46. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

1. diel

Správa o riešení úloh zo súťaže konanej v školskom roku 1996/1997

38. MEDZINÁRODNÁ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA
9. MEDZINÁRODNÁ OLYMPIÁDA V INFORMATIKE

IUVENTA

S pomocou spolupracovníkov spracovali
RNDr. Karel Horák, CSc.,
Richard Kollár, Jana Višňovská,
Tomáš Vinař, Bronislava Brejová a členovia Úlohovej komisie MO.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

ISBN 80–88893–18–6

O priebehu 46. ročníka matematickej olympiády

Matematická olympiáda (MO) je súťažou žiakov základných a stredných škôl. Jej vyhlasovateľom je Ministerstvo školstva Slovenskej republiky v spolupráci s Jednotou slovenských matematikov a fyzikov. 46. ročník MO riadila Slovenská komisia matematickej olympiády (SK MO) – bývalá Ústredná komisia MO. Jednotlivé kolá odborne a organizačne zabezpečovali okresné a krajské komisie MO (KK MO). Cieľom súťaže je vyhľadávanie žiakov talentovaných v matematike, prebúdzanie a podpora ich záujmu o ňu, rozvíjanie ich matematických schopností a ich usmerňovanie a vedenie k samostatnej tvorivej činnosti. Vyvrcholením súťaže je príprava na úspešnú reprezentáciu Slovenskej republiky a účasť v medzinárodných súťažiach, najmä na Medzinárodnej matematickej olympiáde (MMO) a Medzinárodnej olympiáde v informatike (MOI). V školskom roku 1996/1997 sa uskutočnil už 46. ročník MO, pretože matematická olympiáda na Slovensku je pokračovateľom rovnakej súťaže z bývalého Československa. Aj v tomto ročníku mala spoločné úlohy s MO v Českej republike. Po prvý raz sa však uskutočnila v podmienkach nového územnosprávneho usporiadania Slovenska. S potešením možno konštatovať, že prebehla vo všetkých 79 novovytvorených okresoch, a tiež vo všetkých 8 krajoch Slovenskej republiky. Slovenská komisia MO v tomto ročníku pracovala v novom zložení. Na návrh Ústredného výboru Jednoty slovenských matematikov a fyzikov vymenovala na trojročné funkčné obdobie predsedu SK MO ministerka školstva a splnomocnila ho vymenovaním ďalších členov slovenskej komisie. Personálne obsadenie SK MO v 46. ročníku súťaže bolo takéto:

doc. RNDr. Vladislav Rosa, CSc. z MFF UK Bratislava, predseda SK MO.

Predsedníctvo SK MO tvorili:

doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., FDS ŽU Žilina, podpredseda SK MO,

RNDr. Pavol Černek, CSc., MFF UK Bratislava, tajomník pre odborné otázky,

RNDr. Monika Krállová, MFF UK Bratislava, tajomník pre organizačné otázky,

členovia:

PhDr. Oto Klostermann, zástupca MŠ SR,

Mgr. Viera Krajčovičová, zástupca IUVENTY,

RNDr. Andrej Blaho, CSc., MFF UK Bratislava, gestor kategórie P,

RNDr. Jozef Fulier, CSc., FPV UKF Nitra,

doc. RNDr. Tomáš Hecht, CSc., EDUXE Bratislava,

Richard Kollár, MFF UK Bratislava,

Prof. RNDr. Jozef Moravčík, CSc., SF ŽU Žilina.

Členmi predsedníctva sú ďalej predsedovia krajských komisií:

doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., FDS ŽU Žilina,

RNDr. Jaroslava Brincková, CSc., FHPV UMB Banská Bystrica,

Mgr. Milan Demko, PedF PU Prešov,

PaedDr. Hubert Gunár, Gymnázium Trenčín,

doc. RNDr. Pavol Híc, CSc., FPV TU Trnava,
RNDr. Vladimír Jodas, MC Bratislava,
RNDr. Božena Mihalíková, CSc., PF UPJŠ Košice,
Prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc., FPV UKF Nitra.

SK MO ďalej tvorili:
RNDr. Juraj Balázs, FPV UPJŠ Košice,
RNDr. Milota Hilková, ZŠ Jilemnického, Revúca,
RNDr. Anton Hnát, Gymnázium Michalovce,
Mgr. Jozef Mészáros, Gymnázium s vyuč. jaz. maď. Galanta,
RNDr. Dagmar Mikulášová, Gymnázium Trenčín,
doc. RNDr. Ľudovít Niepel, CSc., MFF UK Bratislava,
RNDr. Dana Smutná, FPHV UMB Banská Bystrica,
Tomáš Vinař, MFF UK Bratislava,
Mgr. Dagmar Vongrejová, ZŠ Moskovská Žilina.

V priebehu 46. ročníka MO sa uskutočnilo jedno plenárne zasadnutie SK MO a tri zasadnutia predsedníctva SK MO. Zamerali sa na zabezpečenie súťaže v nových územnosprávnych podmienkach, vznik nových okresných a krajských komisií MO, ich spoluprácu s novými orgánmi štátnej správy v školstve, finančné pokrytie súťaže, ďalšie aktivity (korešpondenčné semináre, sústredenia a pod.), ako aj na pokračovanie v partnerskej spolupráci s českou Ústřední komisí MO pri príprave súťažných úloh a termínovom zabezpečovaní prebiehajúceho i budúceho ročníka MO. V Úlohovej komisii MO boli garantmi jednotlivých kategórií:
kategória A: *doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.*
kategória B: *RNDr. Pavol Černek, CSc.* a *doc. RNDr. Tomáš Hecht, CSc.*,
kategória C: *doc. RNDr. Leo Boček, CSc.*

Za zadaním každej súťažnej úlohy v ďalšom texte je v zátvorke uvedené meno autora (resp. navrhovateľa) úlohy. Hostiteľom pri oboch zasadnutiach úlohových komisií bola v tomto ročníku česká strana.

Organizácia súťaže zostala v 46. ročníku MO zachovaná: pre žiakov základných škôl bola rozdelená do piatich kategórií Z4 – Z8 určených žiakom 4. až 9. ročníka ZŠ a odpovedajúcich ročníkov osemročných gymnázií. Pre žiakov stredných škôl a im zodpovedajúcich ročníkov viacročných gymnázií bola súťaž organizovaná v štyroch kategóriách: C, B, A a P. Kategória C bola určená pre študentov prvých ročníkov, kategória B pre študentov druhých ročníkov a kategória A pre študentov tretích a štvrtých ročníkov stredných škôl. Kategória P, zameraná na úlohy z programovania a matematickej informatiky bola určená žiakom všetkých ročníkov stredných škôl. Talentovaní žiaci mohli po súhlase svojho učiteľa matematiky súťažiť aj vo vyššej ako prislúchajúcej vekovej kategórii. Týkalo sa to aj žiakov ZŠ, ktorí tiež mohli súťažiť v niektorej z kategórií A, B ,C a P. Prvé kolo MO sa uskutočnilo vo všetkých kategóriách ako školské kolo. Druhé kolo sa uskutočnilo pre kategórie Z4 – Z8 ako okresné kolo, pre ostatné kategórie ako krajské kolo. Tretie kolo sa uskutočnilo iba v kategórii Z8 ako krajské kolo a v kategóriách A a P ako celoštátne kolo. V kategórii A bolo do tohoto kola pozvaných 41 najlepších a v kategórii P 26 najlepších riešiteľov z druhých kôl súťaže príslušnej kategórie podľa poradia zostaveného po koordinácii bodového hodnotenia.

V tomto kole je súťaž rozdelená do dvoch dní. V kategórii A riešia súťažiaci každý deň tri úlohy v časovom limite 4 hodiny, v kategórii P v rovnakom limite prvý deň tri teoretické a druhý deň dve praktické úlohy.

Celoštátne kolo 46. ročníka MO sa uskutočnilo v Košiciach v dňoch 20.–23.4.1997 (kategória A) a 23.–26.4.1997 (kategória P). Na zabezpečení súťaže vrátane spoločenského programu a získania sponzorských vecných darov pre úspešných riešiteľov sa okrem Centra voľného času a IUVENTY obetavo podieľali členovia krajskej komisie matematickej olympiády v Košiciach, a najmä pracovníci a študenti Prírodovedeckej fakulty UPJŠ v Košiciach. Na úspešnom priebehu celoštátneho kola má mimoriadnu zásluhu predsedníčka KK MO *RNDr. Božena Miháliková* z PF UPJŠ v Košiciach.

Desať najúspešnejších riešiteľov tretieho kola MO kategórie A prijalo pozvanie na výberové sústredenie pred 38. Medzinárodnou matematickou olympiádou, ktoré sa konalo v dňoch 27.4.–2.5.1997 na MFF UK v Bratislave. Na základe výsledkov tohoto sústredenia, výsledkov predchádzajúcich kôl MO a s prihliadnutím na úspešnosť v korešpondenčnom seminári SK MO bolo na konci sústredenia vybrané šesťčlenné družstvo na reprezentáciu SR na MMO v Argentíne. Tento výber absolvoval ešte jedno (prípravné) sústredenie v dňoch 23.–27.6.1997 na Zochovej chate a zároveň nás reprezentoval na treťom ročníku medzištátneho stretnutia s Českou republikou, ktoré sa konalo v dňoch 16.–19.6.1997 v Bílovci. Medzištátnemu stretnutiu ako aj MMO sú v tejto ročenke venované samostatné kapitoly. Výberové sústredenie pre 12 najlepších riešiteľov v kategórii P sa uskutočnilo v dňoch 8.–14.6.1997 na MFF UK v Bratislave. Treba poznamenať, že sústredenie bolo prispôsobené netradičnému termínu konania MOI, ktorá prebehla až na prelome novembra a decembra v Juhoafrickej republike. Tejto súťaži je tiež venovaná samostatná kapitola. V rámci náročného sústredenia, ktoré približovalo podmienky medzinárodnej súťaže, účastníci každý deň dopoludnia tvorili programy, ktoré v ten istý deň večer aj spoločne vyhodnocovali. Na základe dosiahnutých výsledkov a s prihliadnutím na úspešnosť v druhom a treťom kole kategórie P schválila SK MO zloženie štvorčlenného družstva, ktoré reprezentovalo SR na MOI a štvorčlenné družstvo, ktoré nás reprezentovalo na Stredoeurópskej olympiáde v informatike, ktorá sa konala v júli v Poľsku. Pred MOI sa pre reprezentačné družstvo konalo ešte jedno prípravné sústredenie v dňoch 17.–21.11.1997 na MFF UK v Bratislave.

Ako už bolo spomenuté, súčasťou celoročnej prípravy na MO sú aj rôzne korešpondenčné semináre (KS) a sústredenia na okresnej a krajskej úrovni. Aj v tomto ročníku prebiehalo niekoľko KS s celoslovenskou pôsobnosťou a to:

Bratislavský korešpondenčný matematický seminár (BKMS),
Stredoslovenský korešpondenčný seminár (SSS),
Košický korešpondenčný seminár (STROM),
Korešpondenčný seminár z programovania (KSP).

Kontaktné adresy, zadania a výsledky týchto korešpondenčných seminárov boli uverejnené v predchádzajúcej ročenke MO. Opäť prebiehal už tretí ročník obnoveného KS SK MO, ktorý bol určený predovšetkým pre študentov bojujúcich o účasť na MMO. Tejto súťaži je tiež venovaná samostatná kapitola. Pri tejto príležitosti by sme radi poďakovali Matematicko-fyzikálnej fakulte UK v Bratislave za tradičnú priestorovú a materiálnu pomoc pri organizovaní viacerých korešpondenčných seminárov.

Výsledky celoštátneho kola, kategória A

Víťazi

1.	Viera RŮŽIČKOVÁ	3 G Veľká Okružná Žilina	7	7	7	7	7	7	42
2.	Peter SVRČEK	3 G Veľká Okružná Žilina	7	6	7	7	7	7	41
3.	Miroslav DUDÍK	4 G Trebišov	5	7	5	7	7	3	34
4.	Vladimír MARKO	4 G J. Hronca Bratislava	5	7	0	7	7	7	33
5.	Kristína ČERNEKOVÁ	2 G Grösslingová Bratislava	5	7	1	6	7	5	31
6.	Peter BODÍK	3 G Poštová Košice	4	7	0	7	7	5	30
7.	Martin SLEZIAK	4 G Ružomberok	5	6	0	7	7	4	29
8.	Peter NOVOTNÝ	2 G Veľká Okružná Žilina	7	4	7	0	7	3	28
	Ján ŠPAKULA	3 G Poštová Košice	1	6	7	3	7	4	28
10.	Vladimír ZAJAC	1 G Grösslingová Bratislava	–	7	7	7	2	2	25

Ďalší úspešní riešitelia

11.	Štefan GAŠPAR	3 G Púchov	5	5	5	0	7	2	24
	Peter KOZÁK	2 G Sučany	6	4	0	3	7	4	24
	Ján RUSZ	4 G Trebišovská Košice	7	5	0	3	7	2	24
14.	Zuzana RJAŠKOVÁ	4 G Vranov nad Topľou	6	5	0	3	7	2	23
15.	Michal BAJCSY	4 G Grösslingová Bratislava	5	0	1	7	7	2	22
	Martina GANCÁROVÁ	3 G Grösslingová Bratislava	5	4	7	0	6	0	22
	Ondrej VACEK	4 G J.G.Tajovského B.Bystrica	5	3	3	3	7	1	22
18.	Daniel NAGAJ	3 G Bardejov	5	5	7	0	2	2	21
19.	Peter JACKO	3 G Poštová Košice	1	4	6	3	6	0	20
	František KARDOŠ	3 G Alejová Košice	5	7	3	0	3	2	20
	Andrea MESIAROVÁ	4 G Grösslingová Bratislava	5	5	4	3	0	3	20

Ostatní riešitelia

22.	Slavomír NEMŠÁK	3 G Konštantína Prešov	5	7	0	3	2	2	19
	Pavol NOVOTNÝ	3 G Veľká Okružná Žilina	1	1	0	7	7	3	19
24.	Róbert LENČÉŠ	3 G Párovská Nitra	1	3	1	3	7	3	18
25.	Richard KRÁĽOVIČ	2 G J. Hronca Bratislava	1	7	0	3	6	0	17
26.	Marián IVANČO	4 G Grösslingová Bratislava	6	4	0	3	0	3	16
	Juraj KOLESÁR	4 G Grösslingová Bratislava	0	3	4	3	2	4	16
28.	Marián KLEIN	3 G Poštová Košice	5	3	4	0	2	1	15

29.	Miloš KOPA	4 G J.G.Tajovského B.Bystrica	5	0	1	3	3	2	14
	Jozef LADICKÝ	4 G Nové Mesto nad Váhom	7	4	0	–	2	1	14
	Ivan LUKNÁR	4 G J.G.Tajovského B.Bystrica	0	4	4	3	2	1	14
	Andrej MELOCÍK	3 G Grösslingová Bratislava	5	4	3	0	0	2	14
	Peter VARŠA	3 G Veľká Okružná Žilina	5	–	–	7	2	0	14
34.	Ján KOVÁČIK	3 G Grösslingová Bratislava	0	3	3	7	0	0	13
35.	Peter SLOSARČÍK	4 G Grösslingová Bratislava	0	4	4	3	0	1	12
36.	Andrej ZAJÍČEK	3 G Párovská Nitra	1	–	4	3	1	0	9
37.	Tomáš FÄRBER	4 G Grösslingová Bratislava	3	0	0	3	2	0	8
	Ladislav KOVÁR	4 G Grösslingová Bratislava	0	4	0	3	1	0	8
39.	Martin GUZI	3 G Konštantína Prešov	4	0	0	0	2	0	6
40.	Peter HARIŠ	4 G Púchov	0	3	0	0	2	0	5
	Vladimír KOZÁK	3 G Sučany	–	1	0	0	2	2	5

Úspešnosť jednotlivých úloh je zaznamenaná v tabuľke.

Počet bodov	**Spolu**	**Číslo úlohy**					
		1.	2.	3.	4.	5.	6.
7 bodov	52	5	9	7	11	17	3
6 bodov	11	3	3	1	1	3	0
5 bodov	25	16	5	2	0	0	2
4 body	22	2	10	6	0	0	4
3 body	37	1	6	4	18	2	6
2 body	23	0	0	0	0	12	11
1 bod	19	6	2	4	0	2	5
0 bodov	57	8	6	17	11	5	10
Priemer	3,33	3,66	4,05	2,56	3,24	4,12	2,24

Výsledky celoštátneho kola, kategória P

Víťazi

1.	Miroslav DUDÍK	4 G Trebišov	8	9	10	6	10	43
2.	Ján RUSZ	4 G Trebišovská, Košice	3	10	10	7	7	37
3.	Richard KRÁĽOVIČ	2 G J. Hronca, Bratislava	7	10	10	8	0	35
4.	Ján SVOREŇ	4 G D. Tatarku, Poprad	1	10	10	6	4	31
5.	Peter VASIĽ	4 G Michalovce	2	10	8	8	2	30
6.	Vladimír MARKO	4 G J. Hronca, Bratislava	9	9	10	0	0	28

Ďalší úspešní riešitelia

7.	Vladimír KOUTNÝ	2 G J. Hronca, Bratislava	4	4	6	8	5	27
8.	Stanislav FUNIAK	4 G Sučany	0	10	3	8	5	26
	Rolland BOTT	3 G maď. Dunajská Streda	1	7	10	8	0	26
10.	Martin HAJDUCH	4 G Považská Bystrica	5	2	10	6	2	25
	Martin VAŠÍČEK	4 G J. Hrnoca, Bratislava	3	7	10	1	4	25
12.	Dávid PÁL	2 G Bratislava, J. Hronca	1	8	10	5	0	24
13.	Rastislav KRIVOŠ-BELLUŠ	4 G Poštová, Košice	0	7	10	4	2	23
14.	Zuzana RJAŠKOVÁ	4 G Vranov nad Topľou	1	8	10	0	3	22

Ostatní riešitelia

15.	Róbert MACHO	4 G Prievidza	7	6	2	4	2	21
16.	Michal MATOUŠEK	3 G Hlinská, Žilina	3	2	5	10	0	20
	Juraj FRIVOLT	4 G maď. Galanta	1	5	8	0	6	20
	Pavol ŽIBRITA	4 G Golianova, Nitra	4	2	10	4	0	20
19.	Peter NOVÁK	4 G Golianova, Nitra	5	2	7	3	0	17
20.	Tomáš KEZES	2 G Nové Zámky	1	5	4	4	0	14
21.	Peter BODÍK	3 G Poštová, Košice	2	7	4	0	0	13
	Matúš MIHAĽÁK	4 G Konštantínova, Prešov	5	4	4	0	0	13
23.	Peter NOVOTNÝ	4 G Prievidza	0	3	5	2	0	10
	Zsolt BENES	3 G maď. Dunajská Streda	1	2	6	1	0	10
25.	Katarína VOZÁROVÁ	4 G J. Hronca, Bratislava	0	3	4	0	0	7
	Peter PAVLISKO	3 G Košice – Šaca	4	1	2	0	0	7

Výsledky krajských kôl

Z každého kraja a z každej z kategórii A, B, C, P a Z8 sú uvedení všetci úspešní riešitelia, príp. aspoň prvých 10 úspešných riešiteľov. V kategóriach B, C, Z8, ak nie je uvedené inak, sú všetci žiaci študentmi 2., resp. 1., resp. 8. ročníkov. Gymnázia so zameraním na matematiku, študijny odbor 01 sú tieto:

Gymnázium Grösslingová, Bratislava,

Gymnázium Párovská, Nitra,

Gymnázium Veľká Okružná, Žilina,

Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica,

Gymnázium Alejová, Košice,

Gymnázium Poštová, Košice.

Kraj Bratislava

Kategória A

1.–2.	Marián IVANČO	4, Gymnázium Grösslingová
	Vladimír MARKO	4, Gymnázium J.Hronca
3.	Andrej MELOCÍK	3, Gymnázium Grösslingová
4.–6.	Kristína ČERNEKOVÁ	2, Gymnázium Grösslingová
	Andrea MESIAROVÁ	4, Gymnázium Grösslingová
	Vladimír ZAJAC	1, Gymnázium Grösslingová
7.	Richard KRÁĽOVIČ	2, Gymnázium J.Hronca
8.–9.	Juraj KOLESÁR	4, Gymnázium Grösslingová
	Ladislav KOVÁR	4, Gymnázium Grösslingová
10.	Tomáš FÄRBER	4, Gymnázium Grösslingová

Kategória B

1.	Zuzana SLOSARČÍKOVÁ	Gymnázium Grösslingová
2.–3.	Kristína ČERNEKOVÁ	Gymnázium Grösslingová
	David PÁL	Gymnázium J.Hronca
4.	Richard KRÁĽOVIČ	Gymnázium J.Hronca
5.–6.	Pavol JURČA	Gymnázium Grösslingová
	Michal KADLIC	Gymnázium Grösslingová

7.–8.	Alena KOVÁROVÁ	Gymnázium Grösslingová
	Martin ŽOVIC	Gymnázium Grösslingová
9.–10.	Tomáš BUJŇÁK	Gymnázium J.Hronca
	Martin POTOČNÝ	Gymnázium J.Hronca

Kategória C

1.–6.	Peter MACH	Gymnázium J.Hronca
	Miriam MARUŠIAKOVÁ	Gymnázium Bílikova
	Miroslav MASÁR	Gymnázium Grösslingová
	Jozef ŠEVČÍK	Gymnázium Grösslingová
	Hana TICHÁ	Gymnázium Grösslingová
	Vladimír ZAJAC	Gymnázium Grösslingová
7.–9.	Dana JEŽOVÁ	Gymnázium Grösslingová
	Michal POKORNÝ	8, Gymnázium Grösslingová
	Martin ŠÁCHA	8, Gymnázium Grösslingová
10.–13.	Peter ČIRKA	Gymnázium Grösslingová
	Ondrej HRDLIČKA	Gymnázium J.Hronca
	Peter MÁJEK	Gymnázium J.Hronca
	Pavol ŠAFAŘÍK	Gymnázium Grösslingová

Kategória Z8

1.	Jana SZOLGAYOVÁ	Gymnázium Grösslingová
2.–4.	Tomáš HAJAS	ZŠ Košická
	Katarína QUITTNEROVÁ	Gymnázium Bílikova
	Michal TVAROŽEK	ZŠ Košická
5.	Michal SOTÁK	Gymnázium Grösslingová
6.–9.	Hana BAJTOŠOVÁ	Gymnázium Vazovova
	Michal POKORNÝ	Gymnázium Grösslingová
	Martin ŠÁCHA	Gymnázium Grösslingová
	Juraj ŠVEC	Gymnázium Bílikova
10.–11.	Tomáš FARKAŠ	Gymnázium Bílikova
	Martin ROŠKO	ZŠ Senec

Kategória P

1.	Richard KRÁĽOVIČ	2, Gymnázium J.Hronca
2.	Martin VAŠÍČEK	4, Gymnázium J.Hronca
3.	Katarína VOZÁROVÁ	4, Gymnázium J.Hronca
4.–6.	Vladimír KOUTNÝ	2, Gymnázium J.Hronca
	Vladimír MARKO	4, Gymnázium J.Hronca
	David PÁL	2, Gymnázium J.Hronca

Kraj Nitra

Kategória A

1.	Andrej ZAJIČEK	3, Gymnázium Párovská, Nitra
2.	Róbert LENČÉŠ	3, Gymnázium Párovská, Nitra
3.	Juraj STANČÍK	3, Gymnázium Levice
4.–5.	Juraj HUČEK	4, Gymnázium Párovská, Nitra
	Ján SOMORČÍK	3, Gymnázium Párovská, Nitra
6.	Jozef BUDINSKÝ	3, Gymnázium Šahy
7.–8.	Andrea BORČINOVÁ	4, Gymnázium Párovská, Nitra
	István JÁMBOR	4, SPŠE Nové Zámky
9.–12.	Ivana BUDINSKÁ	4, Gymnázium Šahy
	Ján KOŘENEK	3, Gymnázium Párovská, Nitra
	Ján MAZAN	4, Gymnázium Komárno
	Ján PINTÉR	4, Gymnázium Párovská, Nitra

Kategória B

1.	Peter HUSZÁR	Gymnázium maď. Komárno
2.	Daniel HETÉNYI	Gymnázium Párovská, Nitra
3.	Zoltán HALÁSZ	Gymnázium maď. Komárno
4.–5.	Ondrej KORPÁS	Gymnázium maď. Komárno
	Roman ŠVEC	Gymnázium Párovská, Nitra
6.	Ján SZENDI	Gymnázium maď. Komárno
7.–8.	Gusztáv PÁLOS	Gymnázium maď. Komárno
	Beáta STEHLÍKOVÁ	Gymnázium Nové Zámky

Kategória C

1.–3.	Ladislav ÁCS	Gymnázium Nové Zámky
	Katalin FEHÉR	Gymnázium maď. Komárno
	Keve KURUCZ	Gymnázium maď. Komárno
4.–6.	Endre KURUCZ	8, Gymnázium maď. Komárno
	Barbora HALMEŠOVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
	Filip VÍTEK	Gymnázium Párovská, Nitra
7.–8.	Zuzana KÚKELOVÁ	Gymnázium Šaľa
	Jarmila ŠKULAVÍKOVÁ	Gymnázium Komárno
9.–11.	Michal BUGOŠ	Gymnázium Šurany
	Zoltán HÉDER	Gymnázium maď. Komárno
	Balázs KESZEGH	Gymnázium maď. Komárno

Kategória Z8

1.	Marek KARVAJ	ZŠ Nábrežná, Nové Zámky
2.–3.	Monika BABIAKOVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
	Miloš MEDŘÍK	Gymnázium Párovská, Nitra
4.	Lenka KOVAČOVSKÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
5.–6.	Slávka ĎURIŠOVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
	Ivan KIŠAC	ZŠ Horné Obdokovce
7.–9.	Martina ČERVENÁKOVÁ	ZŠ Želiezovce
	Ľuboš FAZEKAŠ	ZŠ Robotnícka, Zlaté Moravce
	Peter JUHÁSZ	ZŠ Imeľ
10.	Gabriel VIMI	ZŠ maď. Diakovce

Kategória P

1.	Tomáš KEZES	2, Gymnázium Nové Zámky
2.–3.	Peter NOVÁK	4, Gymnázium Golianova, Nitra
	Pavol ŽBIRITA	4, Gymnázium Golianova, Nitra

Kraj Trnava

Kategória A

1.	Matej KUBÍK	4, Gymnázium Piešťany
2.	Michal ULICKÝ	3, Gymnázium Hviezdoslavova, Trnava
3.–4.	Zdenka GAŽOVÁ	4, Gymnázium Skalica
	Ľubomír KRAJČOVIČ	4, Gymnázium Hollého, Trnava
5.–6.	Juraj MRÁZ	4, Gymnázium Hollého, Trnava
	Viktor SZABÓ	4, Gymnázium maď. Dunajská Streda
7.–8.	Roman KAPUSTA	3, Gymnázium Piešťany
	András PÁLFFY	3, Gymnázium maď. Šamorín
9.	Zuzana BURSKÁ	3, Gymnázium Skalica

Kategória B

1.	Gábor NÉMETH	Gymnázium Dunajská Streda
2.–4.	Lenka KLEŠTINCOVÁ	Gymnázium Hlohovec
	Miloš MRVA	Gymnázium Hviezdoslavova, Trnava
	Mikuláš VALLO	Gymnázium A. Merici, Trnava

Kategória C

1.–2.	Róbert CSOKA	Gymnázium Dunajská Streda
	Peter SIDÓ	Gymnázium Dunajská Streda
3.	Tomáš JUHÁSZ	Gymnázium Šamorín
4.	Adrián MOLNÁR	Gymnázium Dunajská Streda
5.–8.	Michaela BUČKOVÁ	Gymnázium Hlohovec
	Adela KOČANOVÁ	Gymnázium Hviezdoslavova, Trnava
	Tomáš MEČÍŘ	Gymnázium Senica
	Liliána SÜKEOVÁ	Gymnázium Šamorín
9.–14.	Juraj DZIFČÁK	Gymnázium Hlohovec
	Jozef HAVRAN	Gymnázium Galanta
	Marek KUCHTA	Gymnázium Skalica
	Michal SEDLÁK	Gymnázium Piešťany
	Katarína SEKÁČOVÁ	Gymnázium Piešťany
	Annamária TAKÁTS	Gymnázium Šamorín

Kategória Z8

1.	Kamil CHOVANEC	ZŠ Fándlyho, Sereď
2.–3.	Jana KRÁTKA	ZŠ Mojmírova, Piešťany
	Zuzana VAŇOVÁ	II. ZŠ, Holíč
4.	Miloslav HOLÚBEK	II. ZŠ, Senica
5.–6.	Juraj NEČAS	II. ZŠ, Holíč
	Peter STULLER	ZŠ Jilemnického, Dunajská Streda
7.–9.	Benedikt GAÁL	Gymnázium maď. Galanta
	Roman JURÁŠ	II. ZŠ Holíč
	Pavol SÚKENÍK	ZŠ Holubyho, Piešťany
10.–11.	Andrea HESKOVÁ	ZŠ Gbely
	Beáta LOSONSZKA	ZŠ Veľký Meder

Kategória P

1.	Juraj FRIVOLT	4, Gymnázium maď. Galanta
2.–3.	Roland BOTT	3, Gymnázium maď. Dunajská Streda
	Zsolt BENES	3, Gymnázium maď. Dunajská Streda

Kraj Trenčín

Kategória A

1.	Jozef LADICKÝ	4, Gymnázium Nové Mesto nad Váhom

2.	Štefan GAŠPAR	3, Gymnázium Púchov
3.–4.	Martin HAJDUCH	4, Gymnázium Považská Bystrica
	Peter HARIŠ	4, Gymnázium Púchov
5.–6.	Róbert MACHO	4, Gymnázium Prievidza
	Peter VALO	4, Gymnázium Považská Bystrica
7.	Andrea KMOTORKOVÁ	3, Gymnázium Bánovce nad Bebravou

Kategória B

1.	Zuzana DZURÁKOVÁ	Gymnázium Prievidza
2.	Lenka BREŠOVÁ	Gymnázium Trenčín
3.	Mária ČIČMANCOVÁ	Gymnázium Prievidza
4.–5.	Barbora GULEJOVÁ	Gymnázium Prievidza
	Michal HANÁČEK	Gymnázium Trenčín

Kategória C

1.–3.	Martin PASTVA	Gymnázium Prievidza
	Peter PRAVDA	Gymnázium Prievidza
	Miroslav ZÁMEČNÍK	Gymnázium Nové Mesto nad Váhom
4.–5.	Anna FRANEKOVÁ	Gymnázium Partizánske
	Andrej MINAROVIČ	Gymnázium Partizánske
6.–7.	Michal TOMČÍK	Gymnázium Prievidza
	Petra KOSAROVÁ	Gymnázium Trenčín
8.	Marián ERTE	Gymnázium Prievidza
9.–11.	Katarína BEHULIAKOVÁ	Gymnázium Považská Bystrica
	Pavol HRIADEL	Gymnázium Bánovce nad Bebravou
	Juraj SUCHÁR	Gymnázium Dubnica nad Váhom

Kategória Z8

1.	Juraj ŠARINAY	ZŠ Dolné Hony, Trenčín
2.–4.	Peter ČERMÁK	ZŠ Hviezdoslavova, Nová Dubnica
	Tomáš KULICH	ZŠ Rastislavova, Prievidza
	Michaela NĚMCOVÁ	Gymnázium Partizánske
5.	Ján MAZANEC	Gymnázium Prievidza
6.	Tomáš SEDLIAČIK	ZŠ Veľká okružná, Partizánske
7.	Gabriela ŠEVČÍKOVÁ	ZŠ Tematínska, Nové Mesto nad Váhom
8.–9.	Mária BENDOVÁ	Gymnázium Prievidza
	Martin STRAPKO	ZŠ Komenského, Púchov
10.–11.	Zuzana SIVANICOVÁ	ZŠ Komenského, Bánovce nad Bebravou
	Vladimír TURČEK	ZŠ Klátova Nová Ves

Kategória P

1.	Martin HAJDUCH	4, Gymnázium Považská Bystrica
2.	Róbert MACHO	4, Gymnázium Prievidza
3.	Peter NOVOTNÝ	4, Gymnázium Prievidza

Kraj Žilina

Kategória A

1.–2.	Pavol NOVOTNÝ	3, Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
	Peter NOVOTNÝ	2, Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
3.–4.	Viera RŮŽIČKOVÁ	3, Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
	Peter SVRČEK	3, Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
5.	Martin SLEZIAK	4, Gymnázium Ružomberok
6.–9.	Peter KOZÁK	2, Gymnázium Sučany
	Vladimír KOZÁK	3, Gymnázium Sučany
	Peter VARŠA	3, Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
	Michal ZORKOVSKÝ	4, Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
10.	Jozef KNAP	4, Gymnázium Veľká Okružná, Žilina

Kategória B

1.–2.	Peter KOZÁK	Gymnázium Sučany
	Ivan PILIŠ	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
3.	Peter NOVOTNÝ	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
4.	Vladimír KOZÁK	Gymnázium Sučany
5.–6.	Rastislav ŠIMONÍK	Gymnázium Martin
	Jozef ŠKORUPA	Gymnázium Liptovský Mikuláš
7.–8.	Marcela KOŽÁKOVÁ	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
	Miroslava MÚČKOVÁ	Gymnázium Martin

Kategória C

1.–2.	Peter KOZÁK	Gymnázium Sučany
	Martin TROJÁK	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
3.	Boris BALKO	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
4.–5.	Dáša CHLÁDEKOVÁ	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
	Jaroslav ŠOLTÝS	Gymnázium Liptovský Hrádok
6.	Martin RENTKA	Gymnázium Námestovo
7.	Michal MUŠÁK	Gymnázium Sučany
8.–9.	František DEBNÁR	Gymnázium Liptovský Hrádok

	Ľuboš OBLUK	Gymnázium Martin
10.	Radoslav FULEK	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina

Kategória Z8

1.	Michal BUTEK	ZŠ Hliny V., Žilina
2.–5.	Ľuboš KLANICA	ZŠ Gaštanová, Žilina
	Eva KOMPANOVÁ	ZŠ J.Matušku, Dolný Kubín
	Ľudovít MRAVÍK	ZŠ Moskovská, Žilina
	Michal PEŠTA	ZŠ Bobrovec
6.	Jozef JURÍČEK	ZŠ Moskovská, Žilina
7.–9.	Daniela KRAJČOVÁ	ZŠ Martinská, Žilina
	Juraj LAŠŠUTH	ZŠ Nemocničná II., D.Kubín
	Branislav MIKULÁŠ	Gymnázium Martin
10.–12.	Michaela BURANÍKOVA	ZŠ Tomáškova, Martin
	Andrea HEGLASOVÁ	ZŠ Moskovská, Žilina
	Andrej KUNOŠ	ZŠ Žiarska, Liptovský Mikuláš

Kategória P

1.	Stanislav FUNIAK	4, Gymnázium Sučany
2.	Michal MATOUŠEK	3, Gymnázium Hlinská, Žilina

Kraj Banská Bystrica

Kategória A

1.	Miloš KOPA	4, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
	Ivan LUKNÁR	4, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
3.–5.	Marek HYČKO	4, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
	Martin SAMUELČÍK	4, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
	Ondrej VACEK	4, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
6.–7.	Pavol ZAJAC	3, Gymnázium Komenského, Banská Bystrica
	Ján ĎURIŠ	4, Gymnázium Rimavská Sobota
8.–9.	Vladislav GADOŠÍK	3, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
	Martin STAŇO	2, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
10.	Ján RYS	3, Gymnázium Kremnica

Kategória B

1.–2.	Alena TEPLIČANOVÁ	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
	Juraj TUREK	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
3.	Katarína STAJANČOVÁ	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica

4.	Martin STAŇO	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
5.	Marian KRÁTKY	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
6.	Irena MAŤOVÁ	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
7.	Jana PIGOŠOVÁ	Gymnázium Banská Štiavnica

Kategória C

1.–2.	Júlia LACKOVÁ	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
	Ondrej SUCHÝ	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
3.	Ján ORAVEC	ZŠ Radvaň, Banská Bystrica
4.–6.	Michal KORČEK	Gymnázium Zvolen
	Dušan LACIKA	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
	Július LANGA	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
7.–9.	Peter HARMADY	Gymnázium Rimavská Sobota
	Peter CHRTIANSKY	Gymnázium Lučenec
	Roman NEDELA	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
10.	Andrej ČIERNY	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica

Kategória Z8

1.	Ján ORAVEC	ZŠ Radvaň, Banská Bystrica
2.	Tomáš LIPTÁK	ZŠ Tornaľa
3.	Zuzana CIENIKOVÁ	III. ZŠ Zvolen
4.–7.	Jakab GERGELY	ZŠ Vinica
	Zoltán MICS	ZŠ Vinica
	Ján PIGOŠ	ZŠ Banská Štiavnica
	Tomáš POČAI	ZŠ Banská Štiavnica
8.–9.	Ján HANZLÍK	IV. ZŠ Detva
	Stanislav SEKEREŠ	III. ZŠ Detva
10.–12.	Juraj BEDNÁR	ZŠ Moyzesovo nám., Banská Bystrica
	Martin MATEJKA	ZŠ Radvaň, Banská Bystrica
	Radoslav PERVAN	ZŠ Hviezdoslavova, Revúca

Kraj Košice

Kategória A

1.–2.	František KARDOŠ	3, Gymnázium Alejová, Košice
	Ján ŠPAKULA	3, Gymnázium Poštová, Košice
3.	Peter JACKO	3, Gymnázium Poštová, Košice
4.	Ján RUSZ	4, Gymnázium Trebišovská, Košice
5.–6.	Peter BODÍK	3, Gymnázium Poštová, Košice
	Miroslav DUDÍK	4, Gymnázium Trebišov

7.	Marián KLEIN	3, Gymnázium Poštová, Košice
8.–9.	Martin HRIŇÁK	2, Gymnázium Alejová, Košice
	Rastislav KRIVOŠ-BELLUŠ	4, Gymnázium Poštová, Košice
10.–11.	Martin BERTA	4, Gymnázium Michalovce
	Matúš MEDO	3, Gymnázium Poštová, Košice

Kategória B

1.	Martin HRIŇÁK	Gymnázium Alejová, Košice
2.	Petra FENCÍKOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
3.	Eduard SEMAN	Gymnázium Michalovce
4.–7.	Peter ANDRAŠINA	Gymnázium Alejová, Košice
	Peter MIHÓK	Gymnázium Alejová, Košice
	Jozef MIŠKUF	Gymnázium Poštová, Košice
	Ján SENKO	SPŠE Košice
8.	Vladimír LAKATOŠ	Gymnázium Michalovce

Kategória C

1.–6.	Marek JENDREJ	Gymnázium Poštová, Košice
	Tomáš JURÍK	Gymnázium Poštová, Košice
	Anna KORDULIAKOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
	Miroslava SOTÁKOVÁ	Gymnázium Javorová, Spišská Nová Ves
	Michal VAĽKO	Gymnázium Alejová, Košice
	Zuzana VARGOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
7.–8.	Tomáš ANDRAŠINA	Gymnázium Alejová, Košice
	Róbert BURSA	Gymnázium Alejová, Košice
9.	Martin VITIKÁČ	Gymnázium Školská, Spišská Nová Ves
10.	Peter ŽÁRSKY	Gymnázium Alejová, Košice

Kategória Z8

1.	Lukáš FERENC	ZŠ sv. Cyrila a Metoda, Spišská Nová Ves
2.–4.	Peter HRUŠOVSKÝ	ZŠ Ing. Kožucha, Spišská Nová Ves
	Kamil KNAP	ZŠ Drábova, Košice
	Peter TAMÁŠ	Gymnázium Alejová, Košice
5.–7.	Drahoslav HREŇO	VI. ZŠ, Michalovce
	Lucia JAROŠOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
	Zuzana VLČKOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
8.–11.	Ivan DOVICA	ZŠ park Angelínum, Košice
	Silvia ĎURIŠOVÁ	VI. ZŠ Michalovce
	Ján UHRÍN	VIII. ZŠ Michalovce
	Tomáš TOPERCER	ZŠ Letanovce

Kategória P

1.	Miroslav DUDÍK	4, Gymnázium Trebišov
2.	Ján RUSZ	4, Gymnázium Trebišovská, Košice
3.	Peter BODÍK	3, Gymnázium Poštová, Košice
4.	Rastislav KRIVOŠ-BELLUŠ	4, Gymnázium Poštová, Košice
5.	Peter PAVLISKO	4, Gymnázium Košice – Šaca
6.	Peter VASIĽ	4, Gymnázium Michalovce
7.	Michal KOĽCUN	3, Gymnázium Alejová, Košice
8.	Peter ULIČIANSKY	4, Gymnázium Alejová, Košice
9.	Martin BERTA	4, Gymnázium Michalovce
10.	Marianna POLACKÁ	3, Gymnázium Trebišov

Kraj Prešov

Kategória A

1.	Daniel NAGAJ	3, Gymnázium Bardejov
2.–3.	Martin GUZI	3, Gymnázium Konštantínova, Prešov
	Zuzana RJAŠKOVÁ	4, Gymnázium Vranov nad Topľou
4.–5.	Cyril ADAMUŠČIN	3, Gymnázium Bardejov
	Slavomír NEMŠÁK	3, Gymnázium Konštantínova, Prešov
6.–7.	Miroslav DOBIS	4, Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad
	Martin JURČÁK	4, Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad
8.–9.	Marek REVICKÝ	4, Gymnázium Konštantínova, Prešov
	Marián VRÁBEL	2, Gymnázium D.Tatarku, Poprad
10.–11.	Lucia MRÓZOVÁ	3, Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad
	Ján SVOREŇ	4, Gymnázium D.Tatarku, Poprad

Kategória B

1.	Michal FORIŠEK	Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad
2.	Marián VRÁBEL	Gymnázium D.Tatarku, Poprad
3.	Martin LANG	Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad
4.–5.	Peter BREJČÁK	Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad
	Pavol KOVALČÍK	Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad
6.	Karol ČISARIK	Gymnázium Konštantínova, Prešov
7.	Peter GAJDOŠ	Gymnázium Konštantínova, Prešov
8.–9.	Stanislav ŠIMO	Gymnázium D.Tatarku, Poprad
	Lucia ŽIVICKÁ	Gymnázium Kežmarok
10.–14.	Eduard KUPČO	Gymnázium D.Tatarku, Poprad

	Peter KUPSKÝ	SPŠE Prešov
	Peter MOLNÁR	Gymnázium Vranov nad Topľou
	Viera POLOHOVÁ	Gymnázium J.A.Raymana, Prešov
	Michal ŽÁČEK	Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad

Kategória C

1.	Alexandra SAXOVÁ	Gymnázium Konštantínova, Prešov
2.–4.	Helena HOVANCOVÁ	Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad
	Juraj LACA	Gymnázium Svidník
	Zuzana OLEKŠÁKOVÁ	Gymnázium D.Tatarku, Poprad
5.–7.	Martin ARVAY	OA Prešov
	Slavomír KATUŠČÁK	Gymnázium Konštantínova, Prešov
	Jaroslava VERNARCOVÁ	Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad
8.–9.	Miloš ČERNÁK	Gymnázium Kežmarok
	Igor TKÁČ	Gymnázium Humenné
10.–14.	Igor GOMBOŠ	8, Gymnázium Kežmarok
	Stanislav KAŠČÁK	Gymnázium Lipany
	Martin KOŠALKO	Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad
	Ivana KUPČIHOVÁ	Gymnázium Konštantínova, Prešov
	Slavomír MIŠKOVEC	Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad

Kategória Z8

1.	Martin KOMARA	Gymnázium Sabinov
2.	Erika HÖNSCHOVÁ	BGymnázium Poprad
3.–6.	Peter BANDA	ZŠ Mirka Nešpora, Prešov
	Marta BELIŠOVÁ	ZŠ Mirka Nešpora, Prešov
	Igor GOMBOŠ	Gymnázium Kežmarok
	Ľudmila HOSTOVÁ	ZŠ Ševčenkova, Bardejov
7.–8.	Růžena MORONGOVÁ	Gymnázium Kežmarok
	Mário OLEXIČÁK	ZŠ Študentská, Snina
9.–13.	Jana ONDTKOVÁ	ZŠ Ševčenková, Bardejov
	Miroslav PICH	ZŠ Centrálna, Svidník
	Martin ZIMÁNY	Gymnázium D.Tatarku, Poprad
	Štefan ZORIČÁK	Gymnázium Kežmarok

Kategória P

1.	Zuzana RJAŠKOVÁ	4, Gymnázium Vranov nad Topľou
2.	Ján SVOREŇ	4, Gymnázium D.Tatarku, Poprad
3.	Matúš MIHAĽAK	4, Gymnázium Konštantínova, Prešov
4.	Marek REVICKÝ	4, Gymnázium Konštantínova, Prešov
5.	Juraj HORVÁTH	4, Gymnázium Konštantínova, Prešov

Zadania súťažných úloh

Kategória C

C – I – 1

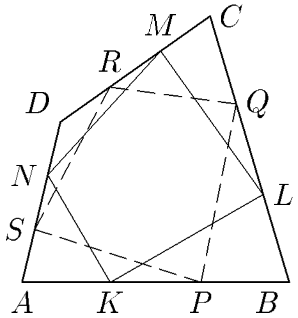
Číslo 4 896 je deliteľné ako svojím prvým dvojčíslím (48), tak aj svojím posledným dvojčíslím (96). Koľko je štvorciferných čísel s touto vlastnosťou, ktoré sú naviac deliteľné 17-timi?

(J. Šimša)

C – I – 2

Každá strana konvexného štvoruholníka $ABCD$ je dvoma bodmi rozdelená na tri zhodné úsečky (obr. 1). Ukážte, že štvoruholníky $KLMN$ a $PQRS$ majú rovnaký obsah.

(J. Zhouf)



Obr. 1

C – I – 3

V pravouhlom trojuholníku ABC je K stred prepony AB a bod M leží na odvesne AC tak, že $|AM| = 2|MC|$. Dokážte, že uhly MKC a ABM sú zhodné.

(Prevzatá úloha)

C – I – 4

Na dvore sa hrali Karol, Miro a Jaro. Karol si myslel dve dvojciferné čísla. Mirovi prezradil ich rozdiel. Ten správne našiel všetkých deväť takých dvojíc. Jarovi Karol prezradil súčin oboch čísel. Jaro správne určil všetkých osem dvojíc s uvedeným súčinom. Ktoré čísla si Karol myslel?

(P. Černek)

C – I – 5

V pravidelnom trojbokom ihlane $ABCV$ je dĺžka bočnej hrany $|AV| = 5\,\mathrm{cm}$, dĺžka hrany podstavy $|AB| = 4\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$. Body K, L, M sú päty kolmíc vedených vnútorným bodom X podstavy ABC na bočné hrany AV, BV, CV. Ako je potrebné voliť bod X, aby guľová plocha prechádzajúca bodmi K, L, M a X mala čo najmenší priemer? Vypočítajte tento priemer.

(P. Leischner)

C – I – 6

Nájdite všetky trojice celých čísel x, y, z, pre ktoré platí $x + yz = y + xz = z + xy = 6$.

(J. Zhouf)

C – S – 1

Os prepony AB pravouhlého trojuholníka ABC pretne odvesnu AC v bode M, pre ktorý platí $|AM| = 2|CM|$. Určte veľkosti uhlov trojuholníka ABC.

(P.Leischner)

C – S – 2

Karol požiadal Mira: „Mysli si dve rôzne dvojciferné čísla a prezraď mi ich súčet.“ Keď sa tak stalo, Karol správne zistil, že existujú práve štyri také dvojice (na poradí čísel v dvojici nezáleží). Miro ďalej Karolovi napovedal, že väčšie z oboch čísel je prvočíslo. Určte všetky dvojice čísel, ktoré si Miro mohol myslieť.

(J.Šimša)

C – S – 3

Nájdite všetky štvorice prirodzených čísel, pre ktoré platí: Súčet súčinu každých dvoch čísel zo štvorice so súčinom zostávajúcich dvoch čísel je rovný 51.

(J.Zhouf)

C – II – 1

V štvorcifernom čísle sú rovnaké prvé dve číslice, a tiež posledné dve číslice. Určte toto číslo, ak viete, že je druhou mocninou prirodzeného čísla.

(ČS MO)

C – II – 2

Daný je pravouhlý trojuholník ABC. Na prepone AB zostrojte bod X a na odvesne BC bod Y tak, aby bolo možné štvoruholníku $AXYC$ opísať aj vpísať kružnicu.

(P.Leischner)

C – II – 3

Janko s Marienkou požiadali svoju mamičku, aby si zvolila dve rôzne dvojciferné čísla. Mamička potom Jankovi prezradila ich rozdiel a Marienke ich súčet. Janko správne zistil, že práve 63 takých dvojíc dáva daný rozdiel. Aj Marienka našla správne všetkých 40 dvojíc s daným súčtom. Ktoré čísla mamička zvolila?

(J.Šimša)

C – II – 4

Vo štvorci $ABCD$ je R stred strany CD a Q priesečník uhlopriečky BD s priamkou AR. Na strane BC zvoľte bod P tak, aby úsečka PQ rozdelila lichobežník $ABCR$ na dva štvoruholníky s rovnakým obsahom.

(J.Švrček)

Kategória B

B – I – 1

Pre ktoré prirodzené čísla n možno v pravidelnom n-uholníku nájsť uzavretú lomenú čiaru zloženú z n uhlopriečok n-uholníka tak, aby prechádzala všetkými vrcholmi n-uholníka, a aby každé dve z týchto uhlopriečok mali spoločný bod?

(P. Hliněný)

B – I – 2

Nájdite všetky kvadratické funkcie, ktoré zobrazia interval $\langle 2,5\rangle$ na interval $\langle 15,27\rangle$, a ktorých graf prechádza počiatkom súradnicového systému.

(P. Černek)

B – I – 3

Koľko 24-miestnych prirodzených čísel, ktorých dekadický zápis obsahuje 22 cifier 1 a dve cifry 2, je deliteľných siedmimi?

(T. Hecht)

B – I – 4

V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x+y+z&=3,\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}&=0,\\ \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}&=\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}. \end{aligned}$$

(J. Šimša)

B – I – 5

V rovnobežníku $ABCD$ označme E a F po rade stredy strán BC a CD. Veďte rovnobežku s priamkou BD, ktorá pretína obvod štvoruholníka v bodoch K, L tak, aby úsečka KL bola rozdelená úsečkami AE, AC, AF na štyri zhodné úseky.

(J. Zhouf)

B – I – 6

Nad stranami ostrouhlého trojuholníka ABC sú zvonku zostrojené polkružnice. Označme po rade K, L, M priesečníky predĺžených výšok trojuholníka z vrcholov A, B, C s týmito polkružnicami. Dokážte, že obrazec $AMBKCL$ tvorí plášť štvorstena (trojbokého ihlanu s podstavou ABC).

(P. Leischner)

B – S – 1

Ak je päťciferné číslo $6AB73$ deliteľné číslom 99, tak je deliteľné aj číslom 19. Dokážte.

(P. Černek)

B – S – 2

Rovnica $x^3+ax^2+bx+c=0$, kde a, b a c sú celé čísla, má koreň $x=1-\sqrt{2}$. Dokážte, že potom platí $a-2b+5c=0$.

(P. Černek)

B – S – 3

Daný je rovnobežník $ABCD$ s dĺžkami strán $a=|AB|$, $b=|BC|$ a uhlom $\alpha=|\sphericalangle DAB|$. Popíšte konštrukciu priamky, ktorá delí rovnobežník na dva štvoruholníky, ktorým možno vpísať kružnicu. Preveďte diskusiu o počte riešení vzhľadom na a, b a α.

(P. Černek)

B – II – 1

V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$
\begin{aligned}
3x + 14 &= y^2 + z^2,\\
3y + 14 &= z^2 + x^2,\\
3z + 14 &= x^2 + y^2.
\end{aligned}
$$

(P. Černek)

B – II – 2

Určte, pre ktoré reálne čísla p má funkcia $f(x) = x^3 - px^2 + 1\,997$ na intervale $\langle 0, 1\rangle$ minimum v bode $x = 1$.

(P. Černek)

B – II – 3

Nech $ABCD$ je lichobežník ($AB \parallel CD$), ktorého uhlopriečky sú navzájom kolmé. Dokážte nerovnosť $|AB| + |CD| < |BC| + |DA|$.

(J. Švrček)

B – II – 4

Učiteľ napísal na tabuľu štyri navzájom rôzne nenulové číslice. Žiaci mali sčítať všetky tie trojciferné čísla vytvorené z číslic na tabuli, v ktorých sa žiadna číslica neopakuje. Jankovi vyšiel nesprávny výsledok 12 497, pretože síce čísla správne sčítal, ale na jedno zabudol. Ktoré číslo to bolo? Aké štyri číslice boli napísané na tabuli?

(P. Černek)

KATEGÓRIA A

A – I – 1

Pre každé prirodzené číslo k označme n_k súčin prvých k prvočísel (napr. $n_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$). Zistite, pre ktoré čísla k je možné zlomok

$$\frac{3^{n_k} - 1}{n_k}$$

krátiť číslom väčším ako 2.

(R. Kollár)

A – I – 2

Nájdite všetky dvojice mnohočlenov

$$f(x) = x^2 + ax + b, \quad g(x) = x^2 + cx + d,$$

ktoré spĺňajú tieto podmienky:

(1) Každý z mnohočlenov f, g má dva rôzne reálne korene.
(2) Ak je s ľubovoľný koreň f, potom aj $g(s)$ je koreň f.
(3) Ak je s ľubovoľný koreň g, potom aj $f(s)$ je koreň g.

(J. Šimša)

A – I – 3

V ľubovoľnom trojuholníku ABC označme a, b, c dĺžky jeho strán a t_a, t_b, t_c dĺžky jeho ťažníc obvyklým spôsobom. Zistite, či je niektorá z nerovností

$$a < \frac{b+c}{2}, \quad t_a > \frac{t_b + t_c}{2}$$

dôsledkom druhej, alebo či dokonca nejde o dve ekvivalentné nerovnosti.

(J. Šimša)

A – I – 4

Do daného kruhového odseku sú vpísané kružnice k_1, k_2. Kružnica k_1 sa dotýka oblúka odseku v bode A a základne odseku v bode B. Kružnica k_2 sa dotýka oblúka odseku v bode C a základne odseku v bode D.

a) Dokážte, že body A, B, C, D ležia na jednej kružnici.
b) Uvažujme všetky také dvojice kružníc k_1, k_2, ktoré sa navyše vzájomne dotýkajú. Aký útvar vyplnia body ich dotyku?

(J. Zhouf)

A – I – 5

Vo vnútri pravidelného štvorstena $ABCD$ sú dané body E, F tak, že žiadne štyri z bodov A, B, C, D, E, F neležia v jednej rovine. Štvorsten $ABCD$ je bezo zvyšku rozrezaný na niekoľko menších štvorstenov, ktorých vrcholy tvoria množinu $\{A, B, C, D, E, F\}$. Určte všetky možné počty menších štvorstenov, na ktoré sa dá daný štvorsten uvedeným spôsobom rozrezať.

(P. Hliněný)

A – I – 6

Každá z uhlopriečok pravidelného n-uholníka ($n \geqq 5$) je ofarbená jednou z dvoch farieb (modrou alebo červenou). Je povolené postupné prefarbovanie uhlopriečok tak, že v každom kroku vyberieme jeden vrchol a zmeníme farby všetkých uhlopriečok, ktoré z neho vychádzajú (z modrej na červenú a naopak). Rozhodnite, či možno vždy uhlopriečky prefarbiť tak, aby existovala

a) lomená čiara,

b) uzavretá lomená čiara

zložená iba z modrých uhlopriečok a prechádzajúca každým vrcholom n-uholníka práve raz.

(J. Kratochvíl)

A – S – 1

Určte všetky dvojice prvočísel p a q, pre ktoré platí $5^p = 6 + 7q$.

(J.Šimša)

A – S – 2

Daná je tetiva UV kružnice k. Označme L_1 a L_2 priesečníky osi úsečky UV s kružnicou k. Do kruhového odseku vymedzeného tetivou UV a oblúkom UL_1V sú vpísané dve kružnice dotýkajúce sa oblúka aj tetivy a pretínajúce sa v dvoch rôznych bodoch M a N. Dokážte, že priamka MN prechádza bodom L_2.

(P.Hliněný)

A – S – 3

Dokážte, že ak pre reálne čísla a, b, c platí $a + b + c = 1$, tak

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + ab + bc + ca \geqq 1.$$

(R.Kollár)

A – II – 1

Ak je súčet $5^n + 3^n + 1$ prvočíslo, potom je prirodzené číslo n deliteľné dvanástimi. Dokážte.

(J.Šimša)

A – II – 2

Určte, pre ktoré veľkosti uhla DAB možno do kosoštvorca $ABCD$ vpísať dve kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ s týmito vlastnosťami: Kružnice k_1 a k_2 majú vonkajší dotyk, $r_2 = 2r_1$, kružnica k_1 sa dotýka ramien uhla DAB, kružnica k_2 sa dotýka ramien uhla BCD a obidve kružnice ležia v danom kosoštvorci.

(J.Zhouf)

A – II – 3

Postupnosť čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je definovaná rekurentne:

$$a_1 = 2,$$
$$a_n = 2(n + a_{n-1}) \quad \text{pre každé } n \geqq 2.$$

Dokážte, že nerovnosť $a_n \leqq 2^{n+2}$ platí pre každé prirodzené číslo n.

(J.Kratochvíl)

A – II – 4

Nájdite mnohosten s najmenším počtom vrcholov taký, že žiadne tri jeho steny nemajú rovnaký počet hrán.

(J.Kratochvíl)

A – III – 1

Označme strany a uhly trojuholníka ABC obvyklým spôsobom. Dokážte, že z rovnosti $\alpha = 3\beta$ vyplýva $(a^2-b^2)(a-b) = bc^2$. Rozhodnite, či tiež naopak z rovnosti $(a^2 - b^2)(a-b) = bc^2$ vyplýva $\alpha = 3\beta$.

(J.Šimša)

A – III – 2

Každá strana aj uhlopriečka pravidelného n-uholníka, kde $n \geqq 3$ je nepárne, je ofarbená buď modrou, alebo červenou farbou. Je povolené prefarbovať tieto úsečky len tak, že v každom kroku vyberieme jeden vrchol a zmeníme farby všetkých úsečiek, ktoré z neho vychádzajú (z modrej na červenú a naopak). Dokážte, že každé začiatočné ofarbenie možno týmto postupom zmeniť tak, aby nakoniec z každého vrcholu vychádzal párny počet modrých úsečiek. Dokážte tiež, že takéto výsledné ofarbenie je jednoznačne určené začiatočným ofarbením.

(J.Kratochvíl)

A – III – 3

Štvorsten $ABCD$ je bezo zvyšku rozdelený na päť konvexných mnohostenov tak, že žiadna jeho stena nie je rozdelená a prienik každých dvoch z piatich vzniknutých mnohostenov je buď spoločný vrchol, alebo spoločná hrana, alebo spoločná stena. Aký je najmenší možný súčet počtov stien týchto piatich mnohostenov?

(P.Hliněný)

A – III – 4

Dokážte, že existuje rastúca postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ prirodzených čísel taká, že pre každé prirodzené číslo $k \geqq 2$ postupnosť $(k + a_n)_{n=1}^{\infty}$ obsahuje len konečne veľa prvočísel.

Rozhodnite, či existuje rastúca postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ prirodzených čísel taká, že pre každé celé číslo $k \geqq 0$ postupnosť $(k + a_n)_{n=1}^{\infty}$ obsahuje len konečne veľa prvočísel.

(R.Kollár)

A – III – 5

Pre každé prirodzené číslo $n \geqq 2$ určte najväčšiu hodnotu výrazu

$$V_n = \sin x_1 \cos x_2 + \sin x_2 \cos x_3 + \ldots + \sin x_{n-1} \cos x_n + \sin x_n \cos x_1,$$

kde x_1, x_2,..., x_n sú ľubovoľné reálne čísla.

(J.Švrček)

A – III – 6

Daný je rovnobežník $ABCD$ taký, že ABD je ostrouhlý trojuholník a $|\sphericalangle BAD| = 45°$. Vo vnútri strán rovnobežníka možno rôznymi spôsobmi vybrať body $K \in AB$, $L \in BC$, $M \in CD$ a $N \in DA$ tak, aby $KLMN$ bol tetivový štvoruholník, ktorého opísaná kružnica má rovnaký polomer ako obidve kružnice opísané trojuholníkom ANK a CLM. Nájdite množinu priesečníkov uhlopriečok všetkých takých štvoruholníkov $KLMN$.

(J.Šimša)

Riešenia súťažných úloh

Kategória C

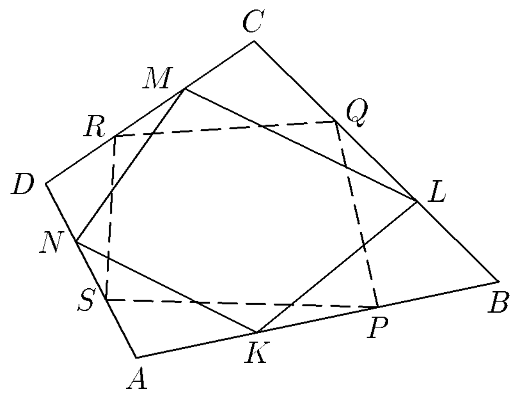
C – I – 1

Ak má číslo n vlastnosti zadané v úlohe, potom dvojciferné číslo A zložené z prvých dvoch číslic čísla n delí dvojciferné číslo C zložené z posledných dvoch číslic čísla n, teda $C = kA$, kde k je prirodzené. Ďalej číslo $C = kA$ delí číslo $n = 100A + C$, takže delí číslo $100A$. Teda k delí číslo 100. Preto sa môže k rovnať len niektorému z čísel 1, 2, 4, 5. Keby bolo $k \geqq 10$, nebolo by číslo $C = kA$ dvojciferné. Nutne sa teda n rovná niektorému z čísel $101A$, $102A$, $104A$ alebo $105A$.

