 = -2$, alebo $5x - 8 = -1$. Odtiaľ vypočítame obidve riešenia $x = 1{,}2$ a $x = 1{,}4$. Ani pri tomto postupe nie je skúška nutná.

Riešenie 3. Označme $k = [3x - 5]$, takže $3x - 5 = k + \varepsilon$, kde $0 \leqq \varepsilon < 1$, a číslo k je celé. Vyjadríme odtiaľ x a dosadíme do rovnice $k = 5x - 8$, ktorú potom vyriešime vzhľadom na ε:

$$x = \tfrac{1}{3}(k + \varepsilon + 5), \qquad k = \tfrac{5}{3}(k + \varepsilon + 5) - 8, \qquad \varepsilon = -\tfrac{1}{5}(2k + 1).$$

Hľadáme teda tie celé čísla k, pre ktoré platí $0 \leqq -\frac{1}{5}(2k + 1) < 1$. To je ekvivalentné s nerovnosťami $-3 < k \leqq -\frac{1}{2}$, takže buď $k = -2$ (potom $\varepsilon = 0{,}6$ a $x = 1{,}2$), alebo $k = -1$ (potom $\varepsilon = 0{,}2$ a $x = 1{,}4$). Skúška opäť nie je potrebná.

Naznačme ešte štvrtý možný postup riešenia. Z danej rovnice vyplýva, že číslo $5x$ je celé, takže necelá časť čísla x je rovná jednému z čísel 0; 0,2; 0,4; 0,6 alebo 0,8. Ďalej je možné oddelene posudzovať týchto päť možností. Tak napr. pre $x = k + 0{,}4$, kde k je celé, vychádza $5x - 8 = 5k - 6$, $3x - 5 = 3k - 3{,}8$, takže $[3x - 5] = 3k - 4$; rovnica $5k - 6 = 3k - 4$ má (celočíselné) riešenie $k = 1$, ktorému zodpovedá $x = 1{,}4$.

C – S – 2

Hľadané číslo A má byť deliteľné práve šiestimi z vypísaných čísel. Každé z týchto 12 čísel je deliteľné len prvočíslami 2 a 3. Keďže medzi týmito číslami sú len štyri mocniny dvoch (2, 4, 8, 16) a len tri mocniny troch (3, 9, 27), musí byť číslo A deliteľné aj dvoma, aj tromi (a teda aj šiestimi).

Pretože okrem čísel 2, 3 a 6 má číslo A ešte ďalších troch deliteľov medzi vypísanými číslami, musí byť A deliteľné štyrmi alebo deviatimi, nie však obidvoma číslami zároveň (potom by malo osem deliteľov 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 a 36). Rozlíšme preto dva prípady.

• $4|A$ a $9 \nmid A$. Potom je číslo A deliteľné číslami 2, 3, 4, 6 a 12, šiesty vypísaný deliteľ je nutne (jediné) z čísel 8, 16, 24. Preto $8|A$, takže tiež (v spore s predchádzajúcou vetou) $24|A$. Musí teda nastať druhý prípad.

• $9|A$ a $4 \nmid A$. Potom je číslo A deliteľné číslami 2, 3, 6, 9 a 18, šiesty vybraný deliteľ je nutne číslo 27. Preto $54|A$, teda $A = 54l$, kde l je nepárne číslo (lebo $4 \nmid A$). Na druhej strane, *každé* také číslo $54l$ má zrejme medzi vypísanými číslami práve 6 deliteľov (2, 3, 6, 9, 18, 27). Najmenšie také trojciferné číslo je $54 \cdot 3 = 162$.

Riešenie 2. Hľadané trojciferné číslo A nemôže byť deliteľné ani číslom 36 (potom by malo osem deliteľov 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36), ani číslom 24 (potom by malo sedem deliteľov 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24). Preberajme zvyšných 10 vypísaných čísel (zostupne od najväčšieho) a zisťujme, či môžu deliť číslo A.

• $27|A$. Pretože číslo A je nutne párne (inak by malo len delitele 3, 9, 27), platí $54|A$. Číslo $54 \cdot 2 = 108$ podmienke úlohy nevyhovuje, zato číslo $3 \cdot 54 = 162$ áno. Ďalej už predpokladajme, že $27 \nmid A$.

• $18|A$. Číslo A má päť deliteľov 2, 3, 6, 9 a 18. Šiesty vypísaný deliteľ je (jediné) z čísel 4, 8, 12, 16. Preto $4|A$, takže tiež $12|A$, čo je spor s predchádzajúcou vetou.

• $16|A$. Číslo A má štyri delitele 2, 4, 8 a 16, posledné dva vypísané delitele musia byť z čísel 3, 6, 9, 12. Preto $3|A$, takže tiež $24|A$, a to sme v úvode vylúčili.

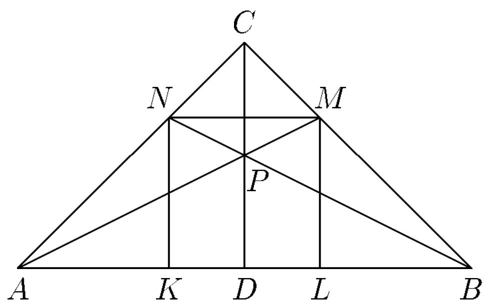
• $12|A$. Číslo A má päť deliteľov 2, 3, 4, 6 a 12, šiestym vypísaným deliteľom musí byť číslo 8 alebo číslo 9. Z $8|A$ potom ale vyplýva $24|A$ (spor), z $9|A$ zase $18|A$, a tým sme sa už zaoberali.

Keby číslo A nebolo deliteľné žiadnym z čísel 36, 24, 27, 18, 16 a 12, muselo by byť deliteľné všetkými šiestimi číslami 2, 3, 4, 6, 8 a 9, a teda aj číslom 18. Tým je naša diskusia uzavretá. Hľadané číslo je 162.

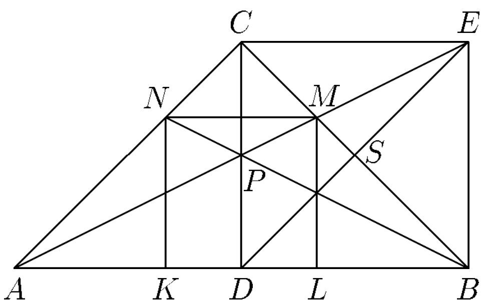
Riešenie 3. Rovnako ako v prvom riešení vysvetlíme, že hľadané číslo je deliteľné šiestimi. Budeme preto postupne preberať trojciferné čísla deliteľné šiestimi (od najmenšieho z nich, čísla 102), pokiaľ nenájdeme také, ktoré má medzi vypísanými číslami práve šesť deliteľov (počet týchto deliteľov ďalej uvádzame vždy v zátvorke za číslom): 102 (3), 108 (9), 114 (3), 120 (7), 126 (5), 132 (5), 138 (3), 144 (11), 150 (3), 156 (5), 162 (6). Hľadané číslo je 162.

C – S – 3

Nech D je stred prepony AB a nech $c = |AB|$ (obr. 8). Zo súmernosti podľa osi CD vyplýva $MN \parallel AB$, teda pravouholník $KLMN$ existuje. Našou úlohou je dokázať, že $|KL| = |LM|$.



Obr. 8



Obr. 9

Pretože bod P je stred odvesny pravouhlého rovnoramenného trojuholníka ACD, platia rovnosti $|DP| = \frac{1}{2}|CD| = \frac{1}{2}|AD| = \frac{1}{4}c$. Teraz si všimnime podobné pravouhlé trojuholníky ALM a ADP. Pre dĺžky ich odvesien platí $|AL| : |LM| = |AD| : |DP| = (\frac{1}{2}c) : (\frac{1}{4}c) = 2$, odkiaľ $|AL| = 2|LM|$. Keďže $|AL| = |AB| - |BL| = c - |BL| =$

$= c - |LM|$ (lebo BLM je rovnoramenný trojuholník), dostávame rovnicu $c - |LM| = 2|LM|$, podľa ktorej $|LM| = \frac{1}{3}c$. Platí teda $|BL| = \frac{1}{3}c$. Analogicky sa dokáže rovnosť $|AK| = \frac{1}{3}c$ (ktorá vyplýva tiež zo súmernosti podľa osi CD). Potom ale $|KL| = |AB| - |AK| - |BL| = c - \frac{1}{3}c - \frac{1}{3}c = \frac{1}{3}c$. Rovnosť $|KL| = |LM|$ je tak dokázaná.

Riešenie 2. Pretože $MN \parallel AB$, pravouholník $KLMN$ existuje. Vzhľadom k rovnostiam $|AK| = |KN| = |LM| = |BL|$ je pravouholník $KLMN$ štvorec, práve keď jeho vrcholy K a L delia preponu AB na tri zhodné úsečky, teda práve keď $|MN| = \frac{1}{3}|AB|$.

Postup zo zadania úlohy trochu obráťme: do trojuholníka ABC najprv vpíšeme vyššie určeným spôsobom štvorec $KLMN$ a vysvetlíme, prečo sa potom úsečky AM a BN pretínajú v takom bode P, ktorý je stredom výšky CD trojuholníka ABC (obr. 8). Z osovej súmernosti podľa osi CD je vopred jasné, že tento priesečník P na výške CD skutočne leží. Pre odvesny pravouhlého trojuholníka ALM platí $|ML| = \frac{1}{3}|AB|$ a $|AL| = \frac{2}{3}|AB|$, takže $|AL| = 2|ML|$; preto aj pre odvesny podobného trojuholníka ADP platí $|AD| = 2|PD|$, čo spolu s rovnosťou $|AD| = |CD|$ už vedie k záveru, že $|PD| = |PC|$. Priesečník P úsečiek AM a CN je teda skutočne stredom výšky CD.

Riešenie 3. Označme D pätu výšky z vrcholu C na preponu AB a trojuholník CDB doplňme na štvorec $CDBE$ so stredom S (obr. 9). V rovnobežníku $ADEC$ je bod P stred uhlopriečky CD, preto body A, P, M a E ležia na jednej priamke. Bod M je naviac ťažiskom trojuholníka CDE, takže platí $|MC| = \frac{2}{3}|CS| = \frac{1}{3}|BC|$. Z rovnosti $|MC| = \frac{1}{3}|BC|$ a rovnobežnosti úsečiek MN a AB vyplýva, že trojuholníky ABC a NMC sú podobné s koeficientom $\frac{1}{3}$. Odtiaľ vyplýva $|MN| = \frac{1}{3}|AB|$, takže pravouholník $KLMN$ existuje a je to štvorec (pozri úvod druhého riešenia).

C – II – 1

Označme hľadané číslice $a < b < c$. Potom spomínaných šesť čísel bolo zoradených takto:

$$\overline{cba} > \overline{cab} > \overline{bca} > \overline{bac} > \overline{acb} > \overline{abc}.$$

Má platiť

$$\overline{bac} = \frac{\overline{cba} + \overline{acb}}{2}.$$

Po rozpísaní dekadických zápisov a úprave máme

$$4c + 3a = 7b, \qquad \text{čiže} \qquad 4(c - b) = 3(b - a).$$

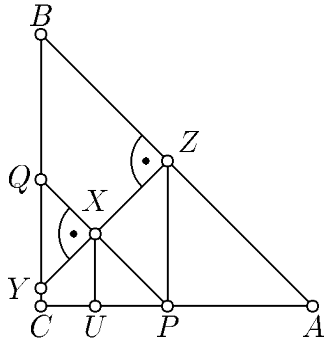
Odtiaľ $3 | c - b$. Keďže $0 < c - b < 9$, tak môžu nastať dva prípady

- $c - b = 3$, $b - a = 4$. Odtiaľ $b = a + 4$ a $c = a + 7$. Úloha má dve riešenia: $a = 1$, $b = 5$, $c = 8$, alebo $a = 2$, $b = 6$, $c = 9$.
- $c - b = 6$, $b - a = 8$. Odtiaľ $c = a + 14$, čo pre číslice a, c nemôže platiť.

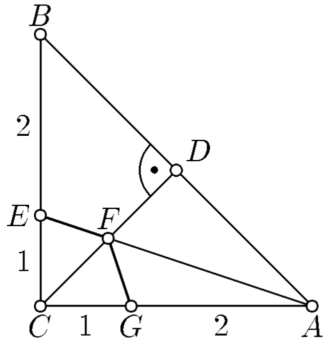
Čísla boli zložené z číslic 1, 5, 8, alebo 2, 6, 9.

C – II – 2

Označme D stred strany AB. Najprv nech bod X leží vo vnútri trojuholníka BCD alebo na jeho obvode. K bodu X zostrojme zodpovedajúce úsečky popísané v zadaní úlohy, ktorých koncové body označíme P, Q, Y, Z (obr. 10). Trojuholník QXY je zrejme pravouhlý a rovnoramenný, teda $|XY| = |XQ|$. Preto aby $|YZ| = |PQ|$, musí byť $|ZX| = |XP|$, teda trojuholník ZXP musí byť tiež pravouhlý a rovnoramenný. Zrejme teda $ZP \parallel BC$. Označme ďalej U pätu výšky z bodu X na AC. Zrejme $2|UP| = 2|XU| = \sqrt{2}|XP| = |ZP| = |PA|$. Preto $\dfrac{|XU|}{|UA|} = \dfrac{1}{3}$. Tým je jednoznačne určený uhol XAC, teda všetky vyhovujúce body v trojuholníku BCD ležia na priamke. Jej priesečník s BC je zrejme bod E taký, že $2|CE| = |EB|$. Ďalej označme F priesečník EA s CD.



Obr. 10



Obr. 11

Obdobnou úvahou v trojuholníku ACD nahliadneme, že v tomto trojuholníku môžu vyhovovať len body patriace úsečke FG, kde G je taký bod strany AC, že $2|CG| = |GA|$ (obr. 11).

Naopak, každý bod X lomenej čiary EFG zrejme vyhovuje zadanej úlohe, pretože v prípade $X \in EF$ (prípad $X \in FG$ je obdobný) platí $\operatorname{tg} |\sphericalangle XAC| = \dfrac{1}{3}$, teda existuje štvoruholník $AZXP$, $Z \in AB$, $P \in AC$, taký, že $XP \parallel AB$, $XZ \perp AB$. Keďže zrejme $|XZ| = |XP|$, ľahko sa nahliadne, že bod X má vlastnosť zo zadania úlohy.

C – II – 3

Najprv uvážime, že $x < 1$. Pre $x \geqq 1$ totiž platí $(k+1)x \geqq kx + 1$, odkiaľ $[(k+1)x] > [kx]$, takže $[x] < [2x] < \ldots < [10x]$ je desať rôznych čísel. Ak je $0 < x < 1$, tak $[x] = 0$. Z nerovností $kx < (k+1)x < kx + 1$ pre každé prirodzené číslo k vyplýva, že buď $[(k+1)x] = [kx]$ alebo $[(k+1)x] = [kx] + 1$. Preto sa medzi danými číslami musí nachádzať práve deväť za sebou idúcich celých nezáporných čísel a práve dve susedné čísla sú rovnaké. To znamená, že posledné číslo v rade je práve o 8 väčšie ako prvé (rovné nule), teda

$$[10x] = 8. \tag{1}$$

Zároveň každé takéto číslo vyhovuje, lebo pre $x < 1$ musí byť medzi danými číslami rad za sebou idúcich čísel; žiadne teda nemôže byť vynechané. Preto sú riešením úlohy práve tie x, pre ktoré platí (1). Teda $8 \leqq 10x < 9$, čiže $x \in \langle \frac{4}{5}, \frac{9}{10})$. Tieto čísla sú riešením úlohy.

Iné riešenie. Hľadajme tie $x > 0$, pre ktoré v postupnosti nerovností $[x] \leqq [2x] \leqq \leqq \ldots \leqq [10x]$ nastane práve raz rovnosť. Nech teda platí

$$[x] < [2x] < \ldots < [nx] = [(n+1)x] < [(n+2)x] < \ldots < [10x].$$

Opäť ľahkou úvahou zistíme, že $x < 1$ a dané čísla sú za sebou idúce celé čísla. To je ekvivalentné s nerovnosťami

i) $k > kx \geqq k-1$, teda $1 > x \geqq \dfrac{k-1}{k}$ pre $k \in \{1, \ldots, n\}$;

ii) $k-1 > kx \geqq k-2$, teda $\dfrac{k-1}{k} > x \geqq \dfrac{k-2}{k}$ pre $k \in \{n+1, \ldots, 10\}$.

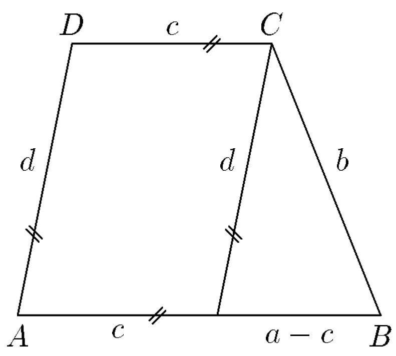
Všetky nerovnosti v i) sú splnené práve vtedy, keď platí $1 > x \geqq \frac{n-1}{n}$. Všetky nerovnosti v ii) sú splnené práve vtedy, keď platí $\dfrac{n}{n+1} > x \geqq \dfrac{4}{5}$. To je možné, len keď $\dfrac{n}{n+1} > \dfrac{4}{5}$, teda keď $n \geqq 5$. Pre také n ale platí

$$1 > \frac{n}{n+1} > \frac{n-1}{n} \geqq \frac{4}{5},$$

takže riešením sústavy nerovníc $1 > x \geqq \dfrac{n-1}{n}$, $\dfrac{n}{n+1} > x \geqq \dfrac{4}{5}$ je interval $\left\langle \dfrac{n-1}{n}, \dfrac{n}{n+1} \right)$. Pre $n = 5, 6, 7, 8, 9$ tak dostávame intervaly $\left\langle \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{6} \right)$, $\left\langle \dfrac{5}{6}, \dfrac{6}{7} \right)$, $\ldots$, $\left\langle \dfrac{8}{9}, \dfrac{9}{10} \right)$. Ich zjednotenie, interval $\left\langle \dfrac{4}{5}, \dfrac{9}{10} \right)$, je potom množina všetkých hľadaných x.

C – II – 4

Lichobežník so základňami a, c a ramenami b, d existuje a je jediný práve vtedy, keď existuje trojuholník so stranami $|a-c|$, b a d (obr. 12).



Obr. 12

Všímajme si trojuholník ABC. Keďže pre výšky na strany BC a AB platí $v_{AB} = v$, $v_{BC} = d_A$, tak podľa predpokladu

$$|BC| + v_{BC} = |AB| + v_{AB}.$$

Potom na základe druhej úlohy domáceho kola platí $|AB| = |BC|$ alebo $|\sphericalangle ABC| = 90°$. Analogicky v trojuholníku ABD dostaneme $|AD| = |AB|$ alebo $|\sphericalangle DAB| = 90°$. Preto musí nastať jeden zo štyroch prípadov:

1. $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DAB| = 90°$.
   Potom by ale $ABCD$ nebol lichobežník.
2. $|AB| = |BC| = |AD| = 6\,\mathrm{cm}$.
   Keďže $|CD| = 4\,\mathrm{cm}$, existuje práve jeden taký lichobežník $ABCD$, lebo existuje trojuholník so stranami 6 cm, 6 cm, 2 cm.
3. $|AB| = |BC| = 6\,\mathrm{cm}$; $|\sphericalangle DAB| = 90°$.
   Keďže $|CD| = 4\,\mathrm{cm}$, tak $|AD| = \sqrt{6^2 - (6-4)^2}\,\mathrm{cm} = \sqrt{32}\,\mathrm{cm}$. Takýto lichobežník existuje práve jeden, lebo existuje trojuholník so stranami 2 cm, 6 cm, $\sqrt{32}$ cm.
4. $|AB| = |AD| = 6\,\mathrm{cm}$; $|\sphericalangle ABC| = 90°$.
   Tento prípad je analogický prípadu 3 (výmena ramien AD a BC).

Danej úlohe vyhovujú práve tri lichobežníky uvedené v bodoch 2, 3, 4.

KATEGÓRIA B

B – I – 1

Označme prirodzené čísla v magickom štvorci písmenami a, b, c, d, e, f, g, h, i ako na obr. 13 a označme S súčet troch čísel v každom riadku, stĺpci aj na uhlopriečke. Ukážeme, že $S = 3e$. Ak totiž sčítame čísla v prvom a treťom riadku a od výsledku odčítame čísla v prostrednom stĺpci, dostaneme rovnosť

$$S + S - S = a + c + g + i - e.$$

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Obr. 13

Odtiaľ vzhľadom k rovnostiam $a + i = c + g = S - e$ vyplýva

$$S = (S - e) + (S - e) - e, \quad \text{alebo} \quad S = 3e.$$

Dôsledkom sú rovnosti

$$a + i = c + g = 2e.$$

Hľadajme teda štyri prirodzené čísla a, i, c, g, ktorých súčin je rovný číslu 3 465, a pritom $a + i = c + g$. Prebrať konečnú množinu riešení rovnice $aicg = 3\,465$ môžeme tak, že najprv vypíšeme všetky možné rozklady čísla $3\,465 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ na súčin dvoch činiteľov M a N (ktoré by mali odpovedať súčinom ai a cg):

$$\begin{aligned} 3\,465 &= 1 \cdot 3\,465 = 3 \cdot 1\,155 = 5 \cdot 693 = 7 \cdot 495 = 9 \cdot 385 = \\ &= 11 \cdot 315 = 15 \cdot 231 = 21 \cdot 165 = 33 \cdot 105 = 35 \cdot 99 = \\ &= 45 \cdot 77 = 55 \cdot 63. \end{aligned}$$

Teraz pre jednotlivé dvojice M, N ľahko nájdeme rozklady $M = ai$ a $N = cg$ s vlastnosťou $a + i = c + g$ (pre prvých osem dvojíc také rozklady zrejme neexistujú). Jediné dva vyhovujúce rozklady sú

$$3\,465 = (5 \cdot 11) \cdot (7 \cdot 9) = (3 \cdot 15) \cdot (7 \cdot 11).$$

V prvom prípade $2e = 16$, teda $e = 8$; v druhom $2e = 18$, teda $e = 9$. Ľahko dopočítame aj ostatné čísla magického štvorca (obr. 14).

5	12	7
10	8	6
9	4	11

3	17	7
13	9	5
11	1	15

Obr. 14

Pretože štyri rohové čísla môžeme do tabuľky umiestniť ôsmymi spôsobmi, je každá tabuľka na obrázku zástupcom ôsmych tabuliek, ktoré z nej vzniknú osovými súmernosťami magického štvorca. Iné riešenia úlohy neexistujú.

B – I – 2

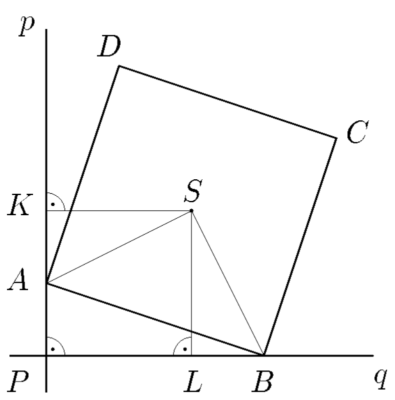
Označme P pätu kolmice p na priamku q, ktorá prechádza bodom A. S každým štvorcom daných vlastností možno uvažovať štvorec, ktorý je s ním symetrický podľa priamky p a rovnako vyhovuje podmienkam úlohy. Odtiaľ vyplýva, že vyšetrovaná množina stredov S všetkých štvorcov $ABCD$ daných vlastností je rovinný útvar, ktorý je symetrický podľa priamky p. Uvažujme teraz taký štvorec $ABCD$ so zvyčajným označením jeho vrcholov, kde $B \in q$.

Ďalej rozlíšime tri prípady polohy jeho vrcholov C, D v rovine:

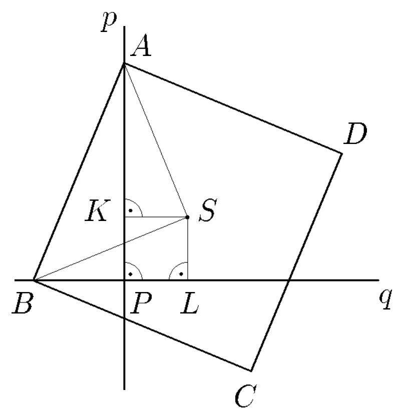
a) obidva vrcholy C, D ležia v polrovine qA (obr. 15),

b) len vrchol D leží v polrovine qA (obr. 16),

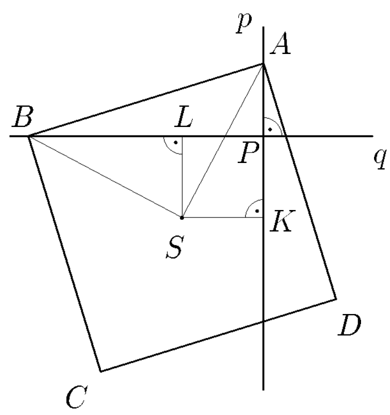
c) žiaden z vrcholov C, D neleží v polrovine qA (obr. 17).



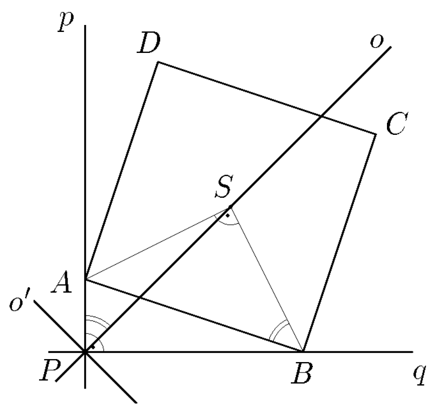
Obr. 15



Obr. 16



Obr. 17



Obr. 18

V prípade a) označme K, L po rade päty kolmíc zo stredu S uvažovaného štvorca $ABCD$ na priamky p, q. Vzhľadom k tomu, že platí $|\measuredangle ASB| = |\measuredangle KSL| = 90°$, je pravouhlý trojuholník BSL obrazom pravouhlého trojuholníka ASK v otočení so stredom S o uhol $90°$. Preto platí $|SK| = |SL|$. Rovnaký záver zdôvodníme podobne aj v prípadoch b) a c) (obr. 16 a 17). Stred S uvažovaného štvorca $ABCD$ teda vždy leží na osi o uhla KPL.

Naopak ku každému bodu S priamky o možno ľahko zostrojiť štvorec $ABCD$, ktorého stredom je bod S a ktorého vrchol B leží na priamke q.

Záver: Hľadanou množinou bodov je dvojica navzájom kolmých priamok o a o', ktoré prechádzajú bodom P a zvierajú s priamkami p a q uhol $45°$ (obr. 18).

Iné riešenie. Využijeme vlastnosti obvodových uhlov, a to pre všetky tri vyššie popísané prípady. Aj tu ukážeme riešenie len pre prípad z obr. 15.

Vzhľadom k tomu, že platí $|\measuredangle ASB| = |\measuredangle APB| = 90°$, môžeme štvoruholníku $APBS$ opísať kružnicu. Odtiaľ na základe vety o obvodových uhloch dostávame $|\measuredangle APS| = |\measuredangle ABS| = 45°$. Stred S uvažovaného štvoruholníka $ABCD$ leží teda na osi uhla APB.

B – I – 3

Nie je ťažké nahliadnuť, že pre každé dve kladné čísla a, b platí nerovnosť $a + b \geqq 2\sqrt{ab}$ alebo $\dfrac{2}{a+b} \leqq \dfrac{1}{\sqrt{ab}}$, pričom rovnosť nastáva, práve keď $a = b$. Ak zapíšeme túto nerovnosť pre každý z odpovedajúcich sčítancov na ľavej strane danej nerovnosti, dostaneme tri nerovnosti

$$\frac{2}{x+y} \leqq \frac{1}{\sqrt{xy}}, \qquad \frac{2}{y+z} \leqq \frac{1}{\sqrt{yz}}, \qquad \frac{2}{z+x} \leqq \frac{1}{\sqrt{zx}}$$

a ich sčítaním nerovnosť, ktorú po vynásobení oboch strán kladným číslom $\sqrt{xyz}$ prevedieme na nerovnosť zo zadania úlohy.

Rovnosť nastáva, len keď platí $x = y = z$.

B – I – 4

Uvažujme štvorsten $ABCD$, pre ktorého dĺžky hrán podľa zadania platí

$$|AB| = |CD| = p, \quad |BC| = |DA| = q, \quad |CA| = |BD| = r.$$

Steny uvažovaného štvorstena sú tvorené štyrmi zhodnými trojuholníkmi (so stranami p, q, r), teda zo vzorca pre objem ihlana vyplýva, že všetky štyri telesové výšky majú rovnakú veľkosť v. Uvažujme ďalej vnútri štvorstena $ABCD$ bod M, ktorý má od všetkých jeho stien rovnakú vzdialenosť d. Vzhľadom k tomu, že štvorsteny $ABCM$, $ABDM$, $BCDM$ a $CADM$ majú rovnaký objem, musí sa tento objem rovnať štvrtine objemu celého štvorstena $ABCD$. Platí preto $v = 4d$. Tým je dôkaz skončený.

B – I – 5

Sčítaním všetkých troch rovníc dostaneme

$$6(x+y+z)=3p, \qquad \text{t.j.} \qquad x+y+z=\frac{p}{2}.$$

Ak dosadíme túto hodnotu do ľavých strán jednotlivých rovníc sústavy upravených podľa vzoru

$$a+2b+3c=2(a+b+c)+c-a,$$

dostaneme po úprave nasledujúcu sústavu rovníc (už bez parametra p):

$$z-x=x^2-z^2, \qquad x-y=y^2-x^2, \qquad y-z=z^2-y^2.$$

Z prvej rovnice ľahko zistíme, že platí $z-x=0$ alebo $z+x+1=0$. Podobne z druhej, resp. tretej rovnice dostávame $x-y=0$ alebo $x+y+1=0$, resp. $y-z=0$ alebo $y+z+1=0$. Pretože daná sústava rovníc sa nemení cyklickou permutáciou neznámych x, y, z, stačí rozlíšiť dva prípady:

(i) $x=y=z$. Z počiatočnej sústavy potom ľahko určíme, že jediným riešením je trojica

$$(x,y,z)=\left(\frac{p}{6},\frac{p}{6},\frac{p}{6}\right).$$

(ii) $x=y$ a $z=-x-1$. Pre také trojice neznámych je daná sústava ekvivalentná s jedinou rovnicou $2x=p+2$ (o tom sa ľahko presvedčíme dosadením), takže platí

$$x=y=1+\frac{p}{2} \qquad \text{a} \qquad z=-2-\frac{p}{2}.$$

Permutovaním trojice (x,y,z) v prípade (i) žiadne ďalšie riešenie nedostaneme, v prípade (ii) sú výsledkom riešenia

$$\left(1+\frac{p}{2},\ 1+\frac{p}{2},\ -2-\frac{p}{2}\right),\ \left(-2-\frac{p}{2},\ 1+\frac{p}{2},\ 1+\frac{p}{2}\right),\ \left(1+\frac{p}{2},\ -2-\frac{p}{2},\ 1+\frac{p}{2}\right).$$

Riešenie danej sústavy je jediné, práve keď

$$\frac{p}{6}=1+\frac{p}{2}=-2-\frac{p}{2}.$$

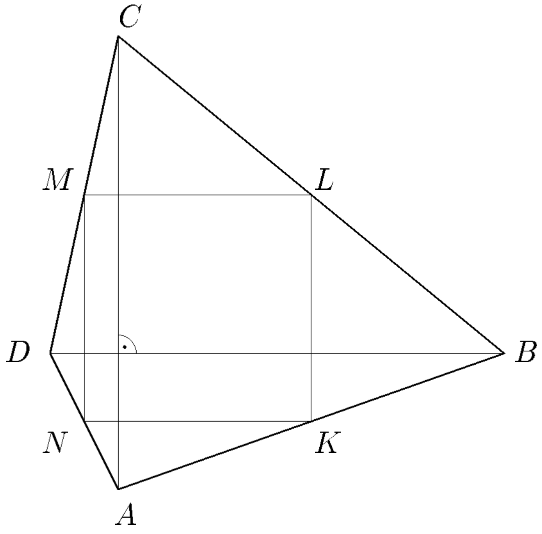
To nastane len pre $p=-3$. Pre každé iné p má sústava práve štyri riešenia, lebo žiadne dve z čísel $\frac{1}{6}p$, $1+\frac{1}{2}p$, $-2-\frac{1}{2}p$ sa pre $p\neq-3$ nerovnajú.

B – I – 6

Označme $ABCD$ uvažovaný konvexný štvoruholník a K, L, M a N označme po rade stredy jeho strán AB, BC, CD a DA. Štvoruholník $KLMN$ je vždy rovnobežník (niekedy nazývaný Varignonov rovnobežník štvoruholníka $ABCD$), lebo jeho strany KL,

LM, MN, NK sú po rade strednými priečkami v trojuholníkoch ABC, BCD, CDA, DAB. Platí teda $KL \parallel AC \parallel MN$ a $LM \parallel BD \parallel NK$. Obsah rovnobežníka $KLMN$ je pritom rovný polovici obsahu štvoruholníka $ABCD$. Ak majú obe uhlopriečky KM a LN v rovnobežníku $KLMN$ tú istú dĺžku d, je $KLMN$ pravouholník, v ktorom platí $KL \perp LM$, a je teda aj $AC \perp BD$. Dokázali sme, že uhlopriečky AC a BD štvoruholníka $ABCD$ sú navzájom kolmé.

Štvoruholník $ABCD$ má najväčší obsah, práve keď má najväčší obsah príslušný pravouholník $KLMN$. Medzi všetkými pravouholníkmi s danou uhlopriečkou d má najväčší obsah štvorec, ktorého obsah je $\frac{1}{2}d^2$. Najväčší možný obsah štvoruholníka $ABCD$ je teda d^2. Taký obsah má každý uvažovaný štvoruholník, ktorý má zhodné a navzájom kolmé uhlopriečky dĺžky $d\sqrt{2}$ (napríklad ten na obr. 19).



Obr. 19

B – S – 1

Druhú rovnicu upravíme na tvar $(1-c)ab + (a+b)c = 0$. Podľa prvej rovnice je však $a + b = 1 - c$, takže odtiaľ dostávame podmienku $(1-c)(ab+c) = 0$. Pretože pôvodná sústava bola symetrická vzhľadom k neznámym a, b, c, pokúsime sa ešte upraviť činiteľ $ab + c$. Pomocou prvej rovnice tak dostaneme

$$ab + c = ab + (1 - a - b) = a(b-1) + (1-b) = (1-a)(1-b),$$

takže

$$(1-c)(ab+c) = (1-a)(1-b)(1-c) = 0.$$

Odtiaľ vyplýva, že niektoré z čísel a, b, c je nutne rovné jednej, ostatné dve z nich sú potom (z rovnosti $a + b + c = 1$) čísla navzájom opačné. Trojica (a, b, c) má teda jeden z tvarov

$$(1, k, -k), \ (k, 1, -k), \ (k, -k, 1),$$

kde k je vhodné číslo. Dosadením sa ľahko presvedčíme, že sú to skutočne riešenia, a to pre ľubovoľné reálne číslo k.

Riešenie 2. Použijeme štandardný postup pre riešenie sústav rovníc. Z prvej rovnice vyjadríme napríklad „neznámu“ $c = 1-a-b$ a dosadíme do druhej rovnice, ktorú potom budeme riešiť vzhľadom na „neznámu“ b (považujúc a za „parameter“). Dostaneme tak po rutinných úpravách kvadratickú rovnicu

$$(a-1)b^2 + (a^2 - 2a + 1)b + (a - a^2) = 0.$$

Jej koeficienty, ako ľahko vidíme, majú spoločný činiteľ $a-1$, takže rovnicu pred riešením ešte upravíme:

$$(a-1)\big[b^2 + (a-1)b - a\big] = 0.$$

Pretože korene trojčlena v hranatých zátvorkách sú $b_1 = 1$ a $b_2 = -a$, musí nastať jeden z prípadov $a = 1$, $b = 1$, alebo $b = -a$. Záver je rovnaký ako v prvom riešení.

Riešenie 3. V oboch rovniciach vystupujú výrazy, ktoré, ako vieme, súvisia s koeficientami mnohočlena $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$. Tak zistíme, že ak sú obidve rovnice splnené, má mnohočlen $P(x)$ tvar $x^3 - x^2 + px - p$, kde $p = abc$. Vtedy platí $P(1) = 1 - 1 + p - p = 0$, takže číslo 1 musí byť jedným z koreňov a, b, c mnohočlena $P(x)$. Záver je rovnaký ako v prvom riešení.

B – S – 2

Označme K, L, M, N po rade stredy strán AB, BC, CD, DA uvažovaného konvexného štvoruholníka $ABCD$. Štvoruholník $KLMN$ je rovnobežník, lebo každá z jeho strán je strednou priečkou v niektorom z trojuholníkov ABC, BCD, CDA a DAB, na ktoré uhlopriečky daný štvoruholník rozdelia, takže $KL \parallel AC \parallel MN$ a $LM \parallel BD \parallel MK$ (bolo to využité aj v úlohe B–I–6). Ak majú naviac jeho uhlopriečky KM a LN tú istú dĺžku, je $KLMN$ pravouholník, a preto sú uhlopriečky AC a BD daného konvexného štvoruholníka $ABCD$ navzájom kolmé.

Označme P priesečník uhlopriečok AC a BD štvoruholníka $ABCD$. Ak použijeme *Pytagorovu vetu* postupne na pravouhlé trojuholníky ABP, BCP, CDP a DAP, dostaneme

$$\begin{aligned}
|PA|^2 + |PB|^2 &= |AB|^2,\\
|PB|^2 + |PC|^2 &= |BC|^2,\\
|PC|^2 + |PD|^2 &= |CD|^2,\\
|PD|^2 + |PA|^2 &= |DA|^2.
\end{aligned}$$

Súčtom prvej a tretej, resp. druhej a štvrtej rovnosti vyjde

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2 = |BC|^2 + |DA|^2,$$

čo sme mali dokázať.

B – S – 3

Označme a, b, c a d jednomiestne čísla v rohových poliach hľadanej tabuľky (obr. 20) a e číslo v jej stredovom poli. Vzhľadom k súmernosti (preklopením podľa jednej z uhlopriečok alebo stredného stĺpca či riadku sa uvažované vlastnosti tabuľky nezmenia) môžeme predpokladať, že $a \leqq d$, $b \leqq c$ a $a + d \leqq b + c$, a pretože má platiť $a + b + c + d \leqq 9$, bude za uvedených predpokladov $a + d \leqq 4$ a $b + c \leqq 5$. Z rovnosti $aed = bec$ vyplýva $ad = bc$, takže stačí preskúmať nasledujúcich päť možností:

a	1	1	1	2	2
d	1	2	3	2	2
b	1	1	1	1	2
c	1	2	3	4	2

a		b
	e	
c		d

Obr. 20

V každom z týchto piatich prípadov môžeme pomocou „prostredného“ čísla e rovnakou metódou vyjadriť ostatné čísla tabuľky, a to tak, že využijeme rovnosť súčinov čísel na obidvoch uhlopriečkach, v oboch krajných riadkoch a v oboch krajných stĺpcoch. Tabuľky potom vyzerajú takto:

1	e	1
e	e	e
1	e	1

1	$2e$	1
e	e	e
2	$\frac{1}{2}e$	2

1	$3e$	1
e	e	e
3	$\frac{1}{3}e$	3

2	$2e$	1
$\frac{1}{2}e$	e	$2e$
4	$\frac{1}{2}e$	2

2	e	2
e	e	e
2	e	2

Ak teraz porovnáme spomínané súčiny so súčinom čísel v druhom riadku (či v druhom stĺpci), dostaneme v každom z uvedených prípadov jedinú rovnicu

$$e^3 = (ad)e, \quad \text{kde postupne } ad = 1, 2, 3, 4, 4.$$

Táto rovnica má v prirodzených číslach riešenie len pre $ad \in \{1, 4\}$, ktorému zodpovedajú tri tabuľky na obr. 21. Z poslednej tabuľky dostaneme spomínanými súmernosťami ešte tri ďalšie, ale ako ľahko zistíme, vznikne každá z nich otočením uvedenej tabuľky o 90°.

1	1	1
1	1	1
1	1	1

2	2	2
2	2	2
2	2	2

2	4	1
1	2	4
4	1	2

Obr. 21

B – II – 1

Z druhej a tretej rovnice, ktoré upravíme do tvaru

$$x(z - 2) = 2z, \qquad y(z - 3) = 3z,$$

vyplýva podmienka $z \notin \{2, 3\}$ a vyjadrenie

$$x = \frac{2z}{z-2}, \qquad y = \frac{3z}{z-3}. \tag{1}$$

Dosadením do prvej rovnice sústavy dostaneme

$$\frac{6z^2}{(z-2)(z-3)} = \frac{2az}{z-2} + \frac{3az}{z-3}$$

a po úprave

$$z\big((6-5a)z + 12a\big) = 0.$$

Odtiaľ vyplýva, že je buď $z = 0$ (potom $x = y = 0$), alebo (za predpokladu $a \neq \frac{6}{5}$)

$$z = \frac{12a}{5a-6},$$

odkiaľ podľa (1) dostávame riešenie

$$x = \frac{12a}{a+6}, \quad y = \frac{12a}{6-a}, \quad z = \frac{12a}{5a-6}. \tag{2}$$

Pritom podmienka $z \notin \{2, 3\}$ je ekvivalentná s podmienkou $a \notin \{-6, 6\}$. Naviac si všimnime, že pre $a = 0$ dáva (2) riešenie $x = y = z = 0$. Toto riešenie zrejme sústave vyhovuje pre ľubovoľné reálne a.

Záver. Pre $a \in \{-6, 0, \frac{6}{5}, 6\}$ má sústava jediné riešenie $x = y = z = 0$, pre ostatné reálne a má sústava naviac aj nenulové riešenie (2).

Iné riešenie. Trojica $x = y = z = 0$ je riešením danej sústavy. Z druhej a tretej rovnice vyplýva, že pokiaľ je jedno z čísel x, y, z rovné nule, sú nulové aj ostatné dve. Preto ďalej predpokladajme, že $xyz \neq 0$. Potom nutne aj $a \neq 0$. Sústavu prepíšeme do tvaru

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \qquad \frac{1}{2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}, \qquad \frac{1}{3} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

To je sústava lineárnych rovníc vzhľadom k neznámym $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$. Ľahko nájdeme jej (jediné) riešenie

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{12} + \frac{1}{2a}, \quad \frac{1}{y} = -\frac{1}{12} + \frac{1}{2a}, \quad \frac{1}{z} = \frac{5}{12} - \frac{1}{2a}.$$

Odtiaľ určíme trojicu

$$x = \frac{12a}{a+6}, \quad y = \frac{12a}{6-a}, \quad z = \frac{12a}{5a-6}, \tag{3}$$

ktorá je riešením, pokiaľ $a \notin \{-6, 6, \frac{6}{5}\}$.

Záver. Pre $a \in \{-6, 0, \frac{6}{5}, 6\}$ má sústava jediné riešenie $x = y = z = 0$; pre ostatné hodnoty a má sústava aj druhé riešenie (3).

B – II – 2

Označme T ťažisko uvažovaného trojuholníka ABC, S stred jeho strany AB. Z podmienky $3c = 2t_c$ vyplýva $\frac{1}{3}t_c = \frac{1}{2}c$. Platí teda $|SA| = |SB| = |ST| = \frac{1}{2}c$. To znamená, že bod S je stredom kružnice opísanej trojuholníku ABT, ktorá je Tálesovou kružnicou zostrojenou nad priemerom AB. Platí preto $|\sphericalangle ATB| = 90°$. Odtiaľ už bezprostredne vyplýva konštrukcia:

Najprv podľa vety *sus* zostrojíme trojuholník ABT, v ktorom platí

$$|AT| = \frac{2}{3}t_a = 6\,\mathrm{cm}, \quad |BT| = \frac{2}{3}t_b = 8\,\mathrm{cm} \quad \text{a} \quad |\sphericalangle ATB| = 90°,$$

a ďalej už ľahko zostrojíme trojuholník ABC.

Úloha má práve jedno riešenie.

B – II – 3

Uvažujme štvorcovú tabuľku 3×3 (obr. 22) spĺňajúcu podmienky úlohy.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Obr. 22

a) Z tabuľky je zjavné, že pre uvažovaný súčin s platí

$$s = \frac{(aei)(def)(gec)}{(adg)(cfi)} = e^3.$$

Číslo s je teda treťou mocninou prirodzeného čísla e, ktoré je umiestnené uprostred tabuľky.

b) Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $a = 1$ (otočením tabuľky o 90° alebo o 180° sa uvažované vlastnosti tabuľky nezmenia). Vzhľadom na výsledok časti a) zo súčinu čísel na oboch uhlopriečkach zistíme, že musí byť $i = e^2$ a $c = \dfrac{e^2}{g}$. Zo súčinu čísel v treťom riadku potom dostaneme, že $h = \dfrac{e}{g}$, a zo súčinu čísel v treťom stĺpci $f = \dfrac{g}{e}$. Pretože h i f sú prirodzené čísla, musí byť $e = g$, a preto tiež $h = f = 1$. Uvažovaná štvorcová tabuľka je teda typovo zhodná s tabuľkou na obr. 23. Odtiaľ vyplýva, že súčet všetkých štyroch čísel v jej rohových políčkach je

1	e^2	e
e^2	e	1
e	1	e^2

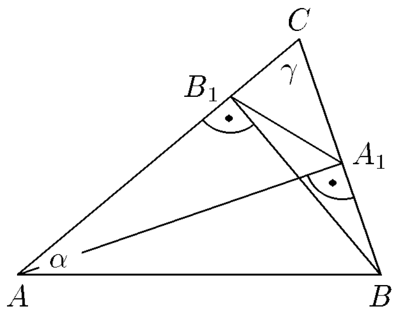
Obr. 23

$$a + c + g + i = 1 + e + e + e^2 = (1 + e)^2,$$

čo je druhá mocnina prirodzeného čísla. Tým je dôkaz ukončený.

B – II – 4

Označme α, β, γ veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC. Päty výšok A_1 a B_1 (obr. 24) ležia na Tálesovej kružnici s priemerom AB, štvoruholník ABA_1B_1 je teda tetivový a pre jeho protiľahlé uhly platí $|\sphericalangle CAB|+|\sphericalangle BA_1B_1| = 180°$. Je teda $|\sphericalangle B_1A_1C| = \alpha$, takže trojuholníky ABC a A_1B_1C sú podobné podľa vety *uu*.



Obr. 24

Ak označíme po rade ϱ a ϱ_1 polomery kružníc vpísaných trojuholníkom ABC a A_1B_1C, zo spomínanej podobnosti vyplýva

$$\cos\gamma = \frac{|B_1C|}{|BC|} = \frac{|A_1C|}{|AC|} = \frac{\varrho_1}{\varrho} = \frac{1}{2},$$

takže $\gamma = 60°$. Vzhľadom na to, že $\alpha = 40°$, dostávame konečne $\beta = 80°$.

Tým je úloha vyriešená.

Kategória A

A – I – 1

Označme $k = 1\,997$ a všimnime si, že pre každé n platí

$$k^{2^{n+1}} - 1 = \left(k^{2^n}\right)^2 - 1^2 = \left(k^{2^n} - 1\right)\left(k^{2^n} + 1\right). \tag{1}$$

To nám umožní dokazovať uvedené tvrdenie indukciou. Začneme s hodnotou $n = 0$, lebo číslo $k-1$ je deliteľné číslom 2^2. Pretože číslo $k^{2^n}+1$ je pre každé n párne, vyplýva z (1), že pokiaľ číslo $k^{2^n}-1$ je deliteľné číslom 2^{n+2}, je číslo $k^{2^{n+1}}-1$ deliteľné číslom $2 \cdot 2^{n+2}$, teda číslom 2^{n+3}. Tým je dôkaz indukciou ukončený. Dodajme, že namiesto (1) je možné podobne využiť aj rovnosti

$$\left(k^{2^n} - 1\right)^2 = k^{2^{n+1}} - 2 \cdot k^{2^n} + 1 = \left(k^{2^{n+1}} - 1\right) - 2\left(k^{2^n} - 1\right).$$

Iné riešenie. Namiesto matematickej indukcie môžeme využiť binomickú vetu a dokázať, že pre každé celé číslo k je rozdiel $(4k+1)^{2^n} - 1$ deliteľný číslom 2^{n+2}. (Odtiaľ voľbou $k = 499$ dostaneme tvrdenie úlohy.) Z binomickej vety pre exponent 2^n vyplýva rozklad

$$\begin{aligned}(4k+1)^{2^n} - 1 = (4k)^{2^n} + \binom{2^n}{1}(4k)^{2^n-1} + \ldots +\\ + \binom{2^n}{j}(4k)^{2^n-j} + \ldots + \binom{2^n}{2^n-1}4k.\end{aligned} \tag{2}$$

Prvý sčítanec napravo je deliteľný mocninou $2^{2^{n+1}}$, a teda aj mocninou 2^{n+2}, lebo $n+2 \leqq 2^{n+1}$ pre každé celé $n \geqq 0$ (ľahká indukcia). Teraz pre každé $j \in \{1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$ zistíme, akou mocninou čísla 2 je deliteľné kombinačné číslo $\binom{2^n}{j}$. Na to využijeme vyjadrenie

$$\binom{2^n}{j} = \frac{2^n}{j} \cdot \frac{2^n-1}{1} \cdot \frac{2^n-2}{2} \cdot \frac{2^n-3}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{2^n-j+1}{j-1}, \tag{3}$$

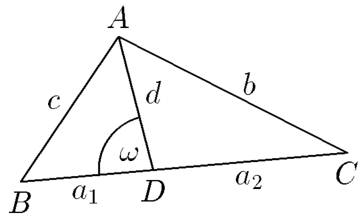
ktoré je výhodné preto, že čísla i a $2^n - i$ $(1 \leqq i \leqq 2^n - 1)$ majú vo svojich rozkladoch na prvočinitele tú istú mocninu čísla 2. Ak je preto $j = 2^\alpha l$, kde $0 \leqq \alpha \leqq n-1$ a l je nepárne, je podľa (3) uvažované číslo $\binom{2^n}{j}$ nepárnym násobkom mocniny $2^{n-\alpha}$. Odtiaľ vyplýva, že číslom 2^{n+2} je deliteľný každý sčítanec na pravej strane (2) práve vtedy, keď pre každý uvažovaný index j platí nerovnosť $n+2 \leqq (n-\alpha) + 2(2^n - j)$, alebo $\alpha + 2 \leqq 2(2^n - j)$. Pretože $\alpha + 2 \leqq 2^{\alpha+1}$ (ľahká indukcia), stačí nám dokázať silnejšie nerovnosti $2^\alpha \leqq 2^n - j$. Tie ale vyplývajú z definície čísel $\alpha = \alpha(j)$: pretože mocnina 2^α delí číslo j, delí aj číslo $2^n - j$, takže ho neprevyšuje.

A – I – 2

Aby sme jedným postupom splnili obidve časti úlohy, hľadajme všetky také body D strany BC daného trojuholníka ABC, pre ktoré pri označení z obr. 25 platí $a_1a_2 + d^2 = bc$ (porovnajte s rovnosťou zo zadania). Z kosínusových viet pre trojuholníky ABD a ACD

$$c^2 = a_1^2 + d^2 - 2a_1 d \cos\omega,$$
$$b^2 = a_2^2 + d^2 + 2a_2 d \cos\omega$$

vylúčime $\cos\omega$ a to tak, že k a_2-násobku prvej rovnice pripočítame a_1-násobok rovnice druhej. Po úprave dostaneme $a_1b^2 + a_2c^2 = (a_1a_2 + d^2)(a_1 + a_2)$, odkiaľ vidíme, že rovnosť $a_1a_2 + d^2 = bc$ platí, práve keď $a_1b^2 + a_2c^2 = bc(a_1 + a_2)$, čo je algebraicky ekvivalentné s rovnosťou $a_1b(b-c) = a_2c(b-c)$. To znamená, že skúmaná rovnosť v prípade $b = c$ platí pre *každý* bod $D \in BC$ (takže odpoveď na otázku zo záveru zadania je kladná). Naopak v prípade $b \neq c$ platí pre (jediný) bod $D \in BC$, pre ktorý $a_1b = a_2c$, alebo $a_1 : a_2 = c : b$. Ľahko nahliadneme, že je to práve ten bod strany BC, ktorý leží na osi uhla BAC.



Obr. 25

A – I – 3

a) Postupne nájdeme všetky slová dĺžok 2, 3 a 4. Z možných skupín dĺžky 2 slovami nie sú práve BB (neobsahuje žiadne A) a AA (je neprípustného tvaru). Takže slová dĺžky 2 sú práve AB a BA. Z nich vytvoríme neprípustné tvary dĺžky 3: ABA a BAA. Ostatné skupiny dĺžky 3 (s výnimkou BBB), teda slová sú: AAA, AAB, ABB, BAB, BBA. Ak pripíšeme na ich koniec vždy písmeno A, dostaneme päť neprípustných tvarov dĺžky 4: $AAAA$, $AABA$, $ABBA$, $BABA$, $BBAA$. Ostatné skupiny dĺžky 4 (s výnimkou $BBBB$) sú teda hľadané slová: $AAAB$, $AABB$, $ABAA$, $ABAB$, $ABBB$, $BAAA$, $BAAB$, $BABB$, $BBAB$, $BBBA$.

b) Podľa časti a) vieme, že $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 5$ a $p_4 = 10$. Teraz pre každé $n \geqq 1$ vyjadríme počet p_{n+1} pomocou počtu p_n. Rozdelíme teda všetky slová dĺžky $n + 1$ do dvoch skupín podľa toho, ktorým písmenom končia: tých, ktoré sú tvaru $\ldots A$, je práve $2^n - p_n$ (pred posledným A stojí ľubovoľná skupina dĺžky n, ktorá nie je slovo); tých, ktoré sú tvaru $\ldots B$, je práve $2^n - 1$ (pred posledným B stojí ľubovoľná skupina dĺžky n okrem $BB \ldots B$). Preto platí $p_{n+1} = (2^n - p_n) + (2^n - 1) = 2^{n+1} - 1 - p_n$. Z vyjadrení pre p_{n+1} a p_{n+2} vyplýva: $p_{n+2} = 2^{n+2} - 1 - p_{n+1} = 2^{n+2} - 1 - (2^{n+1} - 1 - p_n) = p_n + 2^{n+1}$. Z toho budeme určovať hodnoty p_n oddelene pre párne a pre nepárne indexy n:

$$\begin{aligned} p_{2k-1} &= p_{2k-3} + 2^{2k-2} = p_{2k-5} + 2^{2k-4} + 2^{2k-2} = \ldots = \\ &= p_1 + 2^2 + 2^4 + \ldots + 2^{2k-4} + 2^{2k-2} = \\ &= 1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^{k-2} + 4^{k-1} = \frac{4^k - 1}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_{2k} &= p_{2k-2} + 2^{2k-1} = p_{2k-4} + 2^{2k-3} + 2^{2k-1} = \ldots = \\ &= p_2 + 2^3 + 2^5 + \ldots + 2^{2k-3} + 2^{2k-1} = \\ &= 2 + 2\cdot 4^1 + 2\cdot 4^2 + \ldots + 2\cdot 4^{k-2} + 2\cdot 4^{k-1} = \frac{2\cdot(4^k-1)}{3}.\end{aligned}$$

Nájdené vzorce platia pre každé $k \geqq 1$. Dodajme, že ich môžeme zapísať jednotným spôsobom

$$p_n = \frac{2^{n+2} + (-1)^{n+1} - 3}{6} \qquad (n = 1, 2, 3, 4, \ldots).$$

Iné riešenie. Odlišný postup riešenia založíme na priamom (t.j. nerekurentnom) popise slov daného jazyka. Nie je ťažké sa dovtípiť, že rozhodnutie o tom, či je daná skupina písmen A, B slovom, podstatne závisí na parite počtu písmen A, ktorými sa táto skupina končí. Najprv je jasné, že skupina končiaca písmenom B je slovo, práve keď obsahuje *aspoň jedno* písmeno A. Skupina $\underbrace{AA\ldots A}_{q\text{-krát}}$ (neobsahujúca žiadne písmeno B) je zrejme slovo, práve keď je počet q jeho písmen *nepárny*. „Zostáva" rozhodnúť o skupinách

$$X_1X_2\ldots X_rB\underbrace{AA\ldots A}_{q\text{-krát}},$$

kde q a r sú ľubovoľné počty (nevylučujeme, že $r = 0$). Zapísaná skupina je slovo, práve keď buď q je *nepárne* a $X_1X_2\ldots X_rB$ slovo *nie je* (teda $X_i = B$ pre každé i), alebo q je *párne* a $X_1X_2\ldots X_rB$ slovo *je* (čiže $r \geqq 1$ a $X_i = A$ pre niektoré i). Dôkaz poslednej vety sa jednoducho prevedie indukciou podľa čísla q.

Získaný popis umožňuje priamo nielen vypísať všetky slová danej dĺžky n, ale tiež určiť ich počet p_n, a to pomocou rozdelenia slov do skupín podľa počtu q písmen A, ktorými jednotlivé slová končia ($0 \leqq q \leqq n$). V každej takejto skupine sú všetky slová tvaru

$$X_1X_2\ldots X_{n-q}\underbrace{AA\ldots A}_{q\text{-krát}},$$

kde v prípade $q < n$ nutne $X_{n-q} = B$. Pre dané nepárne q je tohoto tvaru jediné slovo (odpovedajúce počiatočnej skupine $X_1X_2\ldots X_{n-q} = BB\ldots B$), pre dané párne $q \leqq n-2$ je takýchto slov práve $2^{n-q-1}-1$ (lebo potom $X_{n-q} = B$ a $X_1X_2\ldots X_{n-q-1}$ je ľubovoľná z $2^{n-q-1}-1$ skupín písmen obsahujúcich aspoň jedno A), napokon pre párne $q \in \{n-1, n\}$ také slovo neexistuje (takže vyjadrenie $2^{n-q-1}-1$ platí aj pre $q = n-1$). Ak spočítame tieto počty pre $q \in \{0, 1, \ldots, n\}$, dostaneme v prípade nepárneho $n = 2k-1$

$$\begin{aligned}p_{2k-1} &= \underbrace{(2^{2k-2}-1)}_{q=0} + \underbrace{1}_{q=1} + \underbrace{(2^{2k-4}-1)}_{q=2} + \underbrace{1}_{q=3} + \ldots + \underbrace{(2^0-1)}_{q=2k-2} + \underbrace{1}_{q=2k-1} = \\ &= 4^{k-1} + 4^{k-2} + \ldots + 4 + 1 = \frac{4^k-1}{3},\end{aligned}$$

zatiaľ čo pre párne $n = 2k$ nám vyjde

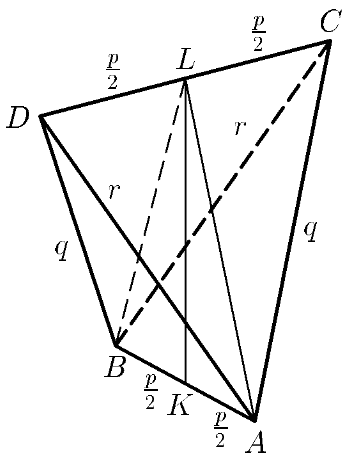
$$p_{2k} = \underbrace{(2^{2k-1}-1)}_{q=0} + \underbrace{1}_{q=1} + \underbrace{(2^{2k-3}-1)}_{q=2} + \underbrace{1}_{q=3} + \ldots + \underbrace{(2^{1}-1)}_{q=2k-2} + \underbrace{1}_{q=2k-1} + \underbrace{0}_{q=2k} =$$
$$= 2\cdot(4^{k-1}+4^{k-2}+\ldots+4+1) = \frac{2\cdot(4^k-1)}{3}.$$

A – I – 4

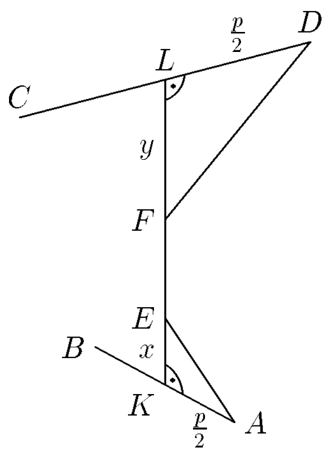
a) Úsečka KL je ťažnicou trojuholníka ABL (obr. 26). Preto vzťah $KL \perp AB$ platí, práve keď $|AL| = |BL|$. Úsečky AL a BL sú ale ťažnice v zhodných trojuholníkoch ADC a BCD (veta sss), sú teda zhodné. Podobne sa z trojuholníka CDK vysvetlí, prečo $KL \perp CD$. K predchádzajúcemu ešte dodajme, že podľa Pytagorovej vety a vzorcov pre dĺžky ťažníc platí

$$|KL|^2 = |AL|^2 - |AK|^2 = \frac{2q^2+2r^2-p^2}{4} - \frac{p^2}{4} = \frac{q^2+r^2-p^2}{2}.$$

Pre stručnosť ďalej označujeme $d = |KL|$; určenú hodnotu d^2 potom dosadíme, keď to bude vhodné.



Obr. 26



Obr. 27

b) Pre ľubovoľné body E, F na priečke KL označme $x = |KE|$, $y = |LF|$ (obr. 27). Potom $|EF| = |d - x - y|$,

$$|AE|^2 + |EF|^2 + |FC|^2 = (|AK|^2 + x^2) + (d-x-y)^2 + (|LC|^2 + y^2) = 2\cdot\frac{p^2}{4} + f(x,y),$$

kde $f(x,y) = x^2 + (d-x-y)^2 + y^2$. Ukážeme, že platí odhad $f(x,y) \geqq f(\frac{d}{3},\frac{d}{3})$, z ktorého vyplýva, že najmenšia hodnota súčtu $|AE|^2 + |EF|^2 + |FC|^2$ je rovná

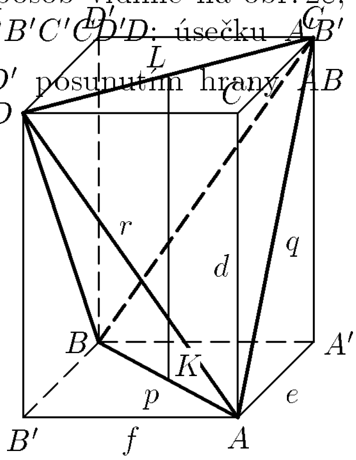
$$\frac{p^2}{2} + f\Big(\frac{d}{3},\frac{d}{3}\Big) = \frac{p^2}{2} + \frac{d^2}{3} = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2+r^2-p^2}{6} = \frac{2p^2+q^2+r^2}{6}.$$

(Táto hodnota sa dosiahne, keď $|AE| = |EF| = |FC| = \frac{1}{3}|KL|$.) Spomínaný odhad vyplýva okamžite z Cauchyho nerovnosti $3(u^2 + v^2 + w^2) \geqq (u + v + w)^2$, platnej pre ľubovoľnú trojicu *reálnych* čísel u, v, w. Ak sa na ňu nechceme odvolávať, môžeme previesť algebraické úpravy kvadratických výrazov, ktorým obvykle hovoríme *doplnenie na štvorec*:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + (d - x - y)^2 + y^2 = 2x^2 - 2x(d - y) + (d - y)^2 + y^2 = \\ &= 2\Big(x - \frac{d-y}{2}\Big)^2 + \frac{1}{2}(d - y)^2 + y^2 = \\ &= 2\Big(x - \frac{d-y}{2}\Big)^2 + \frac{3}{2}y^2 - dy + \frac{1}{2}d^2 = \\ &= 2\Big(x - \frac{d-y}{2}\Big)^2 + \frac{3}{2}\Big(y - \frac{d}{3}\Big)^2 + \frac{1}{3}d^2. \end{aligned}$$

Hodnota $f(x,y)$ je teda najmenšia, pokiaľ $x = \dfrac{d-y}{2}$ a $y = \dfrac{d}{3}$, alebo $x = y = \dfrac{d}{3}$.

Iné riešenie. V časti a) môžeme postupovať odlišne, keď využijeme aj inokedy uplatňovaný trik: daný štvorsten doplníme na rovnobežnosten. Spôsob vidíme na obr. 28, kde je štvorsten $ABCD$ doplnený na rovnobežnosten $AA'BB'C'CD'D$; úsečku $A'B'$ dostaneme posunutím hrany CD o vektor $\overrightarrow{LK}$, úsečku $C'D'$ posunutím hrany AB o vektor $\overrightarrow{KL}$.



Obr. 28

Zo zhodnosti hrán AB a CD vyplýva, že stena $AA'BB'$ je rovnobežník, ktorého uhlopriečky sú zhodné, teda pravouholník. Rovnakú vlastnosť majú aj ostatné steny rovnobežnostena $AA'BB'C'CD'D$, ktorý je preto *kváder* (každé dve z hrán AA', AB', AC' sú totiž navzájom kolmé). Tým je tvrdenie a) dokázané. Dĺžku d priečky KL, ktorú potrebujeme v časti b), teraz určíme ako dĺžku hrany AC'. Ak označíme ešte $e = |AA'|$ a $f = |AB'|$, potom neznáme rozmery d, e, f nášho kvádra môžeme vypočítať pomocou dĺžok p, q, r jeho stenových uhlopriečok, t.j. zo sústavy troch Pytagorovych viet $d^2 + e^2 = q^2$, $d^2 + f^2 = r^2$, $e^2 + f^2 = p^2$. Tak (bez vzorca pre dĺžku ťažnice všeobecného trojuholníka) dospejeme k rovnakému výsledku: $d^2 = \dfrac{q^2 + r^2 - p^2}{2}$.

A – I – 5

Označme vrecúška číslami $1, 2, \ldots, 7$ a symbolom b_{ij} tú farbu, z ktorej nájdeme po jednej guľôčke vo vrecúškach i a j, $1 \leqq i < j \leqq 7$. (Ak je kandidátok na niektoré b_{ij} viac, vyberieme ľubovoľnú z nich.) Medzi týmito $\binom{7}{2} = 21$ farbami b_{ij} je podľa zadania nanajvýš 7 rôznych.

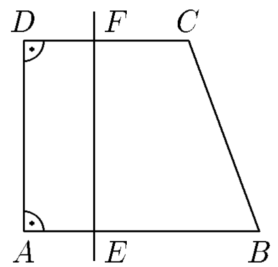
a) Keby guľôčky ľubovoľnej farby boli zastúpené nanajvýš v dvoch vrecúškach, museli by byť všetky spomínané farby b_{ij} navzájom rôzne, a to je spor. Dodajme, že tvrdenie a) platí, aj keď sa začiatočný počet vrecúšok zníži zo sedem na päť (a počet farieb rovný sedem sa zachová), lebo $\binom{5}{2} > 7$.

b) Predpokladajme, že z každej farby boli rozdelené len 3 guľôčky. Potom je každá farba zastúpená v nanajvýš troch vrecúškach, takže sa každej farbe rovnajú nanajvýš $\binom{3}{2} = 3$ hodnoty b_{ij}. To je podľa úvodného odstavca možné, len keď všetkých 21 $(= \binom{7}{2} = 7\binom{3}{2})$ hodnôt b_{ij} je tvorených siedmymi trojicami zhodných farieb, takže guľôčky každej farby sú rozdelené po jednej do troch rôznych vrecúšok.

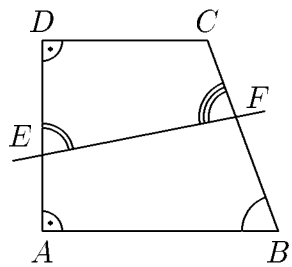
Rozdelenie za podmienky z tvrdenia b) je možné (a až na permutácie farieb a vrecúšok jediné). Popíšeme ho siedmymi trojprvkovými množinami $\{1,2,3\}$, $\{1,4,5\}$, $\{1,6,7\}$, $\{2,4,6\}$, $\{2,5,7\}$, $\{3,4,7\}$ a $\{3,5,6\}$, určujúcimi, ktoré tri z vrecúšok $1,2,\ldots,7$ obsahujú guľôčky jednotlivých farieb. (Dá sa to interpretovať aj inak: ktoré tri z farieb $1,2,\ldots,7$ sú zastúpené v jednotlivých vrecúškach.) Overte, že každé dve čísla z $\{1,2,\ldots,7\}$ ležia súčasne v jednej zo siedmych vypísaných množín (a že každé dve z týchto množín majú spoločný práve jeden prvok).

A – I – 6

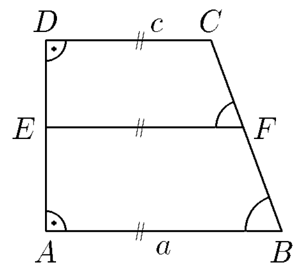
Hľadaná priamka EF musí pretínať dve *protiľahlé* strany daného lichobežníka $ABCD$. Nemôžu to byť základne (obr. 29): aby $AEFD$ a $EBCF$ boli podobné štvoruholníky, musel by druhý z nich mať (rovnako ako ten prvý) dva vnútorné uhly pravé, a to môžu byť len uhly pri vrcholoch E a F; potom by však $AEFD$ bol pravouholník, zatiaľ čo $EBCF$ nie.



Obr. 29



Obr. 30



Obr. 31

Ak majú byť štvoruholníky $ABFE$ a $EFCD$ z obr. 30 podobné, musí byť uhol ABF zhodný s jedným z uhlov EFC alebo FED. Tieto dve možnosti teraz rozlíšime ako a) a b).

a) $|\angle ABF| = |\angle EFC|$. V tomto prípade sú $ABFE$ a $EFCD$ pravouhlé lichobežníky (obr. 31). Zo vzťahu $|AB| : |EF| = |EF| : |CD|$ dostávame

$$|EF| = \sqrt{ac}. \tag{1}$$

Konštrukcia takejto priečky EF je ľahká: najprv na úsečke AB nájdeme bod F_1, pre ktorý $|AF_1| = \sqrt{ac}$ (túto dĺžku zostrojíme podľa jednej z Euklidových viet); úsečku AF_1 potom doplníme na pravouholník AF_1FE. Takto zostrojené štvoruholníky $ABFE$ a $EFCD$ sú skutočne podobné.

b) $|\measuredangle ABF| = |\measuredangle FED|$. Z obr. 32 je jasné, že táto rovnosť nastane, práve keď $EF \perp \perp BC$. Podobnosť štvoruholníkov $ABFE$ a $EFCD$ môže byť dvojakého druhu: $ABFE \sim \sim FEDC$ alebo $ABFE \sim DEFC$. Tieto dve možnosti teraz rozlíšime ako b1) a b2).

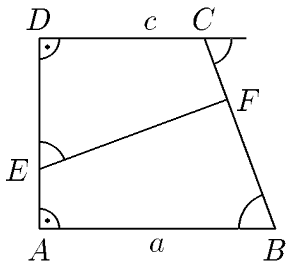
b1) $ABFE \sim FEDC$. Z pomerov $|AB| : |FE| = |FE| : |DC|$ opäť vychádza rovnosť (1). Úsečka EF má teda známu dĺžku, a je kolmá na BC, takže sa ľahko zostrojí. Podobnosť $ABFE \sim FEDC$ sa potom zdôvodní podobne ako v prípade a).

b2) $ABFE \sim DEFC$. Z pomerov $|AB| : |DE| = |AE| : |DC|$ máme

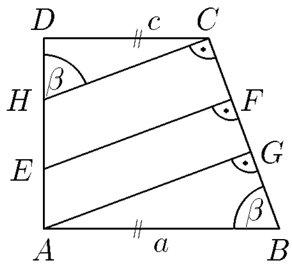
$$|AE| \cdot |DE| = ac. \tag{2}$$

Tým je bod E na ramene AD určený a jeho konštrukciu možno založiť na Euklidovej vete o výške. Bod F potom zostrojíme ako kolmý priemet bodu E na rameno BC. Z takejto konštrukcie vyplýva podobnosť $\triangle ABE \sim \triangle DEC$ (veta *sus*), a teda aj podobnosť $ABFE \sim DEFC$.

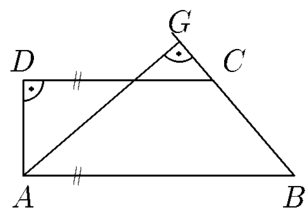
Diskusia: Pretože $c < \sqrt{ac} < a$, riešenie z časti a) je vždy práve jedno.



Obr. 32



Obr. 33



Obr. 34

Časť b1): Úsečka (o ktorej dĺžke zatiaľ nič nepredpokladáme), ktorá je kolmá na priamku BC, a ktorej krajné body ležia vnútri ramien AD a BC, existuje, len keď kolmý priemet G bodu A na priamku BC padne medzi body B a C (obr. 33). Vyplýva to z toho, že uhol $\beta = \measuredangle ABC$ je ostrý. Nepriaznivá situácia (obr. 34) sa vylúči podmienkou $|BG| < |BC| = b$. Pretože $|BG| = a\cos\beta = a \cdot \dfrac{a-c}{b}$, dostávame po ľahkej úprave ekvivalentnú podmienku

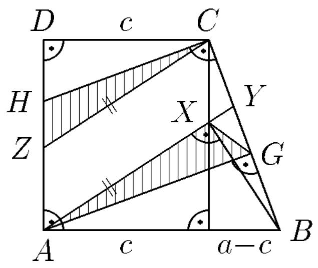
$$b > \sqrt{a(a-c)}. \tag{3}$$

(To je podstatné obmedzenie, a priori totiž zrejme platí len slabšia nerovnosť $b > a - c$). Ukážme, že podmienka (3) sama o sebe už zaručuje, že konštruovaná priečka EF dĺžky $\sqrt{ac}$ existuje a je jediná. Z trojuholníkov ABG a CHD totiž vyplýva $|AG| = a\sin\beta$ a $|HC| = \dfrac{c}{\sin\beta}$, takže $|AG| \cdot |HC| = ac$. To znamená, že dĺžka $\sqrt{ac}$ je geometrickým priemerom dĺžok základní AG a HC pravouhlého lichobežníka $GAHC$. Preto priečka EF existuje, je jediná, a pri jej konštrukcii možno postupovať spôsobom z časti a) nášho riešenia, ak uvažujeme lichobežník $GAHC$ namiesto lichobežníka $ABCD$. Iné pekné vysvetlenie poskytuje obr. 35, na ktorom podľa Euklidovej vety o odvesnách pravouhlého trojuholníka ABX máme $|ZC| = |AX| = \sqrt{ac}$ a $|BX| = \sqrt{a(a-c)}$; nerovnosti $|HC| < \sqrt{ac} < |AG|$ preto vyplývajú z tupouhlých trojuholníkov ZCH a AGX.

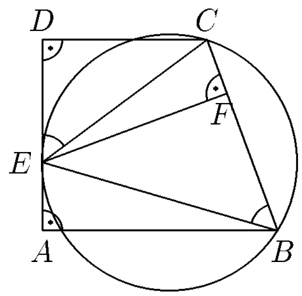
Časť b2): Bod E určený rovnosťou (2) na ramene AD dĺžky d existuje, práve keď $\frac{1}{4}d^2 \geqq ac$ (vyplýva to z priebehu kvadratickej funkcie $f(x) = x(d-x)$ na intervale $x \in (0, d)$, kde $x = |AE|$). Pretože $d^2 = b^2 - (a-c)^2$, dostávame odtiaľ ľahkou úpravou existenčnú podmienku

$$b \geqq a + c, \tag{4}$$

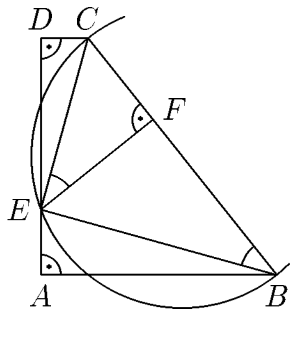
ktorá je silnejšia ako (3), takže pre úsečku AG zaisťuje potrebnú polohu z obr. 35 Pomocou vyjadrenia $|DH| = c \cdot \operatorname{cotg} \beta = c \cdot \dfrac{a-c}{d}$ sa jednoduchým výpočtom overí, že za podmienky (4) platia obidve nerovnosti $|DH| < \frac{1}{2}d$ a $|AH| \cdot |DH| < ac$, ktoré zaručujú, že každý bod E úsečky AD spĺňajúci (2) je vnútorným bodom úsečky AH (také body sú dva, resp. jeden, ak platí v (4) ostrá nerovnosť, resp. rovnosť). Preto kolmý priemet F takého bodu E na priamku BC skutočne padne medzi body B a C.



Obr. 35



Obr. 36



Obr. 37

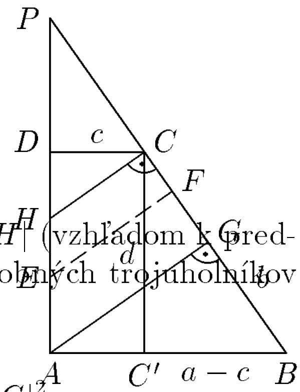
Záver diskusie: Úloha má
- ▷ 1 riešenie, ak je $a - c < b \leqq \sqrt{a(a-c)}$,
- ▷ 2 riešenia, ak je $\sqrt{a(a-c)} < b < a + c$,
- ▷ 3 riešenia, ak je $b = a + c$,
- ▷ 4 riešenia, ak je $b > a + c$.

Iné riešenie. Popíšeme iný rozbor častí b1) a b2) predchádzajúceho postupu. V prvom prípade dostávame z podobnosti trojuholníkov $CED \sim EBF$ rovnosť uhlov CED a EBF (obr. 36), čo podľa vety o obvodovom a úsekovom uhle znamená, že priamka AD je dotyčnicou ku kružnici opísanej trojuholníku ECB. Túto kružnicu vieme zostrojiť, lebo má prechádzať danými bodmi B, C a dotýkať sa danej úsečky AD. Príslušný bod dotyku je hľadaný bod E, jeho kolmým priemetom na rameno BC dostaneme bod F. Podobnosť $ABFE \sim FEDC$ je potom zaručená, keďže $\triangle EBF \sim \triangle CED$ podľa vety *uu*.

Časť b2): Z rovnosti uhlov CEF a EBF (obr. 37) vidíme, že uhol BEC je pravý. Preto môžeme bod E zostrojiť ako priesečník úsečky AD s Tálesovou kružnicou nad priemerom BC. Bod F potom dostaneme rovnako ako v časti b1). Tak isto sa dokáže aj podobnosť $ABFE \sim DEFC$, tentokrát na základe toho, že $\triangle EBF \sim \triangle CEF$.

Diskusia: Označme P priesečník priamok AD a BC (obr. 38) a ďalej H priesečník kolmice na BC v bode C s priamkou AD a G kolmý priemet vrcholu A na priamku BC. Z podobnosti trojuholníkov $HCP \sim BAP$ vyplýva

$$\frac{|PC|}{|PH|} = \frac{|PA|}{|PB|}.$$



Obr. 38

Pre bod E musí teda platiť

$$|PE|^2 = |PC| \cdot |PB| = |PA| \cdot |PH|.$$

Odtiaľ vyplýva, že hľadaný bod E existuje, práve keď $|PE| > |PH|$ (vzhľadom k predchádzajúcej rovnosti je potom aj $|PH| < |PE| < |PA|$). Z podobných trojuholníkov $C'BC \sim CHP$ a $ABP \sim DCP$ vyjadríme

$$|PH| = \frac{b}{d}\,|PC|, \qquad |PE|^2 = |PB| \cdot |PC| = \frac{a}{c}\,|PC|^2.$$

Nerovnosť $|PE| > |PH|$ je teda ekvivalentná nerovnosti

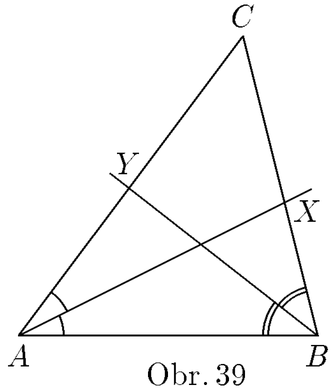
$$b^2c < ad^2 = ab^2 - a(a-c)^2, \quad \text{alebo} \quad (a-c)\bigl(b^2 - a(a-c)\bigr) > 0.$$

Dostávame tak nutnú a postačujúcu podmienku (3).

V druhom prípade je zrejmé, že Tálesova kružnica nad priemerom BC pretne stranu AD, práve keď bude pre jej polomer $\frac{1}{2}b$ platiť

$$\frac{1}{2}b \geqq \frac{1}{2}(a+c)$$

(vzdialenosť stredu strany BC od priamky AD je veľkosť strednej priečky lichobežníka $ABCD$).



Obr. 39

A – S – 1

Skúmanú rovnosť prepíšeme do tvaru $|BC| : |BY| = |AC| : |AX|$ a obidva pomery vyjadríme pomocou sínusových viet pre trojuholníky BCY a ACX (v ktorých pri obvyklom označení vnútorných uhlov trojuholníka ABC zrejme platí $|\angle BYC| = \alpha + \frac{1}{2}\beta$ a $|\angle AXC| = \beta + \frac{1}{2}\alpha$, obr. 39):

$$\frac{|BC|}{|BY|} = \frac{\sin(\alpha + \frac{1}{2}\beta)}{\sin\gamma} \quad \text{a} \quad \frac{|AC|}{|AX|} = \frac{\sin(\beta + \frac{1}{2}\alpha)}{\sin\gamma}.$$

Hľadáme preto práve tie trojuholníky, pre ktoré

$$\sin(\alpha + \tfrac{1}{2}\beta) = \sin(\beta + \tfrac{1}{2}\alpha).$$

Pretože obidva argumenty ležia medzi 0° a 180°, rovnosť ich sínusov nastane, len pokiaľ $\alpha + \frac{1}{2}\beta = \beta + \frac{1}{2}\alpha$, alebo $(\alpha + \frac{1}{2}\beta) + (\beta + \frac{1}{2}\alpha) = 180^\circ$. Prvá podmienka znamená $\alpha = \beta$, druhá $\alpha + \beta = 120^\circ$, alebo $\gamma = 60^\circ$.

Malá obmena prvej časti: Ak porovnáme skúmanú rovnosť s všeobecne platnou rovnosťou $|BC| \cdot |AP| = |AC| \cdot |BQ|$, kde AP a BQ sú výšky daného trojuholníka, dostaneme ekvivalentnú podmienku v tvare $|AP| : |AX| = |BQ| : |BY|$. Z pravouhlých trojuholníkov APX a BQY potom opäť vyjde rovnosť $\sin(\alpha + \frac{1}{2}\beta) = \sin(\beta + \frac{1}{2}\alpha)$.

Odpoveď: Hľadanými sú práve tie trojuholníky, pre ktoré platí $|AC| = |BC|$ alebo $|\measuredangle ACB| = 60^\circ$.

A – S – 2

Rovnosti $p_1 = 2$ a $p_2 = 4$ sú zrejmé, lebo pri slovách dĺžok 1 a 2 žiadne obmedzenia na susedné znaky vlastne nie sú. Pre pevné $k \geqq 1$ rozdelíme všetky prípustné slová $X_1X_2 \dots X_{k+2}$ dĺžky $k+2$ do štyroch skupín podľa poslednej dvojice znakov $X_{k+1}X_{k+2}$:

a) Ak je $X_{k+1}X_{k+2} = AA$, potom nutne $X_k = B$, takže $X_1X_2 \dots X_k$ je niektoré prípustné slovo dĺžky k končiace znakom B.

b) Ak je $X_{k+1}X_{k+2} = BB$, potom nutne $X_k = A$, takže $X_1X_2 \dots X_k$ je niektoré prípustné slovo dĺžky k končiace znakom A.

c) Ak je $X_{k+1}X_{k+2} = AB$, potom $X_1X_2 \dots X_{k+1}$ je niektoré prípustné slovo dĺžky $k+1$ končiace znakom A.

d) Ak je $X_{k+1}X_{k+2} = BA$, potom $X_1X_2 \dots X_{k+1}$ je niektoré prípustné slovo dĺžky $k+1$ končiace znakom B.

V prvých dvoch skupinách je spolu práve p_k slov, lebo každé prípustné slovo dĺžky k sa v popisoch uvedených v bodoch a) a b) objaví práve raz. Podobne sa pomocou všetkých prípustných slov dĺžky $k+1$ usúdi, že v posledných dvoch skupinách je spolu práve p_{k+1} slov. Tým je rovnosť $p_{k+2} = p_{k+1} + p_k$ dokázaná.

A – S – 3

Sčítaním prvých dvoch rovníc dostaneme

$$(u+v)(x+y) = (x+y)^2,$$

odkiaľ vyplýva

$$x + y = 0 \qquad \text{alebo} \qquad x + y = u + v.$$

V prvom prípade po dosadení $y = -x$ do prvej rovnice dostaneme $x(u - v) = 0$, odkiaľ $u = v$ (lebo podľa zadania $x \neq 0$). Po dosadení $y = -x$ a $u = v$ do tretej rovnice dostaneme po ľahkej úprave rovnicu

$$x^2 + u^2 = 0,$$

ktorá v našom obore nemá riešenie.

V druhom prípade (keď $x + y = u + v$) je pravá strana prvej rovnice rovná $x(x + y) = x(u + v)$, to je $ux + vx$. Porovnaním s ľavou stranou $ux + vy$ preto (s ohľadom na $v \neq 0$) vychádza $x = y$. V tomto prípade teda

$$x = y = \frac{1}{2}(u + v),$$

po dosadení do tretej rovnice

$$\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 + uv = u^2 + v^2,$$

vyjde po úprave $(u - v)^2 = 0$. Z toho $u = v$, teda $x = y = u = v$. Tým je celý dôkaz ukončený.

Poznámka: Ani v obore *všetkých* reálnych čísel (vrátane nuly) iné riešenia ako $x = y = u = v$ neexistujú. Dokážeme to, keď predchádzajúci postup doplníme o rozbor dvoch situácií:

a) $x + y = 0$ a $x = 0$. Zrejme $y = 0$ a z tretej rovnice sústavy, ktorá má teraz tvar

$$uv = u^2 + v^2,$$

už vyplýva $u = v = 0$.

b) $x + y = u + v$ a $v = 0$. Zrejme $x + y = u$ a tretia rovnica sústavy má teraz tvar

$$xy = u^2,$$

takže $xy = (x + y)^2$. Odtiaľ už vyplýva $x = y = 0$, a preto aj $u = 0$.

A – II – 1

Tvrdenie dokážeme indukciou podľa čísla n. Môžeme začať od hodnoty $n = 0$: číslo $1\,997^{3^0} + 1$ je skutočne násobkom čísla 3^3 ($1\,998 = 27 \cdot 74$). Ak platí podľa indukčného predpokladu rovnosť $1\,997^{3^n} + 1 = 3^{n+3}k_n$ pre vhodné prirodzené číslo k_n, dostaneme zo vzorca $A^3 + B^3 = (A + B)^3 - 3AB(A + B)$ pre hodnoty $A = 1\,997^{3^n}$ a $B = 1$ nasledujúce vyjadrenie:

$$1\,997^{3^{n+1}} + 1 = \left(3^{n+3}k_n\right)^3 - 3 \cdot 1\,997^{3^n} \cdot (3^{n+3}k_n) = 3^{n+4}\left(3^{2n+5}k_n^3 - 1\,997^{3^n}k_n\right).$$

Tým je dôkaz ukončený.

Dodajme, že pri druhom indukčnom kroku bolo tiež možné využiť rozklad

$$x^{3^{n+1}} + 1 = \left(x^{3^n}\right)^3 + 1^3 = \left(x^{3^n} + 1\right)\left(x^{2\cdot 3^n} - x^{3^n} + 1\right)$$

a vysvetliť, prečo pre $x = 1\,997$ je druhý činiteľ deliteľný tromi: čísla $1\,997^{2\cdot 3^n}$ a $1\,997^{3^n}$ totiž po delení tromi dávajú po rade zvyšky 1 a 2.

A – II – 2

Výšku stĺpca budeme udávať počtom kameňov, z ktorých je stĺpec vytvorený. Ak je v uvažovanom rade x stĺpcov tej istej výšky v, musí v každej z $x-1$ medzier medzi nimi stáť nejaký stĺpec výšky aspoň $v+1$, takže *stĺpcov výšky v je nanajvýš o 1 viac ako všetkých stĺpcov výšok aspoň $v+1$*. Ak využijeme tento poznatok postupne pre $v=k$, $k-1$, $k-2, \ldots$, zistíme, že stĺpec maximálnej výšky k je jediný, stĺpce výšky $k-1$ sú nanajvýš 2 (o 1 viac ako 1), stĺpce výšky $k-2$ nanajvýš 4 (o 1 viac ako $1+2$), stĺpcov výšky $k-3$ je nanajvýš 8 (o 1 viac ako $1+2+4$), ... Tak sa (formálne indukciou) overí, že stĺpcov výšky $k-j$ je nanajvýš 2^j (o 1 viac ako $1+2+\cdots+2^{j-1}$). Sčítaním pre $j=0,1,\ldots,k-1$ dostaneme odhad pre počet n všetkých stĺpcov uvažovaného radu:

$$n \leqq 1+2+4+\cdots+2^{k-1}=2^k-1.$$

Hodnotu $n=2^k-1$ je možné dosiahnuť, konštrukcia príslušného radu je nasledujúca: najprv postavíme 1 stĺpec výšky k, potom 2 stĺpce výšky $k-1$, potom 4 stĺpce výšky $k-2$ atď., až na koniec 2^{k-1} stĺpcov výšky 1, a to vždy do všetkých medzier medzi už postavené kamene a na obidva kraje radu. Dá sa to vyjadriť schémou

$$(k) \to (k-1,k,k-1) \to (k-2,k-1,k-2,k,k-2,k-1,k-2) \to \ldots \to (1,2,1,\ldots,1,2,1).$$

Iné riešenie. Indukciou podľa čísla k ukážeme, že hľadaná najväčšia možná hodnota n, ktorú označíme n_k, existuje, a že platí rovnosť $n_{k+1}=2n_k+1$ pre každé $k \geqq 1$. Pretože stĺpec maximálnej výšky je v každom uvažovanom rade zrejme jediný, platí predovšetkým $n_1=1$. Predpokladajme teraz, že číslo n_k existuje a uvažujme o ľubovoľnom rade danej vlastnosti, v ktorom má (jediný) najvyšší stĺpec výšku $k+$ $+1$ kameňov. Tento stĺpec rozdeľuje rad na dve časti, ktoré tiež majú skúmanú vlastnosť, všetky stĺpce v nich však obsahujú nanajvýš k kameňov. Preto na každej strane pri stĺpci s $k+1$ kameňmi stojí nanajvýš n_k stĺpcov (presnejšie: nanajvýš $n_{k'}$ stĺpcov, kde k' je druhý najväčší počet kameňov v jednom stĺpci celého uvažovaného radu; zrejme však $n_{k'} \leqq n_k$, kedykoľvek $k' \leqq k$). Preto číslo n_{k+1} existuje a platí odhad $n_{k+1} \leqq n_k +$ $+ n_k + 1$. Na druhej strane, ak vezmeme dva rovnaké rady so skúmanou vlastnosťou, a to práve s n_k stĺpcami (z ktorých najvyšší obsahuje k kameňov) a postavíme medzi ne stĺpec s $k+1$ kameňmi, dostaneme rad, ktorý potvrdzuje odhad $n_{k+1} \geqq 2n_k+1$. Rovnosť $n_{k+1}=2n_k+1$ je tak dokázaná.

Z rovností $n_1=1$ a $n_{k+1}=2n_k+1$ sa už ľahko uhádne a indukciou overí vzorec $n_k=2^k-1$.

A – II – 3

Ak odčítame od prvej rovnice druhú, a potom od tretej rovnice prvú, dostaneme rovnosti

$$(x-y)(x+y+z)=1 \qquad \text{a} \qquad (z-x)(x+y+z)=1.$$

Vyplýva z nich, že čísla $x-y$ a $z-x$ sú, rovnako ako $x+y+z$, nutne rôzne od nuly a obe sa rovnajú číslu $s=(x+y+z)^{-1}$. Vyjadrenie $y=x-s$ a $z=x+s$ dosadíme do pôvodnej sústavy:

$$\begin{aligned} x^2-(x+s)(x-s)&=a,\\ (x-s)^2-x(x+s)&=a-1,\\ (x+s)^2-x(x-s)&=a+1. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Ľahko zistíme, že táto sústava je ekvivalentná s dvojicou rovníc $s^2=a$ a $3xs=1$, z ktorých vyplýva podmienka riešiteľnosti $a>0$ (lebo $s\neq 0$), ale aj vyjadrenie $s=\pm\sqrt{a}$ a $x=\dfrac{1}{3s}=\pm\dfrac{1}{3\sqrt{a}}$, takže $y=x-s=\pm\dfrac{1-3a}{3\sqrt{a}}$ a $z=x+s=\pm\dfrac{1+3a}{3\sqrt{a}}$ (vo všetkých vzorcoch platí vždy rovnaké znamienko). Pretože sústava $(*)$ bola riešená ekvivalentnými úpravami, nie je potrebné prevádzať skúšku.

Odpoveď: Pre $a\leqq 0$ sústava nemá žiadne riešenie, pre $a>0$ existujú práve dve riešenia (x,y,z), a to trojice

$$\left(\frac{1}{3\sqrt{a}},\frac{1-3a}{3\sqrt{a}},\frac{1+3a}{3\sqrt{a}}\right)\quad\text{a}\quad\left(\frac{-1}{3\sqrt{a}},\frac{-1+3a}{3\sqrt{a}},\frac{-1-3a}{3\sqrt{a}}\right).$$

Iné riešenie. Členy na ľavých stranách rovníc eliminujeme tak, že sčítame y-násobok prvej rovnice so z-násobkom druhej a x-násobkom tretej rovnice. Dostaneme tak lineárnu rovnicu $0=ay+(a-1)z+(a+1)x$. Podobne sčítaním z-násobku prvej rovnice s x-násobkom druhej a y-násobkom tretej rovnice dostaneme $0=az+(a-1)x+(a+1)y$. Zo získaných rovníc

$$(a+1)x+ay+(a-1)z=0,\qquad (a-1)x+(a+1)y+az=0$$

eliminujeme najprv premennú z (odčítaním $(a-1)$-násobku druhej od a-násobku prvej rovnice), výsledkom je vyjadrenie $y=(1-3a)x$; potom podobnou elimináciou premennej y dospejeme k rovnosti $z=(1+3a)x$. Ak dosadíme tieto vyjadrenia y a z do pôvodných rovníc, dostaneme sústavu

$$\begin{aligned} 9a^2x^2&=a,\\ 9a(a+1)x^2&=a+1,\\ 9a(a-1)x^2&=a-1. \end{aligned}$$

Tá je ekvivalentná (bez ohľadu na hodnotu parametra a) s jedinou rovnicou $9ax^2=1$. Tak dostávame podmienku riešiteľnosti $a>0$ a vzorce pre obidve riešenia

$$x=\pm\frac{1}{3\sqrt{a}},\qquad y=(1-3a)x=\pm\frac{1-3a}{3\sqrt{a}},\qquad z=(1+3a)x=\pm\frac{1+3a}{3\sqrt{a}}.$$

A – II – 4

Označme $\alpha = |\measuredangle BAD|$ a $\gamma = |\measuredangle BCD|$. Platí

$$\begin{aligned}|\measuredangle BO_CD| &= 180^\circ - (|\measuredangle O_CBD| + |\measuredangle O_CDB|) = \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(|\measuredangle CBD| + |\measuredangle CDB|) = 90^\circ + \frac{1}{2}\gamma,\end{aligned}$$

podobne $|\measuredangle BO_AD| = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$. Pretože body A a O_C ležia v opačných polrovinách s hraničnou priamkou BD, je podmienka a) úlohy ekvivalentná s tým, že súčet veľkostí uhlov BAD a BO_CD je 180°, t.j. $\alpha+(90^\circ+\frac{1}{2}\gamma) = 180^\circ$. Podobne usúdime, že podmienka b) je splnená, práve keď $\gamma + (90^\circ + \frac{1}{2}\alpha) = 180^\circ$. Nájdená dvojica rovníc má jediné riešenie $\alpha = \gamma = 60^\circ$. Preto body A a C ležia každý na inom z dvoch kruhových oblúkov, z ktorých je úsečku BD vidieť pod uhlom 60°. Na druhej strane, ak si zvolíme ľubovoľný vnútorný bod A jedného z týchto oblúkov, možno na druhom oblúku vybrať bod C tak, aby $ABCD$ bol *konvexný* štvoruholník (stačí napríklad trojuholník ABD doplniť na rovnobežník $ABCD$).

Odpoveď: Hľadanú množinu vrcholov A tvoria vnútorné body dvoch kruhových oblúkov, z ktorých je úsečku BD vidieť pod uhlom 60°.

A – III – 1

Ak je $0 < x < 3$, tak je ľavá strana rovnice menšia ako $3^4 = 81$. Naopak pre $x \geqq 4$ je najmenej $4^4 = 256$. Preto nutne $[x] = 3$. Pre také x riešime rovnicu $x \cdot \bigl[x \cdot [3x]\bigr] = 88$. Pretože $x \geqq 3$, platí $[3x] \geqq 9$; keby sme pripustili, že $[3x] \geqq 10$, dostali by sme odhad $x \cdot \bigl[x \cdot [3x]\bigr] \geqq 3 \cdot 3 \cdot 10 = 90$. Preto nutne $[3x] = 9$ a ďalej riešime rovnicu $x \cdot [9x] = 88$ za predpokladu $9 \leqq 3x < 10$, alebo $27 \leqq 9x < 30$. Pre $9x < 28$ vychádza $x \cdot [9x] < \frac{28}{9} \cdot \cdot 27 = 84$, pre $9x \geqq 29$ zase $x \cdot [9x] \geqq \frac{29}{9} \cdot 29 > 90$, takže $[9x] = 28$. Vtedy z rovnice $x \cdot [9x] = 88$ konečne vyplýva $x = \frac{88}{28} = \frac{22}{7}$. Pretože pre nájdené číslo x platí

$$[x] = \left[\frac{22}{7}\right] = 3, \quad [3x] = \left[\frac{66}{7}\right] = 9, \quad [9x] = \left[\frac{198}{7}\right] = 28,$$

je to skutočne (jediné) riešenie.

A – III – 2

Uvažujme všetkých $\binom{14}{7} = 3\,432$ súčtov

$$S = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_7},$$

kde $x_1 < x_2 < \ldots < x_7$ je ľubovoľná sedmica vybraná z daných štrnástich prirodzených čísel. Pre každý z týchto súčtov S platia nasledujúce odhady

$$0 < S \leqq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{7} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} < 3,$$

takže ide o 3 432 (nie nutne rôznych) čísel z otvoreného intervalu $(0, 3)$. Preto sa niektoré dva z uvažovaných súčtov líšia o menej ako 0,001. Ak vylúčime z oboch príslušných sedmíc prípadné spoločné prvky, zmenšia sa obidva súčty o rovnakú hodnotu (takže sa ich rozdiel nezmení) a v každej skupine ostane rovnaký (nenulový, lebo to boli dve rôzne sedmice) počet prvkov. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

A – III – 3

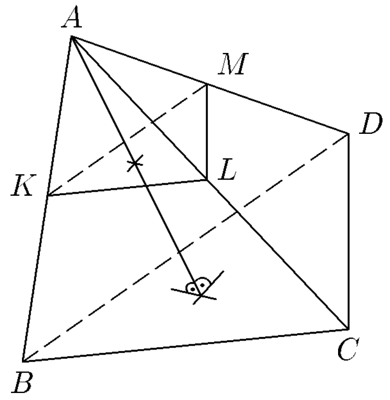
Označme ϱ polomer vpísanej gule a v_A, v_B, v_C, v_D telesové výšky daného štvorstena (s indexmi podľa vrcholov, z ktorých vychádzajú). Odťatý štvorsten $AKLM$ (obr. 40) je rovnoľahlý podľa stredu A s celým štvorstenom $ABCD$. Súčty dĺžok ich hrán sú preto v rovnakom pomere ako ich telesové výšky zo spoločného vrcholu A, teda v pomere $(v_A - 2\varrho) : v_A$, lebo 2ϱ je vzdialenosť rovín KLM a BCD (sú totiž rovnobežné a obidve sa dotýkajú vpísanej gule).