Z koeficientov 101, 102, 104, 105 je len číslo 102 deliteľné 17. Ak je teda $k = 2$, môže byť A ľubovoľné číslo, ktorého dvojnásobok je tiež dvojciferný, takže $10 \leqq A \leqq 49$, to je 40 možností. Pre ostatné hodnoty k musí byť A deliteľné číslom 17, takže pre $k = 1$ môže byť $A = 17$, 34, 51, 68, 85 (5 možností), pre $k = 4$ alebo 5 musí byť $A = 17$ (2 možnosti). Výsledok: Čísel s danými vlastnosťami je práve 47, sú to čísla 1 785, 1 768, 1 717, 3 434, 5 151, 6 868, 8 585 a 1 020, 1 122, 1 224, …, 4 896, 4 998.

C – I – 2

Štvoruholník $KLMN$ dostaneme zo štvoruholníka $ABCD$ odobratím trojuholníkov NAK, KBL, LCM, MDN, štvoruholník $PQRS$ odobratím trojuholníkov SAP, PBQ, QCR, RDS (obr. 2). Pritom trojuholníky KBL, PBQ majú rovnaký obsah, pretože $|BL| = \frac{1}{2}|BQ|$, $|BK| = 2|BP|$. Podobne pre ďalšie dvojice trojuholníkov.

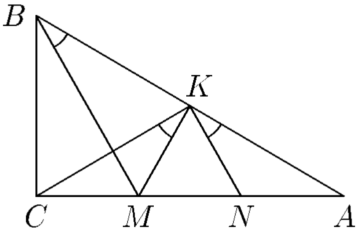


Obr. 2

C – I – 3

Označme N stred úsečky AM, KN je stredná priečka v trojuholníku ABM, preto $|\sphericalangle ABM| = |\sphericalangle AKN|$ (obr. 3).

Ďalej je $|KC| = |KA|$ (kružnica opísaná trojuholníku ABC má stred v bode K). Trojuholník AKN je obrazom trojuholníka CKM v osovej súmernosti podľa osi úsečky AC, preto $|\sphericalangle AKN| = |\sphericalangle CKM|$, a teda $|\sphericalangle ABM| = |\sphericalangle CKM|$.



Obr. 3

Iné riešenie. Najprv zostrojíme obrazy B', K' bodov B, K v osovej súmernosti podľa priamky AC a potom ťažnice v trojuholníku ABB'. Ťažnice $B'K$, BK' sa pretnú v bode M. Úsečka CK je strednou priečkou v trojuholníku ABB'.

C – I – 4

Miro poznal rozdiel m oboch čísel, mohli to teda byť čísla $10 + m$, 10 alebo $11 + m$, 11 atď. až 99, $99 - m$. Takých dvojíc je $99 - (9 + m) = 90 - m$. Vieme, že ich bolo deväť, takže $m = 81$. Karol si teda myslel niektorú z týchto dvojíc: $(91, 10)$, $(92, 11)$, $(93, 12)$, $(94, 13)$, $(95, 14)$, $(96, 15)$, $(97, 16)$, $(98, 17)$, $(99, 18)$. Ak spočítame pre každú z týchto dvojíc súčin oboch čísel, tak len v prípade $(96, 15)$ sa dá tento súčin napísať ešte ďalšími siedmimi spôsobmi ako súčin dvoch dvojciferných čísel: $96 \cdot 15 = 90 \cdot 16 = 80 \cdot 18 = 72 \cdot 20 = 60 \cdot 24 = 48 \cdot 30 = 45 \cdot 32 = 40 \cdot 36$. Karol si myslel čísla $96, 15$.

C – I – 5

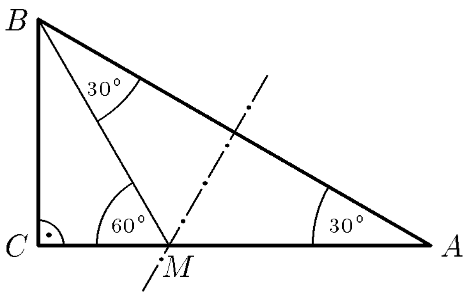
Pretože XK je kolmé na VK, leží bod K na Tálesovej kružnici nad priemerom XV. Podobne pre L a M, všetky tri body K, L, M ležia preto na guľovej ploche s priemerom XV. Aby bol tento priemer čo najmenší, musí byť X päta kolmice vedenej bodom V na rovinu ABC, takže X splýva s ťažiskom trojuholníka ABC. Je preto $|AX| = \frac{2}{3}|AP|$, kde P je päta výšky v trojuholníku ABC, takže $|AX| = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}|AB|\sqrt{3} = 4$ cm, $|VX| = 3$ cm.

C – I – 6

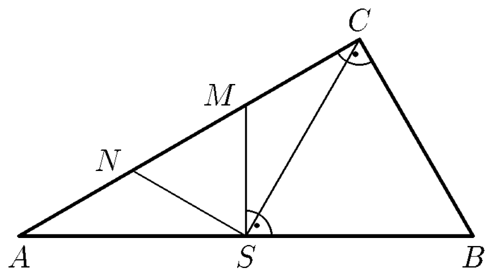
Odčítaním druhej a tretej rovnice od prvej dostaneme nutné podmienky $(x - y)(1 - z) = 0$, $(x - z)(1 - y) = 0$, takže buď je $x = y = z$, alebo $x = y = 1$, alebo $x = z = 1$, alebo $y = z = 1$. Ak je $x = y = z$, musí ešte platiť $x(x + 1) = 6$, preto $x = 2$ alebo $x = -3$. Ak je $x = y = 1$, je nutne $z = 5$. Riešením sú práve tieto usporiadané trojice: $(2, 2, 2)$, $(-3, -3, -3)$, $(1, 1, 5)$, $(1, 5, 1)$ a $(5, 1, 1)$.

C – S – 1

Pretože $|BM| = |AM| = 2|CM|$, v pravouhlom trojuholníku BMC (obr. 4) platí $|\sphericalangle BMC| = 60°$, $|\sphericalangle MBC| = 30°$. Potom $|\sphericalangle BMA| = 120°$, a preto v rovnoramennom trojuholníku ABM platí $|\sphericalangle MAB| = |\sphericalangle MBA| = 30°$. Veľkosti uhlov v trojuholníku ABC sú $30°$, $60°$, $90°$.



Obr. 4



Obr. 5

Iné riešenie. Označme S stred prepony AB a N stred úsečky AM (obr. 5). Pretože $|AM| = 2|CM|$, je $|AN| = |MN| = |MC|$, takže úsečky MN a AC majú spoločnú os. Pretože $|AS| = |CS|$ (Tálesová kružnica nad priemerom AB), leží na tejto osi aj bod S. Preto tiež $|SM| = |SN|$. Zároveň však $|AN| = |NM| = |NS|$ (Tálesová kružnica nad priemerom AM), takže trojuholník MNS je rovnostranný. Z toho vyplýva, že $|\sphericalangle BAC| = 30°$ a $|\sphericalangle ABC| = 60°$.

Iné riešenie. Z podobnosti trojuholníkov ASM a ACB vyplýva

$$\frac{|AS|}{|AM|} = \frac{|AC|}{|AB|}.$$

Pri obvyklom označení $a = |BC|$, $b = |CA|$ a $c = |AB|$ strán trojuholníka ABC platí $|AS| = \frac{c}{2}$, $|AM| = \frac{2}{3}b$. Potom z predchádzajúcej rovnosti dostávame

$$\frac{3c}{4b} = \frac{b}{c}, \qquad \text{čiže} \qquad \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Z pravouhlého trojuholníka ABC však potom vyplýva $|\sphericalangle BAC| = 30°$ a $|\sphericalangle ABC| = 60°$.

C – S – 2

Označme s súčet myslených čísel. Potom dvojice čísel, ktoré si mohol Miro myslieť, môžeme napísať do stĺpcov (sú 4 možnosti):

$$\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
10 & s-10 & 10 & s-10 & 99 & s-99 & 99 & s-99 \\
11 & s-9 & 11 & s-9 & 98 & s-98 & 98 & s-98 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
x & x+1 & x & x+2 & x+1 & x & x+2 & x
\end{array}$$

V našom prípade budú v každom stĺpci štyri dvojice:

10	17	10	18	99	92	99	91
11	16	11	17	98	93	98	92
12	15	12	16	97	94	97	93
13	14	13	15	96	95	96	94

Vzhľadom na podmienku v zadaní si mohol Miro myslieť 4 dvojice čísel (4 riešenia): (17, 10), (17, 11), (97, 94) a (97, 93).

C – S – 3

Označme hľadané prirodzené čísla m, n, r a s. Súčasne musí platiť

$$mn + rs = 51,$$
$$mr + ns = 51,$$
$$ms + nr = 51.$$

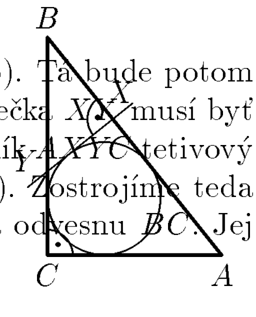
Odčítaním prvých dvoch rovníc vyjde $(m - s)(n - r) = 0$, takže $m = s$ alebo $n = r$, a odčítaním posledných dvoch rovníc vyjde $(m - n)(r - s) = 0$, takže $m = n$ alebo $r = s$. To znamená, že tri z uvažovaných čísel sú rovnaké. Ďalej je zrejmé, že z troch čísel a a jedného čísla b môžeme zostaviť jediný taký súčet $a^2 + ab = a(a + b) = 51$. Číslo 51 má dva rôzne rozklady na súčin dvoch čísel, $51 = 3 \cdot 17 = 1 \cdot 51$, takže musí byť (zrejme $a < a + b$) buď $a = 3$, $b = 14$, alebo $a = 1$, $b = 50$.

Riešením úlohy sú dve štvorice prirodzených čísel $(3, 3, 3, 14)$ a $(1, 1, 1, 50)$.

C – II – 1

Číslo $1\,000a + 100a + 10b + b = 11(100a + b)$ má byť druhou mocninou, preto musí byť číslo $100a + b$ deliteľné číslom 11 a podiel $\frac{1}{11}(100a + b) = 9a + \frac{1}{11}(a + b)$ musí byť druhou mocninou prirodzeného čísla. Vzhľadom na to, že a a b ($a \neq 0$) sú číslice, musí byť $a + b = 11$, a pretože $9a + 1$ má byť druhou mocninou, vyjde $a = 7$. Hľadané číslo je $7\,744 = 88^2$.

C – II – 2



Obr. 6

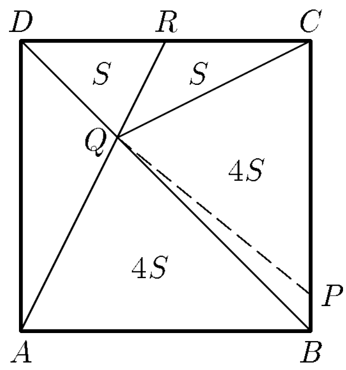
Najprv zostrojíme kružnicu k vpísanú do trojuholníka ABC (obr. 6). Tá bude potom tiež kružnicou vpísanou hľadanému štvoruholníku $AXYC$, takže úsečka XY musí byť dotyčnicou k tejto kružnici. Pretože uhol ACB je pravý, je štvoruholník $AXYC$ tetivový práve vtedy, keď je aj uhol YXA pravý ($|\sphericalangle YXA| + |\sphericalangle YCA| = \pi$). Zostrojíme teda dotyčnicu ku kružnici k, ktorá je kolmá na preponu AB a pretína odvesnu BC. Jej priesečníky s AB a BC sú hľadané body X a Y.

C – II – 3

Janko poznal rozdiel oboch čísel, pričom vieme, že existuje práve 63 dvojíc dvojciferných čísel s týmto rozdielom. Usporiadajme jednotlivé dvojice tak, aby na prvom mieste bolo väčšie z oboch čísel, a dvojice zoraďme tak, aby čísla na prvých, a teda aj na druhých miestach klesali. Prvá dvojica má na prvom mieste číslo 99, posledná dvojica má na druhom mieste číslo 10. Je ich 63, preto prvá dvojica má na druhom mieste číslo 72 $(9+63)$. Janko teda vedel, že mamička zvolila jednu z dvojíc $(99,72)$, $(98,71),\ldots$, $(38,11)$, $(37,10)$, rozdiel v každej dvojici je 27. Ak si mamička myslela čísla $27+m$ a m, potom dvojice s rovnakým súčtom $27+2m$ sú $(14+m, 13+m)$, $(15+m, 12+m)$, $\ldots$, $(27+m, m)$, $(28+m, m-1)$, $(29+m, m-2)$, $\ldots$ Marienka vedela, že ich je práve 40, takže posledná možná dvojica musela byť $(53+m, m-26)$. V ďalšej dvojici už musí byť buď prvé číslo trojciferné, teda $54+m=100$, $m=46$ a mamička si myslela čísla $27+46=73$ a 46, alebo musí byť druhé číslo už jednociferné, teda $m-27=9$ a ide o dvojicu $(63,36)$. Úloha má dve riešenia.

C – II – 4

Označme S obsah trojuholníka RDQ (obr. 7), rovnaký obsah má aj trojuholník RCQ, obsah trojuholníka ABQ je $4S$ (pretože $|AB|=2|DR|$, sú trojuholníky ABQ a RDQ podobné s koeficientom 2) a trojuholník QBC má obsah $4S$ (zo súmernosti podľa osi BD). Obsah štvoruholníka $ABCR$ je $9S$, preto musíme bod P zvoliť tak, aby obsah trojuholníka PQB bol $\frac{1}{2}S$, teda $|BP|=\frac{1}{8}|BC|$.



Obr. 7

Kategória B

B – I – 1

Dokážeme, že hľadanú uzavretú lomenú čiaru možno nájsť vždy v pravidelnom $(2n + 1)$-uholníku $(n \geqq 2)$, a že je nemožno nájsť v pravidelnom $2n$-uholníku $(n \geqq 2)$.

Uvažujme teda na začiatok $(2n + 1)$-uholník a označme jeho vrcholy po rade $A_0, A_1, \dots, A_{2n}$. Ďalej nech pre $k > 2n$ platí $A_k \equiv A_i$, kde $i \in \{0, 1, \dots, 2n\}$ je zvyšok čísla k po delení číslom $2n+1$. Uvažujme uzavretú lomenú čiaru $A_0A_nA_{2n}\dots A_{(2n+1)n}$, spojené sú vždy vrcholy, ktorých indexy sa líšia o n. Zrejme pre $n \geqq 2$ je každá úsečka $A_{kn}A_{(k+1)n}$ uhlopriečka, rovnako je zrejmé, že všetky body tejto lomenej čiary sú navzájom rôzne (až na prvý a posledný). Ak by totiž platilo $kn \equiv ln \pmod{2n+1}$, $0 \leqq k, l \leqq 2n$, tak $k \equiv l \pmod{2n+1}$, pretože čísla n a $2n+1$ sú nesúdeliteľné.

Každá z uvedených uhlopriečok rozdeľuje všetky vrcholy $(2n + 1)$-uholníka s výnimkou svojich koncových bodov do dvoch skupín. Vo vnútri oboch týchto skupín sa indexy bodov líšia najviac o $n-1$, z čoho potom vyplýva, že ľubovoľné dve uhlopriečky uvažovanej lomenej čiary sa pretínajú (vzdialenosť susedných vrcholov v nej je vždy práve n).

Teraz dokážeme, že pre pravidelný $2n$-uholník $(n \geqq 2)$ hľadaná lomená čiara neexistuje. Označme jeho vrcholy $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$. Nech A_1A_k je jedna z uhlopriečok tvoriacich hľadanú lomenú čiaru. Nech druhá uhlopriečka (patriaca lomenej čiare) vychádzajúca z vrcholu A_1 vedie do bodu A_l a druhá vychádzajúca z vrcholu A_k nech vedie do vrcholu A_m. Ak by $l < k < m$, potom by sa tieto dve uhlopriečky nepretínali (rovnako v prípade $l > k > m$), preto zrejme musia ležať „na jednej strane“, čiže buď $m, l \in \mathcal{A} = \{2, 3, \dots, k-1\}$ alebo $m, l \in \mathcal{B} = \{k+1, k+2, \dots, 2n\}$. Bez ujmy na všeobecnosti nech m a l patria do $\mathcal{A}$. Pokračujme v lomenej čiare z bodu A_l, zrejme druhý koniec tejto uhlopriečky musí ležať v $\mathcal{B}$, inak by táto uhlopriečka nepretínala uhlopriečku A_1A_k. Z koncového vrcholu vedieme opäť uhlopriečku do $\mathcal{A}$ atď. Časom musíme skončiť vo vrchole A_m, a to tak, že navštívime postupne všetky vrcholy množín $\mathcal{A}$ aj $\mathcal{B}$. Keďže však sa táto časť lomenej čiary začína aj končí v množine $\mathcal{A}$ a jej vrcholy ležia striedavo v množinách $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ musí $\mathcal{A}$ obsahovať o jeden vrchol viac ako $\mathcal{B}$. Preto je počet vrcholov celého $2n$-uholníka rovný $|A| + |B| + 2$ (vrcholy A_1 a A_k), čo je zrejme nepárne číslo.

B – I – 2

Funkciu budeme hľadať v tvare $f(x) = ax^2 + bx + c$. Keďže jej graf prechádza počiatkom súradníc, $c = 0$. Preto $f(x) = ax^2 + bx$ pre vhodné konštanty a, b.

Preskúmame najprv možnosti, keď je $f(x)$ na intervale $\langle 2, 5\rangle$ monotónna, a teda buď

a) $f(2) = 15$, $\quad f(5) = 27$ ak je tam rastúca, alebo

b) $f(2) = 27$, $\quad f(5) = 15$ ak je tam klesajúca.

Riešme najprv prípad a). Dostaneme dve lineárne rovnice $4a + 2b = 15$ a $25a + 5b = 27$. Riešením tejto sústavy je $a = -\frac{7}{10}$ a $b = \frac{89}{10}$. Ešte musíme overiť, či je skutočne $f(x)$ na intervale $\langle 2, 5\rangle$ monotónna. Stačí zrejme zistiť, či nenadobúda svoj extrém (maximum) na tomto intervale. V našom prípade sa zrejme extrém nachádza v bode $\frac{89}{14}$, ktorý je mimo uvažovaného intervalu.

Prípad b). Obdobne ako v a) dostaneme funkciu $-\frac{7}{2}x^2 + \frac{41}{2}x$, ktorá nadobúda maximum v bode $\frac{41}{14}$, ktorý však tentokrát je v intervale $\langle 2, 5\rangle$, a hodnota funkcie v ňom je väčšia ako 27, teda táto funkcia nevyhovuje zadaným podmienkam.

Nech teraz $f(x)$ nie je na intervale $\langle 2, 5\rangle$ monotónna. Z tvaru kvadratickej funkcie vyplýva, že $f(x)$ mení svoju monotónnosť len v bode extrému, teda v našom prípade bude bod $-\frac{b}{2a}$ ležať intervale $\langle 2, 5\rangle$. Keďže y-ová súradnica vrchola paraboly je $-\frac{b^2}{4a}$, tak buď $-\frac{b^2}{4a} = 27, a < 0$ (1) alebo $-\frac{b^2}{4a} = 15$ pre $a > 0$, čo však zrejme nemôže byť minimum.

Minimum sa nadobúda na kraji intervalu, nastáva teda práve jedna z nasledujúcich možností

$$\text{a) } f(2) = 15;\quad 4a + 2b = 15; \tag{2}$$

$$\text{b) } f(5) = 15;\quad 25a + 5b = 15; \tag{3}$$

V prípade a) vyjadríme z (2) výraz $4a$ a dosadíme do (1). Dostaneme kvadratickú rovnicu $b^2 - 54b + 405 = 0$, ktorá má dva korene $b = 9; b = 45$. V jednotlivých prípadoch dostávame kvadratické funkcie:

$$f(x) = -\frac{75}{4}x^2 + 45x; \qquad f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 9x.$$

Pretože ani jedna z nich nemá extrém v $\langle 2, 5\rangle$, nevhovujú zadaným podmienkam.

V prípade b) obdobne dostávame kvadratickú rovnicu $5b^2 - 108b + 324 = 0$, ktorá má dva korene $b = 18; b = \frac{18}{5}$. V jednotlivých prípadoch tentokrát dostávame kvadratické funkcie:

$$f(x) = -3x^2 + 18x; \qquad f(x) = -\frac{3}{25}x^2 + \frac{18}{5}x.$$

Opäť overíme, či tieto funkcie nadobúdajú svoj extrém v $\langle 2, 5\rangle$. Tentokrát vyhovuje len prvá funkcia.

Takto sme dostali všetky možné riešenia, kvadratické funkcie:

$$f(x) = -\frac{7}{10}x^2 + \frac{89}{10}x; \qquad f(x) = -3x^2 + 18x.$$

B – I – 3

Číslo $\underbrace{111\ldots111}_{24}$ je deliteľné siedmimi, preto 24-miestne číslo, ktoré má na m-tom a n-tom mieste dvojku a inde jednotky dáva po delení siedmimi taký istý zvyšok ako číslo $10^{m-1} + 10^{n-1}$. Utvorme tabuľku zvyškov mocnín čísla 10 po delení siedmimi:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$10^k \pmod 7$	1	3	2	6	4	5	1	3	2	6

Vidíme, že zvyšky sa začínajú opakovať s periódou 6, takže mocniny desiatky, ktorých exponenty sa líšia o násobok 6, majú rovnaké zvyšky. Nasledujúca tabuľka ukazuje, ako voliť $m-1$ resp. $n-1$ modulo 6, keď chceme, aby číslo s dvojkami na m-tom mieste a n-tom mieste bolo deliteľné 7.

$m-1$	0	1	2	3	4	5
$n-1$	3	4	5	0	1	2

Jeden exponent môžno vždy voliť ľubovoľne, druhý má potom určený zvyšok modulo 6. Keďže $1 \leqq m, n \leqq 24$, máme $\dfrac{24 \cdot 4}{2} = 48$ možností.

B – I – 4

Označme rovnice

$$x + y + z = 3, \tag{1}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}. \tag{3}$$

Uvažujme rovnicu (3). Po jej úprave na spoločného menovateľa, vynásobení a prenesení všetkých členov na jednu stranu rovnice dostaneme

$$(x-z)xz + (z-y)zy + (y-x)yx = 0,$$

čo dáva ďalej

$$(y-x)(x-z)(z-y) = 0.$$

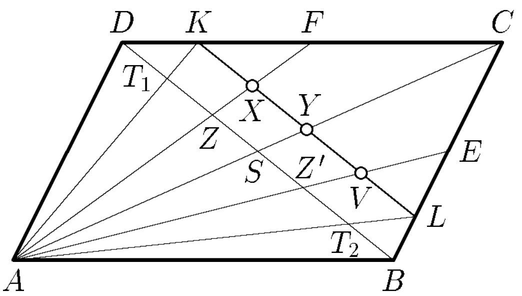
Bez ujmy na všeobecnosti nech $x = y$. Po dosadení do (1) a (2) dostávame sústavu:

$$2x + z = 3 \quad (4) \qquad \frac{2}{x} + \frac{1}{z} = 0 \quad (5)$$

Po vyjadrení z z (5) a dosadení do (4) máme $x = y = 2, z = -1$. Vzhľadom na ekvivalentnosť použitých úprav sú zrejme táto usporiadaná trojica a jej permutácie $[2, -1, 2]$ a $[-1, 2, 2]$ jedinými riešeniami sústavy.

B – I – 5

Označme body X, Y, S, V a Z ako na obr. 8. Ďalej označme x pomer dĺžok úsečiek $\dfrac{|FK|}{|FD|}$. Keďže DS a AF sú ťažnice trojuholníka ADC, platí $|DZ| = \frac{2}{3}|DS|$. Z podobnosti trojuholníkov FXK a FZD máme $|KX| = x \cdot |ZD| = \dfrac{2}{3} \cdot x \cdot |DS|$. Z podobnosti trojuholníkov CSD a CYK máme zase $|KY| = \dfrac{1+x}{2} \cdot |DS|$. Podľa zadania má platiť $|KY| = 2 \cdot |KX|$, teda $\dfrac{4x}{3} = \dfrac{1+x}{2}$, z čoho $x = \dfrac{3}{5}$.

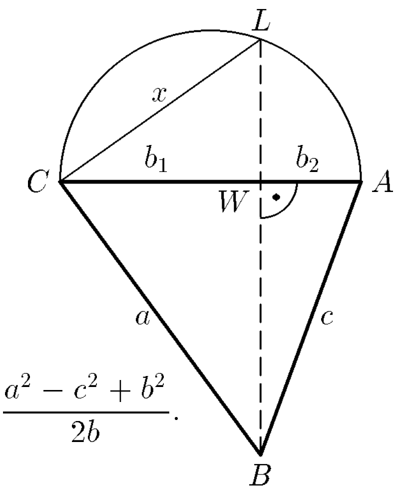


Obr. 8

Zrejme tiež $x = \dfrac{|EL|}{|EB|}$, z čoho okamžite vyplýva, že AE delí úsečku YL v rovnakom pomere ako AF úsečku KY. Na prevedenie konštrukcie si už stačí uvedomiť, že $|KY| = |YL|$. Ďalšie kroky sú zrejmé.

Iné riešenie. Pretože $|KX| = |XY|$, je tiež $|T_1Z| = |ZS|$ (a podobne $|T_2Z'| = |Z'S|$). Bod T_1 je teda stred DZ. Bod K možno dostať ako priesečník priamky AT_1 s CD.

B – I – 6



Obr. 9

Označme W pätu výšky na stranu AC v trojuholníku ABC. Ďalej označme $|BC| = a, |AC| = b, |AB| = c, |CW| = b_1$ a $|WA| = b_2$. Nech $x = |CL|$ (obr. 9). Z *Pytagorovej vety* pre trojuholníky CWB a BWA platí:

$$a^2 - b_1^2 = c^2 - b_2^2$$
$$a^2 - c^2 = b_1^2 - b_2^2$$

Ak teraz použijeme vzťah $b_1 + b_2 = b$, tak dostaneme $b_1 = \dfrac{a^2 - c^2 + b^2}{2b}$.

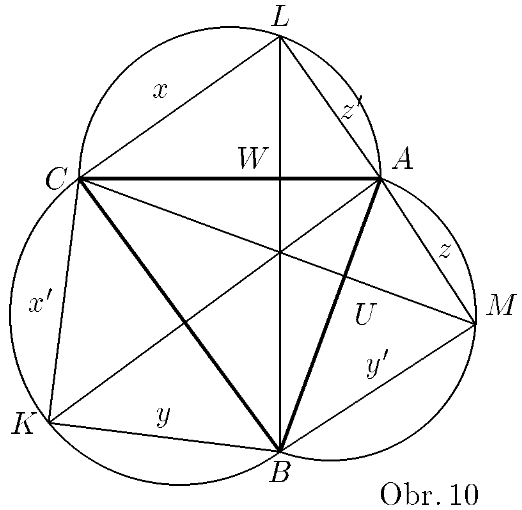
Z *Euklidovej vety* ďalej máme

$$x = \sqrt{b_1 b} = \sqrt{\frac{a^2 - c^2 + b^2}{2}}.$$

Ak ďalej zavedieme označenie podľa obr. 10, zo symetrie potom zrejme

$$x' = \sqrt{\frac{a^2 - c^2 + b^2}{2}}, \qquad \text{takže } x = x'. \tag{1}$$

Cyklickou zámenou tiež $y = y'$ (2) a $z = z'$ (3). Navyše sú uhly pri vrcholoch K, L a M pravé, takže ich súčet je menší ako 360°. Avšak rovnosti (1), (2) a (3) spolu so súčtom uhlov menším ako 360° sú zrejme postačujúcou podmienkou, aby obrazec $AMBKCL$ tvoril plášť štvorstena.



Obr. 10

Iné riešenie. Ak označíme U priesečník CM a AB, potom sú trojuholníky ACU a ABW podobné, lebo majú dva rovnako veľké uhly. Z toho $\dfrac{|CA|}{|AU|} = \dfrac{|BA|}{|AW|}$. Odtiaľ ďalej $|AC| \cdot |AW| = |BA| \cdot |AU|$. Z *Euklidových viet* v trojuholníkoch ACL a ABM potom okamžite $|AL|^2 = |AM|^2$, čiže $z = z'$. Obdobne ostatné rovnosti. Ďalší postup je rovnaký ako v prvom riešení.

B – S – 1

Najprv nájdeme všetky čísla tvaru $6A\,B73$, ktoré sú deliteľné 99-timi. Potom ukážeme, že všetky tieto čísla sú deliteľné 19-timi (ukáže sa, že takéto číslo je len jedno).

Číslo $6A\,B73$ môžeme zapísať ako

$$6A\,B73 = 60\,073 + 1\,000 \cdot A + 100 \cdot B = 60\,073 + 100 \cdot (10 \cdot A + B).$$

Toto číslo je deliteľné 99-mi práve vtedy, keď je deliteľné 99-mi číslo $10 \cdot A + B + 79$, pretože

$$60\,073 + 100 \cdot (10 \cdot A + B) = 99 \cdot (606 + (10 \cdot A + B)) + 10 \cdot A + B + 79.$$

Číslo $10 \cdot A + B + 79$ je prirodzené číslo z intervalu $\langle 79,\ 178\rangle$. Ak má byť deliteľné 99-timi, musí zrejme byť rovné 99, čo nastáva len v prípade $A = 2$ a $B = 0$. Vtedy však $6A\,B73 = 62\,073 = 19 \cdot 3\,267$, a tým je tvrdenie v zadaní dokázané.

B – S – 2

Po dosadení čísla $x = 1 - \sqrt{2}$ do danej rovnice a jednoduchej úprave dostávame

$$(5 + 2a + b) \cdot \sqrt{2} = 7 + 3a + b + c.$$

Potom musí platiť:

$$(5 + 2a + b) = 0; \qquad 7 + 3a + b + c = 0.$$

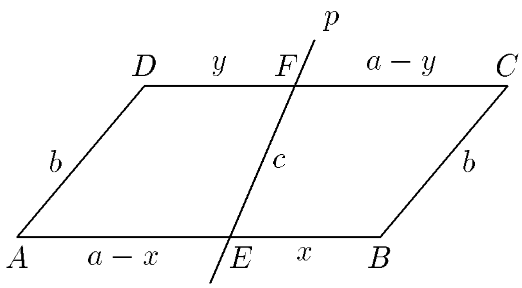
(Ak by $5+2a+b \neq 0$, tak číslo $\sqrt{2}$ je rovné podielu dvoch celých čísel, čiže je racionálne, to však nie je pravda.) Z týchto dvoch rovníc vyjadríme b a c pomocou a: $b = -5 - 2a$ a $c = -2 - a$. Potom

$$a - 2b + 5c = a - 2 \cdot (-5 - 2a) + 5 \cdot (-2 - a) = 0.$$

Tým je tvrdenie dokázané.

B – S – 3

Najprv predpokladajme, že hľadaná priamka p pretne protiľahlé strany AB a CD, a to po rade v bodoch E a F. Ďalej označme $|AB| = |CD| = a$, $|BC| = |DA| = b$, $|EF| = c$, $|DF| = y$ a $|EB| = x$ (obr. 11).



Obr. 11

Štvoruholník je dotyčnicový (vpísaný do kružnice) práve vtedy, keď má rovnaké obidva súčty dĺžok protiľahlých strán. Preto $b + c = a - x + y$ (štvoruholník $AEFD$) a $b + c = x + a - y$ (štvoruholník $EBCF$). Odtiaľ $x = y$ a $c = a - b$. Keďže je každý rovnobežník stredovo súmerný, tak bod S – stred EF – je priesečník uhlopriečok BD a AC. Odtiaľ vyplýva konštrukcia:

1. kružnica k; $k\left(S; \dfrac{a-b}{2}\right)$; S je stred AC;
2. body E, F; $E \in k \cap AB$, $F \in k \cap CD$;
3. priamka p; $p = \overleftrightarrow{EF}$.

Počet riešení závisí od počtu priesečníkov kružnice k so stranou AB (bez bodov A a B). Určme ich počet v závislosti na parametroch $ABCD$. Označme preto vzdialenosť priamok AB a CD ako v, $v = b\sin\alpha$. Z trojuholníkových nerovností pre trojuholníky ABC a ABD máme $a - b < |BD|$, $a - b < |AC|$. Preto môžu nastať len tri prípady:

• Kružnica k má so stranou AB jediný priesečník. To nastáva práve vtedy, keď $v = |EF| = a - b$, teda $a = b + b\sin\alpha$. Vtedy má úloha práve jedno riešenie.

• Kružnica k má so stranou AB dva priesečníky. To nastáva práve vtedy, keď $v < |EF| = a - b$, čiže $a > b + b\sin\alpha$. Vtedy má úloha práve dve riešenia (nie štyri, lebo priamka p musí prechádzať bodom S).

• Kružnica k nemá so stranou AB žiaden priesečník. To nastáva práve vtedy, keď $v > |EF| = a - b$, teda $a < b + b\sin\alpha$. Vtedy nemá úloha žiadne riešenie.

Ak priamka p pretína strany AD a BD, všetky úvahy možno previesť analogicky. Zrejme oba prípady nemôžu nastať súčasne.

Diskusia.

Úloha má práve jedno riešenie, ak $a = b \cdot (1 + \sin\alpha)$ alebo $b = a \cdot (1 + \sin\alpha)$.

Úloha má práve dve riešenia, ak $a > b \cdot (1 + \sin\alpha)$ alebo $b > a \cdot (1 + \sin\alpha)$.

V ostatných prípadoch úloha nemá riešenie.

Iné riešenie. Nech k_1 je kružnica, ktorá sa dotýka strán AB, AD a BC, k_2 kružnica dotýkajúca sa strán AB,BC a CD. Hľadaná priamka p je spoločná dotyčnica kružníc $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ (rôzna od AB a CD). Jej konštrukcia môže byť nasledujúca: bodom S_1 vediem dotyčnicu ku kružnici $k_3(S_2, r_1 + r_2)$ a potom túto dotyčnicu posunieme v smere na ňu kolmom o vzdialenosť r_1 (smerom k bodu S_2). Táto priamka sa zrejme bude dotýkať oboch kružníc k_1 a k_2.

B – II – 1

Odčítaním prvej rovnice od druhej a druhej rovnice od tretej dostaneme po úprave

$$(x - y)(3 + x + y) = 0, \qquad (y - z)(3 + y + z) = 0.$$

Z týchto dvoch rovníc vyplýva, že musí platiť $x = y$ alebo $3 + x + y = 0$, a zároveň $y = z$ alebo $3 + y + z = 0$. Prebratím jednotlivých možností zistíme, že môžu nastať len nasledujúce dva prípady: buď sa všetky tri čísla x, y a z navzájom rovnajú, alebo sú dve z nich rovnaké (bez ujmy na všeobecnosti napr. $x = y$); tretie číslo potom vypočítame zo vzťahu $z = -y - 3$. Ostatné riešenia dostaneme permutáciou takto nájdenej trojice (x, y, z).

• Ak $x = y = z$, tak je daná sústava ekvivalentná s (jedinou) kvadratickou rovnicou $2x^2 - 3x - 14 = 0$ s koreňmi $x_1 = \frac{7}{2}$ a $x_2 = -2$. Odtiaľ vychádzajú dve riešenia: $x = y = z = \frac{7}{2}$ a $x = y = z = -2$.

• Ak $x = y$ a $z = -y - 3$, tak je daná sústava ekvivalentná s (jedinou) kvadratickou rovnicou $2y^2 + 3y - 5 = 0$ s koreňmi $y_1 = -\frac{5}{2}$ a $y_2 = 1$. Odtiaľ vychádzajú dve riešenia $x = y = -\frac{5}{2}$, $z = -\frac{1}{2}$ a $x = y = 1$, $z = -4$ a permutáciou trojice (x, y, z) dostaneme ďalšie štyri riešenia $x = z = -\frac{5}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$; $x = z = 1$, $y = -4$; $y = z = -\frac{5}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$; $y = z = 1$, $x = -4$.

Všetkých osem nájdených riešení splĺňa dané rovnice (skúška nie je potrebná, pretože z uvedeného postupu vidno, že nájdené trojice x, y a z danej sústave skutočne vyhovujú).

B – II – 2

Zrejme stačí skúmať funkciu $g(x) = x^3 - px^2$, pretože nadobúda svoje minimá na každom intervale v rovnakých bodoch ako daná funkcia $f(x)$. Funkcia $g(x)$ má na intervale $\langle 0, 1\rangle$ minimum v bode 1, práve vtedy keď pre všetky x z tohoto intervalu platí $g(x) \geqq g(1)$, čiže $x^3 - px^2 \geqq 1 - p$. Po úprave dostávame ekvivalentnú nerovnosť

$$x^3 - 1 \geqq p(x^2 - 1), \tag{1}$$

ktorú môžeme upraviť na tvar

$$(1 - x)\bigl(x^2 + x + 1 - p(x + 1)\bigr) \leqq 0.$$

Vzhľadom na to, že pre číslo $x = 1$ je nerovnosť (1) splnená triviálne, môžeme pre $x \in \langle 0, 1)$ vydeliť poslednú nerovnosť dvojčlenom $1 - x$ a dostaneme ekvivalentnú podmienku

$$q(x) = x^2 + (1 - p)x + 1 - p \leqq 0.$$

Pretože $q(x)$ je kvadratická funkcia s kladným koeficientom pri x^2 (jej grafom je parabola „obrátená nahor"), platí nerovnosť $q(x) \leqq 0$ pre všetky $x \in \langle 0, 1)$, práve keď súčasne platí $q(0) \leqq 0$ a $q(1) \leqq 0$, t.j. práve keď $1 - p \leqq 0$ a $3 - 2p \leqq 0$. Spolu tak vychádza jediná (nutná aj postačujúca) podmienka $p \geqq \frac{3}{2}$.

Iné riešenie. Po odvodení nerovnosti (1) môžeme postupovať aj nasledujúco. Pre číslo $x = 1$ je nerovnosť triviálne splnená, pre $x \in \langle 0, 1)$ môžeme nerovnosť vydeliť záporným dvojčlenom $x^2 - 1$, takže vyjde

$$p \geqq \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = x + \frac{1}{x + 1} \tag{2}$$

pre všetky $x \in \langle 0, 1\rangle$. Ukážeme, že funkcia $h(x) = x + \dfrac{1}{x + 1}$ je na tomto intervale rastúca.

Pokiaľ totiž $x \geqq 0$ a $\varepsilon > 0$, platí $h(x + \varepsilon) > h(x)$, pretože

$$x + \varepsilon + \frac{1}{x + \varepsilon + 1} > x + \frac{1}{x + 1}, \qquad \text{čo po úprave dáva} \qquad 1 < (x + \varepsilon + 1)(x + 1).$$

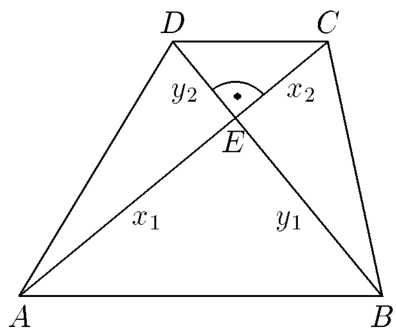
Táto nerovnosť však vzhľadom na voľbu x a ε platí, a pretože všetky úpravy boli ekvivalentné, dokázali sme, že funkcia $h(x)$ je rastúca dokonca na intervale $\langle 0, \infty)$. Nerovnosť (2) je splnená pre všetky $x \in \langle 0, 1)$, práve keď platí pre $x = 1$, t.j. práve keď $p \geqq \frac{3}{2}$. Riešením sú všetky reálne čísla p z intervalu $\bigl\langle \frac{3}{2}, \infty\bigr)$.

Iné riešenie. Po uhádnutí výsledku $p \geqq \dfrac{3}{2}$ stačí ukázať, že pre takéto p nerovnosť (1) platí (pre $x \in \langle 0, 1 \rangle$). Na to však stačí overiť nerovnosť $\dfrac{x^2+x+1}{x+1} \leqq \dfrac{3}{2}$, čo je vzhľadom na prípustné hodnoty x ekvivalentné s nerovnosťou $2x^2 - x - 1 \leqq 0$, čiže $(x-1)(2x+1) \leqq 0$, čo zjavne platí.

Poznámka. Možno postupovať aj pomocou dif. počtu. Z prvej a druhej derivácie možno nahliadnuť, že na intervale $\langle 0, 1 \rangle$ nadobúda funkcia $f(x)$ len dva extrémy: v bode $x = 0$ a v bode $x = \dfrac{2p}{3}$. Z toho potom možno usúdiť, že vyhovujú práve čísla $p \geqq \dfrac{3}{2}$.

B – II – 3

Zaveďme označenie podľa obr. 12. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $|AB| > |CD|$. Potom z podobnosti trojuholníkov ABE a CDE vyplýva, že $x_1 > x_2$ a $y_1 > y_2$.



Obr. 12

Zrejme $|AB| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, $|BC| = \sqrt{x_2^2 + y_1^2}$, $|CD| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ a $|DA| = \sqrt{x_1^2 + y_2^2}$, takže dokazovaná nerovnosť prejde do tvaru

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} < \sqrt{x_2^2 + y_1^2} + \sqrt{x_1^2 + y_2^2}.$$

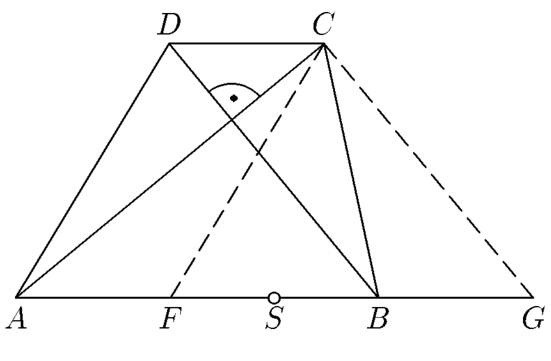
Po umocnení a ľahkej úprave dostaneme nerovnosť

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2} < \sqrt{x_1^2 + y_2^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_1^2},$$

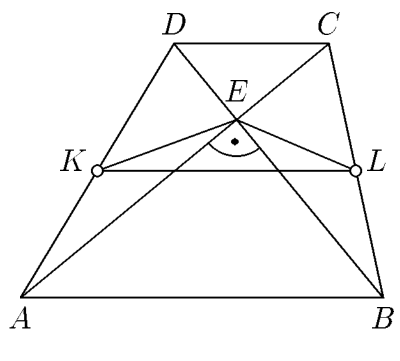
čo možno upraviť na

$$0 < (x_1^2 - x_2^2)(y_1^2 - y_2^2).$$

Posledná rovnosť ale vzhľadom na predpoklady na začiatku riešenia platí. Keďže všetky vykonané úpravy boli ekvivalentné, tvrdenie je dokázané.



Obr. 13



Obr. 14

Iné riešenie. Veďme bodom C rovnobežky $CF \parallel DA$ a $CG \parallel DB$ (obr. 13). Ďalej označme S stred AG. Pretože $|\sphericalangle ACG| = 90°$, $|BG| = |CD|$ a $|FC| = |AD|$, tak $|AB| + |CD| = |AG| = 2|CS|$, $|AD| + |BC| = |CF| + |CB|$. Stačí teda dokázať, že $2|CS| < |CF| + |CB|$. Keďže $|AF| = |CD| = |BG|$, tak S je aj stred úsečky FB, a tak CS

je ťažnica v trojuholníku FBC. Preto ak trojuholník FBC doplníme na rovnobežník $FHBC$, tak z trojuholníkovej nerovnosti dostaneme

$$|CF| + |CB| = |HB| + |CB| > 2|CS|.$$

Tým je tvrdenie dokázané.

Iné riešenie. Pre dĺžku úsečky KL spájajúcu stredy ramien AD a BC ľubovoľného lichobežníka (obr. 14) platí známy vzorec

$$|KL| = \tfrac{1}{2}(|AB| + |CD|).$$

Bod E nemôže ležať na úsečke KL, pretože inak by bolo $|AE| = |EC|$ a $|BE| = |ED|$, čo by znamenalo, že $ABCD$ je rovnobežník, a preto z predchádzajúcej rovnosti vyplýva

$$\begin{aligned}|AB| + |CD| = 2|KL| < 2\,(|KE| + |LE|) &= \\ = 2|KE| + 2|LE| &= |AD| + |BC|\end{aligned}$$

(posledná rovnosť vyplýva z toho, že KE, resp. LE sú polomery Tálesových kružníc nad priemermi AD, resp. BC, na ktorých bod E v prípade kolmých uhlopriečok leží). Tým je dôkaz ukončený.

B – II – 4

Označme si číslice A, B, C a D. Žiaci mali sčítať 24 čísel. Každá číslica sa v týchto číslach nachádza šesťkrát na prvom, šesťkrát na druhom a šesťkrát na treťom mieste. Preto je súčet S všetkých týchto čísel rovný $S = 6 \cdot 111 \cdot (A+B+C+D)$. Janko zabudol na jedno trojciferné číslo, ktoré určite neprevyšuje 987. Preto platia nerovnosti

$$12\,497 < S \leqq 12\,497 + 987,$$

čiže

$$12\,497 < 666 \cdot (A + B + C + D) \leqq 13\,484.$$

Odtiaľ $19 \leqq A + B + C + D \leqq 20$. Môžu nastať dva prípady:

- $A + B + C + D = 19$, potom $S = 12\,654$ a chýbajúce číslo je 157. Štvrtá číslica je teda 6.
- $A + B + C + D = 20$, potom $S = 13\,320$ a chýbajúce číslo je 823. Štvrtá číslica je teda 7.

Úloha má preto dve riešenia. Buď boli na tabuli napísané číslice 1, 5, 6 a 7 a Janko zabudol na číslo 157, alebo to boli číslice 2, 3, 7 a 8 a Janko zabudol na číslo 823.

Kategória A

A – I – 1

Pretože 3^6 dáva po delení 7 zvyšok 1 a $6 \mid n_k$ pre $k \geqq 2$, platí $7 \mid 3^{n_k} - 1$ pre $k \geqq 2$. Na druhej strane, $7 \mid n_k$ pre $k \geqq 4$, takže pre všetky $k \geqq 4$ možno daný zlomok krátiť číslom 7. Samostatne sa presvedčíme, že pre $k = 2, 3$ možno zlomok krátiť len číslom 2.

A – I – 2

Označme x_1, x_2 korene polynómu f a y_1, y_2 korene polynómu g. Podľa zadania má platiť

$$g(x_1), g(x_2) \in \{x_1, x_2\} \quad \text{a} \quad f(y_1), f(y_2) \in \{y_1, y_2\}.$$

V ďalšom rozlíšime 3 možnosti pre hodnoty $g(x_i)$:

- G1: $g(x_1) = g(x_2)$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať $g(x_1) = g(x_2) = x_1$. Potom ale kvadratický polynóm $g(x) - x_1$ má korene x_1, x_2, a je teda $g(x) - x_1 = f(x)$ (pokiaľ majú normované kvadratické trojčleny spoločné dva rôzne korene, zhodujú sa ich koeficienty).
- G2: $g(x_1) = x_1$, $g(x_2) = x_2$. V tomto prípade má kvadratický polynóm $g(x) - x$ korene x_1, x_2, a je teda $g(x) - x = f(x)$.
- G3: $g(x_1) = x_2$, $g(x_2) = x_1$. V tomto prípade má kvadratický polynóm $g(x) + x - x_1 - x_2$ korene x_1, x_2, a je teda $g(x) + x - x_1 - x_2 = f(x)$.

Podobne pre hodnoty $f(y_i)$ rozlíšime 3 možnosti:

- F1: $f(y_1) = f(y_2)$, a teda $f(x) - y_1 = g(x)$ (opäť bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať $f(y_1) = f(y_2) = y_1$).
- F2: $f(y_1) = y_1, f(y_2) = y_2$, a teda $f(x) - x = g(x)$.
- F3: $f(y_1) = y_2, f(y_2) = y_1$, a teda $f(x) + x - y_1 - y_2 = g(x)$.

V prípadoch G1, F1 sa polynómy f a g líšia o konštantu (pre koeficienty teda platí $a = c$), v ostatných prípadoch sa lineárne členy f a g líšia, pričom $a = c + 1$ v prípadoch G3 a F2, a $a = c - 1$ v prípadoch G2 a F3. Tieto tri možnosti teraz prešetríme.

G1–F1: Podľa G1 je $g(x) - f(x) = x_1$, podľa F1 je $g(x) - f(x) = -y_1$. Máme teda

$$x_1 = -y_1.$$

Ďalej pre korene kvadratických trojčlenov platí

$$x_1 + x_2 = -a = -c = y_1 + y_2,$$

a teda

$$y_2 = x_1 + x_2 - y_1 = 2x_1 + x_2.$$

Z Viètových vzťahov pre koeficienty kvadratického trojčlena dostávame

$$x_1x_2 = b = d + y_1 = y_1y_2 + y_1 = y_1(y_1 + 1) = -x_1(2x_1 + x_2 + 1),$$

alebo

$$x_1(2x_1 + 2x_2 + 1) = 0.$$

Je teda buď $x_1 = 0$, alebo $x_2 = -x_1 - \frac{1}{2}$.

V prvom prípade potom je $y_1 = 0$, $x_2 = \beta$ ľubovoľné a $y_2 = x_2$, čo vedie k riešeniu

$$f(x) = g(x) = x^2 - \beta x, \quad \beta \neq 0.$$

(Podmienka $\beta \neq 0$ zaručuje rôznosť koreňov trojčlenov. Ako f, tak g majú korene 0 a β, pričom $f(0) = f(\beta) = g(0) = g(\beta) = 0$ je opäť koreň f aj g.)

V druhom prípade je $x_1 = \alpha$ ľubovoľné, $x_2 = -\alpha - \frac{1}{2}$, $y_1 = -\alpha$, $y_2 = \alpha - \frac{1}{2}$, odkiaľ máme druhé riešenie

$$f(x) = x^2 + \frac{x}{2} - \alpha^2 - \frac{\alpha}{2}, \quad g(x) = x^2 + \frac{x}{2} - \alpha^2 + \frac{\alpha}{2}, \quad \alpha \neq \pm\frac{1}{4}.$$

(Podmienka $\alpha \neq \pm\frac{1}{4}$ je opäť kvôli rôznosti koreňov trojčlenov. Dosadením sa ľahko presvedčíme, že $g(\alpha) = g(-\alpha - \frac{1}{2}) = \alpha$ a $f(-\alpha) = f(\alpha - \frac{1}{2}) = -\alpha$, a teda f a g vyhovujú požiadavkám úlohy.)

G2–F3: Z G2 vyplýva $g(x) = f(x) + x$, z F3 vyplýva $g(x) = f(x) + x - y_1 - y_2$, a teda $c = -y_1 - y_2 = 0$. Ďalšie riešenie je teda

$$f(x) = x^2 - x + d, \quad g(x) = x^2 + d, \quad d < 0.$$

(Podmienka $d < 0$ zaručuje, že ako f, tak g majú dva rôzne reálne korene. Korene g sú $y_{1,2} = \pm\sqrt{-d}$, korene f sú $x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-4d}\right)$ a dosadením sa možno ľahko presvedčiť, že $g(x_i) = x_i$, $f(y_i) = y_{3-i}$ pre $i = 1, 2$.)

G3–F2: Tento prípad je symetrický s predchádzajúcim a dáva štvrté riešenie

$$f(x) = x^2 + b, \quad g(x) = x^2 - x + b, \quad b < 0.$$

A – I – 3

Ukážeme, že všeobecne platí implikácia

$$a < \frac{b+c}{2} \quad \Longrightarrow \quad t_a > \frac{t_b + t_c}{2},$$

zatiaľ čo obrátená implikácia platiť nemusí.

Druhé tvrdenie potvrdzuje príklad známeho pravouhlého trojuholníka so stranami $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$ a $t_a = \sqrt{13} \doteq 3{,}606$, $t_b = \frac{1}{2}\sqrt{73} \doteq 4{,}272$, $t_c = 2{,}5$.

Aby sme dokázali uvedenú implikáciu, predpokladajme, že $2a < b + c$, a vysvetlíme, prečo platí nerovnosť

$$\frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} > \frac{1}{4}\left(\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} + \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}\right) \tag{1}$$

(využili sme známe vzorce pre dĺžky ťažníc). Po násobení štyrmi, umocnení na druhú a algebraickej úprave dostaneme ekvivalentnú nerovnosť

$$\sqrt{(4a^2 + 4c^2 - 2b^2)(4a^2 + 4b^2 - 2c^2)} < 7(b^2 + c^2) - 8a^2. \tag{2}$$

Podľa nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom platí

$$\begin{aligned}&\sqrt{(4a^2 + 4c^2 - 2b^2)(4a^2 + 4b^2 - 2c^2)} \leqq\\ &\leqq \frac{(4a^2 + 4c^2 - 2b^2) + (4a^2 + 4b^2 - 2c^2)}{2} = 4a^2 + b^2 + c^2.\end{aligned}$$

Preto miesto (2) stačí overiť silnejšiu nerovnosť

$$4a^2 + b^2 + c^2 < 7(b^2 + c^2) - 8a^2, \quad \text{alebo} \quad 4a^2 < 2(b^2 + c^2).$$

To je ale ľahké: z predpokladu $2a < b + c$ totiž vyplýva

$$4a^2 < (b + c)^2 = 2(b^2 + c^2) - (b - c)^2 \leqq 2(b^2 + c^2).$$

Tým je dôkaz hotový a celá úloha vyriešená.

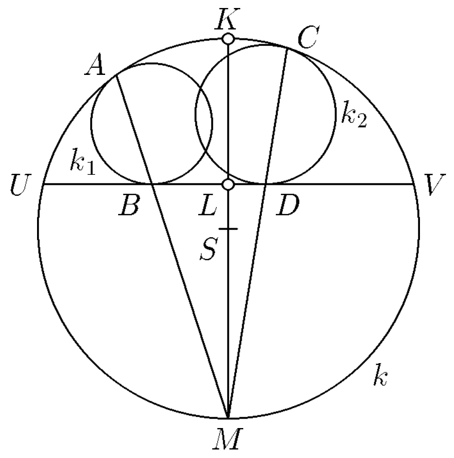
Poznámka. Inou možnosťou riešenia je využiť známu nerovnosť $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2} \leqq \sqrt{\frac{x+y}{2}}$ na dôkaz požadovanej nerovnosti (1), čím sa vyhneme pracnejšiemu umocňovaniu odmocnín.

A – I – 4

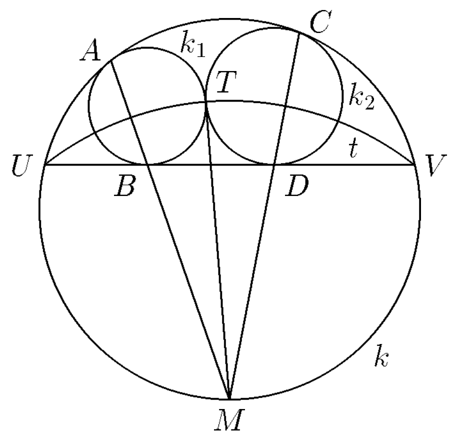
a) Nech k je celá kružnica nášho odseku, S jej stred, M stred jej oblúka „dopĺňajúceho“ oblúk uvažovaného odseku (obr. 15). Kružnice k_1 a k sú rovnoľahlé so stredom A, pritom v tejto rovnoľahlosti bodu B odpovedá bod M (presnejšie — dotyčnici UV kružnice k_1 v bode B zodpovedá dotyčnica kružnice k v bode M), takže body A, B, M ležia na priamke. Podobne odvodíme, že body C, D, M ležia na priamke.

Označme K (L) priesečník priamky MS s oblúkom (základňou) odseku (obr. 16). Z podobnosti pravouhlých trojuholníkov BLM a KAM vyplýva $|BM| \cdot |AM| = |LM| \cdot |KM|$. Obdobne platí $|CM| \cdot |DM| = |LM| \cdot |KM|$. Preto $|BM| \cdot |AM| = |CM| \cdot |DM|$ a podľa vety o mocnosti bodu ku kružnici ležia body A, B, C, D na jednej kružnici.

b) Označme T spoločný bod dotyku kružníc k_1 a k_2 (nutne ide o vonkajší dotyk). Ukážeme, že priamka MT je spoločnou dotyčnicou kružníc k_1 a k_2. Ak by to tak nebolo, nech T_1 (T_2) je druhý priesečník priamky MT s kružnicou k_1 (k_2). Mocnosť bodu M



Obr. 15



Obr. 16

ku kružnici k_1 je $|MA|\cdot|MB| = |MT|\cdot|MT_1|$, podobne ku k_2 je $|MC|\cdot|MD| = |MT|\cdot$ $\cdot\,|MT_2|$ a podľa rovnosti $|MA|\cdot|MB| = |MC|\cdot|MD|$ z časti a) je $|MT_1| = |MT_2|$, teda $T_1 = T_2 = T$ a MT je spoločnou dotyčnicou oboch kružníc k_1, k_2.

Preto $|MT|^2 = |MC|\cdot|MD| = |LM|\cdot|KM|$, čo znamená, že bod T leží na oblúku kružnice t so stredom M a polomerom $\sqrt{|LM|\cdot|KM|}$ vnútri odseku.

Pre úplnosť je treba dodať, že kružnica t prechádza krajnými bodmi U, V základne odseku (vyplýva to napríklad z Euklidovej vety o odvesne pre trojuholníky MKU a MKV), a že možné polohy bodu T vyplnia celé vnútro oblúka t medzi U a V, čo je vidieť zo spojitosti, ale je potrebné uviesť konštrukciu:

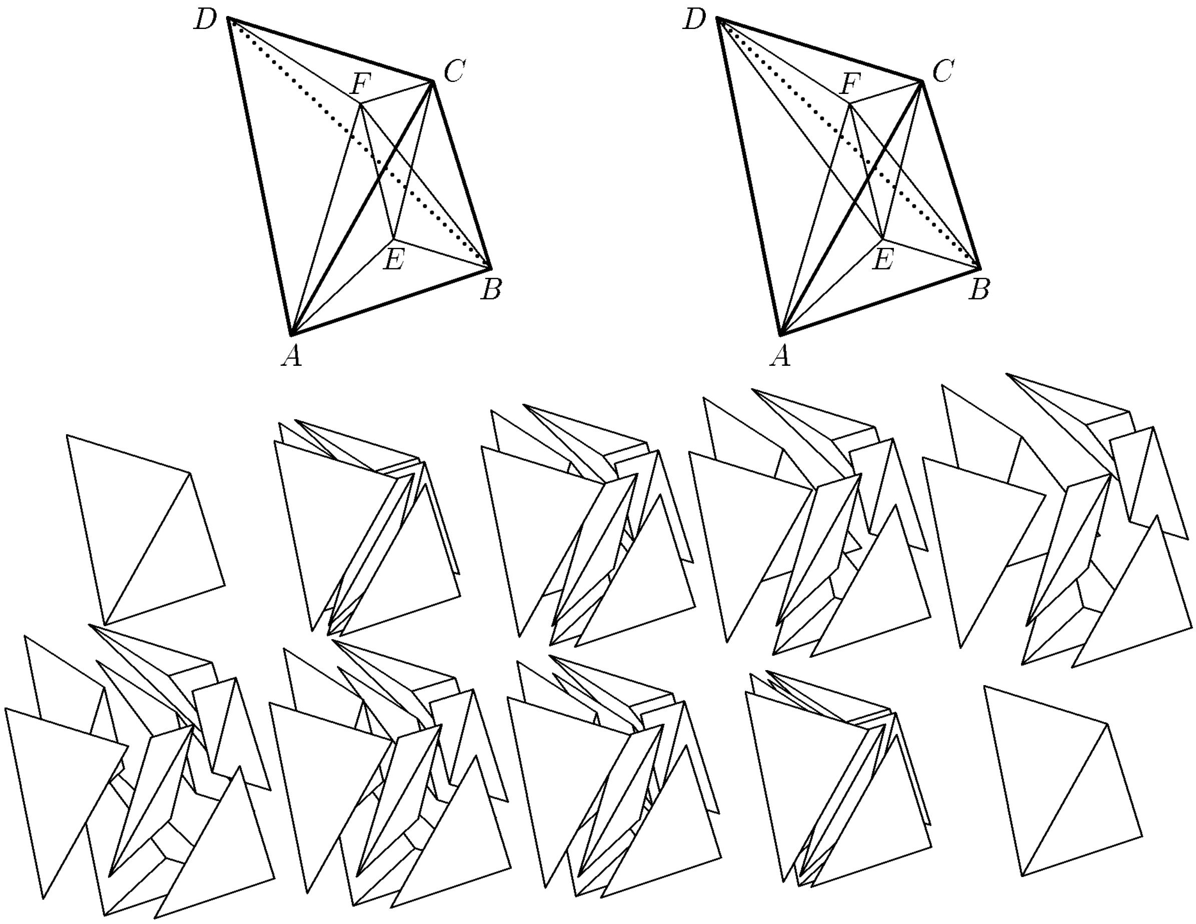
Pre daný bod T ležiaci na oblúku kružnice t vnútri odseku využijeme pri konštrukcii kružnice k_1 rovnoľahlosť so stredom A (uvažovanú v časti a) riešenia), ktorá priamku MT zobrazuje na dotyčnicu kružnice k rovnobežnú s MT. Takéto dotyčnice existujú práve dve s bodmi dotyku T_1, T_2 a podľa uvažovanej rovnoľahlosti body A a C získame ako druhé priesečníky TT_1 a TT_2 s kružnicou k. Potom je už ľahké obe kružnice k_1, k_2 zostrojiť.

A – I – 5

Všimnime si najprv stenu ABC, tá nemôže byť rozrezaná (lebo vnútri nej nemôže byť vrchol), preto musí byť medzi menšími štvorstenmi štvorsten typu $ABCX$, kde X je E alebo F. To isté platí aj pre ostatné steny, teda pri rozrezávaní daného štvorstena musia vzniknúť (okrem iných) štyri štvorsteny $ABCX_1$, $ABDX_2$, $ACDX_3$, $BCDX_4$, kde $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \{E, F\}$.