Rovnakú úvahu môžeme zopakovať pre zvyšné tri odťaté štvorsteny. Našou úlohou je preto dokázať rovnosť

$$\frac{v_A - 2\varrho}{v_A} + \frac{v_B - 2\varrho}{v_B} + \frac{v_C - 2\varrho}{v_C} + \frac{v_D - 2\varrho}{v_D} = 2,$$

ktorá je ekvivalentná s rovnosťou

$$\varrho\Big(\frac{1}{v_A} + \frac{1}{v_B} + \frac{1}{v_C} + \frac{1}{v_D}\Big) = 1.$$



Obr. 40

Na to nám poslúži nasledujúca úvaha o objeme V a povrchu S štvorstena $ABCD$. Najprv $S = S_A + S_B + S_C + S_D$ (kde S_X je obsah tej steny, ktorá neobsahuje vrchol X), ďalej

$$V = \frac{1}{3}S_A v_A = \frac{1}{3}S_B v_B = \frac{1}{3}S_C v_C = \frac{1}{3}S_D v_D$$

a konečne $V = \dfrac{1}{3}\varrho S$. Podľa týchto vzorcov platí

$$\varrho\Big(\frac{1}{v_A} + \frac{1}{v_B} + \frac{1}{v_C} + \frac{1}{v_D}\Big) = \frac{3V}{S}\Big(\frac{S_A}{3V} + \frac{S_B}{3V} + \frac{S_C}{3V} + \frac{S_D}{3V}\Big) = 1$$

a tým je dôkaz ukončený.

A – III – 4

Pretože $1\,998 = 3^3(3 \cdot 24 + 2)$, je skúmaný rozdiel $d^m - 1\,998$ deliteľný číslom 3^4 (o inú situáciu sa ani nemusíme starať), práve keď je aj mocnina d^m tvaru

$$d^m = 3^3(3k + 2) \tag{1}$$

pre vhodné celé číslo k. Odtiaľ najprv vyplýva, že $3 \mid d$ a že exponent m je nepárne číslo menšie ako 4. Zároveň však $m \neq 1$, lebo žiadne číslo $d \in \{1, 2, \ldots, 31\}$ nie je tvaru pravej strany (1). Preto nutne $m = 3$. Potom ale z (1) vyplýva, že $3^2 \nmid d$, teda $d = 3(3n \pm 1)$ pre vhodné znamienko a niektoré celé číslo n. Dosadením dostaneme

$$d^m - 1\,998 = (9n \pm 3)^3 - 3^3(3 \cdot 24 + 2) = 3^3 \left[3^3 n^3 \pm 3^3 n^2 + 3^2 n \pm 1 - 3 \cdot 24 - 2\right].$$

Ľahko nahliadneme, že hodnota výrazu v hranatej zátvorke je deliteľná tromi len pri možnosti so znamienkom mínus, ani vtedy však nie je deliteľná deviatimi (je totiž tvaru $9N - 3 \cdot 25$). Hľadaná najväčšia mocnina je preto 3^4 a zodpovedá práve tým marcovým ($m = 3$) dňom, ktoré majú poradové číslo tvaru $d = 3(3n - 1)$, teda 6., 15. a 24. marca.

A – III – 5

Základne KL a MN každého z uvažovaných lichobežníkov $KLMN$ sú dve rovnobežné tetivy kružnice k, takže majú spoločnú os súmernosti. Na nej leží stred S kružnice k, stredy P a Q základní KL a MN, priesečník U uhlopriečok KM a LN aj priesečník A predĺžených ramien (teda polpriamok) KN a LM (obr. 41).

Pretože polpriamka AS od voľby lichobežníka $KLMN$ nezávisí, stačí dokázať, že od tejto voľby nezávisí ani dĺžka úsečky AU. Vyjadríme ju najprv pomocou dĺžok $p = |AP|$ a $q = |AQ|$ (ukáže sa, že je ich harmonickým priemerom). Dĺžky $|PU|$ a $|QU|$ ľahko vypočítame z dvojice rovníc

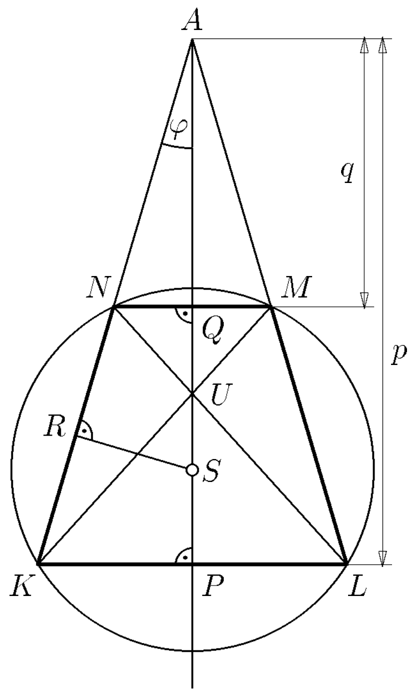
$$|PU| + |QU| = p - q \quad \text{a} \quad \frac{|PU|}{|QU|} = \frac{|KL|}{|MN|} = \frac{p}{q}$$

(rovnosti pomerov vyplývajú z podobností $\triangle KLU \sim \triangle MNU$ a $\triangle KLA \sim \triangle NMA$). Vyjde nám

$$|PU| = \frac{p(p-q)}{p+q} \quad \text{a} \quad |QU| = \frac{q(p-q)}{p+q},$$

a preto

$$|AU| = |AQ| + |QU| = q + \frac{q(p-q)}{p+q} = \frac{2pq}{p+q}.$$



Obr. 41

Teraz sem dosadíme $p = |AK| \cdot \cos\varphi$ a $q = |AN| \cdot \cos\varphi$, kde $\varphi = |\measuredangle PAK|$, a potom pri úprave využijeme to, že

$$|AK| + |AN| = 2|AR| = 2|AS| \cdot \cos\varphi,$$

kde R je stred tetivy KN. Dostaneme tak

$$|AU| = \frac{2pq}{p+q} = \frac{2|AK|\cdot|AN|\cdot\cos^2\varphi}{(|AK|+|AN|)\cdot\cos\varphi} = \frac{|AK|\cdot|AN|}{|AS|}.$$

Zostáva využiť mocnosť bodu A k danej kružnici $k(S,r)$: súčin $|AK|\cdot|AN|$ je rovný rozdielu $|AS|^2 - r^2$, teda od voľby lichobežníka $KLMN$ nezávisí. Nezávislosť veľkosti $|AU|$ je tak dokázaná.

Pre zaujímavosť ešte doplňme výpočet

$$|US| = |AS| - |AU| = |AS| - \frac{|AS|^2 - r^2}{|AS|} = \frac{r^2}{|AS|},$$

z ktorého vyplýva rovnosť $|AS|\cdot|US| = r^2$. To znamená, že body A a U sú združené v kruhovej inverzii podľa kružnice k. Tento poznatok môžeme zdôvodniť (a tak vlastne vyriešiť celú úlohu) aj nasledujúcim spôsobom (založeným však na niektorých základných vlastnostiach kruhovej inverzie). Pretože

$$|\measuredangle KAM| + |\measuredangle KSM| = 2\varphi + 2|\measuredangle KLM| = 2\varphi + 2(90^\circ - \varphi) = 180^\circ,$$

ležia body K, S, M, A na jednej kružnici. Jej obrazom v spomínanej kruhovej inverzii je priamka KM, lebo zobrazovaná kružnica prechádza stredom inverzie S a body K, M sú samodružné. Obraz bodu A je teda priesečník priamky KM s polpriamkou AS, čo je práve bod U.

Iné riešenie. Rovnako ako v prvom riešení využijeme osovú súmernosť každého z uvažovaných lichobežníkov $KLMN$ podľa priamky SA, na ktorej preto leží aj priesečník U jeho uhlopriečok. Nech T je jeden z dvoch koncových bodov tej tetivy kružnice k, ktorá je kolmá na SA a prechádza bodom U. Pretože úsečka AU leží na osi uhla KAM, podľa úlohy z domáceho kola platí v trojuholníku KAM rovnosť

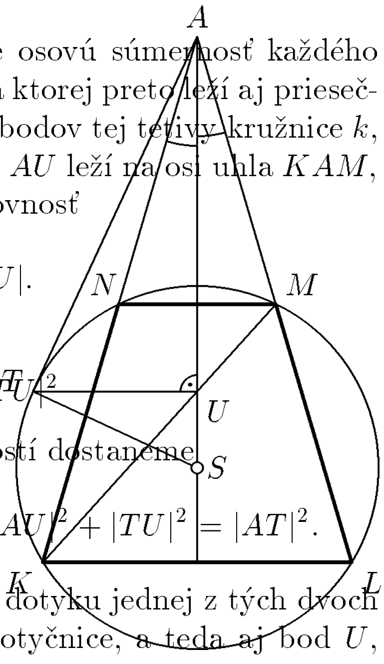
$$|AU|^2 = |AK|\cdot|AM| - |KU|\cdot|MU|.$$

Vieme tiež, že

$$|AM| = |AN| \quad \text{a} \quad |KU|\cdot|MU| = |TU|^2$$

(mocnosť bodu U ku kružnici k). Z posledných troch rovností dostaneme

$$|AK|\cdot|AN| = |AK|\cdot|AM| = |AU|^2 + |KU|\cdot|MU| = |AU|^2 + |TU|^2 = |AT|^2.$$



Obr. 42

Rovnosť $|AK|\cdot|AN| = |AT|^2$ znamená, že bod T je bodom dotyku jednej z tých dvoch dotyčníc kružnice k, ktoré prechádzajú bodom A. Tieto dotyčnice, a teda aj bod U, nezávisia od voľby lichobežníka $KLMN$. Tým je úloha vyriešená. K práve uvedenému postupu ešte dodajme, že podľa Euklidovej vety o odvesne ST pravouhlého trojuholníka ATS platí rovnosť $|ST|^2 = |SU|\cdot|SA|$. Tá znovu potvrdzuje, že body A a U sú združené v kruhovej inverzii podľa kružnice k.

A – III – 6

Pravá strana prvej rovnice má rovnaké znamienko ako neznáma x ($\neq 0$), ľavá strana ako súčin yz ($\neq 0$). Ľubovoľné riešenie (x, y, z) danej sústavy preto spĺňa podmienku

$$xyz > 0. \tag{1}$$

Ako vieme, kladné čísla a, b, c tvoria strany niektorého trojuholníka práve vtedy, keď je kladné každé z troch čísel

$$a + b - c, \qquad a + c - b, \qquad b + c - a. \tag{2}$$

Ak je (x, y, z) riešenie danej sústavy, tak

$$a + b - c = x\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + y\left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) - z\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = \frac{2xy}{z},$$

čo je podľa (1) kladné číslo. Analogicky zistíme, že

$$a + c - b = \frac{2xz}{y} > 0 \qquad \text{a} \qquad b + c - a = \frac{2yz}{x} > 0.$$

V druhej časti riešenia naopak predpokladajme, že každé z čísel (2) je kladné a nájdime *všetky* riešenia danej sústavy (aj keď by stačilo uviesť *jedno* riešenie). Pomôžu nám pri tom predchádzajúce výpočty, podľa ktorých musí napríklad platiť

$$(a + b - c)(a + c - b) = \frac{2xy}{z} \cdot \frac{2xz}{y} = 4x^2.$$

Táto a ďalšie dve analogické rovnosti vedú k vyjadreniu

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\varepsilon_1}{2}\sqrt{(a + b - c)(a + c - b)} \\ y &= \frac{\varepsilon_2}{2}\sqrt{(a + b - c)(b + c - a)} \\ z &= \frac{\varepsilon_3}{2}\sqrt{(a + c - b)(b + c - a)} \end{aligned}\right\}, \tag{3}$$

kde $\varepsilon_i = \pm 1$ pre $i \in \{1, 2, 3\}$, pritom $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = 1$ podľa (1). Také trojice $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ sú zrejme práve štyri. Podľa (3) tak dostávame štyri trojice (x, y, z). Priamym dosadením a rutinným výpočtom overíme, že sú to skutočne riešenia zadanej sústavy.

Prípravné sústredenia pred MMO

Pred medzinárodnou matematickou olympiádou (MMO) sa každoročne koná jedno výberové a jedno prípravné sústredenie pre najlepších riešiteľov tretieho kola kategórie A. Po prvom z nich SK MO vyberie 6 najlepších študentov do reprezentačného družstva Slovenska a určí dvoch náhradníkov. Druhé sústredenie je zamerané na prípravu šesťčlenného reprezentačného družstva.

Na výberovom sústredení pred MMO sa zúčastnilo 11 súťažiacich, najúspešnejších riešiteľov tretieho kola MO kategórie A. Sústredenie sa konalo v dňoch 29.3.–4.4.1998 v Bratislave. Súťažiaci boli ubytovaní v priestoroch EKOIUVENTY a súťažili na MFF UK. Každý deň študenti riešili sériu štyroch (v posledný deň sústredenia iba troch) úloh pri rovnakých podmienkach ako na MMO. V poobedňajších hodinách sa konal spoločný rozbor úloh s lektorom. Na konci sústredenia sa získané body za jednotlivé dni sčítali a s prihliadnutím na výsledky tretieho kola MO a iné výsledky (predchádzajúca účasť na MMO, výsledky korešpondenčného seminára SK MO) bolo vybrané šesťčlenné družstvo, ktoré sa zúčastní MMO.

Výsledky sústredenia:

1.	*Peter Kozák*	45,5
2.	*Vladimír Zajac*	44,5
3.	*František Kardoš*	43
4.	*Juraj Földes*	42,5
5.	*Ján Špakula*	39
6.	*Peter Novotný*	37
7.	*Peter Huszár*	34,5
8.	*Matúš Medo*	26
9.	*Miroslava Sotáková*	25,5
10.-11.	*Kristína Černeková*	24,5
10.-11.	*Cyril Adamuščin*	24,5

Úlohy zadávali lektori z Bratislavy:

RNDr. Pavol Černek, CSc., MFF UK, úlohy 1 – 4,
Eugen Kováč, MFF UK, úlohy 5 – 8,
Ján Bábeľa, MFF UK, úlohy 9 – 12,
Ivan Cimrák, MFF UK, úlohy 13 – 16,
Richard Kollár, MFF UK, úlohy 17 – 20,
RNDr. Pavol Černek, CSc., MFF UK, úlohy 21 – 23.

Pre vybrané družstvo sa organizovalo ešte jedno prípravné sústredenie v dňoch 15.–20.6.1998 v zariadení IUVENTY na Zochovej chate. Toto sústredenie bolo zamerané viac na vedomostnú prípravu študentov a jeho obsahom boli prednášky na vybrané témy. Lektormi boli:

Richard Kollár, MFF UK Bratislava (Invarianty, Teória čísel),
doc. RNDr. Štefan Solčan, CSc., MFF UK Bratislava (Kolineárnosť)
doc. RNDr. Ján Čižmár, CSc., MFF UK Bratislava (Geometria),
Ján Bábeľa, MFF UK Bratislava (Nerovnosti, Polynómy)

Zadania súťažných úloh výberového sústredenia pred MMO

1. Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je daná rekurentne predpisom

$$a_{n+2} = 2^{n+1} - 8a_{n+1} - 15a_n.$$

Pre ktoré hodnoty členov a_1 a a_2 je táto postupnosť rastúca?

2. V istom jazyku sa na tvorbu slov používa abeceda, ktorá má 4 samohlásky a 5 spoluhlások. Slová tohoto jazyka majú ľubovoľnú dĺžku a nemôžu v nich nasledovať za sebou ani dve samohlásky ani tri spoluhlásky. Dokážte, že počet všetkých slov dĺžky 1 998 tohoto jazyka je deliteľný číslom 20^{666}.

3. V obore reálnych čísel riešte funkcionálnu rovnicu:

$$f(x) = 3,2f(x - [x]) + 5,9x - 4,3.$$

4. Pre ktoré čísla $\alpha \in \mathbb{R}$ má funkcionálna rovnica

$$f\left(\alpha(2x + 3y)\right) = f(3x - 2y) + f\left(\frac{13}{2}y\right)$$

netriviálne (nenulové) riešenie?

5. Do obdĺžnika $ABCD$ sú vpísané dva rôzne obdĺžniky so spoločným vrcholom K na strane AB. Dokážte, že súčet obsahov týchto dvoch obdĺžnikov je rovný obsahu obdĺžnika $ABCD$.

6. Nech $A_1A_2 \ldots A_n$ je pravidelný n-uholník vpísaný do jednotkovej kružnice. Dokážte, že

$$|A_1A_2| \cdot |A_1A_3| \cdot \ldots \cdot |A_1A_n| = n\,.$$

7. Dokážte, že ak do štvoruholníka možno vpísať kružnicu, tak stredy jeho uhlopriečok a stred jemu vpísanej kružnice ležia na jednej priamke.

8. Dokážte, že ak n je párne, tak rovnica

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} = 0$$

nemá riešenie v obore reálnych čísel.

9. Nech čísla a, b, c sú dĺžkami strán nejakého trojuholníka, a nech pre $p, q, r \in \mathbb{R}$ platí $p + q + r = 0$. Dokážte, že potom

$$a^2pq + b^2qr + c^2rp \leqq 0\,.$$

10. Riešte v obore celých čísel rovnicu
$$\left(x^2 - y^2\right)^2 = 1 + 16y\,.$$

11. Dokážte, že pre $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ platí nerovnosť
$$\frac{x}{7 + z^3 + y^3} + \frac{y}{7 + x^3 + z^3} + \frac{z}{7 + y^3 + x^3} \leqq \frac{1}{3}\,.$$

12. Nech čísla a, b, c sú dĺžkami strán nejakého trojuholníka. Dokážte, že potom
$$2 \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geqq \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + 3\,.$$

13. Nech $f\colon \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, 1\rangle$ je spojitá a monotónna funkcia. Dokážte, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ možno jej graf pokryť n obdĺžnikmi takými, že ich strany sú rovnobežné s osami x, y a obsah každého z nich je najviac $\frac{1}{n^2}$.

14. Množina M obsahuje k disjunktných úsečiek na priamke p. Je známe, že každá úsečka dĺžky nanajvýš 1 sa dá umiestniť na priamku p tak, že oba jej konce patria množine M. Ukážte, že súčet dĺžok úsečiek množiny M je aspoň $\frac{1}{k}$.

15. Majme danú kocku. V každom jej vrchole je zapísané nejaké prirodzené číslo. V jednom kroku môžeme pripočítať jednotku k dvom číslam, ktoré sú zapísané v susedných vrcholoch (teda vrcholoch spojených hranou). Zistite, či z východzej pozície
a) v siedmych vrcholoch je zapísané číslo 1 a v jednom vrchole číslo 2,
b) v dvoch vrcholoch na stenovej uhlopriečke je zapísané číslo 2 a v ostatných číslo 1,
možno získať po konečnom počte krokov stav, keď bude v každom vrchole zapísané to isté číslo.

16. V trojuholníku ABC s obsahom S sú strany rozdelené na tretiny dvojicami bodov (po rade) K, L; M, N; O, P. Vypočítajte obsah prieniku trojuholníkov KMO a LNP.

17. V rovine sú dané body P a Q ležiace v jednej z polrovín určených priamkou p. Na priamke p nájdite bod M, pre ktorý je vzdialenosť piat výšok trojuholníka PQM na strany PM a QM najmenšia.

18. V trojuholníku ABC označme V stred vpísanej kružnice a M stred strany BC. Dokážte, že ak označíme E priesečník výšky AH trojuholníka s priamkou MV, tak má AE dĺžku rovnú polomeru kružnice vpísanej trojuholníku ABC.

19. Daná je kružnica k a priamka p. Označme A pätu kolmice spustenú zo stredu k na priamku p. Zvoľme na priamke p dva rôzne body B a C tak, aby $|AB| = |AC|$ a veďme po rade bodmi B a C priamky, ktoré pretnú kružnicu k po rade v bodoch P, Q a M, N. Dokážte, že ak označíme po rade R a S priesečníky priamky p s priamkami PM a QN, tak $|AR| = |AS|$.

20. Niektoré steny bieleho konvexného mnohostena sú nafarbené na čierno, pričom žiadne dve čierne steny nemajú spoločnú hranu. Dokážte, že do mnohostena sa nedá vpísať guľová plocha, ak je splnená aspoň jedna z nasledujúcich podmienok:
a) čiernych stien je viac ako polovica;
b) obsah čiernych stien tvorí viac ako polovicu povrchu mnohostena.

21. Dokážte, že pre každý bod X kružnice opísanej rovnostrannému trojuholníku ABC je výraz
$$|AX|^4 + |BX|^4 + |CX|^4$$
konštantný.

22. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel m a n, pre ktoré platí: $\mathrm{NSN}\,(m, n) = m + 3n + 32$.

23. Ak $a_1, a_2, \ldots, a_{15}$ sú rôzne prvočísla tvoriace 15 za sebou idúcich členov aritmetickej postupnosti, tak diferencia tejto postupnosti je väčšia ako 300 000.

4. československé stretnutie

Zochova chata, 4.– 7. júna 1998

V dňoch 4.–7.6.1998 sa v príjemnom prostredí zariadenia IUVENTY na Zochovej chate uskutočnil už štvrtý ročník matematickej súťaže medzi olympionikmi Českej a Slovenskej republiky. Túto súťaž usporadúvajú striedavo obidve zúčastnené krajiny; prvý ročník sa konal v Jevíčku, druhý v Žiline, tretí v Bílovci. Vedúcimi tímov boli tento rok *RNDr. Karel Horák, CSc.* z Českej republiky a *Richard Kollár* zo Slovenska, ktorí zároveň koordinovali opravovanie úloh.

Táto súťaž je spolu s výberovým a prípravným sústredením súčasťou dlhodobej prípravy na medzinárodnú matematickú olympiádu (MMO). Na rozdiel od spomínaných sústredení si tu môžu študenti precvičiť svoje schopnosti vo veľmi podobných podmienkach, ako ich čakajú na MMO. Na riešenie úloh majú štyri a pol hodiny, čo je o pol hodiny viac ako vo všetkých kolách našej MO. Aj tematické zameranie a náročnosť úloh je oveľa bližšia MMO ako napríklad celoštátnemu kolu. Okrem týchto dôležitých faktov, je toto stretnutie aj stretnutím v pravom slova zmysle. Súťažiaci z dvoch historicky spätých krajín sa majú možnosť spoznať a naviazať priateľstvá, ktoré výrazne pomáhajú aklimatizácii v cudzom a ďalekom prostredí MMO. Toto stretnutie zároveň prispieva k uchovávaniu tradície spoločnej československej olympiády a spolu so spoločnou tvorbou úloh je prejavom, ktorým najvyššie orgány MO v oboch republikách dávajú najavo svoj záujem o vzájomnú spoluprácu. Výsledky súťaže sú uvedené v tabuľke.

Por.	Meno	Ročník, Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	Súč.
1.	Pavel Podbrdský	4 G tř. Kpt. Jaroše, Brno	7	7	7	7	5	7	40
2.	Lukáš Vokřínek	3 G tř. Kpt. Jaroše, Brno	7	7	7	7	–	7	35
3.	Jan Šťovíček	4 G Kladno	7	7	7	6	–	7	34
4.–6.	Juraj Földes	4 G J.Hronca, Bratislava	7	7	1	7	0	7	29
4.–6.	Tomáš Hanžl	4 G tř. Kpt. Jaroše, Brno	7	7	7	7	1	–	29
4.–6.	František Kardoš	4 G Alejová, Košice	7	7	0	1	7	7	29
7.	Peter Kozák	3 G J.Hronca, Bratislava	6	7	2	0	3	7	25
8.	Martin Viščor	3 G tř. Kpt. Jaroše, Brno	3	6	–	7	7	–	23
9.	Kristína Černeková	3 G Grösslingová, Bratislava	7	2	2	4	–	7	22
10.–11.	Ján Špakula	4 G Poštová, Košice	–	7	–	5	2	7	21
10.–11.	Vladimír Zajac	2 G Grösslingová, Bratislava	7	7	–	7	–	–	21
12.	Libor Barto	4 G Hellichova 3, Praha 1	3	6	0	0	–	7	16

Po úspechu v minulom ročníku, keď sme boli prvýkrát úspešnejší ako družstvo Českej republiky, naše družstvo nadviazalo na tradíciu ťahania za kratší koniec. Táto skutočnosť je o to smutnejšia, že v tradičnom volejbalovom stretnutí českí olympionici obhájili minuloročné víťazstvo, aj keď prišlo po oveľa tuhšom boji.

Zadania úloh 4. československého stretnutia

Úloha č.1

Nech P je vnútorný bod rovnobežníka $ABCD$. Dokážte, že $|\sphericalangle APB| + |\sphericalangle CPD| = 180°$ práve vtedy, keď $|\sphericalangle PDC| = |\sphericalangle PBC|$.

(Jury MMO)

Úloha č.2

Daný je polynóm $P(x)$ stupňa n, $n \geqq 5$, s celočíselnými koeficientami a s n navzájom rôznymi celočíselnými koreňmi. Nájdite všetky celočíselné korene polynómu $P(P(x))$, ak viete, že jeden z koreňov $P(x)$ je 0.

(Bulharsko, MO)

Úloha č.3

V konvexnom šesťuholníku $ABCDEF$ platí $|AB| = |BC|$, $|CD| = |DE|$ a $|EF| = |FA|$. Dokážte, že potom platí

$$\frac{|BC|}{|BE|} + \frac{|DE|}{|DA|} + \frac{|FA|}{|FC|} \geqq \frac{3}{2}.$$

(Jury MMO)

Úloha č.4

Nech $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ označuje množinu prirodzených čísel. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{1\}$, pre ktoré platí

$$f(n) + f(n+1) = f(n+2) \cdot f(n+3) - 168 \qquad \text{pre každé } n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

(Jury MMO)

Úloha č.5

Označme T ťažisko trojuholníka ABC, v ktorom platí $|\sphericalangle TAB| = |\sphericalangle ACT|$. Akú najväčšiu hodnotu môže nadobúdať súčet

$$\sin |\sphericalangle CAT| + \sin |\sphericalangle CBT| \ ?$$

(Bulharsko, MO)

Úloha č.6

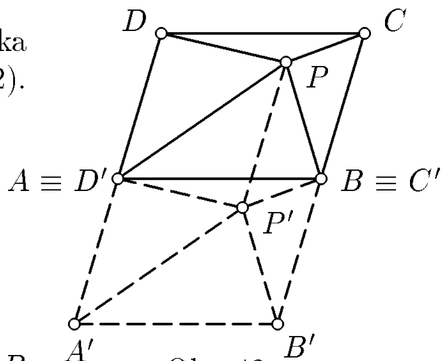
V tábore je n dievčat $D_1, D_2, \dots, D_n$ a $2n-1$ chlapcov $C_1, C_2, \dots, C_{2n-1}$. Pritom sa dievča D_i, $i = 1, 2, \dots, n$, pozná práve s chlapcami $C_1, C_2, \dots, C_{2i-1}$. Označme $A(n, r)$ počet všetkých možných spôsobov vybratia r ($r \geqq 1$) párov (chlapec - dievča) z detí v tábore tak, aby každé vybrané dievča poznalo svojho chlapca v páre. Dokážte, že platí

$$A(n, r) = \binom{n}{r} \cdot \frac{n!}{(n-r)!}.$$

(Jury MMO)

Riešenia úloh 4. československého stretnutia

Úloha 1.



Obr. 43

V posunutí o vektor $\overrightarrow{DA}$ bude obrazom rovnobežníka $ABCD$ rovnobežník $A'B'C'D'$, $A \equiv D'$, $B \equiv C'$ (obr. 42). Potom je zrejme rovnosť

$$|\sphericalangle APB| + |\sphericalangle CPD| = 180^\circ$$

ekvivalentná s rovnosťou

$$|\sphericalangle APB| + |\sphericalangle C'P'D'| = 180^\circ,$$

a tá je ekvivalentná s tým, že je štvoruholník $AP'BP$ tetivový.

Keďže $PP' \parallel CC'$, tak $|\sphericalangle P'PB| = |\sphericalangle PBC|$. Potom je však rovnosť uhlov $|\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle CDP|$ ekvivalentná s rovnosťou $|\sphericalangle BPP'| = |\sphericalangle C'D'P'|$, a tá je ekvivalentná s tým, že je štvoruholník $AP'BP$ tetivový.

Spojením predchádzajúcich úvah je tvrdenie dokázané.

Úloha 2.

Podľa zadania platí

$$P(x) = a \cdot x \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n),$$

kde a je nenulové celé číslo a x_i sú navzájom rôzne celé čísla rôzne od nuly. Potom

$$P(P(x)) = a \cdot P(x) \cdot (P(x) - x_2) \cdot \ldots \cdot (P(x) - x_n).$$

Je teda zrejmé, že všetky korene $P(x)$ sú aj koreňmi $P(P(x))$. Pripusťme, že existuje taký koreň y polynómu $P(P(x))$, ktorý je rôzny od $0, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Potom zrejme $P(y) = x_i$ pre nejaké i, $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$. Keďže

$$y - x_i | P(y) - P(x_i) \quad \text{a} \quad P(x_i) = 0, \qquad \text{tak} \qquad y - x_i | x_i.$$

Preto $x_i = k(y - x_i)$ pre vhodné celé nenulové číslo k.

Na druhej strane

$$x_i = P(y) = a \cdot y \cdot (y - x_2) \cdot \ldots \cdot (y - x_n), \qquad \text{čiže} \qquad y | x_i.$$

Preto $x_i = l \cdot y$ pre vhodné celé číslo l rôzne od 0 a 1.

Preto teda $l \cdot y = x_i = k(y - x_i) = k(y - l \cdot y)$, čiže $k = \dfrac{l}{1 - l}$. Z toho vyplýva, že $l = 2$. Preto $y = \dfrac{x_i}{2}$, teda x_i musí byť párne. Potom

$$x_i = P(y) = P\left(\frac{x_i}{2}\right) = a \cdot \frac{x_i}{2} \cdot \left(\frac{x_i}{2} - x_2\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{x_i}{2} - x_n\right),$$

odkiaľ dostávame

$$2 = a \cdot \left(\frac{x_i}{2} - x_2\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{x_i}{2} - x_n\right),$$

čo však pre $n \geqq 5$ nie je možné, lebo na pravej strane je súčin aspoň štyroch rôznych celých čísel, ale číslo 2 sa dá napísať ako súčin maximálne troch takých čísel (napr. $2 = 1 \cdot (-1) \cdot (-2)$). Preto koreň y rôzny od $0, x_2, \ldots, x_n$ neexistuje.

Celočíselné korene $P(P(x))$ sú práve všetky korene polynómu $P(x)$.

Úloha 3.

Označme $|AC| = a$, $|CE| = b$ a $|EA| = c$ (obr. 43).

Z *Ptolemaiovej nerovnosti* pre štvoruholník $ACEF$ dostávame

$$|AE| \cdot |FC| \leqq |AF| \cdot |EC| + |AC| \cdot |EF|,$$

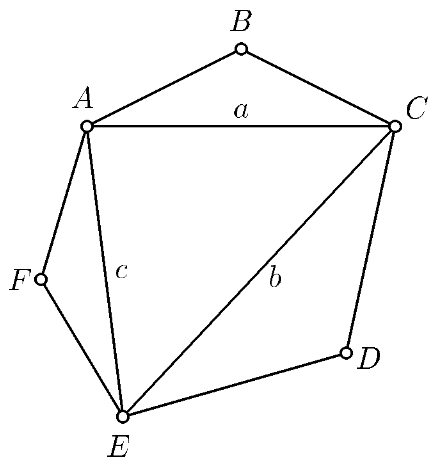
čiže (keďže $|AF| = |AC|$)

$$c \cdot |FC| \leqq |AF| \cdot b + |AF| \cdot a.$$

Odtiaľ

$$\frac{|FA|}{|FC|} \geqq \frac{c}{a+b}.$$

Analogicky sa dokáže



Obr. 44

$$\frac{|BC|}{|BE|} \geqq \frac{a}{b+c} \qquad \text{a} \qquad \frac{|DE|}{|DA|} \geqq \frac{b}{a+c}.$$

Teraz už stačí dokázať nerovnosť

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqq \frac{3}{2}. \tag{1}$$

Ľahkou úpravou

$$\frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{a+c} + \frac{a+b+c}{a+b} \geqq \frac{3}{2} + \frac{b+c}{b+c} + \frac{a+c}{a+c} + \frac{a+b}{a+b} = \frac{9}{2},$$

$$(a+b+c) \cdot \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}\right) \geqq \frac{9}{2},$$

$$\frac{(a+b)+(a+c)+(b+c)}{3} \geqq \frac{3}{\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{a+c} + \dfrac{1}{b+c}},$$

čo je nerovnosť medzi aritmetickým a harmonickým priemerom. Keďže všetky úpravy nerovnosti (1) boli ekvivalentné, táto nerovnosť je dokázaná, a tým aj celé zadané tvrdenie.

Úloha 4.

Po dosadení hodnôt $n = k$ a $n = k + 1$ do (1) dostaneme

$$f(k) + f(k+1) = f(k+2) \cdot f(k+3) - 168\,,$$
$$f(k+1) + f(k+2) = f(k+3) \cdot f(k+4) - 168\,.$$

Odčítaním druhej z týchto rovníc od prvej máme

$$f(k+2) - f(k) = f(k+3)(f(k+4) - f(k+2)). \tag{2}$$

Špeciálne aj

$$f(3) - f(1) = f(4)(f(5) - f(3))$$

a ďalej pre $k = 2m - 1$

$$f(2m+1) - f(2m-1) = f(2m+2)(f(2m+3) - f(2m+1)). \tag{3}$$

Keďže $f(n) > 1$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, majú všetky výrazy $f(3) - f(1)$, $f(5) - f(3)$, $\ldots$, $f(2m+1) - f(2m-1), \ldots$ rovnaké znamienko. Ak nie je žiaden z týchto členov nulový, môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že sú všetky kladné. Potom z (3) vyplýva

$$f(3) - f(1) = f(4)(f(5) - f(3)) > f(5) - f(3) > f(7) - f(5) > \ldots$$

Postupnosť $f(3) - f(1), f(5) - f(3), \ldots$ je teda nekonečná klesajúca postupnosť prirodzených (kladných celých) čísel. To však nie je možné. Preto musí byť aspoň jeden z týchto členov nulový, a potom sú všetky nulové. Tejto podmienke teda vyhovujú tie funkcie f, pre ktoré $f(2m-1) = a$, $m \in \mathbb{N}$, $a \in \{2, 3, \ldots\}$. Podobne sa dokáže, že $f(2m) = b$, $m \in \mathbb{N}$, $b \in \{2, 3, \ldots\}$.

Zo zadania potom dosadením $n = 1$ dostávame

$$f(1) + f(2) = f(3) \cdot f(4) - 168\,, \qquad \text{teda} \qquad a + b = ab - 168.$$

Po jednoduchej úprave máme

$$(a-1)(b-1) = 169 = 13^2.$$

Môžu nastať tri prípady:

- $a - 1 = 1$, $b - 1 = 169$, potom $(a, b) = (2, 170)$;
- $a - 1 = 13$, $b - 1 = 13$, potom $(a, b) = (14, 14)$;
- $a - 1 = 169$, $b - 1 = 1$, potom $(a, b) = (170, 2)$.

Každej z týchto možností prislúcha jedno riešenie úlohy

- $f(1) = f(3) = f(5) = \ldots = 2$, $f(2) = f(4) = f(6) = \ldots = 170$;
- $f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = \ldots = 14$;
- $f(1) = f(3) = f(5) = \ldots = 170$, $f(2) = f(4) = f(6) = \ldots = 2$.

Úloha 5.

Označme S stred strany AB (obr. 44) a uhly a ťažnice trojuholníka ABC obvyklým spôsobom. Keďže

$$|\sphericalangle ACT| = |\sphericalangle TAB|, \tag{1}$$

sú trojuholníky AST a CSA podobné podľa vety uu. Odtiaľ

$$\frac{|CS|}{|AS|} = \frac{|AS|}{|TS|}, \qquad \text{čiže} \qquad t_c^2 = \frac{3}{4}c^2.$$

Potom zo vzorca pre dĺžku ťažnice

$$\frac{3}{4}c^2 = t_c^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2$$

dostávame rovnosť

$$a^2 + b^2 = 2c^2, \qquad \text{alebo} \qquad \sin^2\alpha + \sin^2\beta = 2\sin^2\gamma. \tag{2}$$

Keďže všetky naše predchádzajúce úvahy zachovávali ekvivalenciu, tvrdenia (1) a (2) sú ekvivalentné.

Z (2) ďalej dostávame

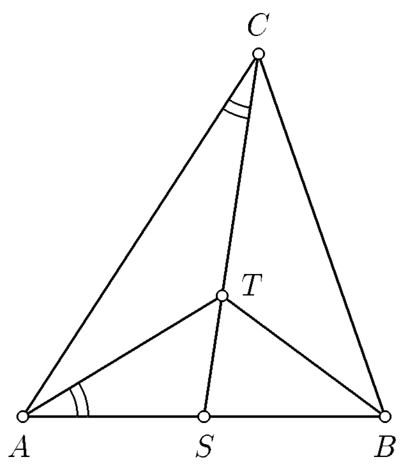
$$|AT| = \frac{2}{3}t_a = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot b.$$

Nakoľko sa obsah trojuholníka ACT rovná jednej tretine obsahu trojuholníka ABC, platí

$$3\cdot\frac{1}{2}|TA|\cdot|CA|\cdot\sin(\sphericalangle CAT) = \frac{1}{2}|AC|\cdot|BC|\cdot\sin(\sphericalangle ACB),$$

$$3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}b\cdot b\cdot\sin(\sphericalangle CAT) = a\cdot\frac{1}{2}\cdot b\cdot\sin\gamma,$$

$$\text{teda} \quad \sin(\sphericalangle TAC) = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{a}{b}\sin\gamma.$$



Obr. 45

Analogicky dostaneme

$$\sin(\sphericalangle CBT) = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{b}{a}\sin\gamma.$$

Preto platí

$$\sin(\sphericalangle TAC)+\sin(\sphericalangle TBC) = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sin\gamma\cdot\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sin\gamma\cdot\frac{a^2+b^2}{ab}.$$

Z (2) a kosínusovej vety dostaneme

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{a^2+b^2}{4ab}.$$

Potom

$$\sin(\sphericalangle TAC) + \sin(\sphericalangle TBC) = \frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot\sin\gamma\cdot\cos\gamma = \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\sin 2\gamma \leqq \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Ak ukážeme, že v tejto nerovnosti môže nastať rovnosť, hľadané číslo bude $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Vzhľadom na (1) a (2) stačí nájsť trojuholník, pre ktorý $\sin 2\gamma = 1$ a $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = 2\sin^2\gamma$. Zrejme $\gamma = 45°$. Má teda platiť $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = 1$, čiže $\cos^2\alpha = \sin^2\beta$, čo nastáva len keď $|\alpha-\beta| = 90°$. Stačí teda zvoliť $\alpha = 112,5°$, $\beta = 22,5°$, $\gamma = 45°$.

Hľadané číslo je $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Úloha 6.

Poľahky sa presvedčíme, že daný vzorec platí pre $A(1,1)$, $A(2,1)$, $A(2,2)$ a $A(n,1)$ $\left(A(n,1) = 1+3+5+\ldots+2n-1 = n^2 = \binom{n}{1}\cdot\dfrac{n!}{(n-1)!}\right)$.

Nech teraz $n \geqq 3$ a $2 \leqq r \leqq n$. Vyberajme r párov, ktoré vyhovujú požiadavkám úlohy.

- Ak medzi nimi nemá byť dievča D_n, tak zrejme $r \leqq n-1$ a všetkých takýchto možností je práve $A(n-1,r)$.
- Ak medzi nimi má byť dievča D_n, tak si zvyšných $r-1$ dievčat môže vybrať partnerov $A(n-1,r-1)$ spôsobmi. Dievča D_n si potom môže vybrať chlapca spomedzi zvyšných $2n-r$ chlapcov. Preto je všetkých možností v tomto prípade $(2n-r)\cdot A(n-1,r-1)$.

Keďže iná možnosť nastať nemôže, dostávame rekurentný vzťah

$$A(n,r) = A(n-1,r) + (2n-r)\cdot A(n-1,r-1) \tag{1}$$

pre $r = 2,3,\ldots,n-1$ a

$$A(n,n) = n\cdot A(n-1,n-1). \tag{2}$$

Keďže sme na začiatku tvrdenie dokázali pre $A(1,1)$, $A(2,1)$, $A(2,2)$ a $A(n,1)$, hodnota $A(n,r)$ je pomocou (1) a (2) jednoznačne definovaná. Stačí ukázať, že $A(n,r) = \binom{n}{r}\cdot\dfrac{n!}{(n-r)!}$, čo sa ľahko dokáže indukciou podľa n a r.

39. Medzinárodná matematická olympiáda

39. ročník medzinárodnej matematickej olympiády sa uskutočnil v dňoch 13. až 21. júla 1998 v Taipei na Taiwane.

Medzinárodná matematická olympiáda (MMO) je súťažou jednotlivcov. Každá zúčastnená krajina na ňu vysiela reprezentačné družstvo zložené najviac zo šiestich súťažiacich, sprevádzané dvoma vedúcimi. Slovenské družstvo tento rok tvorili *Kristína Černeková* z 3. ročníka Gymnázia Grösslingová v Bratislave, *Juraj Földes* zo 4. ročníka Gymnázia J.Hronca v Bratislave, *František Kardoš* zo 4. ročníka Gymnázia Alejová v Košiciach, *Peter Kozák* z 3. ročníka Gymnázia J.Hronca v Bratislave, *Ján Špakula* zo 4. ročníka Gymnázia Poštová v Košiciach a *Vladimír Zajac* z 2. ročníka Gymnázia Grösslingová v Bratislave. Vedúcim delegácie a odborným vedúcim bol *RNDr. Pavol Černek, CSc.* a pedagogickým vedúcim *doc. RNDr. Vladislav Rosa, CSc.*, obaja z MFF UK v Bratislave.

Pravidlá súťaže sú veľmi podobné pravidlám nášho celoštátneho kola. Súťaží sa dva dni, študenti dostanú každý deň 3 úlohy v ich rodnom jazyku, na ktorých vyriešenie majú 4,5 hodiny. Po skončení súťaže riešenia prezrú vedúci príslušnej krajiny a svoj návrh hodnotenia podľa vopred pripravených bodovacích schém obhajujú pred koordinátormi. Za správne vyriešenú úlohu môže súťažiaci získať maximálne 7 bodov. Výsledky slovenského družstva uvádza nasledujúca tabuľka:

Meno	1	2	3	4	5	6	súčet	cena
Kristína Černeková	0	0	1	0	0	0	1	–
Juraj Földes	2	0	2	7	3	0	14	3.
František Kardoš	2	7	7	7	7	0	30	2.
Peter Kozák	4	0	0	7	3	0	14	3.
Ján Špakula	5	0	2	7	0	0	14	3.
Vladimír Zajac	0	7	1	0	7	0	15	3.

Na 39. ročníku MMO sa zúčastnilo spolu 419 súťažiacich zo 72 štátov celého sveta. Aj keď je MMO oficiálne individuálnou súťažou najlepších matematických talentov z celého sveta, s obrovským záujmom sa sleduje aj umiestnenie jednotlivých krajín. Družstvo Slovenska skončilo v neoficiálnom poradí krajín tentokrát na 33.–34. mieste, takmer najhoršie v histórii MMO. Je pravdepodobne slabou útechou, že sme oproti predošlému ročníku v Argentíne predsa len o čosi stúpli. Napriek tomu sa piati zo súťažiacich vrátili z MMO s medailou, pričom *Františka Kardoša* delil od zisku zlatej jediný bod.

Tím Českej republiky, ktorý už minulý rok jasne ukázal svoje ďalšie smerovanie (18.), a nad ktorým sa nám tentokrát nepodarilo zvíťaziť ani v tradičnom medzištátnom stretnutí, podal opäť veľmi dobrý výkon a skončil na 15. mieste s troma striebornými a troma bronzovými medailami.

Najúspešnejšie bolo družstvo Iránu, poradie ďalších krajín je uvedené v tabuľke.

1.	Irán	211	12.	Južná Kórea	154
2.	Bulharsko	195	13.	Austrália	146
3.	Maďarsko	186	14.	Japonsko	139
	USA	186	15.	Česká Republika	135
5.	Taiwan	184	16.	Nemecko	129
6.	Rusko	175	17.	Turecko	122
7.	India	174		Veľká Británia	122
8.	Vietnam	168	19.	Bielorusko	118
9.	Ukrajina	187	20.	Kanada	113
10.	Juhoslávia	156	21.	Poľsko	112
11.	Rumunsko	155	33.	Slovensko	88

Spolu bolo udelených 37 prvých, 66 druhých a 102 tretích cien. Plný počet bodov (42) získal tento rok len jeden súťažiaci – Omid Amini z Iránu. Po jednom bode stratili jeden súťažiaci z domáceho Taiwanu a jeden Ukrajinec.

39. ročník MMO prebiehal v priestoroch Taiwanskej národnej univerzity a tešil sa veľkej pozornosti médií, taiwanských vládnych i vedeckých kruhov, významných svetových firiem. Slávnostné otvorenie i záverečný ceremoniál s odovzdávaním medailí víťazom prebehli za prítomnosti najvyšších predstaviteľov spomínaných inštitúcií a boli spojené s hodnotným kultúrno–umeleckým programom. Olympionikom boli vytvorené dobré podmienky na súťaž aj napriek nezvyčajnej klíme ostrova zahŕňajúcej mimoriadne vysoké teploty 36°–41° a nadštandardnú vlhkosť vzduchu 89%–95%. Súťažiaci prežili bez ujmy i zemetrasenie, ktorého sila v epicentre bola 6, 2 stupňa Richterovej stupnice. Na exotickosti tohoto faktu zrejme neuberá ani ich vlastné tvrdenie, že v hoteli, kde boli ubytovaní, bolo zemetrasenie takmer nezaznamenateľné. O niečo náročnejšie už bolo vyrovnať sa za takýchto podmienok s dvojdňovým blúdením batožiny nášho tímu po medzinárodných letiskách.

Organizátori sa usilovali oboznámiť súťažiacich s prírodnými krásami, kultúrnymi a historickými pamiatkami Taiwanu. Tak nebolo problémom navštíviť národný park, ale ani vyskúšať si boj nervov a žalúdka s jedlom, ktoré na človeka z taniera pozerá spôsobom „kto z koho“, alebo byť jedným z tých návštevníkov baseballového zápasu, ktorí musia odísť tesne pred jeho skončením odsúdení nikdy sa nedozvedieť, kto vlastne zvíťazil. Vďaka skvelej sprievodkyni slovenského družstva dostali naši súťažiaci príležitosť okúpať sa v Tichom oceáne, či zájsť do mesta pokochať sa dopravným ruchom v uliciach Taipei, ktorého dominantou je nedohľadno malých motoriek pohybujúcich sa bez náznaku existencie akýchkoľvek pravidiel cestnej premávky. Spomedzi športových aktivít účastníkov MMO nášmu tímu najviac utkvel v pamäti nočný volejbal, počas ktorého bravúrny smeč Peťa Kozáka neminul absolútneho víťaza olympiády Omida Amini z Iránu.

Olympiáda bola aj tento rok veľmi úspešná, organizátori odviedli obrovský kus práce. Pred organizátorov nasledujúcich ročníkov postavili vysokú latku. Budúci, jubilejný 40. ročník MMO usporiada Rumunsko, tie nasledujúce potom Južná Kórea, USA, Japonsko a Filipíny.

Výsledky medzinárodnej matematickej olympiády

Krajina	Poč. žiakov	Body	1.cena	2.cena	3.cena	Poradie
Argentína	6	97	1	0	2	29.
Arménsko	6	100	0	2	2	26.–27.
Austrália	6	146	0	4	2	13.
Azerbajdžan	5	41	0	0	1	54.
Bielorusko	6	118	0	1	4	19.
Belgicko	6	71	0	1	1	39.
Bosna a Hercegovina	6	88	0	1	2	33.–34.
Brazília	6	91	1	0	1	30.–31.
Bulharsko	6	195	3	3	0	2.
Cyprus	4	39	0	0	1	56.
Česká republika	6	135	0	3	3	15.
Dánsko	6	21	0	0	0	66.
Estónsko	6	63	0	1	1	43.
Filipíny	4	11	0	0	0	70.–71.
Fínsko	6	30	0	0	0	63.
Francúzsko	6	100	1	0	2	26.–27.
Grécko	6	90	0	2	1	32.
Gruzínsko	6	78	0	0	3	36.
Holandsko	6	62	0	1	0	44.–45.
Hong Kong	6	102	0	1	3	25.
Chorvátsko	6	110	0	0	5	22.–23.
India	6	174	3	3	0	7.
Indonézia	5	16	0	0	0	68.
Irán	6	211	5	1	0	1.
Island	6	42	0	0	0	52.–53.
Izrael	6	104	0	0	5	24.
Írsko	6	36	0	0	1	58.–60.
Japonsko	6	139	1	1	3	14.
Juhoslávia	6	156	0	5	0	10.
Južná Afrika	6	98	0	1	2	28.
Južná Kórea	6	154	2	2	2	12.
Kanada	6	113	1	1	2	20.
Kazachstan	6	81	0	0	2	35.
Kirgistan	5	14	0	0	0	69.
Kolumbia	6	66	1	0	0	41.
Kuba	1	19	0	0	1	67.
Kuvajt	3	0	0	0	0	76.

Krajina	Poč. žiakov	Body	1.cena	2.cena	3.cena	Poradie
Litva	6	74	0	1	3	37.
Lotyšsko	6	40	0	0	1	55.
Luxembursko	2	25	0	0	1	65.
Macao	5	29	0	0	0	64.
Macedónsko	6	69	0	0	1	40.
Maďarsko	6	186	4	2	0	3.–4.
Malajzia	6	32	0	0	0	62.
Maroko	6	42	0	0	0	52.–53.
Mexiko	6	62	0	1	0	44.-45.
Moldavsko	2	45	0	1	1	50.
Mongolsko	6	91	0	2	2	30.–31.
Nemecko	6	129	0	3	2	16.
Nový Zéland	6	50	0	0	2	49.
Nórsko	6	33	0	0	3	61.
Paraguay	5	6	0	0	0	72.–73.
Peru	3	60	0	2	0	46.
Poľsko	6	112	1	1	1	21.
Portugalsko	6	6	0	0	0	72.–73.
Rakúsko	6	57	0	0	1	48.
Rumunsko	6	155	3	0	2	11.
Rusko	6	175	2	3	1	6.
Singapúr	6	110	0	1	3	22.–23.
Slovensko	6	88	0	1	4	33.–34.
Slovinsko	6	44	0	0	1	51.
Španielsko	6	36	0	0	1	58.–60.
Sri Lanka	1	5	0	0	0	74.
Švajčiarsko	5	37	0	0	0	57.
Švédsko	6	58	0	0	2	47.
Taliansko	6	72	0	0	3	38.
Thajsko	6	65	0	0	2	42.
Taiwan	6	184	3	2	1	5.
Trinidad a Tobago	6	36	0	0	1	58.–60.
Turecko	6	122	0	2	4	17.–18.
Ukrajina	6	166	1	3	2	9.
Uruguay	6	11	0	0	0	71.
USA	6	186	3	3	0	3.–4.
Veľká Británia	6	122	0	1	4	17.–18.
Venezuela	2	1	0	0	0	75.
Vietnam	6	168	1	3	2	8.