Ďalej ukážeme, že úsečka EF nemôže celá ležať v niektorom z vyššie spomínaných štvorstenov. Obidva vrcholy E aj F totiž musia byť vrcholmi aspoň jedného z týchto štvorstenov. Preto pokiaľ by napríklad EF bola obsiahnutá vo štvorstene $ABCE$, musel by bod F ležať v niektorej stene, napr. ABE, a body A, B, E, F by ležali v rovine. To však podľa zadania nie je možné.

Úsečka EF preto musí byť hranou ďalších štvorstenov typu $EFYZ$, kde $Y, Z \in \{A, B, C, D\}$, a toto sú jediné štvorsteny, ktoré ju obsahujú. Také štvorsteny musia byť aspoň tri, aby vyplnili celý priestor „okolo" úsečky EF. Na druhej strane môžu byť najviac 4 také štvorsteny, pretože každé dva susedné z nich sú od seba „odrezané" jedným zo štyroch trojuholníkov EFA, EFB, EFC alebo EFD.



Obr. 17

Iné typy štvorstenov ako vyššie diskutované zrejme vzniknúť nemôžu, preto sú dve možnosti, ako daný štvorsten požadovaným spôsobom rozrezať — na 7 či na 8 menších štvorstenov. Obe možnosti možno vždy realizovať, ako je vidieť z obr. 17 — vľavo je rozrezanie na 7 štvorstenov $ABCE$, $ABEF$, $ACEF$, $BCEF$, $ACFD$, $ABFD$, $BCFD$, vpravo na 8 štvorstenov $ABCE$, $ABDE$, $ACDF$, $BCDF$, $ACEF$, $BCEF$, $ADEF$, $BDEF$. Pre lepšiu predstavu sú na obr. 17 náčrtky „skladačiek" týchto rozrezaní.

A – I – 6

a) Odpoveď je ÁNO. Nech $X_1X_2 \dots X_n$ je lomená čiara zložená z uhlopriečok n-uholníka (teda $X_1, X_2, \dots, X_n$ sú vrcholy n-uholníka, avšak nie nutne v tomto poradí). Takúto čiaru možno ľahko zostaviť, napríklad takto: Nech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sú (v tomto poradí) vrcholy n-uholníka. Položme

$$X_1X_2\ldots X_n = A_1A_3A_5\ldots A_{n-1}A_2A_4\ldots A_n \text{ pre } n \text{ párne;}$$
$$X_1X_2\ldots X_n = A_1A_3A_5\ldots A_nA_2A_4\ldots A_{n-1} \text{ pre } n \text{ nepárne.}$$

Ukážeme, že uhlopriečky možno prefarbiť tak, že všetky uhlopriečky X_iX_{i+1}, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, sú modré:

Prvý dôkaz — existenčný. Uvážme prefarbenie, ktoré obsahuje najdlhšiu možnú súvislú čiaru $X_1X_2\ldots X_k$ zloženú iba z modrých uhlopriečok. Tvrdíme, že nutne $k = n$. Keby totiž bolo $k < n$, bola by uhlopriečka X_kX_{k+1} červená a po následnom prefarbení uhlopriečok vychádzajúcich z bodu X_{k+1} by sme dostali ofarbenie, v ktorom by všetky uhlopriečky tvoriace lomenú čiaru $X_1X_2\ldots X_{k+1}$ boli modré. To by bol spor s maximálnosťou k.

Druhý dôkaz — algoritmický. Priamo popíšeme spôsob, ako požadované prefarbenie nájsť.

1. $i := 1$.
2. Pokiaľ je uhlopriečka X_iX_{i+1} červená, prefarbi všetky uhlopriečky vychádzajúce z bodu X_{i+1}.
3. $i := i + 1$.
4. Pokiaľ $i < n$ choď na 2., inak KONIEC.

Indukciou podľa i sa ľahko overí, že po prevedení 2. kroku sú vždy všetky uhlopriečky X_jX_{j+1}, $1 \leqq j \leqq i$, modré. Teda po skončení algoritmu je celá lomená čiara $X_1X_2\ldots X_n$ zložená iba z modrých úsečiek.

b) Odpoveď je NIE. Jednoduchý protipríklad tvorí $n = 5$ so všetkými uhlopriečkami ofarbenými na červeno. Ľahko sa presvedčíme, že po každom prefarbení ostane nepárny počet červených úsečiek (1, 3 alebo 5). Pretože však každá uzavretá lomená čiara musí obsahovať všetkých päť uhlopriečok, požadované prefarbenie neexistuje.

A – S – 1

Z rovnice je vidieť, že $5^p - 6$ musí byť deliteľné číslom 7. Všimnime si zvyšky čísel 5^k po delení číslom 7:

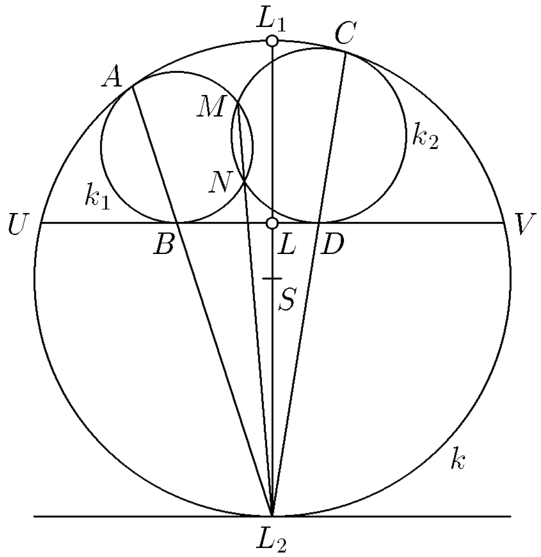
k	1	2	3	4	5	6	7	…
5^k	5	4	6	2	3	1	5	…
$5^k - 6$	6	5	0	3	4	2	6	…

Vidíme, že sa zvyšky opakujú s periódou 6 a jediný prípad, keď $7 \mid 5^k - 6$, je pre $k = 6n+3$. Preto aj p musí byť tvaru $6n + 3$ pre vhodné n. To ale znamená, že p je deliteľné tromi. A pretože p je zároveň prvočíslo, jediná možnosť je $p = 3$. Potom vychádza $q = 17$, čo je prvočíslo.

Riešením úlohy je jediná dvojica prvočísel $p = 3$ a $q = 17$.

A – S – 2

Riešenie priamo vychádza z riešenia podobnej úlohy domáceho kola: Označme S stred kružnice k; A a C po rade body dotyku kružníc k_1 a k_2 s k, a B, D po rade body dotyku kružníc k_1 a k_2 s UV (obr. 18). Kružnice k_1, k sú rovnoľahlé so stredom A, pritom v tejto rovnoľahlosti bodu B zodpovedá bod L_2 (a dotyčnici UV kružnice k_1 v bode B zodpovedá dotyčnica kružnice k v bode L_2), takže body A, B, L_2 ležia na priamke. Podobne odvodíme, že body C, D, L_2 ležia na priamke.



Obr. 18

Označme L priesečník priamky L_2S s úsečkou UV. Z podobnosti pravouhlých trojuholníkov BLL_2 a L_1AL_2 vyplýva $|BL_2| \cdot |AL_2| = |LL_2| \cdot |L_1L_2|$. Obdobne platí $|CL_2| \cdot |DL_2| = |LL_2| \cdot |L_1L_2|$. Preto $|BL_2| \cdot |AL_2| = |CL_2| \cdot |DL_2|$. (Doposiaľ sme len zopakovali riešenie úlohy domáceho kola.)

Teraz veďme bodom L_2 priamku L_2M a dokážme, že táto priamka prechádza aj bodom N. Označme po rade N_1 a N_2 druhé priesečníky priamky L_2M s kružnicami k_1 a k_2. Pokiaľ je priamka L_2M náhodou dotyčnicou niektorej z kružníc k_1 či k_2 v bode M, potom položíme $N_1 = M$ či $N_2 = M$.

Podľa vety o mocnosti bodu L_2 ku kružnici k_1 je $|AL_2| \cdot |BL_2| = |ML_2| \cdot |N_1L_2|$, podobne pre kružnicu k_2 je $|CL_2| \cdot |DL_2| = |ML_2| \cdot |N_2L_2|$. Z úvahy v prvej časti riešenia potom vyplýva

$$|ML_2| \cdot |N_1L_2| = |AL_2| \cdot |BL_2| = |CL_2| \cdot |DL_2| = |ML_2| \cdot |N_2L_2|,$$

teda $|N_1L_2| = |N_2L_2|$ a nutne $N_1 = N_2$. To znamená, že bod $N_1 = N_2$ je spoločným bodom kružníc k_1 a k_2, a musí byť $N_1 = N_2 = N$. Preto priamka ML_2 prechádza bodom N.

A – S – 3

Vzhľadom na podmienku $a + b + c = 1$ máme dokázať nerovnosť

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + (ab + bc + ca) \geqq (a + b + c)^2,$$

ktorá je ekvivalentná s nerovnosťou

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geqq 0,$$

a tá je ekvivalentná s nerovnosťou

$$\frac{1}{2}\big[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\big] \geqq 0.$$

Posledná nerovnosť platí pre každú trojicu a, b, c, preto platí aj dokazovaná nerovnosť.

Iné riešenie. Ak si vyjadríme $c = 1 - a - b$ a dosadíme do ľavej strany danej nerovnosti, dostaneme

$$\begin{aligned}L &= 3(a^2 + b^2) - 3(a + b) + 3ab + 2 = \\ &= 3(a^2 + ab - a) + 3b^2 - 3b + 2 = \\ &= 3\Big(a + \frac{b}{2} - \frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{9}{4}b^2 - \frac{3}{2}b + \frac{5}{4} = \\ &= 3\Big(a + \frac{b}{2} - \frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{1}{4}(3b - 1)^2 + 1,\end{aligned}$$

čo je pre každé dve čísla a, b väčšie alebo rovné 1.

Iné riešenie. Zo zrejmej nerovnosti $0 \leqq (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$ rozpísaním odvodíme nerovnosť

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \leqq 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

(Táto nerovnosť je zároveň jednoduchým dôsledkom Cauchyho nerovnosti a nerovnosti medzi aritmetickým a kvadratickým priemerom.) V našom prípade je $(a + b + c)^2 = 1$, takže $3(a^2 + b^2 + c^2) \geqq 1$. Keď k poslednej nerovnosti znovu pričítame rovnosť $(a + b + c)^2 = 1$, vyjde $4(a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca) \geqq 2$, teda

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + (ab + bc + ca) \geqq 1.$$

A – II – 1

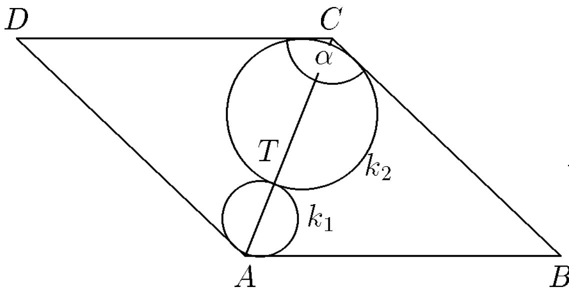
Zrejme $S_n = 5^n + 3^n + 1 \geqq 9$ pre každé prirodzené n. Z tabuliek zvyškov mocnín 5^n a 3^n po delení číslami 3, 5 a 7 zistíme, že $3 \mid S_n$ pre každé $n = 2k + 1$, $5 \mid S_n$ pre každé $n = 4k + 2$ a $7 \mid S_n$ pre každé $n = 6k + 2$ a každé $n = 6k + 4$. Preto ak je S_n prvočíslo, nemôžu po delení čísla n dvanástimi vyjsť zvyšky 1, 3, 5, 7, 9, 11, ani zvyšky 2, 6, 10, ani zvyšky 2, 4, 8, 10, takže toto delenie vyjde bezo zvyšku.

(Dodajme pre zaujímavosť, že číslo $S_{12} = 244\,672\,067$ je prvočíslo.)

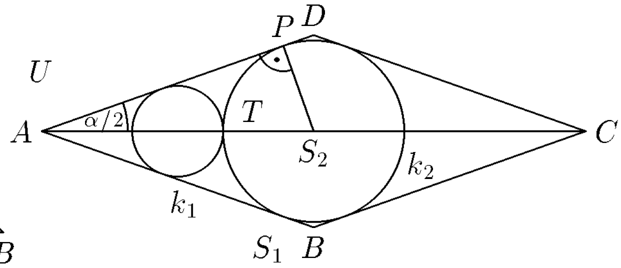
A – II – 2

Označme T bod dotyku oboch kružníc, T leží na úsečke AC. Kružnice k_1, k_2 sú rovnoľahlé so stredom T, a keďže táto rovnoľahlosť zároveň prevádza priamku AB na CD a priamku BC na DA, sú $|AT|$ a $|CT|$ v rovnakom pomere ako polomery kružníc, teda $|CT| = 2|AT|$ (obr. 19). Označme ďalej $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle BCD| = \alpha$.

Stačí teda skonštruovať kružnice k_1 a k_2 tak, aby sa dotýkali po rade strán rovnobežníka AB, AD a BC, CD a prechádzali bodom T. To je však známa úloha (dá sa riešiť pomocou rovnoľahlosti, prípadne pomocou výpočtu uhlov), ktorá má vždy práve jedno riešenie. Potrebujeme však ešte zaručiť, aby obidve kružnice ležali vo vnútri kosoštvorca. Hraničná situácia pre tento prípad je naznačená na obr. 20, kde sa kružnica k_2 dotýka všetkých štyroch strán kosoštvorca. Zrejme pre všetky hodnoty α väčšie než táto hraničná hodnota vyjde k_2 vo vnútri kosoštvorca, a naopak pre všetky menšie hodnoty α kružnica k_2 pretne strany AB a AD a zadaniu úlohy nevyhovuje. Zostáva už len určiť túto medznú hodnotu uhla α.



Obr. 19



Obr. 20

Ak označíme V priesečník kružnice k_1 s uhlopriečkou AC (rôzny od T), U dotykový bod k_1 a AP, vzdialenosť $|AV| = x$ a polomery kružníc k_1, k_2 po rade r_1, r_2, potom $r_2 = 2r_1$. Z podobnosti trojuholníkov AS_2P a AS_1U vyplýva

$$\frac{|S_1U|}{|AS_1|} = \frac{|PS_2|}{|AS_2|}, \qquad \text{čiže} \qquad \frac{r_1}{r_1 + x} = \frac{r_2}{r_2 + x + 2r_1}.$$

Z toho $x = 2r_1$, preto z pravouhlého trojuholníka AS_2P dostávame $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$.

Riešením úlohy sú všetky α z intervalu $(0, \pi)$, pre ktoré je $\sin\frac{\alpha}{2} \geqq \frac{1}{3}$, alebo $\alpha \in \langle 2\arcsin\frac{1}{3}, \pi)$.

A – II – 3

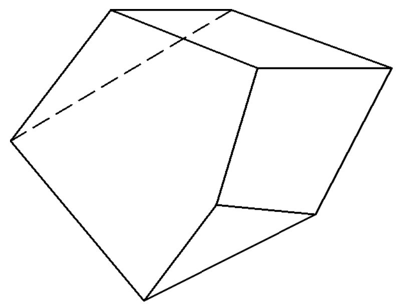
Skúmaním prvých členov postupnosti rozdielov $2^{n+2} - a_n$ uhádneme, že $2^{n+2} - a_n = 2n + 4$. Odtiaľ už ľahko vyplýva dokazovaná nerovnosť. Rovnosť dokážeme indukciou.

Pre $n = 1$ je to jasné: $2^3 - a_1 = 8 - 2 = 6 = 2 \cdot 1 + 4$.

Ďalej môžeme písať $2^{n+3} - a_{n+1} = 2^{n+3} - 2(n + 1 + a_n) = 2(2^{n+2} - a_n - n - 1) = 2(2n + 4 - n - 1) = 2(n + 1) + 4$. Tým je overený indukčný krok, a teda aj tvrdenie úlohy.

A – II – 4

Štvorsten — teleso s najmenším počtom vrcholov — úlohe zrejme nevyhovuje. Preto hľadaný mnohosten musí mať aspoň 5 stien. Pretože žiadne tri jeho steny nemajú rovnaký počet hrán, jedna z týchto stien musí byť aspoň päťuholník, teda musí mať aspoň 5 susedných stien, a celkove teda musí mať hľadaný mnohosten najmenej 6 stien. To ale znamená, že dve jeho steny sú najmenej päťuholníkové. Tieto dve steny majú spoločné nanajvýš 2 vrcholy, a preto mnohosten musí mať celkom aspoň $2 \times 5 - 2 = 8$ vrcholov.



Obr. 21

Obrázok 21 ukazuje mnohosten s ôsmymi vrcholmi, ktorý vyhovuje podmienkam úlohy.

A – III – 1

Ak $\alpha = 3\beta$, tak $\gamma = \pi - 4\beta$, takže podľa sínusovej vety platí

$$a = K \sin 3\beta, \quad b = K \sin \beta, \quad c = K \sin 4\beta, \tag{1}$$

kde K je kladné číslo. Preto v prvej časti riešenia stačí overiť identitu

$$(\sin^2 3\beta - \sin^2 \beta)(\sin 3\beta - \sin \beta) = \sin \beta \sin^2 4\beta. \tag{2}$$

Podľa známych goniometrických vzťahov platí

$$(\sin 3\beta - \sin \beta)^2 = (2 \cos 2\beta \sin \beta)^2 = 4 \cos^2 2\beta \sin^2 \beta,$$
$$\sin 3\beta + \sin \beta = 2 \sin 2\beta \cos \beta,$$

a odtiaľ pre ľavú stranu rovnosti (2) dostávame

$$\begin{aligned}(\sin^2 3\beta - \sin^2 \beta)(\sin 3\beta - \sin \beta) &= (4 \cos^2 2\beta \sin^2 \beta) \cdot (2 \sin 2\beta \cos \beta) = \\ &= (2 \sin \beta \cos \beta) \cdot (2 \sin 2\beta \cos 2\beta) \cdot 2 \sin \beta \cos 2\beta = \\ &= \sin 2\beta \cdot \sin 4\beta \cdot 2 \sin \beta \cos 2\beta = \sin \beta \sin^2 4\beta.\end{aligned}$$

Tak sme dokázali, že (2) platí pre každé β.

Teraz vysvetlíme, prečo opačná implikácia neplatí. Funkcia sínus má periódu 360°, takže strany trojuholníka ABC sú tvaru (1) aj v prípade, keď platí $\alpha = 3\beta - 360°$

(a $\gamma = 540° - 4\beta$), napr. pokiaľ $\alpha = 15°$, $\beta = 125°$ a $\gamma = 40°$. Pre trojuholník s takými vnútornými uhlami platí (ako sme dokázali) rovnosť $(a^2 - b^2)(a - b) = bc^2$ napriek tomu, že $\alpha \neq 3\beta$.

A – III – 2

Nazvime vrcholy n-uholníka nasledovne:

párny – ak z neho vychádza párny počet modrých úsečiek (teda aj párny počet červených);

nepárny – ak z neho vychádza nepárny počet modrých úsečiek (a nepárny počet červených).

Susedom vrcholu n-uholníka nazvime každý ďalší vrchol n-uholníka, s ktorým je spojený úsečkou, teda každý jeho ďalší vrchol. Počet nepárnych vrcholov v začiatočnom ofarbení je zrejme párny, pretože do počtu modrých úsečiek vychádzajúcich z vrcholov n-uholníka je každá modrá úsečka započítaná dvakrát (keďže n je nepárne, počet párnych vrcholov je potom nepárny).

Ďalej si uvedomíme, že výsledok prefarbovania nezávisí od poradia vrcholov, podľa ktorých prefarbujeme, ale len od toho, koľkokrát podľa ktorého vrcholu prefarbujeme (stačí uvážiť, že vlastne záleží len na počte prefarbení každej úsečky a nie na poradí prefarbovania). Keďže farba každej úsečky závisí len od parity počtu zmien jej ofarbenia, nemá zmysel v žiadnom vrchole prefarbovať úsečky viac ako raz. Pretože n je nepárne, párny vrchol zostane aj po jeho prefarbení párny a nepárny zostane nepárny. Na druhej strane, pri prefarbovaní každého vrcholu počet modrých úsečiek vychádzajúcich zo všetkých jeho susedov zmení paritu, a teda všetky ostatné párne vrcholy sa zmenia na nepárne, kým všetky nepárne sa zmenia na párne.

Preto na dosiahnutie ofarbenia, pri ktorom budú všetky vrcholy párne, potrebujeme prefarbiť nepárny počet susedov každého nepárneho vrcholu a párny počet susedov každého párneho vrcholu. Ľubovoľné dva párne resp. nepárne vrcholy teda musia mať rovnakú paritu počtu prefarbených susedov, teda buď prefarbíme obidva alebo ani jeden. Preto možno dosiahnuť potrebné ofarbenie len tak, že prefarbíme buď všetky párne vrcholy, všetky nepárne vrcholy, alebo úplne všetky vrcholy (už sme dokázali, že párnych vrcholov je nepárny počet a nepárnych je párny počet). Z týchto možností vyhovujú prvé dve. Ak napríklad prefarbíme všetky nepárne vrcholy, každý párny vrchol má párny počet prefarbených susedov (nepárne vrcholy), čiže zostane párny, a každý nepárny vrchol má nepárny počet prefarbených susedov (nepárne vrcholy okrem neho), čiže sa zmení na párny. Podobnú úvahu možno použiť aj keď prefarbíme všetky párne vrcholy.

V druhej časti zrejme stačí ukázať, že žiadne ofarbenie, v ktorom sú všetky vrcholy párne, nemožno prefarbiť na iné takéto ofarbenie. Na základe úvah z prvej časti vieme, že sa to dá dosiahnuť len tak, že prefarbíme všetky párne alebo všetky nepárne vrcholy. Kým v prvom prípade prefarbíme všetky vrcholy, a teda dostaneme pôvodné ofarbenie, v druhom prípade neprefarbíme nič. Preto je výsledné ofarbenie len s párnymi vrcholmi jednoznačne určené začiatočným ofarbením.

Iné riešenie. Znovu si najprv uvedomíme, že výsledok prefarbovania nezávisí od poradia vrcholov, podľa ktorých prefarbujeme, ale len od toho, koľkokrát podľa ktorého vrcholu prefarbujeme. Ak sú $A_1, A_2, \dots, A_n$ vrcholy daného n-uholníka, označme p_i počet prevedených prefarbení vzhľadom na vrchol A_i a $p = \sum_{i=1}^{n} p_i$ ich celkový súčet. Úsečka A_iA_j zmení farbu, práve keď prevedieme prefarbenie vzhľadom k jednému z vrcholov A_i alebo A_j. Vo výslednom prefarbení teda úsečka A_iA_j zmení farbu, práve keď $p_i + p_j \equiv 1 \pmod 2$. Počet modrých úsečiek vychádzajúcich z vrcholu A_i má vo výslednom ofarbení rovnakú paritu ako v počiatočnom ofarbení, práve keď

$$\sum_{j \neq i} (p_i + p_j) = (n-1)p_i + \sum_{j \neq i} p_j \equiv p - p_i \equiv 0 \pmod 2.$$

Ukážeme, že každé počiatočné ofarbenie možno prefarbiť tak, aby z každého vrchola vychádzal párny počet modrých úsečiek: Budeme postupne prefarbovať n-uholník vzhľadom k tým vrcholom, z ktorých v pôvodnom ofarbení vychádzal nepárny počet modrých úsečiek (bude teda $p_i = 1$, pokiaľ v pôvodnom ofarbení vychádzal z vrcholu A_i nepárny počet modrých úsečiek, $p_i = 0$ v opačnom prípade).

Označme a_i počet modrých úsečiek vychádzajúcich z vrcholu A_i, potom $\sum_{i=1}^{n} a_i$ je rovné dvojnásobku celkového počtu modrých úsečiek, čiže nepárnych a_i je párny počet. Pre práve popísané prefarbovanie je $p_i = 1$ pre párny počet vrcholov A_i a $p = \sum_{i=1}^{n} p_i$ je párne. Pre vrchol A_i, z ktorého v pôvodnom ofarbení vychádzal párny počet modrých úsečiek, je $p_i = 0$, teda parita počtu modrých úsečiek z neho vychádzajúcich sa po prefarbení nezmení. Pre vrchol A_i, z ktorého v pôvodnom ofarbení vychádzal nepárny počet modrých úsečiek, však je $p_i = 1$, takže $p - p_i \equiv 1 \pmod 2$, t.j. nepárny počet modrých úsečiek z neho vychádzajúcich sa po prefarbení zmení na párny, čo sme chceli dosiahnuť.

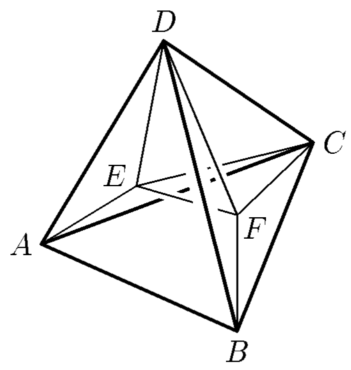
Keby sa niektoré počiatočné ofarbenie dalo prefarbiť na dve rôzne ofarbenia, v ktorých by z každého vrcholu vychádzal párny počet modrých úsečiek, bolo by tiež možné jedno z týchto „párnych" ofarbení prefarbiť na druhé. Ukážeme, že to nejde. Predpokladajme teda, že máme ofarbenie Π, v ktorom z každého vrcholu vychádza párny počet modrých úsečiek. Predpokladajme ďalej, že po prefarbení, pri ktorom voči vrcholu A_i prefarbujeme p_i-krát ($i = 1, 2, \dots, n$), dostaneme iné ofarbenie Ω, v ktorom opäť z každého vrcholu vychádza párny počet modrých úsečiek. Je teda $p - p_i \equiv 0 \pmod 2$, pre každé $i = 1, 2, \dots, n$, a teda $p_i \equiv p_j \pmod 2$, alebo $p_i + p_j \equiv 0 \pmod 2$ pre každé $i, j = 1, 2, \dots, n$. Potom ale žiadna úsečka po prefarbení nezmenila farbu. Ofarbenia Π a Ω sú teda totožné, čiže ku každému ofarbeniu existuje jediné, ktoré z neho možno dostať popísaným spôsobom, a v ktorom z každého vrcholu vychádza párny počet modrých úsečiek.

A – III – 3

Pretože každý mnohosten má aspoň štyri steny, hľadaný najmenší súčet musí byť aspoň $5 \cdot 4 = 20$. Pokiaľ by bol práve 20, museli by sme daný štvorsten rozdeliť na 5 štvorstenov. Ukážeme sporom, že za podmienok v zadaní to nie je možné. (V dôkaze je možné odvolať sa na riešenie úlohy tohtoročného domáceho kola, je však potrebné dať si pozor na korektnosť úvah.)

Pripusťme teda, že štvorsten $ABCD$ je rozdelený za podmienok v zadaní na 5 štvorstenov T_1, T_2, T_3, T_4, T_5. Steny daného štvorstena deliť nemožno, preto každá z nich je zároveň stenou (práve) jedného zo štvorstenov $T_1, \dots, T_5$. Podľa Dirichletovho princípu potom niektorý z nich, povedzme T_1, nemá s $ABCD$ žiadnu spoločnú stenu. To však znamená, že T_1 obsahuje nanajvýš dva z bodov A, B, C, D — predpokladajme, že T_1 *neobsahuje* vrcholy C, D.

Pretože daný štvorsten je rozdelený bezo zvyšku, štvorsten T_1 musí mať každú svoju stenu spoločnú s niektorým zo zvyšných štvorstenov T_2, T_3, T_4, T_5 (so žiadnym samozrejme nemôže mať spoločné steny dve). Ak je teda $T_2 = BCDX$ štvorsten obsahujúci stenu BCD daného štvorstena, musí T_1 bez ohľadu na to, ktorú stenu má s T_2 spoločnú, obsahovať vrchol C alebo D, a to je spor s predpokladom.



Obr. 22

Ďalším dôležitým poznatkom je, že súčet počtov stien získaných mnohostenov je párny. Vyplýva to z toho, že v súčte každú zo štyroch stien štvorstena $ABCD$ započítame práve raz (nemožno ju deliť) a každú z ďalších stien práve dvakrát (za každý z dvoch mnohostenov, ktorým je spoločná). Preto tento súčet musí byť tvaru $4 + 2k = 2(k + 2)$, takže sa nerovná 21.

Minimálna hodnota skúmaného súčtu je 22, príslušné rozdelenie (na tri štvorsteny $ACDE$, $BCDF$ a $EFCD$ a dva štvorboké ihlany $ABFED$ a $ABFEC$) je na obr. 22.

A – III – 4

Stačí zvoliť postupnosť $a_n = (n!)^3$. Pre $k \geqq 2$ rovnako ako pre $k = 0$ tvrdenie o postupnosti $(k + a_n)$ zrejme platí, pre $k = 1$ stačí využiť vzťah $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$.

A – III – 5

Ak odhadneme zhora každý sčítanec súčtu V_n podľa nerovnosti $ab \leqq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, ktorá zrejme platí pre ľubovoľné reálne čísla a, b, dostaneme odhad

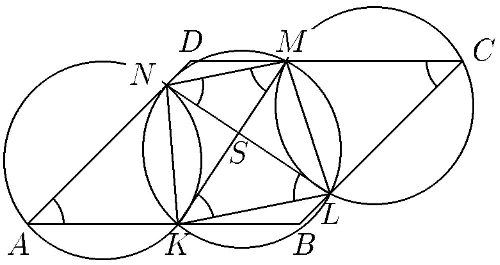
$$V_n \leqq \frac{\sin^2 x_1 + \cos^2 x_2}{2} + \frac{\sin^2 x_2 + \cos^2 x_3}{2} + \ldots + \frac{\sin^2 x_n + \cos^2 x_1}{2} = \frac{n}{2}.$$

Skúmaný výraz nadobúda najväčšiu hodnotu $\frac{1}{2}n$, lebo ako ľahko nahliadneme, pre hodnoty $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{1}{4}\pi$ vyjde $V_n = \frac{1}{2}n$.

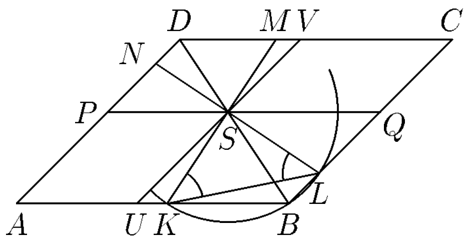
A – III – 6

Predpokladajme, že body K, L, M, N vyhovujú predpokladom úlohy (obr. 23). Z vlastností obvodových uhlov v zhodných kružniciach opísaných trojuholníkom AKN a CLM

a štvoruholníku $KLMN$ vyplýva, že každý z uhlov KLN, KMN, LKM a LNM má rovnakú veľkosť ako zhodné uhly rovnobežníka pri vrcholoch A a C, t.j. $45°$. Preto sú trojuholníky SKL a SMN (S je priesečník uhlopriečok KM a LN) rovnoramenné, pravouhlé a rovnoľahlé podľa stredu S. V rovnoľahlosti, v ktorej bodu K zodpovedá bod M a bodu L bod N, sa priamka AB zobrazí na priamku CD, lebo $K \in AB$, $M \in$ $\in CD$ a $AB \parallel CD$; rovnako tak sa priamka BC zobrazí na priamku DA, takže prienik $AB \cap BC$ sa zobrazí na prienik $CD \cap DA$, alebo bod B prejde do bodu D. To znamená, že bod S je vnútorným bodom úsečky BD. (Dodajme, že každý uvažovaný štvoruholník $KLMN$ je rovnoramenný lichobežník s navzájom kolmými uhlopriečkami.)



Obr. 23



Obr. 24

Zvoľme teraz naopak ľubovoľný vnútorný bod S úsečky BD a ukážme, že je priesečníkom uhlopriečok niektorého z uvažovaných štvoruholníkov $KLMN$. Preložme zvoleným bodom S „priečky“ $PQ \parallel AB$ a $UV \parallel BC$ ako na obr. 24. Zhodné trojuholníky UBS a QSB sú podobné s trojuholníkom ABD, takže sú to ostrouhlé trojuholníky s najmenšími vnútornými uhlami $45°$ pri vrcholoch U a Q. Preto je $|SB| < |UB|$ a $|SB| < |BQ|$, takže kružnica $k(S, |SB|)$ pretína úsečku BU vo vnútornom bode, ktorý označíme K, a úsečku BQ vo vnútornom bode, ktorý označíme L. Podľa vety o obvodovom a stredovom uhle platí

$$|\sphericalangle KSL| = 360° - 2 \cdot |\sphericalangle KBL| = 360° - 2 \cdot 135° = 90°,$$

takže zhodné uhly SKL a SLK majú veľkosť $45°$. Vnútorné body M a N úsečiek DV a DP určíme ako obrazy bodov K a L v rovnoľahlosti so stredom S, v ktorej $B \mapsto$ $\mapsto D$ (a $Q \mapsto P$ a $U \mapsto V$). Z vlastností obvodových uhlov vyplýva, že takto zostrojený štvoruholník $KLMN$ má potrebné vlastnosti, lebo každý z uhlov vyznačených na obr. 23 má podľa konštrukcie naozaj veľkosť $45°$.

Odpoveď. Hľadaná množina je úsečka BD bez krajných bodov.

Prípravné sústredenia pred MMO

Pred medzinárodnou matematickou olympiádou (MMO) sa každoročne koná jedno výberové a jedno prípravné sústredenie pre najlepších riešiteľov tretieho kola kategórie A. Po prvom z nich SK MO vyberie 6 najlepších študentov do reprezentačného družstva Slovenska a určí dvoch náhradníkov. Druhé sústredenie je zamerané na prípravu šesťčlenného reprezentačného družstva.

Na výberovom sústredení pred MMO sa zúčastnilo 10 súťažiacich, najúspešnejších riešiteľov tretieho kola MO kategórie A. Sústredenie sa konalo v dňoch 27.4.–2.5.1997 v Bratislave. Súťažiaci boli ubytovaní v priestoroch EKOIUVENTY a súťažili na MFF UK. Každý deň študenti riešili monotematickú sériu troch až piatich úloh, pri rovnakých podmienkach ako na MMO. V poobedňajších hodinách sa konal spoločný rozbor úloh s lektorom. Na konci sústredenia sa získané body za jednotlivé dni sčítajú a s prihliadnutím na výsledky tretieho kola MO a iné výsledky (predchádzajúca účasť na MMO, výsledky korešpondenčného seminára SK MO) je vybrané šesťčlenné družstvo na MMO.

Výsledky sústredenia:

1.	*Vladimír Marko*	46,75	6.	*Viera Růžičková*	29,75
2.	*Peter Novotný*	45,5	7.	*Martin Sleziak*	27,25
3.	*Peter Kozák*	42,75	8.	*Vladimír Zajac*	26,5
4.	*Miroslav Dudík*	41,75	9.	*Peter Bodík*	22,25
5.	*Ján Špakula*	35	10.	*Kristína Černeková*	19,25

Úlohy zadávali lektori z Bratislavy:

Richard Kollár, MFF UK, úlohy 1 – 4 (Nerovnosti),
Martin Niepel, MFF UK, 5 – 8 (Planimetria),
RNDr. Pavol Černek, CSc., MFF UK, 9 – 11 (Kombinatorika),
doc. RNDr. Ján Čižmár, CSc., MFF UK, 12 – 15 (Stereometria),
Prof. Pavel Kostyrko, DrSc., MFF UK, 16 – 19 (Funkcie),
Prof. Ivan Korec, DrSc., MÚ SAV, 20 – 23 (Teória čísel).

Pre vybrané družstvo sa organizovalo ešte jedno prípravné sústredenie v dňoch 23.–27. 6. 1997 v zariadení IUVENTY na Zochovej chate. Toto sústredenie bolo zamerané viac na vedomostnú prípravu študentov a jeho obsahom boli prednášky na vybrané témy. Lektormi boli:

Richard Kollár, MFF UK Bratislava (Nerovnosti),
RNDr. Pavol Černek, CSc., MFF UK Bratislava (Kombinatorika),
doc. RNDr. Ján Čižmár, CSc., MFF UK Bratislava (Geometria),
Prof. Ivan Korec, DrSc., MÚ SAV Bratislava (Teória čísel).

Zadania súťažných úloh výberového sústredenia pred MMO

1. Nájdite všetky reálne čísla c s vlastnosťou: Pre každú dvojicu reálnych čísel a, b existuje dvojica takých reálnych čísel x, y z intervalu $\langle 0, 1\rangle$, že platí

$$|xy - ax - by| \geqq c.$$

2. Dokážte, že pre každé tri nezáporné reálne čísla x, y, z platí

$$8(x^3 + y^3 + z^3)^2 \geqq 9(x^2 + yz)(y^2 + xz)(z^2 + xy).$$

Platí táto nerovnosť aj bez podmienky nezápornosti čísel x, y, z ? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

3. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n, $n \geqq 2$ platí:

$$n\left(\sqrt[n]{n+1} - 1\right) < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} < n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right).$$

4. Daný je polynóm $f(x)$ s celočíselnými koeficientami. V troch rôznych celých číslach a_1, a_2 a a_3 platí $|f(a_1)| = |f(a_2)| = |f(a_3)| = 1$. Dokážte, že $f(x)$ nemá žiaden celočíselný koreň.

5. Daný je trojuholník ABC so stranami $a > b > c$ a v ňom ľubovoľný bod O. Označme P, Q a R po rade priesečníky priamok AO, BO a CO po rade so stranami trojuholníka BC, AC a AB. Dokážte, že platí $|OP| + |OQ| + |OR| < a$.

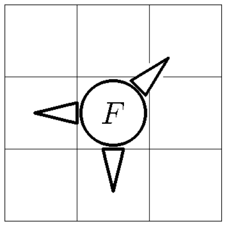
6. Vo vnútri strán AB, BC, CD a DA rovnobežníka $ABCD$ sa po rade nachádzajú body K, L, M a N. Dokážte, že obsah štvoruholníka $KLMN$ sa rovná polovici obsahu rovnobežníka $ABCD$ práve vtedy, keď niektorá z jeho uhlopriečok je rovnobežná s niektorou zo strán rovnobežníka $ABCD$.

7. V trojuholníku ABC platí $|AB| = |AC| + \frac{1}{2}|BC|$. Na strane BC je daný bod tak, že $|BP| = \frac{1}{4}|BC|$. Dokážte, že $2|\sphericalangle APC| = |\sphericalangle ACB|$.

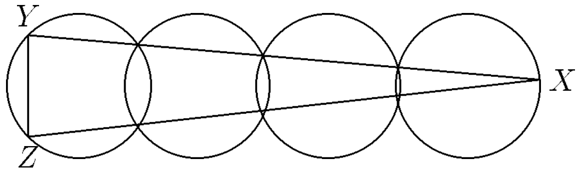
8. V rovnoramennom trojuholníku ABC ($|AB| = |BC|$) označíme D priesečník osi uhla ACB so stranou AB. Priamka kolmá na CD a prechádzajúca cez stred kružnice opísanej trojuholníku ABC pretína BC v bode E. Priesečník rovnobežky s CD vedenej bodom E so stranou AB označíme F. Dokážte, že $|BE| = |FD|$.

9. V rovine je daných 1998 bodov $A_1, A_2, \ldots, A_{1998}$, z ktorých žiadne tri neležia na jednej priamke. Nájdite najmenšie prirodzené číslo n s vlastnosťou: Ak zvolíme ľubovoľných n úsečiek, ktorých koncové body sú v bodoch $A_1, A_2, \ldots, A_{1998}$, tak sa medzi nimi nájdu také tri, ktoré tvoria strany jedného trojuholníka.

10. Daná je šachovnica 2000×2000 štvorčekov. Figúrka F sa môže v jednom kroku posunúť o jedno políčko jedným z troch spôsobov nakreslených na obr. 25. Figúrku sme na začiatku postavili na políčko $(156, 743)$. Je možné, aby prešla počas 3 999 999 krokov celú šachovnicu?



Obr. 25



Obr. 26

11. Dané sú body A, B. Určte množinu bodov C, pre ktoré má trojuholník ABC jeden z uhlov rovný $10°$ a dá sa pokryť štyrmi rovnakými kruhmi ako na obr. 26 pre trojuholník XYZ.

12. Daný je štvorsten $ABCD$. Jeho vrcholmi prechádzajú rovnobežky (rôznobežne so všetkými stenami), ktoré pretínajú roviny stien protiľahlých k vrcholom v bodoch A_1, B_1, C_1 a D_1. Určte pomer objemov štvorstenov $ABCD$ a $A_1B_1C_1D_1$.

13. Vnútri konvexného mnohostena je daných k disjunktných gúľ ($k \in \mathbb{N}$, $k > 1$), z ktorých žiadne dve nemajú rovnaké polomery. Dokážte, že existuje rozklad mnohostena na konvexné mnohosteny, z ktorých každý obsahuje práve jednu guľu.

14. Základne zrezaného štvorbokého ihlana $ABCDA'B'C„D$" sú rovnobežníky $ABCD$ a $A'B'C'D'$ ($ABCD \parallel A'B'C'D'$). Priamka m pretína priamky AB', BC' a CD'. Určte všetky polohy, ktoré môže mať priamka m k priamke DA'. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

15. Konvexný n-sten ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 4$) je rovnobežne premietnutý do roviny. Určte, aký je najväčší možný počet strán priemetu. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

16. Nech $\mathbb{N}_0$ je množina celých nezáporných čísel. Zistite, či existuje funkcia $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ taká, že súčasne platí:
a) pre každé $b \in \mathbb{N}_0$ existuje nekonečne veľa $a \in \mathbb{N}_0$ tak, že $f(a) = b$;
b) pre každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí $f(f(n^2)) = f(f(n)) + f(f(0))$.

17. Nech $f : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$ je nezáporná funkcia, $f(1) = 1$ a pre každé $x_1 \geqq 0$, $x_2 \geqq 0$ také, že $x_1 + x_2 \leqq 1$ platí $f(x_1 + x_2) \geqq f(x_1) + f(x_2)$. Dokážte, že $f(x) \leqq 2x$ pre každé $x \in \langle 0, 1\rangle$.

18. Určte najmenšie možné A tak, aby pre každú kvadratickú funkciu $f(x) = ax^2 + bx + c$ spĺňajúcu $|f(x)| \leqq 1$ pre všetky $0 \leqq x \leqq 1$, bola splnená nerovnosť $f'(0) \leqq A$.

19. Rastúca funkcia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ spĺňa $f(m \cdot n) = f(m) + f(n)$ pre ľubovoľnú dvojicu prípustných hodnôt. Dokážte, že existuje reálne číslo $p > 1$ tak, že $f(n) = \log_p n$ pre každé prirodzené číslo n.

20. Nájdite čo najviac dvojstredových štvoruholníkov s vrcholmi v mrežových bodoch roviny. (Štvoruholník sa nazýva dvojstredový, ak má vpísanú i opísanú kružnicu. Mrežové body roviny sú body s celočíselnými súradnicami.)

21. Nech $F(n)$ znamená n-té číslo Fibonacciovej postupnosti (teda $F(0) = 0$, $F(1) = 1$ a $F(n+2) = F(n+1) + F(n)$ pre $n \geqq 0$). Nájdite počet riešení rovnice

$$F(x) + F(y) + F(z) = F(u) + F(v),$$

pre ktoré platí ; $0 \leqq x \leqq y \leqq z \leqq 1000$, ; $0 \leqq u \leqq v \leqq 1000$.

22. Nájdite všetky $n \geqq 3$, pre ktoré existuje

a) v rovine b) v priestore

pravidelný n-uholník s vrcholmi v mrežových bodoch.

23. Nech číslo N vznikne napísaním dekadických zápisov čísel od 10^5 do 8.10^5 včítane v ľubovoľnom poradí (ale každého práve raz). Dokážte, že číslo N nie je
a) vyššou ako druhou mocninou prirodzeného čísla;
b) vyššou ako prvou mocninou prirodzeného čísla.

3. československé stretnutie

Bílovec, 16.– 19. júna 1997

V tomto ročníku MO sa už po tretíkrát konala medzištátna súťaž medzi najlepšími riešiteľmi z Českej a Slovenskej republiky. Po prvom ročníku v mekke českej matematickej olympiády Jevíčku a minuloročnej súťaži v Žiline tentokrát súťaž prebiehala opäť v ČR, v priestoroch gymnázia so zameraním na matematiku v severomoravskom Bílovci. Organizačným vedúcim podujatia bol *doc. RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.,* z University Palackého v Olomouci.

Napriek tomu, že je táto súťaž azda najdôležitejšou previerkou pripravenosti súťažiacich družstiev pred medzinárodnou matematickou olympiádou, jedným z jej najväčších prínosov je stretnutie a spriatelenie sa študentov z dvoch historicky spätých krajín. Keďže príbuznosť jazykov organizátorov a oboch súťažiacich družstiev odstraňuje jazykovú bariéru, nie je potrebné prekladať ani zadania ani riešenia súťažiach do iných jazykov, je teda možné súťaž veľmi rýchlo vyhodnotiť. Preto je jej organizácia rovnaká ako v prípade tretieho kola kategórie A, s jediným rozdielom: čas na riešenie úloh je rovnaký ako na medzinárodnej olympiáde, teda štyri a pol hodiny. Výsledky súťaže sú v tabuľke.

Aj touto súťažou dávajú najvyššie orgány MO v oboch republikách najavo svoj záujem o vzájomnú spoluprácu a ďalšie pokračovanie v spoločnom organizovaní MO. Naďalej teda naozaj pokračuje dlhoročná tradícia MO v Československu, tak ako medzi organizátormi, tak aj medzi súťažiacimi.

V tomto ročníku bolo v tejto súťaži prvýkrát úspešnejšie slovenské družstvo, napriek tomu, že tento vynikajúci výsledok neskôr na MMO nepotvrdilo. Na druhej strane, v tradičnom volejbalovom stretnutí prvýkrát zvíťazilo družstvo Českej republiky. Možno práve tento fakt pomohol súperom k pomerne dobrému umiestneniu na MMO v Argentíne.

Por.	Meno	Ročník, Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	Súčet
1.	Vladimír Marko	4 G J. Hronca, Bratislava	7	7	7	7	7	7	42
2.	Miroslav Dudík	4 G Trebišov	7	6	7	7	7	7	41
3.–5.	Libor Barto	3 G Hellichova, Praha	7	3	5	7	7	7	36
	Pavel Podbrdský	3 G tř. Kpt. Jaroše, Brno	7	5	5	5	7	7	36
	Petr Zima	3 G nám.dr.E.Beneše, Kladno	7	2	7	6	7	7	36
6.	Peter Kozák	2 G Sučany	7	6	4	0	7	7	31
7.–8.	Viera Růžičková	3 G V. Okružná, Žilina	0	1	7	7	7	7	29
	Ján Špakula	3 G Poštová, Košice	7	7	1	2	7	5	29
9.	Peter Novotný	2 G V. Okružná, Žilina	7	0	4	2	7	7	27
10.–11.	Jan Spěvák	4 G Hellichova, Praha	7	4	4	5	4	1	25
	Jan Vybíral	4 G M.Kopernika, Bílovec	7	0	6	0	7	5	25
12.	Lukáš Vokřínek	2 G tř. Kpt. Jaroše, Brno	0	0	1	5	7	7	20

Zadania úloh 3. československého stretnutia

Úloha č.1

Daný je rovnostranný trojuholník ABC. Na jeho stranách AB a AC sú zvolené po rade body K a L tak, že $|BK| = |AL|$. Označme P priesečník úsečiek BL a CK. Určte pomer $|AK| : |BK|$, ak viete, že úsečky AP a CK sú navzájom kolmé.

(P.Kaňovský)

Úloha č.2

V danej spoločnosti viac ako šiestich ľudí si každý člen dopisuje s práve tromi ďalšími. Dokážte, že túto spoločnosť možno rozdeliť do dvoch neprázdnych skupín tak, aby si každý člen dopisoval s aspoň dvomi členmi tej skupiny, do ktorej sám patrí.

(J.Kratochvíl)

Úloha č.3

Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že rovnosť

$$f\big(f(x) + y\big) = f(x^2 - y) + 4f(x)y$$

platí pre všetky dvojice reálnych čísel x, y.

(P. Kaňovský)

Úloha č.4

Je možné v priestore rozmiestniť 100 gulí, z ktorých žiadne dve nemajú spoločný vnútorný bod, a to tak, aby sa každá z nich dotýkala aspoň tretiny ostatných?

(P.Hliněný)

Úloha č.5

Súčet niekoľkých celých čísel (niektoré z nich môžu byť rovnaké) sa rovná číslu 1 492. Zistite, či sa súčet ich siedmych mocnín môže rovnať

a) číslu 1 996, b) číslu 1 998.

(J.Šimša, J.Meszáros)

Úloha č.6

V istom jazyku sú len dve písmená A a B. Pre slová tohoto jazyka platí:

1) Jediné slovo dĺžky 1 je A.
2) Ľubovoľná skupina písmen $X_1X_2X_3\dots X_nX_{n+1}$, kde $X_i \in \{A, B\}$ pre každý index i, tvorí slovo dĺžky $n+1$, práve keď obsahuje aspoň jedno písmeno A, a pritom nie je tvaru $X_1X_2\dots X_nA$, kde $X_1X_2\dots X_n$ je slovo dĺžky n.

Dokážte, že existuje práve $\binom{3\,995}{1\,997} - 1$ slov, ktoré nezačínajú dvojicou písmen AA a sú zložené z 1 998 písmen A a rovnakého počtu písmen B.

(J.Aragorn Tešínský)

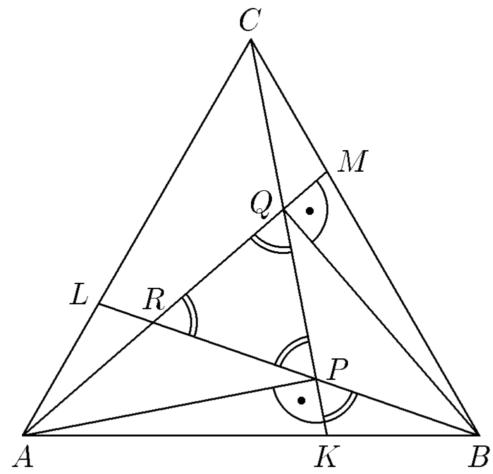
Riešenia úloh 3. československého stretnutia

Úloha 1.

Zostrojme bod $M \in BC$ tak, aby $|BK| = |AL| = |CM|$. V otočení o 120°, v ktorom $A \mapsto B \mapsto C$ ($\mapsto A$), platí tiež $M \mapsto L \mapsto K$ ($\mapsto M$), a teda rovnako $AM \mapsto$ $\mapsto BL \mapsto CK$ ($\mapsto AM$). Preto úsečky AM, BL a CK ohraničujú rovnostranný trojuholník PQR (obr. 27). Označme $d = |PQ|$. Z pravouhlých trojuholníkov APQ a BQR (s uhlom veľkosti 60° pri vrchole Q resp. R) dostávame $|AP| = d\sqrt{3}$ a $|BR| =$ $= 2d$, takže $|BP| = d$. Pretože poznáme vnútorné uhly trojuholníkov APK a BPK pri spoločnom vrchole P, môžeme určiť pomer ich obsahov:

$$\frac{S(APK)}{S(BPK)} = \frac{\frac{1}{2}d\sqrt{3}\cdot|PK|\cdot\sin 90^\circ}{\frac{1}{2}d\cdot|PK|\cdot\sin 60^\circ} = 2.$$

Obidva trojuholníky však majú spoločnú výšku z vrcholu P, preto je určený pomer rovný hľadanému pomeru $|AK| : |BK|$.

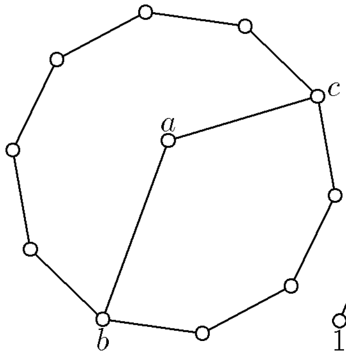


Obr. 27

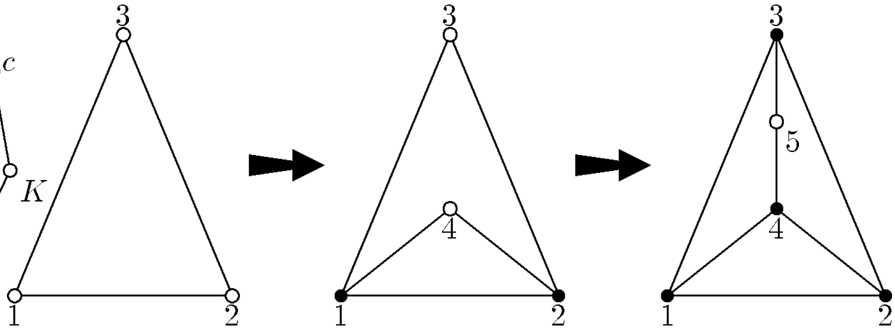
Úloha 2.

Situáciu popíšeme grafom s $n \geqq 7$ vrcholmi, ktoré budú zodpovedať jednotlivým členom spoločnosti; hranami spojíme práve tie dvojice vrcholov, ktoré zodpovedajú dvojiciam členov, ktorí si dopisujú. (V priebehu riešenia budeme vrcholy postupne označovať číslami $1, 2, \ldots, n$.) Pretože z každého vrcholu vychádzajú práve tri hrany, iste v našom grafe existujú kružnice; nech K je tá z nich, ktorá má najkratšiu možnú dĺžku d, $3 \leqq d \leqq n$. (Ak je kružníc dĺžky d viac, vyberieme ľubovoľnú z nich). Nech $(1, 2, \ldots, d, 1)$ je cyklické poradie vrcholov na kružnici K, a nech okrem hrán $(1, 2)$ a $(1, d)$ vychádza z vrcholu 1 ešte hrana $(1, x)$. Vrchol x na kružnici K neleží, inak by v grafe existovala kružnica kratšia ako K, a to kružnica $(1, 2, \ldots, x-1, x, 1)$. Preto je $d < n$, takže množiny vrcholov K a $L = \{d+1, d+2, \ldots, n\}$ tvoria rozdelenie množiny všetkých vrcholov na dve neprázdne podmnožiny. Kedy toto rozdelenie nevyhovuje podmienke zo zadania (hovorme ďalej „nie je vyhovujúce“)? Len vtedy, keď existuje „kritický“ vrchol $a \in L$, z ktorého vedú aspoň dve hrany, povedzme (a, b) a (a, c), do vrcholov na kružnici K (obr. 28). Vtedy môžeme „premostením“ kružnice K cestou (b, a, c) dostať dve nové kružnice nášho grafu; súčet ich dĺžok je zrejme $d+4$, čo v prípade $d \geqq 5$ vedie k sporu (dĺžka jednej z nových kružníc je menšia ako d). Preto zostáva posúdiť prípady, keď $d = 3$, alebo $d = 4$.

(i) $d = 3$. Ak nie je vyššie popísané rozdelenie na skupiny K a L vyhovujúce, budeme k skupine $\{1, 2, 3\}$ vrcholov kružnice K postupne pridávať „kritické“ vrcholy zo skupiny L, pokým také budú existovať. S ohľadom na ľubovôľu pri číslovaní vrcholov to musí prebiehať a skončiť najneskôr tak, ako vidieť na obr. 29. (Plným krúžkom znázorňujeme



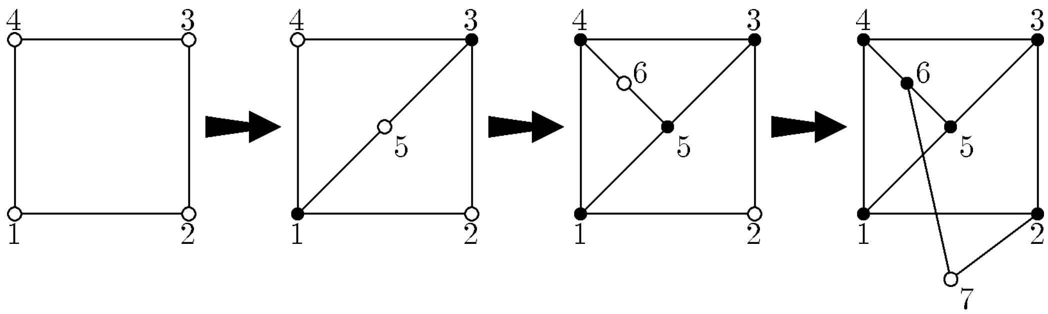
Obr. 28



Obr. 29

práve tie vrcholy, pri ktorých sú už zakreslené všetky tri hrany, ktoré z nich vychádzajú.) Rozdelenie vrcholov na skupinu $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ a jej (neprázdny) doplnok už musí byť vyhovujúce, lebo obidve skupiny spája práve jedna hrana (z vrcholu 5).

(ii) $d = 4$. Ak nie je rozdelenie na skupiny K a L vyhovujúce, budeme opäť pridávať k skupine vrcholov kružnice K „kritické" vrcholy zo skupiny L. S ohľadom na ľubovôľu pri číslovaní vrcholov a na predpoklad, že v grafe neexistuje kružnica dĺžky 3, doplňovanie musí prebiehať a skončiť najneskôr tak, ako vidíte na obr. 30. (Využívame aj to,



Obr. 30

že $n \neq 6$, v prípade $n = 6$ by sme totiž po pridaní vrcholu 6 a hrany $(2, 6)$ dostali graf, pre ktorý vyhovujúce rozdelenie neexistuje. Ide o tzv. úplný bipartitný graf $\mathbf{K}_{3,3}$.) Rozdelenie vrcholov na skupinu $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ a jej doplnok už musí byť vyhovujúce, lebo obidve skupiny spája práve jedna hrana (odtiaľ mimochodom vyplýva, že aj druhá skupina je neprázdna, t.j. že $n > 7$).

Úloha 3.

Najprv dosadíme do danej rovnice $y = -f(x)$ a dostaneme

$$f(0) = f\big(x^2 + f(x)\big) - 4\big(f(x)\big)^2. \tag{1}$$

Dosadením $y = x^2$ ďalej

$$f\big(f(x) + x^2\big) = f(0) + 4f(x)x^2 \tag{2}$$

a sčítaním oboch rovností (1) a (2) dostaneme

$$4f(x)x^2 - 4\big(f(x)\big)^2 = f(x)\big(f(x) - x^2\big) = 0. \tag{3}$$

Z tejto rovnosti vyplýva jednak $f(0) = 0$, jednak $f(x) = x^2$ pre každé x, pre ktoré $f(x) \neq 0$. Ľahko sa presvedčíme, že danej rovnici vyhovujú nasledujúce dve riešenia:

$$f(x) = 0 \ (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{a} \qquad f(x) = x^2 \ (x \in \mathbb{R}). \tag{4}$$

Teraz predpokladajme, že existuje ešte iné riešenie f. Potom by muselo existovať $x_0 \neq 0$, pre ktoré $f(x_0) = 0$, a zároveň $y_0 \neq 0$ také, že $f(y_0) \neq 0$ (a teda podľa (3) $f(y_0) = y_0^2$). Ale dosadením $x = 0$ do pôvodnej rovnice máme $f(y) = f(-y)$, takže môžeme predpokladať, že $y_0 > 0$. Ak dosadíme do danej rovnice $x = x_0$, $y = -y_0$, dostaneme

$$0 \neq y_0^2 = f(-y_0) = f(x_0^2 + y_0) = (x_0^2 + y_0)^2 > y_0^2.$$

To je spor. Iné riešenia ako (4) daná rovnica nemá.

Úloha 4.

Nie je to možné. Predpokladajme, že také rozmiestnenie existuje. Označme K_0 jednu z gulí najmenšieho polomeru r_0 a S_0 jej stred. Každú z najmenej 33 gulí dotýkajúcich sa gule K_0 vhodnou rovnoľahlosťou zmenšíme tak, aby jej polomer bol r_0 a pritom ostal zachovaný pôvodný bod dotyku s guľou K_0. Zmenšené gule budú teda ležať v guli K so stredom S_0 a polomerom $3r_0$. Rovnako ako pôvodné gule, nemajú ani zmenšené gule žiaden spoločný vnútorný bod Pre objem $V(K)$ gule K však platí $V(K) = 3^3 V(K_0) = 27V(K_0)$. Guľa K teda nemôže obsahovať 34 gulí s objemom $V(K_0)$, z ktorých žiadne dve nemajú spoločný vnútorný bod. To je však spor.

Úloha 5.

a) Áno, vhodný príklad objavíme, keď si všimneme, že platí

$$1\,996 - 1\,492 = 504 = 4 \cdot 126 = 4 \cdot (2^7 - 2).$$

Preto vyhovujúcu skupinu čísel zostavíme zo štyroch dvojok a 1 484 ($= 1\,492 - 4 \cdot 2$) jedničiek.

b) Nie. Naše tvrdenie dokážeme pomocou deliteľnosti číslom 7, ktorým je deliteľný rozdiel $a^7 - a$ pre každé celé číslo a (podľa *malej Fermatovej vety*). Odtiaľ totiž vyplýva, že súčet siedmych mocnín ľubovoľnej skupiny celých čísel dáva po delení siedmymi rovnaký zvyšok ako súčet ich prvých mocnín. Číslo $1\,998 - 1\,492 = 506$ však siedmymi deliteľné nie je. (Rovnako možno argumentovať aj pomocou deliteľnosti tromi.)

Úloha 6.

Najprv určme, kedy tvorí daná skupina $\mathcal{W} = X_1X_2 \dots X_n$ (zložená z písmen A, B) slovo uvažovaného jazyka. Nech $p \geqq 0$ je počet písmen A, ktorými skupina $\mathcal{W}$ končí, presnejšie, je tvaru $\mathcal{W} = X_1X_2 \dots X_{n-p}\underbrace{AA\dots A}_{p\text{-krát}}$, kde v prípade $p < n$ nutne $X_{n-p} = B$. Indukciou podľa čísla p sa ľahko overia dve pravidlá:

- Ak nie je medzi $X_1, \dots, X_{n-p}$ žiadne A (ako v prípade $p = n$), potom $\mathcal{W}$ je slovo, práve keď je číslo p nepárne. (Skupina $X_1 X_2 \dots X_{n-p}$ nie je totiž slovo.)
- Ak je naopak medzi $X_1, \dots, X_{n-p}$ aspoň jedno A, potom $\mathcal{W}$ je slovo, práve keď je číslo p párne. (Skupina $X_1 X_2 \dots X_{n-p}$ je totiž slovo.)