Zadania úloh MMO

V zátvorke za úlohou je uvedená krajina,
ktorá úlohu navrhla.

1. V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ sú uhlopriečky AC a BD na seba kolmé a protiľahlé strany AB a DC rôznobežné. Predpokladajme, že bod P, v ktorom sa pretínajú osi strán AB a CD, leží vo vnútri $ABCD$. Dokážte, že štvoruholník $ABCD$ je tetivový práve vtedy, keď trojuholníky ABP a CDP majú rovnaký obsah.

(Luxembursko)

2. Na súťaži je a súťažiacich a b rozhodcov, kde $b \geqq 3$ je nepárne celé číslo. Každý rozhodca ohodnotí každého súťažiaceho známkou „dobre“ alebo „zle“. Nech k je také číslo, pre ktoré sa hodnotenie dvoch rozhodcov zhoduje nanajvýš pre k súťažiacich. Dokážte, že

$$\frac{k}{a} \geqq \frac{b-1}{2b}\,.$$

(India)

3. Pre ľubovoľné prirodzené číslo n označme $d(n)$ počet všetkých kladných deliteľov čísla n (vrátane 1 a n). Určte všetky prirodzené čísla k také, že

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$$

pre vhodné n.

(Bielorusko)

4. Určte všetky dvojice (a, b) kladných celých čísel takých, že číslo $ab^2 + b + 7$ delí číslo $a^2b + a + b$.

(Veľká Británia)

5. Označme I stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC, ktorá sa dotýka jeho strán BC, CA a AB postupne v bodoch K, L a M. Priamka, ktorá prechádza vrcholom B a je rovnobežná s MK, pretína priamky LM a LK postupne v bodoch R a S. Dokážte, že uhol RIS je ostrý.

6. Uvažujme všetky funkcie z množiny $\mathbb{N}$ všetkých prirodzených čísel do seba, ktoré spĺňajú rovnosť

$$f(t^2 f(s)) = s(f(t))^2$$

pre všetky s a t z $\mathbb{N}$. Určte najmenšiu možnú hodnotu $f(1998)$.

(Bulharsko)

Riešenia úloh MMO

Úloha 1. *Prvá implikácia podľa Františka Kardoša.*

Najprv dokážeme jednu implikáciu: ak je $ABCD$ tetivový štvoruholník, tak platí $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle CDP}$.

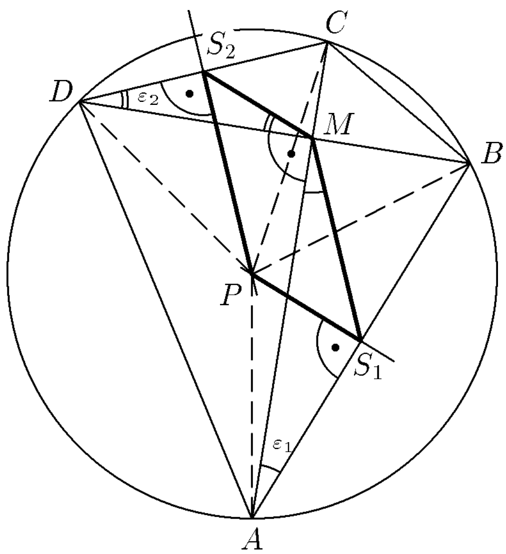
Nech štvoruholník $ABCD$ vyhovuje všetkým podmienkam v zadaní. Strany AB a CD sú nerovnobežné tetivy kružnice opísanej štvoruholníku $ABCD$, a preto sa pretínajú v jej strede. Bod P je preto stred kružnice opísanej štvoruholníku $ABCD$. Jej polomer označme r. Ak teraz označíme α veľkosť uhla CAD, tak $|\measuredangle BAD| = 90^\circ - \alpha$. Z vety o obvodovom a stredovom uhle pre tetivy AB a CD potom platí $|\measuredangle DPC| = 2\alpha$ a $|\measuredangle BPA| = 180^\circ - 2\alpha$. Pre obsahy trojuholníkov ABP a CDP platí

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABP} &= \frac{1}{2}\cdot|PA|\cdot|PB|\cdot\sin(180^\circ-2\alpha) = \frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\sin 2\alpha\,,\\ S_{\triangle CDP} &= \frac{1}{2}\cdot|PC|\cdot|PD|\cdot\sin 2\alpha \qquad\qquad\quad = \frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\sin 2\alpha\,. \end{aligned}$$

Vidíme, že $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle CDP}$, čo sme chceli dokázať.

Iné riešenie. *Podľa Martina Viščora, Brno.*

Označme M priesečník uhlopriečok daného štvoruholníka $ABCD$, S_1 a S_2 stredy jeho strán AB a CD a ε_1 veľkosť menšieho z oboch ostrých uhlov v pravouhlom



Obr. 46

trojuholníku ABM (na obr. 45 je to veľkosť uhla BAM). V trojuholníku ABM potom platí $|S_1A| = |S_1M|$, $|\measuredangle S_1MA| = |\measuredangle S_1AM| = \varepsilon_1$, a tiež

$$|\measuredangle PS_1M| = 180^\circ - 2\varepsilon_1 - 90^\circ = 90^\circ - 2\varepsilon_1. \tag{1}$$

Podobne, ak označíme ε_2 veľkosť uhla CDM, bude v pravouhlom trojuholníku CDM platiť $|S_2D| = |S_2M|$, $|\measuredangle S_2DM| = |\measuredangle S_2MD| = \varepsilon_2$, a tiež

$$|\measuredangle PS_2M| = 180^\circ - 2\varepsilon_2 - 90^\circ = 90^\circ - 2\varepsilon_2. \tag{2}$$

Zároveň jednoduchý výpočet dáva

$$\begin{aligned} |\measuredangle S_1MS_2| &= 90^\circ + \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \\ |\measuredangle S_1PS_2| &= 360^\circ - (90^\circ - 2\varepsilon_1) - (90^\circ - 2\varepsilon_2) - (90^\circ + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \\ &= 90^\circ + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = |\measuredangle S_1MS_2|. \end{aligned}$$

Ak je štvoruholník $ABCD$ tetivový, vyplýva z rovnosti obvodových uhlov BAC a BDC rovnosť $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, preto

$$\begin{aligned} |\measuredangle S_1MS_2| + |\measuredangle PS_2M| &= 180^\circ, \\ |\measuredangle S_2PS_1| + |\measuredangle PS_1M| &= 180^\circ, \end{aligned}$$

štvoruholník PS_1MS_2 je tiež rovnobežník a pre obsahy trojuholníkov BAP, CDP dostávame

$$S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2}|AB||S_1P| = |S_1M||S_1P| = |S_2P||S_2M| = \frac{1}{2}|CD||S_2P| = S_{\triangle CDP}.$$

Predpokladajme naopak, že $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle CDP}$. To však znamená, že

$$|S_1A||S_1P| = |S_2C||S_2P|, \quad \text{čiže} \quad \frac{|S_1P|}{|S_2P|} = \frac{|S_2C|}{|S_1A|} = \frac{|S_2M|}{|S_1M|},$$

odkiaľ vďaka rovnosti uhlov $|\measuredangle S_1MS_2| = |\measuredangle S_2PS_1|$ vidíme, že trojuholníky S_1MS_2 a S_2PS_1 sú podobné. Pretože ale obidva trojuholníky majú spoločnú stranu S_1S_2, sú dokonca zhodné, a S_1MS_2P je tiež rovnobežník. Teda $|\measuredangle PS_1M| = |\measuredangle MS_2P|$, čo podľa (1) a (2) znamená, že aj $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, teda štvoruholník $ABCD$ je tetivový.

Úloha 2. *Riešenie podľa Františka Kardoša.*

Zvoľme pevne jedného so súťažiacich a všimnime si, ako ho hodnotili jednotliví rozhodcovia. Počet b rozhodcov je nepárny, preto možno bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že daného súťažiaceho hodnotilo jedným spôsobom („dobre“ alebo „zle“) práve $\dfrac{b+1}{2} + h$ rozhodcov a druhým spôsobom (druhá možnosť) práve $\dfrac{b-1}{2} - h$ rozhodcov, kde h je nezáporné celé číslo. Keďže zhoda nastala práve v tých dvojiciach rozhodcov, ktoré hodnotili rovnakým spôsobom, celkový počet dvojíc rozhodcov, ktoré sa zhodli na tomto súťažiacom je rovný

$$\binom{\frac{b+1}{2}+h}{2} + \binom{\frac{b+1}{2}-h}{2} = \frac{\left(\frac{b+1}{2}+h\right)\left(\frac{b+1}{2}+h-1\right)}{2} + \frac{\left(\frac{b+1}{2}-h\right)\left(\frac{b+1}{2}-h-1\right)}{2} =$$
$$= \frac{(b-1)^2}{4} + h(h-1) \geqq \frac{(b-1)^2}{4}.$$

Teda na jednom súťažiacom sa určite zhodlo aspoň $\dfrac{(b-1)^2}{4}$ dvojíc rozhodcov.

Keďže toto tvrdenie platí pre každého súťažiaceho, na a súťažiacich sa zhodlo aspoň $a \cdot \dfrac{(b-1)^2}{4}$ dvojíc rozhodcov, pričom každá dvojica rozhodcov je započítaná toľkokrát, koľkokrát sa zhodla v hodnotení súťažiacich. Dvojíc rozhodcov je práve $\dfrac{b(b-1)}{2}$, preto z Dirichletovho princípu vyplýva, že sa jedna dvojica rozhodcov zhodla v hodnotení aspoň

$$a \cdot \frac{(b-1)^2}{4} \quad : \quad \frac{b(b-1)}{2} = \frac{a(b-1)}{2b}$$

súťažiacich. Preto zrejme $k \geqq \dfrac{a(b-1)}{2b}$, čo je ekvivalentné s nerovnosťou

$$\frac{k}{a} \geqq \frac{b-1}{2b}\,.$$

Rovnosť nastáva práve vtedy, keď sa každá dvojica rozhodcov zhodne v hodnotení práve $\dfrac{(b-1)^2}{2}$ súťažiacich a zároveň je $\dfrac{a(b-1)}{2b}$ celé číslo.

Úloha 3. *Riešenie podľa Tomáša Hanžla, Brno.*

Pre prirodzené číslo n s kanonickým rozkladom na prvočinitele $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m}$ platí

$$d(n) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_m+1)\,.$$

Zrejme potom

$$d(n^2) = (2\alpha_1+1)(2\alpha_2+1) \cdot \ldots \cdot (2\alpha_m+1)\,,$$

$$k = \frac{2\alpha_1+1}{\alpha_1+1} \cdot \frac{2\alpha_2+1}{\alpha_2+1} \cdot \ldots \cdot \frac{2\alpha_m+1}{\alpha_m+1}\,.$$

Hľadáme preto všetky prirodzené čísla k, ktoré sa dajú zapísať ako súčin zlomkov tvaru $\dfrac{2s+1}{s+1}$ (nie nutne rôznych), kde s je prirodzené číslo.

Dokážeme indukciou, že popísaný súčin zlomkov existuje pre každé nepárne číslo k. Pre $k=1$ stačí vziať $n=1$, pre $k=3$ vyhovuje súčin

$$3 = \frac{2 \cdot 2+1}{2+1} \cdot \frac{2 \cdot 4+1}{4+1}.$$

Teraz predpokladajme, že $k \geqq 5$ je nepárne a že požadovaný súčin zlomkov existuje pre každé nepárne číslo $k' \leqq k-2$. Nech 2^s je najvyššia mocnina čísla 2, ktorá delí číslo $k+1$, takže platí $k = 2^s L - 1$, kde L je nepárne a $k \geqq 3$, takže $L < k$. Položme

$$\alpha_j = 3^j 2^{s-j} L - 2 \quad \text{pre } j \in \{1, 2, \ldots, s-1\} \quad \text{a} \quad \alpha_s = 3^{s-1} L - 1.$$

Čísla α_j sú definované tak, že $k = \frac{1}{3}(2\alpha_1 + 1)$,

$$\alpha_j + 1 = \frac{1}{3}(2\alpha_{j+1} + 1) \quad \text{pre } j \in \{1, 2, \dots, s-2\} \quad \text{a} \quad \alpha_{s-1} = 2\alpha_s + 1\,,$$

teda menovateľ a čitateľ susedných zlomkov sa takmer vykrátia (okrem faktora 3) a ostanú len čitateľ prvého a menovateľ posledného zlomku. Preto platí

$$\frac{(2\alpha_1 + 1)}{(\alpha_1 + 1)} \cdot \frac{(2\alpha_2 + 1)}{(\alpha_2 + 1)} \dots \frac{(2\alpha_s + 1)}{(\alpha_s + 1)} = 3^{s-1} \cdot \frac{k}{(\alpha_s + 1)} = \frac{k}{L},$$

odkiaľ dostávame

$$k = \frac{(2\alpha_1 + 1)}{(\alpha_1 + 1)} \cdot \frac{(2\alpha_2 + 1)}{(\alpha_2 + 1)} \dots \frac{(2\alpha_s + 1)}{(\alpha_s + 1)} \cdot L.$$

Požadovaný súčin zlomkov pre číslo L však podľa indukčného predpokladu existuje (lebo $L < k$); ak ho dosadíme do poslednej rovnosti, dostaneme hľadané vyjadrenie pre číslo k, čím je zadané tvrdenie dokázané.

Úloha 4. *Riešenie podľa Jána Špakulu.*

Pre hľadanú dvojicu čísel (a, b) číslo $ab^2 + b + 7$ samozrejme delí samo seba a zároveň má deliť číslo $a^2b + a + b$. Preto zrejme delí aj akúkoľvek ich lineárnu kombináciu, teda aj

$$a(ab^2 + b + 7) - b(a^2b + a + b) = 7a - b^2\,.$$

Číslo $ab^2 + b + 7$ je zrejme kladné a preto, ak je $7a - b^2$ záporné, tak musí deliť kladné číslo $b^2 - 7a$. To však nie je možné, pretože

$$b^2 - 7a < b^2 < b^2 + b + 7 < ab^2 + b + 7\,,$$

a väčšie číslo nemôže deliť menšie (obe čísla sú kladné).

Ak je číslo $7a - b^2$ kladné, tak existuje prirodzené číslo l pre ktoré platí

$$l \cdot (ab^2 + b + 7) = 7a - b^2\,.$$

Po vyjadrení a z tejto rovnice dostávame

$$a = \frac{b^2 + l(b+7)}{7 - lb^2}\,.$$

Keďže a je prirodzené číslo, musí byť číslo $7 - lb^2$ kladné. To je však zjavne možné len pre malé hodnoty l a b.

Pre $b = 1$ dostávame $a = \dfrac{1+8l}{7-l}$ a po vyskúšaní prípustných hodnôt $l \in \in \{1,2,3,4,5,6\}$ dostávame riešenia $(l,a) = (4,11), (6,49)$, ktoré vedú k skutočným riešeniam danej úlohy $(a,b) = (11,1), (49,1)$.

Pre $b = 2$ dostávame $a = \dfrac{9l+4}{7-4l}$ a vyskúšaním jedinej prípustnej hodnoty $l = 1$ zistíme, že takéto riešenie neexistuje.

Pre $b \geqq 3$ už platí $7 - lb^2 < 0$.

Napokon, ak je číslo $7a - b^2$ rovné nule, platí $b^2 = 7a$ a číslo b musí byť deliteľné siedmimi. Možno ho teda zapísať v tvare $b = 7k$, pre k prirodzené číslo. Potom ale zo vzťahu $7a - b^2 = 0$ dostávame $a = 7k^2$. Pre túto dvojicu (a,b) platí

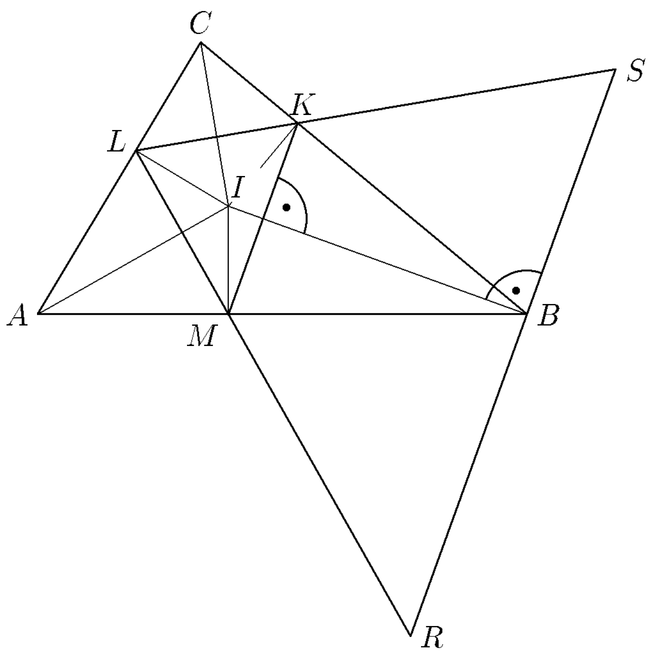
$$a^2b + a + b = 7^3k^5 + 7k^2 + 7k = k \cdot (7^3k^4 + 7k + 7) = k \cdot (ab^2 + b + 7)\,,$$

teda každá dvojica $(7k^2, 7k)$ je riešením úlohy.

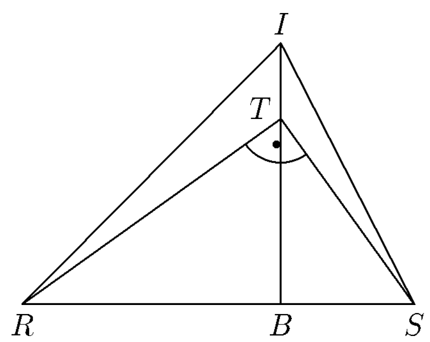
Úloha má nekonečne veľa riešení $(a,b) = (11,1), (49,1)$ a $(7k^2, 7k)$ pre každé prirodzené číslo k.

Úloha 5.

Najprv si všimnime, že štvoruholník $BKIM$ je súmerný podľa osi BI (je to deltoid), takže úsečka BI je kolmá na MK, a teda aj na RS (obr. 46). Teda IB je výška



Obr. 47



Obr. 48

v trojuholníku RSI. Stačí ukázať, že jej dĺžka je väčšia ako výška TB v zodpovedajúcom pravouhlom trojuholníku RST (obr. 47), pre ktorú podľa Euklidovej vety platí $|BT|^2 = |BR||BS|$.

Určme uhly v trojuholníku RBM. Zrejme je $|\measuredangle RBM| = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta$ a $|\measuredangle RMB| = |\measuredangle AML| = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$. Pre zvyšný uhol vychádza $|\measuredangle MRB| = 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\beta) - (90^\circ - \frac{1}{2}\alpha) = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$. Analogicky dostaneme pre uhly v trojuholníku BSK rovnosti $|\measuredangle SBK| = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta$, $|\measuredangle BKS| = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$, $|\measuredangle BSK| = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$, takže trojuholníky BSK a BMR sú podobné. Odtiaľ vychádza

$$\frac{|BR|}{|BM|} = \frac{|BK|}{|BS|}, \quad \text{teda} \quad |BR||BS| = |BK||BM| = |BK|^2.$$

Z pravouhlého trojuholníka IBK vidíme, že naozaj platí

$$|BI|^2 > |BK|^2 = |BR||BS| = |BT|^2,$$

čiže uhol RIS je ostrý.

Úloha 6.

Označme $f(1) = c$. Zo zadania vyplýva

$$f(t^2c) = f(t^2 \cdot f(1)) = 1 \cdot f^2(t) = f^2(t),$$

pre každé prirodzené číslo t. Potom tiež

$$\begin{aligned} f(f^2(t)) &= f(1^2 \cdot f(t^2c)) = t^2c^3 \\ \text{a} \quad f(v^2t^2c^3) &= f(v^2 \cdot f(f^2(t))) = f^2(t)f^2(v)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Dosaďme do poslednej identity namiesto dvojice (v,t) dvojicu $(1, vt)$, dostaneme

$$f(v^2t^2c^3) = f^2(1)f^2(vt) = c^2f^2(vt)\,. \tag{2}$$

Zo spojenia (1) a (2) potom vyplýva

$$c^2f^2(vt) = f^2(t)f^2(v), \quad \text{teda} \qquad cf(vt) = f(t)f(v)\,. \tag{3}$$

Teraz dokážeme, že funkcia f je prostá. Nech pre nejaké dve prirodzené čísla s_1, s_2 platí $f(s_1) = f(s_2)$. Potom zo zadania pre každé prirodzené číslo t dostaneme

$$s_2f^2(t) = f(t^2f(s_2)) = f(t^2f(s_1)) = s_1f^2(t)\,,$$

z čoho okamžite vyplýva $s_1 = s_2$.

Nech ďalej $c = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ je kanonický rozklad čísla c. Dokážeme, že každý z členov $p_i^{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, delí hodnotu $f(n)$ pre každé prirodzené číslo n. Tvrdenie dokážeme indukciou podľa $m = \alpha_i$.

Pre $m = 1$ tvrdenie platí, pretože z (3) vyplýva $cf(n^2) = f^2(n)$ pre každé n, teda ak $p|c$, potom $p|f(n)$.

Nech tvrdenie platí pre m, $m \geqq 1$ a nech $p^{m+1}|c$. Potom podľa indukčného predpokladu $p^m|f(n)$ pre každé n. Z (3) dostávame $cf(n^2) = f^2(n)$, teda ľavá strana rovnice je deliteľná aspoň členom $p^{m+1}p^m$, a preto ním musí byť deliteľná aj pravá strana. Teda zrejme $p^{m+1}|f(n)$, čo sme chceli dokázať.

Preto zrejme c delí všetky hodnoty $f(n)$. Zaveďme preto funkciu g ako $f(n) = c \cdot g(n)$ pre každé prirodzené číslo n. Potom zrejme funkcia g zdedí množstvo vlastností funkcie f, napríklad bude prostá a vzťah (3) prejde do podoby

$$g(ab) = g(a)g(b)\,. \tag{4}$$

Zo vzťahu (3) vyplýva (štvornásobným aplikovaním)

$$f(1998) = c^{-3} \cdot f(2)f^3(3)f(37) = cg(2)g^3(3)g(37)\,. \tag{5}$$

Vzhľadom na prostosť funkcie g, hodnoty $g(2)$, $g(3)$ a $g(37)$ predstavujú rôzne prirodzené čísla väčšie ako 1. Keďže c je ľubovoľné prirodzené číslo, najmenšia možná hodnota $f(1998)$ by na základe (5) mohla byť $1 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 4$ (najmenšiu možnú hodnotu funkcie g zrejme priradíme číslu 3). Predpokladajme preto, že $g(3) = 2$ a hodnotu tri priraďme bez ujmy na všeobecnosti číslu 2, teda $g(2) = 3$ (mohli sme tiež položiť $g(37) = 3$, ďalší postup by bol rovnaký). Avšak vzhľadom na (4) platí $g(n^2) = g^2(n)$, a teda ak $g(3) = 2$, tak aj $g(9) = 4$ a $g(37)$ nemôže byť 4. Teda $g(37) \geqq 5$. Preto

$$f(1998) \geqq 1 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 5 = 120\,.$$

Táto hodnota sa nadobúda napríklad pre funkciu h:

$$\begin{gathered} h(1) = 1, \quad h(2) = 3, \quad h(3) = 2, \quad h(5) = 37, \quad h(37) = 5, \\ h(p) = p \quad \text{pre ostatné prvočísla } p, \\ \text{a} \quad h(p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}) = h^{\alpha_1}(p_1) \cdot \ldots \cdot h^{\alpha_k}(p_k) \text{pre zložené čísla.} \end{gathered}$$

Skúška pre túto funkciu sa vykoná jednoducho.

Zadania súťažných úloh

KATEGÓRIA P

P – I – 1

Na večierku sa zišlo niekoľko hostí. Vieme, ktorí z nich sa vzájomne poznajú a ktorí nie. Vzťah „poznať sa“ uvažujeme zásadne ako symetrický, t.j. pre ľubovoľnú dvojicu ľudí platí, že buď sa navzájom poznajú, alebo ani jeden z dvojice nepozná toho druhého. Hostiteľ chce usadiť každého hosťa buď v hale, alebo v obývacej izbe. Navrhnite algoritmus, ktorý určí, koľkými spôsobmi môže hostiteľ rozmiestniť svojich hostí do oboch miestností tak, aby sa v rámci každej miestnosti všetci navzájom poznali.

Vstupom algoritmu (programu) je počet hostí N ($N \leq 100$) a ďalej zoznam tých dvojíc hostí, ktorí sa spolu poznajú. Pre jednoduchšie zadávanie vstupných dát označíme jednotlivých hostí celými číslami od 1 po N, takže na vstupe bude zadaný zoznam dvojíc čísel. Výsledkom bude jediné číslo udávajúce počet možných rozdelení hostí.

Príklad

Ak je $N = 4$ a poznajú sa len dvojice $(1, 2)$ a $(3, 4)$, má hostiteľ dve možnosti: buď usadí hostí 1 a 2 do haly a hostí 3 a 4 do obývacej izby, alebo naopak, hostia 1 a 2 budú sedieť v obývacej izbe a hostia 3 a 4 v hale. Výsledkom bude teda číslo 2.

P – I – 2

Výrobca ponúka N kusov výrobkov známych hmotností. Zákazník k nemu prišiel pre tovar s nákladným autom danej nosnosti C. Hmotnosti všetkých výrobkov aj nosnosť auta sú zadané v kilogramoch a sú celočíselné. Zákazník chce na auto naložiť výrobky tak, aby bola nosnosť auta plne využitá. Napíšte program, ktorý zistí, či je to možné. Program musí pracovať dostatočne rýchlo, a byť teda reálne použiteľný aj pre veľké počty ponúkaných výrobkov (rádovo stovky).

Program bude čítať vstupné dáta z textového súboru `NAKLAD.IN`. Na prvom riadku súboru je uvedené jedno kladné celé číslo C predstavujúce nosnosť auta ($C \leq 10\,000$). Druhý riadok obsahuje jediné kladné celé číslo N určujúce počet ponúkaných výrobkov ($N \leq 1\,000$). Nasledujúce riadky súboru `NAKLAD.IN` obsahujú N kladných celých čísel — hmotnosti jednotlivých výrobkov (menšie ako $10\,000$).

Do výstupného súboru `NAKLAD.OUT` program zapíše jediný riadok s výsledkom výpočtu. Výsledkom bude slovo `ANO`, pokiaľ je možné vybrať z ponuky takú skupinu výrobkov, aby bol súčet ich hmotností rovný presne C. V opačnom prípade program napíše do výstupného súboru slovo `NIE`.

Príklad

NAKLAD.IN	NAKLAD.OUT
1000	ANO
5	
300	
800	
100	
550	
100	

Výsledkom je odpoveď `ANO`, lebo auto s nosnosťou 1 000 kg presne zaplníme, pokiaľ naložíme výrobok s hmotnosťou 800 kg a obidva ponúkané výrobky s hmotnosťou 100 kg.

P – I – 3

Na počítači máme nainštalovaný operačný systém MO-P-Windows pracujúci v grafickom rozlíšení 300×200 bodov. Momentálne máme spustených niekoľko aplikácií a na obrazovke je zobrazených N ich okien. Každé okno je obdĺžnikové (príp. štvorcové), poznáme presné umiestnenie a veľkosť jednotlivých okien. Okná sa môžu na obrazovke čiastočne alebo úplne prekrývať.

Chceme spustiť ďalšiu aplikáciu, ktorá potrebuje zobraziť jedno nové okno. Poznáme veľkosť nového okna a požadujeme, aby na obrazovke nezakrylo ani časť žiadneho z okien, ktoré sú tam už zobrazené. Napíšte program, ktorý pre nové okno nájde vhodné umiestenie na obrazovke, alebo prípadne oznámi, že dostatočne veľké voľné miesto neexistuje.

Program číta vstupné dáta z textového súboru `OKNA.IN`. Na prvom riadku súboru je zadaný počet už zobrazených okien N. Nasleduje N riadkov špecifikujúcich veľkosť a umiestenie jednotlivých okien. Pre každé z okien sú zadané štyri celé čísla x_1, y_1, x_2, y_2 predstavujúce súradnice bodu na obrazovke $[x_1, y_1]$, ktorý určuje ľavý horný roh okna, a bodu $[x_2, y_2]$, v ktorom leží pravý dolný roh okna. Súradnice bodov na obrazovke sa zadávajú tak, že bod v ľavom hornom rohu celej obrazovky má súradnice $[0, 0]$ a bod v pravom dolnom rohu má súradnice $[299, 199]$. Prvá súradnica nejakého bodu na obrazovke znamená vodorovnú vzdialenosť tohoto bodu od ľavého okraja obrazovky, druhá súradnica určuje zvislú vzdialenosť bodu od horného okraja obrazovky. Posledný riadok vstupného súboru `OKNA.IN` obsahuje dve celé čísla určujúce veľkosť novoumiestňovaného okna (najprv šírka, potom výška okna). Obidva rozmery nového okna sú vyjadrené počtom bodov v používanom grafickom zobrazení.

Výsledok výpočtu program zapíše na jeden riadok do výstupného textového súboru `OKNA.OUT`. Výsledkom bude buď dvojica čísel, ktorá znamená súradnice ľavého horného rohu nájdeného prípustného umiestenia pre nové okno (ľubovoľného jedného umiestenia, ak je viac možností), alebo slovo `NEMOZNO`, pokiaľ takéto okno nemožno na obrazovku umiestiť. Požiadavka, aby sa nové okno neprekrývalo so žiadnym z ostatných okien znamená, že žiaden hraničný ani vnútorný bod nového okna nesmie ležať v inom okne ani na jeho hranici.

Príklad

```
OKNA.IN
2
10 10 280 30
20 20 40 180
30 160
```

```
OKNA.OUT
41 31
```

Úloha popísaná uvedeným vstupným súborom má viacero riešení, vyhovujú napríklad tiež dvojice súradníc ľavého horného rohu nového okna [60, 35] alebo [270, 40]. Naopak nevyhovuje umiestenie [60, 30], lebo horná hranica nového okna by sa prekrývala s dolnou hranicou prvého z uvedených okien. Nevyhovuje ani umiestenie [270, 41], lebo dolná hranica nového okna by sa o jeden bod nevošla na obrazovku.

P – I – 4

Kombinačné siete

Abeceda je konečná neprázdna množina symbolov, s ktorými kombinačná sieť pracuje. Obsahuje vždy špeciálny symbol $\emptyset$ (prázdny symbol).

Základným stavebným prvkom kombinačných sietí sú *kombinačné hradlá* (ďalej len *hradlá*). Každé z nich má dva vstupy a jeden výstup a je jednoznačne určené svojou *prechodovou funkciou.* Tá každej kombinácii možných hodnôt na vstupoch hradla (čo sú niektoré zo symbolov abecedy) jednoznačne priraďuje hodnotu na výstupe — tiež niektorý zo symbolov abecedy. Symbol $\emptyset$ funkcia vráti práve vtedy, keď aspoň jeden zo vstupných symbolov je $\emptyset$.

Kombinačná sieť sa skladá zo vstupov I_1 až I_n, výstupov O_1 až O_m a hradiel H_1 až H_k. Každý zo vstupov hradla H_i je priamo pripojený na niektorý zo vstupov siete I_l alebo na výstup nejakého hradla H_j, $j < i$ (v sieti teda nemôžu vzniknúť cykly), prípadne naň môže byť trvalo pripojený ľubovoľný zo symbolov abecedy (konštanta). Rovnakým spôsobom sú pripojené aj výstupy siete.

Výpočet kombinačnej siete prebieha v taktoch. V nultom takte sú na všetkých vstupoch siete vstupné dáta a na výstupoch všetkých hradiel symboly $\emptyset$. V každom ďalšom takte sa nastavia výstupy všetkých hradiel podľa toho, aké hodnoty boli na ich vstupoch v takte predchádzajúcom. Týmto spôsobom sa pokračuje tak dlho, kým je aspoň na jednom z výstupov siete symbol $\emptyset$. Potom sa výpočet siete zastaví a jej výstupy obsahujú výsledok výpočtu.

Podľa toho, ako prebieha výpočet, je možné sieť rozdeliť do hladín. Do i-tej hladiny zaradíme tie hradlá, ktoré v i-tom takte majú na svojom výstupe platnú hodnotu (teda iný symbol abecedy ako $\emptyset$) a v predchádzajúcom kroku ešte túto podmienku nesplňali. Výpočet teda bude prebiehať práve toľko taktov, koľko má sieť hladín.

Navrhnúť kombinačnú sieť riešiacu danú úlohu znamená zvoliť abecedu, popísať prechodové funkcie všetkých použitých hradiel (napríklad tabuľkou) a určiť prepojenie siete (t.j. vzájomné prepojenie hradiel, vstupov a výstupov). Pri návrhu siete sa snažíme dosiahnuť čo najrýchlejší výpočet, to znamená minimalizovať počet hladín siete.

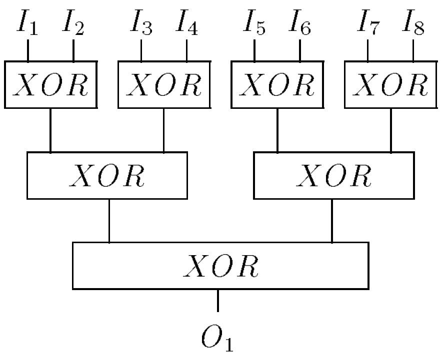
Kombinačné siete môžeme pre väčšiu prehľadnosť znázorňovať graficky — jednotlivé hradlá sú reprezentované obdĺžnikmi (hore sú zakreslené vstupy, dole výstup), pričom hradlá v tej istej hladine sa umiestňujú vedľa seba. Vo vnútri každého obdĺžnika je označenie príslušnej prechodovej funkcie. Nad všetkými hladinami sú zakreslené vstupy siete, celkom dole potom výstupy siete.

Príklad: Navrhnite kombinačnú sieť s abecedou $\{0, 1, \emptyset\}$, s N vstupmi a s jedným výstupom. Na výstupe bude 0 práve vtedy, ak je počet jedničiek na vstupoch párny, inak bude na výstupe siete hodnota 1.

Riešenie: Predpokladajme, že N je mocnina dvoch. V opačnom prípade doplníme fiktívne vstupy majúce stále hodnotu 0 — tým výsledok neovplyvníme. Definujme hradlo XOR s nasledujúcou prechodovou funkciou:

		Y	
		0	**1**
X	**0**	0	1
	1	1	0

Toto hradlo rieši zadanú úlohu pre 2 vstupy. Teraz predpokladajme, že úlohu už vieme vyriešiť pre 2^k vstupov a chceme ju vyriešiť pre počet dvojnásobný, teda pre 2^{k+1} vstupov. Vstupy ľahko rozdelíme do dvoch rovnako veľkých častí (je jedno, akým spôsobom — pre názornosť napríklad na prvých 2^k a zvyšok). Teraz označme A výsledok riešenia úlohy pre prvú časť a B pre druhú. Pokiaľ bol v oboch polovičiach párny počet jednotkových vstupov ($A = B = 0$) alebo v oboch nepárny ($A = B = 1$), má výsledok byť 0, inak 1. To je však presne ten výsledok, aký dáva prechodová funkcia hradla XOR pre vstupy A, B. Pre 8 vstupov teda bude sieť vyzerať takto:



Týmto spôsobom skonštruovaná kombinačná sieť má približne $\log_2(N)$ hladín, teda časová zložitosť výpočtu je $O(\log N)$.

Súťažné úlohy

a) Navrhnite kombinačnú sieť s abecedou $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \emptyset\}$, ktorá má N vstupov a dva výstupy a ktorá nájde minimálnu (výstup A) a maximálnu (výstup B) z hodnôt na vstupoch.

Príklad: Ak $N = 4$ a na jednotlivých vstupoch siete sú zadané hodnoty 6, 3, 7, 3, musí mať výstup A hodnotu 3 a výstup B hodnotu 7.

b) Navrhnite kombinačnú sieť s abecedou $\{0, 1, \emptyset\}$, s $2^k - 1$ vstupmi očíslovanými prirodzenými číslami 0 až $2^k - 2$ a s k výstupmi. Výstupy siete budú po ukončení výpočtu obsahovať najmenšie z čísel vstupov, na ktorých je hodnota 1, zapísané v dvojkovej sústave. Pokiaľ budú na všetkých vstupoch siete nuly, všetky výstupy dostanú hodnotu 1 (táto kombinácia ako jediná nezodpovedá žiadnemu číslu vstupu).

Príklad: Pre $k = 3$ bude mať kombinačná sieť 7 vstupov a 3 výstupy. Vstupy sú označené číslami 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Pokiaľ na jednotlivé vstupy zadáme hodnoty (po rade podľa čísel vstupov) 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, musia výstupy siete nadobudnúť hodnoty po rade 0, 1, 1. Hodnota 1 je totiž na vstupoch číslo 3, 5 a 6, najmenšie z týchto čísel je 3 a zápis čísla 3 v dvojkovej sústave je 011. Na každom z výstupov sa objaví jedna cifra tohoto dvojkového zápisu (zachovávame poradie cifier).

P – II – 1

Na večierku sa zišlo niekoľko hostí. Vieme, ktorí z nich sa vzájomne poznajú a ktorí nie. Vzťah „poznať sa“ uvažujeme zásadne ako symetrický, t.j. pre ľubovoľnú dvojicu ľudí platí, že buď sa navzájom poznajú, alebo ani jeden z dvojice nepozná toho druhého. Hostia sa rozhodli vytvoriť také tanečné páry, aby spolu tancovali vždy muž so ženou, ktorí sa spolu poznajú. Navrhnite algoritmus, ktorý určí, koľko najviac párov môže tancovať súčasne.

Vstupom programu je počet mužov M, $M \leq 100$, počet žien Z, $Z \leq 100$ a zoznam tých dvojíc hostí, ktorí sa spolu poznajú. Pre jednoduchšie zadávanie vstupu si mužov označíme kladnými celými číslami $1, 2, \ldots, M$ a ženy zápornými celými číslami $-1, -2, \ldots, -Z$, takže na vstupe bude zoznam dvojíc celých čísel. Výsledkom bude jediné číslo určujúce maximálny počet párov, ktoré môžu tancovať súčasne.

Príklad

Pre vstup $M = 2$, $Z = 2$ a dvojice známych $(1, -1)$, $(1, 2)$, $(2, -1)$, $(-1, -2)$ bude výsledkom číslo 1, lebo tancovať môže vždy iba jediný pár — buď $(1, -1)$ alebo $(2, -1)$.

P – II – 2

Budeme sa zaoberať konečnými postupnosťami celých čísel. *Podpostupnosť* dĺžky K *vybraná* zo zadanej postupnosti je ľubovoľná usporiadaná K-tica čísel taká, že všetky jej čísla sa nachádzajú v pôvodnej postupnosti, a navyše poradie čísel v K-tici je rovnaké ako poradie týchto čísel v pôvodnej postupnosti.

O postupnosti čísel $a_1, a_2, \ldots, a_N$ hovoríme, že má *nanajvýš jedno klesanie*, ak buď platí $a_i \leq a_{i+1}$ pre $i = 1, 2, \ldots N - 1$, alebo ak existuje jediný index j $(1 \leq j < N)$, pre ktorý platí, $a_j > a_{j+1}$.

Napíšte program, ktorý určí dĺžku najdlhšej postupnosti vybranej zo zadanej postupnosti celých čísel, ktorá má nanajvýš jedno klesanie. Pri návrhu programu sa zamerajte na dosiahnutie čo najväčšej rýchlosti výpočtu.

Príklad

Pre zadanú vstupnú postupnosť `5 9 7 3 7 8 2 4 1` bude výsledkom číslo 6, lebo najdlhšia vybraná podpostupnosť s nanajvýš jedným klesaním je tvorená šiestimi prvkami: `5 7 7 8 2 4`.

P – II – 3

Na počítači máme nainštalovaný operačný systém MO-P-Windows pracujúci v grafickom rozlíšení $S \times R$ bodov ($S \leq 300$, $R \leq 200$). Momentálne máme spustených niekoľko aplikácií a na obrazovke je zobrazených N ich okien. Každé okno je obdĺžnikové (príp. štvorcové), poznáme presné umiestnenie a veľkosť jednotlivých okien. Okná sa môžu na obrazovke čiastočne alebo úplne prekrývať.

Chceme spustiť ďalšiu aplikáciu, ktorá potrebuje zobraziť jedno nové okno. Požadujeme, aby nové okno na obrazovke nezakrylo ani časť žiadneho z okien, ktoré sú tam už zobrazené. Napíšte program, ktorý určí, aké najväčšie okno ide na obrazovku umiestniť a kam. Veľkosťou okna chápeme jeho plochu.

Na vstupe je zadaný najprv počet už zobrazených okien N a rozlíšenie dané číslami R a S. Ďalej je pre každé okno špecifikovaná jeho veľkosť a umiestenie. Pre každé z okien sú zadané štyri celé čísla x_1, y_1, x_2, y_2 predstavujúce súradnice bodu na obrazovke $[x_1, y_1]$, ktorý tvorí ľavý horný roh okna, a bodu $[x_2, y_2]$, v ktorom leží pravý dolný roh okna. Súradnice bodov na obrazovke sa zadávajú tak, že bod v ľavom hornom rohu celej obrazovky má súradnice $[0, 0]$ a bod v pravom dolnom rohu má súradnice $[S - 1, R - 1]$. Prvá súradnica nejakého bodu na obrazovke znamená vodorovnú vzdialenosť tohoto bodu od ľavého okraja obrazovky, druhá súradnica určuje zvislú vzdialenosť bodu od horného okraja obrazovky.

Výsledkom výpočtu programu je štvorica čísel, ktorá predstavuje súradnice ľavého horného a pravého dolného rohu prípustného umiestnenia pre nové okno maximálnej veľkosti. Ak existuje viacero takýchto umiestnení, stačí, ak nájdete ľubovoľné z nich. Ak už nie je možné na obrazovku umiestniť žiadne ďalšie okno, program vypíše štyri nuly.

Požiadavka, aby sa nové okno neprekrývalo so žiadnym z ostatných okien znamená, že žiaden vnútorný ani hraničný bod nového okna nesmie ležať v inom okne ani na jeho hranici.

Príklad

Pre počet zobrazených okien $N = 2$, rozlíšenie $S = 300$ a $R = 200$ a súradnice okien $(3, 3, 250, 100)$ a $(200, 80, 280, 150)$ má najväčšia voľná oblasť pre nové okno súradnice $(0, 101, 199, 199)$.

P – II – 4

Študijný text "Kombinačné siete" k príkladu P-II-4 možno nájsť v zadaní príkladu P-I-4 na strane **94**.

Súťažná úloha

Navrhnite kombinačnú sieť fungujúcu ako binárna sčítačka. Sieť pracuje s abecedou $\{0, 1, \emptyset\}$, má $2N$ vstupov ($A_0, \ldots, A_{N-1}$ a $B_0, \ldots, B_{N-1}$) a $N+1$ výstupov $Q_0, \ldots, Q_N$. Skupiny vstupov $A_0, \ldots, A_{N-1}$ a $B_0, \ldots, B_{N-1}$ reprezentujú dve N-bitové čísla zapísané v dvojkovej sústave (t.j. $A = \sum_{i=0}^{N-1} 2^i A_i$, $B = \sum_{i=0}^{N-1} 2^i B_i$). Po skončení výpočtu siete výstupy siete reprezentujú dvojkový zápis čísla, ktoré je súčtom čísel na vstupoch ($Q = A + B = \sum_{i=0}^{N} 2^i Q_i$).

Hodnotí sa nielen správnosť, ale aj rýchlosť výpočtu navrhnutej siete, snažte sa teda dosiahnuť čo najmenší počet hladín.

P – III – 1

Daná je štvorcová matica A veľkosti $N \times N$, ktorej prvkami sú čísla 0 a 1. *Jednotková podmatica* matice A je ľubovoľný súvislý štvorcový výrez matice A taký, že na jeho hlavnej diagonále sú samé jednotky a všetky ostatné prvky výrezu majú hodnotu nula. *Hlavná diagonála* je uhlopriečka vedúca z ľavého horného do pravého dolného rohu podmatice.

Napíšte program, ktorý pre danú maticu A určí veľkosť najväčšej jednotkovej podmatice. Na vstupe je veľkosť matice N a jednotlivé prvky matice — N riadkov po N čísel. Výstupom programu je jediné číslo — veľkosť strany najväčšej jednotkovej podmatice matice A.

Príklad

$N = 5$

Matica A:

1	1	0	0	0
1	0	1	0	1
0	0	0	1	0
1	0	0	0	1
0	1	0	1	0

Pre uvedenú maticu je výsledkom číslo 3, lebo maximálna jednotková podmatica má veľkosť 3×3 (nachádza sa v riadkoch 1 až 3 a stĺpcoch 2 až 4).

P – III – 2

Pri prenose dát (t.j. postupností bitov) medzi počítačmi môže čas od času dôjsť ku chybe — namiesto niektorého vyslaného bitu je na konci linky prijatý iný bit. Predpokladáme však, že nedochádza k tomu, že by sa nejaký bit pri prenose celkom stratil, alebo že by naopak nejaký bit pribudol.

Pre prenos dát po nespoľahlivých linkách sa používajú rôzne *samoopravné kódy.* K prenášaným bitom $b_1, \ldots, b_n$ sa pridajú naviac kontrolné bity $c_1, \ldots, c_m$ tak, aby podľa nich bolo možné na druhej strane linky zistiť, či sa správa preniesla v poriadku.

Najjednoduchším možným samoopravným kódom je *paritný kód* – pridá sa jediný bit c_1 tak, aby bol celkový počet jedničiek v celej správe párny. Ak je po prenesení správy po komunikačnej linke počet jedničiek nepárny, je zrejmé, že muselo dôjsť ku chybe a správa sa vyhlási za neplatnú. Ak má správa párny počet jedničiek, považujeme správu za správne prenesenú a odstránime z nej kontrolný bit. V prípade, že nedôjde pri prenose ku chybe, náš postup správne prenesie bity $b_1, \ldots b_n$. Ak pri prenose dôjde k chybe v jednom bite (buď v jednom z bitov $b_1, \ldots, b_n$ alebo v samotnom bite c_1), tak počet jednotiek bude nepárny, a teda naozaj zistíme, že správa nie je korektne prenesená.

Paritný kód však neumožňuje presne zistiť, ktorý bit je chybný. Ak by sme to vedeli zistiť, mohli by sme príslušný bit opraviť (sú totiž iba dve hodnoty, ktoré môže bit nadobudnúť). Takisto kód nevie odhaliť chybnú správu v prípade, že počas prenosu nastane chyba v dvoch bitoch.

Súťažné úlohy

a) Navrhnite samoopravný kód, ktorý k n-bitovej správe pridá niekoľko kontrolných bitov tak, aby prípadnú chybu v jednom bite správy bolo možné nielen zistiť, ale aj opraviť.

b) Navrhnite samoopravný kód, ktorý k n-bitovej správe pridá niekoľko kontrolných bitov tak, aby odhalil poškodenie správy za predpokladu, že pri jej prenose došlo k chybe v nanajvýš dvoch bitoch.

V obidvoch prípadoch sa snažte o čo najmenšie predĺženie správy (t.j. minimalizujte počet pridaných kontrolných bitov m) a dokážte, že navrhnutý kód má skutočne požadované vlastnosti.

P – III – 3

Študijný text "kombinačné siete" k príkladu P-III-3 možno nájsť v zadaní príkladu P-I-4 na strane **94**.

Súťažná úloha

Navrhnite kombinačnú sieť s abecedou $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \emptyset\}$, s n vstupmi $A_1, \ldots, A_n$ a s n výstupmi $B_1, \ldots, B_n$, ktorá bude pracovať ako triediaca sieť — ak umiestnime na vstupy nejakú postupnosť čísel, po skončení výpočtu sa objaví na výstupoch tá istá postupnosť usporiadaná v neklesajúcom poradí.

Hodnotí sa nielen správnosť, ale aj rýchlosť výpočtu navrhnutej siete — snažte sa teda dosiahnuť čo najmenší počet hladín.

P – III – 4

Program: `TUNELY.PAS/TUNELY.CPP`
Vstup: `TUNELY.IN`
Výstup: `TUNELY.OUT`

V istej hornatej krajine majú N miest označených číslami $1, \ldots, N$. Mestá sú pospájané cestnou sieťou. Vzhľadom na hornatosť krajiny, cesty často prechádzajú pomerne nízkymi tunelmi. Každá cesta spája dvojicu miest a je známa maximálna povolená výška vozidla, aké po nej môže prejsť. Niektoré dvojice miest nie sú priamo prepojené žiadnou cestou, niektoré dvojice môžu byť naopak spojené viacerými cestami s rôznymi obmedzeniami maximálnej povolenej výšky. Všetky cesty sú obojsmerné.

Napíšte program, ktorý určí maximálnu možnú výšku vozidla, aké môže po existujúcich cestách prejsť z mesta X do mesta Y. Pre takto vysoké vozidlo ďalej určite trasu, po ktorej má z X do Y prejsť. Pokiaľ existuje viac možných trás, vypíšte tú, ktorá prechádza najmenším počtom miest (ak je aj takýchto trás viac, vypíšte ľubovoľnú z nich).

Vstupný súbor `TUNELY.IN` obsahuje na prvom riadku tri celé čísla N, X, Y oddelené medzerami. N určuje počet miest ($N \leq 100$), X a Y sú čísla koncových miest požadovanej cesty. Ďalšie riadky súboru obsahujú informácie o jednotlivých cestách. Každý riadok je tvorený tromi číslami popisujúcimi jednu cestu: prvé dve obsahujú čísla miest, ktoré táto cesta spája, tretie obsahuje maximálnu povolenú výšku vozidla v milimetroch (celé číslo v rozmedzí od 1 po 10 000). Ak je tretia hodnota na riadku 0, znamená to, že výška vozidiel na tejto ceste nie je obmedzená. Vstupný súbor je ukončený riadkom obsahujúcim tri nuly.

Na prvom riadku výstupného súboru `TUNELY.OUT` bude zapísané jediné číslo — nájdená maximálna výška vozidla, prípadne 0, ak existuje trasa z X do Y bez obmedzenia výšky vozidla. Na druhom riadku je uvedená stanovená trasa vozidla v tvare postupnosti čísel miest začínajúcej číslom X a končiacej číslom Y. Jednotlivé mestá sú oddelené medzerami. Ak neexistuje cesta z mesta X do mesta Y, výstupný súbor bude obsahovať jediný riadok s číslom -1.