Ďalej pre stručnosť označme $k = 1\,998$ (k je teda párne). Podľa predchádzajúceho popisu sú všetky slová $\mathcal{W}$, zložené z k písmen A, k písmen B a nezačínajúce dvojicou AA, jedného z nasledujúcich tvarov:

a) $\mathcal{W} = AB \dots B \underbrace{AA \dots A}_{2j\text{-krát}}$, kde $j \in \{0, 1, \dots, \frac{k}{2} - 1\}$. Pre každé také j prvé tri bodky v zápise $\mathcal{W}$ označujú ľubovoľné poradie $k-2$ písmen B a $k - 2j - 1$ písmen A; týchto poradí je práve $\binom{2k-2j-3}{k-2}$.

b) $\mathcal{W} = B \dots B \underbrace{AA \dots A}_{2j\text{-krát}}$, kde $j \in \{0, 1, \dots, \frac{k}{2} - 1\}$. Pre každé také j prvé tri bodky v zápise $\mathcal{W}$ označujú ľubovoľné poradie $k-2$ písmen B a $k-2j$ písmen A; týchto poradí je práve $\binom{2k-2j-2}{k-2}$.

Ak spočítame všetky počty zistené v častiach a) a b), dostaneme počet všetkých skúmaných slov:

$$\sum_{j=k-1}^{2k-2} \binom{j}{k-2} = \sum_{j=k-2}^{2k-2} \binom{j}{k-2} - 1 = \binom{2k-1}{k-1} - 1 = \binom{3\,995}{1\,997} - 1;$$

pri tom sme využili známu identitu

$$\binom{d}{d} + \binom{d+1}{d} + \binom{d+2}{d} + \dots + \binom{D}{d} = \binom{D+1}{d+1}, \qquad D \geqq d,$$

ktorú možno ľahko overiť indukciou podľa čísla D (pri pevnom d), alebo peknou kombinatorickou úvahou: Všetky $(d+1)$-prvkové podmnožiny množiny $\{0, 1, \dots, D\}$ rozdelíme do skupín podľa ich najväčšieho prvku, čísla M ($d \leqq M \leqq D$); práve $\binom{M}{d}$ takých podmnožín má totiž za najväčší prvok číslo M. Tým je úloha vyriešená.

38. Medzinárodná matematická olympiáda

V dňoch 18. až 31. júla 1997 sa v Mar del Plata v Argentíne, po prvý raz v histórii na juhoamerickom kontinente, uskutočnila medzinárodná matematická olympiáda. Súťažilo spolu 460 študentov z 82 krajín, celkový počet účastníkov, vrátane vedúcich výprav, organizátorov a koordinátorov, prevýšil číslo 800.

Medzinárodná matematická olympiáda (MMO) je súťažou jednotlivcov. Každá zúčastnená krajina na ňu vysiela reprezentačné družstvo zložené z najviac šiestich súťažiacich, sprevádzané dvoma vedúcimi. Slovenské družstvo tento rok tvorili *Miroslav Dudík* zo 4.ročníka Gymnázia v Trebišove, *Peter Kozák* z 2. ročníka Gymnázia v Sučanoch, *Vladimír Marko* zo 4. ročníka Gymnázia J.Hronca v Bratislave, *Peter Novotný* z 2. ročníka Gymnázia Veľká Okružná v Žiline, *Viera Růžičková* z 3. ročníka Gymnázia Veľká Okružná v Žiline a *Ján Špakula* z 3. ročníka Gymnázia Poštová v Košiciach. Vedúcim delegácie bol *RNDr. Pavol Černek, Csc.* a zástupcom vedúceho *Richard Kollár*, obaja z MFF UK v Bratislave.

Pravidlá súťaže sú veľmi podobné pravidlám nášho celoštátneho kola. Súťaží sa dva dni, študenti dostanú každý deň 3 úlohy v ich rodnom jazyku, na ich vyriešenie majú 4,5 hodiny. Po skončení súťaže riešenia prezrú vedúci príslušnej krajiny a svoj návrh hodnotenia podľa vopred pripravených bodovacích schém obhajujú pred koordinátormi. Výsledky slovenského družstva uvádza nasledujúca tabuľka (ČU – čestné uznanie, získavajú tí súťažiaci, ktorí nezískajú žiadnu cenu, ale získajú aspoň za jednu z úloh hodnotenie 7 bodov):

Meno	1	2	3	4	5	6	súčet	cena
Miroslav Dudík	4	0	0	6	7	3	20	3.
Peter Kozák	5	0	1	4	2	0	12	–
Vladimír Marko	7	7	7	7	0	3	31	2.
Peter Novotný	1	7	0	7	1	0	16	3.
Viera Růžičková	2	2	0	4	1	0	9	–
Ján Špakula	0	1	0	7	0	0	8	ČU

Družstvo Slovenska skončilo v neoficiálnom poradí krajín na 36. mieste, čiže najhoršie v histórii MMO. Najúspešnejšie bolo družstvo Číny, napriek tomu, že jej najlepší reprezentant získal „iba“ 38 bodov. Poradie ďalších krajín je v tabuľke.

Spolu bolo udelených 39 prvých, 70 druhých a 122 tretích cien. Plný počet bodov (42) získali tento rok štyria súťažiaci, po jednom z Iránu, Rumunska, USA a Vietnamu. Jeden z nich – *Ciprian Manolescu* z Rumunska, získal plný počet bodov už po tretíkrát za sebou, čo je skutočne obdivuhodný výkon. Naše družstvo, tak ako minulý rok, prekvapilo. Tentokrát však veľmi zlým výkonom. Po 17. mieste v Indii sa očakával určite lepší výsledok ako 36. miesto napr. za Brazíliou, Mexikom a Lotyšskom. Neuspeli sme v úlohách s klasickými témami, planimetria a teória čísel, avšak v zložitej kombinatorickej úlohe, najťažšej úlohe tohtoročnej MMO, sme obstáli aj s nízkym bodovým ziskom nadpriemerne. Napriek miernemu neúspechu, nášmu najúspešnejšiemu olympionikovi, *Vladimírovi Markovi*, ušla tentokrát zlatá medaila len o kúsok, hranica bola 35 bodov. Bronzovú medailu však získal ešte len druhák *Peter Novotný*, a keďže okrem neho bol v družstve ešte jeden druhák a dvaja tretiaci, Slovensko vyslalo na MMO najmladšie družstvo v histórii. Na budúci rok sa už od skúseného družstva bude očakávať priaznivejší výsledok. Tím Českej republiky, ktorý minulý rok sklamal (28.), a nad ktorým sme tento rok výrazne zvíťazili v medzištátnom stretnutí, podal veľmi dobrý výkon a skončil na 18. mieste, keď *Pavel Podbrdský* získal zlatú medailu.

Okrem premiéry v Južnej Amerike mala olympiáda aj iné prívlastky, medzi inými aj najstarostlivejšie pripravená. Stovky organizátorov už pred olympiádou simulovali priamo na mieste rôzne situácie, čo napokon viedlo k úplne bezproblémovému priebehu MMO. Autobusy odchádzali s minimálnym meškaním, neboli problémy s informovanosťou. Námietky neboli po minuloročnej skúsenosti v Indii skutočne skoro žiadne.

Družstvo Slovenska po dlhej a náročnej ceste cez Viedeň, Amsterdam, Sao Paulo a Buenos Aires čakal na letisku sprievodca, už dôchodca *Justín Dudáš*, pôvodom Slovák. Keďže hovoril výborne po slovensky, dozvedeli sme sa od neho mnoho o živote v Argentíne, aj to, čo sme za krátky čas pobytu spoznať nemohli. Samotní argentínčania sú veľmi temperamentní. V letovisku Mar del Plata, napriek tomu, že bola v skutočnosti zima, bol v uliciach život v každú dennú aj nočnú hodinu (teplota sa pohybovala okolo 20° C). Na krásnych plážach a pešej zóne bolo aj o tretej hodine rannej množstvo ľudí, vrátane rodičov s malými deťmi, predávala sa cukrová vata, zmrzlina, obchody a reštaurácie boli otvorené. Úplný protiklad nočného života u nás. Krajina okolo Mar del Plata veľmi pripomína náš Žitný ostrov: siahodlhé polia, dobytok. Navštívili sme aj miestnu mini Zoo, morské akvárium s týranými tuleňmi a plameniakmi trasúcimi sa od zimy. Mesto Mar del Plata je argentínske rekreačné stredisko, ktoré má v zime pol milióna obyvateľov, ale v lete sú ich tam viac ako dva milióny. Všetci sa stretajú poobede na pláži popíjajúc neodmysliteľné maté podobný silnému zelenému čaju.

Avšak stredisko olympiády bolo priamo v hoteli, v ktorom bývali študenti. Množstvo zaujímavostí pripravili organizátori súťažiacim priamo pod nos. Hracie automaty, počítačové hry, ping-pongové stoly, biliard, stolné hry, veľkú puzzle (práve v jej skladaní sa vyznamenalo naše družstvo), večerné kino, diskotéky, folkový koncert a aj odvážne divadlo, to všetko sa dalo nájsť v pomerne luxusnom hoteli priamo v centre Mar del Plata. Dôležitou súčasťou a aj poslaním olympiády je stretávanie sa študentov z rôznych krajín. Študenti, ako aj vedúci, si vzájomne vymieňajú množstvo suvenírov. Tento rok dokonca zriadili organizátori špeciálnu miestnosť, kde každá krajina mohla prezentovať materiály o svojej krajine, a zároveň spoznávať ostatné. Pre všetkých účastníkov zorganizovali popoludnie hier vo veľkej športovej hale. V tradičných aj menej tradičných disciplínach si merali vzájomne sily študenti z celého sveta. Naši najmä s rivalmi z Českej republiky, žiaľ aj tu sme ťahali za kratší povraz.

Olympiáda bola veľmi úspešná, prejavil sa obrovský kus práce, ktorú odviedli domáci. Pred organizátorov nasledujúcich ročníkov postavili vysokú latku. Budúcu MMO usporiada Tchaj-wan, nasledujú Rumunsko (jubilejný 40. ročník), Južná Kórea, USA, Japonsko a Filipíny.

Výsledky medzinárodnej matematickej olympiády

Krajina	Poč. žiakov	Body	1.cena	2.cena	3.cena	Poradie
Albánsko	3	15	0	0	0	71.–72.
Alžírsko	4	3	0	0	0	82.
Argentína	6	94	0	0	3	37.–38.
Arménsko	6	97	0	0	3	34.–35.
Austrália	6	187	2	3	1	9.
Azerbajdžan	6	56	0	0	1	55.
Bielorusko	6	140	0	2	4	17.
Belgicko	6	88	0	0	3	41.–42.
Bosna a Hercegovina	5	45	0	0	1	62.
Bolívia	3	13	0	0	0	74.
Brazília	6	117	0	1	4	26.
Bulharsko	6	191	2	3	1	7.–8.
Cyprus	3	5	0	0	0	80.
Česko	6	139	1	2	2	18.
Čína	6	223	6	0	0	1.
Dánsko	6	53	0	0	1	57.–59.
Estónsko	6	64	0	0	2	53.–54.
Filipíny	2	14	0	0	0	73.
Fínsko	6	97	0	0	4	34.–35.
Francúzsko	6	105	1	0	1	32.–33.
Grécko	6	75	0	1	0	45.
Gruzínsko	6	109	0	1	3	28.
Guatemala	6	7	0	0	0	79.
Holandsko	6	94	0	2	0	37.–38.
Hong Kong	6	106	0	0	5	30.–31.
Chile	6	28	0	0	0	66.
Chorvátsko	6	121	0	1	4	24.
India	6	146	0	3	3	15.
Indonézia	6	44	0	0	0	63.
Irán	6	217	4	2	0	3.
Island	6	48	0	1	0	60.–61.
Izrael	6	124	0	1	5	22.–23.
Írsko	6	21	0	0	0	68.
Japonsko	6	163	1	3	1	12.
JAR	6	93	1	0	2	39.
Juhoslávia	6	125	0	2	3	20.–21.

Krajina	Poč. žiakov	Body	1.cena	2.cena	3.cena	Poradie
Južná Kórea	6	164	1	4	1	11.
Kanada	6	107	0	2	2	29.
Kazachstan	6	73	0	0	1	46.–47.
Kirgistan	3	11	0	0	0	75.
Kolumbia	6	112	0	0	6	27.
Kuba	6	91	0	1	2	40.
Kuvajt	4	8	0	0	0	76.–78.
Litva	6	67	0	1	1	51.
Lotyšsko	6	124	0	1	4	22.–23.
Macao	6	55	0	0	0	56.
Macedónsko	6	73	0	0	3	46.–47.
Maďarsko	6	219	4	2	0	2.
Malajzia	6	19	0	0	0	69.–70.
Maroko	6	48	0	0	0	60.–61.
Mexiko	6	105	0	1	3	32.-33.
Moldavsko	3	53	0	0	2	57.–59.
Mongolsko	6	106	1	0	3	30.–31.
Nemecko	6	161	1	3	2	13.
Nový Zéland	6	71	0	0	2	48.–49.
Nórsko	6	79	0	0	3	44.
Paraguay	6	8	0	0	0	76.–78.
Peru	6	64	0	0	2	53.–54.
Poľsko	6	125	0	2	2	20.–21.
Portoriko	6	8	0	0	0	76.–78.
Portugalsko	6	15	0	0	0	71.–72.
Rakúsko	6	86	1	0	1	43.
Rumunsko	6	191	2	3	1	7.–8.
Rusko	6	202	3	2	1	4.–5.
Sigapúr	6	88	0	0	4	41.–42.
Slovensko	6	96	0	1	2	36.
Slovinsko	6	70	0	0	2	50.
Španielsko	6	39	0	0	0	64.
Švajčiarsko	5	53	0	0	2	57.–59.
Švédsko	6	128	1	0	3	19.
Taliansko	6	71	0	0	1	48.–49.

Krajina	Poč. žiakov	Body	1.cena	2.cena	3.cena	Poradie
Thajsko	6	66	0	0	1	52.
Tchaj-wan	6	148	0	4	2	14.
Trinidad a Tobago	6	30	0	0	0	65.
Turecko	6	119	0	1	4	25.
Ukrajina	6	195	3	3	0	6.
Uruguay	6	19	0	0	0	69.–70.
USA	6	202	2	4	0	4.–5.
Uzbekistan	3	23	0	0	0	67.
Veľká Británia	6	144	1	2	2	16.
Venezuela	3	4	0	0	0	81.
Vietnam	6	183	1	5	0	10.

Zadania úloh MMO

1. Body roviny s celočíselnými súradnicami sú vrcholmi jednotkových štvorcov. Tieto štvorce sú zafarbené striedavo čiernou a bielou farbou (ako na šachovnici). Pre ľubovoľnú dvojicu kladných celých čísel m a n uvažujme pravouhlý trojuholník, ktorého vrcholy majú celočíselné súradnice, a ktorého odvesny dĺžok m a n ležia pozdĺž strán štvorcov. Nech S_1 je celkový obsah čiernej časti trojuholníka a S_2 celkový obsah jeho bielej časti. Označme $f(m,n) = |S_1 - S_2|$.

a) Vypočítajte $f(m,n)$ pre všetky kladné celé čísla m a n, ktoré sú obe párne alebo obe nepárne.

b) Dokážte, že $f(m,n) \leqq \frac{1}{2}\max\{m,n\}$ pre všetky m a n.

c) Ukážte, že neexistuje žiadna konštanta C taká, že $f(m,n) < C$ pre všetky m a n.

2. Trojuholník ABC má najmenší uhol pri vrchole A. Body B a C rozdelia kružnicu trojuholníku opísanú na dva oblúky. Nech U je vnútorný bod oblúka medzi bodmi B a C, ktorý neobsahuje bod A. Osi úsečiek AB a AC pretínajú priamku AU po rade v bodoch V a W. Priamky BV a CW sa pretínajú v bode T. Dokážte, že $|AU| = |TB| + |TC|$.

3. Nech $x_1, x_2, \dots, x_n$ sú reálne čísla spĺňajúce podmienky:

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| = 1 \qquad \text{a} \qquad |x_i| \leqq \frac{n+1}{2} \qquad \text{pre} \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Dokážte, že existuje poradie $y_1, y_2, \dots, y_n$ čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ také, že

$$|y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n| \leqq \frac{n+1}{2}.$$

4. Matica $n \times n$ (štvorcová tabuľka s n riadkami a n stĺpcami), ktorej všetky prvky sú z množiny $S = \{1, 2, \dots, 2n-1\}$, sa volá *strieborná* matica, ak pre každé $i = 1, \dots, n$ jej i-ty riadok a i-ty stĺpec obsahujú dohromady všetky prvky S. Dokážte, že

a) neexistuje žiadna strieborná matica pre $n = 1997$;

b) strieborné matice existujú pre nekonečne veľa hodnôt n.

5. Nájdite všetky dvojice (a,b) celých čísel $a \geqq 1$, $b \geqq 1$, ktoré spĺňajú rovnicu

$$a^{b^2} = b^a.$$

6. Pre každé kladné celé číslo n označme $f(n)$ počet spôsobov vyjadrenia čísla n v tvare súčtu mocnín čísla 2 s nezápornými celými exponentami. Vyjadrenia, ktoré sa líšia iba poradím sčítancov, považujeme za rovnaké. Napríklad $f(4) = 4$, pretože číslo 4 môžeme vyjadriť nasledujúcimi štyrmi spôsobmi: 4; 2 + 2; 2 + 1 + 1; 1 + 1 + 1 + 1. Dokážte, že pre každé celé číslo $n \geqq 3$ platí

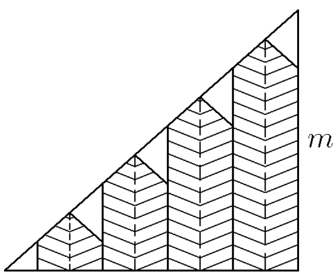
$$2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}.$$

Riešenia úloh MMO

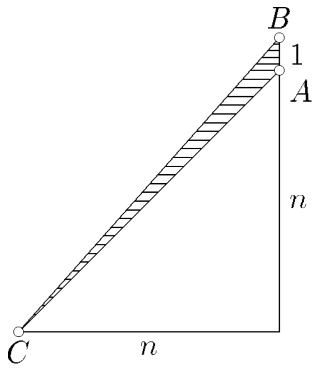
Úloha 1. *Riešenie podľa Vladimíra Marka.*

a) Doplňme daný trojuholník na obdĺžnik. Keďže m a n majú rovnakú paritu, zrejme aj políčko v ľavom hornom rohu má rovnakú farbu ako políčko v pravom dolnom rohu. Poľahky sa nahliadne, že aj celý vzniknutý obdĺžnik bude stredovo súmerný, vrátane ofarbenia (čierne políčko sa zobrazí na čierne a biele na biele). Potom však zrejme $f(m,n) = \frac{1}{2}|S_1' - S_2'|$, kde S_1' a S_2' sú po rade obsahy čiernej a bielej plochy v celom obdĺžniku. Preto

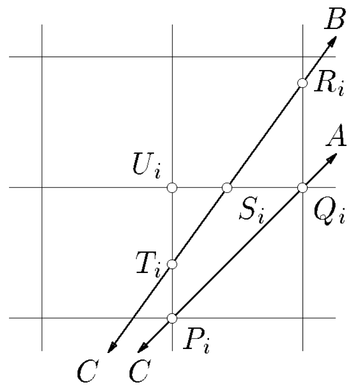
- $f(m,n) = 0$ ak $m \equiv n \equiv 0 \pmod 2$, lebo vtedy $S_1' = S_2'$;
- $f(m,n) = \frac{1}{2}$ ak $m \equiv n \equiv 1 \pmod 2$, lebo vtedy $|S_1' - S_2'| = 1$.



Obr. 31



Obr. 32



Obr. 33

b) Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $n \geqq m$. Rozdeľme trojuholník na pásy šírky dva kolmo na dlhšiu odvesnu tak, že začneme deliť od druhej odvesny (obr. 31). (Pre nepárne n zostane ešte zvyšok šírky 1.)

Vyšrafované časti v jednotlivých pásoch sú osovo súmerné, ale s opačným ofarbením. Preto rozdiel $|S_1 - S_2|$ nemôže prevýšiť súčet obsahov nevyšrafovaných častí. Každá z nich má zrejme obsah $\frac{m}{n}$. Pre párne n je pásov šírky dva spolu $\frac{n}{2}$ a žiaden zvyšok, čiže súčet obsahov nevyšrafovaných častí je spolu $\frac{n}{2} \cdot \frac{m}{n} = \frac{m}{2}$. Pre nepárne n je pásov šírky dva len $\frac{n-1}{2}$ a zvyšok má obsah $\frac{m}{2n}$. Preto je v tomto prípade súčet obsahov nevyšrafovaných častí $\frac{n-1}{2} \cdot \frac{m}{n} + \frac{m}{2n} = \frac{m}{2}$.

Z toho vyplýva, že $|S_1 - S_2| \leqq \frac{1}{2}m$, z čoho okamžite dostávame požadované tvrdenie $f(m,n) \leqq \frac{1}{2}\max\{m,n\}$. (Z dôkazu ľahko vyplýva, že dokonca $f(m,n) \leqq \frac{1}{2}\min\{m,n\}$.)

c) Položme $m = n+1$ pre ľubovoľné kladné párne n. V časti a) sme ukázali, že $f(n,n) = 0$. Preto $f(m,n)$ možno vypočítať ako $|S_1' - S_2'|$, kde S_1' a S_2' sú po rade obsahy čiernej a bielej plochy vo vyšrafovanom trojuholníku, ktorý vznikne z pôvodného pravouhlého trojuholníka s odvesnami n a $n+1$ odobraním pravouhlého rovnoramenného trojuholníka s odvesnami n (obr. 32). Situácia v i-tom stĺpci zľava je podrobnejšie nakreslená na obr. 33. Zrejme platí

$$|T_iU_i| = \frac{n+1-i}{n}, \quad |S_iU_i| = \frac{n+1-i}{n+1}, \quad |S_iQ_i| = \frac{i}{n+1}, \quad |R_iQ_i| = \frac{i}{n}.$$

Potom

$$f(m,n) = \left|\sum_{i=1}^{n}(S_{\triangle P_iQ_iU_i} - S_{\triangle S_iT_iU_i} - S_{\triangle S_iR_iQ_i})\right|.$$

Všetky tieto obsahy možno ľahko spočítať. Po dosadení a úpravách

$$f(m,n) = \left|\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{n+1-i}{n+1}\cdot\frac{n+1-i}{n} - \frac{1}{2}\frac{i}{n+1}\frac{i}{n}\right)\right| =$$
$$= \left|\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(n+1-i)^2}{n(n+1)} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n(n+1)}\right|.$$

Ak v prvej sume zavedieme substitúciu $j = n+1-i$, zistíme, že

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(n+1-i)^2}{n(n+1)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n(n+1)},$$

teda

$$f(m,n) = \left|\frac{1}{2}n - \sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n(n+1)}\right| = \left|\frac{1}{2}n - \frac{1}{n(n+1)}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right| = \frac{n-1}{6}.$$

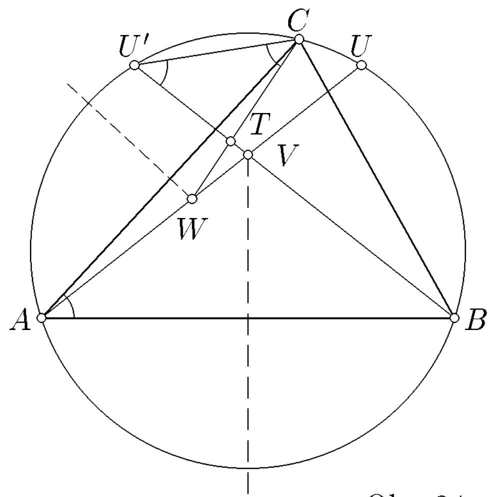
Preto zrejme pre rastúce párne n rastie hodnota $f(n+1,n)$ nad všetky medze.

Úloha 2.

Označme U' obraz bodu U v osovej súmernosti podľa osi strany AB (obr. 34). Zrejme aj bod U' leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC a $|AU| = |BU'|$, teda stačí dokázať, že $|TC| = |TU'|$, t.j. že trojuholník $U'TC$ je rovnoramenný so základňou $U'C$.

Označme $|\sphericalangle CAB| = \alpha$ a $|\sphericalangle BAU| = \varphi$. Z vety o obvodovom uhle platí $|\sphericalangle CU'T| = \alpha$. Z rovnoramenného trojuholníka ABV dostávame $|\sphericalangle AVB| = \pi - 2|\sphericalangle VAB| = \pi - 2\varphi$.

Podobne z trojuholníka ACW máme $|\sphericalangle AWC| = \pi - |\sphericalangle CAW| = \pi - 2\alpha + 2\varphi$. Potom pre uhly trojuholníka VWT platí $|\sphericalangle WVT| = \pi - |\sphericalangle AVB| = 2\varphi$, $|\sphericalangle VWT| = \pi - |\sphericalangle AWC| = 2\alpha - 2\varphi$ a napokon $|\sphericalangle WTV| = \pi - |\sphericalangle TWV| - |\sphericalangle TVW| = \pi - 2\alpha$. Preto $|\sphericalangle U'TC| = \pi - 2\alpha$. Potom ale v trojuholníku $U'CT$ platí $|\sphericalangle U'CT| = \pi - |\sphericalangle CU'T| - |\sphericalangle U'TC| = \alpha$, čiže je naozaj rovnoramenný.



Obr. 34

V prípade, že uhol α je ostrý, možno previesť všetky spomínané úvahy.

Úloha 3. *Riešenie podľa Vladimíra Marka.*

Bez ujmy na všeobecnosti nech $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ (pre $\sum_{i=1}^{n} x_i = -1$ stačí všetky x_i prenásobiť číslom -1 a úloha sa pretransformuje na pôvodnú so súčtom 1). Teraz určme „priemernú" hodnotu S_p súčtu $\sum_{i=1}^{n} iy_i$, kde $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ je ľubovoľná permutácia $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, t.j. $y \in \pi(x)$ – spočítame súčet týchto hodnôt pre všetky možné permutácie a predelíme túto hodnotu ich počtom (zrejme $n!$).

$$S_p = \frac{\sum\limits_{y\in\pi(x)} \sum\limits_{i=1}^{n} iy_i}{n!}.$$

Keďže každé x_i sa vyskytne na konkrétnej j-tej pozícii práve $(n-1)!$-krát, preto

$$S_p = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(n-1)!jx_i}{n!} = \frac{\binom{n+1}{2}(n-1)!\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n!} = \frac{n+1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{n+1}{2}.$$

Z toho vyplýva, že buď sú všetky súčty $\sum_{i=1}^{n} iy_i$ rovné $\dfrac{n+1}{2}$, alebo existujú zároveň súčty väčšie aj menšie ako $\frac{n+1}{2}$. Aby sme dokázali tvrdenie zo zadania, potrebujeme dokázať, že existuje taká permutácia y, pre ktorú $\sum_{i=1}^{n} iy_i$ je z intervalu $\langle -\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2} \rangle$. V prvom prípade (ak sú všetky tieto súčty rovné $\frac{n+1}{2}$) je to zrejmé, skúmajme preto druhú možnosť (existujú väčšie aj menšie). Uvažujme teraz takú permutáciu y, že $S_0 = \sum_{i=1}^{n} iy_i > \frac{n+1}{2}$ a druhú permutáciu z takú, že $S_2 = \sum_{i=1}^{n} iz_i < \frac{n+1}{2}$. Je zrejmé, že z permutácie y sa dá dostať k permutácii z postupnou výmenou susedných čísel v permutáciách. Pri takejto výmene $(y_1, \dots, y_{k-1}, y_k, y_{k+1}, \dots, y_n)$ na $(y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, y_k, \dots, y_n)$ sa súčet S_0 zmení na S_1 takto:

$$\begin{aligned} S_1 &= y_1 + \ldots + (k-1)y_{k-1} + ky_{k+1} + (k+1)y_k + (k+2)y_{k+2} + \ldots + ny_n = \\ &= S_0 + y_k - y_{k+1}. \end{aligned}$$

Vzhľadom na to, že $|y_k| \leqq \frac{n+1}{2}$ a $|y_{k+1}| \leqq \frac{n+1}{2}$, je výraz $|y_k - y_{k+1}| \leqq n+1$. Preto sa počas popísanej výmeny zmení súčet S_0 nanajvýš o $n+1$. Toto platí pre každú výmenu v prechode od permutácie y k permutácii z. Teda ak sa má zmeniť hodnota tohto súčtu z $S_0 > \frac{n+1}{2}$ na $S_2 < \frac{n+1}{2}$, musí sa tento súčet dostať aspoň raz do intervalu $\langle -\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2} \rangle$. V tej chvíli však aktuálna permutácia spĺňa podmienku zo zadania úlohy, čím je tvrdenie dokázané.

Úloha 4.

a) Tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladajme, že pre prirodzené číslo n, $n > 1$ existuje *strieborná* matica A typu $n \times n$. Nech x je pevne zvolený prvok z množiny $\{1, 2, \dots, 2n-1\}$ ktorý neleží na uhlopriečke A (zrejme taký existuje). Zjednotenie i-teho stĺpca a i-teho riadku budeme ďalej nazývať i-ty kríž. Prvok x sa musí nachádzať v každom takomto kríži práve raz. Ak x je v A v i-tom riadku a j-tom stĺpci, potom A patrí aj i-temu aj j-temu krížu, t.j. jeden výskyt čísla x v A zabezpečuje jeho účasť v dvoch krížoch. Keďže však $n = 1997$ je nepárne číslo, muselo by sa x v A nachádzať práve $\frac{1997}{2}$-krát, čo však samozrejme nie je možné.

b) Popíšeme rekurentný postup na nájdenie *striebornej* matice typu $2n \times 2n$. Pre $n = 1$ nech

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Táto matica je zrejme *strieborná*. Pre $n = 4$ ich je niekoľko, napríklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 7 & 5 \\ 4 & 6 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nech teraz A je *strieborná* matica typu $n \times n$. Potom skonštruujme *striebornú* maticu typu $2n \times 2n$ nasledujúcim spôsobom:

$$D = \begin{pmatrix} A & U \\ V & A \end{pmatrix},$$

kde U je matica typu $n \times n$, ktorá vznikne z A pripočítaním $2n$ ku každému jej prvku a V je matica, ktorá vznikne z U nahradením každého jej diagonálneho prvku číslom $2n$. Dokážeme, že aj matica D je *strieborná*. Uvažujme i-ty kríž v matici D. Nech $i \leqq n$, opačný prípad sa preverí analogicky. Tento kríž sa skladá z i-teho kríža A, i-teho riadku U a i-teho stĺpca V. Ale i-ty kríž A obsahuje (na základe predpokladu o A) čísla $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ a i-ty riadok U spolu s i-tym stĺpcom V spolu obsahujú vďaka našej konštrukcii čísla $\{2n, 2n+1, \ldots, 4n+1\}$. Tým je tvrdenie dokázané.

Úloha 5. *Riešenie podľa Miroslava Dudíka.*

Pre $a = 1$ máme $1^{b^2} = b^1$, teda $b = 1$. Pre $b = 1$ podobne $a^{1^2} = 1^a$, čiže $a = 1$. Preto môžeme ďalej predpokladať, že $a > 1$ a $b > 1$. V prvočíselných rozkladoch a a b sa zrejme budú nachádzať rovnaké prvočinitele. Nech teda

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}, \qquad b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n}.$$

Podľa zadania má platiť

$$p_1^{\alpha_1 \cdot b^2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n \cdot b^2} = a^{b^2} = b^a = p_1^{\beta_1 \cdot a} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n \cdot a}.$$

Preto musí pre každé $i = 1, 2, \ldots, n$ platiť

$$a \cdot \beta_i = \alpha_i \cdot b^2,$$

čiže pomer $\dfrac{\beta_i}{\alpha_i}$ je konštantný a rovný racionálnemu číslu k,

$$k = \frac{\beta_i}{\alpha_i} = \frac{b^2}{a} = p_1^{2\beta_1 - \alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{2\beta_n - \alpha_n}. \tag{1}$$

Teda $\alpha_i \cdot k = \beta_i$, preto $2\beta_i - \alpha_i = \alpha_i \cdot (2k-1)$, pre $i = 1, \ldots, n$. Preto

$$k = p_1^{\alpha_1 \cdot (2k-1)} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n \cdot (2k-1)} = a^{2k-1}. \tag{2}$$

Všetky tieto exponenty ($\alpha_i \cdot (2k-1)$) sú celé čísla, a keďže všetky α_i sú kladné, ich znamienko závisí len od znamienka $2k-1$. Rozoberieme niekoľko prípadov.

- Ak $2k-1=0$, tak potom z (2) vyplýva $k=a^0=1$, čo zrejme nemôže nastať.
- Ak $2k-1>0$, tak rozdiely $2\beta_i-\alpha_i$ sú kladné celé čísla, preto je na základe (1) číslo k kladné celé číslo. Z (2) potom pre $k=1$ dostávame neprípustné $a=1$, pre $k>1$ však platí $a^{2k-1} \geqq a^k > k$ (pre $a \geqq 2$). Preto také riešenie neexistuje.
- Ak $2k-1<0$, tak rozdiely $2\beta_i-\alpha_i$ sú záporné celé čísla, preto je na základe (1) číslo k prevrátenou hodnotou kladného celého čísla. Nech teda $q=\frac{1}{k}$. Ďalej z rovnosti $\alpha_i \cdot k = \beta_i$ vyplýva $a=b^q$. Potom daná rovnica prejde do tvaru $b^{q\cdot b^2} = b^{b^q}$, teda $q\cdot b^2 = b^q$, čiže $b^{q-2}=q$. Pre $q=1$ dostávame neprípustné $b=1$, pre $q=2$ dostávame $2=b^0=1$, čo nedáva žiadne riešenie. Pre $q=3$ dostávame $3=b^1$, dopočítame $a=27$, pre $q=4$ dostávame $4=b^2$, teda $b=2$, dopočítame $a=16$. Pre $q>4$ a $b\geqq 2$ je $b^{q-2} \geqq 2^{q-2} > q$ (posledná nerovnosť pre $q=5$ platí a pre ďalšie q sa jednoducho dokáže matematickou indukciou).

Všetky riešenia danej rovnice sú $a=b=1$, $a=27, b=3$ a $a=16, b=2$.

Úloha 6.

Ak $n=2k+1$ je ľubovoľné nepárne celé číslo väčšie ako 1, potom každá reprezentácia čísla n v danom tvare má aspoň jednu „1“ (2^0) ako jeden zo sčítancov. Jej vynechaním dostaneme vyjadrenie čísla $2k$. Naopak jej pridaním dostaneme z každej reprezentácie čísla $2k$ reprezentáciu čísla $2k+1$, teda zrejme pre každé prirodzené k platí

$$f(2k+1)=f(2k). \tag{1}$$

Ďalej, ak $n=2k$ je ľubovoľné prirodzené číslo, tak každé vyjadrenie čísla n v zadanom tvare je jedného z nasledujúcich typov: buď obsahuje aspoň jednu „1“ v svojom zápise, alebo nie. V prvom prípade zmazaním jednej z nich dostaneme vyjadrenie čísla $2k-1$, a teda počet týchto vyjadrení je práve $f(2k-1)$. V druhom prípade (žiaden sčítanec nie je rovný „1“) môžeme všetky sčítance predeliť dvomi a dostaneme tak každé vyjadrenie čísla k zadaným spôsobom. Týchto vyjadrení je preto práve $f(k)$. Tieto úvahy vedú k rekurentnému vzorcu

$$f(2k)=f(2k-1)+f(k). \tag{2}$$

Oba tieto vzorce platia pre všetky prirodzené k. Keďže môžeme dodefinovať $f(0)=1$ a $f(1)=1$, vzorce (1) a (2) jednoznačne určujú hodnoty funkcie f. Navyše je z ich tvaru vidieť, že funkcia f je neklesajúca. Spojením (1) a (2) dostávame

$$f(2k)-f(2k-2)=f(k) \qquad \text{pre } k=1,2,3,\dots.$$

Sčítaním týchto rovníc pre $k=1,2,\dots,n$ dostávame

$$f(2n)=f(0)+f(1)+\dots+f(n) \qquad \text{pre } n=1,2,3,\dots. \tag{3}$$

Teraz najprv dokážeme horný odhad zo zadania. V (3) sú všetky sčítance menšie alebo rovné ako posledný z nich. Keďže $2 = f(2) \leqq f(n)$, pre $n \geqq 2$, dostávame pre každé $n \geqq 2$

$$\begin{aligned} f(2n) &= 2 + (f(2) + \ldots + f(n)) \leqq 2 + (n-1)f(n) \leqq \\ &\leqq f(n) + (n-1)f(n) = nf(n) \end{aligned}$$

Preto

$$\begin{aligned} f(2^n) &\leqq 2^{n-1} f(2^{n-1}) \leqq 2^{n-1} \cdot 2^{n-2} \cdot f(2^{n-2}) \leqq \\ &\leqq 2^{n-1} \cdot 2^{n-2} \cdot 2^{n-3} \cdot f(2^{n-3}) \leqq \\ &\leqq \ldots \leqq 2^{(n-1)+(n-2)+\ldots+1} \cdot f(2) = 2^{n(n-1)/2} \cdot 2. \end{aligned}$$

Keďže však očividne $2^{n(n-1)/2} \cdot 2 < 2^{n^2/2}$ pre $n \geqq 3$, horný odhad je dokázaný.

Pri dôkaze dolného odhadu najprv dokážeme, že platí

$$f(b+1) - f(b) \geqq f(a+1) - f(a) \tag{4}$$

pre $a \geqq b \geqq 0$ prirodzené čísla rovnakej parity. Totiž, ak a aj b sú obe párne, potom z (1) vyplýva, že na oboch stranách (4) sú nuly. Ak a aj b sú obe nepárne, potom z (2) dostávame: $f(b+1) - f(b) = f(\frac{b+1}{2})$ a $f(a+1) - f(a) = f(\frac{a+1}{2})$ a potom nerovnosť (4) platí, lebo f je neklesajúca.

Uvažujme prirodzené čísla $r \geqq k \geqq 1$, r párne, a nahraďme v (4) čísla a a b výrazmi $a = r - j$ a $b = r + j$ pre $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Sčítaním takto získaných nerovností dostávame nerovnosť:

$$f(r+k) - f(r) \geqq f(r+1) - f(r-k+1).$$

Keďže r je párne, platí $f(r+1) = f(r)$, a teda

$$f(r+k) + f(r-k+1) \geqq 2f(r) \qquad \text{pre } k = 1, \ldots, r.$$

Sčítaním týchto nerovností pre $k = 1, \ldots, r$ dostaneme

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(2r) \geqq 2rf(r).$$

Z (3) vyplýva, že ľavá strana poslednej nerovnice je rovná $f(4r) - 1$, preto

$$f(4r) \geqq 2rf(r) + 1 > 2rf(r)$$

pre každé prirodzené číslo r, $r \geqq 2$. Ak položíme $r = 2^{m-2}$ máme

$$f(2^m) > 2^{m-1} f(2^{m-2}). \tag{5}$$

Aby $r = 2^{m-2}$ bolo párne, predpokladajme, že $m > 2$, avšak (5) zrejme platí aj pre $m = 2$.

Napokon nech $n \geqq 1$. Ak l je prirodzené číslo, pre ktoré platí $2l \leqq n$, potom použitím (5) pre $m = n, n-1, \dots, n-2l+2$ dostaneme

$$\begin{aligned} f(2^n) &> 2^{n-1} \cdot f(2^{n-2}) > 2^{n-1} \cdot 2^{n-3} \cdot f(2^{n-4}) > \\ &> \dots > 2^{(n-1)+(n-3)+\dots+(n-2l+1)} \cdot f(2^{n-2l}) = 2^{j(n-l)} \cdot f(2^{n-2l}). \end{aligned}$$

Teraz ak n je párne, voľme $l = \frac{n}{2}$; ak n je nepárne voľme $l = \frac{n-1}{2}$. Získane nerovnosti majú tvar:

$$\begin{aligned} f(2^n) &> 2^{n^2/4} \cdot f(2^0) = 2^{n^2/4} && \text{pre } n \text{ párne,} \\ f(2^n) &> 2^{(n^2-1)/4} \cdot f(2^1) = 2^{(n^2-1)/4} \cdot 2 > 2^{n^2/4} && \text{pre } n \text{ nepárne.} \end{aligned}$$

Týmto sme dokázali dolný odhad pre $n > 2$ (pre $n = 1$ triviálne platí).

Obsah

PRVÝ DIEL

RNDr. Karel Horák, CSc. – Richard Kollár
Jana Višňovská – Tomáš Vinař
Bronislava Brejová – Úlohová komisia MO

**Štyridsiatyšiesty ročník
matematickej olympiády
na stredných školách
1. diel**

Vydala IUVENTA v roku 1998
Sadzbu programom $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX pripravili RNDr. Karel Horák, CSc. a Richard Kollár
Grafická úprava obálky Karel Horák a Richard Kollár
Neprešlo jazykovou úpravou
1.vydanie

ISBN 80–88893–18–6

46. ROČNÍK
MATEMATICKEJ
OLYMPIÁDY
NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH
2. diel

Správa o riešení úloh zo súťaže konanej v školskom roku 1996/1997

38. MEDZINÁRODNÁ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA
9. MEDZINÁRODNÁ OLYMPIÁDA V INFORMATIKE

IUVENTA

S pomocou spolupracovníkov spracovali
RNDr. Karel Horák, CSc.,
Richard Kollár, Jana Višňovská,
Tomáš Vinař, Bronislava Brejová a členovia Úlohovej komisie MO.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

ISBN 80–88893–19–4

Zadania súťažných úloh

Kategória P

P – I – 1

Napíšte a odlaďte program na riešenie hry „15“! V tejto hre je v štvorcovej tabuľke 4×4 uložených 15 štvorcových kamienkov označených číslami $1, 2, \ldots, 15$, jedno políčko je prázdne. *Povoleným krokom* je presunutie kamienka na susedné prázdne políčko. Povolený krok je jednoznačne určený poradovým číslom políčka, na ktorom stál presúvaný kamienok pred krokom. Políčka majú poradové čísla 1 až 16, pričom číslujeme po riadkoch od ľavého horného rohu. V znázornenom príklade sa zo situácie A dostaneme do situácie B krokom 6.

7	12	9	3
14	15		10
1	8	13	5
11	6	2	4

situácia A

7	12	9	3
14		15	10
1	8	13	5
11	6	2	4

situácia B

Úloha. Na začiatku hry sú kamienky rozložené náhodne. Účelom hry je povolenými krokmi dosiahnuť *koncovú situáciu* K, v ktorej sú kamienky usporiadané vzostupne podľa čísel a prázdne políčko je v pravom dolnom rohu:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Vstup. Váš program by mal
– zo súboru „`P-I-1.INP`“ načítať počiatočnú situáciu ako postupnosť čísel kamienkov oddelených medzerami (pričom napríklad situáciu A popisuje vstupná postupnosť „`7 12 9 3 14 15 0 10 1 8 13 5 11 6 2 4`“, kde znak 0 označuje prázdne políčko).

Výstup.
– ak koncová situácia je povolenými krokmi nedosiahnuteľná, do súboru „`P-I-1.OUT`“ vypísať správu „`Nema riesenie`“;
– ak koncová situácia je povolenými krokmi dosiahnuteľná:
  – do súboru „`P-I-1.OUT`“ vypísať (akúkoľvek) postupnosť povolených krokov, ktoré vedú ku koncovej situácii K;

– znázorniť postupnosť krokov vedúcu ku koncovej situácii pomocou semigrafiky alebo v grafickom režime. Toto znázornenie by malo byť interaktívne krokovateľné, napríklad po každom stlačení medzerníka by sa mal na obrazovke vykonať jeden krok postupnosti.

P – I – 2

Hovoríme, že množina bodov M v rovine je *schodovitá*, ak pre každú dvojicu (x_1, y_1), (x_2, y_2) jej bodov platí

$$x_1 \neq x_2, \quad \text{pričom ak} \quad x_1 < x_2\,, \quad \text{potom} \quad y_1 > y_2.$$

To znamená, že ak body množiny M usporiadame podľa prvej súradnice, dostaneme „klesajúcu postupnosť druhých súradníc“.

Hovoríme, že dve neprázdne disjunktné množiny bodov A, B v rovine sú *separovateľné* (oddeliteľné), ak existuje priamka, ktorá rozdelí rovinu na dve polroviny tak, že sa v každej polrovine nachádzajú len body jednej z týchto množín, pričom separujúca priamka môže obsahovať body nanajvýš z jednej z nich.

Úloha. Sú zadané dve neprázdne disjunktné schodovité množiny bodov A a B. Vytvorte (čo najefektívnejší) algoritmus a napíšte program, ktorý zistí, či množiny bodov A, B sú separovateľné, a ak sú separovateľné, nájde separujúcu priamku.

Vstup. Vstupný súbor „`P-I-2.INP`“ obsahuje riadok s dvoma celými kladnými číslami m a n určujúcimi po rade počty prvkov množín A a B. Potom nasleduje m riadkov, z ktorých každý obsahuje dve reálne čísla – súradnice bodov množiny A a n riadkov rovnakého formátu obsahujúcich súradnice bodov množiny B. Zoznamy bodov A aj B sú usporiadané vzostupne podľa hodnôt prvej súradnice. Môžete predpokladať, že vstup je zadaný korektne.

Výstup. Výstupom programu (zápis do súboru „`P-I-2.OUT`“) je riadok obsahujúci tri reálne čísla a, b a c oddelené medzerami, ktoré sú koeficientmi všeobecnej rovnice niektorej separujúcej priamky $ax + by + c = 0$. Ak separujúca priamka neexistuje, výstupom je trojica čísel „`0 0 0`“.

P – I – 3

Orient-expres prechádza n ($n < 100$) rôznymi štátmi (očíslujeme ich od 1 po n). Každý štát má svoju vlastnú menu (tiež ich očíslujeme: štát k nech má menu k) a tieto meny sú medzi sebou voľne zameniteľné. V štáte k môžeme nakupovať iné meny, ale len za menu k. Cestujeme zo štátu i do štátu j ($i < j$), potrebujeme teda nakúpiť menu j. Kladné reálne číslo $K_{(i,j)}$ určuje, koľko jednotiek meny j dostaneme pri priamej výmene za jednu jednotku meny i. Niekedy sú ale výhodnejšie nepriame obchody: zameniť menu i za l a potom menu l za j ($i < l < j$), príp. i za l, l za m a m za j ($i < l < m < j$) a podobne.

Predpokladajme napríklad, že cestujeme zo štátu 1 do 3 a meny štátov 1, 2 a 3 sú vony, tugriky a dongy. Ak za 1 von dostaneme 1,50 tugrikov alebo 1,25 dongov a za 1 tugrik dostaneme 0,90 dongov, je výhodnejšie zameniť vony najprv za tugriky a potom za dongy (za sto vonov takto dostaneme 135 dongov namiesto 125 dongov, ktoré možno získať priamou výmenou).

Úloha. Napíšte a odlaďte program, ktorý po načítaní tabuľky výmenných kurzov K dokáže odpovedať na otázky typu „aký je najvýhodnejší (priamy alebo nepriamy) výmenný kurz pri ceste zo štátu i do štátu j?“.

Vstup. Vstupom programu (v súbore „`P-I-3.INP`“) je

- kladné celé číslo n ($n < 100$) – počet štátov,
- $\frac{n(n-1)}{2}$ kladných reálnych čísel – výmenné kurzy:

$$\begin{array}{ccccc} K_{(1,2)} & K_{(1,3)} & K_{(1,4)} & \cdots & K_{(1,n)} \\ & K_{(2,3)} & K_{(2,4)} & \cdots & K_{(2,n)} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & K_{(n-1,n)} \end{array}$$

- kladné celé číslo p – počet vstupných dvojíc („otázok“), ktoré budú nasledovať,
- p dvojíc celých čísel i, j ($1 \leqq i < j \leqq n$) – počiatočné a koncové štáty ciest.

Výstup. Výstupom programu (súbor „`P-I-3.OUT`“) bude p kladných reálnych čísel: najvýhodnejšie výmenné kurzy pre jednotlivé cesty. Reálne čísla stačí vypisovať s presnosťou na dve desatinné miesta.

Príklad vstupu a zodpovedajúceho výstupu:

```
P-I-3.INP: 4 1.50 1.25 2.20 0.90 1.30 1.55 3 1 2 1 3 1 4
P-I-3.OUT: 1.50 1.35 2.20
```

P – I – 4

Učebný text.

Kombinačný obvod pozostáva zo *vstupov obvodu* (označených $I1$, $I2$, …, In), z *hradiel* (označených $H1$, $H2$, …, Hk) a z *výstupov obvodu* (označených $O1$, $O2$, …, Om). Každé hradlo má jeden alebo viac vstupov označených x_1, x_2, …, x_p a jeden výstup označený z. Každý vstup hradla Hi je napojený buď na niektorý vstup obvodu alebo na výstup niektorého iného hradla Hj, $j < i$. Každý výstup obvodu Oi je napojený na výstup niektorého hradla.

Vstupy a výstupy obvodu, ako aj vstupy a výstupy hradiel môžu byť v logických stavoch 0 (false) a 1 (true). Výpočet obvodu je taktovaný: ak vstupy hradla H sú v čase t v logických stavoch $x_1[t]$, $x_2[t]$, …, $x_p[t]$ výstup H bude v čase $t+1$ v logickom stave $z[t+1]$ určenom vstupmi a typom hradla. Ak je na tento výstup napojený napríklad vstup x' hradla H', bude v čase $t+1$ vstup x' v logickom stave $z[t+1]$ – t.j. logický stav sa po spojniciach šíri bez zdržania.

Budeme používať tri typy hradiel: NAND, NOR (v úlohe P-I-4 s dvoma, v úlohách P-II-4 a P-III-3 s viacerými vstupmi) a NOT (s jedným vstupom). Závislosť výstupu týchto troch typov hradiel na vstupoch popisujú nasledujúce tabuľky (uvádzame príklady hradiel NAND a NOR s dvoma a troma vstupmi):

$x_1[t]$	$x_2[t]$	$z[t+1]$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NAND

$x_1[t]$	$z[t+1]$
0	1
1	0

NOT

$x_1[t]$	$x_2[t]$	$z[t+1]$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

NOR

$x_1[t]$	$x_2[t]$	$x_3[t]$	$z[t+1]$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

NAND

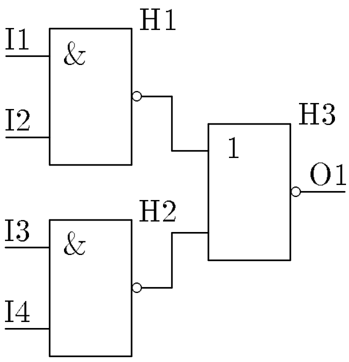
$x_1[t]$	$x_2[t]$	$x_3[t]$	$z[t+1]$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

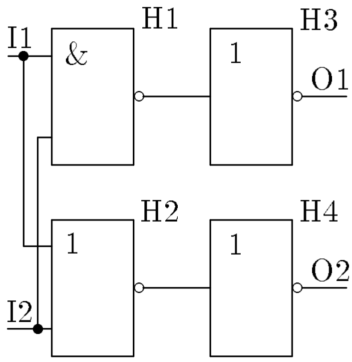
NOR

To znamená, že hradlo typu NAND má výstupnú hodnotu 0 práve vtedy, ak všetky jeho vstupy majú hodnotu 1. Hradlo typu NOR má výstupnú hodnotu 1 práve vtedy, ak všetky jeho vstupy majú hodnotu 0.

Vstupom výpočtu je n-tica logických stavov vstupov obvodu $I1$, $I2$, ..., In. Logický stav vstupov obvodu sa počas výpočtu nemení. Hradlá postupne reagujú na logické stavy svojich vstupov a menia stavy svojich výstupov. Samozrejme, ak sa v čase t ustália (t.j. ďalej sa nemenia) logické stavy vstupov hradla, od času $t+1$ sa ustáli aj jeho výstup. Po konečnom čase sa ustália aj logické stavy výstupov obvodu. Výsledkom výpočtu je m-tica logických stavov výstupov obvodu $O1$, $O2$, ..., Om.

V prípade obvodu na obrázku vľavo (hradlá $H1$, $H2$ typu NAND sú označené &, hradlo $H3$ typu NOR je označené 1, logické stavy vstupov obvodu sú $0, 1, 1, 1$) bude od času $t = 1$ logický stav výstupu $H1$ rovný 1 a logický stav výstupu $H2$ rovný 0. Od času $t = 2$ bude logický stav výstupu hradla $H3$ rovný 0, čo je aj výsledkom výpočtu.





V obvode vpravo vystupujú aj hradlá $H3$, $H4$ typu NOT (sú označené 1, rovnako ako NOR – majú ale len jeden vstup). Po dvoch taktoch (v čase $t = 2$) sa výstupy obvodu ustália a výsledkom bude „utriedený vstup“: na $O1$ bude menší a na $O2$ väčší z logických stavov vstupov obvodu. Chovanie tohto obvodu by sme mohli popísať tabuľkou:

I1	I2	O1	O2
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Súťažné úlohy.

Vstup. Napíšte program, ktorý zo vstupného súboru načíta
- tri čísla – počet vstupov obvodu (n), počet hradiel (k) a počet výstupov obvodu (m),
- popis kombinačného obvodu vo vhodnom formáte, ktorý sami navrhnete,
- číslo p udávajúce počet vstupných n-tíc núl a jednotiek,
- p vstupných n-tíc núl a jednotiek – vstupy kombinačného obvodu.

Výstup. Do výstupného súboru potom vypíše
- p výstupných m-tíc núl a jednotiek – výsledky výpočtu obvodu so zadanými vstupnými n-ticami.

Úloha. Navrhnite kombinačný obvod s dvoma vstupmi ($I1 = x$, $I2 = y$) a dvoma výstupmi ($O1 = c$, $O2 = s$) tak, aby realizoval sčítanie dvoch jednobitových čísel: $2 \cdot c + s = x + y$. To znamená, že výstup s bude obsahovať paritu súčtu a výstup c bude obsahovať prenos (carry). Obvod nakreslite a popíšte aj vo vstupnom formáte pre váš program.

P – II – 1

Hrací plán pozostáva z $2n$ políčok umiestnených v jednom rade vedľa seba ($n \geqq 3$). Na každom políčku sa nachádza modrý alebo červený kamienok, celkový počet modrých a červených kamienkov je rovnaký (n).

Cieľom hry je usporiadať kamienky: v ľavej polovici hracieho plánu majú byť červené, v pravej polovici modré kamienky. Povolenou operáciou v hre je obrátenie poradia troch alebo štyroch susedných kamienkov, t.j. zmena $abc \to cba$, resp. $abcd \to dcba$, kde abc ($abcd$) sú susedné kamienky na hracom pláne. Operáciu môžeme jednoznačne určiť pomocou dvoch čísel: pozície p najľavejšieho políčka meneného úseku a dĺžky l meneného úseku ($1 \leqq p \leqq 2n - l + 1$, $l = 3, 4$). Riešením hry je postupnosť dvojíc (p, l), ktorá počiatočnú situáciu prevedie na usporiadanú.

Vstup. Napíšte program, ktorý načíta zo vstupného súboru `P-II-1.INP`
- číslo n ($3 \leqq n \leqq 1000$) – počet modrých resp. červených kamienkov (v prvom riadku súboru);
- počiatočnú situáciu – postupnosť $2n$ znakov m (reprezentuje modrý kamienok) a c (červený kamienok) v druhom riadku súboru.

Výstup. Do výstupného súboru `P-II-1.OUT` potom vypíše postupnosť dvojíc čísel $p\ l$ (krokov riešenia v tvare popísanom vyššie; každú dvojicu na samostatný riadok) ukončenú riadkom obsahujúcim dve nuly. Vypísaná postupnosť predstavuje riešenie zadanej hry.

Poznámky: Uvedomte si, že každá počiatočná situácia je riešiteľná. Váš program nemusí nájsť optimálne riešenie (tzn. dĺžka vygenerovanej postupnosti nemusí byť najmenšia možná), snažte sa však nájsť efektívny algoritmus.

P – II – 2

Nech A je postupnosť bodov $A[1], A[2], \dots, A[n]$ ($n \geqq 1$), kde bod $A[i]$ má celočíselné súradnice $(A[i].x, A[i].y)$. Takáto postupnosť sa nazýva *schodovitá*, ak pre každé i menšie ako n platí:

$$\begin{aligned} A[i].x &< A[i+1].x, \qquad & A[i+1].x - A[i].x &\leqq 2, \\ A[i+1].y &< A[i].y, \qquad & A[i].y - A[i+1].y &\leqq 2 \end{aligned}$$

a vzdialenosť medzi bodmi $A[i+1]$ a $A[i]$ je menšia ako $2\sqrt{2}$.

Robot sa môže pohybovať po ceste určenej bodmi schodovitej postupnosti, pričom táto cesta začína v bode $A[1]$, pokračuje cez body $A[2], \dots, A[n-1]$ a končí v bode $A[n]$, pričom medzi každými dvoma bodmi postupnosti sa robot pohybuje po úsečke.

Z cesty robota možno odstrániť úsečku $A[i-1]A[i]$ tak, že body $A[i]$ až $A[n]$ posunieme tak, aby sa bod $A[i]$ dostal do bodu $A[i-1]$ (všetky body posúvame o rovnakú vzdialenosť v x-ovom aj y-ovom smere). Bod $A[i-1]$ potom vylúčime z postupnosti. Všimnite si, že vzniknutá postupnosť je takisto schodovitá, pričom počet bodov sa zmenšil o jedna.

Úloha. Dané sú dve schodovité postupnosti A ($|A| = n$) a B ($|B| = m$). Robot R_A sa pohybuje po ceste určenej postupnosťou A a robot R_B po ceste určenej postupnosťou B.

Nájdite čo najefektívnejší algoritmus, ktorý určí najmenšie počty úsečiek, ktoré je potrebné odstrániť z ciest robotov R_A, R_B tak, aby sa oba roboty (za predpokladu, že sa zo svojich počiatočných bodov začnú pohybovať naraz rovnakou rýchlosťou) pohybovali súbežne (t.j. ich vzájomná poloha je stále rovnaká) a skončili v tom istom čase v poslednom bode príslušne upravených schodovitých postupností.

P – II – 3

Orient-expres prechádza n ($n < 100$) rôznymi štátmi. Budeme používať označenie a pravidlá pre nákup mien v jednotlivých štátoch zavedené v úlohe P-I-3 (*pozri na strane 2*).

Niektoré zo štátov sa rozhodli podporovať turizmus (samozrejme nie svojich vlastných občanov), a preto cestujúceho, ktorý vystúpi z Orient-expresu, aby si vymenil peniaze, na niekoľko dní zdržia. Nezáporné celé číslo $T[i]$ určuje, koľko dní musí stráviť turista v štáte i, ak si tam vymenil peniaze (náklady na pobyt v ďalšom neuvažujeme a pre jednoduchosť budeme predpokladať, že cestujúci na medzistaniciach vystupujú len za účelom výmeny peňazí). Po uplynutí $T[i]$ dní pokračuje cestujúci v ceste (Orient-expres jazdí denne). Žiadny cestujúci nie je ochotný obetovať viac než určitý počet dní (nanajvýš 10) na „turistický pobyt“ na medzistaniciach.

Predpokladajme napríklad, že cestujeme zo štátu 1 do 3 a meny štátov 1, 2 a 3 sú vony, tugriky a dongy. Ak za 1 von dostaneme 1,50 tugrikov alebo 1,25 dongov a za 1 tugrik dostaneme 0,90 dongov, je výhodnejšie zameniť vony najprv za tugriky a potom za dongy (za sto vonov takto dostaneme 135 dongov namiesto 125 dongov získateľných priamou výmenou). Ak ovšem $T[2]$ je 5 a môžeme si dovoliť zdržanie nanajvýš tri dni, druhá možnosť neprichádza do úvahy (všimnite si, že $T[1]$ a $T[3]$ nehrá v tejto úvahe žiadnu úlohu).

Úloha. Napíšte program, ktorý po načítaní tabuľky výmenných kurzov K a tabuľky zdržaní T dokáže odpovedať na otázky typu „aký je najvýhodnejší (priamy alebo nepriamy) výmenný kurz pri ceste zo štátu i do štátu j, ak sme ochotní stráviť nanajvýš k dní turistikou?“.

Vstup. Vstupom programu (v súbore `P-II-3.INP`) je

- kladné celé číslo n ($n < 100$) – počet štátov;
- $\frac{n(n-1)}{2}$ kladných reálnych čísel – výmenné kurzy

$$\begin{array}{ccccc} K_{(1,2)} & K_{(1,3)} & K_{(1,4)} & \dots & K_{(1,n)} \\ & K_{(2,3)} & K_{(2,4)} & \dots & K_{(2,n)} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & K_{(n-1,n)} \end{array}$$

- n nezáporných celých čísel – zdržania $T[1], T[2], \dots, T[n]$;
- kladné celé číslo p – počet vstupných trojíc („otázok“), ktoré budú nasledovať;
- p trojíc celých čísel i, j, k ($1 \leqq i < j \leqq n, k \leqq 10$) – počiatočné a koncové štáty ciest a maximálne zdržania.