Príklad

TUNELY.IN	TUNELY.OUT
6 5 3 1 2 0 1 4 0 1 5 2000 2 4 5000 2 5 3300 2 6 0 3 4 2400 3 6 2200 4 6 6000 0 0 0	2400 5 2 4 3

P – III – 5

Program: `ZLODEJ.PAS/ZLODEJ.CPP`
Vstup: `ZLODEJ.IN`
Výstup: `ZLODEJ.OUT`

Zlodej sa pri svojej nočnej výprave vlámal do bytu a našiel tam niekoľko predmetov, ktoré by si rád odniesol. Môže si z nich ale vybrať iba toľko, koľko unesie. Pritom sa samozrejme snaží, aby mal jeho úlovok najväčšiu cenu. Napíšte program, ktorý zlodejovi pomôže rozhodnúť, ktoré predmety si má odniesť.

Je daný počet nájdených predmetov N, pričom poznáme cenu a hmotnosť každého z nich. Ďalej je daná maximálna hmotnosť predmetov M, akú zlodej unesie. Zistite, ktoré predmety si má zlodej vybrať, aby ich súhrnná hmotnosť neprevýšila M a aby súčet ich cien bol najväčší možný. Ak takýto súčet cien možno dosiahnuť pomocou viacerých výberov, zvoľte ten, ktorý má najnižšiu celkovú hmotnosť vybraných predmetov (ak aj takýchto výberov je viac, zvoľte ľubovoľný).

Vo vstupnom súbore `ZLODEJ.IN` sú na prvom riadku uvedené čísla N a M ($1 \leq N \leq 250$, $1 \leq M \leq 5\,000$), pričom N je počet nájdených predmetov a M je maximálna celková hmotnosť vybraných predmetov v gramoch. Na každom z ďalších N riadkov je popísaný jeden predmet. Riadok obsahuje vždy dve kladné celé čísla — hmotnosť predmetu (najviac 5000) a cenu v korunách (najviac 50 000).

Do výstupného súboru `ZLODEJ.OUT` program zapíše dva riadky. Prvý z nich bude obsahovať dve celé čísla oddelené medzerou, ktoré určujú súhrnnú hmotnosť a celkovú cenu všetkých vybraných predmetov. Na druhom riadku sú uvedené poradové čísla všetkých vybraných predmetov oddelené medzerami (predmety sú očíslované od 1 po N v takom poradí, v akom sú uvedené na vstupe). Do výstupného súboru môže vypisovať čísla vybraných predmetov v ľubovoľnom poradí.

Príklad

```
ZLODEJ.IN
8 3500
1000 20000
800 15000
3000 30000
1500 40000
1000 10000
2000 15000
5000 50000
1400 30000
```

```
ZLODEJ.OUT
3300 75000
1 2 4
```

Riešenia súťažných úloh

Kategória P

P – I – 1

Ide o klasickú úlohu teórie grafov. Hostia predstavujú vrcholy grafu, hrany zodpovedajú vzťahu „nepoznať sa“ medzi hosťami. O takomto grafe zisťujeme, či je bipartitný, tzn. či možno jeho vrcholy rozdeliť do dvoch skupín tak, aby v rámci ani jednej skupiny neviedla žiadna hrana. Každé takéto rozdelenie na dve skupiny určuje rozsadenie hostí do dvoch miestností.

Pokiaľ graf bipartitný nie je, úloha nemá riešenie. Ak graf je bipartitný, potom počet prípustných rozdelení vrcholov je 2^k, kde k je počet komponentov súvislosti grafu. V každom komponente súvislosti máme totiž jednoznačne dané, ako rozdeliť vrcholy v tomto komponente na dve skupiny, môžeme si však zvoliť, ktorú skupinu posadíme do ktorej miestnosti (2 možnosti). Pritom umiestnenie skupín daného komponentu do miestností môžeme urobiť nezávisle od rozsadenia ostatných komponentov súvislosti, takže celkový počet možností je 2^k.

Algoritmus riešenia tejto úlohy je založený na vhodnom prehľadávaní grafu (možno prehľadávanie do šírky alebo do hĺbky). Počas prehľadávania robíme dve činnosti: počítame počet komponentov k a kontrolujeme, či je graf bipartitný. Ak je graf bipartitný, odpoveď bude 2^k, ak nie je, úloha nemá riešenie. Kontrolu bipartitnosti možno robiť tak, že sa pokúšame zostrojiť jedno možné rozsadenie hostí. Pri prehľadávaní si pre každý už objavený vrchol pamätáme, v ktorej miestnosti je príslušný hosť usadený. Ak začíname prehľadávať nový komponent, umiestnime prvý vrchol do ľubovoľnej miestnosti. Pre každý objavený vrchol v je potrebné skontrolovať zoznam vrcholov, s ktorými je v spojený hranou. Pre každý vrchol zo zoznamu overíme, či je v opačnej miestnosti ako v. V prípade, že je v tej istej miestnosti ako v, graf nie je bipartitný. Ak niektorý z vrcholov v zozname ešte vôbec nemá priradenú miestnosť, priradíme mu opačnú miestnosť, ako vrcholu v.

Časová aj priestorová zložitosť uvedeného algoritmu je $O(n+m)$, kde n je počet hostí a m je počet dvojíc, ktoré sa navzájom nepoznajú.

P – I – 2

Použijeme metódu dynamického programovania. Označme hmotnosť I-teho výrobku na vstupe m_I. Označme $Z[I,J]$ najlepšie možné zaplnenie auta nosnosti J ($0 \le J \le C$) pomocou prvých I výrobkov. V $Z[N,C]$ je teda maximálna hmotnosť, ktorú je možné naložiť do auta s nosnosťou C. Ak je táto hodnota C, tak je možné auto presne zaplniť, v opačnom prípade to nie je možné.

Ukážeme si teraz, ako vypočítať hodnoty $Z[I,J]$. Zjavne platí, že $Z[0,J] = 0$ pre všetky J, lebo pomocou 0 výrobkov môžeme dosiahnuť iba nulovú hmotnosť. Ak poznáme hodnoty $Z[I-1,J]$ pre všetky J, môžeme počítať hodnoty $Z[I,J]$. Pokiaľ $m_I > J$, výrobok I do auta nosnosti J nevojde a najlepšie zaplnenie takéhoto auta prvými I výrobkami bude rovnaké, ako zaplnenie prvými $I-1$ výrobkami. Ak $m_i \leq J$, I-ty výrobok buď nepoužijeme alebo použijeme. Z oboch možností si vyberieme tú, ktorá vedie k väčšej hmotnosti nákladu. Ak I-ty výrobok nenaložíme, bude zaplnenie auta veľkosti J rovnaké ako doteraz. Ak naopak I-ty výrobok naložíme, zostane nám v aute voľný priestor veľkosti $J - m_I$. Tento voľný priestor potrebujeme zaplniť čo najlepšie prvými $I-1$ výrobkami, čo je $Z[I, J-m_I]$. Dostávame teda vzťah pre $I > 0$:

$$Z[I,J] = \begin{cases} Z[I-1,J] & \text{ak } m_I > J \\ \max\{Z[I-1,J], Z[I-1,J-m_I] + m_I\} & \text{ak } m_I \leq J \end{cases}$$

Hodnoty $Z[I,J]$ teda možno počítať dvoma vnorenými cyklami. Vonkajší cyklus postupne prechádza zadanými N výrobkami, pre každý z nich sa vo vnútornom cykle prepočítava údaj o maximálnom možnom naložení áut o nosnostiach od 0 po C. Navyše na výpočet hodnoty $Z[N,C]$ nepotrebujeme dvojrozmerné pole, pretože pri výpočte hodnoty $Z[I,J]$ potrebujeme iba hodnoty z riadku $Z[I-1]$, takže nám stačia dva riadky – v jednom máme odzálohované hodnoty pre $I-1$, do druhého počítame hodnoty pre I (celý výpočet je dokonca možné robiť iba v jednom poli s C prvkami). Časová zložitosť algoritmu je teda $O(NC)$, pamäťová $O(C+N)$.

P – I – 3

Túto úlohu je možné riešiť dvoma spôsobmi, pričom prvý má časovú zložitosť $O(NRS)$, pamäťovú $O(RS)$, druhý má časovú zložitosť $O(N^2)$, pamäťovú $O(N)$ (R je počet riadkov, S je počet stĺpcov a N je počet okien na obrazovke).

Prvé riešenie využíva pole veľkosti $R \times S$, v ktorom bude každý prvok predstavovať jeden bod obrazovky a bude obsahovať 1, ak je tento bod voľný, resp. 0, ak je obsadený oknom. V prvej fáze načítame údaje o oknách a vyznačíme ich plochu do nášho poľa ($O(NRS)$ operácií). Ďalej budeme hľadať v tomto poli hľadať obdĺžnikové miesto veľkosti $A \times B$ tvorené tvorené samými 1.

V druhej fáze každý jednotkový prvok v poli nahradíme počtom jedničiek, ktoré ležia v súvislej postupnosti v stĺpci bezprostredne pod ním (nulové prvky sa nezmenia). Táto druhá fáza má časovú zložitosť $O(RS)$. Prevádza sa totiž samostatne v každom z S stĺpcov a vystačíme vždy s jedným prechodom stĺpcom zdola nahor, v ktorom každú jedničku zvýšime o číslo uložené pod ňou.

V tretej fáze výpočtu vyhľadáme polohu nového okna. Poloha nového okna môže byť nájdená ako súvislý úsek hodnôt veľkosti aspoň B v niektorom riadku. Takýto úsek je možné nájsť v čase $O(RS)$ jedným prechodom poľa.

Druhý postup uloží údaje o oknách do poľa veľkosti $O(N)$, pričom okná utriedi vzostupne podľa súradnice ľavého okraja okna. Stačí skúmať také umiestnenia nových okien, pri ktorých sa okno dotýka horným okrajom horného okraja obrazovky alebo dolného okraja nejakého už existujúceho okna (ak by sa nové okno nedotýkalo, možno ho posunúť vyššie). Dostaneme takto $N+1$ y-ových pozícií, na ktoré možno umiestniť horný roh okna. Pre každú z týchto pozícií zvolíme pás šírky B nadol od tejto pozície a hľadáme, či je v ňom miesto šírky A, do ktorého nezasahuje žiadne okno. Z usporiadaného zoznamu všetkých okien vyberieme tie, ktoré do uvažovaného pásu zasahujú. Vďaka utriedeniu okien môžeme zároveň jednoducho počítať, aké široké medzery zostanú v páse medzi oknami voľné a či je niektorá veľká aspoň A bodov. K tomu si stačí v pomocnej premennej priebežne evidovať, ako ďaleko doprava je pás už obsadený. Takéto ošetrenie jedného pásu prevedieme v čase $O(N)$.

P – I – 4

Riešenie časti a)

Úlohu je možné riešiť metódou rozdeľuj a panuj. Popíšeme postup na získanie maxima (minimum sa hľadá analogicky). Pre jeden vstup je výsledkom priamo hodnota vstupu. Pre dva vstupy budeme úlohu riešiť použitím hradla $MAX(a,b)$, ktorého prechodovou funkciou bude maximum z hodnôt vstupov a a b. Ak vieme problém riešiť pre menej ako k vstupov a chceme ho riešiť pre k vstupov, rozdelíme vstupy ľubovoľným spôsobom do dvoch približne rovnako veľkých skupín (tak, aby sa počty vstupov v skupinách líšil najviac o 1). Pre každú skupinu nájdeme maximum a potom (pomocou hradla MAX) určíme maximum z týchto čiastočných maxím. Týmto spôsobom skonštruovaná sieť má približne $\log_2(N)$ hladín, časová zložitosť výpočtu je preto $O(\log N)$, kde N je počet vstupov obvodu.

Riešenie časti b)

Najprv si zavedieme hradlá OR, AND a $ANDN$ tak, aby hradlo OR dávalo pre vstupy x a y hodnotu zodpovedajúcu logickému výrazu „x alebo y“, kde jednotka znamená pravdu a nula nepravdu. Podobne hradlo AND zodpovedá výrazu „x a súčasne y“ a hradlo $ANDN$ zodpovedá výrazu „x a súčasne nie y“.

Z týchto hradiel potom zostrojíme selektor — jednoduchú sieť s troma vstupmi S, A_0 a A_1 a s jedným výstupom Q, ktorá na Q privedie A_S (teda A_0, ak $S=0$ a A_1, ak $S=1$). Budeme značiť $Q = SEL(A_0, A_1, S)$.

$$\begin{aligned} B_0 &= ANDN(A_0, S) \\ B_1 &= AND(A_1, S) \\ Q &= OR(B_0, B_1) \end{aligned}$$

Riešme teraz metódou rozdeľuj a panuj nasledujúcu pozmenenú úlohu: sieť má $n = 2^p$ vstupov $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ a $p+1$ výstupov, kde prvý výstup S informuje o tom, či niektorý vstup má hodnotu jedna. Ak áno, výstup S má hodnotu jedna a ostatné výstupy $Q_0, Q_1, \ldots, Q_{p-1}$ obsahujú najmenšie z čísel jedničkových vstupov (Q_0 obsahuje najnižší bit a Q_{p-1} najvyšší). Ak sú všetky vstupy 0, $S=0$ a ostatné výstupy môžu mať ľubovoľné hodnoty.

Pre dva vstupy túto sieť možno zostrojiť jednoducho (S vypočítame zo vstupov pomocou hradla OR a Q_0 vypočítame ako $ANDN(X_1, X_0)$). Ak máme riešenie pre $n = 2^p$ vstupov, pre $2n$ vstupov riešenie zostrojíme takto: rozdelíme vstupy do dvoch skupín: X_0 až X_{n-1} a X_n až X_{2n-1}, pričom pre každú z týchto skupín úlohu vyriešime. Výstupy čiastočných riešení označíme M, A_0 až A_{p-1} pre prvú skupinu a N, B_0 až B_{p-1} pre druhú skupinu.

Ak $M = 1$, prvá jednička je zaručene v prvej skupine, teda Q_p bude 0, ostatné Q_i budú rovné A_i a S bude 1. Ak $M = 0$ a $N = 1$, je prvá jednička v druhej skupine, takže Q_p bude 1, ostatné Q_i budú rovné B_i a S bude 1. Ak je $M = 0$ a $N = 0$, žiadny zo vstupov jedničku neobsahuje, preto hodnoty Q_i môžu byť ľubovoľné a S bude 0. Tieto požiadavky možno splniť takto:

$$\begin{aligned} S &= OR(M, N) \\ Q_p &= ANDN(N, M) \\ Q_i &= SEL(A_i, B_i, Q_p), \text{ pre } 0 \le i < p \end{aligned}$$

Zo siete riešiacej upravenú úlohu vytvoríme sieť riešiacu naše zadanie jednoducho tak, že zadané vstupy doplníme (na konci) jedným vstupom o fixnej hodnote 1 na mocninu dvoch a ako výstupy použijeme čísla $Q_0, \dots Q_{p-1}$ (uvedomte si, že takáto sieť naozaj správne rieši úlohu aj v prípade, že všetky pôvodné vstupy budú 0). Pre počet vstupov $n = 2^p - 1$ má vytvorená kombinačná sieť hĺbku $3p - 2$, teda jej výpočet má časovú zložitosť $O(\log n)$.

P – II – 1

Uvažujme bipartitný graf, kde v jednej skupine vrcholov každý vrchol zodpovedá jednému mužovi, v druhej skupine sú vrcholy zodpovedajúce ženám. Hrany v grafe nech vedú od vrcholu zodpovedajúceho nejakej žene k vrcholu zodpovedajúcemu nejakému mužovi, ak sa títo navzájom poznajú. Dvojice žien alebo mužov, ktorí sa navzájom poznajú, môžeme ignorovať, lebo sú pre riešenie úlohy nepodstatné. *Maximálne párovanie bipartitného grafu* je najväčšia množina hrán grafu taká, že žiadne dve z nich nemajú spoločný vrchol. Veľkosť maximálneho párovania v našom grafe teda určuje najväčší počet párov, ktoré naraz môžu tancovať.

Algoritmus riešenia začína s prázdnym párovaním. V každom kroku algoritmu potom nájde párovanie, ktoré má o jednu hranu viac, až kým nedosiahne maximálne párovanie. Pri zväčšovaní párovania využíva tzv. zlepšujúce cesty.

Zlepšujúca cesta je cesta, ktorej začiatočný ani koncový vrchol nie je zaradený do párovania, a na ktorej sa striedajú hrany, ktoré sú v párovaní a tie, ktoré nie sú. Z uvedených podmienok vyplýva, že počet hrán v ceste (n) je nepárny a teda začiatočný a koncový vrchol sú opačného pohlavia. Z hrán na tejto ceste je $\frac{n-1}{2}$ je v súčasnom párovaní a $\frac{n+1}{2}$ nie je v súčasnom párovaní. Ak z párovania vynecháme všetky hrany, ktoré sa nachádzali na zlepšujúcej ceste a naopak pridáme do neho tie hrany zlepšujúcej cesty, ktoré v párovaní neboli, dostávame opäť párovanie, ktoré však má o jednu hranu viac.

Ak žiadna zlepšujúca cesta neexistuje, nájdené párovanie je maximálne. Toto tvrdenie dokážeme sporom: Nech B je párovanie, pre ktoré neexistuje zlepšujúca cesta a nech A je párovanie s väčším počtom hrán ako B. Ofarbime hrany grafu tak, že hrany z množiny $A \setminus B$ budú červené, hrany z množiny $B \setminus A$ budú modré a ostatné hrany budú biele. Z každého vrcholu ide najviac jedna červená a najviac jedna modrá hrana. Preto ak vymažeme z grafu všetky biele hrany, dostaneme graf, ktorého každý komponent súvislosti je buď cesta alebo kružnica, na ktorých sa striedajú červené a modré hrany. Keďže $|A| > |B|$, červených hrán musí byť viac než modrých. V každej kružnici je rovnaký počet hrán oboch farieb. Preto musí existovať cesta, na ktorej bude viac červených hrán ako modrých, t.j. musí to byť cesta, ktorá začína aj končí červenou hranou. Takáto cesta je však pre párovanie B zlepšujúcou cestou, čo je spor s pôvodným predpokladom.

Zostáva popísať, ako hľadať v grafe zlepšujúce cesty. Zavedieme si preto pojem *alternujúcej cesty.* Je to cesta začínajúca vo vrchole zodpovedajúcom mužovi, ktorý nie je zaradený do párovania a na ktorej sa striedajú hrany, ktoré sú/nie sú zaradené do párovania. Množinu vrcholov, do ktorých vedie alternujúca cesta, nájdeme jednoducho prehľadávaním grafu. Začneme z vrcholov prislúchajúcich mužom, ktorí ešte nemajú pár. Ak sme vo vrchole zodpovedajúcom žene, pokračujeme po hrane párovania (ak taká existuje), z vrcholu zodpovedajúceho mužovi pokračujeme naopak po hranách, ktoré do párovania nepatria. V grafe existuje zlepšujúca cesta práve vtedy, keď takýmto prehľadávaním nájdeme vrchol (zodpovedajúci žene), z ktorého nevedie žiadna hrana z párovania.

Časová zložitosť algoritmu je $O(N^3)$ (kde $N = M + Z$), lebo párovanie môže mať najviac $O(N)$ hrán. Pri pridaní každej hrany potrebujeme spraviť prehľadanie grafu (v čase $O(N^2)$).

P – II – 2

Najdlhšia vybraná podpostupnosť s najviac jedným klesaním je vždy buď najdlhšia neklesajúca vybraná podpostupnosť (NNVP), alebo má jedno klesanie a v tom prípade existuje index i taký, že výsledná podpostupnosť vznikne spojením NNVP vybranej z $A_1, \ldots, A_i$ a NNVP vybranej z $A_{i+1}, \ldots, A_N$. Označme teraz $B[i]$ dĺžku NNVP vybranej z A_1, $A_2, \ldots, A_i$ a $C[i]$ dĺžku NNVP vybranej z A_{N-i+1}, $A_{N-i+2}, \ldots, A_N$. Z predchádzajúcich úvah vyplýva, že hľadaná dĺžka je

$$\max_{j \in \{0,1,\ldots,N\}} (B[j] + C[N-j]).$$

Ukážme si teraz, ako vypočítať hodnoty poľa B v čase $O(N \log N)$. Označme $Kon^{(i)}[j]$ najmenší prvok, aký sa môže nachádzať na konci neklesajúcej podpostupnosti dĺžky j vybranej z $A_1, \ldots A_i$ (ak podpostupnosť danej dĺžky neexistuje, potom je hodnota $Kon^{(i)}[j]$ nedefinovaná). Ak $B[i]$ je dĺžka NNVP z $A_1, \ldots A_i$, tak hodnoty $Kon^{(i)}[1], \ldots, Kon^{(i)}[B[i]]$ sú definované a ostatné hodnoty $Kon^{(i)}$ definované nie sú. Ďalej si uvedomme, že hodnoty $Kon^{(i)}[1], \ldots, Kon^{(i)}[B[i]]$ tvoria neklesajúcu postupnosť.

Pre úsek dĺžky 1 je $B[1] = 1$ a $Kon^{(1)}[1] = A[1]$. Predpokladajme teraz, že už máme vypočítané $B[i-1]$ a hodnoty poľa $Kon^{(i-1)}$ a chceme vypočítať $B[i]$ a hodnoty poľa $Kon^{(i)}$. Prvok A_i môžeme pripojiť len na koniec takých podpostupností, ktoré končia prvkom neprevyšujúcim A_i. Nech j je dĺžka najdlhšej takej podpostupnosti vybranej z $A_1, \ldots, A_{i-1}$. Pre $k \leq j$ sme už našli neklesajúcu podpostupnosť dĺžky k, ktorej posledný prvok je najviac A_i a preto $Kon^{(i)}[k] = Kon^{(i-1)}[k]$. Naopak pre indexy $k > j + 1$ neexistuje v postupnosti $A_1, \ldots, A_i$ neklesajúca podpostupnosť dĺžky k, končiaca prvkom A_i, a preto aj v tomto prípade $Kon^{(i)}[k] = Kon^{(i-1)}[k]$. Existuje teda nanajvýš jeden index k taký, že $Kon^{(i)}[k] \neq Kon^{(i-1)}[k]$ a to $k = j + 1$. Niekedy hodnota $j + 1$ môže prevýšiť $B[i-1]$. V tomto prípade $B[i] = B[i-1] + 1$, inak $B[i] = B[i-1]$. Ak teda máme v nejakom pomocnom poli vypočítané hodnoty $Kon^{(i-1)}$, môžeme z nich dostať hodnoty $Kon^{(i)}$ zmenou jediného prvku – $Kon^{(i-1)}[j+1]$. Index j vieme nájsť binárnym vyhľadávaním ako najväčší index taký, že $Kon^{(i-1)}[j] \leq A[i]$.

Pre každé i teda vypočítame $B[i]$ a upravíme pole Kon v čase $O(\log n)$, celý výpočet poľa B bude trvať $O(n \log n)$. Hodnoty poľa C vypočítame analogicky (postupujeme od konca poľa A). Potom je už možné v lineárnom čase nájsť žiadané maximum. Zložitosť celého algoritmu je teda $O(n \log n)$.

P – II – 3

Obrazovku si môžeme reprezentovať ako maticu A s $S \times R$ prvkami zodpovedajúcimi jednotlivým bodom obrazovky. Voľný bod obrazovky označíme jednotkou, zaplnený nulou. Úlohou je nájsť čo najväčší obdĺžnik tvorený samými jednotkami. Pri načítaní údajov každé okno vyznačíme v matici nulami, táto fáza výpočtu vyžaduje $O(RSN)$ operácií. V druhej fáze výpočtu si predvypočítame hodnoty pomocných matíc U a L. Ak $A[i,j] = 0$, potom aj $U[i,j]$ a $L[i,j]$ budú nulové. V opačnom prípade $U[i,j]$ obsahuje dĺžku súvislého úseku jednotiek od prvku $A[i,j]$ smerom nahor a $L[i,j]$ obsahuje dĺžku súvislého úseku jednotiek od $A[i,j]$ smerom nadol. Hodnoty poľa U možno vypočítať jedným prechodom po stĺpcoch matice zhora dole a hodnoty poľa L je možné vypočítať jedným prechodom zdola nahor. Táto fáza teda trvá čas $O(RS)$.

Algoritmus ďalej využíva skutočnosť, že maximálna jednotková podmatica sa musí svojim ľavým okrajom dotýkať buď ľavého okraja celej matice, alebo nejakej nuly. V opačnom prípade by totiž nebola maximálna, bolo by možné zväčšiť ju smerom doľava. Maticu A budeme prechádzať postupne po riadkoch. Pre každý nulový prvok $A[i,j]$ budeme hľadať maximálny jednotkový obdĺžnik priliehajúci k tejto nule svojím ľavým okrajom. Postupujme od prvku $A[i,j]$ smerom doprava, kým nenarazíme opäť na nulu. Táto nula sprava ohraničuje najširší obdĺžnik priliehajúci ľavou stranou k prvku $A[i,j]$. Pre každý prvok $A[i+b,j] = 1$, na ktorý cestou narazíme, určíme maximálny jednotkový obdĺžnik priliehajúci ľavou stranou k prvku $A[i,j]$ taký, že jeho pravá strana je v stĺpci $i+b$. Jeho ľavý a pravý okraj je určený hodnotami i a $i+b$, zostáva určiť jeho horný a dolný okraj. Horný okraj sa snažíme posunúť čo najvyššie — bude teda od riadku j vzdialený o minimum z hodnôt $U[i,j], U[i+1,j], \ldots, U[i+b,j]$. Naopak dolný okraj sa snažíme posunúť čo najnižšie a bude teda vzdialený od riadku i o minimum z príslušných hodnôt v poli L. Minimá potrebné na výpočet nerátame pre každé b odznovu, ale si ich priebežne vypočítavame z predchádzajúcich hodnôt. Túto časť algoritmu je teda taktiež možné vykonať v čase $O(RS)$.

Popísaný algoritmus má časovú zložitosť $O(RSN)$ a pamäťovú $O(RS)$. Existuje aj algoritmus s časovou zložitosťou $O(N^2)$ a pamäťovou $O(N)$, ktorý je výhodný, ak počet okien je pomerne malý vzhľadom na R a S.

P – II – 4

Aj tento príklad budeme riešiť metódou rozdeľuj a panuj. Vstupy rozdelíme do dvoch blokov. Vypočítať súčet nižších $n/2$ bitov nie je problém, ak však chceme počítať súčet vyšších bitov, potrebujeme vedieť prenos z nižšieho rádu. Ak budeme čakať, kým výpočet pre nižší rád skončí, čas výpočtu (počet hladín), bude vysoký.

Zrýchlenie môžeme dosiahnuť tak, že pre každý blok bitov vypočítame dve sady výstupov: jednu pre prípad, že nedôjde k prenosu z nižšieho rádu, druhý pre prípad, že dôjde k prenosu. Blok teda bude mať vstupy $A_0, \ldots, A_{n-1}$ a $B_0, \ldots, B_{n-1}$ a výstupy P (prenos), $X_0, \ldots X_{n-1}$ (výsledok) pre prípad bez prenosu a Q, $Y_0, \ldots Y_{n-1}$ pre prípad s prenosom.

Pri konštrukcii budeme okrem už zavedených hradiel *AND*, *OR*, *XOR* a siete *SEL* používať aj hradlo *NXOR*, ktoré je negáciou hradla *XOR*. Pre $n = 1$ dostaneme výstupy ako $P = AND(A_0, B_0)$, $X_0 = XOR(A_0, B_0)$, $Q = XOR(A_0, B_0)$, $Y_0 = XOR(A_0, B_0)$.

Zo sčítačiek pre dané n potom zostrojíme sčítačku pre $2n$: vstupy rozdelíme do dvoch blokov dĺžky n a každý blok potom sčítame sčítačkou pre n (výstupy prvej sčítačky označíme P^1, $X_0^1, \ldots X_{n-1}^1$, Q^1, $Y_0^1, \ldots Y_{n-1}^1$, výstupy druhej sčítačky budú označené horným indexom 2). Výstupy siete určíme podľa nasledujúcich pravidiel.

Na výpočet sady výstupov pre prípad bez prenosu použijeme súčet nižších n bitov bez prenosu (t.j. $X_0^1, \ldots X_{n-1}^1$) a podľa toho, či P^1 indikuje prenos do vyššieho rádu, použijeme pre zvyšné bity a prenos do ďalšieho bloku buď hodnoty P^2, X_i^2 alebo Q^2, X_i^2 (jednoducho vyberieme hradlami *SEL*). Pri výpočte sady výstupov pre prípad s prenosom postupujeme rovnako ako v prípade bez prenosu, iba namiesto X_i^1 použijeme Y_i^1 a ako prenos z nižšieho rádu použijeme Q^1 namiesto P^1.

Sieť je teda možné popísať takto ($0 \le i < n$):

$$\begin{aligned}
X_i &= X_i^1 \\
X_{i+n} &= SEL(X_i^2, Y_i^2, P^1) \\
P &= SEL(P^2, Q^2, P^1) \\
Y_i &= Y_i^1 \\
Y_{i+n} &= SEL(X_i^2, Y_i^2, Q^1) \\
Q &= SEL(P^2, Q^2, Q^1)
\end{aligned}$$

Ak chceme nájsť sieť pre pôvodnú úlohu, zostrojíme N-bitovú sčítačku ako je popísané vyššie, pričom za výstupy prehlásime hodnoty $X_0, \ldots X_{n-1}$ a najvyšší bit bude prenos P.

Jednobitové sčítačky majú jednu hladinu, sčítačka pre $2n$ bitov má o dve hladiny viac ako sčítačka pre n bitov (hradlo *SEL* vieme realizovať pomocou dvoch hladín). Celkovo máme teda $O(\log n)$ hladín.

P – III – 1

Prvok matice so súradnicami $[i,j]$ je pravým dolným rohom nejakej jednotkovej podmatice veľkosti $d > 0$ práve vtedy, keď sú splnené nasledujúce podmienky:

- $A[i,j] = 1$,
- na súradniciach $[i-1, j-1]$ je pravý dolný roh jednotkovej podmatice veľkosti aspoň $d-1$,
- aspoň $d-1$ políčok nad políčkom $A[i,j]$ sú v matici A nuly
- aspoň $d-1$ políčok naľavo od políčka $A[i,j]$ sú v matici A nuly

Označme ako $m[i,j]$ veľkosť najväčšej jednotkovej podmatice, ktorá má pravý dolný roh v $[i,j]$. Ak $A[i,j] = 0$, potom $m[i,j] = 0$ a definujeme $m[i,0] = m[0,i] = 0$ pre všetky $i = 0, 1, \dots, N$. Nech dĺžka súvislého súvislého úseku núl (ukončeného jednotkou alebo krajom matice) naľavo od $[i,j]$ je $b[i,j]$ a dĺžka súvislého úseku núl nad $[i,j]$ je $c[i,j]$. Potom

$$m[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{ak } A[i,j] = 0 \\ \min\{m[i-1,j-1], b[i,j], c[i,j]\} + 1 & \text{ak } A[i,j] = 1 \end{cases}$$

Hodnoty $b[i,j]$ a $c[i,j]$ nie je ťažké spočítať a uložiť do pomocných matíc pre všetky políčka jedným prechodom maticou A v čase $O(N^2)$. Potom môžeme počítať pre každý prvok hodnotu $m[i,j]$. Ak budeme postupovať napríklad po riadkoch zhora nadol, budeme mať pri výpočte $m[i,j]$ už k dispozícii hodnotu $m[i-1,j-1]$. Stačí teda na základe hodnôt $m[i-1,j-1]$, b, c a $A[i,j]$ v čase $O(1)$ určiť hodnotu $m[i,j]$. Celková zložitosť algoritmu je $O(N^2)$.

P – III – 2

Ukážeme kód, ktorý spĺňa požiadavky obidvoch častí úlohy (tento kód však nie je schopný riešiť obidve časti súčasne — nie je schopný rozhodnúť, či došlo k jednej chybe alebo k dvom chybám).

Náš kód pre $n = 2^k - 1$ pridá $k+1$ bitov, čo je $O(\log n)$. V popise kódu budeme uvažovať iba kódovanie pre n uvedeného tvaru. Ak chceme použiť kód pre n, ktoré nie je tohoto tvaru, nájdeme najbližšie väčšie n', ktoré sa dá písať v tvare $n' = 2^k - 1$. Ak chceme preniesť reťazec $b_1, \dots, b_n$, doplníme ho nulami na dĺžku n' a zakódujeme (dostaneme $b_1, \dots, b_n, 0, 0, \dots 0, c_1, \dots c_m$). Kódom nášho reťazca bude $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots c_m$. Po prenesení kódu po linke k nemu pridáme vynechané nuly a dekódujeme ho postupom určeným pre n'. Platí, že $n' \leq 3n$ a teda počet pridaných bitov nie je väčší ako $\log(3n) + 2 = \log n + \log 3 + 2$, čo je $O(\log n)$.

Majme správu $b_1 \dots b_n$, pričom $n = 2^k - 1$. Bity správy zaradíme do k blokov $A_0, \dots, A_{k-1}$, pričom bit b_i zaradíme do bloku A_j, práve vtedy, keď má i v binárnom zápise jednotku v j-tom ráde. Každý bit je takto zaradený do aspoň jedného bloku. Navyše, ak vieme o neznámom bite, do ktorých blokov je zaradený, vieme zistiť, ktorý v poradí to je, lebo poznáme jeho binárny zápis.

Pri kódovaní doplníme správu o centrálny paritný bit p (rovnako ako v ukážkovom príklade uvedenom v zadaní) a kontrolné bity c_0 až c_{k-1}, pričom c_i je paritný bit bloku A_i.

Časť a)

Po prijatí správy vypočítame podľa prijatých dátových bitov všetky kontrolné bity (p a $c_0, \ldots, c_{k-1}$). Ak vypočítané kontrolné bity súhlasia s kontrolnými bitmi, ktoré boli prijaté, vyhlásime, že správa bola prijatá bezchybne. Ak došlo ku práve jednej chybe, mohla nastať buď v dátovom bite, v centrálnom paritnom bite alebo v paritnom bite niektorého bloku. Pre každý z týchto prípadov ukážeme, že aspoň jeden vypočítaný kontrolný bit nesedí s príslušným prijatým bitom a tiež ako možno jednoducho opraviť chybu:

- *Chyba v jednom dátovom bite b_i:* nesúhlasí paritný bit p a tiež tie z blokových paritných bitov c_j, ktoré prislúchajú blokom, do ktorých bit b_i patrí. Keďže však poznáme čísla týchto blokov, vieme jednoznačne určiť aj jeho číslo i.

- *Chyba v jednom kontrolnom bite c_i:* súhlasí centrálny paritný bit p, čím tento prípad jednoducho odlíšime. Stačí opraviť ten blokový paritný bit, ktorý nesedí s vypočítanou hodnotou.

- *Chyba v centrálnom paritnom bite p:* nesúhlasí bit p, ale súhlasia všetky ostatné kontrolné bity. Opravíme bit p.

Časť b)

Ak nedošlo k žiadnej chybe, súhlasia všetky kontrolné bity s ich vypočítanými hodnotami. Ak došlo k práve jednej chybe, aspoň jeden kontrolný bit nesúhlasí (pozri vyššie). Stačí teda dokázať, že ak došlo k dvom chybám, tiež bude existovať aspoň jeden kontrolný bit, ktorý sa bude líšiť od vypočítanej hodnoty. Vo všetkých prípadoch teda zistíme, že došlo ku chybe pri prenose správy. Pri práve dvoch chybách môžu nastať nasledujúce prípady:

- *Chyba v dvoch rôznych dátových bitoch:* aspoň jeden blokový paritný bit nesúhlasí. Každý dátový bit je totiž jednoznačne určený kombináciou blokov, do ktorých patrí. Keďže sú však chybné dva rôzne dátové bity, patria do rôznych kombinácií blokov a teda existuje aspoň jeden blok do ktorých jeden chybný bit patrí a druhý nie. Blokový paritný bit pre tento blok nebude súhlasiť.

- *Chyba v dvoch rôznych blokových paritných bitoch:* nesúhlasia obidva chybné blokové paritné bity.

- *Chyba v jednom dátovom bite a jednom blokovom paritnom bite:* nesúhlasí centrálny paritný bit.

- *Chyba v jednom dátovom bite a centrálnom paritnom bite:* p súhlasí, ale aspoň jeden z blokových paritných bitov nesúhlasí (každý dátový bit je v aspoň jednom bloku).

- *Chyba v centrálnom paritnom bite a jednom z blokových bitov:* nesúhlasí centrálny paritný bit p.

P – III – 3

Pre každý symbol $s \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ označíme C_s počet vstupov A_i, na ktorých je hodnota menšia alebo rovná s. Utriedená postupnosť potom bude začínať C_0 nulami, potom až po pozíciu C_1 budú jednotky, …, až po pozíciu $C_9 = n$ budú deviatky.

Keďže $C_s \le n$, všetky C_s je možné vyjadriť v dvojkovej sústave pomocou $m = \lceil \log_2 n \rceil$ bitov. Naša sieť najprv zo vstupov vypočíta hodnoty C_s v binárnom zápise. Potom sa pre každý výstup B_i vykoná porovnanie jeho poradového čísla i a hodnôt C_s, pričom sa nájde najmenšie s, pre ktoré $C_s \ge i$. Toto s bude potom hodnotou na výstupe B_i. Pri realizácii tejto kombinačnej siete budeme využívať nasledujúce podsiete:

- $TEST_{\le}(s,x) = t$ – hradlo, ktoré vráti výsledok $t = 1$, ak $x \le s$ a $t = 0$ ak $x > s$.

- $ADD_t(X_{1\ldots t}, Y_{1\ldots t}) = Z_{1\ldots t}$ – sčítačka sčítajúca t-bitové binárne čísla X a Y s výsledkom Z (v riešeniach krajského kola konštrukcia s hĺbkou $O(\log t)$).

- $CMP_t(A_{1\ldots t}, B_{1\ldots t}) = R$ – komparátor porovnávajúci dve t-bitové binárne čísla a dávajúci výsledok
$$R = \begin{cases} 0 & \text{ak } A = B \\ 1 & \text{ak } A < B \\ 2 & \text{ak } A > B \end{cases}$$
Pre CMP_t skonštruujeme sieť hĺbky $O(\log t)$ už známym spôsobom:
  - Pre $t = 1$ môžeme použiť priamo hradlo také, že $CMP_1(0,0) = CMP_1(1,1) = 0$, $CMP_1(0,1) = 1$, $CMP_1(1,0) = 2$.
  - Pre $t = 2t'$: rozdelíme obe čísla na polovice: $A = A^H A^L$, $B = B^H B^L$, pomocou t'-bitových komparátorov vypočítame hodnoty $C^H = CMP_{t'}(A^H, B^H)$ a $C^L = CMP_{t'}(A^L, B^L)$ a ak $C^H \ne 0$, použijeme ako výsledok C^H, inak je výsledok C^L (pre túto funkciu opäť definujeme hradlo).

- $FIRST(x_0, \ldots, x_9)$ – výstupom je najmenšie s také, že $x_s \ne 1$. Sieť $FIRST$ s hĺbkou 9 môžeme skonštruovať takto:
  - $FIRST(x_9) = 9$
  - $FIRST(x_{s-1}, x_s, \ldots, x_9) = \begin{cases} FIRST(x_s, \ldots, x_9) & \text{ak } x_{s-1} = 1 \\ s-1 & \text{ak } x_{s-1} \ne 1 \end{cases}$
  Výpočet hodnoty $FIRST$ pre $s-1$ budeme realizovať hradlom, ktoré dostane vstupy $FIRST(x_s, \ldots, x_9)$ a x_{s-1}. Samotná hodnota $s-1$ nebude vstupom hradla, ale bude napevno zabudovaná v jeho prechodovej funkcii (t.j. pre každé s použijeme hradlo s trochu inou prechodovou funkciou).

Pri konštrukcii výslednej siete si vždy najprv vypočítame pomocné premenné $X_{s,i} = TEST_{\leq}(s, A_i)$, ktoré budú mať hodnotu 1 práve vtedy, keď $A_i \leq s$, inak 0. Tento výpočet je možné vykonať sieťou hĺbky 1. Každú z týchto premenných rozšírime nulami na m-bitové číslo.

Potom vypočítame hodnoty C_s, čo je súčet takýchto rozšírených čísel $X_{s,i}$ pre všetky $i = 1, \dots, n$. Pri určovaní tohto súčtu najskôr sčítame všetky dvojice $X_{s,2k} + X_{s,2k+1}$, potom dvojice týchto dvojíc atď. až kým nedostaneme iba jediný súčet — číslo C_s. Takáto sieť bude mať $\lceil \log_2 n \rceil = m$ úrovní, pričom každá úroveň sa skladá z m-bitových sčítačiek (ADD_m) hĺbky $O(\log m)$. Celková hĺbka siete určujúcej C_s je teda $O(m \cdot \log m) = O(\log n \cdot \log\log n)$.

Potom spočítame pre každú výstupnú pozíciu i a každý symbol s hodnotu $Z_{s,i} = CMP_m(C_s, i)$, ktorá bude 1 práve vtedy, keď hodnota výstupu B_i má byť väčšia ako s. Podsieť CMP_m má hĺbku $O(\log m)$. Výstup siete B_i je teraz najmenšie s také, že $Z_{s,i} \neq 1$. Na to môžeme použiť sieť $FIRST$ (t.j. $B_i = FIRST\,(Z_{0,i}, \dots, Z_{9,i})$), pričom túto záverečnú fázu možno vykonať sieťou s hĺbkou 9.

Sieť sa skladá zo štyroch častí s hĺbkami $O(1)$, $O(\log n \cdot \log\log n)$, $O(\log\log n)$ a $O(1)$ v tomto poradí, jej celková hĺbka je preto $O(\log n \cdot \log\log n)$.

P – III – 4

Najprv pomocou Dijkstrovho algoritmu zistíme výšku V najvyššieho vozidla, aké môže prejsť z mesta X do mesta Y (prípadne zistíme, že tieto mestá vôbec nie sú spojené mestami). Postupne budeme prehľadávať mestá dostupné z mesta X. Pre každé mesto u si v $H[u]$ pamätáme maximálnu nájdenú výšku výšku vozidla, aké sa do mesta môže dostať. Pre každé mesto naviac rozlišujeme, či jemu priradená hodnota H je dočasná (môže sa ešte zlepšiť), alebo či je už trvalá (určuje výslednú maximálnu výšku).

Pred začatím prehľadávania bude mať mesto X priradenú dočasnú hodnotu nekonečno (do X sa dostane sa vozidlo ľubovoľnej výšky) a všetky ostatné mestá majú dočasnú hodnotu 0 (zatiaľ do nich nepoznáme žiadne cesty). Celý výpočet potom bude prebiehať v krokoch tak dlho, kým nebude cieľovému mestu Y stanovená trvalá hodnota, prípadne kým nebude priradená trvalá hodnota všetkým dostupným vrcholom a Y medzi nimi nebude (potom nie je mesto Y z mesta X vôbec dostupné). V každom kroku výpočtu sa vykonajú nasledujúce činnosti:

- Určíme mesto u s maximálnou dočasnou hodnotou $H[u]$.
- Dočasnú hodnotu mesta u prehlásime za trvalú.
- Pre každú cestu vedúcu z mesta u do nejakého mesta v, ktorého hodnota $H[v]$ je ešte dočasná, skontrolujeme, či vďaka tejto ceste nie je možné $H[v]$ zvýšiť.

Indukciou vzhľadom na počet krokov algoritmu dokážeme, že v každom kroku algoritmu platí: ak mesto u má trvalú hodnotu $H[u]$, tak $H[u]$ je výška najvyššieho auta, aké sa do u z X dostane, ak mesto u má dočasnú hodnotu $H[u]$, tak $H[u]$ je výška najvyššieho auta, aké sa z X do u dostane, pričom nebude prechádzať cez žiadne mestá s dočasnou hodnotou (okrem u).

Ľahko sa overí, že na začiatku výpočtu tvrdenie platí. Predpokladajme teraz, že tvrdenie platilo pred vykonaním niektorého kroku výpočtu, dokážeme, že platí aj po jeho vykonaní. Medzi mestá s trvalou hodnotou pribudlo mesto u, ktorého dočasná hodnota bola predtým maximálna. Predpokladajme sporom, že do mesta u vedie trasa t, po ktorej môže prejsť auto výšky $h > H[u]$. Trasa t prechádza cez aspoň jedno mesto s dočasnou hodnotou, lebo $H[u]$ je podľa indukčného predpokladu výška najvyššieho auta, aké sa z X do u dostane cez mestá s trvalou hodnotou. Nech v je prvé mesto s dočasnou hodnotou na trase t. Úsek trasy t z X do v neprechádza cez žiadne mestá s dočasnou hodnotou a vie po ňom prejsť auto výšky h. Preto z indukčného predpokladu máme $h \leq H[v]$. Na druhej strane z algoritmu vyplýva, že $H[v] \leq H[u]$, lebo inak by sme vybrali v namiesto u. Dostali sme teda $H[u] < h \leq H[v]$ a súčasne $H[v] \leq H[u]$, čo je spor.

Druhá časť tvrdenia sa overí jednoducho – ak v je vrchol s dočasnou hodnotou, po pridaní vrcholu u medzi vrcholy s trvalou hodnotou sa môže stať, že sa zvýši výška najvyššieho auta, aké sa dostane z X do v idúc len cez vrcholy s trvalou hodnotou. Tento prípad však nastane len ak v s u susedí a je v algoritme ošetrený.

Druhá časť riešenia nájde cestu pre vozidlo (už vypočítanej) výšky V z X do Y, ktorá ide cez minimálny počet miest. Túto úlohu budeme riešiť prehľadávaním do šírky. Pri prehľadávaní budeme uvažovať iba tie cesty, po ktorých môže auto s výškou V prejsť.

Pri prehľadávaní do šírky používame pomocnú frontu, v ktorej sú v každom okamžiku uložené čísla tých miest, do ktorých sme už došli, ale z ktorých sme ešte nepokračovali v prehľadávaní ďalej. V druhom poli si musíme evidovať už navštívené mestá (aby sme sa do nich zbytočne nevracali) a v treťom poli si ku každému mestu zaznamenáme, odkiaľ sme do neho prvýkrát prišli. Na začiatku do fronty vložíme mesto X. Keď počas prehľadávania dorazíme do mesta Y, môžeme ho ukončiť.

Výslednú trasu potom získame tak, že postupujeme z vrcholu Y po predchodcoch vrcholov vypočítaných počas prehľadávania, až kým sa nedostaneme do vrcholu X. Postupnosť vrcholov, cez ktoré sme takto prešli stačí vypísať v opačnom poradí (začínajúc vrcholom X).

V Dijkstrovom algoritme sa v každom kroku priradí trvalá hodnota jednému vrcholu. Výpočet teda skončí najneskôr po N krokoch, kde N je počet miest. V každom kroku sa musí vyhľadať mesto s maximálnou dočasnou hodnotou, na čo je potrebných $O(N)$ operácií. Ďalej sa prepočítavajú dočasné hodnoty všetkých susedov vybraného vrcholu, ktorých je menej ako N. Celkovo sa teda vykoná nanajvýš $O(N^2)$ operácií. Pri prehľadávaní do šírky navštívime a zaradíme do fronty každé z N miest najviac raz a pri jeho odstránení z fronty musíme spracovať jeho susedov, ktorých je menej ako N. Celé prehľadávanie do šírky preto taktiež vyžaduje nanajvýš $O(N^2)$ operácií. Vyhľadanie výslednej cesty sa vykoná v lineárnom čase. Celkovo má naše riešenie úlohy kvadratickú časovú zložitosť.

P – III – 5

Úlohu budeme riešiť pomocou dynamického programovania. Označme si hmotnosti predmetov $v_1, v_2, \ldots, v_N$ a ich ceny $c_1, c_2, \ldots, c_N$. Najprv ukážeme, ako určiť výslednú optimálnu cenu a hmotnosť vybraných predmetov. Označme $S_{i,j}$ pre $i = 0, \ldots, N$, $j = 0, \ldots, M$ maximálnu cenu predmetov, ktoré je možné vybrať z prvých i predmetov tak, aby celková hmotnosť vybraných predmetov bola nanajvýš j. $S_{0,j} = 0$ pre všetky j od 0 po M, lebo cena nula predmetov je 0. Určíme teraz $S_{i,j}$ pre $i > 0$. Optimálny výber z prvých i predmetov s hmotnostným limitom j predmet i buď obsahuje, alebo nie. Ak ho obsahuje (v tomto prípade musí byť $j \geq v_i$), tak po jeho odstránení dostávame optimálny výber z prvých $i-1$ predmetov pre hmotnostný limit $j - v_i$. Ak naopak tento predmet neobsahuje, tak tento výber je súčasne optimálnym výberom aj pre prvých $i-1$ predmetov a hmotnostný limit j. Dostávame teda vzťah:

$$S_{i,j} = \begin{cases} S_{i-1,j} & \text{ak } v_i > j \\ \max\{c_i + S_{i-1,j-v_i}, S_{i-1,j}\} & \text{ak } v_i \leq j \end{cases}$$

Hodnoty $S_{i,j}$ je možné počítať postupne pre i rastúce od 0 do N. Pri počítaní hodnôt pre i potrebujeme iba hodnoty pre $i-1$, preto nie je potrebné si pamätať celú maticu S, ale stačia iba dva riadky (stačí aj jeden riadok, ak pre dané i počítame od najväčších hodnôt j po najmenšie).

Maximálna dosiahnuteľná cena je podľa definície $S_{N,M}$. Zadanie úlohy vyžaduje určiť aj minimálnu hmotnosť, s akou sa dá táto cena dosiahnuť. Stačí teda nájsť najmenšie k také, že $S_{N,k} = S_{N,M}$.

Popísané riešenie teraz rozšírime o spôsob ako nájsť predmety patriace do optimálneho výberu. Pre každé i od 1 do N, j od 0 do M si uložíme hodnotu $P_{i,j}$, kde $P_{i,j} = 1$, ak sa vo výbere z prvých i predmetov pre hmotnostný limit j použije predmet i, inak $P_{i,j} = 0$. Tieto hodnoty si budeme ukladať už počas výpočtu hodnôt $S_{i,j}$. Nech je teraz nájdená najmenšia hmotnosť optimálneho výberu k. Ak $P_{N,k} = 1$, predmet N bol vo výbere použitý, vypíšeme ho a hľadáme prvky najlepšieho výberu z predmetov 1 až $N-1$ pre hmotnostný limit $k - v_N$. Ak $P_{N,k} = 0$, tak predmet N nebol vo výbere použitý, pokračujeme teda hľadaním výberu pre predmety 1 až $N-1$ a pre hmotnostný limit k.

Časová aj pamäťová zložitosť popísaného algoritmu je $O(NM)$. Čo sa týka pamäťovej zložitosti, vzhľadom na povolené rozsahy vstupných dát nie je možné mať pole $M \times N$ celých čísel. Náš algoritmus však pre každú dvojicu vyžaduje iba jeden bit. Manipuláciu s bitmi možno vyriešiť napríklad pomocou množín. Spotreba pamäte je aj tak pomerne vysoká, takže je potrebné alokovať pamäť dynamicky.

5. Stredoeurópska informatická olympiáda

Piata Stredoeurópska informatická olympiáda sa konala v dňoch 20.–27.5.1998 v chorvátskom meste Zadar. Zúčastnilo sa na nej 36 stredoškolákov z 9 krajín (Bosna a Hercegovina, Česká Republika, Chorvátsko, Maďarsko, Nemecko, Poľsko, Rumunsko, Slovensko a Slovinsko). Okrem oficiálnej súťaže prebiehala po internete neoficiálna časť, ktorej sa zúčastnili súťažiaci z ďalších 12 krajín.

Družstvo Slovenska v zložení Ján Senko (SPŠE Košice), Michal Forišek (Gymnázium Poprad, Popradské nábrežie), Ján Války (Gymnázium Sereď) a Ján Lunter (Gymnázium J.G. Tajovského Banská Bystrica) pod vedením Martina Pála a Ivony Bezákovej (Matematicko-fyzikálna fakulta Univerzity Komenského, Bratislava) získalo tri medailové umiestnenia:

Por.	Meno	Body	Medaila
3.	Ján Senko	191	Zlatá
5.	Ján Války	164	Strieborná
7.	Michal Forišek	158	Strieborná
23.	Ján Lunter	61	

V neoficiálnej súťaži družstiev obsadilo Slovensko druhú priečku, hneď za víťaznými Poliakmi.

Slovensko sa súťaže zúčastnilo aj vďaka sponzorskej podpore Slovenskej informatickej spoločnosti, ktorá zaplatila cestovné náklady pre všetkých šiestich zúčastnených.

Ivona Bezáková, Martin Pál

Zadania úloh 5. Stredoeurópskej informatickej olympiády

1. Štvorce (30 bodov)

V rovine je daných N štvorcov v súradnicovej sústave. Strany štvorcov sú rovnobežné so súradnicovými osami, všetky vrcholy štvorcov majú celočíselné súradnice. Štvorce sa navzájom neprekrývajú ani nedotýkajú. Vašou úlohou je spočítať počet štvorcov viditeľných zo začiatku súradnicovej sústavy $O = (0, 0)$. Štvorec je *viditeľný* z bodu O, ak existujú dva rôzne body A a B na jednej zo strán štvorca také, že vnútro trojuholníka OAB nemá žiadny spoločný bod so žiadnym zo zvyšných štvorcov.

Na prvom riadku vstupného súboru `SQUARES.IN` je celé číslo N, $1 \leq N \leq 1\,000$, ktoré udáva počet štvorcov. Každý z ďalších N riadkov obsahuje celé čísla X,Y a L, $(1 \leq X, Y, L \leq 10\,000)$ oddelené jednou medzerou, popisujúce jeden štvorec. X a Y sú súradnice ľavého dolného rohu (rohu s najmenšou X-ovou aj Y-ovou súradnicou) a L je dĺžka strany štvorca.

Výstupný súbor `SQUARES.OUT` pozostáva z jediného riadku obsahujúceho počet štvorcov viditeľných z bodu O.

Príklad

SQUARES.IN	SQUARES.OUT
3	3
2 6 3	
1 4 1	
3 4 1	

2. Karty (30 bodov)

Alica a Bob majú N kariet označených číslami $1 \ldots N$ (tak, že žiadne dve karty nie sú označené rovnakým číslom) a stroj na miešanie kariet. Predpokladajme, že N je nepárne číslo. Ak do stroja na miešanie kariet vložíme sadu kariet v ľubovoľnom poradí, vykoná na nej nasledujúcu operáciu *double shuffle*: pre všetky pozície i, $1 \le i \le N$, nech karta na pozícii i má číslo j a karta na pozícii j má číslo k, potom po vykonaní operácie double shuffle bude na pozícii i karta s číslom k.

Alica a Bob hrajú hru. Alica si najskôr napíše čísla od 1 po N v nejakom náhodnom poradí $a_1, a_2, \ldots, a_N$. Potom poukladá karty nasledovným spôsobom: pre každé i, $1 \le$ $\le i \le N-1$, dá na pozíciu a_i kartu s číslom a_{i+1}. Na pozíciu a_N dá kartu s číslom a_1. Takýmto spôsobom dostane nejaké poradie kariet $x_1, x_2, \ldots, x_N$, kde x_i je číslo karty na i-tej pozícii.

Na tomto usporiadaní kariet postupne S krát použije stroj na miešanie kariet spôsobom opísaným vyššie. Po S operáciách double shuffle budú karty usporiadané v poradí $p_1, p_2, \ldots, p_N$, ktoré Alica prezradí Bobovi spolu s číslom S. Bobovou úlohou je uhádnuť poradie kariet $x_1, x_2, \ldots, x_N$, v akom Alica pôvodne vložila karty do miešacieho stroja.

Prvý riadok vstupného súboru `CARDS.IN` obsahuje dve celé čísla oddelené jednou medzerou: nepárne číslo N, $1 \le N \le 1\,000$, označujúce počet kariet, a celé číslo S, $1 \le$ $\le S \le 1\,000$, označujúce počet operácií double shuffle. Nasledujúcich N riadkov popisuje konečné poradie kariet po vykonaní všetkých operácií double shuffle tak, že na $(i+1)$-vom riadku $(1 \le i \le N)$ vstupného súboru je číslo p_i (karta na pozícii i, po vykonaní všetkých operácií double shuffle).

Výstupný súbor CARDS.OUT má obsahovať N riadkov, ktoré popisujú poradie kariet tesne pred vložením do stroja na miešanie kariet. Pre každé i, $1 \le i \le N$, na i-tom riadku výstupného súboru bude číslo x_i (číslo karty na pozícii i pred vykonaním operácií double shuffle).

Príklad

CARDS.IN	CARDS.OUT
5 2	2
4	5
1	4
5	1
3	3
2	

3. Odčítanie (40 bodov)

Je daná postupnosť N kladných celých čísel $a = [a_1, a_2, \ldots, a_N]$, na ktorej môžeme vykonávať operácie kontrakcie. Jedna operácia kontrakcie pozostáva z nahradenia dvoch susedných prvkov a_i a a_{i+1} ich rozdielom $a_i - a_{i+1}$. Pre postupnosť N celých čísel môžeme vykonať presne $N-1$ rôznych operácií kontrakcie. Každá z týchto operácií vytvorí novú $(N-1)$-prvkovú postupnosť. Presnejšie, nech $\mathbf{con}(a, i)$ označuje $(N-1)$-prvkovú postupnosť získanú z postupnosti $[a_1, a_2, \ldots, a_N]$ zámenou prvkov a_i a a_{i+1} jediným číslom $a_i - a_{i+1}$:

$$\mathbf{con}(a, i) = [a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i - a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_N]$$

Vykonaním $N-1$ kontrakcií na danej postupnosti N celých čísel dostaneme jediné celé číslo.

Vašou úlohou je pre danú postupnosť $a_1, a_2, \ldots, a_N$ a výsledné číslo T, nájsť postupnosť $N-1$ kontrakcií, ktorých aplikovaním na pôvodnú postupnosť dostaneme číslo T.

Prvý riadok vstupného súboru `SUBTRACT.IN` obsahuje dve celé čísla oddelené jednou medzerou: číslo N, $1 \le N \le 100$, označujúce počet celých čísel v pôvodnej postupnosti a výsledné celé číslo T, $-10\,000 \le T \le 10\,000$. Ďalších N riadkov obsahuje začiatočnú postupnosť: pre každé i, $1 \le i \le N$, je na $(i+1)$-vom riadku vstupného súboru celé číslo a_i, $1 \le a_i \le 100$.

Výstupný súbor `SUBTRACT.OUT` má obsahovať $N-1$ riadkov popisujúcich postupnosť kontrakcií, ktorá transformuje pôvodnú postupnosť na jednoprvkovú postupnosť pozostávajúcu z čísla T. Na i-tom riadku výstupného súboru má byť jedno celé číslo označujúce i-tu kontrakciu, ktorú treba vykonať. Môžete predpokladať, že vždy existuje aspoň jedna postupnosť kontrakcií pre daný vstup.

Príklad

SUBTRACT.IN	SUBTRACT.OUT
4 5	1
10	2
2	1
5	
2	

4. Vojaci (30 bodov)

V krajine Gridland je náhodne roztrúsených N vojakov. Pozícia v Gridlande je daná dvojicou celočíselných súradníc (x, y). Vojaci sa môžu hýbať — v jednom ťahu môže jeden vojak ísť jeden krok hore, dole, doľava alebo doprava (teda, môže zmeniť buď svoju x-ovú alebo y-ovú súradnicu o 1 alebo -1). Vojaci sa chcú rozmiestniť do vodorovného radu jeden vedľa druhého tak, že ich výsledné súradnice budú $(x, y), (x+1, y), \ldots, (x+N-1, y)$, pre vhodné x a y. Celé čísla x a y, ako aj výsledné poradie vojakov v rade je ľubovoľné. Cieľom je minimalizovať celkový počet ťahov všetkých vojakov, ktorými sa dostanú do opísanej cieľovej formácie. V žiadnom okamihu nemôžu dvaja alebo viacerí vojaci stáť na tom istom mieste.

Prvý riadok vstupného súboru `SOLDIERS.IN` obsahuje celé číslo N, $1 \le N \le 10\,000$, označujúce počet vojakov. Nasledujúcich N riadkov vstupného súboru obsahuje počiatočné pozície vojakov: pre každé i, $1 \le i \le N$, je na $(i+1)$-vom riadku vstupného súboru dvojica celých čísel $x[i]$ a $y[i]$ oddelených jednou medzerou, označujúcich súradnice i-teho vojaka, $-10\,000 \le x[i], y[i] \le 10\,000$.

Prvý a jediný riadok výstupného súboru `SOLDIERS.OUT` má obsahovať najmenší možný celkový počet ťahov, ktorými sa vojaci dostanú do vodorovného radu jeden vedľa druhého.

Príklad

SOLDIERS.IN	SOLDIERS.OUT
3	4
1 0	
2 4	
3 2	

5. Cesty (30 bodov)

N miest označených číslami $1 \ldots N$ je spojených jednosmernými cestami. Každá cesta má dva parametre: dĺžku cesty a poplatok, ktorý musí byť zaplatený pri použití cesty (vyjadrený v počte mincí). Bob a Alica bývali v meste 1. Potom, ako Bob zistil, že Alica podvádzala v kartovej hre, ktorú radi hrávali, Bob sa s ňou rozišiel a rozhodol sa presťahovať do mesta N. Chce sa tam dostať tak rýchlo, ako je to len možné, ale nemá veľa peňazí. Chceme pomôcť Bobovi nájsť najkratšiu cestu z mesta 1 do mesta N, ktorú si môže dovoliť s tým množstvom peňazí, ktoré má.

Prvý riadok vstupného súboru `ROADS.IN` obsahuje celé číslo K, $0 \le K \le 10\,000$, označujúce maximálny počet mincí, ktoré môže Bob za cestu minúť. Druhý riadok obsahuje celé číslo N, $2 \le N \le 100$, označujúce celkový počet miest. Tretí riadok obsahuje celé číslo R, $1 \le R \le 10\,000$, označujúce celkový počet ciest. Každý z nasledujúcich R riadkov popisuje jednu cestu udaním celých čísel S, D, L a T oddelených jednou medzerou: S je začiatočné mesto, $1 \le S \le N$; D je cieľové mesto, $1 \le D \le N$; L je dĺžka cesty, $1 \le L \le 100$; T je poplatok (vyjadrený v počte mincí), $0 \le T \le 100$. Všimnite si, že rôzne cesty môžu mať rovnaké začiatočné aj cieľové mesto.

Prvý a jediný riadok výstupného súboru `ROADS.OUT` má obsahovať celkovú dĺžku najkratšej cesty z mesta 1 do mesta N, na ktorej je súčet poplatkov menší alebo rovný K mincí. Ak takáto cesta neexistuje, výstupný súbor obsahuje jediné číslo -1.

Príklad

```
ROADS.IN
5
6
7
1 2 2 3
2 4 3 3
3 4 2 4
1 3 4 1
4 6 2 1
3 5 2 0
5 4 3 2
```

```
ROADS.OUT
11
```

6. Lopta (40 bodov)

Profesor Baltazár je veľký futbalový fanúšik. Iba niekoľko dní pred odchodom na World Cup Football '98 vo Francúzsku mal narodeniny. Jeho priatelia mu darovali hlavolam — dvanásťsten, aby mal nejakú zábavu, keď bude pozerať na tú nudnú hru. Hlavolam má 12 rovnakých päťuholníkových stien, označených číslami 1 ... 12. Na obrázku dole sú dve polovice dvanásťstena spolu s označením stien použitým v tejto úlohe. Polovice sú "zlepené" dokopy takým spôsobom, že stena s číslom 7 susedí so stenami 8, 12, 11, 2 a 6 (steny sú susedné, ak majú spoločnú hranu). Špeciálne, hrany a a b na ľavej polovici budú zlepené s hranami a a b na pravej polovici na obrázku.

Naviac máme 12 päťuholníkových dielov očíslovaných 1 až 12. Každá hrana na každom dieli je označená číslom z množiny $\{0, 1, 2\}$. Každý diel môže byť umiestnený na každej z dvanástich stien dvanásťstena v ľubovoľnej z piatich polôh, ktoré dostaneme otočením dielu okolo jeho stredu. Na vyriešenie hlavolamu je potrebné umiestniť každý diel na nejakú z dvanástich stien v nejakej polohe tak, aby dva susedné diely mali spoločnú hranu označenú rovnakým číslom. Pomôžte profesorovi Baltazárovi vyriešiť hlavolam!

Vstupný súbor `BALL.IN` obsahuje 12 riadkov. Pre každé i, $1 \leq i \leq 12$, i-ty riadok popisuje i-ty diel udaním 5 čísel z množiny $\{0,\ 1,\ 2\}$ oddelených jednou medzerou. Táto postupnosť určuje označenie hrán i-teho dielu počínajúc ľubovoľnou hranou (túto hranu budeme volať i-ta referenčná hrana) v smere hodinových ručičiek.

Výstupný súbor `BALL.OUT` má obsahovať popis vyriešeného hlavolamu, na 12 riadkoch budú na každom dve celé čísla. Pre každé i, $1 \leq i \leq 12$, i-ty riadok bude obsahovať celé čísla $t[i]$ a $n[i]$ oddelené jednou medzerou popisujúce diel a jeho polohu na i-tej stene: Na i-tej stene bude diel s číslom $t[i]$. Diel môže byť položený na i-tej stene v niektorej z piatich polôh. Presná poloha je daná číslom $n[i]$, ktoré označuje číslo steny, susediacej s $t[i]$-tou referenčnou hranou. Presnejšie, $t[i]$-ta referenčná hrana je umiestnená na hrane dvanásťstena, ktorá je spoločná stenám označeným číslami i a $n[i]$. Ak nie je možné hlavolam vyriešiť, výstupný súbor má obsahovať jediné číslo -1.

Príklad

BALL.IN	BALL.OUT
0 0 1 1 2	1 2
0 2 1 0 1	3 7
2 0 1 0 1	12 4
0 0 1 2 1	7 9
0 2 1 1 2	9 1
2 0 1 2 1	11 8
0 2 1 2 1	8 2
2 2 1 0 1	4 6
1 2 2 0 0	5 4
0 2 1 0 2	2 12
0 2 1 2 0	6 3
2 0 1 2 0	10 7

10. Medzinárodná informatická olympiáda

V dňoch 5.–12.9.1998 sa v Portugalsku, v meste Setúbal konala 10. Medzinárodná informatická olympiáda (MIO). Súťaže sa zúčastnilo 241 účastníkov zo 67 krajín. Družstvo Slovenskej republiky na túto olympiádu bolo vybrané na základe výsledkov celoštátneho kola Matematickej olympiády, kategórie P a výberového sústredenia, ktoré sa konalo v dňoch 26.4.–2.5 1998 na Matematicko-fyzikálnej fakulte Univerzity Komenského.

Výsledky výberového sústredenia

1.	Stanislav Funiak	569.7	7.	Peter Bodík	431.8
2.	Michal Forišek	554.3	8.	Dávid Pál	411.0
3.	Ján Senko	513.3	9.	Michal Matoušek	404.0
4.	Richard Kráľovič	470.6	10.	Peter Rafaj	319.6
5.	Ján Války	467.4	11.	Pavol Černý	199.1
6.	Ján Lunter	466.7			

Slovensko teda na súťaži reprezentovali Stanislav Funiak z Gymnázia Sučany, Michal Forišek z Gymnázia Poprad, Popradské nábrežie, Ján Senko zo SPŠE Košice, Komenského a Richard Kráľovič z Gymnázia Jura Hronca, Bratislava. Vedúcim družstva bol Tomáš Vinař a zástupkyňou vedúceho družstva bola Bronislava Brejová, obaja z Katedry vyučovania informatiky Matematicko-fyzikálnej fakulty Univerzity Komenského v Bratislave.

Samotná súťaž bola rozdelená do 2 dní, pričom každý deň riešili súťažiaci po 3 úlohy v čistom čase 5 hodín. Úlohy boli algoritmického charakteru v duchu predchádzajúcich olympiád, ich náročnosť však bola o niečo nižšia ako obvykle. To spôsobilo, že sa v konečnom poradí viacero účastníkov nachádzalo vždy na tom istom mieste. Naše družstvo na súťaži dosiahlo vynikajúce výsledky a to konkrétne:

Por.	**Meno**	**Body**	**Medaila**
5.	Michal Forišek	680	Zlatá
5.	Stanislav Funiak	680	Zlatá
5.	Ján Senko	680	Zlatá
16.	Richard Kráľovič	660	Zlatá

V neoficiálnom hodnotení krajín sa Slovensko umiestnilo na prvom mieste pred Čínou (3 zlaté, 1 strieborná medaila), Poľskom (3 zlaté, 1 strieborná medaila), Kóreou (2 zlaté, 2 strieborné medaily) a Ruskom (1 zlatá, 2 strieborná, 1 bronzová medaila).

Okrem súťaže organizátori pripravili aj ďalší, neodborný program (ako napríklad návšteva EXPO'98, poznávacie exkurzie, športové aktivity, spoločenské večery). Program celej olympiády však nebol veľmi dobre zorganizovaný, časté prestoje uberali čas delegátom ako i účastníkom, ktorý by bol mohol byť využitý na nadväzovanie medzinárodných kontaktov.

Počas MIO'98 sa konalo aj zasadnutie výboru Stredoeurópskej informatickej olympiády (SIO). Bolo oznámené, že ďalší ročník SIO sa bude konať 3.–9.9.1999 v Brne a SIO 2000 sa bude konať v Rumunsku. MIO'99 sa bude konať koncom októbra 1999 v Turecku.

Tomáš Vinař, Bronislava Brejová

Zadania úloh 10. Medzinárodnej informatickej olympiády

1. Kontakt (100 bodov)

Doktorka Astro Nebeská nedávno zaznamenala veľmi zvláštny druh mikrovlnného žiarenia prichádzajúceho priamo zo stredu galaxie. Pomôžte jej vytvoriť nástroj na analýzu opakujúcich sa vzoriek v záznamoch. Doktorka Nebeská chce nájsť také vzorky dĺžky od A po B (vrátane), ktoré sa v záznamoch najčastejšie opakujú. Uvažuje iba N navzájom rôznych najvyšších frekvencií vzoriek. Frekvencia vzorky je počet jej výskytov v zázname, pričom výskyty sa môžu prekrývať. Zaoberáme sa pri tom iba vzorkami, ktoré sa v zázname vyskytujú aspoň raz.

Súbor `CONTACT.IN` obsahuje údaje v nasledujúcom formáte: Prvý riadok obsahuje celé číslo A udávajúce najmenšiu uvažovanú dĺžku vzorky; druhý riadok celé číslo B udávajúce najväčšiu uvažovanú dĺžku vzorky ($0 < A \leq B \leq 12$); tretí celé číslo N udávajúce požadovaný počet rôznych frekvencií výskytu vzoriek ($0 < N \leq 20$). Štvrtý riadok obsahuje postupnosť znakov `0` a `1`, ukončenú znakom `2`. Vstupný súbor môže mať až 2 megabajty.

Príklad vstupu:

```
2
4
5
01010010010001000111101100001010011001111000010010011110010000000 2
```

V tomto príklade požadujeme 5 najväčších rôznych frekvencií výskytu vzoriek dĺžok od 2 do 4. Vzorka `100` má frekvenciu 12, vzorka `1000` sa vyskytuje 5 krát. Vzorka s najvyššou frekvenciou je `00`.

Do súboru `CONTACT.OUT` vypíšte nanajvýš N riadkov, obsahujúcich N najvyšších rôznych frekvencií a im zodpovedajúce vzorky. Výstup musí byť usporiadaný zostupne podľa frekvencie, pričom jednotlivé riadky majú nasledujúci tvar:

frekvencia vzorka vzorka ... vzorka

kde *frekvencia* je počet výskytov vzoriek, ktoré za ňou v riadku nasledujú. Vzorky v každom riadku usporiadajte zostupne podľa dĺžky, pričom vzorky s rovnakou dĺžkou usporiadajte zostupne podľa ich číselnej hodnoty. V prípade, že celkový počet rôznych frekvencií je menší ako N, výstup bude obsahovať menej ako N riadkov.

Príklad výstupu:

```
23 00
15 10 01
12 100
11 001 000 11
10 010
```

2. Slávnostné osvetlenie (100 bodov)

Na osvetlenie slávnostnej večere bolo použitých N farebných lámp očíslovaných číslami od 1 po N. Lampy sú napojené na štyri prepínače:

prepínač 1 — po stlačení tohoto prepínača zmenia všetky lampy svoj stav, t.j. lampy, ktoré svietili, zhasnú a lampy, ktoré boli zhasnuté, sa rozsvietia.

prepínač 2 — zmení stav všetkých lámp s nepárnymi číslami.

prepínač 3 — zmení stav všetkých lámp s párnymi číslami.

prepínač 4 — zmení stav všetkých lámp, ktorých číslo má tvar $3K + 1$ (pre $K \geq 0$)

Na zariadenie je pripojené počítadlo C, ktoré zaznamenáva celkový počet stlačení prepínačov. Na začiatku večere sú všetky lampy rozsvietené a počítadlo C je nastavené na nulu.

Daná je hodnota počítadla C a informácie o výslednom stave niektorých lámp. Napíšte program, ktorý zistí všetky možné výsledné konfigurácie N lámp, ktoré sú konzistentné so zadanými údajmi. Každú konfiguráciu vypíšte raz.

V súbore `PARTY.IN` sa nachádzajú štyri riadky obsahujúce číslo N – počet lámp, počet stlačení prepínačov C a stavy niektorých lámp vo výslednej konfigurácii. Prvý riadok obsahuje číslo N a druhý riadok číslo C ($10 \leq N \leq 100$, $1 \leq C \leq 10\,000$). Tretí riadok obsahuje zoznam čísel lámp, o ktorých viete, že majú byť na konci rozsvietené. Jednotlivé čísla v zozname sú oddelené medzerami a zoznam je ukončený číslom -1. Štvrtý riadok obsahuje zoznam lámp, o ktorých viete, že majú byť na konci zhasnuté. Jednotlivé čísla v zozname sú oddelené medzerami a zoznam je ukončený číslom -1. V žiadnom z týchto zoznamov neobsahuje viac ako dve lampy. Pre každý testovací vstupný súbor existuje aspoň jedna možná výsledná konfigurácia.

Do súboru `PARTY.OUT` zapíšte všetky možné výsledné konfigurácie lámp konzistentné so zadaním v ľubovoľnom poradí (každú práve raz). Každú konfiguráciu vypíšte na zvláštny riadok, pričom tento riadok obsahuje N znakov. Prvý znak reprezentuje stav lampy číslo 1 a posledný znak reprezentuje stav lampy číslo N. Znak 0 predstavuje vypnutú lampu, znak 1 zapnutú lampu.

Príklad vstupu:

```
10
1
-1
7 -1
```

Príklad výstupu:

```
0000000000
0110110110
0101010101
```

3. Hviezdna noc (150 bodov)

Na nočnej oblohe sa vyskytujú hviezdy v súhvezdiach najrôznejších tvarov. Súhvezdie je neprázdna súvislá skupina hviezd, ak uvažujeme susednosť v horizontálnom, vertikálnom a diagonálnom smere. Žiadne súhvezdie nie je súčasťou iného súhvezdia.

Súhvezdia sa môžu navzájom podobať. Dve súhvezdia sú podobné, ak majú rovnaký tvar a počet hviezd bez ohľadu na otočenie a osovú súmernosť.

Nočná obloha je reprezentovaná hviezdnou mapou, čo je dvojrozmerná matica núl a jednotiek. Prvok matice obsahuje cifru 1, ak sa na tom mieste nachádza hviezda a cifru 0 inak.

Daná je hviezdna mapa, označte na nej všetky súhvezdia malými písmenami abecedy, pričom podobné súhvezdia budú označené tým istým písmenom. Súhvezdia, ktoré nie sú podobné, označte rôznymi písmenami. Označenie súhvezdia znamená nahradenie každej cifry 1 v súhvezdí príslušným malým písmenom.

Súbor `STARRY.IN` obsahuje na prvých dvoch riadkoch šírku W a výšku H hviezdnej mapy ($0 \leq W, H \leq 100$). Na ďalších H riadkoch sa nachádza po W znakov. Tieto riadky reprezentujú hviezdnu mapu. Počet súhvezdí je najviac 500, počet nie podobných súhvezdí je najviac 26 (`a`...`z`) a počet hviezd v každom súhvezdí je najviac 160.

Súbor `STARRY.OUT` obsahuje tú istú mapu ako súbor `STARRY.IN`, s tým rozdielom, že súhvezdia sú označené tak, ako je požadované v zadaní.

4. Stretnutie (150 bodov)

Dávno, pradávno sa každoročne kráľ Artuš stretával so svojimi rytiermi okrúhleho stolu, aby spolu oslávili Nový rok. Na pamiatku týchto osláv vznikla hra pre jedného hráča, v ktorej sú na začiatku jedna figúrka kráľa a niekoľko figúrok jazdcov (rytierov na koňoch) náhodne umiestnené na rozličné políčka.

Hracím plánom je šachovnica s 8×8 štvorcovými políčkami. Kráľ môže v jednom ťahu prejsť na ľubovoľné susedné políčko, ak pritom nespadne z šachovnice. Jazdec sa môže v jednom ťahu pohnúť tým istým spôsobom, ako jazdec v šachovej hre, ak pritom nespadne z šachovnice. Počas hry môže hráč na jedno políčko položiť aj viacero figúrok naraz. Políčka sú dostatočne veľké, aby sa na ne zmestil potrebný počet figúrok.

Cieľom hráča je premiestniť všetky figúrky na jedno políčko pomocou najmenšieho možného počtu ťahov. Možno používať iba uvedené ťahy. Navyše, keď sa kráľ a jeden alebo niekoľko jazdcov ocitne naraz na tom istom políčku, hráč sa môže rozhodnúť, že odteraz až do konca hry bude pohybovať kráľom a jedným z jazdcov spoločne ako jednou figúrkou, pričom táto figúrka sa pohybuje ako jazdec. Ťah takouto spojenou figúrkou sa započítava ako jeden ťah.

Napíšte program, ktorý nájde najmenší možný počet ťahov, potrebných na to, aby hráč docielil presunutie všetkých figúrok na jedno miesto.

Súbor `CAMELOT.IN` obsahuje počiatočnú konfiguráciu šachovnice ako reťazec znakov. Tento reťazec obsahuje postupnosť nanajvýš 64 rôznych políčok šachovnice, pričom na prvom políčku sa nachádza kráľ a na ostatných sa nachádzajú jazdci (počet jazdcov je nanajvýš 63). Každé políčko je určené dvojicou písmeno-číslica. Písmeno označuje stĺpec a číslica riadok šachovnice.

Do súboru `CAMELOT.OUT` vypíšte jediný riadok, na ktorom bude celé číslo určujúce minimálny počet ťahov potrebných na presunutie všetkých figúrok na jedno políčko.

Príklad vstupu:	**Príklad výstupu:**
`D4A3A8H1H8`	`10`

5. Obrázok (100 bodov)

Na stene je nalepených niekoľko obdĺžnikových plagátov, fotografií a iných obrázkov. Ich strany sú rovnobežné s okrajom steny. Každý obdĺžnik môže byť čiastočne alebo úplne pokrytý inými obdĺžnikmi. Dĺžku hranice zjednotenia všetkých obdĺžnikov nazvime ich obvodom. Napíšte program, ktorý vypočíta obvod. Vrcholy obdĺžnikov majú celočíselné súradnice.

Prvý riadok vstupného súboru `PICTURE.IN` obsahuje počet obdĺžnikov nalepených na stene. Každý z nasledujúcich riadkov obsahuje súradnice ľavého dolného a pravého horného rohu jedného obdĺžnika. Tieto súradnice sú dané ako usporiadané dvojice pozostávajúce z x-ovej a y-ovej súradnice. Počet obdĺžnikov je nanajvýš 5 000. Súradnice sú z rozsahu $[-10\,000, 10\,000]$ a každý obdĺžnik má kladný obsah. Výsledok môže vyžadovať 32-bitovú reprezentáciu čísla.

Do súboru `PICTURE.OUT` vypíšte jediný riadok obsahujúci nezáporné celé číslo, ktoré zodpovedá obvodu množiny obdĺžnikov na vstupe.

Príklad vstupu:
```
7
-15 0 5 10
-5 8 20 25
15 -4 24 14
0 -6 16 4
2 15 10 22
30 10 36 20
34 0 40 16
```

Príklad výstupu:
```
228
```

6. Cykláčik (100 bodov)

Cykláčik je hra pre jedného hráča, v ktorej počiatočnú pozíciu tvorí cyklus s N vrcholmi. Každý vrchol cyklu je označený celým číslom a každá hrana je označená symbolom + (sčítanie) alebo symbolom * (násobenie). Hrany sú očíslované číslami od 1 po N.

V prvom ťahu hráč z cyklu odoberie jednu hranu. Každý z nasledujúcich ťahov sa skladá z dvoch krokov:

- vezmeme hranu E a dva vrcholy V_1 a V_2, ktoré sú spojené hranou E
- nahradíme ich novým vrcholom, ktorý označíme výsledkom operácie, ktorou je označená hrana E, aplikovanej na označenia vrcholov V_1 a V_2.

Hra končí, keď nezostane žiadna hrana a výsledkom hry nazveme označenie jediného vrcholu, ktorý zostal.

Napíšte program, ktorý pre daný cyklus vypočíta najvyšší možný výsledok hry a vypíše všetky hrany, z ktorých ak jednu odstránime v prvom ťahu, môže hra viesť k tomuto výsledku.

Súbor `POLYGON.IN` obsahuje popis cyklu s N vrcholmi. Súbor obsahuje dva riadky. Na prvom riadku sa nachádza číslo N ($3 \le N \le 50$). Druhý riadok obsahuje označenia hrán $1, \ldots, N$ striedavo s označeniami vrcholov (najprv vrchol medzi hranami 1 a 2, potom vrchol medzi hranami 2 a 3, atď. až vrchol medzi hranami N a 1). Jednotlivé označenia sú oddelené medzerou. Označenie hrany je buď `t` (namiesto +) alebo `x` (namiesto *). Pre každú postupnosť ťahov sú označenia vrcholov počas hry vždy v rozsahu $[-32\,768, 32\,767]$.

Na prvý riadok súboru `POLYGON.OUT` vypíšte najvyšší možný výsledok, ktorý je možné dosiahnuť pre cyklus na vstupe. Na druhý riadok vypíšte zoznam všetkých hrán, z ktorých ak jednu odstránime v prvom ťahu, môže hra viesť k tomuto výsledku. Hrany musia byť vypísané vzostupne a oddelené jednou medzerou.

Príklad vstupu:

```
4
t -7 t 4 x 2 x 5
```

Príklad výstupu:

```
33
1 2
```

Korešpondenčný seminár SK MO

V 47. ročníku matematickej olympiády SK MO prebiehal pre najúspešnejších olympionikov predchádzajúceho ročníka MO zo Slovenska korešpondenčný seminár SK MO. Tento korešpondenčný seminár vznikol už v 24. ročníku MO preto, aby bolo umožnené venovať individuálnu starostlivosť aj tým študentom, ktorí nenavštevovali triedy so zameraním na matematiku. V súčasnosti, pretože existuje veľké množstvo iných matematických korešpondenčných seminárov (napríklad krajských, ktorým je venovaná samostatná kapitola), a pretože počet škôl so zameraním na matematiku stúpol, seminár SK MO sa zameriava na zlepšenie prípravy všetkých študentov, ktorí preukázali svoje schopnosti v predchádzajúcich ročníkoch MO. Keďže úlohy tohoto seminára svojou náročnosťou prevyšujú akúkoľvek inú matematickú súťaž pre stredoškolákov, seminár sa stáva dôležitou súčasťou prípravy aj na medzinárodnú matematickú olympiádu. V 44. ročníku MO bol KS SK MO prvýkrát zorganizovaný samostatne na Slovensku. Pozostáva tradične z piatich sérií po sedem úloh. Do riešenia sa v tomto ročníku zapojilo spolu 42 študentov zo všetkých krajov. Medzi desiatimi najúspešnejšími riešiteľmi boli piati členovia slovenskej delegácie na MMO.

Korešpondenčný seminár viedol *Richard Kollár* a opravovanie zabezpečovali študenti a pracovníci MFF UK (všetko bývalí olympionici).

Celkové poradie KS SK MO 1997/98

1. *Juraj Földes*, 4 Gymnázium J. Hronca, Bratislava, 86, 5 bodu;
2. *Peter Novotný*, 3 Gymnázium Veľká Okružná, Žilina, 84, 5 bodu;
3. *Kristína Černeková*, 3 Gymnázium tř. Kpt. Jaroše, Brno, 69, 5 bodu;
   Ján Špakula, 4 Gymnázium Poštová, Košice, 69, 5 bodu;
5. *Martin Hriňák*, 3 Gymnázium Alejová, Košice, 64 bodov;
6. *Tomáš Jurík*, 2 Gymnázium Poštová, Košice, 51, 5 bodu;
7. *Pavol Novotný*, 3 Gymnázium Veľká Okružná, Žilina, 49 bodov;
8. *Miroslava Sotáková*, 2 Gymnázium Javorová, Spišská Nová Ves, 46 bodov;
9. *Peter Kozák*, 2 Gymnázium Sučany, 43 bodov;
10. *František Kardoš*, 4 Gymnázium Alejová, Košice, 31, 5 bodu.

Uvádzame všetky príklady tohto ročníka súťaže spolu s riešeniami, prevažne študentskými. Príklady boli vyberané z príkladov zo jury MMO a z národných olympiád, či iných súťaží týchto krajín: Bielorusko, Irán, Rumunsko, Veľká Británia, Rakúsko, SRN, Írsko, Bulharsko, Južná Afrika a Poľsko.

Zadania súťažných úloh KS SK MO

Prvá séria

1.1 Dokážte, že neexistuje konečná množina $\mathcal{M}$ pozostávajúca z aspoň troch rôznych kladných reálnych čísel taká, že pre ľubovoľné dve rôzne čísla $a \in \mathcal{M}$ a $b \in \mathcal{M}$ aj číslo $a^2 + b^2$ patrí do $\mathcal{M}$.

(Bielorusko, MO 96/97)

1.2 Nech n je prirodzené číslo. Dokážte, že existujú polynómy $f(x)$ a $g(x)$ s celočíselnými koeficientami také, že

$$f(x)(x+1)^{2^n} + g(x)(x^{2^n}+1) = 2.$$

(Irán, MO 96/97 Final R. 1)

1.3 Dané je prvočíslo p, $p \geqq 5$. Pre každé číslo k, $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, určte maximálnu dĺžku nekonštantnej aritmetickej postupnosti prirodzených čísel, ktorej žiaden člen neobsahuje v p-adickom zápise (zápis v sústave so základom p) cifru k.

(Rumunsko 97, Selection test)

1.4 Daný je trojuholník ABC. Uvažujme všetky možné trojice bodov P, R_p a S_p, ktoré sú dané nasledovne: P je ľubovoľný bod na oblúku BC kružnice opísanej trojuholníku ABC, R_p a S_p sú stredy kružníc vpísaných po rade do trojuholníkov PAB a PAC. Dokážte, že

a) všetky kružnice, opísané trojuholníkom PR_pS_p, prechádzajú jedným bodom;
b) všetky kružnice, ktorých priemerom sú úsečky R_pS_p, prechádzajú jedným bodom;
c) všetky stredy úsečiek R_pS_p ležia na jednej kružnici.

(Irán, MO 96/97)

1.5 Daných je k rôznych reálnych čísel $w_1, \dots, w_k$, ktorých súčet nie je nulový. Dokážte, že existujú celé čísla $n_1, \dots, n_k$ také, že $\sum_{i=1}^{k} n_i w_i > 0$, a pre každú permutáciu π rôznu od identity na množine $\{1, \dots, k\}$ platí $\sum_{i=1}^{k} n_1 w_{\pi(i)} < 0$.

(Irán, MO 96/97)

1.6 V ostrouhlom trojuholníku ABC označme F pätu výšky z bodu C a M stred strany CA. Dokážte, že ak platí $|BM| = |CF|$ a $|\sphericalangle MBC| = |\sphericalangle FCA|$, tak je trojuholník ABC rovnostranný.

(Veľká Británia, MO 97)

1.7 Nech $n \geqq 3$ je prirodzené číslo a x reálne číslo také, že čísla x, x^2 a x^n majú rovnakú necelú časť (rozvoj čísla za desatinnou čiarkou). Dokážte, že x je celé číslo.

(Rumunsko, MO 97)

Druhá séria

2.1 Dané sú kladné reálne čísla A a B. Uvažujme všetky štvorice nezáporných reálnych čísel a, b, c, d, pre ktoré platí $a^2 + b^2 = A^2$ a $c + d = B$. Aká je najmenšia a najväčšia možná hodnota výrazu $(a + d)^2 + (b - c)^2$?

(Rakúsko, MO 96)

2.2 Nájdite
a) všetky párne
b) všetky nepárne
funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre každé celé číslo x platí $f(x) = f(x^2 + x + 1)$.

(Rakúsko, MO 96)

2.3 Vo štvorci so stranou 100 sa nachádzajú kruhy s polomerom 1 tak, že
1) žiadne dva kruhy sa nepretínajú ani nedotýkajú,
2) každá úsečka dĺžky 10 celá ležiaca vo vnútri štvorca má spoločný bod s aspoň jedným kruhom.
Dokážte, že sa vo štvorci nachádza aspoň 400 kruhov.

(Nemecko, MO 95)

2.4 Nad stranami daného trojuholníka ABC zostrojme obdĺžniky ABB_1A_1, BCC_1B_2 a CAA_2C_2. Dokážte, že osi úsečiek A_1A_2, B_1B_2 a C_1C_2 sa pretínajú v jednom bode.

(Nemecko, MO 96)

2.5 Označme S množinu všetkých nepárnych prirodzených čísel väčších ako 1. Pre každé $x \in S$ označme $\delta(x)$ jediné celé číslo vyhovujúce nerovnosti

$$2^{\delta(x)} < x < 2^{\delta(x)+1}.$$

Pre $a, b \in S$ definujme

$$a * b = 2^{\delta(a)-1}(b - 3) + a.$$

Dokážte, že pre každú trojicu $a, b, c \in S$ platí
a) $a * b \in S$;
b) $(a * b) * c = a * (b * c)$.

(Írsko, MO 97)

2.6 Nech m a n sú prirodzené čísla. Nech

$$m + i = a_i b_i^2 \quad \text{pre} \quad i = 1, 2, \dots , n,$$

kde a_i, b_i sú prirodzené čísla, pričom a_i nie je deliteľné druhou mocninou žiadneho prirodzeného čísla väčšieho ako 1. Nájdite všetky hodnoty n, pre ktoré existuje m také, že $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 12$.

(Bulharsko, MO 97)

2.7 Daný je trojuholník ABC. Nech BM a CN ($M \in AC$, $N \in AB$) sú osi uhlov ABC a ACB. Polpriamka MN pretína kružnicu opísanú trojuholníku ABC v bode D. Dokážte, že

$$\frac{1}{|BD|} = \frac{1}{|AD|} + \frac{1}{|CD|}.$$

(Bulharsko, MO 97)

Tretia séria

3.1 Pre každé reálne číslo a určte počet riešení sústavy

$$x + y^2 + z^2 = a,$$
$$x^2 + y + z^2 = a,$$
$$x^2 + y^2 + z = a.$$

Riešením sústavy rozumieme usporiadanú trojicu reálnych čísel (x, y, z).

(Rakúsko, MO 95)

3.2 Prirodzené číslo n nazveme *korešpondenčné*, ak existujú prirodzené čísla a, b, x a y, pre ktoré platí $a + b = n$ a $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$. Nájdite všetky *korešpondenčné* čísla.

(Nemecko, MO 95)

3.3 Nech $n \geqq 2$ je prirodzené číslo. Uvažujme polynóm

$$P_n(x) = \binom{n}{2} + \binom{n}{5}x + \binom{n}{8}x^2 + \ldots + \binom{n}{3k+2}x^k ,$$

kde $k = \left[\frac{n-2}{3}\right]$.
a) Dokážte, že $P_{n+3}(x) = 3P_{n+2}(x) - 3P_{n+1}(x) + (x+1)P_n(x)$.
b) Nájdite všetky prirodzené čísla a také, že pre každé prirodzené $n \geqq 3$ je $3^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$ deliteľom $P_n\left(a^3\right)$.

(Bulharsko, MO 97)

3.4 Označme k polkružnicu so stredom O a priemerom AB. Nech bod M leží na predĺžení AB tak, že $|MA| > |MB|$. Priamka prechádzajúca bodom M pretína k v bodoch C a D tak, že $|MC| > |MD|$. Druhý priesečník kružníc opísaných trojuholníkom AOC a BOD (rôzny od O) označme K. Dokážte, že $OK \perp MK$.

(Irán, MO 97)

3.5 Nech a, b, c sú kladné reálne čísla také, že $abc = 1$. Dokážte, že platí

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \leqq \frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+c}.$$

(Bulharsko, MO 97)

3.6 Nech X je $(n+1)$-prvková množina, kde $n \geqq 2$. Usporiadané n-tice $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ rôznych prvkov množiny X nazveme *rozhádané*, ak existujú rôzne indexy i a j také, že $a_i = b_j$. Nájdite maximálny možný počet navzájom rôznych *rozhádaných* n-tíc.

(Bulharsko, MO 97)

3.7 V rovine je daných 10 rôznych bodov s nasledujúcou vlastnosťou: spomedzi každých 5 z nich možno vybrať 4 také, ktoré tvoria tetivový štvoruholník. Koľko najmenej z týchto bodov musí ležať na kružnici?

(Irán, MO 96/97)

Štvrtá séria

4.1 Nekonečná postupnosť $\{a_n\}$ prirodzených čísel má nasledujúcu vlastnosť $a_1 = 2$, $a_2 = 7$ a

$$-\frac{1}{2} < a_{n+1} - \frac{a_n^2}{a_{n-1}} \leqq \frac{1}{2}$$

pre každé $n \geqq 2$. Dokážte, že a_n je nepárne pre každé $n > 1$.

(Južná Afrika, MO 96)

4.2 Nech $ABCD$ je štvoruholník so stranami $|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$. Nech MN a PQ sú dve úsečky kolmé na BD a také, že ich vzdialenosť (vzdialenosť ich najbližších bodov) je $d > \frac{|BD|}{2}$, $M \in AD$, $N \in DC$, $P \in AB$ a $Q \in BC$. Dokážte, že obvod šesťuholníka $AMNCQP$ nezávisí od polohy úsečiek MN a PQ, ale len od ich vzdialenosti d.

(Asian Pacific olymp. 96)

4.3 Dané sú prirodzené čísla m, n, $n \leqq m$. Dokážte, že platí

$$2^n n! \leqq \frac{(m+n)!}{(m-n)!} \leqq (m^2+m)^n.$$

(Asian Pacific olymp. 96)

4.4 Dané sú štyri body P_1, P_2, P_3 a P_4 ležiace na jednej kružnici. Označme po rade I_1, I_2, I_3 a I_4 stredy kružníc vpísaných trojuholníkom $P_2P_3P_4$, $P_1P_3P_4$, $P_1P_2P_4$ a $P_1P_2P_3$. Dokážte, že I_1, I_2, I_3 a I_4 sú vrcholmi obdĺžnika.

(Asian Pacific olymp. 96)

4.5 Ak $2x + y + \sqrt{8x^2 + 4xy + 32y^2} = 3 + 3\sqrt{2}$, tak platí $x^2y \leqq 1$. Dokážte.

(Južná Afrika, MO 96)

4.6 Národná komisia pre manželstvo (NKM) prizvala n manželských párov na vytvorenie 17 diskusných skupín. Je potrebné zabezpečiť nasledujúce predpisy:

- Všetci členovia každej skupiny musia byť rovnakého pohlavia.
- Rozdiel počtu členov každých dvoch rôznych skupín musí byť buď 0 alebo 1.
- Každá skupina má aspoň jedného člena.
- Každý muž aj žena z vybraných 17 párov musí byť práve v jednej diskusnej skupine.

Nájdite všetky n, $n \leqq 1998$, pre ktoré môže NKM tieto diskusné skupiny vytvoriť.

(Asian Pacific olymp. 96)

4.7 Nech a, b a c sú dĺžky strán trojuholníka. Dokážte, že platí

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leqq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Zistite, kedy nastáva rovnosť.

(Asian Pacific olymp. 96)

Piata séria

5.1 Pre n-ticu rôznych reálnych čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ $(n \geqq 4)$ platí: $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ a $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať štyri čísla a, b, c, d tak, aby platili nerovnosti

$$a + b + c + nabc \leqq \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \leqq a + b + d + nabd\,.$$

(Poľsko, MO 94/95)

5.2 Body $A_1, A_2, \dots, A_8$ sú vrcholmi rovnobežnostena so stredom O. Dokážte, že platí

$$4 \cdot \sum_{i=1}^{8} |OA_i|^2 \leqq \left(\sum_{i=1}^{8} |OA_i| \right)^2 .$$

(Poľsko, MO 94/95)

5.3 Daná je kružnica k so stredom O a jej tetiva PQ, ktorá nie je jej priemerom. Vnútri úsečky PQ leží bod A. Nech p, q sú dotyčnice ku kružnici k v bodoch P, Q. Priamka l prechádzajúca bodom A je kolmá na OA, a pretína priamky p, q postupne v bodoch K, L. Dokážte, že platí $|AK| = |AL|$.

(Poľsko, MO 94/95)

5.4 Pre kladné reálne čísla p, q platí $p + q = 1$. Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené čísla m, n platí nerovnosť

$$(1 - p^m)^n + (1 - q^n)^m \geqq 1\,.$$

(Poľsko, MO 94/95)

5.5 Na zjazde sa zúčastnilo $2n$ poslancov. Každý poslanec poznal spomedzi ostatných poslancov aspoň n (poznanie sa je vzájomné). Dokážte, že všetkých poslancov možno ubytovať v dvojposteľových izbách tak, aby každý býval so svojím známym.

(Poľsko, MO 94/95)

5.6 Dané je prvočíslo p. Dokážte, že nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:
1) Existuje také celé číslo n, že číslo $n^2 - n + 3$ je deliteľné číslom p.
2) Existuje také celé číslo m, že číslo $m^2 - m + 25$ je deliteľné číslom p.

(Poľsko, MO 94/95)

5.7 Nech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Dokážte, že ak pre každé reálne číslo x existuje také prirodzené číslo n, že $(\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n})(x) = 1$, tak $f(1) = 1$.

(Poľsko, MO 94/95)

Riešenia súťažných úloh KS SK MO

PRVÁ SÉRIA

1.1 Predpokladajme, že požadovaná konečná množina M existuje. Nech má $n \geqq 3$ kladných prvkov $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Potom čísla

$$a_1^2 + a_2^2 \;<\; a_1^2 + a_3^2 \;<\; \ldots \;<\; a_1^2 + a_n^2 \;<\; a_2^2 + a_n^2 \;<\; \ldots \;<\; a_{n-1}^2 + a_n^2$$

určite všetky patria do M a sú rôzne. Ich počet je však $2n-3$. Ak má platiť $2n-3 \leqq n$, naša množina M môže mať jedine 3 prvky. Nech sú to teda $a_1 < a_2 < a_3$. Potom vďaka $a_1^2 + a_2^2 \;<\; a_1^2 + a_3^2 \;<\; a_2^2 + a_3^2$ vidíme, že musí platiť

$$a_1^2 + a_2^2 = a_1, \tag{1}$$
$$a_1^2 + a_3^2 = a_2, \tag{2}$$
$$a_2^2 + a_3^2 = a_3. \tag{3}$$

Odčítaním vzťahov (1) a (3) dostávame $a_1^2 - a_3^2 = a_1 - a_3$, čo pre $a_1 \neq a_3$ nastáva práve vtedy, keď

$$a_1 + a_3 = 1. \tag{4}$$

Sčítaním rovníc (1) a (3) dostávame

$$a_1^2 + 2a_2^2 + a_3^2 = 1, \quad \text{teda} \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 - a_2^2,$$

zatiaľ čo sčítaním všetkých troch rovníc (1) až (3) potom

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \;=\; \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3) \overset{(4)}{=} \frac{1}{2}(1 + a_2).$$

Porovnaním posledných dvoch rovníc dostávame kvadratickú rovnicu pre a_2, ktorej jediným kladným koreňom je $a_2 = \frac{1}{2}$. Ďalej už len dosadením napríklad do (3) a využitím vzťahu (4) dostávame, že jediným riešením sústavy (1) až (3) v $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ je trojica $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, ktorá však nespĺňa predpoklad rôznosti prvkov kladený na množinu M. Týmto sme podali vyčerpávajúci dôkaz o tom, že množina M požadovaných vlastností nemôže byť konečná.