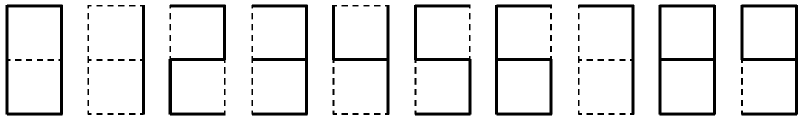
Výstup. Výstupom programu (v súbore `P-II-3.OUT`) bude p kladných reálnych čísiel: najvýhodnejšie výmenné kurzy pre jednotlivé cesty. Reálne čísla stačí vypisovať s presnosťou na dve miesta za desatinnou bodkou.

Poznámka: Pri riešení nemusíte brať ohľad na obmedzenie veľkostí polí dané niektorými prekladačmi programovacích jazykov.

P – II – 4

Zadanie tejto úlohy vychádza zo študijného textu zaradeného pred úlohou P-I-4, pozri na strane 3 . Hradlá typu NAND *a* NOR *môžu mať ale tentokrát (narozdiel od úlohy P-I-4) viac než dva vstupy – bližšie pozri spomínaný študijný text.*

Úloha. Vašou úlohou je navrhnúť a popísať kombinačný obvod so 4 vstupmi a 7 výstupmi na ovládanie LED-displeja pre znázornenie čísiel 0 až 9:



Vstupy obvodu označíme x_0, x_1, x_2, x_3 a výstupy y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6. Vstupy obvodu budeme interpretovať ako binárny zápis čísiel 0 až 9 (x_3 je najvýznamnejší bit):

x_3	x_2	x_1	x_0	význam
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	0	0	1	9

Binárne zápisy čísiel väčších ako 9 nás nebudú zaujímať a výstupy obvodu pre tieto vstupy môžu byť ľubovoľné.

Výstupy obvodu zodpovedajú segmentom displeja, kde

y_0 ovláda horný vodorovný segment,
y_1 ovláda ľavý horný zvislý segment,
y_2 ovláda pravý horný zvislý segment,
y_3 ovláda stredný vodorovný segment,
y_4 ovláda ľavý dolný zvislý segment,
y_5 ovláda pravý dolný zvislý segment,
y_6 ovláda dolný vodorovný segment.

Presné chovanie obvodu môžeme popísať tabuľkou, kde 0 znamená „nesvieti“, 1 „svieti“ a ? je „ľubovoľná hodnota“ (0 alebo 1).

$x_3x_2x_1x_0$	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
0000	1	1	1	0	1	1	1
0001	0	0	1	0	0	1	0
0010	1	0	1	1	1	0	1
0011	1	0	1	1	0	1	1
0100	0	1	1	1	0	1	0
0101	1	1	0	1	0	1	1
0110	1	1	0	1	1	1	1
0111	1	0	1	0	0	1	0
1000	1	1	1	1	1	1	1
1001	1	1	1	1	0	1	1
iné	?	?	?	?	?	?	?

Obvod môžete popísať ľubovoľným spôsobom, ktorý jednoznačne určí hradlá obvodu: ich typ (vstup x_i, NAND, NOR, NOT, výstup y_i) a napojenie ich vstupov (napríklad obrázok).

P – III – 1

Sú dané súradnice n modrých a n červených bodov v rovine. Žiadne tri z týchto bodov neležia na jednej priamke a všetky sú navzájom rôzne.

Úloha. Napíšte čo najefektívnejší algoritmus, ktorý nájde n úsečiek takých, že každá z nich má jeden koncový bod v červenom bode a druhý v modrom bode a žiadne dve úsečky nemajú ani jeden spoločný bod. V prípade, že riešenie neexistuje, algoritmus o tom vypíše vhodnú správu.

P – III – 2

Nech A je postupnosť bodov $A[1], A[2], \dots , A[n]$ $(n \geqq 1)$, kde bod $A[i]$ má celočíselné súradnice $(A[i].x, A[i].y)$. Takáto postupnosť sa nazýva *schodovitá*, ak pre každé i menšie ako n platí:

$$\begin{aligned} A[i].x &< A[i+1].x, \qquad & A[i+1].x - A[i].x &\leqq 2, \\ A[i+1].y &< A[i].y, & A[i].y - A[i+1].y &\leqq 2 \end{aligned}$$

a vzdialenosť medzi bodmi $A[i+1]$ a $A[i]$ je menšia ako $2\sqrt{2}$.

Daný je počiatočný bod S s celočíselnými súradnicami $(S.x, S.y)$ a koncový bod K so súradnicami $(K.x, K.y)$.

Úloha. Napíšte čo najefektívnejší algoritmus, ktorý určí schodovitú postupnosť s najmenším možným počtom bodov takú, že jej prvým bodom bude S a posledným bodom K. (Ak teda postupnosť bude mať n bodov, potom $A[1] = S$ a $A[n] = K$.) V prípade, že takáto postupnosť neexistuje, algoritmus o tom vypíše vhodnú správu. Dôležitou súčasťou riešenia je **dôkaz**, že množina, ktorú nájde váš algoritmus, má skutočne najmenší možný počet bodov.

P – III – 3

Zadanie tejto úlohy vychádza zo študijného textu zaradeného pred úlohou P-I-4, strana 3 . Hradlá typu NAND *a* NOR *môžu mať ale tentokrát (narozdiel od úlohy P-I-4) viac než dva vstupy – bližšie pozri spomínaný študijný text.*

Úloha. Vašou úlohou je navrhnúť a popísať kombinačné obvody s 8 vstupmi x_1, x_2, $\dots$, x_8 a jedným výstupom pre nasledujúce funkcie:

- `parita` – výstupná hodnota je 1 práve vtedy, ak medzi vstupnými hodnotami je párny počet jedničiek,
- `majorita` – výstupná hodnota je 1 práve vtedy, ak medzi vstupnými hodnotami je aspoň 5 jedničiek,
- `aspoň2` – výstupná hodnota je 1 práve vtedy, ak medzi vstupnými hodnotami sú aspoň 2 jedničky.

P – III – 4

Hrací plán je pás políčok očíslovaných zľava doprava číslami $0, 1, 2$, atď. Na niektorých políčkach hracieho plánu je umiestnený kamienok, celkový počet kamienkov je od 1 po 4. *Poradové číslo* kamienka je počet kamienkov, ktoré ležia na pláne naľavo od neho. Prvý kamienok zľava má teda poradové číslo 0 a posledný $k-1$. Každú situáciu hry možno popísať počtom kamienkov a číslami políčok, na ktorých sú jednotlivé kamienky umiestnené. Môžete predpokladať, že žiaden kamienok nebude na políčku s číslom väčším ako $2^{31}-1$. *Koncová situácia* je situácia, v ktorej sa kamienky nachádzajú na políčkach $0, 1, \dots k-1$.

Hru hrajú dvaja hráči, ktorí striedavo ťahajú kamienkami. V jednom ťahu je povolené posunúť jeden z kamienkov o ľubovoľný počet políčok pri dodržaní nasledujúcich podmienok:

- kamienky sa posúvajú doľava,
- na každom políčku je vždy nanajvýš jeden kamienok,
- počet kamienkov, ktoré sú naľavo od posúvaného kamienka sa posunutím nezmení.

V koncovej situácii teda nie je možné spraviť ďalší ťah a hra končí. Vyhráva hráč, ktorý urobil posledný krok. Môžete predpokladať, že na začiatku hra nie je v koncovej situácii.

Úloha. Napíšte program (ďalej označovaný ako *hráč*), ktorý bude hrať túto hru, a to vždy ako začínajúci hráč (prvý na ťahu). Druhého hráča bude zastupovať knižnica popísaná nižšie (ďalej označovaná ako *protivník*), ktorú použijete vo vašom programe. Vašou úlohou bude napísať program, ktorý čo najúspešnejšie hrá proti ľubovoľnému protihráčovi (t.j. proti každej knižnici spĺňajúcej uvedený popis).

Knižnice sú uložené v súboroch `HRA_C.LIB` (pre C/C++) prípadne `HRA_P.TPU` (pre PASCAL). Knižnica obsahuje niekoľko funkcií, resp. procedúr s nasledujúcimi hlavičkami:

```
/* C/C++ */
#ifdef __cplusplus
extern "C" {
#endif
#define MAXKAM 4
typedef long THraciPlan[MAXKAM];

void inicializuj(int* pocetKamienkov, THraciPlan hraciPlan);
void mojKrok(int kamienok, long dlzkaKroku);
void tvojKrok(int* kamienok, long* dlzkaKroku);
#ifdef __cplusplus
}
#endif
```

```
{Pascal}
interface
  const MAXKAM = 4;
  type THraciPlan = array[0..MAXKAM-1] of longint;
```

```
procedure inicializuj(var pocetKamienkov : integer;
                      var hraciPlan : THraciPlan);
procedure mojKrok(kamienok: integer; dlzkaKroku : longint);
procedure tvojKrok(var kamienok: integer;
                   var dlzkaKroku : longint);
```

Funkcia `inicializuj` inicializuje hru a vráti počiatočnú situáciu hry. V parametri `pocetKamienkov` vráti počet kamienkov na hracom pláne a v poli `hraciPlan` vráti pozície kamienkov, pričom `hraciPlan[i]` je pozícia kamienka s poradovým číslom i, pre $i = 0, 1, \ldots, \texttt{pocetKamienkov} - 1$, hodnoty ostatných prvkov poľa sú nedefinované.

Pomocou funkcie `mojKrok` oznamujete protihráčovi svoj krok. V parametri `kamienok` odovzdávate poradové číslo posúvaného kamienka a v parametri `dlzkaKroku` počet políčok, o ktorý posúvate zvolený kamienok.

Pomocou funkcie `tvojKrok` získate naopak súperov ťah, pričom význam argumentov je taký istý ako vo funkcii `mojKrok`.

Váš program na začiatku svojho behu zavolá funkciu `inicializacia` a potom striedavo volá funkcie `mojKrok` a `tvojKrok`, pričom začína funkciou `mojKrok`. Môžete predpokladať, že protivník hrá korektne. Ak hráč spraví víťazný ťah, t.j. ťah, po ktorom nastane koncová situácia, funkcia `mojKrok` ukončí program. Ak naopak protivník svojim nasledujúcim ťahom zvíťazí, funkcia `tvojKrok` ukončí program.

Ak váš program nedodrží opísané poradie volania procedúr alebo zadá nepovolený krok ako argument funkcie `mojKrok`, váš program prehráva. Takisto je zakázané ukončiť program pred koncom hry.

Poznámky:
- Na skúšku máte k dispozícii jedného protihráča. Tento protihráč načítava počiatočnú pozíciu zo súboru `HRA.IN` (tento súbor obsahuje počet kamienkov a ich pozície).
- Váš program môže byť testovaný aj s inými protihráčmi.

P – III – 5

V starovekom meste Kuru archoelógovia objavili zvláštny trezor. Pozostával zo štyroch dverí. Dvere sa museli otvoriť v správnom poradí, lebo inak celú miestnosť zaliala voda. Na každých dverách bolo vytesané nejaké zviera. Na stene archeológovia rozlúštili text, ktorého preklad do slovenčiny znie:

Ako prvé otvor dvere, na ktorých je buď lev alebo orol.
Ako druhé otvor dvere, na ktorých je buď had alebo škorpión.
Ako tretie otvor dvere, na ktorých je buď orol alebo had.
Ako druhé otvor dvere, na ktorých je buď lev alebo had.

Ak predpokladáme, že všetky tieto tvrdenia sú pravdivé, môžeme určiť poradie otvárania dverí. Z druhého a štvrtého tvrdenia vyplýva, že ako druhé treba otvoriť dvere, na ktorých je had. Z tretieho tvrdenia a z faktu, že had je na druhých dverách, vyplýva, že orol je na tretích dverách. Z prvého tvrdenia a z faktu, že orol je na tretích dverách vyplýva, že lev je na prvých dverách. Pre škorpióna ostali štvrté dvere.

Úloha. Napíšte čo najefektívnejší program, ktorý bude riešiť takýto typ hlavolamov. Je daný počet dverí n ($1 \leqq n \leqq 1\,000$). Na každých dverách je vytesané iné zviera, pričom tieto zvieratá označíme číslami od 1 po n. Ďalej je dané číslo m ($1 \leqq m \leqq 1\,000$) a m tvrdení, pričom každé tvrdenie môže byť jedného z dvoch tvarov:

- „Ako i-te treba otvoriť dvere, na ktorých je zviera j", kde $1 \leqq i, j \leqq n$. Toto tvrdenie budeme kódovať trojicou čísel `1 i j`.
- „Ako i-te treba otvoriť dvere, na ktorých je buď zviera j alebo zviera k", kde $1 \leqq i, j, k \leqq n$, $j \neq k$. Toto tvrdenie budeme kódovať štvoricou čísel `2 i j k`.

Riešenie hlavolamu je také poradie otvárania dverí, v ktorom sa každé dvere vyskytujú práve raz, a ktoré spĺňa všetky zadané tvrdenia.

Vstup. Vstupný súbor obsahuje niekoľko hlavolamov. Prvý riadok súboru obsahuje počet hlavolamov v súbore. Pre každý hlavolam vstupný súbor obsahuje blok údajov. V prvom riadku bloku sa nachádzajú čísla n a m. Každý z ďalších m riadkov obsahuje kód jedného tvrdenia. Jednotlivé bloky údajov sú oddelené vždy jedným prázdnym riadkom.

Výstup. Pre každý hlavolam vypíšte do výstupného súboru jeden riadok, ktorý bude obsahovať:

– text „`Neexistuje riesenie`", ak hlavolam nemá ani jedno riešenie,
– text „`Viacero rieseni`", ak hlavolam má viac ako jedno riešenie,
– riešenie hlavolamu (t.j. čísla zvierat vytesaných na dverách v takom poradí ako treba dvere otvárať; za sebou idúce čísla oddeľte práve jednou medzerou), ak hlavolam má práve jedno riešenie.

Riešenia súťažných úloh

Kategória P

P – I – 1

Najprv sa pokúsime odpovedať na otázku, kedy úloha nemá riešenie. Po získaní určitých praktických skúseností s hrou zistíme, že každú počiatočnú situáciu S dokážeme previesť na situáciu $K = 1, 2, \ldots, 13, 14, 15, 0$ alebo $N = 1, 2, \ldots, 13, 15, 14, 0$, kde 0 predstavuje prázdne políčko. Po ďalších skúsenostiach získame presvedčenie (podporené aj prvým príkladom v zadaní úlohy), že situácia N je neriešiteľná. To ale znamená tiež neriešiteľnosť počiatočnej situácie S. Inak by sme N vyriešili prevodom na S („spätným chodom“ – zopakovaním prevodu S na N v opačnom poradí) a následným prevodom S na K. Ak teda budeme mať algoritmus, ktorý ľubovoľnú počiatočnú situáciu S prevedie buď na K, alebo na N, budeme vedieť rozhodnúť o riešiteľnosti S – stačí sa pozrieť, či sme skončili v K alebo v N.

Riešiteľné a neriešiteľné situácie sa dokonca dajú matematicky charakterizovať. Táto charakterizácia nám poskytne dôkaz neriešiteľnosti N, a tým dá úvahám v predchádzajúcom odstavci pevný základ.

Zavedieme najprv pojem *počet inverzií danej situácie S*. Vypíšeme si čísla kamienkov S za sebou, ale vynecháme 0 (prázdne políčko). Pre situáciu A uvedenú v zadaní by sme dostali postupnosť 7, 12, 9, 3, 14, 15, 10, 1, 8, 13, 5, 11, 6, 2, 4. Inverzia je taká dvojica (i, j) členov tejto postupnosti, že i predchádza v postupnosti j, a pritom $i > j$. Napríklad 12 a 9 tvorí inverziu v postupnosti A, ktorá má spolu

$$6 + 10 + 7 + 2 + 9 + 9 + 6 + 0 + 4 + 5 + 2 + 3 + 2 + 0 + 0 = 65 \quad \text{inverzií.}$$

Ďalším číslom, ktoré nás bude zaujímať, je číslo riadku (1 až 4), v ktorom sa nachádza prázdne políčko (pre A je to 2). *Charakteristikou $C(A)$ situácie A* nazveme súčet týchto dvoch čísel (počtu inverzií a čísla riadku prázdneho políčka). Všimnite si, že $C(A) = 65 + 2 = 67$, $C(K) = 0 + 4 = 4$ a $C(N) = 1 + 4 = 5$. Čo sa stane s charakteristikou, keď prejdeme povoleným krokom zo situácie S do S'? Rozlíšime dva prípady:

- krok vodorovným smerom (doľava alebo doprava): ani jeden zo sčítancov sa nezmení, teda $C(S) = C(S')$.
- krok zvislým smerom (hore alebo dole): číslo riadku sa zmení o 1. Počet inverzií sa zmení o 1 alebo o 3 (dokážte!).

Celkovo teda $C(S)$ patrí do rovnakej zvyškovej triedy po delení dvoma ako $C(S')$. Inými slovami povedané, parita charakteristiky sa povolenými krokmi nezmení. Ak má začiatočná situácia nepárnu charakteristiku, určite sa nedá previesť na koncovú situáciu K, a preto je neriešiteľná. Neriešiteľná je teda aj situácia N, rovnako ako všetky situácie, ktoré sa na ňu dajú previesť postupnosťou povolených krokov.

Teraz uvedieme algoritmus, ktorý ľubovoľnú počiatočnú situáciu prevedie buď na K, alebo na N – presnejšie na neriešiteľnú situáciu

$$N' = (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,15,13,14,12,0), \qquad C(N') = 5+4 = 9\,.$$

Myšlienka algoritmu je jednoduchá: postupne dostaneme na svoje miesto kamienky 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 13, 10, 14, 11 a 0 (prázdne políčko na pozíciu 16). Pokiaľ je po skončení kamienok 15 na svojom mieste, je aj 12 v poriadku a máme K, inak sme dospeli k N'. Pre každý kamienok (napr. k), ktorý chceme takto dostať na miesto, definujeme *cyklus* – cyklickú postupnosť susedných pozícií obsahujúcu
– cieľovú pozíciu pre kamienok k
– pozíciu, na ktorej kamienok k práve leží
– prázdnu pozíciu.
Kamienky budeme presúvať po tomto cykle, dokiaľ sa kamienok nedostane na svoje miesto (toto ešte upresníme neskôr). Môžeme dokonca predpísať, kde má skončiť prázdne políčko. Budeme posúvať kamienky po cykle (určenom kamienkom *Ktorý*) tak, že sa *Ktorý* dostane na pozíciu *Kam* a pozícia *NP* (Nechaj Prázdnu) ostane prázdna. Cykly zásadne obchádzajú pozície, ktorým už algoritmus pridelil správny kamienok. Jednotlivé cykly vyzerajú nasledovne (uvádzame ich v smere putovania prázdneho políčka):

Ktorý	**Kam**	**NP**	**cyklus**	**dĺžka**
1	1	2	1,2,3,4,8,12,16,15,11,7,6,10,14,13,9,5,1	16
2	2	3	2,3,7,8,12,16,15,11,10,14,13,9,5,6,2	14
3	3	8	3,4,8,12,16,15,11,10,14,13,9,5,6,7,3	14
4	8	12	5,6,7,8,12,16,15,11,10,14,13,9,5	12
5	5	6	5,6,7,8,12,16,15,11,10,14,13,9,5	12
6	6	7	6,7,11,12,16,15,14,13,9,10,6	10
7	7	12	7,8,12,16,15,14,13,9,10,11,7	10
8	12	16	9,10,11,12,16,15,14,13,9	8
9	9	14	9,13,14,15,16,12,11,10,9	8
13	14	15	10,11,12,16,15,14,10	6
10	10	15	10,14,15,16,12,11,10	6
14	15	16	11,15,16,12,11	4
11	11	16	11,12,16,15,11	4

Musíme ešte vysvetliť dva problematické body.

- Potom, čo sme dostali kamienok 1 na pozíciu 1 (a pozícia 2 je prázdna), môže sa stať, že kamienok 2 je na pozícii 4, teda mimo druhý cyklus. To vyriešime uplatnením krokov 3, 4, 8 (kamienok 2 sa ocitne na pozícii 3 a pozícia 8 ostane prázdna). Obdobný problém je aj s kamienkom 6.
- Druhý problém sa týka umiestenia „rohových“ kamienkov 4, 8, 13 a 14 – práve pre ne je *Ktorý* $\neq$ *Kam* v tabuľke. Keď už sme umiestnili kamienky 1, 2 a 3, žiadny cyklus

obchádzajúci pozície 1, 2 a 3 neprechádza pozíciou 4. Preto kamienok 4 neumiestňujeme na pozíciu 4 priamo (pokiaľ, samozrejme, ešte na nej neleží), ale pozíciu 8 a pozíciu 12 necháme prázdnu – pozri cyklus pre kamienok 4. Potom mechanicky uplatníme postupnosť jedenástich krokov získanú skúšaním, ktorá dostane 4 na svoje miesto, pričom dočasne premiestni aj kamienok 3. Podobne postupujeme v prípade 8, 13 a 14.

Program najprv vypočíta postupnosť krokov vedúcu na K (príp. N'), uloží ju do poľa a overí, či je počiatočná situácia riešiteľná. Ak áno, obnoví vopred uloženú počiatočnú situáciu a predvedie (krokovaním po opakovanom stlačení klávesu) nájdené riešenie.

Na dokončenie popisu algoritmu ešte potrebujeme odhadnúť počet krokov riešenia, aby sme mohli nadefinovať pole na uloženie jednotlivých krokov nájdeného riešenia. Pozrime sa najprv na prevádzanie jedného cyklu dĺžky d. Rozmiestnenie kamienkov v tomto cykle sa behom prevádzania mení, ale všetkých možných rozmiestnení je $d(d-1)$, lebo rozmiestnenie je určené polohou kamienka *Ktorý* a polohou prázdneho políčka. To znamená, že pri prevádzaní cyklu sa vykoná nanajvýš $d(d-1)$ krokov. Z tabuľky teda určíme, že celkový počet krokov uložených do poľa je

$$16 \cdot 15 + 2 \cdot 14 \cdot 13 + 2 \cdot 12 \cdot 11 + 2 \cdot 10 \cdot 9 + 2 \cdot 8 \cdot 7 + 2 \cdot 6 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 3 = 1\,254\,.$$

K tomuto číslu ešte musíme pripočítať korekciu pre kamienky 2 a 6 (spolu 6 krokov) a 4 ošetrenia rohových kamienkov po jedenástich krokoch (spolu 44 krokov), čo spolu dáva 1 304 krokov.

P – I – 2

Nech $A[1], A[2], \ldots, A[m]$ sú body prvej množiny, $B[1], B[2], \ldots, B[n]$ sú body druhej množiny, $m, n \geqq 1$. Na súradnice bodov týchto množín sa budeme odvolávať pomocou bodkovej notácie, t.j. $A[k].x$ je x-ová súradnica a $A[k].y$ je y-ová súradnica bodu $A[k]$.

Pokiaľ $m = 1$ a zároveň $n = 1$, rozlíšime dva prípady:

- body $A[1]$ a $B[1]$ sú totožné, teda množiny nie sú separovateľné,
- body $A[1]$ a $B[1]$ sú rôzne, potom množiny sú separovateľné, napríklad priamku kolmú na úsečku $A[1]B[1]$ a prechádzajúcu stredom tejto úsečky.

Bez ujmy na všeobecnosti ďalej predpokladajme, že $m > 1$ (inak je možné množiny preznačiť). Základné myšlienky postupu riešenia zhrnieme v nasledujúcich krokoch:

- Vytvoríme konvexný obal množiny A. Vďaka špeciálnemu tvaru množiny je to jednoduchšie ako vo všeobecnom prípade. Táto časť algoritmu vyžaduje lineárny čas vzhľadom na počet bodov množiny A, t.j. $O(m)$.
- Zistíme polohu bodu $B[1]$ voči konvexnému obalu množiny A. Ak bod $B[1]$ leží v konvexnom obale množiny A, potom množiny A a B nie sú separovateľné. Pokiaľ bod $B[1]$ neleží vnútri konvexného obalu množiny A, potom už poznáme jeden bod množiny B, ktorý neleží vnútri. Zároveň určíme polohu bodu $B[1]$ vzhľadom k priamke určenej bodmi $A[1]$ a $A[m]$. Pokiaľ bod $B[1]$ leží v kladnej polrovine, potom v prípade, že množiny sú separovateľné, očakávame všetky body množiny B v tejto

polrovine, inak analogicky uvažujeme o zápornej polrovine. Táto časť algoritmu vyžaduje lineárny čas vzhľadom na počet bodov množiny A, t.j. $O(m)$.

- Tento a ďalšie kroky prevádzame len keď bod $B[1]$ neleží v konvexnom obale množiny A. Vytvoríme konvexný obal množiny B. Tento krok algoritmu vyžaduje lineárny čas vzhľadom k počtu bodov množiny B, t.j. $O(n)$.
- Pokiaľ $B[1]$ leží v kladnej polrovine určenej priamkou $A[1]A[m]$, potom uvažujeme hornú časť konvexného obalu množiny A a dolnú časť konvexného obalu množiny B, inak analogicky naopak. Ak uvedené dvojice mnohouholníkov majú spoločný bod, potom množiny A a B nie sú separovateľné, inak sú separovateľné. Táto časť algoritmu vyžaduje lineárny čas vzhľadom k počtu vrcholov v oboch mnohouholníkoch, t.j. $O(m+n)$. Jedným prechodom takto vzniknutej postupnosti bodov zistíme možné priesečníky úsečiek (vďaka usporiadaniu bodov podľa x-ových súradníc).
- Predpokladajme naďalej, že $B[1]$ leží v kladnej polrovine určenej priamkou $A[1]A[m]$. Ak sú množiny separovateľné, potom podľa vyššie uvedených predpokladov očakávame, že množina B bude celá v kladnej polrovine a množina A v zápornej polrovine hľadanej priamky p. Zvoľme priamku $p: ax+by+c=0$ kolmú na priamku určenú bodmi $A[1]$ a $B[1]$. Zrejme platí, že body $A[1]$ a $B[1]$ sú separované správne. Ďalšie kroky budú spočívať vo vhodnej adaptácii tejto priamky. Prechodom všetkými bodmi oboch množín (stačia len body odpovedajúcich častí konvexného obalu) dostaneme správne nastavenú priamku. Ak je ďalší skúmaný bod zaradený správne, nič sa nedeje. Ak je bod v nesprávnej polrovine, je potrebné upraviť polohu priamky. To možno previesť pomocou nasledujúceho pravidla: Nech bod C je zaradený nesprávne, potom

$$\begin{aligned} da &:= 2*eta*k*C.x, \\ db &:= 2*eta*k*C.y, \\ dc &:= 2*eta*k, \end{aligned}$$

  kde $k=1$ pre body množiny B, $k=-1$ pre body množiny A, eta je konštanta, $0<eta<1$. Nová rovnica priamky má potom tvar

$$(a+da)x+(b+db)y+(c+dc)=0\,.$$

  Tento krok vyžaduje lineárny čas vzhľadom na počet bodov oboch množín, teda $O(m+n)$.

P – I – 3

Zo zadania úlohy je zrejmé, že bude vhodné spočítať si najlepšie „nepriame“ výmenné kurzy dopredu (fáza predspracovania – zložitosť závisí od N, ale nie od P). Program potom môže ľahko odpovedať na otázky (zložitosť závisí od P, ale nie od N). Zavedieme preto (trojuholníkovú) tabuľku najlepších nepriamych výmenných kurzov $T[I,J]$ $(1 \leqq I < J \leqq N)$, ktorá bude výsledkom predspracovania. Najprv popíšeme, čo vlastne znamená, že „najlepší nepriamy výmenný kurz medzi menami I a J je $T[I,J]$“

a pokúsime sa nájsť vzťahy medzi prvkami $T[I,J]$ našej tabuľky, ktoré nám umožnia vytvoriť algoritmus.

Výmenou budeme nazývať postupnosť $V = (I_0, I_1, \ldots, I_h)$ mien s vlastnosťou $I_0 < I_1 < \ldots < I_h$, $h \geqq 1$. Táto výmena realizuje (nepriamy) prevod meny I_0 na menu I_h prostredníctvom mien $I_1, \ldots, I_{h-1}$ (pre $h = 1$ máme samozrejme priamy prevod). Za jednu jednotku meny I_0 dostaneme po výmene V zrejme

$$K[I_0, I_1] \cdot K[I_1, I_2] \cdot \ldots \cdot K[I_{h-1}, I_h]$$

jednotiek meny I_h – nazvime toto číslo *hodnotou* $H(V)$ *výmeny* V.

Najlepší výmenný kurz $T[I,J]$ medzi menami I a J teraz môžeme popísať ako maximálnu hodnotu spomedzi hodnôt všetkých výmen realizujúcich prevod meny I na menu J:

$$T[I,J] = \max\{H(V);\ V = (I_0, I_1, \ldots, I_h),\ I = I_0,\ J = I_h\}\,.$$

Základným pozorovaním pre riešenie úlohy je nasledujúce tvrdenie (princíp optimality podvýmen): Ak nejaká výmena realizuje najlepší výmenný kurz (nepriamy prevod) medzi menami I a J a v tejto výmene bola použitá mena M ($I < M < J$), potom výmena I na M, resp. M na J, musela byť tiež optimálna – použitím lepšej výmeny by sme vylepšili aj výmenu I na J. Formálne zapísané teda platí:

Nech výmena $V = (I, \ldots, M, \ldots, J)$ má optimálnu hodnotu $H(V) = T[I,J]$. Označme si $V_1 = (I, \ldots, M)$, $V_2 = (M, \ldots, J)$. Potom $T[I,M] = H(V_1)$ a $T[M,J] = H(V_2)$, čiže tieto „podvýmeny“ sú optimálne a samozrejme $H(V) = H(V_1) \cdot H(V_2)$.

Myšlienka algoritmu by teraz už mala byť jasná – budeme určovať najlepšie výmenné kurzy medzi menami I a J postupne pre $J - I = 1, 2, 3, \ldots, N-1$. Hodnoty pre $J - I = 1$ sú samozrejme priame kurzy $K[I,J]$. Keď už poznáme hodnoty $T[I,J]$ pre $J - I < Q$, určíme $T[I,J]$ pre $J - I = Q$ ako minimálnu hodnotu spomedzi hodnôt

$$\begin{gathered} K[I,J], \quad T[I,I+1] \cdot T[I+1,J], \\ T[I,I+2] \cdot T[I+2,J], \quad \ldots, \quad T[I,J-1] \cdot T[J-1,J]\,. \end{gathered}$$

Správnosť tohoto postupu zaručuje princíp matematickej indukcie a vyššie uvedený princíp optimality podvýmen.

Program môžeme vylepšiť ešte tým, že miesto dvoch tabuliek K a T budeme používať len jednu – dvojrozmerné pole *Kurzy*. V tomto poli budú na začiatku zapísané hodnoty z tabuľky K a postupne ich budeme nahradzovať vypočítanými hodnotami z tabuľky T. Prvky T počítame po uhlopriečkach v tomto poradí:

$$\begin{array}{llll} T[1,2], & T[2,3], & \ldots, & T[N-1,N], \\ T[1,3], & T[2,4], & \ldots, & T[N-2,N], \\ T[1,4], & T[2,5], & \ldots, & T[N-3,N], \\ & & \ldots, & T[1,N]. \end{array}$$

Pri výpočte hodnoty $T[I,J]$, ktorá sa potom uloží do $Kurzy[I,J]$, použijeme hodnoty $T[I,M]$ a $T[M,J]$, uložené v poli $Kurzy[I,M]$, resp. $Kurzy[M,J]$ a hodnotu $K[I,J]$ uloženú v $Kurzy[I,J]$.

P – I – 4

Táto úloha nie je algoritmicky príliš náročná. Stačí si uvedomiť, že potrebujeme len vypočítať hodnoty výstupov hradiel H_1 až H_k (tie už jednoznačne určujú hodnoty výstupov obvodu) a na to stačí jediný „prechod“ usporiadanou množinou hradiel $H_1, H_2, \ldots, H_k$, lebo hodnota výstupu hradla závisí len od hodnôt vstupov obvodu príp. od hodnôt výstupov hradiel s menším poradovým číslom. Presnejšie:

- hodnotu výstupu hradla H_i, $(1 \leqq i \leqq k)$ určuje typ hradla (NAND, NOR, NOT) a dvojice hodnôt jeho vstupov. Každý vstup hradla H_i je pritom buď vstupom obvodu $(I_1, I_2, \ldots, I_n)$, alebo výstupom hradla H_j, $j < i$.
- hodnota výstupu obvodu O_i, $(1 \leqq i \leqq m)$ sa rovná buď hodnote niektorého vstupu obvodu $(I_1, I_2, \ldots, I_n)$, alebo hodnote výstupu niektorého hradla $(H_1, H_2, \ldots, H_k)$.

Zložitosť algoritmu je zrejme lineárna vzhľadom na $n + k + m$.

Zaujímavejšia je otázka vnútornej reprezentácie obvodu a formátu textového popisu obvodu. Pekné (ale pre dané účely zbytočne komplikované) riešenie by sme mohli zapísať objektovými jazykovými prostriedkami. Uvedieme tu jednoduchšie riešenie v jazyku Turbo Pascal, ktoré objektové rysy jazyka nepoužíva.

Vnútorná reprezentácia obvodu:

Jednotlivé hradlá budeme reprezentovať záznamom, celý obvod bude uložený ako pole týchto záznamov. Záznam typu *Hradlo* obsahuje typ hradla (okrem NAND, NOR a NOT tiež „falošné“ hradlá typu IN a OUT – vstupy a výstupy obvodu), indexy *Vstup*1, *Vstup*2 do poľa hradiel určujúce vstupy hradla a položku *Vystup* s možnými hodnotami 0, 1 pre hodnotu výstupu hradla. Pre hradlá typu IN je hodnota indexov *Vstup*1, *Vstup*2 nezaujímavá a nastavuje sa na 0. Pre hradlá typu OUT hodnota indexu *Vstup*1 určuje „napojenie“ daného výstupu obvodu, položka *Vstup*2 sa nepoužíva.

Chovanie hradiel popisuje pole *CH*, ktoré pre každý typ hradla (NAND, NOR a NOT) obsahuje tabuľku príslušnej boolovskej funkcie. Logické hodnoty môžeme reprezentovať typom 0..1 (a nie boolean), ako je to obvyklé v logických obvodoch. Aby sme nemuseli rozlišovať hradlá s jedným a s dvoma vstupmi, všetky považujeme za dvojvstupové, pričom druhý vstup hradla typu NOT je stotožnený s jeho prvým vstupom – výpočet výstupnej hodnoty to neovplyvní.

Formát popisu obvodu:

Popis obvodu začína trojicou čísel N, K, M na samostatnom riadku udávajúcich po rade počet vstupov, hradiel a výstupov obvodu. Nasledujú popisy K hradiel a potom M výstupov (vstupy sa ďalej nepopisujú). Popis hradla a výstupu je tvaru:

NAND	*vstup*1	*vstup*2
NOR	*vstup*1	*vstup*2
NOT	*vstup*1	
OUT	*vstup*1,	

kde *vstup*1 a *vstup*2 má jeden z dvoch možných tvarov:

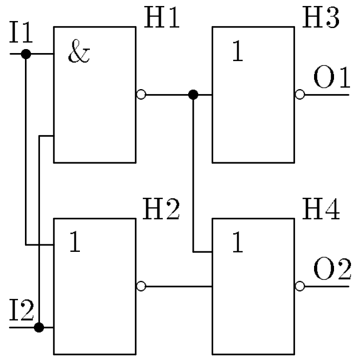
- I_i $(1 \leqq i \leqq N)$ – daný vstup je i-tym vstupom obvodu,
- H_i $(1 \leqq i \leqq K)$ – daný vstup je výstupom i-teho hradla.

V popise sa môžu vyskytovať medzery, tabulátory a znaky konca riadku na ľubovoľnom mieste (okrem „kľúčových slov“ NAND, NOR, NOT, OUT). Popis musí vyhovovať podmienkam úlohy: v popise i-teho hradla sa nesmie vyskytnúť odvolanie na hradlo H_j, pre ktoré $j \geqq i$.

Riešenie časti b):

Je jasné, že výstup c sa dá spočítať ako NOT (x NAND y). Všimnite si, že c OR (x NOR y) je presne NOT s, teda s vypočítame ako c NOR (x NOR y). Uvádzame ešte schému a zápis v navrhnutom formáte popisu obvodu.

```
2 4 2
NAND   I1  I2
NOR    I1  I2
NOT    H1
NOR    H2  H3
OUT    H4
OUT    H3
```



P – II – 1

Dôležitou charakteristikou situácie hry je počet *inverzií*: dvojíc kamienkov modrý–červený, kde modrý kamienok (budeme ho značiť m) je naľavo od červeného kamienka (c). Je jasné, že počet inverzií koncovej situácie je 0 (lebo všetky červené kamienky sú naľavo od modrých). Maximálny počet inverzií (n^2) nastáva pri situácii

$$\underbrace{mm\ldots m}_{n}\underbrace{cc\ldots c}_{n}\,.$$

Ak urobíme krok v hre (obrátenie poradia troch alebo štyroch susedných kamienkov), zmeníme len vzájomné poradie obrátených kamienkov a inverzie medzi nimi a ostatnými kamienkami ostanú zachované. Preto celkový počet inverzií sa zmenší (príp. zväčší) nanajvýš o 4. Ak máme situáciu s p inverziami, potrebujeme aspoň $\frac{p}{4}$ krokov na to, aby sme ju previedli na koncovú. V najhoršom prípade to znamená kvadratický počet krokov $\left(\frac{n^2}{4}\right)$.

Nech p je pozícia prvého červeného kamienka (počítame zľava), naľavo od ktorého je modrý kamienok. Takúto dvojicu kamienkov (mc) nazveme *prechodovou dvojicou*, pozíciu p nazveme *prechodom.* Náš algoritmus spočíva v tom, že nájdeme pozíciu p, potom pomocou jedného alebo najviac dvoch ťahov znížime počet inverzií aspoň o 1 (vychádza teda zníženie inverzie aspoň o $\frac{1}{2}$ na ťah, a teda počet ťahov bude kvadratický) a opäť nájdeme novú pozíciu prechodu. V prípade, že už neexistuje prechodová dvojica, dosiahli sme koncovú situáciu.

Podľa toho, aké kamienky sú v susedstve prechodovej dvojice, je potrebné rozlíšiť niekoľko situácií. Pri každej z nich určíme, aký krok je treba vykonať a od ktorého miesta treba začať hľadať novú prechodovú pozíciu. Nech funkcia *UrobKrok*(p,k) realizuje krok (p,k). Prechod znázorníme znakom $|$ umiestneným medzi prechodovú dvojicu $(m|c)$. Okraj hracieho plánu znázorníme znakom $\langle$, resp. $\rangle$ a miesto, kde je potrebné začať hľadať novú prechodovú dvojicu označíme znakom $\bullet$.

$$
\begin{array}{lllll}
cm|cc & \to & ccc\bullet & & \mathit{UrobKrok}(p-1,3)\\
\langle m|cc & \to & \langle cc\bullet & & \mathit{UrobKrok}(p-1,3)\\
cm|cmc & \to & cc\bullet cm & & \mathit{UrobKrok}(p-1,4)\\
\langle m|cmc & \to & \langle c\bullet cm & & \mathit{UrobKrok}(p-1,4)\\
cm|cmm & \to & cmmmc & \to\ ccmm\bullet & \mathit{UrobKrok}(p,3),\ \mathit{UrobKrok}(p-1,4)\\
\langle m|cmm & \to & \langle mmmc & \to\ \langle cmm\bullet & \mathit{UrobKrok}(p,3),\ \mathit{UrobKrok}(p-1,4)\\
mmm|cc & \to & \bullet ccmm & & \mathit{UrobKrok}(p-2,4)\\
cmm|cc & \to & cccm\bullet & & \mathit{UrobKrok}(p-2,4)\\
\langle mm|cc & \to & \langle ccm\bullet & & \mathit{UrobKrok}(p-2,4)\\
mmm|cm & \to & \bullet cmmm & & \mathit{UrobKrok}(p-2,3)\\
cmm|cm & \to & ccm\bullet m & & \mathit{UrobKrok}(p-2,3)\\
\langle mm|cm & \to & \langle cm\bullet m & & \mathit{UrobKrok}(p-2,3)\\
mmm|c\rangle & \to & \bullet cmm\rangle & & \mathit{UrobKrok}(p-2,3)\\
cmm|c\rangle & \to & ccm\bullet\rangle & & \mathit{UrobKrok}(p-2,3)\\
\langle mm|c\rangle & \to & \langle cm\bullet\rangle & & \mathit{UrobKrok}(p-2,3)
\end{array}
$$

Starostlivé sledovanie pozície nového prechodu zabezpečí, aby nielen počet krokov hry, ale aj časová zložitosť algoritmu bola kvadratická. Keďže v najhoršom prípade môže byť aj počet potrebných ťahov kvadratický, tento algoritmus je asymptoticky optimálny.

Nová prechodová dvojica však niekedy môže byť veľmi vzdialená a pri jej hľadaní je potrebné pozrieť až rádovo n kamienkov (nazvime túto situáciu *dlhé hľadanie*). Každé dlhé hľadanie sa začína v situácii $c\bullet$, $cm\bullet$, alebo $cmm\bullet$ na pozícii $\bullet$ a pokračuje cez niekoľko modrých kamienkov, kým nenájde červený. Máme teda prípad tvaru

$$c\,\underbrace{mmmm\ldots m}_{j}\,c\,,$$

kde $j \geqq 3$). Prechod v takomto prípade nájdeme pomocou $O(j)$ krokov. Pri ďalších zhruba $\frac{j}{2}$ ťahoch sa nájdený červený kamienok začne sťahovať doľava cez j modrých kamienkov a počet inverzií sa postupne zníži zhruba o j. Počas týchto ťahov nájdeme pozíciu ďalšej prechodovej dvojice v konštantnom čase. To znamená, že dlhému hľadaniu ($O(j)$ krokov programu) môžeme priradiť následné zníženie počtu inverzií o $O(j)$ v čase $O(j)$, čo ukazuje, že celkový počet krokov programu strávených v dlhých hľadaniach je $O(n^2)$.

P – II – 2

Z daného bodu môže robot pokračovať troma smermi, označme ich a, b, c. Prechodom po prvej ceste a zaznamenaním typu smeru pre každú úsečku dostaneme reťazec A_r charakterizujúci cestu. Analogicky získame reťazec B_r. Oba prechody je možné urobiť v lineárnom čase $O(n)$, resp. $O(m)$.

Problém sa tak redukuje na určovanie dĺžky najdlhšej spoločnej podpostupnosti dvoch reťazcov. Algoritmus má zložitosť $O(mn)$ a je založený na nasledujúcom princípe: Budeme postupne počítať hodnoty matice SP, kde SP$[i,j]$ bude obsahovať dĺžku najdlhšej spoločnej podpostupnosti pre podreťazce $A_r[1]\ldots A_r[i]$ a $B_r[1]\ldots B_r[j]$.

Ak chceme vypočítať dĺžku najdlhšej spoločnej podpostupnosti dvojice podreťazcov $A_r[1]\ldots A_r[i]$, $B_r[1]\ldots B_r[j]$, potrebujeme poznať hodnoty SP$[i-1,j-1]$, SP$[i,j-1]$ a SP$[i-1,j]$. Pri výpočte budeme rozlišovať, či sa prvky $A_r[i]$ a $B_r[j]$ rovnajú alebo nie. Ak platí $A_r[i] = B_r[j]$, potom $\mathrm{SP}[i,j] = \mathrm{SP}[i-1,j-1]+1$. Ak platí $A_r[i] \neq B_r[j]$, potom $\mathrm{SP}[i,j] = \max\{\mathrm{SP}[i,j-1],\ \mathrm{SP}[i-1,j]\}$.

Celý výpočet je potrebné urobiť pre $i = 1,\ldots,m$ a $j = 1,\ldots,n$. Pomocné hodnoty, ak je niektorý z podreťazcov prázdny, je potrebné stanoviť na nulu. Po určení dĺžky najdlhšej spoločnej podpostupnosti A_r a B_r získame hľadané počty jej odpočítaním od dĺžok ciest.

P – II – 3

Riešenie tejto úlohy je podobné riešeniu úlohy P-I-3. Jediný rozdiel je v tom, že pre každú dvojicu štátov (i,j), kde $i < j$, určíme 11 čísel: optimálne výmenné kurzy pri maximálnom zdržaní $0,1,2,\ldots,10$ dní. Myšlienka algoritmu je jednoduchá: ak cestujeme z i do j a máme povolené zdržanie k dní, optimálny kurz dosiahneme ako maximum nasledujúcich čísel:

- optimálny kurz z i do j bez medzistaníc (a teda bez zdržania),
- maximum z kurzov získateľných so zastávkou v medzistanici l pre všetky medzistanice l $(i < l < j)$ a pre všetky možné „rozklady“ zdržania k na tri nezáporné časti: zdržanie medzi i a l, zdržanie v l (hodnota $T[l]$) a zdržanie medzi l a j.

Počet rozkladov čísla k je zhora ohraničený konštantou (lebo maximálne možné zdržanie je 10), a preto je časová zložitosť celého algoritmu $O(n^3)$.

P – II – 4

Jedna možnosť, ako vytvoriť prehľadný obvod na riešenie úlohy, je rozložiť obvod na dve časti:

- **dekodér**, ktorý zo 4 vstupov x_0, x_1, x_2, x_3 vytvorí 10 medzivýstupov $z_0, z_1, \dots, z_9$, kde je z_i má hodnotu 0 (*false*) vtedy a len vtedy, ak $x_3x_2x_1x_0$ tvorí binárny zápis čísla i (zvolili sme *false* a nie *true* z dôvodu lepšej väzby na kodér).
- **kodér**, ktorý bude realizovať funkcie typu „ľavý horný segment má svietiť, ak $x_3x_2x_1x_0$ tvorí binárny zápis čísla 0, 4, 5, 6, 8 alebo 9". Inak povedané to znamená, že $y_1 = \overline{z_0} \vee \overline{z_4} \vee \overline{z_5} \vee \overline{z_6} \vee \overline{z_8} \vee \overline{z_9} = \neg(z_0 \wedge z_4 \wedge z5 \wedge z_6 \wedge z_8 \wedge z_9) =$ $=$ NAND $(z_0, z_4, z_5, z_6, z_8, z_9)$, teda kodér zo vstupov $z_0, z_1, \dots, z_9$ vytvorí výstupy $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$ len s použitím hradiel typu NAND (preto boli medzivýsledky „negované").

Dekodér: Začneme tým, že vytvoríme negácie $\overline{x_0}$, $\overline{x_1}$, $\overline{x_2}$, $\overline{x_3}$ vstupov x_0, x_1, x_2, x_3, teda 4 hradlá typu NOT :

$$\begin{aligned} H1 &= \text{NOT } (I1) = \overline{x_0} \\ H2 &= \text{NOT } (I2) = \overline{x_1} \\ H3 &= \text{NOT } (I3) = \overline{x_2} \\ H4 &= \text{NOT } (I4) = \overline{x_3} \end{aligned}$$

Nasledujúcich 10 hradiel typu NAND so 4 vstupmi vytvorí požadované výstupy z_0, $z_1, \dots, z_9$:

$$\begin{aligned}
H5 &= \text{NAND } (H1, H2, H3, H4) = \neg(\overline{x_0} \wedge \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}) = z_0 \\
H6 &= \text{NAND } (I1, H2, H3, H4) = \neg(x_0 \wedge \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}) = z_1 \\
H7 &= \text{NAND } (H1, I2, H3, H4) = \neg(\overline{x_0} \wedge x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}) = z_2 \\
H8 &= \text{NAND } (I1, I2, H3, H4) = \neg(x_0 \wedge x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}) = z_3 \\
H9 &= \text{NAND } (H1, H2, I3, H4) = \neg(\overline{x_0} \wedge \overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}) = z_4 \\
H10 &= \text{NAND } (I1, H2, I3, H4) = \neg(x_0 \wedge \overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}) = z_5 \\
H11 &= \text{NAND } (H1, I2, I3, H4) = \neg(\overline{x_0} \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}) = z_6 \\
H12 &= \text{NAND } (I1, I2, I3, H4) = \neg(x_0 \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}) = z_7 \\
H13 &= \text{NAND } (H1, H2, H3, I4) = \neg(\overline{x_0} \wedge \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) = z_8 \\
H14 &= \text{NAND } (I1, H2, H3, I4) = \neg(x_0 \wedge \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) = z_9
\end{aligned}$$

Kodér: Sedem hradiel kodéra realizuje funkcie jednotlivých segmentov displeja tak, ako sme popísali vyššie. Všetky hradlá sú typu NAND , majú 4 až 9 vstupov spomedzi $H5, \dots, H14$:

$$\begin{aligned}
H15 &= \text{NAND } (H5, H7, H8, H10, H11, H12, H13, H14) &&= y_0 \\
H16 &= \text{NAND } (H5, H9, H10, H11, H13, H14) &&= y_1 \\
H17 &= \text{NAND } (H5, H6, H7, H8, H9, H12, H13, H14) &&= y_2 \\
H18 &= \text{NAND } (H7, H8, H9, H10, H11, H13, H14) &&= y_3 \\
H19 &= \text{NAND } (H5, H7, H11, H13) &&= y_4 \\
H20 &= \text{NAND } (H5, H6, H8, H9, H10, H11, H12, H13, H14) &&= y_5 \\
H21 &= \text{NAND } (H5, H7, H8, H10, H11, H13, H14) &&= y_6
\end{aligned}$$

P – III – 1

Pre každú množinu A obsahujúcu n modrých a n červených bodov spĺňajúcu zadanie, existuje riešenie. Dôkazom bude algoritmus, ktorý pre každú takúto množinu zostrojí riešenie v čase $O(n^2)$.

Usporiadajme najprv body množiny A do postupnosti (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_{2n}, y_{2n}) tak, že pre $i < j$ platí $x_i \leqq x_j$, a ak $x_i = x_j$, potom $y_i < y_j$. Toto je možné spraviť v čase $O(n \log n)$.

Potom rozdelíme postupnosť A na k disjunktných súvislých neprázdnych úsekov tak, aby v každom úseku bol rovnaký počet červených a modrých bodov, ale v žiadnom kratšom úseku začínajúcom na tom istom mieste nie. Úseky si budeme ukladať v zozname Z. Túto časť výpočtu je možné vykonať v čase $O(n)$ jedným prechodom postupnosti A. V každom úseku je rovnaký počet červených a modrých bodov, preto úlohu vyriešime zvlášť pre každý úsek. Konvexné obaly jednotlivých úsekov sa neprekrývajú a úsečky spájajúce dva body z jedného úseku ležia vnútri konvexného obalu tohto úseku. Preto sa úsečky spájajúce body v rôznych úsekoch nebudú pretínať a riešenie pre celú množinu A dostaneme jednoducho spojením riešení pre jednotlivé úseky.

Spracovávame teda postupne jednotlivé úseky zo zoznamu Z (vždy vyberieme jeden úsek U zo zoznamu). Ľahko možno ukázať, že prvý a posledný bod úseku majú rôznu farbu. Prvý a posledný bod úseku sú určite vrcholy mnohouholníka tvoriaceho konvexný obal bodov úseku, a teda v tomto mnohouholníku existujú určite aj dva za sebou idúce vrcholy, ktoré majú rôznu farbu. Nech U' je úsek, ktorý vznikne z U odstránením týchto dvoch vrcholov. Konvexný obal U' nemá žiaden spoločný bod s úsečkou spájajúcou dva odstránené body. Preto ak nájdeme riešenie U' a pridáme k nemu túto úsečku, dostávame riešenie pre U. Postupujeme teda nasledovne: zostrojíme konvexný obal U, nájdeme na ňom dva susedné body rôznej farby, tieto spojíme úsečkou a vyhodíme z U. Zo zvyšných bodov opäť vytvoríme úseky rovnakým spôsobom ako z pôvodnej postupnosti bodov a zaradíme ich do Z. Takto sme celkový počet bodov znížili o 2, a teda po n takýchto krokoch už bude zoznam Z prázdny a nájdené úsečky tvoria riešenie úlohy.

Konvexný obal množiny m bodov usporiadanej podľa x-ovej súradnice je možné spraviť v čase $O(m)$ nasledujúcim algoritmom: najľavejší a najpravejší bod množiny (označme ich L a P) sú iste vrcholy konvexného obalu. Ostatné body množiny rozdelíme na dve skupiny podľa toho, či ležia pod alebo nad priamkou LP. Teraz môžeme zvlášť nájsť hornú časť konvexného obalu a zvlášť jeho dolnú časť.

Dolnú časť konvexného obalu budeme hľadať tak, že budeme postupne zľava doprava pridávať jednotlivé body ležiace pod priamkou LP do zoznamu vrcholov konvexného obalu. Vždy keď pridáme ďalší bod, skontrolujeme, či posledné tri body v zozname netvoria nekonvexný uhol. Ak tvoria, predposledný bod zoznamu je potrebné zo zoznamu vyhodiť a opäť skontrolovať posledné tri body v zozname. To robíme dovtedy, kým uhol na konci zoznamu nebude konvexný, alebo kým v zozname nezostanú iba dva body. Potom môžeme pridať ďalší bod. Takto postupujeme, až kým nespracujeme všetky body v danej polrovine, vrátane bodu P. Horná časť konvexného obalu sa vytvorí analogicky.

Každý vrchol pridáme do zásobníka práve raz a najviac raz ho odtiaľ odstránime. Obidve operácie vyžadujú čas $O(1)$, a preto konvexný obal m bodov je možné zostrojiť v čase $O(m)$. Keď máme zostrojený konvexný obal, je možné v čase $O(n)$ nájsť dvojicu susedných vrcholov rôznej farby, odstrániť ich z poľa a zo zvyšných bodov úseku vytvoriť nové úseky.

Spracovanie jedného úseku teda vieme vykonať v čase $O(n)$. Spracovaním každého úseku spojíme úsečkou jednu dvojicu bodov. Keďže potrebujeme pospájať n dvojíc bodov, výsledný čas je $O(n^2)$.

P – III – 2

Predpokladajme, že máme danú ľubovoľnú schodovitú postupnosť $S = A[1]$, $A[2]$, …, $A[n] = K$. Podľa zadania sa vektor $A[i]A[i+1]$, $1 \leqq i < n$ musí zhodovať s jedným z vektorov $\overrightarrow{a} = (2,-1)$, $\overrightarrow{b} = (1,-1)$, alebo $\overrightarrow{c} = (1,-2)$. Takže postupnosť $A[1], A[2], \dots, A[n]$ je jednoznačne určená bodom S a postupnosťou vektorov $v_1, v_2, \dots, v_n$, kde $v_i \in \{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$. Keďže sčítanie vektorov je komutatívne, ľubovoľná permutácia prvkov postupnosti $v_1, v_2, \dots, v_n$ je reprezentáciou vyhovujúcej schodovitej postupnosti začínajúcej bodom S a končiacej bodom K. Stačí si teda pamätať počet vektorov $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ a $\overrightarrow{c}$ v postupnosti $(v_i)_{i=1}^n$.

Ak by sa v postupnosti $(v_i)_{i=1}^n$nachádzali aspoň tri vektory $\overrightarrow{b}$, vedeli by sme ich nahradiť kombináciou vektorov $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c}$, a tak znížiť počet bodov nájdenej schodovitej postupnosti. Minimálna schodovitá postupnosť teda obsahuje najviac dva vektory $\overrightarrow{b}$.

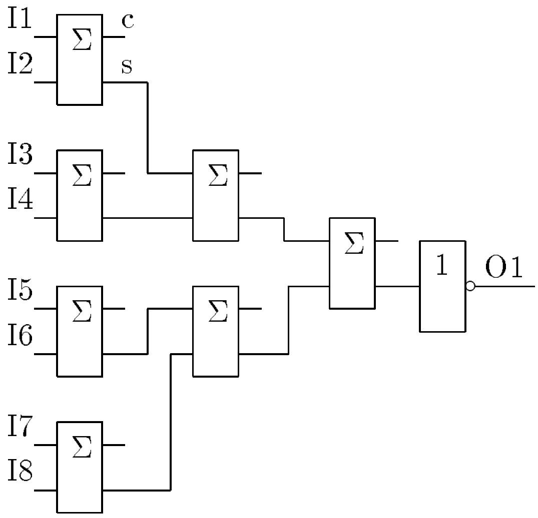
Zrejme ak $K.x - S.x < 2(S.y - K.y)$ alebo $S.y - K.y < 2(K.x - S.x)$, riešenie neexistuje. V opačnom prípade riešenie vždy existuje.

Predstavme si obdĺžnik $SVKW$, pričom hrany SV, KW sú vodorovné a SW, KV zvislé. Môžu nastať tri prípady:

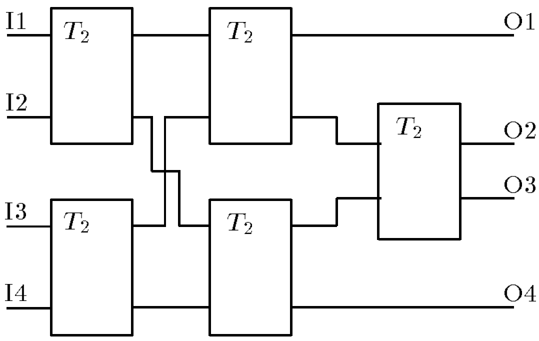
- $|SV| > |SW|$ – v schodovitej postupnosti sa musí nachádzať aspoň jeden vektor $\overrightarrow{a}$. Posunieme bod S v smere $\overrightarrow{a}$ do bodu S' a hľadáme minimálnu schodovitú postupnosť pre body S' a K. Táto bude spolu s bodom S tvoriť minimálnu schodovitú postupnosť pre body S a K.
- $|SV| < |SW|$ – analogicky predošlému prípadu, ale bod S posunieme o vektor $\overrightarrow{c}$.
- $|SV| = |SW|$ – obdĺžnik $SVKW$ je štvorcom. Ak $|SV| \geqq 3$, budeme S namiesto posúvania o vektor $\overrightarrow{b}$ posúvať o vektory $\overrightarrow{a}$ a $\overrightarrow{c}$ (už sme ukázali, že je to najvýhodnejšie). Toto pravidlo nemôžeme použiť, ak $|SV| \leqq 2$. Vtedy musíme postupnosť zakončiť „schodmi“ – vektormi $\overrightarrow{b}$.

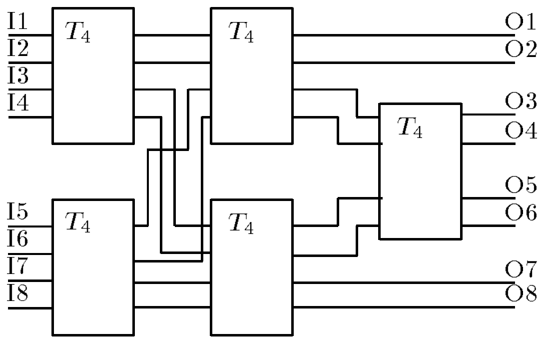
P – III – 3

Funkcia `parita`: Na riešenie tejto úlohy využijeme obvod, ktorý sme zostavili už v I. kole (pozri obrázok na strane 19). Obvod mal dva vstupy $I1$, $I2$ a dva výstupy c, s, pričom platilo, že $2c + s = I1 + I2$. Tento obvod využijeme na sčítanie všetkých vstupov modulo 2 takto: najprv sčítame vstupy po dvojiciach, čím dostávame štyri súčty dvojíc modulo 2 a štyri zvyškové bity. Zvyškové bity nás ďalej nebudú zaujímať, dvojice súčtov opäť sčítame tým istým spôsobom. Dostaneme dva súčty modulo 2 (prvých štyroch a druhých štyroch bitov), ktoré opäť sčítame. Výsledok musíme ešte znegovať, keďže náš obvod dáva v prípade párneho počtu jedničiek medzi vstupmi výsledok 0.



Funkcie `majorita`, `aspoň2`: Zostavme najprv pomocný obvod (budeme ho označovať T_k, kde k je počet jeho vstupov), ktorý dostane k vstupov núl alebo jednotiek a na výstupoch ich vráti utriedené (t.j. najprv všetky nuly a potom všetky jednotky). Obvod T_2 bol uvedený ako príklad v študijnom texte (pozri str. 3). Pokúsme sa teraz zostrojiť obvod T_4. Pomocou troch obvodov T_2 vieme zo vstupných štyroch bitov $(I1, \ldots, I4)$ získať najmenší – vezmeme menší z $I1$, $I2$ a menší z $I3$, $I4$ a pomocou ďalšieho obvodu T_2 ich porovnáme. Podobne vieme nájsť najväčší bit. Zostávajú dva bity, ktoré pomocou jedného obvodu T_2 možno utriediť. (Výsledný obvod je na obrázku vľavo.) Zostrojiť obvod T_8 pomocou obvodov T_4 teraz už nebude problém. Stačí zopakovať predchádzajúci postup, teraz však už uvažujeme dvojice bitov (obrázok vpravo).





Pôvodne požadované obvody zostrojíme teraz pomocou obvodu T_8: stačí vybrať príslušný výstup tohto obvodu – v prípade `majority` to bude $O4$ a v prípade `aspoň2` $O7$.

P – III – 4

Stačí sa zaoberať hrou so 4 kamienkami. Ostatné prípady je totiž možné previesť na tento nasledovne: rozšírime hrací plán zľava o $4 -$ `pocetKamienkov` políčok, na ktoré

umiestnime kamienky, ktoré sa už samozrejme nepohnú. Jednotlivé situácie v hre budeme charakterizovať hodnotami m_1 a m_2, pričom pre pozície kamienkov x, y, u, v ($x < y < u < v$) definujeme $m_1 = y - x - 1$, $m_2 = v - u - 1$.
Platia nasledujúce tvrdenia:

1. Ak $m_1 \neq m_2$, hráč, ktorý je na ťahu, môže urobiť krok, ktorým postaví druhého hráča do situácie $m_1 = m_2$.
   Dôkaz: Hráč na ťahu môže urobiť krok dĺžky $|m_1 - m_2|$ kamienkom na pozícii y (ak $m_1 > m_2$) alebo kamienkom na pozícii v (ak $m_1 < m_2$).
2. Ak $m_1 = m_2$, hráč, ktorý je na ťahu nemôže zabrániť výhre druhého hráča.
   Dôkaz: Použijeme matematickú indukciou vzhľadom na súčet $S = x + y + u + v$. Ak sme v koncovej situácii (t.j. $S = 6$ pre prípad so štyrmi kamienkami), hráč, ktorý je na ťahu, nemôže ťahať, a preto prehral. V nekoncovej situácii, v ktorej platí $m_1 = m_2$, hráč, ktorý je na ťahu svojim ťahom poruší platnosť tejto podmienky. Druhý hráč môže odpovedať ťahom podľa bodu 1, a tým zasa postaviť prvého hráča do situácie $m_1 = m_2$, pričom súčet pozícií kamienkov S sa znížil a podľa indukčného predpokladu hráč na ťahu nemôže zabrániť svojej prehre.