1.2 Posunom x o jedna pretransformujeme úlohu na nájdenie polynómov, pre ktoré platí

$$f(x)x^{2^n} + g(x)\left((x-1)^{2^n} + 1\right) = 2,$$

alebo ekvivalentne na úlohu nájsť polynóm $g(x)$ s celočíselnými koeficientami, pre ktorý je polynóm $g(x)\left((x-1)^{2^n} + 1\right) - 2$ deliteľný polynómom x^{2^n}. Predpokladajme, že

$g(x)$ má tvar $g(x) = \sum_{i=0}^{2^n-1} c_i x^i$. Zrejme potom po dosadení a porovnaní koeficientov pri rovnakých mocninách x musí byť $c_0 = 1$ (konštanty) a

$$2c_k - \binom{2^n}{1} c_{k-1} + \binom{2^n}{2} c_{k-2} - \ldots + (-1)^k \binom{2^n}{k} = 0 \tag{1}$$

pre $1 \leqq k \leqq 2^n - 1$ (porovnanie pri mocnine k). Z rekurentných rovníc (1) môžeme potom postupne vypočítať $c_1, c_2, \ldots c_{2^n}$. Týmito lineárnymi rovnicami sú koeficienty c_i jednoznačne určené. Ešte treba overiť, či naozaj bude každé c_i celočíselné. Lenže všetky kombinačné čísla $\binom{2^n}{k}$ sú pre $1 \leqq k \leqq 2^n - 1$ párne, a teda každú rovnicu možno vydeliť dvoma. Potom po vyjadrení c_k z (1) bude vždy na druhej strane rovnosti vystupovať súčet a rozdiel celých čísel, čo možno poľahky dokázať indukciou.

1.3 Majme nejakú aritmetickú postupnosť prirodzených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Nech jej diferencia je d. Nech prvá nenulová číslica (odzadu) v d je na i-tom mieste (myslíme tým i-te miesto odzadu v p-adickom zápise). Túto číslicu označme b. Všímajme si číslice na i-tom mieste v našej postupnosti. Nech a je číslica na i-tom mieste čísla a_1. Zrejme sa postupnosti číslic na posledných $i - 1$ miestach nemenia a neovplyvňujú ostatné. Teda číslica na i-tom mieste čísla a_n je

$$(a + bn) \operatorname{MOD} p,$$

kde $x \operatorname{MOD} y$ znamená zvyšok čísla x po delení číslom y. Ukážeme, že pre $n = 0, 1, \ldots, p-1$ dáva výraz $(a + bn) \operatorname{MOD} p$ rôzne, a teda všetky číslice (samozrejme v p-adickej sústave). Dokážeme to sporom. Predpokladajme, že existujú $n_1, n_2 \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, $n_1 \neq n_2$ také, že $a + n_1 b \equiv a + n_2 b \pmod p$. Bez ujmy na všeobecnosti nech $n_1 > n_2$. Potom $b(n_1 - n_2) \equiv 0 \pmod p$. Ale pretože p je prvočíslo a $0 < b < p$, tak $0 < n_1 - n_2 < p$, čo je spor.

Dostali sme teda, že v každej p-člennej aritmetickej postupnosti sa vyskytujú na prvom nenulovom mieste všetky číslice. Maximálna dĺžka aritmetickej postupnosti, ktorá neobsahuje číslicu $k \in \{1, \ldots, p-1\}$, je teda najviac $p - 1$. Jedinú výnimku tvorí číslica 0, ktorá keď je na začiatku, nepíše sa. Potom pre $k = 0$ môže mať postupnosť dĺžku najviac p. Postupnosti týchto dĺžok naozaj existujú:

$$\begin{aligned}
k = 0: &\quad 1,\ 11,\ 21,\ 31,\ \ldots,\ \overline{(p-1)1}, \\
k = 1: &\quad 22,\ 23,\ 24,\ \ldots,\ \overline{2(p-1)},\ 30, \\
k \neq 0, 1: &\quad k+1,\ k+2,\ \ldots,\ p-1,\ 10,\ 11,\ \ldots,\ \overline{1(k-1)},
\end{aligned}$$

teda pre $k \in \{1, \ldots, p-1\}$ je maximálna dĺžka požadovanej aritmetickej postupnosti $p - 1$ a pre $k = 0$ je jej maximálna dĺžka p.

1.4 Označme B_1 a C_1 po rade stredy oblúkov kružnice opísanej trojuholníku ABC medzi bodmi AC a AB, neobsahujúce vrchol B, resp. C (obr. 48). Keďže R_p a S_p sú stredy kružníc vpísaných trojuholníkom ABP a ACP, platí

$$|C_1A| = |C_1B| = |C_1R_p|, \qquad |B_1A| = |B_1C| = |B_1S_p|.$$

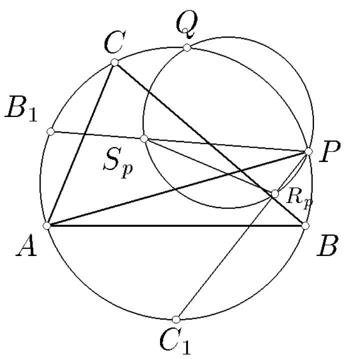
(Kým prvé polovice rovností sú zrejmé, druhé sa ľahko dokážu pomocou uhlov.) Označme O stred kružnice k opísanej trojuholníku ABC a označme Q druhý priesečník k s kružnicou l_P opísanou trojuholníku PR_pS_p. Keďže C_1R_p a B_1S_p prechádzajú cez P, dostávame

$$|\sphericalangle PC_1Q| = |\sphericalangle PB_1Q| \qquad \text{(obvodové uhly kružnice } k\text{)},$$
$$|\sphericalangle B_1S_pQ| = \pi - |\sphericalangle QS_pP| = \pi - |\sphericalangle QR_pP| = |\sphericalangle C_1R_pQ| \qquad \text{(obvodové uhly v } l_P\text{)}.$$

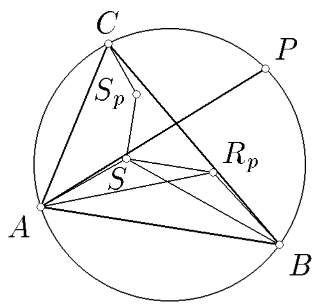
Preto sú trojuholníky QR_pC_1 a QS_pB_1 podobné, a teda

$$\frac{|QC_1|}{|QB_1|} = \frac{|C_1R_p|}{|B_1S_p|} = \frac{|C_1A|}{|B_1A|},$$

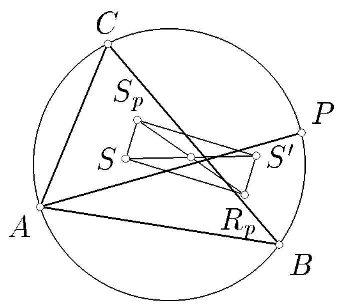
kde posledný pomer je konštantný (vzhľadom na polohu bodu P). Preto sa Q pohybuje po kružnici (Appolóniovej). Na druhej strane Q leží na kružnici k, preto musí byť priesečníkom k a spomínanej Appolóniovej kružnice. Bod A je zrejme jedným z týchto priesečníkov, ale zjavne nevyhovuje podmienke na bod Q. Preto má bod Q konštantnú polohu a nezávisí od polohy bodu P, je teda riešením časti a) tejto úlohy.



Obr. 49



Obr. 50



Obr. 51

Označme S stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC (obr. 49). V druhej časti najprv dokážeme, že štvoruholník ASR_pB je tetivový. Z vlastností stredu vpísanej kružnice (leží na priesečníku osí uhlov) totiž okamžite vyplýva, že pre uhly $\sphericalangle ASB$ a $\sphericalangle AR_pB$ platí

$$|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle AR_pB| = \frac{\pi}{2} + \frac{|\sphericalangle ACB|}{2},$$

čím je tvrdenie o tetivovom štvoruholníku dokázané. Obdobne sa ukáže, že aj štvoruholník ASS_pC je tetivový. Ak teraz označíme $|\sphericalangle R_pBA| = \varphi$ a $|\sphericalangle S_pCA| = \psi$, dostávame postupne $|\sphericalangle ABP| = 2\varphi$ a $|\sphericalangle ACP| = 2\psi$. Z tetivového štvoruholníka $ABPC$ potom $\varphi + \psi = \dfrac{\pi}{2}$. Pre obvodové uhly tetivového štvoruholníka ASR_pB platí $|\sphericalangle ASR_p| = \pi - \varphi$, a podobne $|\sphericalangle ASS_p| = \pi - \psi$. Preto potom $|\sphericalangle S_pSR_p| = \varphi + \psi = \dfrac{\pi}{2}$, a teda bod S vyhovuje časti b).

Označme S' stred kružnice vpísanej trojuholníku BPC (obr. 50). V časti b) sme dokázali, že $|\sphericalangle R_pSS_p| = \frac{\pi}{2}$. Zo symetrie analogicky vyplýva

$$|\sphericalangle SR_pS| = |\sphericalangle R_pS'S_p| = |\sphericalangle S'S_pS| = |\sphericalangle S_pSR_p| = \frac{\pi}{2}.$$

Z toho potom okamžite dostávame, že $SR_pS'S_p$ je obdĺžnik a jeho uhlopriečky R_pS_p a SS' sa teda rozpoľujú. Ich priesečník označme U. Keďže veľkosť $\sphericalangle CS'B$ je konštantná $\left(\text{rovná } \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{|\sphericalangle BAC|}{2}\right)$, bod S' sa pohybuje po nejakej kružnici s. Bod U je však obrazom bodu S' v rovnoľahlosti so stredom S a koeficientom $\dfrac{1}{2}$. Bod U teda leží na kružnici, ktorá je obrazom kružnice s v tejto rovnoľahlosti. Tým je tvrdenie dokázané.

1.5 *(Kristína Černeková)* Dokážeme najprv nasledovnú Lemu:

Lema. Nech $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$; $b_1 < b_2 < \ldots < b_k$ *sú reálne čísla a nech* π *je nejaká permutácia množiny* $\{1, 2, \ldots, k\}$ *rôzna od identity. Potom platí:*

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots a_kb_k \;>\; a_1b_{\pi(1)} + a_2b_{\pi(2)} + \ldots + a_kb_{\pi(k)}\,.$$

Dôkaz. Dokazujeme matematickou indukciou podľa k.

1° Ak $k = 1$, potom neexistuje žiadna permutácia jednoprvkovej množiny $\{1\}$ rôzna od identity.
Ak $k = 2$, tak jediná prípustná permutácia je $\pi(1) = 2$, $\pi(2) = 1$. Potom nerovnosť $a_1b_1 + a_2b_2 \;>\; a_1b_2 + a_2b_1$ je ekvivalentná s nerovnosťou $(a_2 - a_1)(b_2 - b_1) \;>\; 0$, ktorá zrejme platí.

2° Predpokladajme, že nerovnosť platí pre $k = n$. Ukážeme, že platí aj pre $k = n + 1$. Majme teda nejakú permutáciu π množiny $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$ rôznu od identity. Ak $\pi(n+1) \neq n+1$, vezmime také p, q z množiny $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$, že $\pi(n+1) = p$, $\pi(q) = n+1$. Potom platí nerovnosť

$$a_{n+1}b_{n+1} + a_qb_p \;>\; a_qb_{n+1} + a_{n+1}b_p\,, \tag{1}$$

pretože je ekvivalentná s nerovnosťou $(a_{n+1} - a_q)(b_{n+1} - b_p) \;>\; 0$, ktorá zrejme platí. Vezmime teraz novú permutáciu φ na množine $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$ takú, že $\varphi(n+1) = n+1$, $\varphi(q) = p$ a $\varphi(i) = i$ pre každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq q$

(len vymeníme hodnoty v p a $n+1$). Ak by bolo $\pi(n+1) = n+1$, vezmeme permutáciu $\varphi \equiv \pi$. Potom nám φ indukuje permutáciu φ' množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ (pričom $\varphi'(i) = \varphi(i)$ pre každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$). Ak φ' nie je identita, potom podľa indukčného predpokladu platí:

$$a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n + a_{n+1} b_{n+1} > a_1 b_{\varphi'(1)} + \ldots + a_n b_{\varphi'(n)} + a_{n+1} b_{n+1} =$$
$$= a_1 b_{\varphi(1)} + \ldots + a_n b_{\varphi(n)} + a_{n+1} b_{\varphi(n+1)} \overset{(1)}{>} a_1 b_{\pi(1)} + \ldots + a_n b_{\pi(n)} + a_{n+1} b_{\pi(n+1)} .$$

Ak φ' je identita, tak prvá nerovnosť sa zmení na rovnosť.
Tým je dôkaz Lemy skončený.

Vráťme sa teraz k dôkazu samotného tvrdenia zo zadania. Pre $k = 1$ tvrdenie zrejme platí, pretože na množine $\{1\}$ neexistuje permutácia rôzna od identity. Ďalej nech je $k \geqq 2$. Majme teraz reálne čísla $w_1 < w_2 < \ldots < w_k$ a vezmime si ľubovoľné celé čísla $m_1 < m_2 < \ldots < m_k$.

Označme $K = \sum_{i=1}^{k} m_i w_i$, $W = \sum_{i=1}^{k} w_i$ a vezmime množinu

$$\mathcal{A} = \left\{ \sum_{i=1}^{k} m_i w_{\pi(i)};\ \pi \text{ je permutácia množiny } \{1, 2, \ldots, k\} \text{ rôzna od identity} \right\} .$$

Potom $\mathcal{A}$ je neprázdna a konečná. Nech M je maximálny prvok množiny $\mathcal{A}$. Podľa Lemy potom platí $M < K$. Zrejme existuje $L \in \mathbb{R}$, $M < L < K$, že číslo $\frac{L+K}{2W}$ je racionálne.

Nech je to číslo $\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Vezmime teraz $n_i = q m_i - p$, pre $i = 1, 2, \ldots, k$. Ukážeme, že čísla $n_1, n_2, \ldots, n_k$ sú naše hľadané. Platí

$$\sum_{i=1}^{k} n_i w_i = q \cdot \sum_{i=1}^{k} m_i w_i - p \cdot \sum_{i=1}^{k} w_i = qK - pW = qK - q \cdot \frac{L+K}{2W} \cdot W =$$
$$= q \cdot \left(K - \frac{L+K}{2} \right) = q \cdot \frac{K-L}{2} > 0 .$$

Ak π je permutácia množiny $\{1, 2, \ldots, k\}$ rôzna od identity, potom

$$\sum_{i=1}^{k} n_i w_{\pi(i)} = q \cdot \sum_{i=1}^{k} m_i w_{\pi(i)} - p \cdot \sum_{i=1}^{k} w_{\pi(i)} \leqq qM - pW < qL - q \cdot \frac{L+K}{2W} \cdot W =$$
$$= q \cdot \left(L - \frac{L+K}{2} \right) = q \cdot \frac{L-K}{2} < 0 .$$

Teda čísla $n_1, n_2, \ldots, n_k$ naozaj vyhovujú zadaniu.

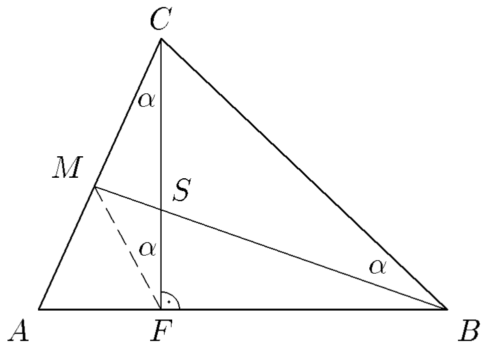
1.6 Označme S priesečník BM a FC a α veľkosť uhlov MBC a FCM (obr. 51). Keďže trojuholník ACF je pravouhlý a M je stredom strany AC, platí $|MC| = |MF|$, a teda $|\sphericalangle MCF| = |\sphericalangle MFC| = \alpha$. Potom sú však trojuholníky FSM a BSC podobné, čiže:

$$\frac{|FS|}{|BS|} = \frac{|SM|}{|SC|}, \qquad \text{a teda} \qquad \frac{|FS|}{|SM|} = \frac{|BS|}{|SC|}.$$

To však znamená, že aj trojuholníky FBS a MCS sú podobné, z čoho vyplýva, že $|\sphericalangle SMC| = |\sphericalangle SFB| = 90°$. Tým sme dokázali, že BM je zároveň ťažnicou aj výškou na stranu b, čo je ekvivalentné s $|BC| = |BA|$. Ďalej platí:

$$2P_{ABC} = c \cdot v_c = |AB| \cdot |FC| = |AC| \cdot |BM| = b \cdot v_b\,.$$

Keďže $|FC| = |BM|$ (zo zadania), zjavne aj $|AC| = |AB|$. Zároveň však $|BC| = |BA|$, takže trojuholník ABC je rovnostranný.



Obr. 52

1.7 *(Peter Novotný)* Zrejme ak $x > 0$ a vyhovuje podmienkam, tak podmienkam vyhovuje aj číslo $-x$, lebo desatinná časť sa so znamienkom nemení. Uvažujme len prípad $x > 0$. Má platiť $x^2 - x = l$, $x^n - x = k$, kde k, l sú nejaké celé čísla. Teda x vyhovuje rovniciam

$$x^2 - x - l = 0\,, \tag{1}$$
$$x^n - x - k = 0\,. \tag{2}$$

Z rovnice (1) dostávame, že $x = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1+4l}\right)$. To znamená, že $l \geqq 0$ (pretože aby x bolo reálne, musí byť $l \geqq -\frac{1}{4}$, ale $l \in \mathbb{Z}$). Možnosťou $x = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1+4l}\right)$ sa nebudeme zaoberať, lebo vtedy $x < 0$. Označme si $m = 1 + 4l$. Potom z rovnice (2) máme

$$\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)^n - \frac{1+\sqrt{m}}{2} = k\,.$$

Ak m je štvorec, tak zrejme $\sqrt{m}$ je nepárne, a teda číslo $x = \frac{1}{2}\,(1 + \sqrt{m})$ je celé. Ďalej nech m nie je štvorec (potom aj $m > 1$). Potom je číslo $\sqrt{m}$ zrejme iracionálne.

Rozlíšime dva prípady:
(1) n je párne. Nech $n = 2s$, kde $s \in \mathbb{N}$. Počítajme

$$x^n = \left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)^{2s} = \frac{1}{2^{2s}} \sum_{i=0}^{2s} \binom{2s}{i} \left(\sqrt{m}\right)^i =$$
$$= \frac{1}{2^{2s}} \left[\sum_{i=0}^{s} \binom{2s}{2i} m^i + \sqrt{m} \sum_{i=0}^{s-1} \binom{2s}{2i+1} m^i\right].$$

Porovnaním iracionálnych častí v rovnosti $x + k = x^n$ dostávame (pretože $n > 1$):

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2^{2s}} \sum_{i=0}^{s-1} \binom{2s}{2i+1} m^i > \frac{1}{2^{2s}} \sum_{i=0}^{s-1} \binom{2s}{2i+1} = \frac{1}{2^{2s}} \cdot 2^{2s-1} = \frac{1}{2},$$

čo je spor.
(2) n je nepárne. Nech $n = 2s + 1$, kde $s \in \mathbb{N}$. Potom

$$x^n = \left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)^{2s+1} = \frac{1}{2^{2s+1}} \sum_{i=0}^{2s+1} \binom{2s+1}{i} \left(\sqrt{m}\right)^i =$$
$$= \frac{1}{2^{2s+1}} \left[\sum_{i=0}^{s} \binom{2s+1}{2i} m^i + \sqrt{m} \sum_{i=0}^{s} \binom{2s+1}{2i+1} m^i\right].$$

Porovnaním iracionálnych častí v rovnosti $x + k = x^n$ dostávame (pretože $n > 1$):

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2^{2s+1}} \sum_{i=0}^{s} \binom{2s+1}{2i+1} m^i > \frac{1}{2^{2s+1}} \sum_{i=0}^{s} \binom{2s+1}{2i+1} = \frac{1}{2^{2s+1}} \cdot 2^{2s} = \frac{1}{2},$$

čo je opäť spor.
Tým sme dokázali, že m je štvorec, a teda x je celé číslo.

Poznámka: V oboch častiach sme použili rovnosť $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots = 2^{n-1}$. Jej platnosť vyplýva z identity $\frac{1}{2}\left[(1+1)^n - (1-1)^n\right] = 2^{n-1}$.

Druhá séria

2.1 Jednoduchou úpravou dostávame:

$$V = (a+d)^2 + (b-c)^2 = A^2 + B^2 + 2(ad - bc - cd).$$

Voľme pevné c a d. Evidentne V bude maximálne práve vtedy, keď ad bude maximálne a bc minimálne. To znamená, že $a = A$, $b = 0$. Výraz V má teda maximum rovné $A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$ (pre $d = B$, $c = 0$).

Hľadajme teraz minimum. Pri pevných c a d nadobúda V minimum, ak $a = 0$, $b = A$. Hľadáme teda minimum funkcie $f(c) = A^2 + B^2 - 2\left(bc + cB - c^2\right)$. Z jej grafu vidíme:

1) Ak $B \geqq A$, tak f má minimum v bode $c = \frac{1}{2}(A + B)$, a to je rovné $\frac{1}{2}(A - B)^2$.
2) Ak $B < A$, tak f má minimum v bode $c = B$, a to je rovné $(A - B)^2$.

2.2 Využitím $f(x) = f\left(x^2 + x + 1\right)$ pre $x \in \mathbb{Z}$ dostávame

$$f(-x-1) = f\Big((-x-1)^2 + (-x-1) + 1\Big) = f\left(x^2 + x + 1\right) = f(x)\,.$$

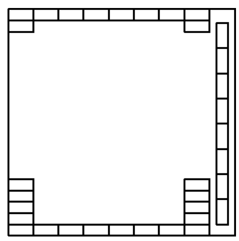
To znamená, že pre každé $x \in \mathbb{Z}$ platí

$$f(-x-1) = f(x)\,. \tag{1}$$

a) Ak f je párna funkcia, tak platí $f(x) = f(-x)$, a teda aj $f(-x-1) = f(x+1)$. Dosadením do (1) dostávame $f(x) = f(x+1)$ pre každé $x \in \mathbb{Z}$. To ale znamená, že $f(x) = a$ pre každé $x \in \mathbb{Z}$. Riešením je teda každá párna funkcia taká, že $f(x) = a$ pre každé $x \in \mathbb{Z}$.
b) Ak f je nepárna funkcia, tak platí $f(x) = -f(-x)$, a teda aj $f(-x-1) = -f(x+1)$. Dosadením do (1) dostávame $f(x) = -f(x+1)$ pre každé $x \in \mathbb{Z}$. Z toho vyplýva $f(0) = -f(1)$. Zároveň však (zo zadania) máme $f(0) = f(1)$. To znamená, že $f(1) = -f(1)$, a teda $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. Potom ale $f(x) = 0$ pre každé $x \in \mathbb{Z}$. Riešením je teda každá nepárna funkcia taká, že $f(x) = 0$ pre každé $x \in \mathbb{Z}$.

Zrejme všetky nájdené funkcie sú naozaj riešením úlohy.

2.3 Označme $\mathcal{K}$ obdĺžnik s výškou 2,01 a šírkou 12,01. Na jeho vodorovnej osi uvažujme úsečku dĺžky 10 rovnako vzdialenú od zvislých strán obdĺžnika (nazvime ju stredová úsečka). Vzdialenosť ľubovoľného bodu tejto úsečky od obvodu obdĺžnika je viac ako 1. Ak teda umiestnime do roviny 2 neprekrývajúce sa obdĺžniky $\mathcal{K}$, vzdialenosť ľubovoľných dvoch bodov na ich stredových úsečkách je viac ako 2. Preto do roviny nemožno umiestniť kruh s polomerom 1, ktorý má spoločný bod s dvoma takýmito úsečkami.



Obr. 53

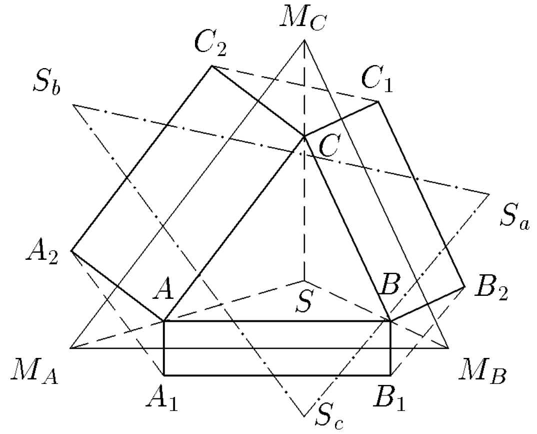
Do štvorca 100×100 umiestnime 49 neprekrývajúcich sa riadkov, v každom 8 neprekrývajúcich sa obdĺžnikov $\mathcal{K}$. Keďže však $8 \cdot 12,01 + 2,01 < 100$, možno ešte umiestniť do štvorca ďalších aspoň 8 obdĺžnikov (obr. 52). Každá z ich 400 stredových úsečiek musí mať spoločný bod s aspoň jedným kruhom, preto sa vo štvorci musí nachádzať aspoň 400 kruhov.

2.4 Zrejme žiadne z osí strán obdĺžnikov nie sú rovnobežné. Použijeme nasledujúcu lemu:

Lema. Ak trojuholník $A'B'C'$ leží vo vnútri trojuholníka ABC, kde $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $CA \parallel C'A'$, potom majú priamky AA', BB' a CC' spoločný priesečník.

Dôkaz. Stačí použiť rovnoľahlosť so stredom Q – spoločným priesečníkom priamok AA' a BB'.

Označme osi úsečiek BB_2, CC_2, AA_1 po rade a, b, c a ich priesečníky M_A, M_B, M_C (obr. 53). Vďaka tejto konštrukcii majú trojuholníky ABC a $M_AM_BM_C$ rovnobežné strany. Použitím lemy majú teda priamky AM_A, BM_B a CM_C jeden spoločný priesečník S ležiaci vnútri trojuholníka ABC.



Obr. 54

Označme teraz S_a, S_b, S_c po rade obrazy bodu S v osových súmernostiach podľa priamok a, b, c. Pretože sú body M_A, A a S kolineárne, musia byť aj ich obrazy (osová súmernosť podľa b) M_a, A_2, S_b kolineárne. Analogicky musia byť kolineárne aj body M_A, A_1 a S_c.

Pretože $|M_AA_2| = |M_AA| = |M_AA_1|$ a $|M_AS_b| = |M_AS| = |M_AS_c|$, sú trojuholníky $A_1A_2M_A$ a $S_cS_bM_A$ rovnoramenné. Štvoruholník $A_1S_cS_bA_2$ je teda rovnoramenný lichobežník. Odtiaľ dostávame, že osi úsečiek A_1A_2 a S_bS_c splynú. Z rovnakých dôvodov splynú aj osi úsečiek B_1B_2 a S_cS_a, resp. C_1C_2 a S_aS_b. Preto sú osi úsečiek A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 osami strán trojuholníka $S_aS_bS_c$ a majú teda jediný spoločný priesečník.

2.5 *(František Kardoš)*

a) Keďže $a \geqq 3$, $\delta(a) \geqq 1$ a $2^{\delta(a)-1}$ je prirodzené číslo. Čísla a, b sú nepárne, číslo $b-3$ je párne nezáporné, teda $2^{\delta(a)-1}(b-3)+a$ je nepárne a väčšie alebo rovné trom, teda z množiny S.

b) Najprv ukážeme, že
$$\delta(a*b) = \delta(a) + \delta(b) - 1. \tag{1}$$

Totiž $2^{\delta(a)} < a < 2^{\delta(a)+1}$, teda $2^{\delta(a)} \leqq a-1$ a $a+1 \leqq 2^{\delta(a)+1}$. Podobne $2^{\delta(b)} \leqq b-1$ a $b+1 \leqq 2^{\delta(b)+1}$. Potom

$$a*b = 2^{\delta(a)-1}(b-3)+a > 2^{\delta(a)-1}\left(2^{\delta(b)}-2\right)+2^{\delta(a)} \quad = 2^{\delta(a)+\delta(b)-1},$$
$$a*b = 2^{\delta(a)-1}(b-3)+a < 2^{\delta(a)-1}\left(2^{\delta(b)}-4\right)+2^{\delta(a)+1} = 2^{\delta(a)+\delta(b)}.$$

Keďže

$$2^{\delta(a)+\delta(b)-1} < a * b < 2^{\delta(a)+\delta(b)},$$

platí (1). Potom úpravami dostávame aj požadované tvrdenie b):

$$\begin{aligned}(a * b) * c &= 2^{\delta(a*b)-1}(c-3) + (a*b) = 2^{\delta(a)+\delta(b)-2}(c-3) + 2^{\delta(a)-1}(b-3) + a = \\ &= 2^{\delta(a)-1}\left(2^{\delta(b)-1}(c-3) + b - 3\right) + a = 2^{\delta(a)-1}((b*c)-3) + a = a * (b * c).\end{aligned}$$

2.6 *(Kristína Černeková)* Zrejme pre každé $i = 1, 2, \ldots, n$ je $a_i \geqq 1$, a teda musí byť $n \leqq 12$. Rozoberieme niekoľko špeciálnych prípadov.

- Ak $n = 1$, potom $a_1 = 12$, čo nemôže nastať, lebo $2^2 \mid 12$.
- Ak $n = 2$, potom pre $m = 98$ platí

$$98 + 1 = 11 \cdot 3^2\,, \qquad 98 + 2 = 1 \cdot 10^2\,.$$

- Ak $n = 3$, potom pre $m = 3$ platí

$$3 + 1 = 1 \cdot 2^2\,, \qquad 3 + 2 = 5 \cdot 1^2\,, \qquad 3 + 3 = 6 \cdot 1^2\,.$$

Ďalej ukážeme, že pre päť za sebou idúcich čísel musia byť čísla a_i po dvoch rôzne. Dokážeme to sporom. Nech $a_i = a_j = a$, pričom $i < j$ a $j - i \leqq 4$. Potom

$$a \cdot (2b_i + 1) = a \cdot \left((b_i + 1)^2 - b_i^2\right) \leqq a \cdot \left(b_j^2 - b_i^2\right) = (m + j) - (m + i) \leqq 4 \qquad (1)$$

Ak $a = 1$, tak musí byť $b_i \geqq 2$ (pretože $a_i b_i^2 = m + i \geqq 1 + 1 = 2$), čo je ale spor s (1). Ak $a \geqq 2$, opäť dostávame spor s (1) (pretože $b_i \geqq 1$).

To znamená, že pre $n \geqq 5$ sú $a_1, \ldots, a_5$ po dvoch rôzne prirodzené čísla. Potom ale $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \geqq 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, čo je spor.

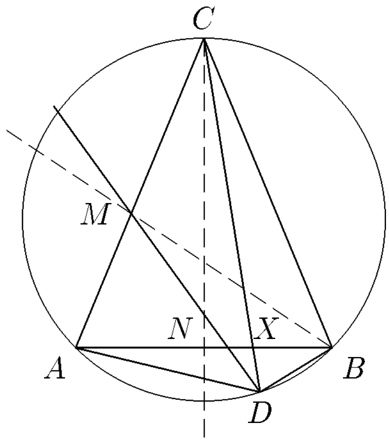
Zostáva už len vyšetriť prípad $n = 4$. Pretože musia byť čísla a_1, a_2, a_3, a_4 po dvoch rôzne, musí platiť $\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = \{1, 2, 3, 6\}$ (lebo nemôže byť $a_i = 4$). Pretože dve z čísel $m+1, m+2, m+3, m+4$ sú deliteľné číslom 3, musia to byť čísla $m+1$ a $m+4$. Potom $\{m+1, m+4\} = \{3, 6\}$ a $\{m+2, m+3\} = \{1, 2\}$. Odtiaľ dostávame

$$\begin{aligned}2 &= (m+2)(m+3) - (m+1)(m+4) = \\ &= 2b_2^2 b_3^2 - 18 b_1^2 b_4^2 = 2(b_2 b_3)^2 - 2(3b_1 b_4)^2\,, \\ 1 &= (b_2 b_3)^2 - (3 b_1 b_4)^2\,.\end{aligned}$$

To ale nie je možné (zrejme rovnica $x^2 - y^2 = 1$ nemá v $\mathbb{N}$ riešenie).

Na záver stačí len povedať, že jedinými riešeniami úlohy sú $n = 2$ a $n = 3$.

2.7 *(Juraj Földes)* Označme dĺžky strán a uhly trojuholníka ABC ako obyčajne. Nech X je priesečník AB a CD (obr. 54). Ďalej nech $d = |CD|$, $k = |AD|$, $l = |BD|$, $b_1 = |AM|$, $b_2 = |CM|$, $c_1 = |AN|$, $c_2 = |BN|$, $p_1 = |AX|$, $p_2 = |BX|$, $d_1 = |DX|$, $d_2 = |CX|$ a $\delta = |\sphericalangle AMB|$.



Obr. 55

Treba dokázať, že platí

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{k} + \frac{1}{d}.$$

Z *Menelaovej vety* pre body M, N a D na stranách trojuholníka AXC dostávame

$$\frac{|CM|}{|AM|} \cdot \frac{|AN|}{|XN|} \cdot \frac{|XD|}{|CD|} = 1, \qquad \text{teda} \qquad \frac{c_1}{p_1 - c_1} = \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{d}{d_1}. \tag{1}$$

Z podobnosti trojuholníkov ACX a DBX podľa vetu uu (obvodové uhly $|\sphericalangle BXD| = |\sphericalangle CXA|$ a $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CDB|$) a z podobnosti trojuholníkov AXD a CXB (obdobné dôvody) vyplýva

$$\frac{d_1}{p_1} = \frac{l}{b} \qquad \text{a} \qquad \frac{d_1}{p_2} = \frac{k}{a}.$$

Spojením týchto vzťahov

$$\frac{lp_1}{v} = d_1 = \frac{k(c - p_1)}{a}.$$

Z toho potom

$$p_1 = \frac{bck}{la + kb} \qquad \text{a} \qquad d_1 = \frac{l}{b} p_1 = \frac{lck}{la + kb}. \tag{2}$$

Keďže BM a CN sú osi uhlov trojuholníka ABC, zrejme platí

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{c}{a} \qquad \text{a} \qquad c_1 = \frac{bc}{a + b}. \tag{3}$$

Po dosadení (2) a (3) do (1) dostávame po jednoduchých úpravách

$$kl = dk - al, \qquad \text{teda} \qquad \frac{1}{d} + \frac{1}{k} = \frac{1}{l},$$

čo bolo treba dokázať.

Tretia séria

3.1 Odčítame druhú rovnicu do prvej a upravíme

$$x - y - \left(x^2 - y^2\right) = 0\,,$$
$$(x-y)(1-x-y) = 0\,. \tag{1}$$

Analogicky

$$(y-z)(1-y-z) = 0\,, \tag{2}$$
$$(z-x)(1-z-x) = 0\,. \tag{3}$$

Rovnice (1), (2) a (3) sú zrejme nutnou podmienkou na to, aby trojica (x, y, z) bola riešením pôvodnej sústavy.

1) Predpokladajme najprv, že $x \neq y \neq z \neq x$. Potom podľa (1), (3) platí $x + y = 1 = y + z$, čiže aj $x = z$, čo je spor.
2) Predpokladajme, že práve dve z čísel x, y, z sú rovnaké (nech teda $x = y \neq z$). Z (3) vieme, že $z = 1 - x$, čiže aj $x \neq 1 - x$, a teda $x \neq \frac{1}{2}$. Inak môžeme uvažovať riešenie sústavy v tvare $(x, x, 1 - x)$. Dosadíme do pôvodných rovníc a dostávame jedinú podmienku
$$2x^2 - x + 1 - a = 0\,. \tag{4}$$
Riešime teda kvadratickú rovnicu s parametrom a:
$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{8a-7}}{4}\,, \quad \text{pričom } a \geqq \frac{7}{8}\,.$$
Ľahko vypočítame, že $x = \frac{1}{2}$ iba pre $a = 1$ (aj to len x_1). Obrátene to znamená, že pre $a = 1$ spĺňa podmienky len $x_2 = 0$. Skúškou sa ľahko presvedčíme, že riešenia $(x_1, x_1, 1 - x_1)$ a $(x_2, x_2, 1 - x_2)$ naozaj vyhovujú zadaniu. Analogicky (ak vezmeme $y = z$ alebo $z = x$) dostávame cyklickou zámenou ďalšie štyri riešenia.
3) Predpokladajme, že $x = y = z$. Dosadíme do pôvodných rovníc a dostávame podmienku
$$2x^2 + x - a = 0\,,$$
čiže
$$x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{8a+1}}{4}\,, \quad \text{pričom } a \geqq -\frac{1}{8}\,.$$

Tým sme vyčerpali všetky možnosti. Výsledky úvah si ale ešte raz zosumarizujeme:

- $a \in \left(-\infty, -\frac{1}{8}\right)$. Keďže diskriminanty oboch kvadratických rovníc sú záporné, sústava nemá riešenie.
- $a = -\frac{1}{8}$. Sústava má jediné riešenie $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$
- $a \in \left(-\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right)$. Sústava má dve riešenia (x_3, x_3, x_3), (x_4, x_4, x_4).

- $a = \frac{7}{8}$. Sústava má päť riešení $\left(\frac{-1\pm\sqrt{8}}{4}, \frac{-1\pm\sqrt{8}}{4}, \frac{-1\pm\sqrt{8}}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.
- $a \in \left(\frac{7}{8}, 1\right) \cup (1, \infty)$. Sústava má osem riešení (x_3, x_3, x_3), (x_4, x_4, x_4), $(x_1, x_1, 1 - - x_1)$, $(x_1, 1-x_1, x_1)$, $(1-x_1, x_1, x_1)$, $(x_2, x_2, 1-x_2)$, $(x_2, 1-x_2, x_2)$, $(1-x_2, x_2, x_2)$.
- $a = 1$. Sústava má 5 riešení $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $(1, 1, 1)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ $(1, 0, 0)$.

3.2 Zrejme ak $n = 1$, tak n sa nedá napísať ako súčet dvoch prirodzených čísel. Rozoberieme teraz dva prípady:

1) Najprv dokážeme, že každé zložené číslo je *korešpondenčné*. Nech teda $n = pq$, kde p, q sú prirodzené čísla väčšie ako 1. Zvoľme $a = p$, $x = 1$, $b = p(q-1)$, $y = (p-1)(q-1)$. Potom zrejme platí

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{p} + \frac{(p-1)(q-1)}{p(q-1)} = 1\,,$$
$$a + b = p + p(q-1) = pq = n\,.$$

2) Nech n je prvočíslo. Sporom dokážeme, že n nie je *korešpondenčné*. Nech a, b, x, y sú také prirodzené čísla, že platí

$$a + b = n\,, \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\,.$$

Označme d najväčší spoločný deliteľ čísel a, b. Potom $d \leqq a < n$, $d \mid a + b = n$. Ale n je prvočíslo. Teda musí byť $d = 1$, čo znamená, že čísla a, b sú nesúdeliteľné. Zrejme $bx + ya = ab$. Z toho vyplýva $a \mid xb$ a $b \mid ya$. Nakoľko sú a, b nesúdeliteľné, platí $a \mid x$, $b \mid y$. Položme $x = ax'$, $y = by'$, kde $x', y' \in \mathbb{N}$. Potom

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{ax'}{a} + \frac{by'}{b} = x' + y' \geqq 1 + 1 = 2\,,$$

čo je v spore s predpokladom.

Z uvedených skutočností vyplýva, že *korešpondenčnými* číslami sú všetky zložené čísla a žiadne iné.

3.3 *(Kristína Černeková)*

a) Vytvorme postupnosť funkcií $A_n(x) = \dfrac{(1+\sqrt[3]{x})^n}{\sqrt[3]{x^2}}$. Zrejme potom pre $n \geqq 2$ platí $A_n(x) = B_n(x) + C_n(x)\sqrt[3]{x} + D_n(x)\sqrt[3]{x^2}$, kde $B_n(x), C_n(x)$ a $D_n(x)$ sú jednoznačne určené racionálne lomené funkcie (až na prvý člen polynómy). Z *binomickej vety* okamžite vyplýva, že $B_n(x) \equiv P_n(x)$. Ak dokážeme, že $A_n(x)$ vyhovuje zadanému rekurentnému vzťahu, bude mu vyhovovať aj $B_n(x)$, teda aj $P_n(x)$. To, že platí $A_{n+3}(x) = 3A_{n+2}(x) - - 3A_{n+1}(x) + (x+1)A_n(x)$ sa ľahko overí výpočtom. Tým je časť a) dokázaná.

b) Matematickou indukciou dokážeme, že všetky čísla tvaru $a = 3k - 1$, $k \in \mathbb{N}$ vyhovujú zadanej podmienke.

1° Pre $n = 3$ a $n = 4$ tvrdenie triviálne platí. Pre $n = 5$ je $P_5(x) = 10 + x$, teda pre $a = 3k - 1$ platí $P_5(a^3) = 10 + (3k - 1)^3$. Poľahky sa overí, že $9|P_5(a^3)$.

2° Nech tvrdenie platí pre všetky prirodzené čísla l, $l \leqq n + 2$, $n \geqq 3$, $l \geqq 3$. Najprv uvažujme prípad keď je n nepárne. Podľa indukčného predpokladu $3^{l+1}|P_{n+2}(a^3)$, $3^l|P_{n+1}(a^3)$ a $3^l|P_n(a^3)$. Nakoľko $9|a^3 + 1$, platí

$$3^{l+1} \,|\, 3P_{n+2}(a^3) - 3P_{n+1}(a^3) + (a^3 + 1)P_n(a^3), \qquad \text{teda} \qquad 3^{l+1} \,|\, P_{n+3}(a^3).$$

Nech je teraz n párne. Podľa indukčného predpokladu $3^l|P_{n+2}(a^3)$, $3^l|P_{n+1}(a^3)$ a $3^{l-1}|P_n(a^3)$. Nakoľko $9|a^3 + 1$, tak

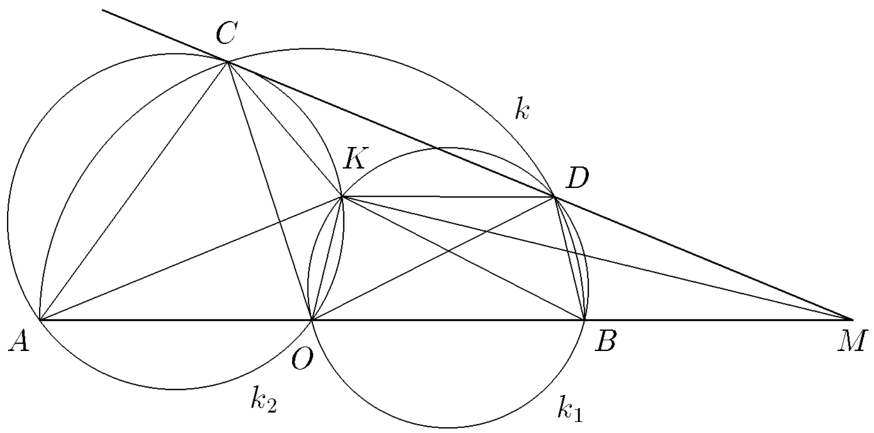
$$3^{l+1} \,|\, 3P_{n+2}(a^3) - 3P_{n+1}(a^3) + (a^3 + 1)P_n(a^3), \qquad \text{teda} \qquad 3^{l+1} \,|\, P_{n+3}(a^3).$$

Tým sme dokázali, že všetky čísla tvaru $a = 3k - 1$, $k \in \mathbb{N}$ vyhovujú zadaniu úlohy. Ešte treba dokázať, že žiadne iné už nevyhovujú, ale to vyplýva z toho, že tvrdenie musí platiť pre $n = 5$, teda $9|10 + a^3$. Ľahkým rozdiskutovaním zvyškových tried modulo 3 zistíme, že vyhovujú len spomínané čísla a.

3.4 *(Juraj Földes)* Označme veľkosti uhlov $\alpha = |\sphericalangle ODC|$, $\beta = |\sphericalangle OCA|$ (obr. 55). Postupne možno vypočítať veľkosti uhlov (použitím vlastností rovnoramenných trojuholníkov):

$$\begin{aligned}
&|\sphericalangle DCO| = \alpha\,, && |\sphericalangle OBD| = |\sphericalangle BDO| = \tfrac{1}{2}(\psi - |\sphericalangle BOD|) = \psi - \alpha - \beta\,,\\
&|\sphericalangle COD| = \psi - 2\alpha\,, && |\sphericalangle MBD| = \psi - |\sphericalangle OBD| = \alpha + \beta\,,\\
&|\sphericalangle CAO| = \beta\,, && |\sphericalangle MDB| = \psi - |\sphericalangle BDO| - |\sphericalangle ODC| = \beta\,,\\
&|\sphericalangle COD| = \psi - 2\beta\,, && |\sphericalangle BMD| = \psi - |\sphericalangle DBM| - |\sphericalangle MDB| = \psi - \alpha - 2\beta\,,
\end{aligned}$$

$$|\sphericalangle BOD| = \psi - |\sphericalangle COD| - |\sphericalangle AOC| = 2\alpha + 2\beta - \psi\,.$$



Obr. 56

Označme $\sphericalangle BKC$ ten z uhlov BKC, v ktorom leží bod D. Jeho doplnok (leží v ňom bod A) označme $\sphericalangle BKC'$. Potom

$$\begin{aligned}
|\sphericalangle BKC| &= 2\psi - |\sphericalangle BKC'| = 2\psi - (|\sphericalangle BKO| + |\sphericalangle OKA| + |\sphericalangle AKC|) =\\
&= 2\psi - (|\sphericalangle BDO| + |\sphericalangle OCA| + |\sphericalangle AOC|) = 2\psi - (\psi - \alpha - \beta + \beta + \psi - 2\beta) =\\
&= \alpha + 2\beta
\end{aligned}$$

(druhú rovnosť sme dostali z vety o obvodovom uhle). Zrejme tiež platí $\alpha + 2\beta < \psi$, lebo $0 < |\sphericalangle BMD| = \psi - \alpha - 2\beta$.

Všimnime si teraz štvoruholník $BMCK$. Platí v ňom $|\sphericalangle BMC| + |\sphericalangle CKB| = \psi - \alpha - 2\beta + \alpha + 2\beta = \psi$. To znamená, že je tetivový. Označme preto k_3 kružnicu opísanú $BMCK$. Z vety o stredovom a obvodovom uhle dostávame $|\sphericalangle BKM| = |\sphericalangle BCM| = |\sphericalangle BCD| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BOD| = \alpha + \beta + \frac{1}{2}\psi$. Potom ale

$$|\sphericalangle OKM| = |\sphericalangle OKB| + |\sphericalangle BKM| = |\sphericalangle BDO| + |\sphericalangle BKM| = \\ = \psi - \alpha - \beta + \alpha + \beta - \tfrac{1}{2}\psi = \tfrac{1}{2}\psi\,.$$

No a odtiaľ vyplýva $OK \perp MK$, čo sme mali dokázať.

3.5 Zaveďme substitúciu $x = a + b + c$, $y = ab + bc + ac$. Potom možno nerovnosť upraviť na tvar (využijúc $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 - 2y$ a $abc = 1$)

$$1 + \frac{3 + 2x - xy}{2x + y + x^2 + xy} \leqq 1 + \frac{3 - y}{9 + 4x + 2y}\,,$$

čo (s prihliadnutím na $x > 0$, $y > 0$) je ekvivalentné s nerovnosťou

$$(3 + 2x - xy)(9 + 4x + 2y) \leqq (3 - y)\left(2x + y + x^2 + xy\right) \\ 27 + 24x + 3y + 5x^2 + y^2 \leqq 6xy + 3x^2y + xy^2\,.$$

Z AG-nerovnosti vyplýva $x = a + b + c \geqq 3\sqrt[3]{abc} = 3$, a tiež $y \geqq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3$. Potom

$$y^2 \leqq \frac{1}{3}xy^2\,, \quad 18x \leqq 6xy\,, \quad 5x^2 \leqq \frac{5}{3}yx^2\,, \\ 6x \leqq \frac{2}{3}xy^2\,, \quad 3y \leqq \frac{1}{3}x^2y\,, \quad 27 \leqq x^2y\,.$$

Sčítaním týchto nerovností získame dokazovanú nerovnosť. Zrejme rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x = y = 3$, a teda $a = b = c = 1$.

3.6 *(Ján Špakula)* Každej usporiadanej n-tici rôznych prvkov množiny X možno pridaním jediného chýbajúceho prvku na $(n + 1)$-vé miesto jednoznačne priradiť permutáciu (usporiadanú $(n + 1)$-ticu) prvkov množiny X. Zároveň z každej permutácie prvkov množiny X získame príslušnú usporiadanú n-ticu. Namiesto usporiadaných n-tíc teda môžeme pracovať s permutáciami (majme však na pamäti, že posledný prvok je fiktívny).

Lema. Rôzne permutácie ψ, φ množiny X nie sú rozhádané práve vtedy, keď ψ možno dostať z φ výmenou $(n + 1)$-vého a i-teho prvku, kde $1 \leqq i \leqq n$ (čo možno zapísať ako $\varphi(j) = \psi(j)$ pre $j \in \{1, \dots, n\}, j \neq i$ a $\psi(i) = \varphi(n + 1)$, $\psi(n + 1) = \varphi(i)$).

Dôkaz. Ak ψ, φ nie sú rozhádané, tak pre každú dvojicu indexov (i, j), $1 \leqq i < j \leqq n$ platí $\psi(i) \neq \varphi(j)$. Potom ale pre každé $i \in \{1, \dots, n\}$ buď $\varphi(i) = \psi(i)$, alebo $\varphi(i) = \psi(n + 1)$. Nech $\varphi(i) = \psi(n + 1)$. Ak by bolo $i = n + 1$, tak $\varphi = \psi$, čo by bol spor.

Teda musí byť $1 \leqq i \leqq n$. Potom ale pre každé $j \in \{1, \ldots, n\}$, $j \neq i$ platí $\varphi(j) = \psi(j)$. To znamená, že $\psi(i) = \varphi(n+1)$.

Obrátene ak φ, ψ majú vymenené prvky na i-tom a $(n+1)$-vom mieste, tak jedinými dvojicami rôznych indexov, na ktorých by boli v ψ a φ rovnaké prvky sú $(i, n+1)$ a $(n+1, i)$. To znamená, že neexistuje dvojica indexov (i, j), $1 \leqq i < j \leqq n$, pre ktoré $\varphi(i) = \psi(j)$, a teda permutácie φ, ψ nie sú rozhádané. Tým je dôkaz *Lemy* ukončený.