Z dokázaných tvrdení vyplýva, že pri $m_1 \neq m_2$ má hráč, ktorý je na ťahu, vyhrávajúcu stratégiu, v opačnom prípade nemôže vyhrať, ak spoluhráč neurobí chybu.

P – III – 5

Situáciu môžeme reprezentovať ako graf G, ktorého vrcholy budú rozdelené do dvoch disjunktných množín. V množine A budú vrcholy zodpovedajúce poradovým číslam dverí a v množine B vrcholy zodpovedajúce jednotlivým dverám. Vrchol $u \in A$ a vrchol $v \in B$ budú spojené hranou v prípade, ak dané podmienky nezakazujú, aby dvere v boli otvorené ako u-te v poradí. *Párovanie* v grafe je taká podmnožina hrán, že žiadne dve z nich nemajú spoločný vrchol. Párovanie M pokrýva vrchol grafu v, ak nejaká hrana z M vychádza z vrcholu v. Úlohou je teda vlastne nájsť párovanie, ktoré bude pokrývať všetky vrcholy z A. Kedže $|A| = |B|$ a všetky hrany vedú iba z A do B, znamená to, že takéto párovanie pokrýva aj všetky vrcholy z B.

Stupeň vrcholu v z množiny A môže byť 0, 1, 2 (ak sa na v vzťahuje nejaká podmienka), alebo n (ak sa na v nevzťahuje žiadna podmienka). Ak má niektorý vrchol stupeň 0, žiadne riešenie úlohy neexistuje. Ak existuje vrchol $v \in A$, z ktorého vychádza jediná hrana (do vrcholu $u \in B$), potom každé riešenie úlohy musí obsahovať hranu uv. Ak teda z grafu odstránime vrcholy u a v a všetky hrany z nich vychádzajúce, novovzniknutý graf bude mať rovnaký počet riešení ako ten pôvodný (ak zadefinujeme, že graf s 0 vrcholmi má práve jedno riešenie). Takto môžeme postupne odstraňovať vrcholy stupňa 1 z množiny A, pričom však treba dávať pozor na to, že odstránením jedného takého vrcholu môžu vzniknúť ďalšie.

Stačí teda uvažovať prípad, keď $n > 1$ a každý vrchol množiny A má stupeň aspoň 2. Nech A' je podmnožina množiny A obsahujúca iba vrcholy so stupňom 2 a nech G' je podgraf grafu G s vrcholmi $A' \cup B$ a všetkými hranami grafu G, ktoré idú z A' do B. Ak existuje párovanie pokrývajúce všetky vrcholy množiny A', potom existuje aj párovanie pokrývajúce všetky prvky množiny A, pretože na vrcholy z množiny $A \setminus A'$

sa nevzťahuje žiadna podmienka, a preto ich môžeme ľubovoľne spárovať so zvyšnými vrcholmi množiny B. Zároveň však platí, že ak $|A \setminus A'| > 1$, potom úloha iste nemá práve jedno riešenie. Ak $|A \setminus A'| \in \{0, 1\}$, potom má úloha práve toľko riešení, koľko existuje párovaní v G' pokrývajúcich množinu A'.

Zostáva teda už iba vyriešiť problém, koľko existuje v grafe G' párovaní pokrývajúcich množinu A'. Ak $A' = \emptyset$ existuje práve jedno párovanie požadovaných vlastností, v opačnom prípade nemôže existovať jediné také párovanie. Nech existuje nejaké párovanie pokrývajúce množinu A'. Vytvoríme cestu obsahujúcu striedavo hrany obsiahnuté v párovaní a hrany, ktoré v párovaní nie sú. Začneme v nejakom vrchole $v_0 \in B$ pokrytom párovaním a z tohto vrcholu budeme pokračovať po hrane obsiahnutej v párovaní do vrcholu $v_1 \in A'$. Odtiaľ môžeme pokračovať jedine po druhej hrane z neho idúcej do nejakého vrcholu $v_2 \in B$. Odtiaľ znovu po hrane z párenia atď. Skončíme vtedy, keď prídeme do vrcholu $v \in B$ stupňa 1, alebo ak sa vrátime do niektorého vrcholu, v ktorom sme už boli. V prvom prípade je možné vytvoriť nové párovanie tak, že hrany ležiace na ceste, ktoré v pôvodnom párovaní neboli, tam zaradíme a tie, ktoré v pôvodnom párovaní boli, odstránime. V druhom prípade časť cesty vytvára kružnicu, na tejto kružnici tiež môžeme vymeniť hrany rovnakým spôsobom a získať nové párovanie. Teda ak existuje jedno párovanie pokrývajúce množinu A', potom určite existujú aspoň dve takéto párovania.

V prípade, že $A' \neq \emptyset$, stačí zistiť, či vôbec nejaké párovanie existuje. Ak v množine B existuje vrchol v, ktorý je spojený hranou iba s jediným vrcholom $u \in A'$, potom ak existuje párovanie pokrývajúce A', existuje aj také párovanie pokrývajúce A', ktoré obsahuje hranu uv (vezmeme ľubovoľné párovanie pokrývajúce A', odstránime z neho hranu obsahujúcu u a pridáme hranu uv). Teda môžeme z grafu odstrániť vrcholy u a v a všetky hrany z nich idúce a ďalej postupne odstraňovať ďalšie vrcholy množiny B spojené s jediným vrcholom množiny A' (opäť nám odstránením jedného môžu vzniknúť ďalšie takéto vrcholy).

Nech A'' je množina vrcholov obsahujúca vrcholy z A', ktoré neboli odstránené v procese opísanom vyššie a B' nech je podmnožina množiny B obsahujúca vrcholy, ktoré sú spojené hranou s nejakým vrcholom z A''. Keďže sme odstránili vrcholy, ktoré boli spojené iba s jedným vrcholom z A', každý vrchol z B' je spojený s aspoň dvoma vrcholmi z A''. Súčasne však každý vrchol z A'' je spojený práve s dvoma vrcholmi z B'. Počet hrán idúcich z A'' do B' musí byť rovnaký, ako počet hrán idúcich z B' do A'', a preto $|A''| \geqq |B'|$. Ak $|A''| > |B'|$, potom iste neexistuje párovanie pokrývajúce množinu A''. Ak $|A''| = |B'|$, potom každý vrchol množiny B' má stupeň práve 2. Nech G'' je podgraf grafu G' s vrcholmi $A'' \cup B'$ a všetkými hranami grafu G', ktoré idú z A'' do B'. Všetky komponenty súvislosti grafu G'' sú teda kružnice, v ktorých sa striedajú vrcholy z A'' a vrcholy z B'. Párovanie v tomto grafe vytvoríme jednoducho tak, že na každej takejto kružnici striedavo jednu hranu zaradíme do párovania a druhú nie.

Na základe týchto úvah je možné napísať algoritmus, ktorý bude riešiť úlohu v čase $O(n)$. Pre každý vrchol si budeme pamätať zoznam hrán, ktoré z neho vychádzajú. Vrcholov, na ktoré sa nevzťahuje žiadna podmienka, môže byť až $O(n)$, pričom z každého vychádza n hrán. Už vytvorenie takejto štruktúry by vyžadovalo čas $O(n^2)$, pri týchto vrcholoch si nebudeme pamätať zoznam hrán, iba ich počet. Každá hrana sa vyskytuje v dvoch zoznamoch (pre oba svoje koncové vrcholy). Ak tieto dva výskyty prepojíme, je možné v čase $O(1)$ vymazať danú hranu z obidvoch zoznamov. Potom sledujeme jednotlivé podmienky uvedené v predchádzajúcich úvahách, a keď je to potrebné, odstraňujeme vrcholy stupňa 1 (pričom si udržiavame zásobník nájdených a dosiaľ nespracovaných vrcholov stupňa 1). Odstrániť z grafu môžeme najviac $O(n)$ hrán, každú v čase $O(1)$, takže celkový algoritmus má lineárnu časovú zložitosť.

Štvrtá stredoeurópska olympiáda v informatike

V dňoch 17. – 24. júla 1997 sa v meste Nowy Sacz v Poľsku konala 4. stredoeurópska olympiáda v informatike. Na podujatí sa zúčastnilo 54 súťažiacich zo 14 krajín sveta, konkrétne: Bielorusko, Estónsko, Holandsko, Chorvátsko, Juhoslávia, Litva, Lotyšsko, Maďarsko, Nemecko, Poľsko, Rumunsko, Slovensko, Ukrajina a USA. Družstvo Českej republiky sa tohto roku na olympiáde, žiaľ, nezúčastnilo vzhľadom k povodňovej situácii. Podujatie sa konalo pod záštitou prezidenta republiky Alexandra Kwasniewskeho a za výraznej finančnej podpory poľského ministerstva školstva.

Slovensko na súťaži reprezentovali štyria súťažiaci, ktorí boli vybratí na základe výsledkov celoštátneho kola a výberového sústredenia: *Vladimír Koutný*, *Richard Kráľovič*, *Dávid Pál*, všetci z 2. ročníka Gymnázia J. Hronca v Bratislave a *Ján Svoreň* zo 4. ročníka Gymnázia D. Tatarku v Poprade. Vedúcou slovenského družstva bola *Bronislava Brejová* z MFF UK v Bratislave. Na základe pozvania z poľskej strany sa navyše olympiády zúčastnili *Martin Pál* a *Tomáš Vinař* (obaja z MFF UK v Bratislave) ako členovia poroty.

Samotná súťaž pozostávala z dvoch súťažných dní. Každý súťažný deň súťažiaci riešili tri príklady v časovom limite 5 hodín. Riešenia boli hodnotené už tradičným spôsobom – – kontrolou výstupov programov pre zadané vstupné dáta, pričom bol stanovený časový limit pre beh programu. Každý deň bolo možné získať 100 bodov.

Spolu bolo udelených 28 medailí, z toho 5 zlatých, 9 strieborných a 14 bronzových. Naši súťažiaci dosiahli nasledujúce výsledky:

Por.	Meno	1. deň	2. deň	Súčet	Medaila
9.	Ján Svoreň	70	68	138	strieborná
24.	Vladimír Koutný	51	53	104	bronzová
43.	Richard Kráľovič	40	28	68	–
45.	Dávid Pál	37	22	59	–

Slovensko sa v celkovom neoficiálnom hodnotení krajín umiestnilo na siedmom mieste. O niečo horšie výsledky ako po minulé roky boli zapríčinené tým, že na túto súťaž boli vybraní súťažiaci nižších ročníkov, ktorí nemajú ešte žiadne skúsenosti s medzinárodnými súťažami. Účasť na tomto podujatí bola pre nich prípravou pre ich pravdepodobné účinkovanie na Medzinárodnej olympiáde z informatiky v budúcich rokoch.

Pre účastníkov bolo okrem samotnej súťaže pripravené množstvo ďalších programov, ako napríklad výlety do mesta Krakow a do historickej soľnej bane Wieliczka, prehliadka mesta Sacz, plavba na pltiach po Dunajci, alebo rozlúčková party.

Celé podujatie, ako odborná tak aj neodborná časť, bolo veľmi dobre zorganizované. Kvalitná príprava sa prejavila hlavne v až prekvapujúco hladkom priebehu vyhodnocovacieho procesu. Súťažné úlohy boli veľmi dobre vybrané a svojou úrovňou mierne prevyšovali úroveň bežnú na podujatiach tohto druhu. Nesporným prínosom bolo aj pozvanie pomerne veľkého počtu hosťujúcich krajín (Bielorusko, Estónsko, Holandsko, Juhoslávia, Litva, Lotyšsko, Nemecko, Ukrajina a USA).

Budúci ročník Stredoeurópskej olympiády v informatike sa zaviazalo zorganizovať Chorvátsko. Dúfame, že tentokrát nebude potrebné hľadať náhradné riešenie v inej krajine, ako tomu bolo pred dvoma rokmi.

Bronislava Brejová, Tomáš Vinař

Zadania úloh 4. Stredoeurópskej olympiády v informatike

1. Jaskyňa (48 bodov)
V Bytelande sa nachádza veľa jaskýň. Všetky jaskyne v Bytelande majú tieto vlastnosti:

- Všetky siene a chodby jaskyne sú na tej istej úrovni.
- Žiadne dve chodby sa nekrižujú.
- Niektoré zo siení sa nachádzajú na vonkajšom okruhu. Tieto budeme nazývať *vonkajšie siene.*
- Všetky ostatné siene ležia vo vnútri vonkajšieho okruhu a budeme ich nazývať *vnútorné siene.*
- Jaskyňa má vchod, ktorý vedie do jednej z vonkajších jaskýň.
- Z každej siene vedú práve tri chodby do troch iných, navzájom rôznych siení. Ak je sieň vonkajšia, dve z jej chodieb vedú do dvoch vonkajších siení susediacich s ňou na vonkajšom okruhu. Tretia chodba vedie do niektorej vnútornej siene.
- Chodby spájajúce vonkajšie siene budeme nazývať *vonkajšie chodby.* Ostatné chodby budeme nazývať *vnútorné chodby.*
- Medzi každými dvoma sieňami sa dá prejsť tak, že použijeme iba vnútorné chodby. Existuje práve jedna takáto cesta, ak navyše predpokladáme, že môžeme navštíviť každú sieň nanajvýš raz.
- Nie cez všetky chodby je rovnako ťažké prejsť. Chodby sú rozdelené do dvoch skupín: ľahko a ťažko prechodné.

Rozhodlo sa, že všetky jaskyne budú sprístupnené pre verejnosť. Aby bol zabezpečený plynulý a bezpečný prechod cez jaskyne, návštevníci musia prechádzať jaskyne cestou, ktorá je vopred vyznačená a navštíviť každú sieň práve raz. Výnimkou z tohto pravidla je vstupná sieň, v ktorej každá prehliadka začína aj končí, túto sieň navštívia návštevníci práve dvakrát. Trasa prehliadky musí byť vhodná pre priemerného návštevníka, a teda musí obsahovať najmenší možný počet ťažko prechodných chodieb.

Úloha. Napíšte program, ktorý:
- načíta popis jaskyne z textového súboru `CAV.IN`;
- nájde trasu cez jaskyňu, ktorá začína aj končí vo vstupnej sieni tak, aby návštevníci videli každú sieň iba raz a ktorá obsahuje najmenší možný počet ťažkých chodieb;
- vypíše výsledok do textového súboru `CAV.OUT`.

Vstup. Na prvom riadku textového súboru `CAV.IN` sa nachádzajú dve celé čísla n a k oddelené jedinou medzerou. Celé číslo n ($3 < n \leqq 500$) určuje počet všetkých siení v jaskyni a k ($k \leqq 3$) je počet všetkých vonkajších siení jaskyne. Siene sú očíslované od 1 po n. Sieň číslo 1 je vstupná, siene $1, 2, \dots, k$ sú vonkajšie siene. Nemusia sa však na vonkajšom okruhu vyskytovať v tomto poradí.

Nasledujúcich $\frac{3n}{2}$ riadkov obsahuje popisy jednotlivých chodieb. Každý popis pozostáva z troch celých čísel a, b, c, každé dve z nich sú oddelené jedinou medzerou. Čísla a a b označujú siene na koncoch príslušnej chodby; číslo c je 0 alebo 1, kde 0 znamená, že chodba je ľahko a 1, že chodba je ťažko prechodná.

Výstup. Váš program má na prvý riadok textového súboru `CAV.OUT` vypísať postupnosť n celých čísel oddelených medzerami (jedna medzera medzi každými dvoma číslami). Postupnosť musí začínať číslom 1 (vstupná sieň). Nasledujúcich $n-1$ celých čísel budú po sebe nasledujúce siene na nájdenej trase.

2. Hexadecimálne čísla (30 bodov)

Základom hexadecimálnej sústavy je číslo 16. Na zápis čísel v tejto sústave sa používa 16 číslic $0, 1, \dots, 9, A, B, C, D, E, F$. Veľké písmená $A, \dots, F$ označujú cifry $10, \dots, 15$ v tomto poradí. Napríklad hexadecimálne číslo $CF2$ má hodnotu $12 \cdot 16^2 + 15 \cdot 16 + 2 = 3\,314$ v desiatkovej sústave. Nech X je množina všetkých kladných celých čísel, ktorých hexadecimálny zápis má najviac osem cifier a žiadna cifra sa v tomto zápise neopakuje. Najvýznamnejšia cifra v takomto zápise nie je nula. Najväčším prvkom množiny X je číslo s hexadecimálnym zápisom $FEDCBA98$, druhé najväčšie je číslo $FEDCBA97$, tretie je $FEDCBA96$ a tak ďalej.

Úloha. Napíšte program, ktorý:
- načíta kladné číslo n z textového súboru `HEX.IN`, n nepresiahne počet prvkov X;
- nájde n-tý najväčší prvok množiny X;
- zapíše výsledok do textového súboru `HEX.OUT`.

Vstup. Prvý riadok súboru obsahuje celé číslo n v desiatkovej sústave.

Výstup. Váš program má do prvého riadku textového súboru `HEX.OUT` vypísať n-tý najväčší prvok množiny X v hexadecimálnom zápise.

3. Celočíselné intervaly (22 bodov)

Celočíselný interval $[a, b]$, $a < b$, je množina všetkých za sebou idúcich celých čísel od a po b vrátane.

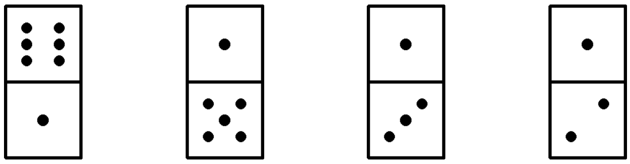
Úloha. Napíšte program, ktorý:
- načíta počet intervalov a ich popisy z textového súboru `INT.IN`;
- nájde najmenší počet prvkov v množine obsahujúcej aspoň dve rôzne celé čísla z každého intervalu;
- zapíše výsledok do textového súboru `INT.OUT`.

Vstup. Prvý riadok textového súboru `INT.IN` obsahuje počet intervalov n, $1 \leqq n \leqq 10\,000$. Každý z nasledujúcich n riadkov obsahuje dve celé čísla a, b oddelené jedinou medzerou, $0 \leqq a < b \leqq 10\,000$, určujúce začiatok a koniec intervalu.

Výstup. Váš program má zapísať jedno celé číslo do prvého riadku textového súboru `INT.OUT`; toto číslo má určovať minimálny počet prvkov množiny obsahujúcej aspoň dve rozličné celé čísla z každého intervalu.

4. O dominách (40 bodov)

Domino je tehlička veľkosti palca, ktorej vrchná časť je rozdelená na dva štvorce. Každý z týchto štvorcov je buď prázdny, alebo obsahuje jednu až šesť bodiek. Na stole je niekoľko domín položených vedľa seba:



Počet bodiek vo vrchnom riadku je $6+1+1+1=9$ a počet bodiek v spodnom riadku je $1+5+3+2=11$. Rozdiel medzi vrchným a spodným riadkom je 2. Vo všeobecnosti *rozdiel riadkov* je absolútna hodnota rozdielu medzi príslušnými dvoma súčtami. Každé domino môžeme otočiť o 180 stupňov tak, aby vrchná strana ostala otočená hore.

Aký je najmenší počet otočení potrebných na dosiahnutie minimálneho *rozdielu riadkov*? (V prípade na obrázku stačí otočiť posledné domino na dosiahnutie rozdielu 0. V tomto prípade je teda odpoveď 1.)

Úloha. Napíšte program, ktorý:
- načíta počet domín a ich popisy z textového súboru `DOM.IN`;
- vypočíta najmenší počet otočení potrebných na dosiahnutie minimálneho rozdielu riadkov;
- zapíše výsledok do textového súboru `DOM.OUT`.

Vstup. Prvý riadok textového súboru `DOM.IN` obsahuje celé číslo n, $1 \leqq n \leqq 1\,000$. Toto číslo udáva počet domín položených na stole.

Každý z nasledujúcich n riadkov obsahuje dve celé čísla a, b oddelené jedinou medzerou, $0 \leqq a, b \leqq 6$. Čísla a a b uvedené v riadku $i+1$ vstupného súboru, $1 \leqq i \leqq n$, určujú počty bodiek vo vrchnom a spodnom štvorci i-teho domina na stole.

Výstup. Váš program má do prvého riadku textového súboru `DOM.OUT` vypísať jediné celé číslo. Toto číslo má určovať najmenší počet otočení potrebných na dosiahnutie minimálneho rozdielu riadkov.

5. Prechod cez rieku (30 bodov)

Občania krajiny Byteland milujú všetky športy, v ktorých je logické uvažovanie rovnako dôležité ako fyzické schopnosti. Jedným z týchto športov je prechod cez rieku Hex – najširšiu rieku v Bytelande. V rieke sa nachádza n kolov očíslovaných $1, 2, \dots, n$ (zľava doprava) v rade tiahnúcom sa z jedného brehu na druhý. Vzdialenosti medzi týmito kolmi, ako aj vzdialenosť kolu 1 a ľavého brehu, alebo kolu n a pravého brehu sú rovnaké. Úlohou občanov je prejsť z jedného brehu rieky na druhý tak, že z *ľavého brehu* preskočia na niektorý *kôl*, potom prípadne na ďalší atď., až nakoniec na *pravý breh* rieky.

V čase 0 stojí občan na ľavom brehu rieky Hex. Jeho cieľom je dosiahnuť pravý breh rieky najrýchlejšie, ako je to možné. V každom okamihu je každý kôl buď *nad vodou* alebo *pod vodou* a občan stojí buď na niektorom kole alebo na jednom z brehov rieky. Občan môže stáť na kole iba ak je kôl nad vodou, takýto kôl sa nazýva *dostupný*.

Každý kôl je v čase 0 pod vodou, potom zostane a časových jednotiek nad vodou, b časových jednotiek pod vodou, a časových jednotiek nad vodou, b časových jednotiek pod vodou atď. Konštanty a a b sú definované zvlášť pre každý kôl. Napríklad kôl, pre ktorý $a = 2$ a $b = 3$, bude pod vodou v čase 0, nad vodou v čase 1 a 2, pod vodou v čase 3, 4, 5 atď.

V čase $t + 1$ si občan môže vybrať ľubovoľný dostupný kôl alebo breh vo vzdialenosti najviac 5 kolov od jeho pozície v čase t, alebo môže zostať na brehu alebo na pôvodnom kole (ak bude dostupný v čase $t + 1$). Napríklad z kolu 5 je možné dosiahnuť ľubovoľný z kolov 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 alebo ľavý breh.

Úloha. Napíšte program, ktorý:
- načíta počet blokov dát z textového súboru `RIV.IN` (každý blok obsahuje úplnú sadu dát pre úlohu);
- pre každý blok
  - načíta počet kolov a popis ich správania;
  - vypočíta najkratší čas, za ktorý sa môže občan dostať na pravý breh, ak je pravý breh dosiahnuteľný;
  - zapíše výsledok do textového súboru `RIV.OUT`.

Vstup. Prvý riadok vstupného súboru `RIV.IN` obsahuje počet blokov dát x, $1 \leqq x \leqq 5$. Nasledujúce riadky súboru tvoria x blokov. Prvý blok začína na druhom riadku vstupného súboru, každý ďalší blok začína priamo po predchádzajúcom bloku.

Prvý riadok každého bloku obsahuje počet kolov n, $5 < n \leqq 1\,000$.

Každý z nasledujúcich n riadkov bloku obsahuje dve celé čísla a, b oddelené jedinou medzerou, $1 \leqq a, b \leqq 5$. Čísla v $i + 1$-vom riadku bloku ($1 \leqq i \leqq n$) popisujú správanie kolu i.

Výstup. Pre k-ty blok, $1 \leqq k \leqq x$, zapíšte do k-teho riadku textového súboru `RIV.OUT` celé číslo, určujúce najkratší čas, za ktorý sa môže občan dostať na pravý breh alebo slovo `NO`, ak nie je možné opísaným spôsobom pravý breh dosiahnuť.

6. Strelecká súťaž (30 bodov)

Vitajte v Bytelande na výročnej streleckej súťaži. Každý súťažiaci bude strieľať na cieľ tvorený obdĺžnikovou mriežkou. Cieľ pozostáva z $r \times c$ štvorcov umiestnených do r riadkov a c stĺpcov. Každý štvorec je ofarbený bielou alebo čiernou. V každom stĺpci sú práve dva biele štvorce a $r - 2$ čiernych štvorcov. Riadky sú zhora dole označené číslami $1, \ldots, r$ a stĺpce sú zľava doprava označené číslami $1, \ldots, c$. Každý strelec má c výstrelov.

Séria c výstrelov je *korektná*, ak v každom stĺpci je zasiahnutý práve jeden biely štvorec a neexistuje riadok, v ktorom by nebol zasiahnutý žiadny biely štvorec. Pomôžte strelcovi nájsť korektnú sériu výstrelov, ak nejaká existuje.

Úloha. Napíšte program, ktorý:
- načíta z textového súboru `SHO.IN` počet blokov dát (každý blok obsahuje úplnú sadu dát pre úlohu);
- pre každý blok
  - načíta rozmery cieľa a rozloženie bielych štvorcov;

– zistí, či existuje korektná séria výstrelov a ak áno, nájde jednu z nich;
– zapíše výsledok do textového súboru `SHO.OUT`.

Vstup. Prvý riadok vstupného súboru `SHO.IN` obsahuje počet blokov dát x, $1 \leqq x \leqq 5$. Nasledujúce riadky súboru tvoria x blokov. Prvý blok začína na druhom riadku vstupného súboru, každý ďalší blok začína priamo za predchádzajúcim.

Prvý riadok každého bloku obsahuje dve celé čísla r a c oddelené jedinou medzerou, $2 \leqq r \leqq c \leqq 1\,000$. Tieto čísla určujú počet riadkov a stĺpcov (v tomto poradí). Každý z nasledujúcich c riadkov v bloku obsahuje dve celé čísla oddelené jedinou medzerou. Čísla v $(i+1)$-vom riadku bloku ($1 \leqq i \leqq c$) označujú riadky obsahujúce biele štvorce v i-tom stĺpci.

Výstup. Pre i-ty blok ($1 \leqq i \leqq x$) má váš program vypísať do i-teho riadku súboru `SHO.OUT` buď postupnosť c čísel riadkov (susedné čísla sú oddelené jednou medzerou) tvoriacich korektnú sériu výstrelov na biele štvorce v stĺpcoch $1, 2, \ldots, c$, alebo slovo `NO`, ak taká séria neexistuje.

9. Medzinárodná olympiáda v informatike

V dňoch 30. novembra až 7. decembra 1997 sa konala v Kapskom meste (Juhoafrická republika) 9. Medzinárodná olympiáda v informatike (MOI). Súťaže sa zúčastnilo 229 súťažiacich zo 61 krajín sveta.

Slovenské družstvo bolo zostavené na základe výsledkov celoštátneho kola Matematickej olympiády kategórie P a výberového sústredenia, ktoré sa konalo v dňoch 8. – 14. júna 1997 na Matematicko-fyzikálnej fakulte Univerzity Komenského v Bratislave.

Výsledky výberového sústredenia:

1.	*Miroslav Dudík*	402,5	7.	*Ján Rusz*	277,3
2.	*Stanislav Funiak*	400,6	8.	*Peter Vasil*	253,2
3.	*Richard Kráľovič*	343,1	9.	*Vladimír Koutný*	251,4
4.	*Martin Hajduch*	341,0	10.	*Dávid Pál*	229,4
5.	*Vladimír Marko*	298,5	11.	*Martin Vašíček*	228,0
6.	*Ján Svoreň*	297,1	12.	*Roland Bott*	195,5

Slovensko teda na súťaži reprezentovali *Miroslav Dudík* z Gymnázia v Trebišove, *Stanislav Funiak* z Gymnázia v Sučanoch, *Martin Hajduch* z Gymnázia v Považskej Bystrici a *Richard Kráľovič* z Gymnázia J. Hronca v Bratislave. Vedúcou delegácie bola *RNDr. Gabriela Andrejková* z Prírodovedeckej fakulty Univerzity P. J. Šafárika v Košiciach, zástupcom vedúceho bol *Tomáš Vinař* z Matematicko-fyzikálnej fakulty Univerzity Komenského v Bratislave.

Samotná súťaž bola rozdelená do dvoch súťažných dní, pričom každý deň súťažiaci riešili 3 úlohy v čistom čase 5 hodín. Oproti minulým ročníkom MOI boli súťažné príklady odlišného charakteru. Všetky boli orientované na použitie heuristických metód, pričom sa hodnotilo skóre nájdeného riešenia oproti skóre najlepšieho riešenia nájdeného vzorovým programom. Na súťažiach MOI je takýto systém hodnotenia pomerne neobvyklý.

Zadania úloh neboli veľmi dobre pripravené. Na zasadnutiach vedení družstiev pred jednotlivými súťažnými dňami museli byť pôvodné formulácie výrazne upravované, aby ich bolo možné na súťaži použiť. Toto viedlo neskôr k technickým problémom pri vyhodnocovaní.

Aj napriek tejto situácii dosiahlo naše družstvo výborné výsledky, a to konkrétne:

Por.	Meno	Počet bodov	Medaila
15.	Miroslav Dudík	384	zlatá
26.	Stanislav Funiak	358	strieborná
39.	Martin Hajduch	335	strieborná
46.	Richard Kráľovič	311	strieborná

V neoficiálnom hodnotení krajín sa Slovensko umiestnilo na 2. mieste za Ruskom (1 zlatá a 3 strieborné medaily) a pred Čínou (1 zlatá, 2 strieborné a 1 bronzová medaila), Poľskom (2 zlaté a 2 bronzové medaily) a Dánskom (2 zlaté a 1 strieborná medaila).

Okrem súťaže organizátori pripravili množstvo ďalšieho programu (exkurzie, večery venované kultúre Južnej Afriky a Portugalska (budúci organizátor MOI), deň medzinárodnej spolupráce (pod záštitou firmy Microsoft) a iné. Tento program spolu s otváracím a záverečným ceremoniálom bol veľmi dobre pripravený a vytvoril výborné podmienky pre nadviazanie medzinárodných kontaktov ako medzi súťažiacimi, tak aj medzi vedúcimi delegácií.

Počas MOI'97 sa tiež konalo zasadnutie výboru Stredoeurópskej olympiády v informatike (CEOI). Členovia výboru rozhodli, že ďalší ročník CEOI sa bude konať v Zadare (Chorvátsko) v dňoch 20. – 27. mája 1998.

MOI'98 sa bude konať v dňoch 5.– 12. septembra 1998 v meste Setúbal v Portugalsku.

RNDr. Gabriela Andrejková, Tomáš Vinař

Zadania úloh 8. medzinárodnej olympiády v informatike

1. Prieskumný modul Marsu

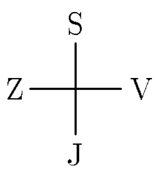
Počas budúcej misie pristane na Marse modul, ktorý bude obsahovať niekoľko prieskumných vozidiel MEV (malé elektrické vozidlo). Modul vyloží všetky vozidlá na povrch Marsu na mieste pristátia. Z tohoto miesta sa potom vozidlá budú presúvať k vysielačke, ktorá pristála neďaleko. Počas presunu k vysielačke odoberajú vozidlá vzorky hornín. Každú vzorku horniny možno odobrať iba raz. Odoberie ju prvé vozidlo, ktoré k nej dorazí. Vzorku nemožno odobrať druhýkrát, avšak iné MEV môže pozíciou, kde sa vzorka nachádzala, prejsť.

Vozidlá nemôžu prechádzať nebezpečným terénom. Sú zostrojené tak, že sa môžu presúvať len na juh a na východ po ceste vedúcej políčkami mriežky od modulu k vysielačke. Na jednom políčku mriežky môže byť v rovnakom čase aj viacero vozidiel MEV.

Upozornenie: Ak vozidlo MEV nemôže pokračovať v korektnom pohybe a nedosiahlo ešte vysielačku, jeho vzorky sú definitívne stratené.

Povrch planéty medzi modulom a vysielačkou je reprezentovaný pomocou mriežky $P \times Q$. Modul sa vždy nachádza na pozícii $(1, 1)$ a vysielačka na pozícii (P, Q). Typy terénu sú nasledovné: 0 – voľný terén, 1 – nebezpečný terén, 2 – terén so vzorkou.

Modul



0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Riadok 1
0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	
...									...	...
0	1	0	0	2	0	1	1	0	0	
0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	Riadok Q

Vysielačka

Úloha. Nájdite popis pohybu vozidiel s maximálnym skóre. Skóre závisí od počtu zozbieraných a k vysielačke prinesených vzoriek, ako aj od počtu vozidiel MEV, ktoré dorazili k vysielačke.

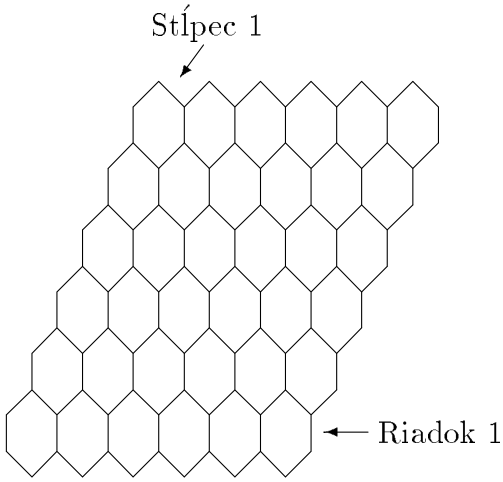
Vstup. Vstupný súbor je zadaný nasledovne: V prvom riadku sa nachádza celé číslo `PocetVozidiel` menšie ako 1 000, označujúce počet MEV, ktoré boli dovezené modulom. Hodnota P v druhom a Q v treťom riadku vstupného súboru označujú veľkosť mriežky. Každý z nasledujúcich Q riadkov obsahuje P medzerami oddelených celých čísel z intervalu $[0, 2]$, reprezentujúcich typy terénu na jednom riadku mriežky povrchu, počinajúc riadkom 1 a končiac riadkom Q. Pritom P ani Q neprekročia 128.

Výstup. Postupnosť riadkov reprezentujúca pohyb vozidiel MEV k vysielačke. Každý riadok obsahuje číslo vozidla a číslicu 0 resp. 1, kde 0 znamená posun na juh a 1 posun na východ.

Výpočet skóre. Skóre závisí od počtu zozbieraných vzoriek prinesených k vysielačke a od počtu vozidiel MEV, ktoré k vysielačke dorazili. Skóre = (počet zozbieraných a k vysielačke donesených vzoriek + počet vozidiel MEV, ktoré dorazili k vysielačke − počet vozidiel, ktoré nedorazili) vyjadrené percentuálne vzhľadom na maximálne možné skóre pre daný vstup.

2. Hra Hex

Hex je strategická hra pre dvoch hráčov, ktorá sa hrá na hracom pláne rovnobežníkového tvaru $N \times N$, pozostávajúceho zo šesťuholníkových políčok (*hexovnica*). Tvar pre $N = 6$ je uvedený na obrázku:



- Hráčmi sú váš program a vyhodnocovacia knižnica.
- Váš program začína.
- Hráči sa striedajú v kladení hracích kameňov (*hexovníčkov*) na hexovnicu.
- Hexovníček môže byť umiestnený na ľubovoľné voľné políčko na hexovnici.
- Dve políčka hexovnice sú susedné, práve ak majú spoločnú hranu.

– Dva hexovníčky (toho istého hráča), ktoré sa nachádzajú na susedných políčkach hexovnice sú *spojené*.
– Spojitosť je tranzitívna (a komutatívna): ak je hexovníček hex_1 spojený s hexovníčkom hex_2 a hex_2 je spojený s hexovníčkom hex_3, potom hex_3 je spojený s hex_1 a hex_1 je spojený s hex_3.

Úloha.

- Vytvorte program, ktorý hrá hru Hex.
- Cieľom prvého hráča (váš program) je spojiť niektorý z vašich hexovníčkov v stĺpci 1 s niektorým z vašich hexovníčkov v stĺpci N.
- Cieľom druhého hráča (vyhodnocovací program) je spojiť jeden z jeho hexovníčkov v riadku 1 s niektorým z jeho hexovníčkov v riadku N.
- Ak váš program hrá optimálne, vždy vyhrá.

Vstup a výstup. Váš program **nesmie** čítať a zapisovať žiadne súbory. Váš program **nesmie** očakávať vstup z klávesnice a **nesmie** vypisovať na obrazovku. Program získa všetky vstupné údaje pomocou funkcií v knižnici `HexLib`. Knižnica bude vytvárať výstupný súbor `HEX.OUT`; tento výstup ignorujte.

Na začiatku vášmu programu bude zadaná hexovnica, na ktorej môže byť už uložených niekoľko hexovníčkov, reprezentujúcich stav hry taký, že prvý hráč môže stále vyhrať. Váš program na zistenie stavu hexovnice musí použiť funkcie `GetMax` a `LookAtBoard`.

Na začiatku patrí vášmu programu aj vyhodnocovacej knižnici rovnaký počet hexovníčkov.

Obmedzenie.

– Veľkosť hexovnice bude vždy od 1 po 20.
– Váš program musí ukončiť hru do 200 ťahov. Celá hra musí byť ukončená do 40 sekúnd. Je zaručené, že vyhodnocovacia knižnica ukončí spracovanie všetkých ťahov spolu do 20 sekúnd.

Popis knižnice. K dispozícii máte knižnicu `HexLib`, ktorú musíte prilinkovať k vášmu programu.

Nasleduje popis funkcií v knižnici `HexLib` (v poradí Pascal, C/C++):

function LookAtBoard (*row*, *column***:integer):integer; int LookAtBoard(int** *row*; **int** *column***);**

vráti:

-1	ak $row < 1$ alebo $row > N$ alebo $column < 1$ alebo $column > N$,
0	ak sa na políčku nenachádza žiadny hexovníček,
1	ak sa na políčku nachádza váš hexovníček,
2	ak sa na políčku nachádza hexovníček patriaci knižnici.

procedure PutHex(*row*, *column*:integer); void PutHex(int *row*, int *column*);

umiestni váš hexovníček na políčko určené *row* a *column*, ak toto políčko nie je obsadené.

function GameIsOver:integer; int GameIsOver(void);

vráti jedno z nasledujúcich celých čísel:

0	ak hra nie je ukončená,
1	ak každá pozícia je obsadená,
2	ak váš program vyhral,
3	ak vyhrala knižnica.

procedure MakeLibMove; void MakeLibMove(void);

umožní knižnici vypočítať ďalší ťah a umiestni jej hexovníček na hexovnicu. Zmeny na hexovnici zistíte pomocou `LookAtBoard` a iných funkcií.

function GetRow:integer; int GetRow(void);

vráti číslo riadku, na ktorý bol knižnicou umiestnený posledný hexovníček alebo -1, ak doteraz nebol umiestnený žiadny hexovníček. Táto funkcia vždy vráti tú istú hodnotu, až kým váš program nezavolá `MakeLibMove` znovu.

function GetColumn:integer; int GetColumn(void);

vráti číslo stĺpca, na ktorý bol knižnicou umiestnený posledný hexovníček alebo -1, ak doteraz nebol umiestnený žiadny hexovníček. Táto funkcia vždy vráti tú istú hodnotu, až kým váš program nezavolá `MakeLibMove` znovu.

function GetMax:integer; int GetMax(void);

vráti veľkosť hexovnice N.

3. Jedovatý iShongololo

iShongololo je v reči Zulu meno pre zvláštnu stonožku. iShongololo je dlhé, lesklé a čierne článkované zvieratko s mnohými nožičkami. Živí sa „ovocím“, ktoré pre účely tohto príkladu budeme považovať za kváder s celočíselnými rozmermi L (dĺžka), W (šírka), H (výška).

Úloha. Vytvorte program, ktorý určí maximálny počet blokov zjedených zvieratkom iShongololo bez porušenia pravidiel. Program musí určiť činnosti tak, ako ich iShongololo bude postupne vykonávať pri požieraní ovocia.

iShongololo sa na začiatku nachádza mimo ovocia. Prvý blok, ktorý iShongololo musí zjesť, je $1, 1, 1$, a potom sa musí posunúť dovnútra tohoto bloku. Zastaví sa, keď už nemožno žiadne ďalšie bloky zjesť podľa pravidiel a nemôže sa viac posunúť.

Obmedzenia.

– iShongololo zaberá práve jeden prázdny blok.

– iShongololo môže zjesť naraz iba jeden kompletný blok.
– iShongololo sa nemôže dvakrát posunúť na to isté miesto (t.j. posunúť sa naspäť alebo križovať svoju cestu).
– iShongololo sa nemôže posunúť do nezjedeného bloku, ani mimo ovocia.
– iShongololo sa môže posúvať do alebo zjesť iba tie bloky, s ktorými má blok, v ktorom sa nachádza, spoločnú stenu. Navyše môže zjesť iba tie bloky, ktoré nemajú žiadne iné steny susedné s už zjedenými (prázdnymi) blokmi.

Vstup. Váš program dostane na vstup tri celé čísla, ktoré označujú dĺžku L, šírku W a výšku H kvádra. Každé z čísel L, W, H sa nachádza na samostatnom riadku. Všetky tri čísla budú od 1 do 32 (vrátane).

Výstup. Výstup pozostáva z riadkov, ktoré začínajú písmenom `E` (zjedz – eat) alebo `M` (posuň sa – move). Za týmto písmenom nasledujú tri celé čísla, ktoré reprezentujú zjedený blok alebo blok, do ktorého sa iShongololo presunul.

Hodnotenie. Celkové skóre je percentuálnym vyjadrením počtu zjedených blokov vzhľadom k autormi úlohy nájdenému najvyššiemu počtu zjedených blokov.

4. Rozpoznávanie znakov

Úloha. Napíšte program na rozpoznanie postupnosti jedného alebo viacerých znakov v obraze, ktorý sa nachádza v súbore `IMAGE.DAT` s použitím fontov, ktoré sa nachádzajú v súbore `FONT.DAT`.

Každý ideálny obraz znaku má 20 riadkov po 20 číslic. Každá číslica je 0 alebo 1 (pozri príklad obrazu znaku v súbore `FONT.DAT` alebo `IMAGE.DAT`).

Súbor `FONT.DAT` obsahuje reprezentácie 27 ideálnych obrazov znakov v tomto poradí:

□`abcdefghijklmnopqrstuvwxyz`,

kde □ reprezentuje medzeru.

Súbor `IMAGE.DAT` obsahuje jeden alebo niekoľko potenciálne pokazených obrazov znakov. Obraz znaku môže byť pokazený nasledujúcimi spôsobmi:

– najviac jeden riadok môže byť zdvojený (a kópia sa nachádza bezprostredne za originálom)
– najviac jeden riadok môže byť vynechaný
– niektoré 0 môžu byť zmenené na 1
– niektoré 1 môžu byť zmenené na 0. Žiadny obraz znaku nemá súčasne zdvojený aj vynechaný riadok. Vo vstupných údajoch pre vyhodnocovanie v žiadnom obraze znaku nie je zmenených viac než 30% núl a jedničiek.
– v prípade zdvojenia riadku, jeden alebo oba výsledné riadky môžu byť pokazené, a toto pokazenie môže byť pre oba riadky rôzne.

Pokazený obraz znaku rozpoznáte tak, že vyberiete obraz takého znaku z fontu, ktorý vyžaduje najmenší celkový počet zmien jedničiek na nuly a naopak, aby ste získali pokazený obraz. Uvažujte aj o možnosti vypustenia alebo zdvojenia riadku. Dobre navrhnutý program by mal rozpoznať všetky znaky v dátach, ktoré budú použité pri vyhodnocovaní. Pre dáta, použité pri vyhodnocovaní, existuje jednoznačné riešenie.

Správne riešenie použije všetky údaje poskytnuté vo vstupnom súbore `IMAGE.DAT`.

Vstup. Na začiatku oboch vstupných súborov sa nachádza celé číslo N, $(19 \leqq N \leqq 1\,200)$, ktoré určuje počet riadkov za ním nasledujúcich. Každý riadok dát má šírku 20 číslic. Medzi jednotlivými číslicami sa nenachádzajú žiadne oddeľujúce medzery.

Font je popísaný v súbore `FONT.DAT`, ktorý má vždy 541 riadkov a môže sa líšiť pre každý vstup, ktorý bude použitý pri vyhodnocovaní.

Výstup. Program vytvorí súbor `IMAGE.OUT`, ktorý bude obsahovať reťazec rozpoznaných znakov v tvare jedného riadku ASCII textu. Okrem rozpoznaných znakov výstup nesmie obsahovať žiadny oddeľujúci znak. Ak váš program nerozpozná niektorý znak, na odpovedajúcu pozíciu vo výstupnom súbore zapíše znak `?`.

Príklad vstupu. V ľavom stĺpci sa nachádza príklad *časti* súboru `FONT.DAT` (znak `a`). V pravom stĺpci sa v súbore `IMAGE.DAT` (bez prvého riadku) nachádza pokazený znak `a`).

00000000000000000000	00000000000000000000
00000000000000000000	00000000000000000000
00000000000000000000	00000000000000000000
00000011100000000000	00000011100000000000
00000111111011000000	00100111011011000000
00001111111001100000	00001111111001100000
00001110001100100000	00001110001100100000
00001100001100010000	00001100001100010000
00001100000100010000	00001100000100010000
00000100000100010000	00000100000100010000
00000010000000110000	00000010000000110000
00000001000001110000	00001111011111110000
00001111111111110000	00001111111111110000
00001111111111110000	00001111111111000000
00001111111111000000	00001000010000000000
00001000000000000000	00000000000000000000
00000000000000000000	00000000000001000000
00000000000000000000	00000000000000000000
00000000000000000000	00000000000000000000
00000000000000000000	
`FONT.DAT`	`IMAGE.DAT`

5. Ukladanie kontajnerov

Spoločnosť Neptune Cargo Company má v prevádzke sklad slúžiaci na skladovanie kontajnerov. Tento sklad prijíma kontajnery na uschovanie a neskoršie vyzdvihnutie.

Kontajnery prichádzajú do skladu každú hodinu a zostávajú tam kladný celočíselný počet hodín. Pri uschovaní kontajnera je v jeho dokumentácii obsiahnutý predpokladaný čas, kedy bude vyzdvihnutý. Prvý kontajner je uschovaný v čase 1. Skutočný čas, v ktorom bude kontajner vyzdvihnutý, sa líši od predpokladaného času nanajvýš o 5 hodín. V tejto úlohe je čas meraný v hodinách a nepresiahne hodnotu 150.

Sklad má tvar kvádra s dĺžkou X, šírkou Y a výškou Z. Každý kontajner je kocka $1 \times 1 \times 1$. Kontajnery sú ukladané na iné kontajnery alebo na podlahu žeriavom. Žeriav sa môže pohybovať len nad daným úložným priestorom. Uschováva doň a vyzdvihuje z neho kontajnery a niekedy ich preusporiadava vo vnútri úložného priestoru. Môže manipulovať iba s kontajnermi, ktoré sú na vrchu ktoréhokoľvek stĺpca kontajnerov.

Presúvanie kontajnera z jednej pozície na inú je vždy považované za jeden presun žeriava. Všetky presuny žeriava sa vykonávajú medzi uloženiami resp. vyzdvihnutiami kontajnerov a vykonávajú sa okamžite.

Úloha. Napíšte program s dobrou stratégiou na uschovávanie, skladovanie a vyzdvihovanie kontajnerov. Dobrá stratégia je taká, ktorá minimalizuje celkový počet posunutí, ktoré žeriav vykoná.

Keď sa sklad naplní, váš program musí odmietnuť uloženie ďalších kontajnerov. V prípade, že sklad je skoro plný, sa váš program môže stať menej efektívnym, alebo môže byť vôbec neschopný pokračovať. Môže teda odmietnuť uloženie ďalšieho kontajnera kedykoľvek.

Vstup. Váš program bude spolupracovať so simulačným modulom, ktorý bude poskytovať údaje, a do ktorého bude váš program oznamovať činnosti a posielať správy. Do vášho programu musíte prilinkovať knižnicu `StackLib`. Počas ladenia vášho programu bude knižnica vracať hodnoty pre jeden malý konkrétny vstup.

Sklad je pri spustení vášho programu prázdny a jeho rozmery X, Y a Z neprekročia hodnotu 32.

Váš program môže hocikedy volať nasledujúce funkcie:

int GetX(); function GetX:integer; – vráti dĺžku úložného priestoru (celé číslo).

int GetY(); function GetY:integer; – vráti šírku úložného priestoru (celé číslo).

int GetZ(); function GetZ:integer; – vráti výšku úložného priestoru (celé číslo).

Každý kontajner je jednoznačne identifikovaný kladným celým číslom. Nasledujúce funkcie poskytujú informácie o postupnosti činností (uschovanie a vyzdvihnutie kontajnera). Požiadavky na uschovanie prichádzajú vždy presne v celú hodinu a požiadavky na vyzdvihnutie vždy medzi dvoma celými hodinami. **Pre účely predpokladaného času uschovania každá požiadavka na uschovanie znamená uplynutie jednej hodiny času**.

int GetNextContainer(); function GetNextContainer:integer;

Vráti číslo kontajnera, ktorý má byť najbližšie uschovaný alebo vyzdvihnutý. Ak nie sú žiadne ďalšie požiadavky na vyzdvihnutie alebo uschovanie kontajnera, vráti funkcia hodnotu 0, čo znamená, že váš program má ukončiť činnosť, a to aj v prípade, že nejaké kontajnery ešte zostali v sklade.

int GetNextAction(); function GetNextAction:integer;

Vráti celé číslo, ktoré reprezentuje najbližšiu požadovanú činnosť: 1 – uschovať nový kontajner, 2 – vyzdvihnúť kontajner.

int GetNextStorageTime(); function GetNextStorageTime:integer;

Vráti v hodinách (absolútne od začiatku behu programu) predpokladaný čas vyzdvihnutia kontajnera. Táto hodnota je poskytovaná pre plánovanie vo vašom programe; skutočná požiadavka na vyzdvihnutie môže prísť o niečo skôr alebo neskôr (nanajvýš však o 5 hodín). Hodnota funkcie `GetNextStorageTime` má význam iba v prípade, že funkcia `GetNextAction` vráti hodnotu 1.

Nezáleží na poradí volania vyššieuvedených troch funkcií. Po sebe nasledujúce volania `GetNextContainer`, `GetNextAction` a `GetNextStorageTime` vrátia vždy informáciu o tom istom kontajneri, až kým tento nebude odmietnutý, uschovaný alebo vyzdvihnutý (od tohto momentu vyššieuvedené funkcie budú vracať informáciu o ďalšom kontajneri).

Výstup. Keď váš program získa potrebnú informáciu o ďalšom kontajneri, použite nasledujúce funkcie na manipuláciu s úložným priestorom:

int MoveContainer(int $x1$, int $y1$, int $x2$, int $y2$);

function MoveContainer($x1$,$y1$,$x2$,$y2$:integer):integer;

Vezme kontajner, ktorý sa nachádza na vrchu stĺpika kontajnerov na pozícii $(x1, y1)$ a položí ho na vrch stĺpika kontajnerov na pozícii $(x2, y2)$. Vráti 1, ak operáciu možno vykonať, 0, ak operáciu nemožno vykonať.

void RefuseContainer(); procedure RefuseContainer();

Odmietne uschovať kontajner.

void StoreArrivingContainer(int x, int y);

procedure StoreArivingContainer(x,y:integer);

Uloží kontajner, ktorý je potrebné uschovať, na vrchol stĺpika kontajnerov na pozícii (x, y).

void RemoveContainer(int x, int y);

procedure RemoveContainer(x,y:integer);

Vyzdvihne kontajner z vrcholu stĺpika kontajnerov na pozícii (x, y) zo skladu.

Ak váš program nemôže vykonať požadovanú činnosť, musí skončiť. Nesprávne kroky sú knižnicou ignorované a nemajú žiadny efekt na stav simulácie ani na hodnotenie.

Od vášho programu sa nevyžaduje žiadny výstupný súbor. Knižnica, s ktorou váš program spolupracuje, bude vypisovať `log` súbor činností. Tento súbor bude používaný na vyhodnocovanie.

Časovanie. Váš program dostane informáciu o ďalšej požiadavke na uschovanie alebo vyzdvihnutie kontajnera. Potom, ak je to potrebné, môže pomocou žeriava presúvať a postupne uschovávať, vyzdvihovať, alebo odmietať kontajnery.

Hodnotenie. Program bude testovaný pomocou niekoľkých vstupov a pre každý vstup bude hodnotená jeho výkonnosť oproti nám známemu najefektívnejšiemu riešeniu použitím nasledujúcich ukazovateľov:

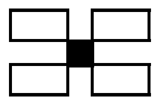
- Celkový počet presunov žeriava vo vašom programe.
- Penalizácia 5 presunov za každý odmietnutý kontajner.
- Penalizácia 5 presunov za každý neuschovaný a nevyzdvihnutý kontajner (ak program skončí normálne pred tým, než sú všetky operácie vykonané).
- Celkové skóre bude vypočítané vzhľadom k najlepšiemu známemu riešeniu.
- Ak program vykoná viac ako dvojnásobok nutných operácií, je hodnotený 0 bodmi.

6. Popisovanie máp

Predstavte si, že ste asistentom kartografa a dostali ste za úlohu zapísať mená miest do novej mapy.

Mapa je reprezentovaná mriežkou $1\,000 \times 1\,000$ políčok. Každé mesto zaberá na mape práve jedno políčko. Mená miest majú byť umiestnené na mape do obdĺžnikov, ktoré pozostávajú z políčok mriežky. Tieto obdĺžniky nazvime *popiskami.*

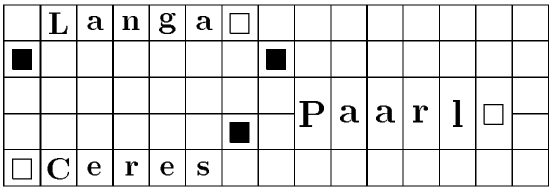
Mesto so štyrmi možnými umiestneniami popisky:



Umiestnenie popisiek musí spĺňať nasledujúce obmedzenia:

- popiska mesta sa musí nachádzať v jednej zo štyroch pozícií vzhľadom na mesto tak, ako je to nakreslené na obrázku vyššie;
- popisky sa nesmú prekrývať;
- popisky nesmú prekrývať mestá;
- popisky sa musia celé nachádzať na mape.

Každá popiska obsahuje všetky písmená z názvu mesta a jednu medzeru. Pre každé mesto bude daná šírka a výška písmen jeho názvu; medzera má takú istú veľkosť ako písmeno.



□ reprezentuje medzeru
■ reprezentuje pozíciu mesta

Stĺpce sú očíslované zľava doprava, pričom najľavejší stĺpec má číslo 0. Riadky sú očíslované zdola nahor, pričom najspodnejší riadok má číslo 0. Na obrázku je zobrazená spodná ľavá časť mapy pre mestá Langa (na pozícii $(0, 3)$), Ceres (na pozícii $(6, 1)$) a Paarl (na pozícii $(7, 3)$). Všetky popisky sú správne umiestnené, aj keď toto umiestnenie nie je jediné možné.

Úloha. Váš program načíta rozmiestnenie miest na mape, za ktorým nasledujú rozmery písmen a meno mesta. Program má rozmiestniť na mape najväčší možný počet popisiek miest, pričom neporuší vyššieuvedené obmedzenia. Do výstupného súboru program vypíše rozmiestnenie popisiek, ktoré boli na mapu umiestnené.

Vstup. Vstupný súbor začína riadkom obsahujúcim celé číslo N, ktoré vyjadruje počet miest na mape. Pre každé mesto sa ďalej v súbore nachádza riadok obsahujúci číselné údaje popisujúce

> horizontálnu súradnicu X polohy mesta, vertikálnu súradnicu Y polohy mesta, celočíselnu šírku W písmen v mene mesta, celočíselnu výšku H písmen v mene mesta a samotné meno mesta, ktoré je vždy jednoslovné.

Jednotlivé údaje sú oddeľované medzerou, počet miest je nanajvýš 1 000 a žiadne meno mesta nemá viac než 200 znakov.

Výstup. Váš program vytvorí výstupný súbor s N riadkami. Každý riadok bude obsahovať horizontálnu a vertikálnu súradnicu (v tomto poradí) polohy ľavého horného políčka popisky mesta (tieto čísla budú oddelené medzerou). Ak váš program neumiestnil popisku pre mesto, na výstup zapíše `-1 -1`.

Riadky musia byť vo výstupnom súbore v tom istom poradí, v akom sa mestá nachádzali vo vstupnom súbore.

Hodnotenie. Hodnotenie je percentuálnym vyjadrením počtu vašim programom umiestnených popisiek vzhľadom k riešeniu organizátorov. Ak niektorá popiska poruší obmedzenia, program získava 0 bodov, rovnako, ako v prípade, ak umiestnenie popisky nesúhlasí so skutočným menom príslušného mesta.

Korešpondenčný seminár SK MO

V 46. ročníku matematickej olympiády SK MO prebiehal pre najúspešnejších olympionikov predchádzajúceho ročníka MO zo Slovenska korešpondenčný seminár SK MO. Po minuloročnej zmene názvu seminára z KS ÚV MO na KS ÚK MO sa jeho názov zmenil na terajší KS SK MO. Tento korešpondenčný seminár vznikol už v 24. ročníku MO preto, aby bolo umožnené venovať individuálnu starostlivosť aj tým študentom, ktorí nenavštevovali triedy so zameraním na matematiku. V súčasnosti, pretože existuje veľké množstvo iných matematických korešpondenčných seminárov (napríklad krajských, ktorým je venovaná samostatná kapitola), a pretože počet škôl zo zameraním na matematiku stúpol, seminár SK MO sa zameriava na zlepšenie prípravy všetkých študentov, ktorí preukázali svoje schopnosti v predchádzajúcich ročníkoch MO. Keďže úlohy tohoto seminára svojou náročnosťou prevyšujú akúkoľvek inú matematickú súťaž pre stredoškolákov, seminár sa stáva dôležitou súčasťou prípravy aj na medzinárodnú matematickú olympiádu. V 44. ročníku MO bol KS SK MO prvýkrát zorganizovaný samostatne na Slovensku. Pozostáva tradične z piatich sérií, v každej je zadaných sedem príkladov. Do riešenia sa v tomto ročníku zapojilo spolu 40 študentov zo všetkých krajov. Medzi desiatimi najúspešnejšími riešiteľmi boli všetci 6 členovia slovenskej delegácie na MMO, z nich piati skončili na prvých šiestich miestach.

Korešpondenčný seminár viedol *Richard Kollár* a opravovanie zabezpečovali študenti a pracovníci MFF UK (všetko bývalí olympionici).

Celkové poradie KS SK MO 1997/98

1. *Peter Kozák*, 2 Gymnázium Sučany, 69 bodov;
2. *Peter Novotný*, 2 Gymnázium Veľká Okružná, Žilina, $57,5$ bodu;
3. *Ján Špakula*, 3 Gymnázium Poštová, Košice, 56 bodov;
4. *Pavol Novotný*, 3 Gymnázium Veľká Okružná, Žilina, 52 bodov;
5. *Miroslav Dudík*, 4 Gymnázium Trebišov, $49,5$ bodu;
6. *Viera Růžičková*, 3 Gymnázium Veľká Okružná, $48,5$ bodu;
7. *Peter Svrček*, 3 Gymnázium Veľká Okružná, Žilina, $47,5$ bodu;
8. *Peter Bodík*, 3 Gymnázium Poštová Košice, 38 bodov.

Uvádzame všetky príklady tohto ročníka súťaže spolu s riešeniami, prevažne študentskými. Príklady boli vyberané z príkladov zo jury MMO a z národných olympiád, či iných súťaží týchto krajín: India, Bielorusko, Maďarsko, Izrael, Kanada, Japonsko.

Zadania súťažných úloh KS SK MO

Prvá séria

1.1 Množina M je takou podmnožinou množiny $\{1, 2, 3, \dots, 15\}$, že súčin žiadnych troch rôznych prvkov M nie je druhou mocninou prirodzeného čísla. Určte najväčší možný počet prvkov tejto množiny.

1.2 Nech a, b a c sú kladné reálne čísla, pre ktoré platí $abc = 1$. Dokážte, že platí

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \leqq 1.$$

Kedy nastáva rovnosť?

1.3 Do štvorčekov šachovnice 5×5 dvaja hráči striedavo vpisujú po jednom prirodzenom čísle. Prvý hráč vpisuje číslo 1, druhý číslo 0. Keď zaplnia celú šachovnicu, spočítajú súčet čísel v každom z deviatich možných štvorcoch 3×3. Označme A maximum týchto súčtov. Prvý hráč sa snaží v tejto hre dosiahnuť čo najväčšiu hodnotu A. Akú najväčšiu hodnotu A môže zaručiť, nezávisle na hre súpera?

1.4 Daná je funkcia f, $f : \mathbb{R} \to \langle -1, 1 \rangle$ taká, že pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$f\left(x + \frac{13}{42}\right) + f(x) = f\left(x + \frac{1}{6}\right) + f\left(x + \frac{1}{7}\right).$$

Dokážte, že f je periodická funkcia.

1.5 Daný je lichobežník $ABCD$ s $BC \| AD$. Označme po rade M, P a Q stredy strán CD, MA a MB. Priesečník DP a CQ označme N. Dokážte, že bod N leží vnútri trojuholníka ABM.