Ďalej uvažujme $X = \{1, 2, \ldots, n+1\}$ a zaveďme si niekoľko označení a pojmov. Množinu permutácií množiny X označme $\mathcal{S}$. Mohutnosť množiny obsahujúcej maximálny počet navzájom rôznych rozhádaných permutácií označme x_n. *Inverziou* permutácie $\varphi \in \mathcal{S}$ nazvime takú dvojicu indexov (i, j), $1 \leqq i < j \leqq n+1$, že $\varphi(i) > \varphi(j)$. Permutáciu nazveme *párna* (*nepárna*), ak obsahuje párny (nepárny) počet inverzií. *Paritou* permutácie $\varphi \in \mathcal{S}$ nazývame paritu počtu jej inverzií. Množinu párnych permutácií označme $\mathcal{S}^+$, množinu nepárnych permutácií označme $\mathcal{S}^-$.

Ľahko možno dokázať, že výmenou dvoch prvkov v permutácii sa jej parita zmení. Potom platí $|\mathcal{S}^+| = |\mathcal{S}^-|$ (výmena posledných dvoch prvkov nám určuje bijekciu medzi týmito dvoma množinami). Keďže $\mathcal{S}^+$, resp. $\mathcal{S}^-$ neobsahuje žiadnu dvojicu permutácií takú, že jednu možno dostať z druhej jedinou výmenou, tak všetky permutácie v $\mathcal{S}^+$, resp. $\mathcal{S}^-$ sú navzájom rozhádané. To znamená, že

$$x_n \geqq |\mathcal{S}^+| = |\mathcal{S}^-| = \frac{|\mathcal{S}|}{2} = \frac{(n+1)!}{2}\,.$$

Ďalej ukážeme, že platí

$$x_n \leqq \frac{(n+1)!}{2}\,.$$

Nech $\mathcal{K}$ je ľubovoľná množina navzájom rozhádaných permutácií množiny X. Každej permutácii $\varphi \in \mathcal{K}$ možno výmenou posledných dvoch prvkov jednoznačne priradiť permutáciu ψ, ktorá je s ňou nerozhádaná, a teda $\psi \in \mathcal{S} - \mathcal{K}$, pričom žiadnym dvom rôznym permutáciám z $\mathcal{K}$ nepriradíme rovnaké permutácie z $\mathcal{S} - \mathcal{K}$. Potom

$$|\mathcal{K}| = \frac{(|\mathcal{K}| + |\mathcal{K}|)}{2} \leqq \frac{(|\mathcal{K}| + |\mathcal{S} - \mathcal{K}|)}{2} = \frac{|\mathcal{S}|}{2} = \frac{(n+1)!}{2}\,.$$

To ale znamená, že $x_n = \dfrac{(n+1)!}{2}$, čo je hľadaný maximálny možný počet rozhádaných n-tíc.

3.7 *(Eugen Kováč)* Pre jednoduchosť nazvime body sýkorkami. Označme si sýkorky číslicami $1, \ldots, 9, 0$. Zápis $\mathcal{K}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ bude znamenať, že sýkorky $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (ležia) sedia na jednej kružnici.

Lema 1. Existuje 5 sýkoriek sediacich na jednej kružnici.

Dôkaz. Sporom. Predpokladajme, že žiadnych 5 sýkoriek nesedí na jednej kružnici. Bez ujmy na všeobecnosti $\mathcal{K}(1, 2, 3, 4)$ a $\mathcal{K}(5, 6, 7, 8)$. Z pätice $1, 2, 3, 9, 0$ štyri sýkorky sedia na kružnici. Ak $\mathcal{K}(1,2,3,9)$, tak aj $\mathcal{K}(1,2,3,4,9)$, spor. Obdobne sa dokáže, že nemôže byť $\mathcal{K}(1,2,3,0)$. Takže môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $\mathcal{K}(1,2,9,0)$.

Uvažujme teraz päticu $2,3,4,9,0$. Nutne $\mathcal{K}(3,4,9,0)$ (ľubovoľná iná štvorica by si už vynútila aj piatu sýkorku na jednej kružnici). Podobne z $5,6,7,9,0$ máme $\mathcal{K}(5,6,9,0)$, a z $6,7,8,9,0$ tiež $\mathcal{K}(7,8,9,0)$. Pätica $1,3,5,9,0$ si vynucuje $\mathcal{K}(1,3,5,9)$ alebo $\mathcal{K}(1,3,5,0)$. Bez ujmy na všeobecnosti, nech $\mathcal{K}(1,3,5,9)$. Pätica $1,3,7,9,0$ si vynucuje $\mathcal{K}(1,3,7,0)$ a napokon pätica $3,5,7,9,0$ nedáva žiadnu možnosť štvorice, ktorá by si už nevynucovala päť sýkoriek na jednej kružnici.

Lema 2. Aspoň 9 sýkoriek sedí na jednej kružnici.

Dôkaz. Nech $1,2,3,4,5$ sedia na jednej kružnici (môžeme to predpokladať na základe *Lemy 1*). Stačí ukázať, že aspoň jedna zo sýkoriek $6,7$ sedí na tej istej kružnici (pretože to isté potom bude platiť pre ľubovoľné dve sýkorky z $6,7,8,9,0$). Predpokladajme, že nie.

Uvažujme päticu $1,2,3,6,7$. Potom buď $\mathcal{K}(1,2,6,7)$, $\mathcal{K}(1,3,6,7)$ alebo $\mathcal{K}(2,3,6,7)$. Bez ujmy na všeobecnosti, nech $\mathcal{K}(1,2,6,7)$. Teraz uvažujme päticu $3,4,5,6,7$. Opäť bez ujmy na všeobecnosti $\mathcal{K}(3,4,6,7)$. Ešte uvažujme päticu $1,3,5,6,7$. Ak $\mathcal{K}(1,3,6,7)$, tak $\mathcal{K}(1,2,3,6,7)$, a tiež $\mathcal{K}(1,2,3,4,5,6,7)$, spor. Podobne nemôže byť ani $\mathcal{K}(1,5,6,7)$, ani $\mathcal{K}(3,5,6,7)$. Potom ale buď $\mathcal{K}(1,3,5,6)$ alebo $\mathcal{K}(1,3,5,7)$, čiže buď sýkorka 6, alebo 7 sedí na kružnici spolu s $1,2,3,4,5$.

Keďže zrejme môže byť 9 sýkoriek na jednej kružnici a desiata mimo nej, odpoveď je 9. Čudná party.

ŠTVRTÁ SÉRIA

4.1 *(Ján Špakula)* Najprv dokážeme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je prvými členmi a vzťahom (1) určená jednoznačne. Zrejme je (1) ekvivalentné

$$\frac{a_n^2}{a_{n-1}} + \frac{1}{2} - 1 < a_{n+1} \leqq \frac{a_n^2}{a_{n-1}} + \frac{1}{2}\,.$$

Je vidieť, že poslednému vzťahu vyhovuje práve jedno celé číslo $a_{n+1} = \left[\dfrac{a_n^2}{a_{n-1}} + \dfrac{1}{2}\right]$.

Teraz dokážeme, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2a_n\,. \tag{2}$$

Z jednoznačnosti vyplýva, že stačí dokázať, že postupnosť, ktorá vyhovuje vzťahu (2), pričom $a_1 = 2$, $a_2 = 7$ (zrejme ide o postupnosť prirodzených čísel) spĺňa nerovnosti (1). Tvrdenie dokážeme indukciou.

1° Zrejme pre $a_1 = 2$, $a_2 = 7$, $a_3 = 3 \cdot 7 + 2 \cdot 2 = 25$ platí vzťah (1) .

2° Predpokladajme, že (1) platí pre $n = k - 1$ ($k \geqq 3$). Dokážeme, že (1) platí aj pre $n = k$. Nech teda

$$-\frac{1}{2} < a_k - \frac{a_{k-1}^2}{a_{k-2}} \leqq \frac{1}{2}\,.$$

Dosadením (2) za a_k a úpravami dostávame

$$-1 \leqq \frac{2a_{k-1}^2 - 6a_{k-1}a_{k-2} - 4a_{k-2}^2}{a_{k-2}} < 1\,. \tag{3}$$

Naviac platí $a_{k-1} = 3a_{k-2} + 2a_{k-3} > 2a_{k-2}$, a teda

$$\frac{a_{k-2}}{a_{k-1}} < \frac{1}{2}\,. \tag{4}$$

Ďalej počítajme $a_{k+1} = 3a_k + 2a_{k-1} = 3(3a_{k-1} + 2a_{k-2}) + 2a_{k-1} = 11a_{k-1} + 6a_{k-1}$. To znamená, že

$$a_{k+1} - \frac{a_k^2}{a_{k-1}} = 11a_{k-1} + 6a_{k-2} - \frac{(3a_{k-1} + 2a_{k-2})^2}{a_{k-1}} = \\ = \frac{2a_{k-1}^2 - 6a_{k-1}a_{k-2} - 4a_{k-2}^2}{a_{k-1}}\,.$$

Stačí teda dokázať, že platí

$$-\frac{1}{2} < \frac{2a_{k-1}^2 - 6a_{k-1}a_{k-2} - 4a_{k-2}^2}{a_{k-1}} \leqq \frac{1}{2}\,. \tag{5}$$

Rozoberieme tri prípady

1) Ak $2a_{k-1}^2 - 6a_{k-1}a_{k-2} - 4a_{k-2}^2 > 0$, vtedy ľavá nerovnosť v (5) platí triviálne. Pravú nerovnosť dostaneme vynásobením (4) a pravej nerovnosti z (3) (čo môžeme).
2) Ak $2a_{k-1}^2 - 6a_{k-1}a_{k-2} - 4a_{k-2}^2 < 0$, vtedy pravá nerovnosť v (5) platí triviálne, a ľavú nerovnosť (prenásobenú číslom -1) dostaneme vynásobením (4) a (-1)-násobku ľavej nerovnosti z (3).
3) Ak $2a_{k-1}^2 - 6a_{k-1}a_{k-2} - 4a_{k-2}^2 = 0$, tak (5) triviálne platí.

Tým sme dokázali, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyhovuje rekurentnému vzťahu $a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2a_n$. Ak uvážime, že $a_1 = 2$, a $a_2 = 7$, tak ľahko indukciou dokážeme, že pre $n > 1$ je číslo a_n nepárne.

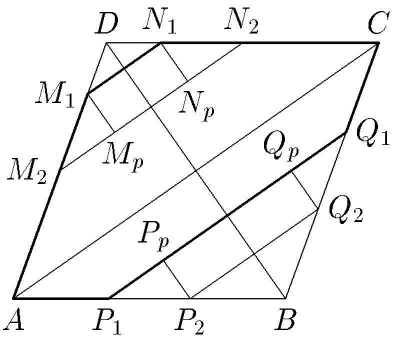
4.2 *(Miroslava Sotáková a Martina Gancárová)* Bez ujmy na všeobecnosti nech sú zvolené podľa zadania body M_1, N_1, P_1 a Q_1 a iné body M_2, N_2, P_2 a Q_2 ako na obr. 56. Označme d vzdialenosť rovnobežných priamok M_1N_1 a M_2N_2 (teda aj P_1Q_1 a P_2Q_2). Keďže štvoruholník zo zadania je zrejme kosoštvorec alebo štvorec, zrejme sú všetky tieto priamky rovnobežné s AC. Označme o_1 obvod šesťuholníka $AM_1N_1CQ_1P_1$ a o_2 obvod šesťuholníka $AM_2N_2CQ_2P_2$. Ďalej označme M_p, N_p po rade priemety bodov M_1 a N_1 na priamku M_2N_2 a P_p, Q_p po rade priemety bodov P_2 a Q_2 na priamku P_1Q_1. Potom platí (obr. 56)

$$o_2 = o_1 - |M_1M_2| + |M_2M_p| - |N_1N_2| + |N_2N_p| + |Q_1Q_2| - |Q_1Q_p| + |P_1P_2| - |P_1P_p|\,. \tag{1}$$

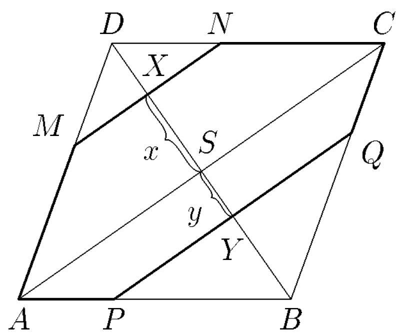
Podľa vety *usu* sú trojuholníky $P_1P_2P_p$, $Q_1Q_2Q_p$, $N_2N_1N_p$ a $M_2M_1M_p$ zhodné. Preto platí

$$|P_1P_2| = |Q_1Q_2| = |N_1N_2| = |M_1M_2|, \qquad |P_1P_p| = |Q_1Q_p| = |N_2N_p| = |M_2M_p|.$$

Dosadením do (1) dostávame $o_1 = o_2$, čo bolo treba dokázať.



Obr. 57



Obr. 58

Iné riešenie. *(František Kardoš)* Označme X stred úsečky MN, Y stred úsečky PQ a X stred úsečky AC. Ďalej nech $x = |XS|$, $y = |YS|$, zrejme tiež $x + y = d$ (obr. 57). Označme a stranu kosoštvorca a jeho uhlopriečky $|BD| = 2e$ a $|AC| = 2f$. Zrejme $|AP| = |CQ|$ a $|AM| = |CN|$. Potom pre obvod o šesťuholníka $AMNCQP$ platí

$$o = 2|AP| + 2|AM| + 2|PY| + 2|MX| = 2(a - |BP|) + 2(a - |DM|) + 2|PY| + 2|MX|. \quad (2)$$

Z podobnosti trojuholníkov BPY, BAS, DAS a DMX dostávame

$$|BP| = |AB| \cdot \frac{|BY|}{|BS|} = a\frac{e-y}{e}, \qquad |DM| = |AB| \cdot \frac{|DX|}{|DS|} = a\frac{e-x}{e},$$
$$|PY| = |AS| \cdot \frac{|BY|}{|BS|} = f\frac{e-y}{e}, \qquad |MX| = |AS| \cdot \frac{|DX|}{|DS|} = f\frac{e-x}{e}.$$

Potom po dosadení do (2) máme

$$o = 4f - \frac{2d(a-f)}{e}.$$

Keďže tento obvod nezávisí od voľby bodov P, Q, M a N, okamžite z toho vyplýva dokazované tvrdenie.

4.3 *(Kristína Černeková)* Dokážeme najprv ľavú nerovnosť. Jej predelením číslom $n!$ dostávame ekvivalentnú nerovnosť

$$2^n \leqq (m+n)(m+n-1)\dots(m+1) \cdot \frac{m!}{n!(m-n)!} =$$
$$= (m+n)(m+n-1)\dots(m+1) \cdot \binom{m}{n}. \quad (*)$$

Zjavne $\binom{m}{n} \geqq 1$. Tiež pre $i = 1, 2, \dots, n$ platí $m+i \geqq 2$. Vynásobením týchto nerovností (čo môžme urobiť) dostávame presne nerovnosť $(*)$.

Dokážeme teraz pravú nerovnosť. Najprv ju upravíme do tvaru

$$(m+n)(m+n-1)\dots(m-n+1) \leqq [m(m+1)]^n .$$

Preusporiadaním činiteľov na ľavej strane dostávame

$$\prod_{k=1}^{n}(m+n-k+1)(m-n+k) \leqq [m(m+1)]^n .$$

Zrejme stačí dokázať pre $k = 1, 2, \dots, n$ nerovnosť

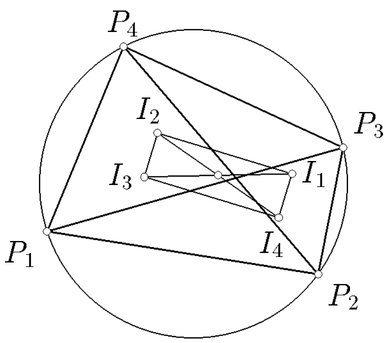
$$(m+n-k+1)(m-n+k) \leqq m(m+1) .$$

Ak si šikovne označíme $x = m + \frac{1}{2}$, $a = n - k + \frac{1}{2}$, tak poslednú nerovnosť možno písať v tvare $(x+a)(x-a) \leqq \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$, čo je ekvivalentné s $x^2 - a^2 \leqq x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$. To ale platí, pretože zrejme $a \geqq \frac{1}{2}$. Tým sme dokázali aj pravú nerovnosť.

4.4 Ukážeme najprv, že štvoruholníky $P_1I_3I_4P_2$, $P_1I_3I_2P_4$, $P_4I_2I_1P_3$ a $P_3I_1I_4P_2$ sú tetivové. Zaoberajme sa štvoruholníkom $P_1I_3I_4P_2$. Pretože stred kružnice vpísanej trojuholníku je priesečníkom osí jeho vnútorných uhlov, okamžite vidíme, že platí

$$|\sphericalangle P_1I_3P_2| = \frac{\pi}{2} + \frac{|\sphericalangle P_1P_4P_2|}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{|\sphericalangle P_1P_3P_2|}{2} = |\sphericalangle P_1I_4P_2| .$$

Prostredná rovnosť vyplýva zo skutočnosti, že uhly $\sphericalangle P_1P_4P_2$ a $\sphericalangle P_1P_3P_2$ sú oba obvodové uhly nad tetivou P_1P_2. Z rovnakých dôvodov teraz vidíme, že body P_1, P_2, I_3, I_4 musia ležať na spoločnej kružnici a štvoruholník $P_1I_3I_4P_2$ je teda tetivový. Analogicky sú aj štvoruholníky $P_1I_3I_2P_4$, $P_4I_2I_1P_3$ a $P_3I_1I_4P_2$ tetivové.



Obr. 59

Označme $|\sphericalangle I_4P_2P_1| = \varphi$ a $|\sphericalangle I_2P_4P_1| = \psi$. Potom zrejme aj $|\sphericalangle I_2P_4P_3| = \psi$ a $|\sphericalangle I_4P_2P_3| = \varphi$. V tetivovom štvoruholníku $P_1P_2P_3P_4$ platí $2\varphi + 2\psi = \pi$, čiže $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$. V tetivovom štvoruholníku $P_1P_2I_3I_4$ platí $|\sphericalangle P_1I_3I_4| = \pi - |\sphericalangle P_1P_2I_4| = \pi - \varphi$. Analogicky platí aj $|\sphericalangle P_1I_3I_2| = \pi - \psi$. Potom ale dostávame

$$|\sphericalangle I_2I_3I_4| = 2\pi - |\sphericalangle P_1I_3I_2| - |\sphericalangle P_1I_3I_4| = 2\pi - (\pi - \varphi) - (\pi - \psi) = \varphi + \psi = \frac{\pi}{2}\,.$$

Vzhľadom na symetriu majú aj zvyšné vnútorné uhly štvoruholníka $I_1I_2I_3I_4$ rovnakú veľkosť a tento štvoruholník je naozaj obdĺžnikom, čo sme chceli ukázať.

4.5 *(Juraj Földes)* Použitím AG-nerovnosti pre čísla x, x, y dostávame

$$\frac{2x+y}{3} \geqq \sqrt[3]{x^2y}\,.$$

Použitím AG-nerovnosti pre čísla $x^2, x^2, x^2, x^2, \frac{1}{2}xy, \frac{1}{2}xy, \frac{1}{2}xy, \frac{1}{2}xy, 16y^2$ dostávame

$$\frac{4x^2+2xy+16y^2}{9} \geqq \sqrt[9]{x^{12}y^6} = \sqrt[3]{(x^2y)^2}\,.$$

Po prenásobení druhej nerovnosti číslom 18, jej odmocnení a pripočítaní trojnásobku prvej nerovnosti dostávame

$$2x + y + \sqrt{8x^2+4xy+32y^2} \geqq 3\sqrt[3]{x^2y} + 3\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{x^2y} = \left(3+3\sqrt{2}\right)\sqrt[3]{x^2y}\,.$$

Výraz na ľavej strane je ale rovný $3+3\sqrt{2}$. Takže po predelení týmto číslom, a umocnení na tretiu dostávame dokazovanú nerovnosť.

4.6 Nech n a k sú prirodzené čísla. Sporom ľahko dokážeme, že ak chceme n ľudí rozdeliť do k skupín tak, aby bol rozdiel počtu členov každých dvoch rôznych skupín 0 alebo 1, skupiny musia mať minimálne $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ a maximálne $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ členov, pričom $\lfloor q \rfloor$, $\lceil q \rceil$ znamená dolnú a hornú celú časť reálneho čísla q.

Označme teraz m počet skupín v ktorých sa nachádzajú iba muži. Mužské skupiny teda budú obsahovať najmenej $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ a najviac $\lceil \frac{n}{m} \rceil$ členov, ženské skupiny najmenej $\left\lfloor \frac{n}{17-m} \right\rfloor$ a najviac $\left\lceil \frac{n}{17-m} \right\rceil$ členov. Bez ujmy na všeobecnosti nech je mužských skupín menej ako ženských, t.j. nech $m \leqq 8$. Potom však $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor \geqq \left\lfloor \frac{n}{17-m} \right\rfloor$, ako aj $\lceil \frac{n}{m} \rceil \geqq$ $\geqq \left\lceil \frac{n}{17-m} \right\rceil$. To ale znamená, že zo všetkých 17 diskusných skupín bude najpočetnejšia obsahovať $\lceil \frac{n}{m} \rceil$ mužov, a najmenej početná $\left\lfloor \frac{n}{17-m} \right\rfloor$ žien. Aby teda platila podmienka v zadaní, musí byť

$$\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil \leqq \left\lfloor \frac{n}{17-m} \right\rfloor + 1\,.$$

Potom však

$$\left\lceil \frac{n}{8} \right\rceil \leqq \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil \leqq \left\lfloor \frac{n}{17-m} \right\rfloor + 1 \leqq \left\lfloor \frac{n}{9} \right\rfloor + 1\,,$$

a teda aj $\left\lceil \frac{n}{8} \right\rceil \leqq \left\lfloor \frac{n}{9} \right\rfloor + 1$. Tým sme dokázali, že ak sa n párov dá rozdeliť na m mužských a $17-m$ ženských skupín, potom sa dá n párov rozdeliť aj na 8 mužských a 9 ženských skupín. Stačí teda riešiť nerovnicu

$$\left\lceil \frac{n}{8} \right\rceil \leqq \left\lfloor \frac{n}{9} \right\rfloor + 1 .$$

Ak $8 \nmid n$, dostávame $\left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{9} \right\rfloor$. Množina riešení tejto rovnice je

$$\mathcal{K}_1 = \{0, 1, \dots, 7, 9, 10, \dots, 15, 18, 19, \dots, 23, 27, \\ 28, \dots, 31, 36, 37, 38, 39, 45, 46, 47, 54, 55, 63\} .$$

Ak $8 \mid n$, dostávame rovnicu $\frac{n}{8} = \left\lfloor \frac{n}{9} \right\rfloor + 1$. Množina jej riešení je

$$\mathcal{K}_2 = \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 64, 72\} .$$

Ostáva už iba zaručiť, aby každá skupina mala aspoň jedného člena. To však znamená, že $n \geqq 9$. Množina všetkých riešení úlohy potom je

$$\mathcal{K} = \{9, 10, \dots, 16, 18, 19, \dots, 24, 27, 28, \dots, 32, 36, \\ 37, \dots, 40, 45, 46, 47, 48, 54, 55, 56, 63, 64, 72\} .$$

4.7 Zaveďme si substitúciu

$$x = a + b - c , \qquad y = c + a - b , \qquad z = c + c - a . \tag{1}$$

Z trojuholníkovej nerovnosti potom vidíme, že $x, y, z \in \mathbb{R}^+$. Ľahko možno zistiť, že platí

$$a = \frac{x+y}{2} , \qquad b = \frac{x+z}{2} , \qquad c = \frac{y+z}{2} .$$

Použijeme nerovnosť

$$\sqrt{\frac{u^2+v^2}{2}} \geqq \frac{u+v}{2} . \tag{2}$$

Ak $u, v > 0$, je (2) ekvivalentná s nerovnosťou $(u-v)^2 \geqq 0$. Preto rovnosť v (2) nastáva práve vtedy, keď $u = v$. Z (1) potom vyplývajú nerovnosti

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2} \leqq \sqrt{\frac{x+y}{2}} , \qquad \frac{\sqrt{y}+\sqrt{z}}{2} \leqq \sqrt{\frac{y+z}{2}} , \qquad \frac{\sqrt{z}+\sqrt{x}}{2} \leqq \sqrt{\frac{z+x}{2}} . \tag{3}$$

Ich sčítaním dostávame nerovnosť

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leqq \sqrt{\frac{x+y}{2}} + \sqrt{\frac{y+z}{2}} + \sqrt{\frac{z+x}{2}} ,$$

ktorá je po dosadení (1) dokazovanou nerovnosťou. Pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď nastáva rovnosť vo všetkých nerovnostiach v (3), čiže $x = y = z$. Ale to je ekvivalentné s $a = b = c$.

Piata séria

5.1 Vyberme spomedzi $x_1, \dots, x_n$ štyri čísla a, b, c, d ľubovoľne. Označme

$$P(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc,$$
$$Q(x) = (x-a)(x-b)(x-d) = x^3 - (a+b+d)x^2 + (ab+ad+bd)x - abd.$$

Sčítaním prvých rovností pre $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ dostávame

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i^3 - (a+b+c)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + (ab+ac+bc)\sum_{i=1}^{n} x_i - nabc =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^3 - (a+b+c+nabc),$$

čiže

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = (a+b+c+nabc) + \sum_{i=1}^{n} P(x_i).$$

Analogicky sa dokáže

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = (a+b+d+nabd) + \sum_{i=1}^{n} Q(x_i).$$

Na dôkaz zadaného tvrdenia treba nájsť také a, b, c, d, aby platilo

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i) \geqq 0 \geqq \sum_{i=1}^{n} Q(x_i).$$

Na to samozrejme stačí nájsť takú štvoricu, aby nerovnosť

$$(x_i-a)(x_i-b)(x_i-c) = P(x_i) \geqq 0 \geqq Q(x_i) = (x_i-a)(x_i-b)(x_i-d) \qquad (2)$$

platila pre každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.
Bez ujmy na všeobecnosti nech $x_1 < \dots < x_n$. Popíšeme dva možné spôsoby.

Najprv položme $a = x_1$, $b = x_n$, $c = x_{n-1}$ a $d = x_2$. Pre každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ je zrejme výraz $(x_i - a)(x_i - b)$ nekladný. Pre $i \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ je výraz $(x_i - c)$ nekladný a $(x_i - d)$ nezáporný, teda nerovnosť (2) je splnená. Avšak pre $i = 1$ alebo $i = n$ je nerovnosť (2) splnená triviálne.

Druhú možnosť predstavuje voľba $a = x_j$, $b = x_{j+1}$, $c = x_1$ a $d = x_n$, kde $j \in$ $\in \{2, 3, \dots, n-2\}$. Jednoduchý dôkaz si čitateľ môže spraviť sám.

5.2 *(Peter Kozák)* Keďže $|A_1O| = |A_7O|$, $|A_2O| = |A_8O|$, $|A_3O| = |A_5O|$ a $|A_4O| =$ $= |A_6O|$, dokazovaná nerovnosť je ekvivalentná s nerovnosťou

$$8 \cdot \sum_{i=1}^{4} |OA_i|^2 \leqq 4 \cdot \left(\sum_{i=1}^{8} |OA_i| \right)^2,$$

čo po jednoduchej úprave prejde do tvaru

$$\sum_{i=1}^{4} |OA_i|^2 \leqq 2 \cdot \sum_{i \neq j} |OA_i| \cdot |OA_j|. \tag{1}$$

Označme $\vec{a_1} = \overrightarrow{OA_1}$, $\vec{a_2} = \overrightarrow{OA_2}$, $\vec{a_3} = \overrightarrow{OA_3}$ a $\vec{a_4} = \overrightarrow{OA_4}$. Nech je bez ujmy na všeobecnosti dĺžka $\vec{a_1}$ najmenšia spomedzi týchto vektorov. Keďže $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ je rovnobežnosten, platí aj $\vec{a_1} = \vec{a_2} + \vec{a_4} - \vec{a_3}$. Potom (zápis $(\vec{x}, \vec{y})$ znamená skalárny súčin vektorov $\vec{x}$ a $\vec{y}$).

$$\begin{aligned} |\vec{a_1}|^2 &= (\vec{a_1}, \vec{a_1}) = (\vec{a_2} + \vec{a_4} - \vec{a_3}, \vec{a_2} + \vec{a_4} - \vec{a_3}) = \\ &= |\vec{a_2}|^2 + |\vec{a_3}|^2 + |\vec{a_4}|^2 + 2(\vec{a_2}, \vec{a_4}) - 2(\vec{a_2}, \vec{a_3}) - 2(\vec{a_3}, \vec{a_4}). \end{aligned}$$

Preto

$$\sum_{i=1}^{4} |OA_i|^2 = 2 + |\vec{a_1}|^2 - 2(\vec{a_2}, \vec{a_4}) + 2(\vec{a_2}, \vec{a_3}) + 2(\vec{a_3}, \vec{a_4}).$$

Vzhľadom na usporiadanie potom platí

$$\sum_{i=1}^{4} |OA_i|^2 \leqq 2|OA_1|^2 + 2|OA_2||OA_4| + 2|OA_2||OA_3| + 2|OA_3||OA_4| \leqq \sum_{i \neq j} |OA_i||OA_j|,$$

čo je dokazovaná nerovnosť (1), ktorá je ekvivalentná so zadanou.

Iné riešenie. *(Ján Špakula)* Tiež budeme dokazovať nerovnosť (1). Z trojuholníkových nerovností vyplýva $|OA_4| + |OA_3| > |A_3A_4| = |A_1A_2|$ a $|OA_2| + |A_1A_2| > |OA_1|$. Ich sčítaním dostávame

$$|OA_2| + |OA_3| + |OA_4| > |OA_1|.$$

Analogicky dostávame

$$\begin{aligned} |OA_1| + |OA_3| + |OA_4| &> |OA_2|, \\ |OA_1| + |OA_2| + |OA_4| &> |OA_3|, \\ |OA_1| + |OA_2| + |OA_3| &> |OA_4|. \end{aligned}$$

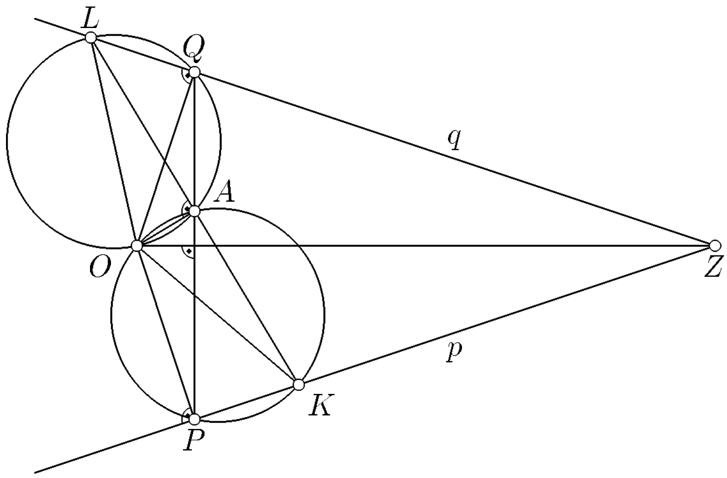
Potom

$$2\sum_{i\neq j}|OA_i||OA_j| = |OA_1|(|OA_2|+|OA_3|+|OA_4|)+|OA_2|(|OA_1|+|OA_3|+|OA_4|)+$$
$$+|OA_3|(|OA_1|+|OA_2|+|OA_4|)+|OA_4|(|OA_1|+|OA_2|+|OA_3|)>$$
$$>|OA_1|^2+|OA_2|^2+|OA_3|^2+|OA_4|^2,$$

čo je nerovnosť (1).

5.3 *(Ján Špakula)* Ak A je stred úsečky PQ, tvrdenie úlohy je triviálne splnené. Ďalej nech bez ujmy na všeobecnosti $|QA|<|PA|$.

Keďže PQ nie je priemer k, môžeme označiť Z priesečník priamok p a q (obr. 58). Z vlastností dotyčníc vyplýva $|\sphericalangle OQZ| = |\sphericalangle OPZ| = 90°$. Keďže $|\sphericalangle OAK| = |\sphericalangle OPK| = 90°$, body A a P ležia na Tálesovej kružnici nad OK. Obdobne body A a Q ležia na Tálesovej kružnici nad OL. Z vety o obvodovom uhle v prvej Tálesovej kružnici dostávame $|\sphericalangle OQA| = |\sphericalangle OLA|$ a v druhej kružnici $|\sphericalangle OPA| = |\sphericalangle OKA|$. Potom sú trojuholníky OPQ a OKL podobné podľa vety *uu*, a teda trojuholník OKL je rovnoramenný trojuholník so základňou KL a jeho výška OA je zároveň jeho ťažnicou. Tým je tvrdenie dokázané.



Obr. 60

5.4 Uvažujme šachovnicu s n riadkami a m stĺpcami. Nech je pre každé jej pole pravdepodobnosť jeho ofarbenia na bielo p (pravdepodobnosť jeho ofarbenia na čierno je zrejme q).

Uvažujme teraz ľubovoľný riadok tejto šachovnice. Pravdepodobnosť, že sú všetky jeho polia ofarbené na bielo je p^m, teda pravdepodobnosť, že je aspoň jedno pole ofarbené na čierno je $1-p^m$. Potom je pravdepodobnosť javu $\mathcal{A}$, že je v každom riadku aspoň jedno čierne pole zrejme $(1-p^m)^n$. Doplnkový jav A', že existuje aspoň jeden riadok celý ofarbený na čierno, má teda pravdepodobnosť $1-(1-p^m)^n$.

Podobnou úvahou pre opačné farby a stĺpce zistíme, že pravdepodobnosť javu B, že je v každom stĺpci aspoň jedno pole ofarbené na čierno je $(1-q^n)^m$ a pravdepodobnosť javu B', že existuje jeden stĺpec celý ofarbený na bielo, je $1-(1-q^n)^m$.

Javy A' a B' sa navzájom vylučujú, preto súčet ich pravdepodobností nemôže presiahnuť 1. Platí teda

$$(1-(1-p^m)^n)+(1-(1-q^n)^m) \leqq 1,$$

z čoho už triviálne vyplýva dokazovaná nerovnosť.

Iné riešenie. Keďže $p+q=1$, môžeme zaviesť nasledujúcu substitúciu: $p=\dfrac{1+t}{2}$, $q=\dfrac{1-t}{2}$, $t \in (-1,1)$. Potom stačí dokázať nerovnosť

$$f(t)=\left(1-\left(\frac{1+t}{2}\right)^m\right)^n + \geqq 1, \qquad \text{pre } t \in (-1,1).$$

Určme znamienko derivácie $f'(t)$ na tomto intervale. Po niekoľkých jednoduchých úpravách a prechode k pôvodným premenným dostávame

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \frac{mn}{2}\cdot p^{m-1}q^{n-1}\left(\left(\frac{1-q^n}{p}\right)^{m-1}-\left(\frac{1-p^m}{q}\right)^{n-1}\right)= \\
&= \frac{mn}{2}\cdot p^{m-1}q^{n-1}\left(\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)^{m-1}-\left(\frac{1-p^m}{1-p}\right)^{n-1}\right)= \\
&= \frac{mn}{2}\cdot p^{m-1}q^{n-1}\left(\left(\sum_{i=0}^{n-1} q^i\right)^{m-1}-\left(\sum_{j=0}^{m-1} p^j\right)^{n-1}\right).
\end{aligned}$$

Prechodom k premennej t zistíme, že

$$f'(t)=\frac{mn}{2}\cdot\left(\frac{1+t}{2}\right)^{m-1}\left(\frac{1-t}{2}\right)^{n-1}\cdot g(t),$$

kde

$$g(t)=\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1-t}{2}\right)^i\right)^{m-1}-\left(\sum_{j=0}^{m-1}\left(\frac{1+t}{2}\right)^j\right)^{n-1}.$$

Ako funkcia $f(t)$, tak aj funkcia $g(t)$ je definovaná aj pre $t=\pm 1$ a je na intervale $\langle -1,1\rangle$ spojitá. V tomto intervale je každá funkcia $\left(\dfrac{1-t}{2}\right)^i$ nerastúca a nezáporná a každá funkcia $\left(\frac{1+t}{2}\right)^i$ neklesajúca a nezáporná. Preto je $g(t)$ na tomto intervale nerastúca. V krajných bodoch intervalu platí $g(-1) \geqq 0 \geqq g(1)$, a keďže ide o spojitú funkciu, existuje také $c \in (-1,1)$, že $g(c) = 0$ (zrejme je takéto c na intervale $(-1,1)$ určené jednoznačne). Potom je funkcia $g(t) \geqq 0$ na intervale $\langle -1, c\rangle$ a $g(t) \leqq 0$ na intervale $\langle c, 1\rangle$. Pre $f(x)$ potom platí

- na intervale $\langle -1, c\rangle$ je $f(x)$ neklesajúca;
- na intervale $\langle c, 1\rangle$ je $f(x)$ nerastúca.

Keďže platí $f(-1) = 1$ a $f(1) = 1$, okamžite dostávame dokazovanú nerovnosť zo zadania.

Iné riešenie. Uvedieme len náznak postupu, vynechané kroky nechávame na dôkaz čitateľovi. Označme

$$P_{m,n}(x) = (1 + x + \ldots + x^{m-1})^n \qquad \text{pre } m, n \in \mathbb{N} \text{ a } x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Zrejme môžeme $P_{m,n}(x)$ písať v tvare

$$P_{m,n}(x) = x^m Q_{m,n}(x) + R_{m,n}(x)\,, \tag{2}$$

kde $Q_{m,n}(x)$ je polynóm s kladnými celočíselnými koeficientami a $R_{m,n}(x)$ je polynóm daný vzorcom

$$R_{m,n}(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \binom{n+j-1}{j} x^j\,.$$

Poľahky odvodíme rekurentné vzorce na výpočet polynómov $R_{m,n}$:

$$R_{m+1,n}(x) = R_{m,n} + \binom{n+m-1}{m} x^m\,; \tag{3}$$

$$R_{m,n+1}(x) = R_{m,n} + \sum_{j=1}^{m-1} \binom{n+j-1}{j-1} x^j\,. \tag{4}$$

Z (1) a (2) dostávame

$$\begin{aligned}(1-x^m)^n &= (1-x)^n P_{m,n} = (1-x)^n \left(x^m Q_{m,n}(x) + R_{m,n}(x)\right);\\ (1-y^n)^m &= (1-y)^m \left(y^n Q_{n,m}(y) + R_{n,m}(y)\right).\end{aligned}$$

Použitím $x + y = 1$ dostávame

$$(1-x^m)^n + (1-y^n)^m = x^m y^n \left(Q_{m,n}(x) + Q_{n,m}(y)\right) + \left(y^n R_{m,n}(x) + x^m R_{n,m}(y)\right)\,. \tag{5}$$

A naostatok treba ešte indukciou (pomocou rekurentných vzorcov (3), (4)) dokázať, že

$$y^n R_{m,n}(x) + x^m R_{n,m}(y) = 1, \qquad \text{pre } x + y = 1.$$

Z toho už tvrdenie po dosadení do (5) okamžite vyplýva.

5.5 *(Ján Špakula)* Zaveďme funkciu H, ktorá ľubovoľnému rozmiestneniu poslancov do dvojposteľových izieb priradí počet zle ubytovaných dvojíc, teda počet takých dvojíc poslancov, ktorí sú ubytovaní na jednej izbe a nepoznajú sa. Zrejme nadobúda H len celočíselné hodnoty od 0 po n.

Teraz rozmiestnime poslancov do dvojposteľových izieb ľubovoľne. Ak už každý býva so svojím známym, teda $H = 0$, hľadané rozubytovanie je nájdené. Nech teda $H > 0$. Potom existuje taká dvojica poslancov A a B, ktorí sú spolu ubytovaní, ale nepoznajú sa. Uvažujme spomedzi zvyšných $2n-2$ poslancov tieto dve množiny:

- množina poslancov bývajúcich so známymi A. V tejto množine sú spolubývajúci všetkých známych A, teda má aspoň n prvkov.
- množina známych B, táto množina má zo zadania tiež mohutnosť aspoň n.

Keďže súčet mohutností týchto dvoch množín je aspoň $2n$, majú neprázdny prienik. Teda existuje taká izba, v ktorej je ubytovaný známy poslanca A (označme ho A') spolu so známym poslanca B (označme ho B'). Ubytujme teraz A s A' a B s B'. Hodnota H sa nám zmenší aspoň o jedna. Po konečnom počte týchto zmien ubytovania musí H klesnúť na nulu, čo znamená vyhovujúce rozubytovanie. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

5.6 *(Peter Novotný)* Najprv dokážeme, že z prvého tvrdenia vyplýva druhé. Predpokladajme teda, že existuje $n \in \mathbb{Z}$, že $p \mid n^2 - n + 3$. Potom zrejme $p \mid 9(n^2 - n + 3)$ Upravíme:

$$9(n^2 - n + 3) = (3n-1)^2 - (3n-1) + 25.$$

Stačí teda položiť $m = 3n - 1$ a určite $p \mid m^2 - m + 25$. Tým sme dokázali prvú implikáciu.

Teraz dokážeme, že z prvého tvrdenia vyplýva druhé. Predpokladajme, že existuje $m \in \mathbb{Z}$, že $p \mid m^2 - m + 25$. Pre celé čísla m a p potom určite platí práve jedna z nasledujúcich podmienok:

1) $m \equiv 0 \pmod 3$ a $p \equiv 1 \pmod 3$; alebo $m \equiv 1 \pmod 3$ a $p \equiv 2 \pmod 3$;
2) $m \equiv 0 \pmod 3$ a $p \equiv 2 \pmod 3$; alebo $m \equiv 1 \pmod 3$ a $p \equiv 1 \pmod 3$;
3) $m \equiv 2 \pmod 3$ a $p \not\equiv 0 \pmod 3$; alebo $m \equiv 1 \pmod 3$ a $p \equiv 2 \pmod 3$;
4) $p \equiv 0 \pmod 3$.

Rozoberieme všetky prípady. Začnime prvým. Vieme, že $p \mid m^2 - m + 25$. Potom určite $p \mid m^2 - m + 25 + 4p^2 + 4mp - 2p$, t.j. existuje $c \in \mathbb{Z}$, že:

$$cp = m^2 - m + 25 + 4p^2 + 4mp - 2p = 9\left(\left(\frac{m+1+2p}{3}\right)^2 - \left(\frac{m+1+2p}{3}\right) + 3\right).$$

Teda $m + 2p \equiv 2 \pmod 3$. Výraz $\dfrac{m+1+2p}{3}$ je celým číslom. Môžeme teda položiť $n = \dfrac{m+1+2p}{3}$. Potom však $p \mid 9(n^2 - n + 3)$. Navyše $3 \nmid p$, takže dokonca $p \mid n^2 - n + 3$, čo bolo treba dokázať. V druhom a treťom prípade postupujeme analogicky, pričom položíme $n = \dfrac{m+1+p}{3}$ v druhom (využijeme $m+p \equiv 2 \pmod 3$) a $n = \dfrac{m+1}{3}$ v treťom prípade (využijeme $m \equiv 2 \pmod 3$). Aby to bolo možné, treba výraz $m^2 - m + 25$ rozšíriť o $p^2 + 2pm - p$ v druhom prípade, v treťom stačí príslušne upraviť $m^2 - m + 25$. Zostáva teda prípad, že $p \equiv 0 \pmod 3$. Jediným takým prvočíslom je číslo 3. Stačí zvoliť $n = 1$ a vidíme, že $p \mid n^2 - n + 3$. Tým sme dokázali aj opačnú implikáciu.

5.7 Pri riešení využijeme tzv. *Vetu o medzihodnote* známu z matematickej analýzy:

Veta. Nech $f : I \to \mathbb{R}$ (kde I je interval) je spojitá funkcia. Ak pre nejaké čísla $a, b \in I$, $a < b$ platí $f(a) \cdot f(b) < 0$, potom existuje $c \in (a, b)$ také, že $f(c) = 0$.

Označme $f^{(n)}$ n-tú iteráciu funkcie f. Najprv dokážeme, že pre každé $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$ platí $f(x) \neq x$. Nech teda pre nejaké $x_0 \in \mathbb{R}$ platí $f(x_0) = x_0$. Potom pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $f^{(n)}(x_0) = x_0$. Ale zo zadania vyplýva, že nutne musí byť $x_0 = 1$.

Ďalej si zaveďme novú funkciu $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$ pre každé $x \in \mathbb{R}$. Zrejme je spojitá (je rozdielom dvoch spojitých funkcií). Sporom dokážeme, že buď pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) > x$, alebo pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) < x$. Ak by totiž pre nejaké $a, b \in \mathbb{R}$ platilo $f(a) < a$, $f(b) > b$, tak $g(a) < 0$, $g(b) > 0$, a podľa *Vety o medzihodnote* existuje $c \in \mathbb{R}$ také, že $g(c) = 0$, a teda $f(c) = c$. To je ale spor.

Predpokladajme teraz, že $f(1) \neq 1$. Ak by pre každé $x \in \mathbb{R}$ bolo $f(x) > x$, potom sa indukciou ľahko dokáže, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $f^{(n)}(1) > 1$, čo je spor so zadaním. Analogicky dospejeme k sporu v druhom prípade. Takže nám nezostáva nič iné ako $f(1) = 1$.

Iné korešpondenčné semináre

Okrem matematickej olympiády sú pre študentov základných aj stredných škôl počas školského roka organizované aj iné matematické súťaže. Patria medzi ne predovšetkým korešpondenčné semináre. Tieto súťaže sa v detailoch istotne líšia, avšak základné črty majú spoločné: počas školského roka prebiehajú dve časti (letná a zimná), ktoré pozostávajú zväčša z troch sérií úloh rozosielaných riešiteľom do škôl alebo domov. Riešenia súťažiaci vypracovávajú rovnakou formou ako v MO a v určenom termíne ich odosielajú na adresu príslušného seminára, odkiaľ sa po niekoľkých dňoch až týždňoch vrátia opravené spolu so vzorovými riešeniami a výsledkovou listinou. Mladší a menej skúsení riešitelia zväčša nemusia riešiť tie najzložitejšie príklady, aby aj oni mali šancu ovplyvniť poradie na prvých miestach. Na konci oboch častí súťaže sú približne tridsiati najúspešnejší riešitelia pozývaní na týždňové sústredenie, účasť na ktorom býva často najsilnejšou motiváciou na riešenie úloh. Nie je ale možné nespomenúť, že takýto pravidelný tréning sa odráža aj na výsledkoch dosahovaných v MO, a že drvivá väčšina reprezentantov Slovenska a Českej republiky na MMO, príp. MIO sa aktívne zapájala do viacerých z týchto seminárov.

Nižšie uvedené korešpondenčné semináre (KS) sú určené predovšetkým študentom stredných škôl, svojim záberom pokrývajú územie celého Slovenska a často majú aj riešiteľov z Českej Republiky. Je však možné, že vo svojom okolí nájdete aj menšie súťaže podobného druhu.

Bratislava — Bratislavský korešpondenčný matematický seminár — BKMS

Tento KS je organizovaný študentmi MFF UK v Bratislave zväčša (80%) bratislavského pôvodu. Série bývajú tematicky zamerané a obsahujú niekedy aj veľmi náročné úlohy. Okrem seminára ÚK MO sa práve tento najviac venuje príprave na MO v kategórii A. Sústredenia s pestrou celoslovenskou účasťou a takmer vždy aj so vzorkou „zahraničného“ účastníka z ČR mávajú asi najbohatší matematický program.

BKMS
RNDr. Jaroslav Guričan, CSc.
KATČ MFF UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

e-mail: bkms@fmph.uniba.sk
URL: http://www.st.fmph.uniba.sk/www/bkms x

Stredné Slovensko — Stredoslovenský korešpondenčný seminár — SSS

Tento KS je momentálne organizovaný skupinou študentov MFF UK v Bratislave, pochádzajúcich zo stredného, príp. východného Slovenska. Je pokračovateľom tradície stredoslovenských KS organizovaných v minulosti zo Žiliny a Banskej Bystrice. Do súčasnej podoby sa SSS prepracoval pred niekoľkými rokmi, keď sa organizácie ujala skupina bývalých riešiteľov, v tom čase študujúcich v Prahe. Pre túto súťaž je charakteristický nízky vekový priemer riešiteľov, súťažné úlohy majú blízko ku kategórii B alebo C MO.

Stredoslovenský seminár
KZDM MFF UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

e-mail: jan.zabka@fmph.uniba.sk

Východné Slovensko — Korešpondenčný seminár z matematiky STROM

Korešpondenčný seminár STROM je organizovaný z PF UPJŠ v Košiciach skupinou nadšencov, väčšinou bývalých riešiteľov seminára. Je pokračovateľom najstaršieho korešpondenčného seminára v bývalom Československu. Jednotlivé série bývajú tematicky zamerané, témy však často bývajú netradičné a niekedy sa obsahovo líšia od úloh v MO. Sústredenia s najmä „východoslovenskou“ účasťou majú takmer neprekonateľne družnú atmosféru.

STROM
PF UPJŠ
Jesenná 5
040 01 Košice

e-mail: strom@upjs.sk

Korešpondenčný seminár z programovania — KSP

Na rozdiel od predchádzajúcich KS, je KSP súťažou v programovaní. Všetky jeho súťažné úlohy sú, podobne ako na MIO, praktické. KSP je organizovaný zanietenou skupinkou študentov MFF UK v Bratislave, ktorí majú zároveň na starosti všetky ostatné súťaže v programovaní od COFAX-u až po MO–P. Sústredenia bývajú mierne netradične na jar a na jeseň.

KSP
KVI MFF UK
Mlynská Dolina
842 15 Bratislava

e-mail: ksp@fmph.uniba.sk
URL: http://www.st.fmph.uniba.sk/www/csp

Ak ste sa rozhodli do niektorého zo seminárov zapojiť, najrozumnejšie je požiadať o zaslanie úloh prvej série v polovici septembra alebo koncom januára.

Obsah

RNDr. Karel Horák, CSc. – Richard Kollár
Jana Višňovská – Eugen Kováč
Tomáš Vinař – Bronislava Brejová
Úlohová komisia MO

Štyridsiatysiedmy ročník matematickej olympiády na stredných školách

Vydala IUVENTA v roku 1999
Sadzbu programom $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX pripravili RNDr. Karel Horák, CSc. a Richard Kollár
Grafická úprava obálky Karel Horák a Richard Kollár
Neprešlo jazykovou úpravou
1.vydanie

ISBN 80–88893–18–6