1.6 Nech n, p, q sú prirodzené čísla. pre ktoré $n > p + q$. Nech $x_0, x_1, \dots, x_n$ sú celé čísla spĺňajúce nasledujúce podmienky:
a) $x_0 = x_n = 0$;
b) pre každé celé číslo i, $1 \leqq i \leqq n$ je buď $x_i - x_{i-1} = p$, alebo $x_i - x_{i-1} = -q$.
Ukážte, že existuje dvojica indexov (i, j) taká, že $i < j$, $(i, j) \neq (0, n)$ a $x_i = x_j$.

1.7 Nech $ABCDEF$ je konvexný šesťuholník taký, že AB je rovnobežné s DE, BC je rovnobežné s EF a CD je rovnobežné s AF. Označme R_A, R_C a R_E po rade polomery kružníc opísaných trojuholníkom FAB, BCD a DEF a nech p je obvod daného šesťuholníka. Dokážte, že platí $R_A + R_C + R_E \geqq \dfrac{p}{2}$.

Druhá séria

2.1 Pre každé prirodzené číslo n označme $S(n)$ najväčšie prirodzené číslo s nasledujúcou vlastnosťou: pre každé prirodzené číslo $k \leqq S(n)$ môžeme číslo n^2 napísať ako súčet k štvorcov prirodzených čísel.
a) Dokážte, že $S(n) \leqq n^2 - 14$ pre $n \geqq 4$.
b) Nájdite prirodzené číslo n, pre ktoré $S(n) = n^2 - 14$.
c) Dokážte, že existuje nekonečne veľa prirodzených čísel n, pre ktoré $S(n) = n^2 - 14$.

2.2 Dokážte, že spomedzi 101 obdĺžnikov so stranami kladnej celočíselnej dĺžky neprevyšujúcej 100 možno vybrať tri $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ také, že $\mathcal{A}$ sa vojde do $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}$ sa vojde do $\mathcal{C}$. (Obdĺžniky musia mať jednu stranu umiestnenú vodorovne.)

2.3 Daná je kružnica k, jej dotyčnica l a na l bod M. Nájdite geometrické miesto bodov P s nasledujúcou vlastnosťou: Na priamke l existujú body Q a R také, že M je stred QR a k kružnica vpísaná trojuholníku PQR.

2.4 Pre trojicu bodov P, Q a R ležiacich v tej istej rovine označme $m(PQR)$ minimum z dĺžok výšok trojuholníka PQR (ak sú P, Q a R kolineárne, $m(PQR) = 0$). V rovine sú dané sú tri body A, B a C. Dokážte, že pre ľubovoľný bod X tejto roviny platí:

$$m(ABC) \leqq m(ABX) + m(AXC) + m(XBC).$$

2.5 Na nekonečnej šachovnici možno hrať nasledujúcu hru: Na začiatku je v niektorom zo štvorcov $n \times n$ umiestnených n^2 mydiel (v každom políčku jedno). V jednom ťahu môže mydlo preskočiť vo vodorovnom alebo zvislom smere cez mydlo na susednom políčku a premiestniť sa na voľné miesto hneď za týmto políčkom. Po tomto ťahu preskočené mydlo odložíme preč zo šachovnice. Nájdite tie n, pre ktoré sa hra môže skončiť len s jedným mydlom na šachovnici.

2.6 V trojuholníku ABC označme priesečníky osí uhlov β a γ s protiľahlými stranami po rade D a E. Určte uhly trojuholníka ABC, ak $|\sphericalangle BDE| = 24°$ a $|\sphericalangle CED| = 18°$.

2.7 Všimnime si, že číslo $12^2 = 144$ sa končí na dve štvorky. Určte dĺžku najdlhšieho bloku rovnakých nenulových číslic, na ktorý sa môže končiť štvorec prirodzeného čísla.

Tretia séria

3.1 Nájdite všetky prirodzené čísla a a b pre ktoré platí

$$\left\lfloor \frac{a^2}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b^2}{a} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a^2 + b^2}{ab} \right\rfloor + ab.$$

(Symbolom $\lfloor x \rfloor$ označujeme dolnú celú časť čísla x.)

3.2 V ostrouhlom trojuholníku ABC platí $|BC| > |CA|$. Označme O stred jeho opísanej kružnice, H jeho ortocentrum a F pätu jeho výšky CH. Ďalej označme P priesečník kolmice na priamku OF v bode F so stranou CA. Dokážte, že $|\sphericalangle FHP| = |\sphericalangle BAC|$.

3.3 Nech $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $(n \geqq 3)$, sú reálne čísla z intervalu $\langle 2, 3\rangle$ a nech s je ich súčet. Dokážte, že

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2}{a_1 + a_2 - a_3} + \frac{a_2^2 + a_3^2 - a_4^2}{a_2 + a_3 - a_4} + \ldots + \frac{a_n^2 + a_1^2 - a_2^2}{a_n + a_1 - a_2} \leqq 2s - 2n\,.$$

3.4 Strany dvoch obdĺžnikov sú po rade $\{a, b\}$ a $\{c, d\}$, kde $a < c \leqq d < b$ a $ab < cd$. Dokážte, že prvý obdĺžnik možno umiestniť do druhého práve vtedy, keď

$$(b^2 - a^2)^2 \leqq (bd - ac)^2 + (bc - ad)^2\,.$$

3.5 Na kružnici sú vyznačené štyri celé čísla. V každom kroku naraz vymeníme každé z čísel rozdielom tohto čísla a susedného čísla v smere hodinových ručičiek (teda čísla a, b, c a d budú nahradené číslami $a - b$, $b - c$, $c - d$ a $d - a$). Možno dosiahnuť, aby sme po 1997 takýchto krokoch dostali na kružnici štyri čísla a, b, c a d tak, že čísla $|bc - ad|$, $|ac - bd|$ a $|ab - cd|$ sú všetky prvočísla?

3.6 Nech $P(x)$ je polynóm s reálnymi koeficientami, $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Dokážte, že ak $|P(x)| \leqq 1$ pre každé x, $|x| \leqq 1$, tak

$$|a| + |b| + |c| + |d| \leqq 7.$$

3.7 Nech k, m a n sú prirodzené čísla, pre ktoré platí $1 < n \leqq m - 1 \leqq k$. Určte najväčšiu mohutnosť podmnožiny $\mathcal{S}$ množiny $\{1, 2, \ldots, k\}$, v ktorej súčet žiadnych n rôznych prvkov nedáva súčet menší ako m.

ŠTVRTÁ SÉRIA

4.1 Dve muchy $\mathcal{F}$ a $\mathcal{M}$ lietajú vo vnútri miestnosti tvaru kocky s rozmermi 10 m $\times$ 10 m $\times$ 10 m. Na začiatku sú muchy $\mathcal{F}$ a $\mathcal{M}$ po rade v ľubovoľných bodoch A a B kocky. Po nejakom čase je $\mathcal{F}$ v bode B a $\mathcal{M}$ v bode A.

a) Dokážte, že v nejakom čase bola vzdialenosť medzi $\mathcal{F}$ a $\mathcal{M}$ menšia ako 15 metrov.

b) Zistite, či si mohli muchy vymeniť miesta tak, aby vzdialenosť medzi nimi bola po celý čas práve 14 metrov (pre ľubovoľnú začiatočnú polohu).

4.2 Polynómy $P(x)$ a $Q(x)$ s reálnymi koeficientami majúce aspoň jeden reálny koreň spĺňajú pre všetky reálne čísla x rovnosť

$$P(1 + x + Q(x)^2) = Q(1 + x + P(x)^2).$$

Dokážte, že $P(x) \equiv Q(x)$.

4.3 Nech O je stred vpísanej kružnice trojuholníka ABC a P, Q a R sú po rade ťažiská trojuholníkov BOC, AOC a AOB. Dokážte, že stred vpísanej kružnice trojuholníka PQR a ťažisko trojuholníka ABC sú totožné.

4.4 Do štvoruholníka $ABCD$ je vpísaná kružnica k. Body K, L, M a N sú po rade dotykové body tejto kružnice so stranami AB, BC, CD a DA štvoruholníka $ABCD$. Predĺženia strán DA a CB sa pretínajú v bode S a predĺženia strán BA a CD sa pretínajú v bode P. Dokážte, že ak body S, K a M ležia na jednej priamke, potom aj body P, N a L ležia na jednej priamke.

4.5 Daných je šesť úsečiek tak, že každá trojica z nich môže byť trojicou strán nejakého trojuholníka. Dvaja hráči hrajú s týmito úsečkami hru s nasledujúcimi pravidlami:
V každom ťahu si každý hráč vezme jednu úsečku. Začína prvý hráč a ďalej sa v ťahoch striedajú až kým nezoberie druhý hráč poslednú úsečku. Vyhráva ten z nich, ktorý môže z úsečiek poskladať trojuholník s väčším obsahom. Dokážte, že pre prvého hráča existuje neprehrávajúca stratégia.

4.6 Pre prirodzené čísla m a n platí $m(m+2) = 2n(n+2)$. Dokážte, že platí

$$\sum_{k=0}^{n} \lfloor k \cdot \sqrt{2} \rfloor = \sum_{k=0}^{m} \left\lfloor k \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rfloor .$$

(Symbolom $\lfloor x \rfloor$ označuje dolnú celú časť čísla x.)

4.7 Zistite, či existuje prirodzené číslo n, $n > 1$, spĺňajúce nasledujúcu podmienku: Množina prirodzených čísel sa dá rozložiť na n neprázdnych podmnožín tak, že ak vyberieme ľubovoľný súčet $n-1$ čísel z $n-1$ ľubovoľných rôznych podmnožín, tak tento súčet patrí zostávajúcej n-tej podmnožine.

Piata séria

5.1 Rovnica

$$x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx + 1 = 0$$

s reálnymi koeficientami a, b má aspoň jeden reálny koreň. Nájdite najmenšiu možnú hodnotu súčtu $a^2 + b^2$.

5.2 Dané je prirodzené číslo n, $n > 2$, také, že n^2 možno zapísať ako rozdiel tretích mocnín dvoch za sebou idúcich prirodzených čísel. Dokážte, že n je súčtom dvoch štvorcov. Nájdite aspoň jedno také číslo n.

5.3 Nech $r_1, r_2, \ldots, r_m$ sú kladné racionálne čísla, pre ktoré platí $\sum_{k=1}^{m} r_k = 1$. Definujme funkciu f predpisom

$$f(n) = n - \sum_{k=1}^{m} \lfloor r_k n \rfloor \quad \text{pre každé prirodzené číslo } n.$$

Určte najmenšiu a najväčšiu možnú hodnotu $f(n)$ ($\max_n f(n)$, $\min_n f(n)$) vzhľadom na $r_1, \dots, r_m$. (Symbolom $\lfloor x \rfloor$ označujeme dolnú celú časť čísla x.)

5.4 Trojuholník ABC je rovnoramenný ($|AB| = |AC|$). Označme D priesečník osi uhla ABC so stranou AC. Určte veľkosť uhla BAC, ak platí $|BC| = |BD| + |AD|$.

5.5 Daný je pravidelný štvorsten. Označme φ veľkosť najväčšieho zo šiestich uhlov, ktoré zvierajú jeho hrany s vodorovnou rovinou. Určte najmenšiu možnú hodnotu φ pre všetky možné polohy štvorstena vzhľadom na horizontálnu rovinu.

5.6 Dané je reálne číslo x, $x > 1$, ktoré nie je celé. Označme

$$a_n = \lfloor x^{n+1} \rfloor - x \lfloor x^n \rfloor, \quad n = 1, 2, \dots$$

Dokážte, že postupnosť čísel $\{a_n\}$ nie je periodická. (Symbolom $\lfloor x \rfloor$ označujeme dolnú celú časť čísla x.)

5.7 Na stranách AB a BC daného trojuholníku ABC sú dané po rade body X a N tak, že

$$|AX| \cdot |BN| = 2 \cdot |BX| \cdot |CN| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle BNX| = |\sphericalangle ANC|.$$

Zistite, akú veľkosť môže mať uhol ACB.

Riešenia súťažných úloh KS SK MO

Prvá séria

1.1 *(Miroslav Dudík)* Najprv ukážeme, že z M musíme vylúčiť aspoň 5 prvkov. Budeme postupovať sporom. Predpokladajme teda, že stačí vylúčiť 4 prvky alebo menej.

Z trojíc 1, 4, 9; 2, 3, 6; 8, 7, 14; 12, 5, 15 musíme vylúčiť po jednom prvku (sú disjunktné a súčin čísel v každej z nich je druhá mocnina). Na základe predpokladu teda z každej z nich vylúčime práve jeden prvok a okrem nich už nemôžeme vylúčiť žiaden iný. Keďže nemožno vylúčiť číslo 10, treba vylúčiť jedno z čísel 6, 15 (pretože $10 \cdot 6 \cdot 15 = 30^2$).

Z 1, 4, 9 určite ostanú dva prvky. Ľubovoľný z nich vynásobený s $3 \cdot 12$, resp. $2 \cdot 8$ však dáva druhú mocninu. Teda musíme vylúčiť aspoň jeden z 2, 8 aj z 3, 12. V týchto dvojiciach sa nenachádza ani 7 ani 14. Musíme teda vylúčiť 8 (inak by bolo treba vylúčiť 7 alebo 14, čo by spolu s 1, resp. 4, resp. 9 dávalo aspoň 5 vylúčených). Teda 2 isto nemožno vylúčiť. V dvojiciach 2, 8 a 3, 12 sa nenachádzajú ani čísla 5, 10, t.j. aj tieto budú v hľadanej podmnožine. Avšak $2 \cdot 5 \cdot 10 = 10^2$, čo je spor s predpokladom.

Teraz ukážeme, že stačí vylúčiť 5 prvkov. Budú to napr. prvky 1, 2, 3, 8, 15. Ostala nám teda podmnožina $N = \{4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$. To, že táto podmnožina vyhovuje podmienkam úloh sa už ľahko overí.

Hľadaný počet prvkov je preto 10.

1.2 Platí

$$\begin{aligned} a^5 + b^5 &= (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) = \\ &= (a+b)\left((a-b)^2(a^2+ab+b^2) + a^2b^2\right) \geqq \\ &\geqq a^2b^2(a+b), \end{aligned}$$

rovnosť nastáva práve vtedy, keď $a = b$. Tento dôkaz sa dá urobiť aj nasledovne:

$$\begin{aligned} a^5 + b^5 - a^3b^2 - a^2b^3 &\geqq 0, \\ a^3(a^2 - b^2) + b^3(b^2 - a^2) &\geqq 0, \\ (a^3 - b^3)(a^2 - b^2) &\geqq 0. \end{aligned}$$

všetky úpravy boli ekvivalentné a posledná nerovnosť je pre dvojicu kladných reálnych čísel triviálna.

Preto

$$\begin{aligned} \frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} &\leqq \frac{ab}{a^2b^2(a+b) + ab} = \frac{1}{ab(a+b)+1} = \\ &= \frac{1}{ab(a+b+c)} = \frac{c}{(a+b+c)}. \end{aligned}$$

Potom vzhľadom na cyklickú zámenu

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca} \leqq \frac{c}{(a+b+c)}+\frac{a}{(a+b+c)}+\frac{b}{(a+b+c)}=1,$$

čo bolo treba dokázať. Rovnosť zrejme nastáva práve vtedy, keď $a=b=c=1$.

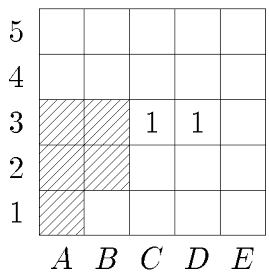
1.3 Najprv popíšeme stratégiu prvého hráča (ďalej $\mathcal{H}_1$) zaručujúcu $A \geqq 6$ nezávisle na hre súpera.

1.ťah: „1“ $\to$ C3 (obr. 1). Bez ujmy na všeobecnosti druhý hráč vpíše „0“ do jedného zo štvorčekov A1, A2, A3, B2 alebo B3 (pozri vyšrafovaný útvar na obr. 1).

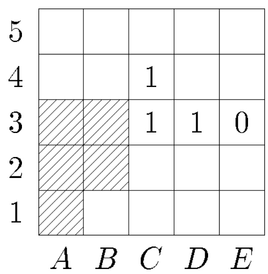
2.ťah: „1“ $\to$ D3. Hráč $\mathcal{H}_2$ je teraz nútený vpísať „0“ do štvorca 3×3 s ľavým horným rohom v C5 (ďalej budeme takýto štvorec označovať S_{C5}). Inak by totiž $\mathcal{H}_1$ ľahko na zvyšných sedem políčok v tomto štvorci vpísal aspoň štyri „1“, čím by v ňom získal aspoň šesť „1“. Analogická je situácia aj v štvorci S_{C3} (obr. 1). Keďže jediné voľné políčko v prieniku týchto štvorcov je E3, potom druhý hráč musí ťahať „0“ $\to$ E3.

3.ťah: „1“ $\to$ C4. V každom zo štvorcov S_{B5}, S_{B4}, S_{C5}, S_{C4} sú teraz tri „1“ a najviac jedna „0“ (obr. 2). Pokiaľ by $\mathcal{H}_2$ nevpísal „0“ do hociktorého z týchto štvorcov, $\mathcal{H}_1$ by na zvyšných aspoň päť voľných miest poľahky vpísal aspoň tri „1“, čím by v tomto štvorci bolo aspoň šesť „1“. Preto $\mathcal{H}_2$ musí napísať „0“ do políčka, ktoré je prienikom všetkých štyroch spomínaných štvorcov. Preto $\mathcal{H}_2$ musí ťahať „0“ $\to$ D4.

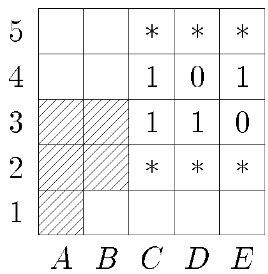
4.ťah: „1“ $\to$ E4. Teraz už $\mathcal{H}_2$ očividne nezabráni $A \geqq 6$. $\mathcal{H}_1$ totiž určite nezávisle na hre $\mathcal{H}_2$ obsadí aspoň tri z políčok C5, D5, E5, C2, D2 a E2, čo znamená, že aspoň do jedného zo štvorcov S_{C5} alebo S_{C4} dopíše aspoň dve „1“ k terajším štyrom (obr. 3).



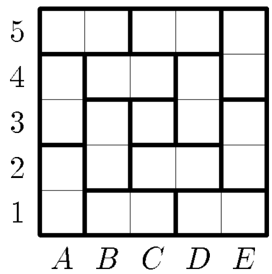
Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

Preto $A \geqq 6$. Nemožno však zaručiť aj $A \geqq 7$? Nemožno, pretože $\mathcal{H}_2$ môže hrať tak, aby A bolo najviac 6.

Rozdeľme si šachovnicu 5×5 na 12 disjunktných obdĺžnikov 2×1 a jeden štvorček $1\times\times 1$ (obr. 4). Ak $\mathcal{H}_1$ vpíše do ľubovoľného prázdneho obdĺžnika „1“, $\mathcal{H}_2$ vpíše do druhého štvorčeka toho istého obdĺžnika „0“. Pokiaľ $\mathcal{H}_1$ vpíše „1“ do stredného štvorčeka alebo do obdĺžnika, kde je už jedna „0“, vpíše $\mathcal{H}_2$ „0“ do ľubovoľného prázdneho políčka. Po ukončení hry bude takto určite v každom obdĺžniku práve jedna „0“. Keďže však každý z deviatich štvorcov 3×3 obsahuje aspoň tri celé obdĺžniky, sú v každom aspoň tri „0“, teda maximálne šesť „1“, teda $A \leqq 6$.

Týmto sme dokázali $A=6$.

1.4 Prepíšeme si funkcionálnu rovnicu do iného tvaru:

$$f\left(x+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)-f\left(x+\frac{1}{7}\right)=f\left(x+\frac{1}{6}\right)-f(x)\,.$$

Ak si definujeme novú funkciu $g(x)=f\left(x+\dfrac{1}{6}\right)-f(x)$, dostávame rovnosť:

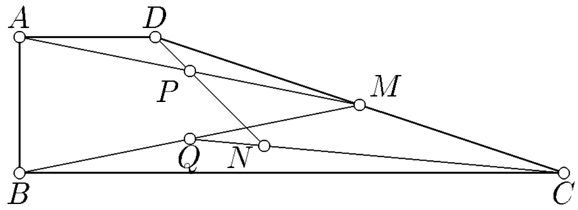
$$g\left(x+\frac{1}{7}\right)=g(x)\,.$$

Teda $g(x)$ je periodická s periódou $\dfrac{1}{7}$ a nech n je ľubovoľné celé číslo. Potom zrejme $g(y+n)=g(y)$ pre všetky $x\in\mathbb{R}$. Teraz už iba upravujeme:

$$\begin{aligned}
&f(x+n+1)-f(x+n)=\\
&\quad=\left(f(x+n+1)-f\left(x+n+\frac{5}{6}\right)\right)+\left(f\left(x+n+\frac{5}{6}\right)-f\left(x+n+\frac{4}{6}\right)\right)+\\
&\qquad+\left(f\left(x+n+\frac{4}{6}\right)-f\left(x+n+\frac{3}{6}\right)\right)+\left(f\left(x+n+\frac{3}{6}\right)-f\left(x+n+\frac{2}{6}\right)\right)+\\
&\qquad+\left(f\left(x+n+\frac{2}{6}\right)-f\left(x+n+\frac{1}{6}\right)\right)+\left(f\left(x+n+\frac{1}{6}\right)-f(x+n)\right)=\\
&\quad=g\left(x+n+\frac{5}{6}\right)+g\left(x+n+\frac{4}{6}\right)+g\left(x+n+\frac{3}{6}\right)+\\
&\qquad+g\left(x+n+\frac{2}{6}\right)+g\left(x+n+\frac{1}{6}\right)+g(x+n)=\\
&\quad=g\left(x+\frac{5}{6}\right)+g\left(x+\frac{4}{6}\right)+g\left(x+\frac{3}{6}\right)+g\left(x+\frac{2}{6}\right)+g\left(x+\frac{1}{6}\right)+g(x)=h(x)
\end{aligned}$$

Dokázali sme teda, že $f(x+n+1)-f(x+n)=h(x)$, a to pre všetky $n\in\mathbb{Z}$. Ak by $h(x)$ bolo rôzne od 0, došli by sme k sporu – funkčné hodnoty $f(x)$ by už neboli v intervale $\langle -1,1\rangle$ (platí totiž $f(x+n)=f(x)+n\cdot h(x)$, čo pre nenulové $h(x)$ rastie do nekonečna). Preto nevyhnutne musí platiť $f(x+n+1)-f(x+n)=0$, čo nie je nič iné ako to, že funkcia $f(x)$ je periodická s periódou 1.

1.5 Uvedené tvrdenie neplatí. Zrejme stačí nájsť aspoň jeden kontrapríklad. Zvoľme súradnice bodov nasledovne: $A=[0;1]$, $B=[0;0]$, $C=[4;0]$, $D=[1;1]$, ďalej $M=$ $=[2,5;0,5]$, $P=[1,25;0,75]$, $Q=[1,25;0,25]$. Súradnice bodu $N=[1,8;0,2]$ ľahko spočítame ako prienik dvoch priamok (obr. 5). Bod N je pod priamkou BM, čiže mimo trojuholníka ABM.



Obr. 5

1.6 *(Vladimír Marko)* Ak p a q nie sú nesúdeliteľné, môžeme p, q aj x_i, $i = 0, 1, \dots, n$ vydeliť najväčším spoločným deliteľom čísel p a q a prevedieme celý problém na riešenie s p, q nesúdeliteľnými.

Teraz už môžeme predpokladať, že p, q sú nesúdeliteľné. Ak posledný člen postupnosti x_n vznikol k-násobným pripočítaním čísla p a l-násobným odpočítaním čísla q, potom $0 = x_n = kp - lq$, kde $k + l = n$. Teda triviálne $q|k$ a $p|l$. Nech $k = k_0 q$ a $l = l_0 p$. Potom $x_n = (k_0 - l_0)pq$, čiže $k_0 = l_0$. Z toho $n = k + l = k_0(p + q)$.

Ďalej označme $f_i = x_i - x_{i-p-q}$ pre $i = p + q, p + q + 1, \dots, n$. Ak niektoré z týchto $f_i = 0$, potom $x_i = x_{i-p-q}$ a tvrdenie zrejme platí. Preto môžeme predpokladať, že všetky $f_i \neq 0$. Člen f_{p+q} možno napísať v tvare $f_{p+q} = (q - a_{p+q})p - (p + a_{p+q})q$, pre vhodné celé číslo a_{p+q} (pretože $q - a_n + p + a_n = q + p$). Toto po úprave dáva $f_{p+q} = -a_{p+q}(p + q)$. Keďže $f_{p+q} \neq 0$, potom aj $a_{p+q} \neq 0$. Ďalej

$$f_i = f_{i-1} + x_i - x_{i-1} - x_{i-p-q} + x_{i-p-q-1}, \qquad \text{pre} \quad i = p + q + 1, \dots, n.$$

Môžu preto nastať len tri možnosti

$$f_i = f_{i-1} - (p + q), \qquad f_i = f_{i-1}, \qquad f_i = f_{i-1} + (p + q).$$

Keďže však vieme, že f_{p+q} je tvaru $-a_{p+q}(p+q)$, potom aj každé $f_i = -a_i(p+q)$, pre $i = p+q, \dots, n$. Predchádzajúce tri možnosti sa menia na $a_i = a_{i-1}+c$, kde $c \in \{-1, 0, 1\}$. Zrejme sú všetky $a_i \neq 0$. Potom však musia mať stále rovnaké znamienko. Rovnaké znamienko majú potom aj všetky f_i, čo ale znamená, že $x_n = f_{p+q} + f_{2(p+q)} + \dots + f_{k_0(p+q)}$, kde každý člen súčtu má rovnaké znamienko. To je však spor s predpokladom $x_n = 0$. Preto musí existovať nejaké vhodné i také, že $x_i = x_{i-p-q}$. Keďže $n - p - q \neq 0$, je táto dvojica indexov rôzna od $(0, n)$.

Iné riešenie. *(Viera Růžičková)*

Pre jednoduchosť opäť uvážme prípad p, q nesúdeliteľné. Uvažujme nasledujúcu tabuľku:

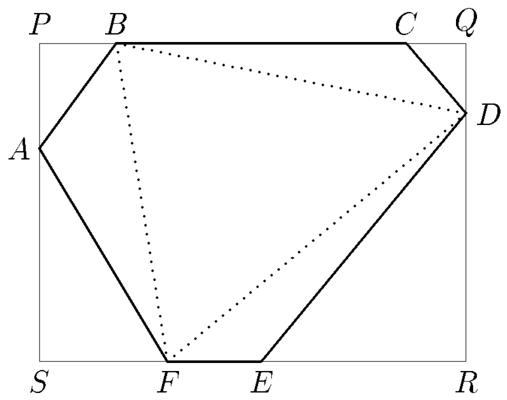
- do ľavého dolného rohu umiestnime číslo 0;
- do políčka vzdialeného o k polí vpravo a o l polí hore od ľavého dolného rohu umiestnime číslo $kp - lq$.

Postupnosť $x_0, x_1, \dots, x_n$ si možno predstaviť v tejto tabuľke ako lomenú čiaru vychádzajúcu z ľavého dolného rohu vedúcu do nejakého políčka, v ktorom je nula (okrem políčka v $(q+1)$-vom stĺpci a $(p+1)$-vom riadku – pretože $n > p + q$). Všetky nuly v tabuľke zrejme ležia na jednej priamke, prechádzajúcej ľavým dolným rohom. Ďalej si môžeme všimnúť, že v tabuľke sa vždy periodicky opakuje podtabuľka, ktorej ľavý dolný roh a pravý horný roh ohraničujú dve za sebou idúce nuly. Prvá takáto podtabuľka má ľavý dolný roh v ľavom dolnom rohu celej tabuľky a pravý horný roh v políčku v $(q+1)$-vom stĺpci a $(p+1)$-vom riadku (v prípade p a q nesúdeliteľných).

Teraz postupujme nasledovne. V tabuľke zaznačujeme členy postupnosti x_i pohybom vždy buď vpravo alebo nahor. Pri prechode na nové políčko vždy v tabuľke preškrtneme všetky políčka, na ktorých sú čísla rovnaké, ako je číslo na novom políčku. Na dôkaz tvrdenia v zadaní potrebujeme dokázať, že vždy, keď chceme lomenú čiaru ukončiť v políčku s nulou, musíme aspoň raz vstúpiť na preškrtnuté políčko. Keďže lomená čiara nemôže skončiť v prvej podtabuľke, musí ju raz nadobro opustiť. Bez ujmy na všeobecnosti nech ju opustí pod ďalšou podtabuľkou (mohla aj nad ňou). To však znamená, že v každom stĺpci podtabuľky je už vyškrtnuté aspoň jedno políčko. Potom však nemôže existovať lomená čiara neprechádzajúca preškrtnutým políčkom vedúca do políčka s nulou, pretože nula sa nachádza vždy až v najvyššom riadku každej podtabuľky a je (ak už nebola vyškrtnutá nula v $(q+1)$-vom stĺpci a $(p+1)$-vom riadku – potom je hľadaná dvojica indexov $(0, p+q)$) „odrezaná“ od aktuálnej polohy neprerušenou lomenou čiarou vedúcou pod ňou. Preto sa v postupnosti nutne musí nachádzať dvojica členov s rovnakou hodnotou rôzna od dvojice (x_0, x_n).

1.7 Označme po rade a, b, c, d, e a f dĺžky strán AB, BC, CD, DE, EF a FA. Keďže zo zadania vyplýva, že protiľahlé uhly šesťuholníka sú zhodné, označme ich nasledovne: $\varphi = |\sphericalangle FAB| = |\sphericalangle CDE|$, $\psi = |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEF|$ a $\omega = |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle EFA|$ (obr. 6). Uvažujme body P, Q, R, S tak, aby $AP \perp BC$, $AS \perp EF$, $DQ \perp BC$, $DR \perp EF$ a zároveň P, Q ležali na priamke BC a R, S na priamke EF. Potom $PQRS$ je pravouholník a $|BF| \geqq |PS| = |QR|$. Preto $2|BF| \geqq |PS| + |QR|$, čiže

$$2|BF| \geqq (a \sin\psi + f \sin\omega) + (c \sin\omega + d \sin\psi). \qquad (1)$$



Obr. 6

Cyklickou zámenou dostávame ďalej

$$2|DB| \geqq (c \sin\varphi + b \sin\psi) + (e \sin\psi + f \sin\varphi), \tag{2}$$

$$2|FD| \geqq (e \sin\omega + d \sin\varphi) + (a \sin\varphi + b \sin\omega). \tag{3}$$

Pre polomery kružníc opísaných trojuholníkom FAB, BCD a DEF platí

$$R_A = \frac{|BF|}{2 \sin\varphi}, \qquad R_C = \frac{|DB|}{2 \sin\omega}, \qquad R_E = \frac{|FD|}{2 \sin\psi}. \tag{4}$$

Odtiaľ po dosadení za R_A, R_B a R_C z (3) a potom za $|BF|$, $|DB|$ a $|FD|$ z (1), (2) a (3):

$$4(R_A + R_C + R_E) \geqq$$
$$\geqq a\left(\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} + \frac{\sin\varphi}{\sin\psi}\right) + b\left(\frac{\sin\psi}{\sin\omega} + \frac{\sin\omega}{\sin\psi}\right) + c\left(\frac{\sin\omega}{\sin\varphi} + \frac{\sin\varphi}{\sin\omega}\right) +$$
$$+d\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} + \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}\right) + e\left(\frac{\sin\psi}{\sin\omega} + \frac{\sin\omega}{\sin\psi}\right) + f\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\omega} + \frac{\sin\omega}{\sin\varphi}\right).$$

Po využití známej nerovnosti

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqq 2,$$

pre kladné čísla x a y dostávame

$$4(R_A + R_C + R_E) \geqq 2(a + b + c + d + e + f) = 2P,$$

a teda $R_A + R_C + R_E \geqq \dfrac{P}{2}$, čo bolo treba dokázať.

Poznámka. Rovnosť platí, ak $\varphi = \psi = \omega$ a zároveň $BF \perp BC, \ldots$; teda práve vtedy, keď je šesťuholník pravidelný.

DRUHÁ SÉRIA

2.1 *(Ján Špakula)*

a) Dokážeme sporom, že neexistuje $n \in \mathbb{N}$ také, že $S(n) = n^2 - 13$.

Nech také n existuje. Všimnime si zápis n^2 ako súčet $n^2 - 13$ štvorcov. Nech $n^2 - 13 - k$ z nich je jednotiek. Potom pomocou k štvorcov (rôznych od 1) musíme zapísať číslo $n^2 - (n^2 - 13 - k) = k + 13$. Poľahky sa overí, že pre $k = 1, 2, 3, 4$ sa to nedá. Pre $k \geqq 5$ však platí $4k > k + 13$, ale súčet k štvorcov rôznych od 1 (každý štvorec je aspoň 4) je najmenej 4k, čo je spor.

b) Riešením je $n = 13$, čiže $S(13) = 13^2 - 14 = 155$. Všimnime si najprv množinu $\mathcal{H}$ čísel (štvorcov) $\{1, 4, 16, 25, 49, 64, 100, 121, 169\}$. Pre čísla z tejto množiny platia nasledujúce vzťahy:

$$\begin{aligned} 4 &= 1 + 1 + 1 + 1; & 64 &= 16 + 16 + 16 + 16; \\ 16 &= 4 + 4 + 4 + 4; & 100 &= 25 + 25 + 25 + 25; \\ 25 &= 16 + 4 + 4 + 1; & 121 &= 100 + 16 + 4 + 1; \\ 49 &= 16 + 16 + 16 + 1; & 169 &= 100 + 49 + 16 + 4. \end{aligned}$$

Z týchto rovností vyplýva, že každé číslo z množiny $\mathcal{H} \setminus \{1\}$ vieme napísať ako súčet štyroch čísel z $\mathcal{H}$. Preto vieme aj číslo 169 zapísať ako súčet $4, 7, 11, \dots, 3k+1, \dots, 169$ štvorcov z $\mathcal{H}$ (kým nemáme samé jednotky môžeme ľubovoľný sčítanec rozpísať ako súčet štyroch ďalších).

Keďže navyše platia aj rovnosti

$$169 = 144 + 16 + 9, \qquad 144 = 100 + 36 + 4 + 4, \qquad 36 = 25 + 9 + 1 + 1,$$

vieme 169 napísať aj ako súčet $3, 6, 9, \dots, 3k + 3, \dots, 153$ štvorcov ($169 = 144 + 16 + 9 = 100 + 36 + 16 + 9 + 4 + 4 = (9 + 9) + 100 + 25 + 16 + 4 + 4 + 1 + 1 = \dots$, kde čísla $100, 25, 16$ a 4 sú už z množiny $\mathcal{H}$).

Napokon z rovností

$$169 = 144 + 25, \qquad 144 = 100 + 36 + 4 + 4, \qquad 36 = 25 + 9 + 1 + 1$$

a predchádzajúcich dostávame, že 169 sa dá napísať aj ako súčet $2, 5, \dots, 3k+2, \dots, 161$ štvorcov ($169 = 144 + 25 = 100 + 36 + 25 + 4 + 4 = 9 + 100 + 25 + 25 + 4 + 4 + 1 + 1 = \dots$, kde čísla $100, 25$ a 4 sú už z množiny $\mathcal{H}$).

Z toho už vyplýva, že 169 sa dá napísať ako súčet $1, 2, \dots, 155$ štvorcov, a z časti a) vyplýva, že sa nedá napísať ako súčet 156 štvorcov, a preto $S(13) = 155$.

c) Ukážeme, že riešením časti b) sú aj všetky čísla n tvaru $n = 2^k \cdot 13$, $k = 0, 1, \dots$. Tým dokážeme tvrdenie c).

Množinu $\mathcal{H}'$ voľme nasledujúco

$$\mathcal{H}' = \{1, 2 \cdot 2^m, 5 \cdot 2^m, 7 \cdot 2^m, 11 \cdot 2^m, 13 \cdot 2^m; m = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Platia rovnosti:

$$\begin{aligned} (2 \cdot 2^m)^2 &= 4^m + 4^m + 4^m + 4^m, \\ (5 \cdot 2^m)^2 &= 16 \cdot 4^m + 4 \cdot 4^m + 4 \cdot 4^m + 4^m, \\ (7 \cdot 2^m)^2 &= 16 \cdot 4^m + 16 \cdot 4^m + 16 \cdot 4^m + 4^m, \\ (11 \cdot 2^m)^2 &= 100 \cdot 4^m + 16 \cdot 4^m + 4 \cdot 4^m + 4^m, \\ (13 \cdot 2^m)^2 &= 100 \cdot 4^m + 49 \cdot 4^m + 16 \cdot 4^m + 4 \cdot 4^m. \end{aligned}$$

Opäť každé číslo z $\mathcal{H}'\setminus\{1\}$ vieme napísať ako súčet štyroch čísel z $\mathcal{H}'$. Použitím rozkladov

$$\begin{aligned}(13\cdot 2^m)^2 &= 9\cdot 4\cdot 4^m + 4\cdot 4^m + 9\cdot 4^m,\\ (9\cdot 2^m)^2 &= 36\cdot 2^{2(m-1)} = 25\cdot 4^{m-1} + 9\cdot 4^{m-1} + 4^{m-1} + 4^{m-1},\\ (13\cdot 2^m)^2 &= 9\cdot 4\cdot 4^m + 25\cdot 4^m\end{aligned}$$

pre $m = 0, 1, \ldots$ dostávame úplne rovnako ako v časti b), že číslo $n = 13\cdot 2^k$ môžeme zapísať postupne

- ako súčet $1, 4, 7, \ldots, n^2$ štvorcov,
- ako súčet $3, 6, 9, \ldots, n^2 - 16$ štvorcov (na konci bude $9 + 9 + (n^2 - 18)\times 1$),
- ako súčet $2, 5, 8, \ldots, n^2 - 8$ štvorcov (na konci bude $9 + (n^2 - 9)\times 1$).

Teda $n = 13\cdot 2^k$ sa dá napísať ako súčet $1, 2, \ldots, n^2 - 14$ štvorcov. Podľa a) nemožno použiť práve $n^2 - 13$ štvorcov, čiže $S(13\cdot 2^k) = (13\cdot 2^k)^2 - 14$.

2.2 Označme s_i a v_i po rade šírku a výšku i-teho obdĺžnika ($i = 1, 2, \ldots, 100$) tak, aby $s_i \geqq v_i$ pre každé i. Roztrieďme teraz obdĺžniky nasledovne: obdĺžnik dáme do triedy k práve vtedy, keď $s_i - v_i = 2k$ alebo $s_i - v_i = 2k + 1$, $k = 0, 1, \ldots, 49$. Spolu teda máme práve 50 tried. (Ak si predstavíme tieto obdĺžniky ako mrežové body v rovine a stotožníme obdĺžnik i s mrežovým bodom (s_i, v_i), tak máme 101 mrežových bodov v trojuholníku s vrcholmi $(0,0)$, $(100,0)$ a $(100,100)$, body môžu ležať aj na prepone. Tento trojuholník sme triedami rozdelili na 50 pruhov priamkami spájajúcimi body $(2k, 0)$ a $(100, 100 - 2k)$, $k = 1, 2, \ldots, 49$.) Keďže máme 101 obdĺžnikov v 50 triedach, jedna z tried obsahuje aspoň 3 obdĺžniky. Nech sú označené $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ a $\mathcal{Z}$ po rade podľa rastúcej šírky ($s_{\mathcal{X}} \leqq s_{\mathcal{Y}} \leqq s_{\mathcal{Z}}$). Ak sa nejaké dve šírky zhodujú, označíme ich podľa rastúcej výšky.

Najprv dokážeme, že $\mathcal{X}$ možno umiestniť do $\mathcal{Y}$. Ak by totiž náhodou $v_{\mathcal{X}} > v_{\mathcal{Y}}$, potom musí byť $s_{\mathcal{X}} = s_{\mathcal{Y}}$, aby mohli $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ byť v tej istej triede (ak $s_{\mathcal{Y}} > s_{\mathcal{X}}$, potom sa čísla $s_{\mathcal{Y}} - v_{\mathcal{Y}}$ a $s_{\mathcal{X}} - v_{\mathcal{X}}$ líšia najmenej o dve, pretože všetky dĺžky aj šírky sú celočíselné), čo je spor so systémom nášho označenia. Rovnakým spôsobom sa ukáže, že $\mathcal{Y}$ možno umiestniť požadovaným spôsobom do $\mathcal{Z}$. Tým je zadané tvrdenie dokázané.

2.3 Nech body P, Q a R vyhovujú zadaniu. Zaveďme označenie ako na obr. 7. Najprv ukážeme, že trojuholníky SMP a SMV majú rovnaký obsah. Platí:

$$S_{SAP} + S_{SAQ} + S_{SVR} = \frac{1}{2} S_{PQR} = S_{PQM}. \tag{1}$$

Vyplýva to z toho, že body A, B a V sú dotykové body kružnice k s jednotlivými stranami trojuholníka PQR a z toho, že PM je ťažnica tohto trojuholníka.

Bod M je stred QR, a preto platí :

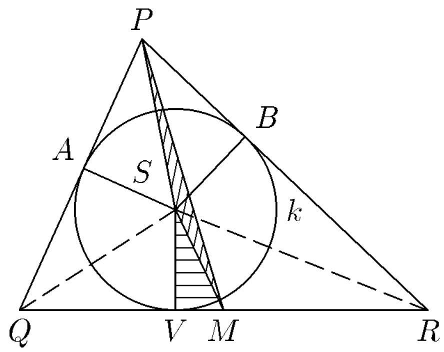
$$S_{SQV} + S_{SMV} = S_{SMR}.$$

Teda aj

$$S_{SQV} + 2S_{SMV} = S_{SMR} + S_{SMV} = S_{SVR}.$$

Dosadením do (1) dostaneme rovnosť:

$$S_{SAP} + S_{SAQ} + S_{SQV} + 2S_{SMV} = S_{PQM} = S_{SAP} + S_{SAQ} + S_{SQV} + S_{SMV} + S_{SMP}.$$



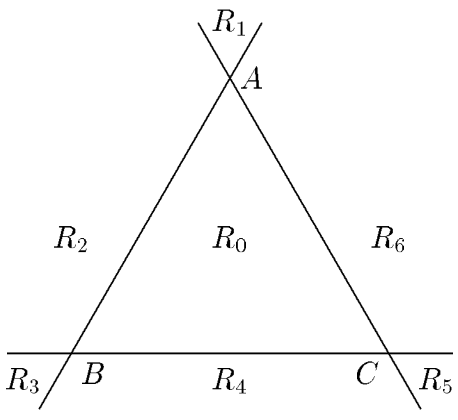
Obr. 7

Dokázali sme, že obsahy trojuholníkov SMV a SMP sú rovnaké. Nakoľko majú tieto trojuholníky spoločnú základňu SM, sú vzdialenosti bodov P a V od priamky SM rovnaké. Keďže každá výška trojuholníka musí byť väčšia ako dvojnásobok polomeru vpísanej kružnice a bod P musí ležať v polrovine QRS, bod P leží na polpriamke rovnobežnej s polpriamkou MS (rovnakej orientácie) začínajúcej v bode W. Bod W leží na kružnici k tak, že úsečka VW je jej priemer.

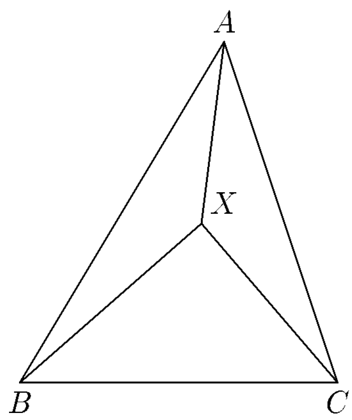
Poľahky sa presvedčíme, že všetky body tejto polpriamky vyhovujú zadaniu – spätným postupom skonštruujeme body Q, R, A a B; ukážeme, že $S_{SMP} = S_{SMV}$, a že M je stred QR.

2.4 Ak body A, B a C ležia na jednej priamke, potom $m(ABC) = 0$, teda pre každý bod X roviny daná nerovnosť triviálne platí.

Preto môžeme predpokladať, že body A, B a C neležia na jednej priamke. Rozdeľme rovinu na 7 častí (oblastí) $R_0, \ldots, R_6$ ako na obr. 8. Rozoberieme niekoľko prípadov v závislosti na polohe bodu X.



Obr. 8



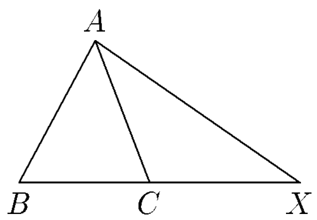
Obr. 9

Prípad 1. Nech bod X leží v oblasti R_0, čiže vo vnútri trojuholníka ABC (obr. 9). Môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $|BC| \geqq |AC|$ a $|BC| \geqq |AB|$. Preto je najkratšou výškou v trojuholníku ABC výška na stranu BC. Všimnime si, že všetky vzdialenosti $|AX|$, $|BX|$ a $|CX|$ sú kratšie ako $|BC|$. Ďalej pre obsahy trojuholníkov platí $S_{ABC} = S_{BXC}+S_{CXA}+S_{AXB}$. Predelením tejto rovnosti výrazom $\frac{|BC|}{2}$ a použitím toho, že BC je najdlhšou stranou trojuholníkov CXA a AXB, dostávame nerovnosť (1).

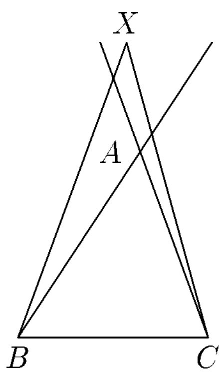
Prípad 2. Nech bod X leží na jednej zo strán trojuholníka ABC. Ak X patrí obvodu trojuholníka ABC, môžeme nerovnosť (1) dokázať tak isto ako v prvom prípade. Preto predpokladajme, že X leží na predĺžení jednej zo strán, napr. BC (obr. 10). Potom $m(ABC) \leqq m(AXB)$. (To možno dokázať prešetrením viacerých prípadov pre $\triangle ABC$: ak je najkratšia výška trojuholníka ABC výška na stranu AC alebo AB, tvrdenie je zrejmé; ak je to výška na stranu BC, potom pre uhly platí $|\sphericalangle CAB| > |\sphericalangle ABC|$ a $|\sphericalangle CAB| > |\sphericalangle BCA|$, z čoho vyplýva, že vzdialenosť bodu B od priamky AX je väčšia ako vzdialenosť bodu A od priamky BC.) Platí tiež $m(BXC) = 0$. Teda

$$m(ABC) \leqq m(AXB) \leqq m(BXC) + m(CXA) + m(AXB).$$

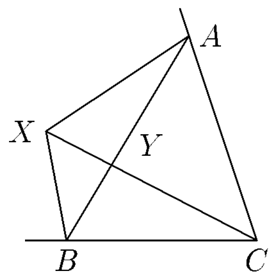
Prípad 3. Nech X leží v jednej z oblastí R_1, R_3 alebo R_5, napr. R_1 (obr. 11). Potom A leží vnútri trojuholníka BXC, čiže opäť $m(BXC) \geqq m(ABC)$. Z toho okamžite vyplýva (1).



Obr. 10



Obr. 11



Obr. 12

Prípad 4. Napokon nech X leží v ľubovoľnej zostávajúcej oblasti, napr. R_2 (obr. 12). Označme Y priesečník úsečiek AB a CX. Potom pre trojuholník CYA a bod X nastáva prípad 2, čiže $m(CYA) \leqq m(AXC)$ a $m(BYC) \leqq m(BXC)$. Z toho

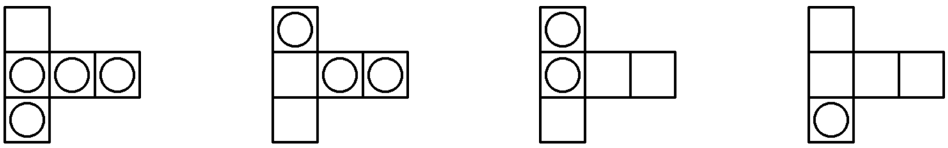
$$m(ABC) \leqq m(AYB) + m(BYC) + m(CYA) \leqq m(AXB) + m(BXC) + m(CXA),$$

pretože $m(AYB) = 0 \leqq m(AXB)$.

Prešetrili sme všetky možné prípady polohy bodu X, tvrdenie úlohy je dokázané.

2.5 *(Pavol Novotný)* Najskôr dokážeme sporom, že pre čísla n deliteľné tromi sa hra nemôže skončiť s jedným mydlom na šachovnici. Očíslujme políčka tromi číslami: 1, 2 a 3 tak, aby vždy nad každou jednotkou bola dvojka, nad každou dvojkou trojka, nad každou trojkou jednotka a vpravo od jednotky trojka, vpravo od trojky dvojka a napokon vpravo od dvojky jednotka (prvú jednotku môžeme zatiaľ zvoliť ľubovoľne). Potom vo štvorci s mydlami so stranou $n = 3k$, $k = 1, 2, \dots$ je rovnaký počet polí očíslovaných každým z čísel 1, 2 a 3. Súčet všetkých čísel polí s mydlami je teda $(1 + 2 + 3) \cdot \frac{n^2}{3} = 2n^2$, čiže párny. Jednoducho sa ukáže, že každý možný ťah zachováva paritu súčtu čísel, na ktorých sú umiestnené mydlá (stačí preveriť 6 situácií). Ak má teda na konci zostať práve jedno mydlo, musí byť na poli s číslom 2. Šachovnicu však môžeme očíslovať rovnakým spôsobom, len prvú jednotku zvolíme na políčku, ktoré má teraz číslo 2. Potom použitím rovnakých úvah možno dokázať, že políčko, na ktorom zostane posledné mydlo musí mať aj v tomto očíslovaní číslo 2, to však nie je možné.

Teraz dokážeme (nájdeme postup), že pre každé prirodzené číslo n nedeliteľné tromi sa hra môže skončiť s jedným mydlom. Najprv zistíme, že hra sa tak môže skončiť pre $n = 1$ a $n = 2$ (ľahko sa nájde postupnosť ťahov). Nasledujúcou postupnosťou ťahov dokážeme zo šachovnice odstrániť tri mydlá, ktoré ležia vedľa seba (v jednom riadku alebo stĺpci) tak, aby ostatné mydlá zostali na svojich miestach (obr. 13):



Obr. 13

Teda, na takéto odstránenie troch mydiel vedľa seba sme potrebovali len to, aby pri prvom (resp. treťom) mydle ležalo jedno mydlo a na jeho opačnej strane bolo voľné políčko. Stačí už len ukázať, že každý štvorec $n \times n$ vieme dostať zo štvorca 2×2 a trojíc susedných políčiek spĺňajúcich predchádzajúce podmienky. Podľa obr. 14 vieme takto vytvoriť štvorce 4×4 a 5×5.

Obr. 14

Obdobným spôsobom, ako sme dostali zo štvorca 2×2 štvorec $n \times n$, zrejme dostaneme aj z každého štvorca $m \times m$ štvorec $(m+3) \times (m+3)$. Potom vyššie popísanou postupnosťou ťahov odstránime najprv trojice susedných kameňov (smerom dovnútra), a napokon štvorec 2×2.

2.6 *(Peter Bodík, Peter Kozák, Pavol a Peter Novotný a Ján Špakula)*

Označme S priesečník osí CE a BD (obr. 15) a uhly trojuholníka ABC ako zvyčajne. Potom zrejme $|\sphericalangle BSC| = 138°$ a z trojuholníka BSC dostávame $\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 84°$, čiže $\alpha =$

$= 96°$. Použitím sínusových viet pre trojuholníky ESD, DSA a ASE dostávame

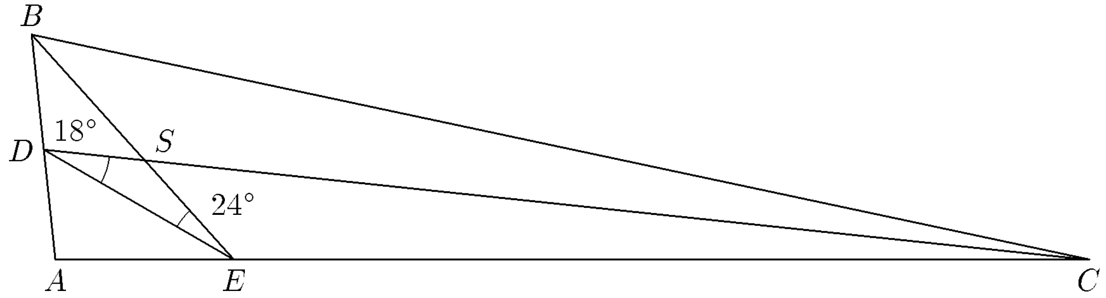
$$|DS| = \frac{|ES| \cdot \sin 28°}{\sin 24°}, \quad |AS| = \frac{|DS| \cdot \sin\left(84° - \frac{\beta}{2}\right)}{\sin 48°}, \quad |AS| = \frac{|ES| \cdot \sin\left(42° + \frac{\beta}{2}\right)}{\sin 48°}.$$

Spojením týchto vzťahov a vylúčením dĺžok úsečiek dostávame goniometrickú rovnicu

$$\sin 18° \cdot \sin\left(84° - \frac{\beta}{2}\right) = \sin 24° \cdot \sin\left(42° + \frac{\beta}{2}\right).$$

Teraz stačí rozpísať výrazy $\sin\left(84° - \frac{\beta}{2}\right)$ a $\sin\left(42° + \frac{\beta}{2}\right)$ podľa súčtových vzorcov a po úprave dostaneme rovnicu:

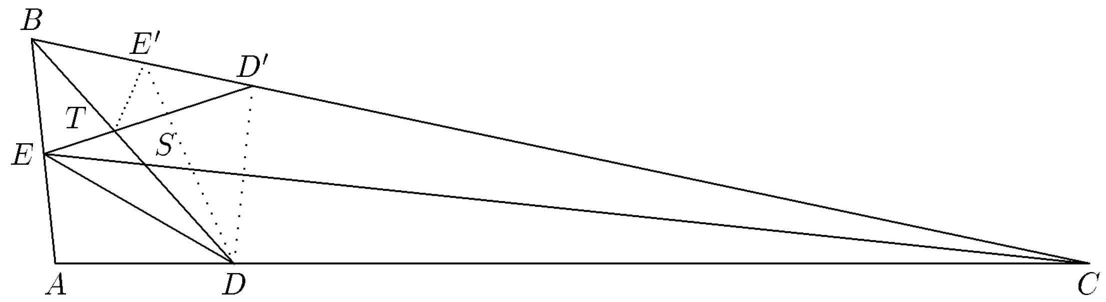
$$\cos\frac{\beta}{2} \cdot (\sin 84° \cdot \sin 18° - \sin 42° \cdot \sin 24°) = \sin\frac{\beta}{2} \cdot (\cos 84° \cdot \sin 18° + \cos 42° \cdot \sin 24°). \quad (1)$$



Obr. 15

Vyjadrením tangensu uhla $\frac{\beta}{2}$ a spočítaním (napr. pomocou kalkulačky) hodnoty výrazu dostávame $\beta = 12°$, a potom $\gamma = 72°$. Pravda, na presné určenie by bolo potrebné goniometrický výraz buď zjednodušiť pomocou súčtových vzťahov, alebo vyčísliť hodnoty $\sin 12°$ a $\cos 12°$, pomocou ktorých už vieme spočítať všetky číselné hodnoty v (1) a overiť, že $\beta = 12°$ je riešením. Potom z monotónnosti oboch strán v (1) (vzhľadom na β) zistíme, že je to naozaj jediné riešenie.

Iné riešenie. Najprv určíme uhol α ako v prvom riešení. Označme E' a D' po rade obrazy bodov E a D v osových súmernostiach po rade podľa BD a CE (zrejme obidva body ležia na BC). Ďalej označme T priesečník BD a ED' a spojme TE', DD' a DE' (obr. 16).



Obr. 16

Zo symetrie $|\sphericalangle CED'| = |\sphericalangle CED| = 18°$ a $|\sphericalangle BDE'| = |\sphericalangle BDE| = 24°$. Preto

$$|\sphericalangle BTE| = |\sphericalangle TDE| + |\sphericalangle TED| = 24° + 36° = 60°.$$

Podobne zo symetrie $|\sphericalangle BTE'| = |\sphericalangle BTE| = 60°$, čiže $|\sphericalangle E'TD'| = 180° - (|\sphericalangle BTE| + |\sphericalangle BTE'|) = 60°$. Teda TE' je osou uhla BTD'. Keďže DD' je kolmé ja CE, platí $|\sphericalangle EDD'| = 72°$. Preto $|\sphericalangle D'DE'| = |\sphericalangle EDD'| - |\sphericalangle EDE'| = 24°$, teda aj DE' je osou uhla TDD'. Z toho vyplýva, že E' je stredom kružnice pripísanej k strane TD' trojuholníka TDD'. Čiže $|\sphericalangle TD'E'| = |\sphericalangle DD'C|$. Ale

$$|\sphericalangle TD'E'| + |\sphericalangle DD'C| = 180° - |\sphericalangle ED'D| = |\sphericalangle DED'| + |\sphericalangle EDD'| = 36° + 72° = 108°.$$

Takže $|\sphericalangle DD'C| = 54°$; a tiež $|\sphericalangle CDD'|$. Potom z trojuholníka CDD' dostávame $|\sphericalangle DCD'| = 72°$. Preto $\beta = 72°$ a $\gamma = 12°$.

2.7 *(Pavol Černý)* Keďže $12^2 = 144$, vieme, že dĺžka najdlhšieho bloku je aspoň 2. Preto skúsme nájsť blok dĺžky aspoň 3.

Druhé mocniny dávajú po delení ôsmimi zvyšky 0, 1 alebo 4:

$$(2k)^2 = 4k^2 \equiv 0, 4 \pmod 8 \qquad \text{a} \qquad (2k+1)^2 = 4k(k+1) + 1 \equiv 1 \pmod 8.$$

Preto ak využijeme skutočnosť, že 8 delí 1 000, môžeme vylúčiť prípady 111, 222, 333, 555, 666 a 999. Ostali len bloky 444, 777 a 888. Avšak žiaden štvorec celého čísla nekončí číslicou 7 ani 8, a preto je jediným možným kandidátom blok 444. Skúšaním nahliadneme, že $38^2 = 1444$, čiže blok dĺžky 3 existuje práve jeden.

Teraz ešte ukážeme, že blok dĺžky 4 už neexistuje. Z predchádzajúceho je zrejmé, že jediným kandidátom je blok 4444. Zrejme musí ísť o štvorec párneho čísla, a preto sú prípustné len dve možnosti zvyškov po delení 16-timi:

$$(4k)^2 = 16k^2 \equiv 0 \pmod{16} \qquad \text{a} \qquad (4k+2)^2 = 16k(k+1) + 4 \equiv 4 \pmod{16}.$$

Avšak číslo 10 000 je deliteľné 16-timi a číslo 4444 dáva po delení zvyšok 12. Preto nemôže mať žiaden štvorec tvar $10\,000k + 4444$.

Najdlhší možný blok má dĺžku 3 a je to blok 444.

Tretia séria

3.1 Predpokladajme, že čísla a, b sú riešením zadanej rovnice. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $a \geqq b$. Uvedomme si platnosť vzťahu $\lfloor x+1 \rfloor > x \geqq \lfloor x \rfloor > x - 1$. Jeho použitím dostávame nerovnosť

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geqq \left\lfloor \frac{a^2}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b^2}{a} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a^2+b^2}{ab} \right\rfloor + ab > \frac{a^2+b^2}{ab} + ab - 1.$$

Po prenásobení nerovnosti číslom ab a následných úpravách máme:

$$a^3 + b^3 > a^2 + b^2 + a^2b^2 - ab,$$
$$(a^2 - b)(a - b^2) = a^3 + b^3 - a^2b^2 - ab > a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \geqq 0.$$

Nakoľko $a \geqq b$, platí $a^2 - b \geqq 0$. Súčin čísel $(a^2 - b), (a - b^2)$ môže byť kladný iba vtedy, ak je kladné $(a - b^2)$. Teda $a > b^2$.

Fakt, že číslo a je väčšie ako b^2 znamená aj to, že $\left\lfloor \frac{b^2}{a} \right\rfloor = 0$. Čísla a, b preto musia vyhovovať aj rovnici

$$\left\lfloor \frac{a^2}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a^2 + b^2}{ab} \right\rfloor + ab.$$

Opätovným použitím vzťahov medzi celými časťami čísel dostaneme nerovnosť :

$$\frac{a^2}{b} - 1 < \left\lfloor \frac{a^2}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a^2 + b^2}{ab} \right\rfloor + ab \leqq \frac{a^2 + b^2}{ab} + ab.$$

Prenásobením ab dostaneme nerovnosť $a^3 < a^2b^2 + a^2 + b^2 + ab$.

Ak by bolo $a \geqq b^2 + 2$, platila by aj nasledujúca nerovnosť

$$a^3 \geqq a^2(b^2 + 2) \geqq a^2b^2 + a^2 + a(b^2 + 2) > a^2b^2 + a^2 + a + ab^2 > a^2b^2 + a^2 + b^2 + ab$$

Lenže táto nerovnosť je v rozpore s už dokázanou nerovnosťou, teda predpoklad $a \geqq b^2 + 2$ je nesprávny. Nakoniec sme dostali pre riešenie (a, b) podmienku $b^2 + 2 > a > b^2$, ktorej vyhovujú iba dvojice tvaru $(b^2 + 1, b)$.

Ľahko sa presvedčíme, že spomínané dvojice riešia zadanú rovnicu (pre $b \geqq 2$)

$$\left\lfloor \frac{b^4 + 2b^2 + 1}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b^2}{b^2 + 1} \right\rfloor = b^3 + 2b = \left\lfloor \frac{b^2(b^2 + 1) + (2b^2 + 1)}{(b^2 + 1)b} \right\rfloor + (b^2 + 1)b,$$

a pre $b = 1$ dostávame

$$\left\lfloor \frac{4}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 4 = \left\lfloor \frac{4 + 1}{2} \right\rfloor + 2.$$

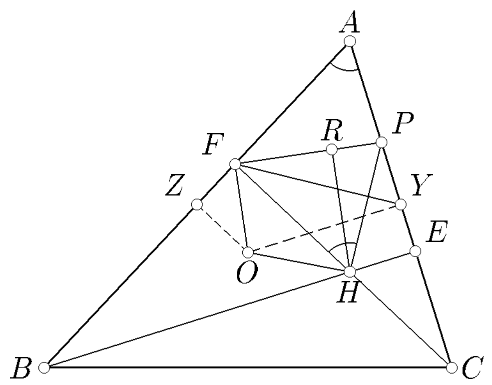
Riešením zadanej rovnice sú usporiadané dvojice čísel v tvare $(n^2 + 1, n)$ a $(n, n^2 + 1)$.

3.2 Označme uhly trojuholníka ako obyčajne α, β, γ. Ďalej si všimnime, že bod O leží vnútri trojuholníka ABC, pretože je ostrouhlý a $|\sphericalangle OCB| = 90° - \alpha < 90° - \beta = |\sphericalangle FCB|$ (pretože $|BC| > |CA|$). To znamená, že O leží vnútri trojuholníka BCF a kolmica na OF prechádzajúca bodom F pretína úsečku AC. To znamená, že P leží na strane AC.

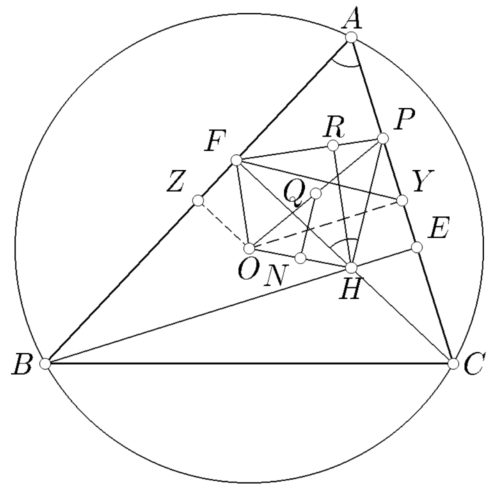
Nech E je päta výšky BH a Y a Z po rade stredy strán AC a AB (obr. 17). Nech R je päta kolmice z bodu H na PF. Teda $HR \perp FP$. Potom Y je stred kružnice opísanej trojuholníku AFC a $|\sphericalangle FYA| = 2|ACF| = 2(90° - \alpha) = 180° - 2\alpha$. Štvoruholník $OFPY$

je tetivový ($|\sphericalangle PFO| = |\sphericalangle OYP| = 90°$), čo dáva $|\sphericalangle OPF| = |\sphericalangle OYF| = 2\alpha - 90°$. Z podobnosti pravouhlých trojuholníkov OZF a HRF máme

$$\frac{|OZ|}{|OF|} = \frac{|HR|}{|HF|}. \tag{1}$$



Obr. 17



Obr. 18

Teraz určme vzdialenosť OZ z pravouhlého trojuholníka OZA. Keďže z vety o stredovom a obvodovom uhle vyplýva $|\sphericalangle ZOA| = \gamma$, potom $|OZ| = \dfrac{|AB|}{2\operatorname{tg}\gamma}$. Teraz zrejme z trojuholníka BEC máme $|EC| = |BC|\cos\gamma$. No a keďže $|\sphericalangle HCE| = 90° - \alpha$, potom z trojuholníka HCE pre $|HC|$ platí: $|HC| = \dfrac{|EC|}{\cos(90° - \alpha)} = \dfrac{|BC|\cos\gamma}{\sin\alpha}$. Zo sínusovej vety ďalej

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma},$$

a preto

$$|HC| = |BC| \cdot \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha} = |AB| \cdot \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} = |AB| \cdot \operatorname{cotg}\gamma = 2|OZ|. \tag{2}$$

Podobne sa ukáže, že $|HB| = 2|OY|$. Keďže z podobnosti trojuholníkov BHF a CHE vyplýva

$$\frac{|HB|}{|HC|} = \frac{|HF|}{|HE|},$$

dosadením (2) do (1) dostávame

$$|HR|.|OF| = |HF|.|OZ| = \frac{1}{2}|HF|.|HC| = \frac{1}{2}|HE|.|HB| = |HE|.|OY|,$$

teda

$$\frac{|HR|}{|HE|} = \frac{|OY|}{|OF|}.$$

Potom $|\sphericalangle FOY| = |\sphericalangle RHE|$, z toho vyplýva, že trojuholníky RHE a YOF sú podobné, a teda $|\sphericalangle HER| = |\sphericalangle OFY|$. Z tetivových štvoruholníkov $HEPR$ a $OYPF$ dostávame $|\sphericalangle HPR| = |\sphericalangle OPY|$. Teda $|\sphericalangle HPE| = |\sphericalangle OPF| = 2\alpha - 90°$. Napokon z trojuholníka HPC máme $|\sphericalangle FHP| = (2\alpha - 90°) + (90° - \alpha) = \alpha$.

Iné riešenie. Dôkaz, že P leží na AC sme urobili v predchádzajúcom riešení. Nech Y je stred strany AC. Pretože trojuholník AFC je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole F, stredom kružnice jemu opísanej je bod Y. Odtiaľ $|\sphericalangle YFC| = 90° - \alpha$. Takže aby sme ukázali, že $|\sphericalangle FHP| = |\sphericalangle BAC|$, stačí dokázať, že $FY \perp HP$.

Pretože $|\sphericalangle OFP| = |\sphericalangle OYP| = 90°$, body F, P, Y a O ležia na kružnici. Nech je to kružnica k_1 so stredom Q, ktorý je aj stredom úsečky OP. V trojuholníku ABC uvažujme kružnicu deviatich bodov (*Feuerbachovu kružnicu*) k_2, ktorá prechádza bodmi F a Y a jej stred N je aj stredom OH (obr. 18). (To vieme z vlastností *Eulerovej priamky*: body O, H, N spolu s ťažiskom T trojuholníka ABC ležia na jednej priamke v poradí O, T, N a H a známe sú aj pomery vzdialeností medzi nimi.) Kružnice k_1 a k_2 prechádzajú bodmi F a Y, ich spoločnou chordálou je priamka FY. To znamená, že FY je kolmá na NQ (spojnicu stredov týchto dvoch kružníc). Ale NQ je strednou priečkou, a teda je rovnobežná s HP. Odtiaľ dostávame $FY \perp HP$, čo sme chceli dokázať.

3.3 Pre potreby tohto riešenia označme $a_{n+1} = a_1$ a $a_{n+2} = a_2$. Nech

$$A_i = \frac{a_i^2 + a_{i+1}^2 - a_{i+2}^2}{a_i + a_{i+1} - a_{i+2}} = a_i + a_{i+1} + a_{i+2} - \frac{2a_i a_{i+1}}{a_i + a_{i+1} - a_{i+2}}.$$

Keďže $(a_i - 2)(a_{i+1} - 2) \geqq 0$, platí aj $-2a_i a_{i+1} \leqq -4(a_i + a_{i+1} - 2)$ a

$$A_i \leqq a_i + a_{i+1} + a_{i+2} - 4\left(1 + \frac{a_{i+2} - 2}{a_i + a_{i+1} - a_{i+2}}\right).$$

Pretože $1 = 2 + 2 - 3 \leqq a_i + a_{i+1} - a_{i+2} \leqq 3 + 3 - 2 = 4$, platí:

$$A_i \leqq a_i + a_{i+1} + a_{i+2} - 4\left(1 + \frac{a_{i+2} - 2}{4}\right) = a_i + a_{i+1} - 2.$$

Sčítaním tejto nerovnosti pre $i = 1, 2, \dots, n$ dostávame

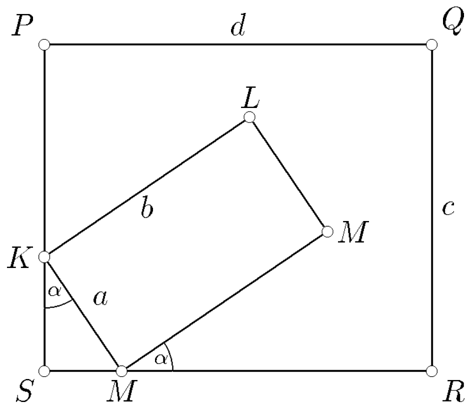
$$\sum_{i=1}^{n} A_i \leqq 2s - 2n.$$

3.4 *(Peter Lupeň)* Evidentne obdĺžnik so stranami $\{a, b\}$ sa dá do obdĺžnika so stranami $\{c, d\}$ umiestniť práve vtedy, keď existuje $\alpha \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$ také, že platí (obr. 19):

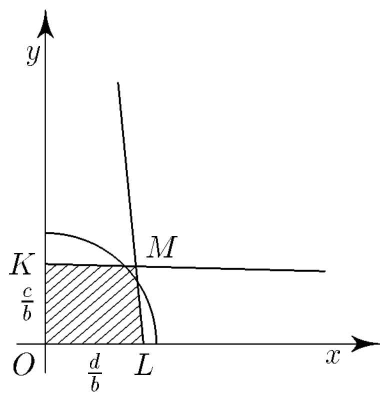
$$a.\cos\alpha + b.\sin\alpha \leqq c,$$
$$a.\sin\alpha + b.\cos\alpha \leqq d.$$

Položme $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$. Potom dostávame ekvivalentné podmienky:

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad ax + by \leqq c, \quad bx + ay \leqq d, \quad x^2 + y^2 = 1.$$



Obr. 19



Obr. 20

Táto sústava sa dá elegantne riešiť, keď si ju geometricky interpretujeme (obr. 20). Prvým štyrom nerovniciam vyhovujú body štvoruholníka $KMLO$ (kde $K = \left[0, \frac{c}{b}\right]$, $M = \left[\frac{bd-ac}{b^2-a^2}, \frac{bc-ad}{b^2-a^2}\right]$, $L = \left[\frac{d}{b}, 0\right]$, $O = [0,0]$). Aby sa dal prvý obdĺžnik vpísať do druhého, musí ešte platiť aj piata podmienka ($x^2 + y^2 = 1$), čiže musí existovať neprázdny prienik medzi štvoruholníkom $KMLO$ a štvrťkružnicou. Pretože $\frac{c}{b} < 1$, $\frac{d}{b} < 1$, prienik existuje práve vtedy, keď bod M neleží vnútri kruhu, čiže práve vtedy, keď

$$\left(\frac{bd-ac}{b^2-a^2}\right)^2 + \left(\frac{bc-ad}{b^2-a^2}\right)^2 \geqq 1,$$

čo nastáva práve vtedy, keď

$$(bd-ac)^2 + (bc-ad)^2 \geqq \left(b^2-a^2\right)^2, \quad \text{čo bolo treba dokázať.}$$

3.5 *(Viera Růžičková)* Pre paritu štyroch čísel na začiatku máme len niekoľko možností (stavy, ktoré dostaneme otočením sú zrejme identické): všetky štyri čísla párne $PPPP$, jedno z čísel nepárne $NPPP$, dve susedné čísla nepárne $NNPP$, dve nesusedné čísla nepárne $NPNP$, tri čísla nepárne $NNNP$ a napokon všetky čísla nepárne $NNNN$.

Je zrejmé, že ak sú všetky štyri čísla na kružnici v nejakom okamihu párne, ostanú párnymi aj po každom ďalšom kroku. Jednoducho dokážeme, že každý možný stav sa po pár krokoch zmení na stav $PPPP$.

Stav $PPPP$ je triviálny. Stav $NPPP$ sa postupne transformuje na $NNPP$, potom na $NPNP$, a ten na $NNNN$, ktorý po jednom kroku prejde na $PPPP$. Týmto sme teda hneď vyriešili aj stavy $NNPP$, $NPNP$ a $NNNN$.

Zostávajúci stav – $NNNP$ – sa po jednom kroku transformuje na $NNPP$, ktorý, ako už vieme, sa po troch ďalších krokoch zmení na stav $PPPP$.

Takto sme dokázali, že v každom prípade budú po 1997 krokoch na kružnici len párne čísla. Potom sú ale všetky tri výrazy $|bc-ad|$, $|ac-bd|$ a $|ab-cd|$ deliteľné štyrmi, a teda dokonca žiaden z nich nemôže byť prvočíslom.

Iné riešenie. *(Peter Kozák a Peter a Pavol Novotný)*
Ak sú na začiatku na kružnici napísané čísla a, b, c a d, tak po prvom kroku dostaneme po rade čísla $a-b, b-c, c-d$ a $d-a$. Vo výpočte pokračujeme ďalej až po štvrtý krok:

$$\begin{array}{cccc}
a & b & c & d \\
a-b & b-c & c-d & d-a \\
a-2b+c & b-2c+d & c-2d+a & d-2a+b \\
a-3b+3c-d & b-3c+3d-a & c-3d+3a-b & d-3a+3b-c \\
2a-4b+6c-4d & 2b-4c+6d-4a & 2c-4d+6a-4b & 2d-4a+6b-4c
\end{array}$$

Opäť si všimneme, že všetky štyri čísla sú už po štyroch krokoch párne, čiže použitím rovnakých úvah ako v predchádzajúcom riešení zistíme, že všetky štyri skúmané výrazy musia byť deliteľné štyrmi.

3.6 Dosadením čísel $x = 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ do polynómu dostaneme podmienky

$$|a+b+c+d| \leqq 1, \tag{1}$$
$$|-a+b-c+d| \leqq 1, \tag{2}$$
$$|a+2b+4c+8d| \leqq 8, \tag{3}$$
$$|-a+2b-4c+8d| \leqq 8. \tag{4}$$

Tieto nerovnice si môžeme predstaviť ako hraničné nadroviny štvorrozmerného rovnobežnostenu. Maximum súčtu $|a|+|b|+|c|+|d|$ sa zrejme nadobúda v jeho vrcholoch. Preto stačí nájsť jeho vrcholy, čo znamená riešiť 16 sústav lineárnych rovníc so štyrmi neznámymi. Ich vyriešením a overením podmienky $|a|+|b|+|c|+|d| \leqq 7$ pre vrcholy, overíme platnosť zadaného tvrdenia.

Možno postupovať aj inak. Z prvých dvoch nerovností dostávame

$$2|b+d| \leqq |(b+d)+(a+c)| + |(b+d)-(a+c)| \leqq 2 \quad \Rightarrow \quad |b+d| \leqq 1.$$

Ak $b+d \geqq 0$, potom z (2), $a+c \geqq (b+d)-1$, na druhej strane z (1) $a+c \leqq 1-(b+d)$. Preto

$$|b+d| + |a+c| \leqq |b+d| + |1-(b+d)| = (b+d) + 1 - (b+d) = 1. \tag{5}$$

Rovnako aj v prípade $b+d \leqq 0$ dostaneme rovnakú nerovnosť.

Potom

$$|a| - |c| = |a| - |-c| \leqq |a+c|,$$

z čoho pomocou (5)

$$|b+d|+|a|-|c| \leqq |b+d|+|a+c| \leqq 1. \tag{6}$$

Podobne z nerovností (3) a (4) dostaneme

$$2|b+4d|+4|c|-|a| = |2b+8d|+|4c|-|a| \leqq 8. \tag{7}$$

Prenásobením (6) číslom 5 a (7) číslom 2 a sčítaním nerovností dostávame

$$3|a|+3|c|+4|b+4d|+5|b+d| \leqq 21. \tag{8}$$

Vzhľadom na dokazovanú nerovnosť nám teda stačí dokázať už len nerovnosť

$$3|b|+3|d| \leqq 4|b+4d|+5|b+d|, \tag{9}$$

lebo spojením (8) a (9) dostávame

$$3(|a|+|b|+|c|+|d|) \leqq 21.$$

Nerovnosť (9) platí pre $d=0$ triviálne. Ak $d \neq 0$, položme $x = \dfrac{b}{d}$. Stačí nám teraz dokázať, že funkcia

$$f(x) = 4|x+4|+5|x+1|-3|x|-3$$

je nezáporná pre všetky reálne čísla x. To sa však ľahko ukáže, stačí uvažovať $f(x)$ na štyroch disjunktných intervaloch $(-\infty,-4\rangle$, $(-4,-1\rangle$, $(-1,0\rangle$ a $(0,\infty)$:

$$\begin{aligned}
-\infty < x \leqq -4: &\quad f(x) = -5(x+1)-4(x+4)+3x-3 = -6(x+4) \geqq 0;\\
-4 < x \leqq -1: &\quad f(x) = -5(x+1)+4(x+4)+3x-3 = 2(x+4) \geqq 0;\\
-1 < x \leqq 0\ : &\quad f(x) = 5(x+1)+4(x+4)+3x-3 = 12x+18 \geqq 0;\\
0 < x < \infty\ : &\quad f(x) = 5(x+1)+4(x+4)-3x-3 = 6x+18 \geqq 0.
\end{aligned}$$

Tým je zadaná nerovnosť dokázaná.

3.7 *(Viera Růžičková)* Ak je v podmnožine $\mathcal{S}$ súčet najmenších n prvkov väčší alebo rovný m, tak to platí pre všetky jej n-prvkové podmnožiny a naopak, ak to platí pre všetky tieto podmnožiny, platí to aj pre n najmenších prvkov.

Ak $\mathcal{S}$ obsahuje z prvkov tak, že spĺňa podmienku, aj podmnožina množiny $\{1,\dots,k\}$ obsahujúca jej z najväčších prvkov spĺňa danú podmienku, lebo súčet najmenších n prvkov nemá menší. Stačí nám teda uvažovať len takéto podmnožiny. Potom má $\mathcal{S}$ najväčšiu mohutnosť práve vtedy, keď $\mathcal{S} = \{k, k-1, k-2, \dots, x\}$, pričom platí

$$m \leqq x+(x+1)+(x+2)+\ldots+(x+n-1) = \frac{1}{2}(2x+n-1)n,$$

$$m > (x-1)+x+(x+1)+\ldots+(x+n-2) = \frac{1}{2}(2x+n-3)n.$$

Teda $\mathcal{S}$ má najväčšiu mohutnosť práve vtedy, keď

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2m}{n}+1-n\right)+1>x\geqq\frac{1}{2}\left(\frac{2m}{n}+1-n\right).$$

(Mohutnosť $\mathcal{S}$ je $k-x+1$, čo je najväčšie práve vtedy, keď x je najmenšie.) Keď mohutnosť $\mathcal{S}$ označíme h, potom $h=k-x+1$ je najväčšie práve vtedy, keď

$$k-\frac{1}{2}\left(\frac{2m}{n}+1-n\right)<h\leqq k-\frac{1}{2}\left(\frac{2m}{n}+1-n\right)+1,$$

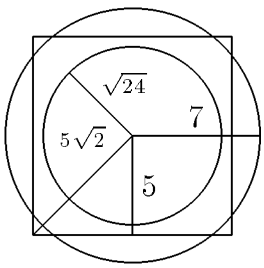
teda práve vtedy, keď

$$h=\left\lfloor k-\frac{1}{2}\left(\frac{2m}{n}+1-n\right)+1\right\rfloor.$$

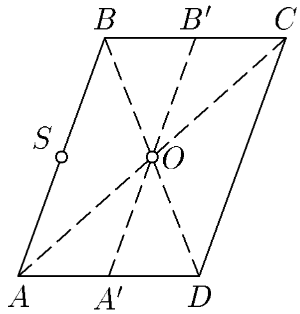
ŠTVRTÁ SÉRIA

4.1 *(Juraj Földes)*

a) Označme v_1 a v_2 po rade výšky (vzdialenosti od podlahy – jednej steny kocky) bodov A a B. Vezmime si rozdiel výšok múch. Na začiatku je v_1-v_2 a na konci je v_2- $-v_1$. To znamená, že v niektorom momente bude rozdiel ich výšok rovný nule (pretože muchy sa pohybujú spojito, teda aj ich výšky a aj rozdiel ich výšok sa mení spojito), čo znamená, že v tom momente budú v rovnakej výške, a teda budú ležať v jednej rovine rovnobežnej s podlahou. Budú ležať vo štvorci (myslíme tým vnútri alebo na stranách) so stranou 10 m (obr. 21). Ale maximálna vzdialenosť dvoch bodov vo štvorci je dĺžka jeho uhlopriečky, čo je v našom prípade $10\sqrt{2}<15$. Teda v tomto momente bude aj vzdialenosť múch menšia ako 15 m.



Obr. 21



Obr. 22

b) Ak je počiatočná vzdialenosť múch $|AB|=14\,\text{m}$, ukážeme, že odpoveď je áno (inak je zrejme nie). Nech teda $|AB|=14\,\text{m}$, Označme S stred úsečky AB. Najprv posunieme úsečku AB v posunutí, v ktorom sa bod S zobrazí na stred kocky O. Dostaneme tak úsečku $A'B'$ ($|A'B'|=14\,\text{m}$). Ukážeme že úsečky AA', BB' ležia v kocke (myslí sa tým na povrchu alebo vnútri), obr. 22. Kocka je teleso súmerné podľa stredu O, teda ak A, B ležia v kocke, potom aj body C, D súmerne združené s A, B podľa stredu O

ležia v kocke. Ale zrejme A' je stred AD a B' je stred BC. Z konvexnosti kocky potom vyplýva, že úsečky AA', BB' ležia v kocke.

Nech muchy lietajú stále navzájom rovnakou rýchlosťou. Necháme ich najprv preletieť do A', B'. Teraz si vezmime guľovú plochu $\mathcal{G}(O; 7\,\mathrm{m})$. Označme α jej prienik s kockou (potom $A', B' \in \alpha$). Zrejme $\mathcal{G}$ nepretína žiadnu hranu kocky (priemet $\mathcal{G}$ do roviny steny kocky je znázornený na obr. 21, kde väčšia kružnica znázorňuje „obrys“ guľovej plochy $\mathcal{G}$, a menšia jej prienik so stenou kocky), a teda α je „súvislá“ množina bodov, čiže po α sa dá dostať z každého jej bodu do každého iného jej bodu. Teda aj z A' do B'. Necháme touto cestou letieť muchu $\mathcal{F}$ a mucha $\mathcal{M}$ bude letieť stredovo súmerne podľa O s muchou $\mathcal{F}$ (bude letieť po α, lebo α je zrejme stredovo súmerná podľa stredu O a ich vzdialenosť bude zrejme vždy práve 14 m). No a potom už muchy preletia do bodov B a A, čo je zrejme možné (pozri začiatok).

4.2 Najprv ukážeme, že polynóm $P(x) - Q(x)$ má aspoň jeden reálny koreň, čiže existuje také reálne číslo t, pre ktoré $P(t) = Q(t)$.

Nech u a v sú po rade korene $P(x)$ a $Q(x)$, čiže $P(u) = 0$ a $Q(v) = 0$. Ak $u = v$ je vyššie uvedené tvrdenie zrejmé. Preto nech $u \neq v$, bez ujmy na všeobecnosti $u < v$. Pre

$$R(x) = P^2(x) - Q^2(x)$$

platí $R(u) \leqq 0$ a $R(v) \geqq 0$. Zo spojitosti polynómu $R(x)$ vyplýva existencia takého s, $s \in \langle u, v\rangle$, pre ktoré platí $P^2(s) = Q^2(s)$. Označme $t = 1 + s + Q^2(s)$. Zo zadania platí

$$P(t) = P(1 + s + Q^2(s)) = Q(1 + s + P^2(s)) = Q(1 + s + Q^2(s)) = Q(t).$$

Takto sme dokázali existenciu aspoň jedného spoločného bodu polynómov $P(x)$ a $Q(x)$. Ďalej označme

$$t_1 = t \quad \text{a} \quad t_{i+1} = 1 + t_i + Q^2(t_i).$$

Matematickou indukciou podľa i dokážeme, že pre každé $i \in \mathbb{N}$ platí $P(t_i) = Q(t_i)$.

1° Pre $i = 1$ sme tvrdenie už dokázali.

2° Predpokladajme, že tvrdenie platí pre $i = k$. Potom

$$P(t_{k+1}) = P(1 + t_k + Q^2(t_k)) = Q(1 + t_k + P^2(t_k)) = Q(1 + t_k + Q^2(t_k)) = Q(t_{k+1}).$$

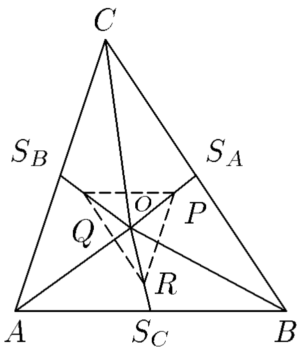
Preto má polynóm $P(x) - Q(x)$ nulovú hodnotu pre $x = t_i$, $i = 1, 2, \dots$ Poľahky nahliadneme, že platí $t_{i+1} = 1 + t_i + Q^2(t_i) > t_i$, a preto má polynóm $P(x) - Q(x)$ nekonečne veľa koreňov, čiže je nulový. Teda $P(x) \equiv Q(x)$.

4.3 Označme S_C, S_B, S_A stredy strán AB, BC, CA a T ťažisko trojuholníka ABC (obr. 23). Zrejme trojuholník $S_AS_BS_C$ je obrazom trojuholníka ABC v rovnoľahlosti so stredom T a koeficientom $-\frac{1}{2}$ (zapisujeme $\mathcal{H}_{(T,-\frac{1}{2})}(\triangle ABC \to \triangle S_AS_BS_C)$. Keďže

$$\frac{|OP|}{|OS_A|} = \frac{|OQ|}{|OS_B|} = \frac{|OR|}{|OS_C|} = \frac{2}{3},$$

potom taktiež $\mathcal{H}_{(O,\frac{2}{3})}(\triangle S_AS_BS_C) \to \triangle PQR)$.

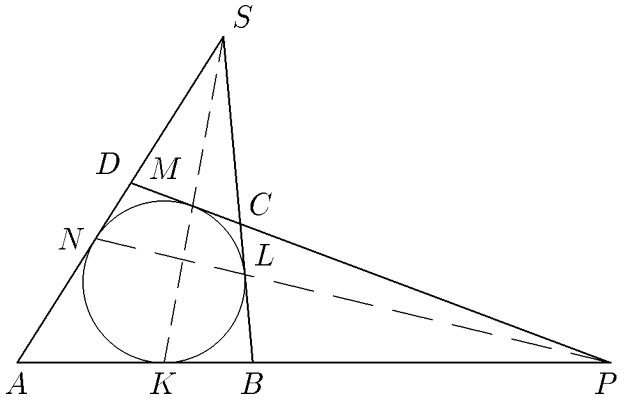
Ak označíme $\mathcal{Z} = \mathcal{H}_{(T,-\frac{1}{2})} \circ \mathcal{H}_{(O,\frac{2}{3})}$ zloženie rovnoľahlostí (pričom ako prvá sa vykoná tá vľavo), tak $\mathcal{Z}(\triangle ABC \to \triangle PQR)$. Nech S je stred vpísanej kružnice trojuholníku PQR. Potom platí $\mathcal{Z}(O \to S)$. Vezmime teraz bod O' taký, že $\mathcal{H}_{(T,-\frac{1}{2})}(O \to O')$. Zjavne O' leží na polpriamke $\overrightarrow{OT}$ a naviac $|O'O| = \frac{3}{2}|TO|$, čiže $|TO| = \frac{2}{3}|O'O|$. Potom však $\mathcal{H}_{(O,\frac{2}{3})}(O' \to T)$, z čoho $T \equiv S$. Tým je tvrdenie dokázané.



Obr. 23

Poznámka. V špeciálnom prípade ak $T \equiv O$, sú body O a O' v oboch rovnoľahlostiach samodružné, čiže aj $S \equiv O \equiv T$.

4.4 *(Vladimír Marko)* Označme $a = |AK| = |AN|$, $b = |BK| = |BL|$, $c = |CL| = |CM|$, $d = |DM| = |DN|$, $s = |SN| = |SL|$, $p = |PK| = |PM|$. Použitím *Menelaovej vety* pre trojuholník APD a kolineárne body K, M, S (ležia na $\overleftrightarrow{AP}$, $\overleftrightarrow{PD}$, $\overleftrightarrow{AD}$) dostávame (obr. 24):



Obr. 24

$$\frac{|KA|}{|KP|} \cdot \frac{|MP|}{|MD|} \cdot \frac{|SD|}{|SA|} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{p} \cdot \frac{p}{d} \cdot \frac{s-d}{s+a} = 1 \,. \tag{1}$$

Použitím *Menelaovej vety* pre trojuholník BPC a kolineárne body K, M, S (ležia na $\overleftrightarrow{BP}$, $\overleftrightarrow{PC}$, $\overleftrightarrow{BC}$) dostávame:

$$\frac{|KB|}{|KP|} \cdot \frac{|MP|}{|MC|} \cdot \frac{|SC|}{|SB|} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{b}{p} \cdot \frac{p}{c} \cdot \frac{s-c}{s+b} = 1 \,. \tag{2}$$

Označme P' priesečník $\overleftrightarrow{NL}$ a $\overleftrightarrow{AB}$, P'' priesečník $\overleftrightarrow{NL}$ a $\overleftrightarrow{CD}$, nech $p' = |P'K|$, $p'' = |P''M|$. Použitím *Menelaovej vety* pre trojuholník ABS a body N, L, P' máme:

$$\frac{|NA|}{|NS|} \cdot \frac{|LS|}{|LB|} \cdot \frac{|P'B|}{|P'A|} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{s}{b} \cdot \frac{p'-b}{p'+a} = 1\,. \tag{3}$$

Použitím *Menelaovej vety* pre trojuholník CDS a body N, L, P'' máme:

$$\frac{|ND|}{|NS|} \cdot \frac{|LS|}{|LC|} \cdot \frac{|P''C|}{|P''D|} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{s} \cdot \frac{s}{c} \cdot \frac{p''-c}{p''+d} = 1\,. \tag{4}$$

Potom z (1) a (2) dostaneme $\dfrac{2ad}{a-d} = s = \dfrac{2bc}{b-c}$, čo po úpravách dáva $\dfrac{2cd}{d-c} = \dfrac{2ab}{a-b}$. Z (3) a (4) dostávame $p' = \dfrac{2ab}{a-b}$, $p'' = \dfrac{2cd}{d-c}$. Vidíme, že $p' = p''$, a teda aj $P'' \equiv P' \equiv P$, čo sme mali dokázať.

Poznámka. Treba ešte ukázať, že $a - d \neq 0$ a $d - c \neq 0$ (týmito výrazmi sme delili). Lenže ak by bolo $a = d$, potom $|AN| = |DN|$ a $KM \parallel AD$ a neexistoval by bod S. Rovnako v prípade $b = c$.

4.5 *(Miroslav Dudík)* Tvrdenie dokážeme sporom. Nech taká stratégia neexistuje. Označme $\mathcal{D}$ danú množinu úsečiek. Existencia vyhrávajúcej stratégie formálne zapísaná je ekvivalentná s tvrdením, že

$$\begin{gathered}\forall\mathcal{D}:\ \exists a\in\mathcal{D}:\ \forall a'\in\mathcal{D}\setminus\{a\}:\ \exists b\in\mathcal{D}\setminus\{a,a'\}:\ \forall b'\in\mathcal{D}\setminus\{a,a',b\}:\\ \exists c\in\mathcal{D}\setminus\{a,a',b,b'\}:\ \forall c'\in\mathcal{D}\setminus\{a,a',b,b',c\}:\ S(a,b,c)\geqq S(a',b',c'),\end{gathered}$$

kde $S(a,b,c)$ je obsah trojuholníka so stranami a, b a c. Preto je negácia tohto tvrdenia nasledujúca:

$$\begin{gathered}\exists\mathcal{D}:\ \forall a\in\mathcal{D}:\ \exists a'\in\mathcal{D}\setminus\{a\}:\ \forall b\in\mathcal{D}\setminus\{a,a'\}:\ \exists b'\in\mathcal{D}\setminus\{a,a',b\}:\\ \forall c\in\mathcal{D}\setminus\{a,a',b,b'\}:\ \exists c'\in\mathcal{D}\setminus\{a,a',b,b',c\}:\ S(a,b,c)<S(a',b',c'),\end{gathered}$$

teda existencia vyhrávajúcej stratégie pre druhého hráča (pre konkrétnu množinu $\mathcal{D}$).

Označme hráčov po rade $\mathcal{H}_1$ a $\mathcal{H}_2$. Ďalej nech $P(a)$ je úsečka a', ktorú by si bral v druhom ťahu $\mathcal{H}_2$, ak by $\mathcal{H}_1$ bral v prvom ťahu a, ďalej $P(a,b)$ úsečku b', ktorú by ťahal v štvrtom ťahu $\mathcal{H}_2$, keby boli postupne ťahané $a, P(a), b$, a napokon $P(a,b,c)$ úsečku, ktorú by ťahal v poslednom ťahu $\mathcal{H}_2$, keby boli postupne ťahané $a, P(a), b, P(a,b), c$. Zrejme $P(a,b,c)$ je jediný prvok množiny $\mathcal{D}\setminus\{a,b,c,P(a),P(a,b)\}$. K sporu dôjdeme tak, že ukážeme, že $\mathcal{H}_1$ môže docieliť koncovú situáciu, v ktorej bude mať úsečky $P(a)$, $P(a,b)$ a $P(a,b,c)$ (pričom podľa predpokladu existuje víťazná stratégia pre $\mathcal{H}_2$, kde $\mathcal{H}_1$ ťahá úsečky a, b a c).

Nech $\mathcal{H}_1$ ťahá v prvom ťahu $P(u_1)$, pričom u_1 je ľubovoľná úsečka z $\mathcal{D}$. Potom má $\mathcal{H}_2$ dve možnosti (podľa svojej víťaznej stratégie):

- ťahá u_1; potom nech ďalej $\mathcal{H}_1$ ťahá $P(u_1, u_2)$, pričom u_2 je ľubovoľné z $\mathcal{D} \setminus \{u_1, P(u_1)\}$.
- ťahá u_2, $u_2 \in \mathcal{D} \setminus \{u_1, P(u_1)\}$; potom nech $\mathcal{H}_1$ ťahá $P(u_1, u_2)$, zrejme $P(u_1, u_2) \neq P(u_1)$ a $P(u_1, u_2) \neq u_2$.

Po týchto troch ťahoch má teda prvý hráč $P(u_1)$ a $P(u_1, u_2)$ a $\mathcal{H}_2$ má u_1 alebo u_2. Opäť sú dve možnosti:

- $\mathcal{H}_2$ ťahá u_2, resp. u_1; potom $\mathcal{H}_1$ ťahá ľubovoľnú úsečku, lebo pre dve zvyšné úsečky u_3, u_4 v $\mathcal{D}$ platí $P(u_1, u_2, u_3) = u_4$ a zároveň $P(u_1, u_2, u_4) = u_3$.
- $\mathcal{H}_2$ ťahá u_3, $u_3 \notin \{u_1, u_2\}$; potom $\mathcal{H}_1$ ťahá $P(u_1, u_2, u_3)$, ktorá iste nebola ešte vytiahnutá (je to tá úsečka, ktorá je rôzna od zvyšnej u_1 príp. u_2).

Na konci hry má teda $\mathcal{H}_1$ úsečky $P(u_1), P(u_1, u_2)$ a $P(u_1, u_2, u_3)$. Na druhej strane $\mathcal{H}_2$ má zvyšné úsečky, čiže u_1, u_2, u_3. Keďže sme však predpokladali, že $S(u_1, u_2, u_3) < S(P(u_1), P(u_1, u_2), P(u_1, u_2, u_3))$, dostávame spor. Preto pre $\mathcal{H}_1$ vždy existuje vyhrávajúca stratégia.

Iné riešenie. *(Pavol Černý)*

Hra môže mať $\dfrac{\binom{6}{3}}{2!} = 10$ rôznych priebehov. Existuje teda 10 neprehrávajúcich trojíc úsečiek. Označme úsečky po rade $u_1, \dots, u_6$ tak, aby $P(u_1) \geqq P(u_i)$, pre $i = 2, \dots, 6$, kde $P(u_i)$ je počet výskytov úsečky u_i v neprehrávajúcich trojiciach. Rozoberieme tri prípady.

a) $P(u_1) \geqq 7$;
b) $P(u_1) = 6$ a $P'(u_2) \leqq 3$ alebo $P(u_1) = 5$ a $P'(u_2) \leqq 2$;
c) $P(u_1) = 6$ a $P'(u_2) = 4$ alebo $P(u_1) = 5$ a $P'(u_2) = 4$ alebo $P(u_1) = 5$ a $P'(u_2) = 3$.

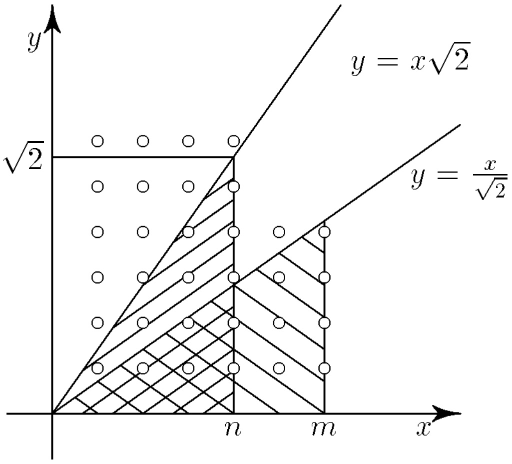
(u_2 je úsečka, ktorá sa najčastejšie vyskytuje v neprehrávajúcich trojiciach v kombinácii s u_1 a $P'(u_2)$ je počet týchto výskytov.) Keďže spolu s u_1 a u_2 môžu byť v neprehrávajúcich trojiciach nanajvýš štyri iné úsečky, platí $P'(u_2) \leqq 4$. Ďalej na 30 miest v neprehrávajúcich trojiciach umiestňujeme 6 úsečiek, preto podľa *Dirichletovho princípu* platí $P(u_1) \geqq 5$. Z toho okamžite vidieť, že prípady a), b) a c) predstavujú všetky možnosti.

a) $P(u_1) \geqq 7$. Vezmime si tie neprehrávajúce trojice, v ktorých je u_1 a nie u_2. Sú aspoň tri ($7-4=3$). V týchto trojiciach je aspoň šesť miest, na ktoré umiestňujeme štyri zvyšné úsečky, preto podľa *Dirichletovho princípu* existuje úsečka u_3, ktorá je tam aspoň dvakrát. Nevyhrávajúca stratégia pre prvého hráča je potom:
 – prvý ťah ($\mathcal{H}_1$) u_1, potom dva prípady:
  i) druhý ťah ($\mathcal{H}_2$) u_2, potom tretí ťah ($\mathcal{H}_1$) u_3 a ostanú aspoň dve neprehrávajúce trojice, v ktorých je u_1, u_3 a nie u_2. Hráč $\mathcal{H}_2$ môže svojim ťahom zrušiť nanajvýš jednu a ťah $\mathcal{H}_1$ povedie k druhej.
  ii) druhý ťah ($\mathcal{H}_2$) nie je u_2, napr. u_4, potom tretí ťah ($\mathcal{H}_1$) je u_2 a opäť ostali aspoň dve neprehrávajúce trojice obsahujúce u_1 a u_2 a nie u_4 ($P'(u_2) \geqq P'(u_3) \geqq 2$) a ďalej možno postupovať ako v i).

b) Možno postupovať podobne ako v a), existuje také u_3, že $P'(u_3) \geqq 2$ a stratégia je rovnaká ako v a).

c) Najprv prípady $P(u_1) = 6$ a $P'(u_2) = 4$ alebo $P(u_1) = 5$ a $P'(u_2) = 4$. Existujú aspoň 4 nevyhrávajúce trojice obsahujúce u_1. Tieto nevyhrávajúce trojice už zrejme neobsahujú u_2 (všetky kombinácie u_1 a u_2 – štyri – sú už vo vyhrávajúcich trojiciach). Im odpovedajúce neprehrávajúce trojice u_2 už obsahovať musia, z toho $P(u_2) = 4 + P'(u_2) = 8$, čo je spor, pretože $P(u_1) \geqq P(u_2)$, teda takýto prípad nemôže nastať. Pre $P(u_1) = 5$ a $P'(u_2) = 3$ dostaneme obdobný spor.

4.6 *(Peter Svrček)* Dokazovaná identita je ekvivalentná s tým, že dve vyšrafované oblasti na obr. 25 obsahujú rovnaký počet mrežových bodov (mrežové body na x-ovej osi nepočítame).



Obr. 25

Z geometrickej interpretácie okamžite vychádza, že

$$\sum_{k=0}^{n} \lfloor k \cdot \sqrt{2} \rfloor = \sum_{\substack{i=1\\ i<n\sqrt{2}}} \left(n - \left\lfloor \frac{i}{\sqrt{2}} \right\rfloor \right).$$

(Mrežové body v prvej oblasti sčítame nie po stĺpcoch, ale po riadkoch ako doplnok počtu mrežových bodov v obdĺžniku k bodom nad grafom.)

Teraz sa pokúsime stanoviť presnú hranicu, pokiaľ sčítame v sume. Dokážeme, že

$$\sum_{\substack{i=1\\ i<n\sqrt{2}}} \left(n - \left\lfloor \frac{i}{\sqrt{2}} \right\rfloor \right) = \sum_{i=1}^{m-1} \left(n - \left\lfloor \frac{i}{\sqrt{2}} \right\rfloor \right).$$

Stačí dokázať $m - 1 < n\sqrt{2} < m$. Z daného vzťahu $2(n+2)n = (m+2)m$ po pripočítaní dvojky na obe strany dostaneme

$$2(n+1)^2 = 2(n+2)n + 2 = m^2 + 2m + 2, \quad \text{čiže} \quad n = \sqrt{\frac{m(m+2)+2}{2}} - 1.$$

Potom

$$n\sqrt{2} = \sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{m(m+2)}{2}+1} - 1\right) = \sqrt{(m+1)^2+1} - \sqrt{2} < m.$$

Poslednú nerovnosť sme dostali z nerovnosti

$$m^2 + 2m + 2 = (m+1)^2 + 1 < (m+\sqrt{2})^2 = m^2 + 2\sqrt{2}m + 2.$$

Ešte dokážeme, že

$$m - 1 < n\sqrt{2} = \sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{m(m+2)}{2}+1} - 1\right) = \sqrt{(m+1)^2+1} - \sqrt{2}.$$

Platí

$$m - 1 + \sqrt{2} < \sqrt{(m+1)^2+1},$$
$$m^2 + 2(\sqrt{2}-1)m + 3 - 2\sqrt{2} < m^2 + 2m + 2,$$

pretože $2(\sqrt{2}-1) < 2$ a $3 - 2\sqrt{2} < 2$ a umocnenie bola ekvivalentná úprava.

Obdobným spôsobom ukážeme, že $n = \left\lfloor \dfrac{m}{\sqrt{2}} \right\rfloor$, čiže

$$n \leqq \frac{m}{\sqrt{2}} < n + 1.$$

Preto $n - \left\lfloor \dfrac{m}{\sqrt{2}} \right\rfloor = 0$, a teda

$$\sum_{k=0}^{n} \left\lfloor k \cdot \sqrt{2} \right\rfloor = \sum_{i=1}^{m-1} \left(n - \left\lfloor \frac{i}{\sqrt{2}} \right\rfloor \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(n - \left\lfloor \frac{i}{\sqrt{2}} \right\rfloor \right).$$

Preto je dokazovaná identita ekvivalentná s identitou

$$\sum_{i=1}^{m} \left\lfloor \frac{i}{\sqrt{2}} \right\rfloor = \sum_{i=1}^{m} \left(n - \left\lfloor \frac{i}{\sqrt{2}} \right\rfloor \right),$$

čiže

$$\sum_{i=1}^{m} n = 2 \cdot \sum_{i=1}^{m} \left\lfloor \frac{i}{\sqrt{2}} \right\rfloor.$$

To však zrejme na základe obr. 25 platí, pretože priamka $y = x\sqrt{2}$ neprechádza žiadnym mrežovým bodom, a preto obsahuje vyšrafovaná časť presne polovicu mrežových bodov vo vnútri obdĺžnika $n \times m$, ktorý obsahuje práve $\sum_{i=1}^{m} n$ mrežových bodov.

4.7 *(Vladimír Marko)* Dokážeme, že také prirodzené číslo n neexistuje.

Pre $n = 2$ je súčet $n - 1$ čísel len jedno číslo, ktoré zrejme patrí len do tej množiny, v ktorej je, a teda toto n nevyhovuje.

Pre $n \geqq 3$ budeme postupovať sporom. Nech sa dá množina $\mathbb{N}$ rozdeliť na n podmnožín spĺňajúcich danú podmienku. Potom medzi týmito množinami (podľa *Dirichletovho princípu*) existuje množina $\mathcal{A}$, ktorá obsahuje aspoň dve čísla z množiny $\{1, 2, \dots, n + 1\}$, zrejme je rozdiel medzi týmito dvomi číslami nanajvýš n. Rozlíšime dva prípady:

- Existuje taká množina $\mathcal{A}$, že rozdiel medzi niektorými jej prvkami je menší ako n, označme tieto čísla x a $x + d$, $d < n$. Vezmime teraz ľubovoľnú inú množinu $\mathcal{B}$ a jej ľubovoľný prvok y. Potom

$$y \in \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad y + d \in \mathcal{B} \cup \mathcal{A}. \tag{1}$$

  Ak by totiž $y + d \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C} \nsubseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, potom by sme vzali súčet S ľubovoľných $n - 3$ čísel z množín iných ako $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ (prípadne pre $n = 3$ máme $S = 0$), potom $S + x + (y + d)$ má patriť $\mathcal{B}$ a $S + (x + d) + y$ má patriť $\mathcal{C}$, čo je spor, lebo $S + (x + d) + y = S + x + (y + d)$.

  Teraz vezmime množinu $\mathcal{A}$ tak, že najmenší rozdiel medzi jej dvomi prvkami d je najmenší zo všetkých množín rozkladu množiny $\mathbb{N}$. Potom čísla $x+1, x+2, \dots, x + d - 1$ musia patriť rôznym množinám rôznym od $\mathcal{A}$. Čísla $x + d + 1, x + d + 2, \dots, x + 2d - 1$ podľa už dokázaného tvrdenia (1) patria buď $\mathcal{A}$, čo vzhľadom na minimalitu d nie je možné, alebo tej istej množine, ktorá obsahuje číslo o d menšie. Preto dvojice $(x + 1, x + d + 1)$, $(x + 2, x + d + 2)$ až $(x + d - 1, x + 2d - 1)$ patria do jednej množiny. Teraz však zrejme môžeme množinu $\mathcal{A}'$ obsahujúcu dvojicu $(x + 1, x + d + 1)$ zvoliť za počiatočnú a rovnakou úvahou dostaneme, že dvojica prvkov $(x + 1 + (d - 1), x + d + 1 + (d - 1)) = (x + d, x + 2d)$ patrí tej istej množine, čiže aj $x + 2d \in \mathcal{A}$. Dvojicu prvkov $(x + d, x + 2d)$ môžeme teraz zvoliť za $(x', x' + d)$ atď. Postupne dostávame, že v množine $\mathcal{A}$ ležia všetky prvky $x, x + d, x + 2d, \dots, x + kd, \dots$, prvky $x + 1, x + d + 1, x + 2d + 1, \dots, x + kd + 1, \dots$ v ďalšej množine atď.

  Tvrdenie (1) zrejme platí aj naopak (ľahko sa obrátia úvahy), čiže

$$y + d \in \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad y \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$$

  a celú predchádzajúcu úvahu možno rozšíriť aj na čísla menšie ako x a dostávame rozklad $\mathbb{N}$ nie na n ale na d, $d < n$ množín, čo je spor.

- Neexistuje množina $\mathcal{A}$ s číslami $x, x + d$, $d < n$. Keďže sme však už dokázali, že $d \leqq n$, potom použitím úvah ako v predchádzajúcom prípade dostaneme rozklad množiny $\mathbb{N}$ na zvyškové triedy modulo n, čiže v jednotlivých množinách budú čísla dávajúce ten istý zvyšok po delení číslom n. Potom ak sčítame po jednom čísle z každej množiny a súčet označíme S, zrejme

$$S \equiv \sum_{i=1}^{n} i \pmod{n}.$$

Číslo $S-1$ musí patriť zvyškovej triede obsahujúcej 1, čiže $S-1 \equiv 1 \pmod n$ a podobne $S-2 \equiv 2 \pmod n$. Tak však dostávame, že zároveň $2 \equiv S \equiv 4 \pmod n$, čo nie je možné, lebo $2 \equiv 4 \pmod n$ len pre $n \leqq 2$. Opäť dostávame spor.

Tvrdenie je teda dokázané, hľadaný rozklad neexistuje.

Piata séria

5.1 *(Peter Kozák)* Predpokladajme, že x je koreňom danej rovnice, teda pre x platí:

$$x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx + 1 = 0.$$

Očividne $x \neq 0$, a teda platí

$$ax^2 + b = -\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x} = -\frac{(x^2+1)^2}{x}.$$

Potom z *Cauchyho nerovnosti*

$$|\overrightarrow{u}|^2 \cdot |\overrightarrow{v}|^2 \geqq \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \qquad \text{alebo} \qquad (u_1^2 + u_2^2) \cdot (v_1^2 + v_2^2) \geqq (u_1v_1 + u_2v_2)^2.$$

pre vektory $(u_1, u_2) = \overrightarrow{u} = (a, b)$ a $(v_1, v_2) = \overrightarrow{v} = (x^2, 1)$ dostávame:

$$(a^2 + b^2) \cdot (x^4 + 1) \geqq (ax^2 + b)^2 = \frac{(x^2+1)^4}{x^2}.$$

Z toho (výraz $x^4 + 1$ je zrejme vždy kladný)

$$a^2 + b^2 \geqq \frac{(x^2+1)^4}{x^2(x^4+1)}. \tag{1}$$

Teraz dokážeme, že platí

$$\frac{(x^2+1)^4}{x^2(x^4+1)} \geqq 8,$$

pre každé reálne číslo x rôzne od 0. Ekvivalentnými úpravami tejto nerovnosti postupne dostávame

$$\begin{aligned}(x^2+1)^4 &\geqq 8x^2(x^4+1),\\ x^8 - 4x^6 + 6x^4 - 4x^2 + 1 &\geqq 0,\\ (x^2-1)^4 &\geqq 0,\end{aligned}$$

čo zrejme platí pre každé $x \in \mathbb{R}$. Spolu s (1) potom máme $a^2 + b^2 \geqq 8$. Na druhej strane, rovnica $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$ má reálny koreň $x = -1$, a pre ňu $a = b = 2$, čiže $a^2 + b^2 = 8$. To znamená, že hľadaná minimálna hodnota súčtu $a^2 + b^2$ je 8.

5.2 *(Viera Růžičková)* Nech $n^2 = a^3 - (a-1)^3$ pre nejaké $a \in \mathbb{N}$, $a > 1$. Jednoduchou úpravou dostávame $3a^2 - 3a + 1 - n^2 = 0$. Z toho potom $a = \dfrac{3 + \sqrt{12n^2 - 3}}{6}$. Pretože a je prirodzené číslo, musí byť $12n^2 - 3$ štvorec. Platí $12n^2 - 3 = 3(2n-1)(2n+1)$. Najväčší spoločný deliteľ čísel $2n-1$ a $2n+1$ je 1, pretože sú obe nepárne a ich rozdiel je 2. Ak je teda číslo $3(2n-1)(2n+1)$ druhou mocninou prirodzeného čísla, potom jedno z čísel $2n-1$ a $2n+1$ je tiež druhou mocninou a druhé z týchto čísel je rovné trojnásobku druhej mocniny prirodzeného čísla. Pretože sú obe čísla $2n \pm 1$ nepárne, môžu nastať dva prípady:

1) Platí $2n - 1 = (2m-1)^2$ pre nejaké prirodzené číslo m. Potom

$$2n - 1 = 4m^2 - 4m + 1, \qquad \text{čiže} \qquad n = 2m^2 - 2m + 1 = m^2 + (m-1)^2.$$

2) Platí $2n - 1 = 3 \cdot (2m-1)^2$ pre nejaké prirodzené číslo m. Potom $2n + 1 = 3 \cdot (2m - 1)^2 + 2$, a zároveň má byť $2n+1$ štvorcom. Lenže žiaden štvorec prirodzeného čísla nedáva po delení tromi zvyšok 2, a teda tento prípad nenastáva.

Tým sme dokázali, že vyhovujúce n je vždy súčtom dvoch štvorcov po sebe idúcich prirodzených čísel. Príklady takých n sú napr.

$$13^2 = 8^3 - 7^3, \quad 13 = 2^2 + 3^2; \qquad 181^2 = 105^3 - 104^3, \quad 181 = 9^2 + 10^2.$$

5.3 *(Róbert Macho)* Uvedomme si, že funkcia f nadobúda len celočíselné hodnoty. Zaoberajme sa najprv minimom. Zrejme pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$f(n) = n - \sum_{k=1}^{m} \lfloor r_k n \rfloor \geqq n - \sum_{k=1}^{m} r_k n = 0\,.$$

To znamená, že minimum funkcie f bude nezáporné. Ďalej ukážeme, že je rovné 0 (pre ľubovoľné $r_1, r_2, \dots, r_m$ spĺňajúce podmienky zadania). Položme $r_k = \dfrac{p_k}{q_k}$, kde $p_k, q_k \in \mathbb{N}$, $(p_k, q_k) = 1$, pre $k = 1, 2, \dots, m$. Ďalej označme $N = \operatorname{nsn}(q_1, q_2, \dots, q_m)$ (najmenší spoločný násobok) a nech $N = q_k s_k$, $s_k \in \mathbb{N}$, pre $k = 1, 2, \dots, m$. Potom zrejme $r_k = \dfrac{p_k s_k}{N}$, pričom $\sum\limits_{k=1}^{m} p_k s_k = N$. Ďalej platí:

$$f(N) = N - \sum_{k=1}^{m} \left\lfloor \frac{p_k s_k}{N} \cdot N \right\rfloor = N - \sum_{k=1}^{m} \lfloor p_k s_k \rfloor = N - \sum_{k=1}^{m} p_k s_k = N - N = 0\,.$$

Tým sme ukázali, že minimum funkcie f je rovné 0 pre každé $r_1, r_2, \dots, r_m$ spĺňajúce podmienky zadania.

Zaoberajme sa teraz maximom. Keďže $\forall x \in \mathbb{R} : \lfloor x \rfloor > x - 1$, tak

$$\forall n \in \mathbb{N} : f(n) = n - \sum_{k=1}^{m} \lfloor r_k n \rfloor < n - \sum_{k=1}^{m} (r_k n - 1) = n - n \cdot \sum_{k=1}^{m} r_k + m = m\,.$$

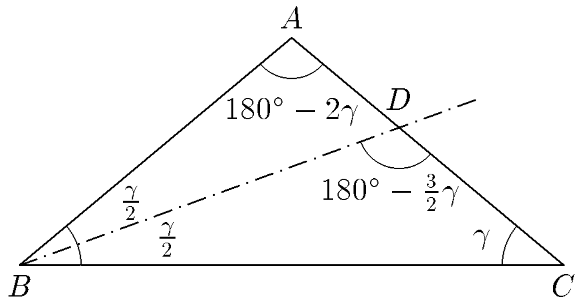
Preto $\forall n \in \mathbb{N} : f(n) \leqq m-1$. Ukážeme, že pre ľubovoľné $r_1, r_2, \dots, r_m$ existuje $n \in \mathbb{N}$ také, že $f(n) = m-1$, a teda $m-1$ je maximum funkcie f. Stačí zvoliť $n = N-1$. Potom

$$f(N-1) = N-1-\sum_{k=1}^{m}\left\lfloor \frac{p_k s_k}{N}\cdot(N-1)\right\rfloor = N-1-\sum_{k=1}^{m}\lfloor p_k s_k - r_k\rfloor =$$
$$= N-1-\sum_{k=1}^{m}(p_k s_k - 1) = N-1-N+m = m-1\,.$$

Teda maximum funkcie f je rovné $m-1$ pre ľubovoľné $r_1, r_2, \dots, r_m$ spĺňajúce podmienky zadania.

5.4 Označme $\gamma = |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ACB|$. Zrejme $\gamma \in (0^\circ, 90^\circ)$. Potom pre veľkosti ostatných uhlov platí: $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle DBA| = \frac{1}{2}\gamma$, $|\sphericalangle BAC| = 180^\circ - 2\gamma$, $|\sphericalangle BDC| = 180^\circ - \frac{3}{2}\gamma$ (obr. 26). Zo sínusovej vety pre trojuholníky ABD a BDC dostávame:

$$|AD| = |BD|\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin 2\gamma} \qquad \text{a} \qquad |BC| = |BD|\cdot\frac{\sin\frac{3}{2}\gamma}{\sin\gamma}\,.$$



Obr. 26

Dosadíme tieto vzťahy do $|BC| = |BD| + |AD|$ a úpravami dostávame:

$$|BD|\cdot\frac{\sin\frac{3}{2}\gamma}{\sin\gamma} = |BD| + |BD|\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin 2\gamma},$$
$$2\cdot\sin\tfrac{3}{2}\gamma\cdot\cos\gamma = \sin 2\gamma + \sin\tfrac{1}{2}\gamma,$$
$$\sin\tfrac{5}{2}\gamma - \sin 2\gamma = 0, \qquad \text{a teda} \qquad 2\cdot\sin\tfrac{1}{4}\gamma\cdot\cos\tfrac{9}{4}\gamma = 0\,.$$

Použili sme vzorce pre súčet a rozdiel dvoch sínusov. Riešeniami poslednej rovnice sú

$$\gamma = 4k\cdot 180^\circ = k\cdot 720^\circ \qquad \text{a} \qquad \gamma = \frac{4}{9}(90^\circ + l\cdot 180^\circ) = 40^\circ + l\cdot 80^\circ,$$

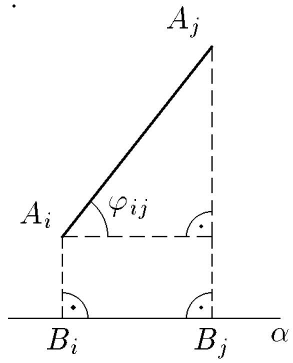
kde $k, l \in \mathbb{Z}$. Keďže $\gamma \in (0^\circ, 90^\circ)$, jediným riešením je $\gamma = 40^\circ$, a teda $|\sphericalangle BAC| = 180^\circ - 2\gamma = 100^\circ$. Skúškou sa ľahko presvedčíme o správnosti výsledku.

5.5 Označme $A_1A_2A_3A_4$ daný pravidelný štvorsten. Nech $|A_1A_2| = 1$. Uložme ho tak, aby ležal nad vodorovnou rovinou α (v jednom pevne zvolenom polpriestore určenom touto rovinou). Nech B_1, B_2, B_3 a B_4 sú po rade kolmé priemety bodov A_1, A_2, A_3 a A_4 do roviny α. Označme $v_i = |A_iB_i|$ pre $i = 1, 2, 3, 4$. Bez ujmy na všeobecnosti nech $v_1 \leqq v_2 \leqq v_3 \leqq v_4$, a nech φ_{ij}, $i \neq j$ je veľkosť uhla, ktorý zviera hrana A_iA_j s rovinou α (obr. 27). Potom

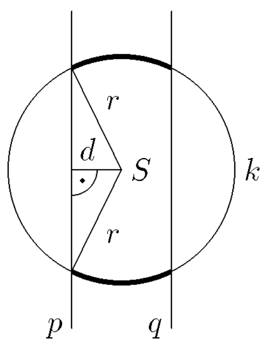
$$\sin\varphi_{ij} = \frac{|v_i - v_j|}{|A_iA_j|} = |v_i - v_j|\,.$$

Zrejme $\varphi_{ij} \in \langle 0°, 90°\rangle$ (pre $1 \leqq i < j \leqq 4$). Pretože funkcia sínus je na tomto intervale rastúca, tak φ_{ij} je maximálne práve vtedy, keď je maximálne $|v_i - v_j|$, a to je maximálne pre $i = 1, j = 4$. Teda $\varphi = \varphi_{14}$. Pre jednoduchosť zvoľme $v_1 = 0$, čiže $A_1 = B_1 \in \alpha$.

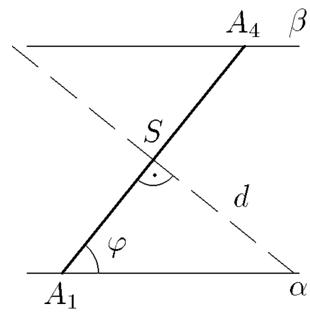
Ukážeme, že najmenšia možná hodnota $\varphi_{min} = 45°$. Táto hodnota sa nadobúda v prípade, keď $A_2 \in \alpha$, $\overleftrightarrow{A_3A_4} \parallel \alpha$. Vtedy je $|v_4 - v_1|$ rovné vzdialenosti priamok $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ a $\overleftrightarrow{A_3A_4}$. Ľahko možno určiť, že táto vzdialenosť je $\frac{\sqrt{2}}{2}$, a teda $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, čo dáva $\varphi = 45°$.



Obr. 27



Obr. 28



Obr. 29

Teraz sporom ukážeme, že $\varphi \geqq 45°$. Uvažujme polohu štvorstena $A_1A_2A_3A_4$ (pri ktorej $0 = v_1 \leqq v_2 \leqq v_3 \leqq v_4$) takú, že $\varphi < 45°$, čiže $v_4 - v_1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Vezmime si teraz rovinu β rovnobežnú s α takú, že $A_4 \in \beta$ a označme S stred A_1A_4. Ďalej vezmime rovinu γ kolmú na $\overleftrightarrow{A_1A_4}$ takú, že $S \in \gamma$. Označme p, q prieniky roviny γ s rovinami α, β. Potom zrejme $A_2, A_3 \in \gamma$ (pretože $|A_1A_3| = |A_4A_3|$, $|A_1A_2| = |A_4A_2|$ a γ je množina bodov s rovnakou vzdialenosťou od bodov A_1, A_4), $|SA_2| = |SA_3| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (dĺžka ťažnice v rovnostrannom trojuholníku), a teda body A_2, A_3 ležia na kružnici $k\left(S, r = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ v rovine γ. Naviac body A_2A_3 ležia medzi rovinami α, β, a teda v rovine γ ležia medzi priamkami p, q (situácia v rovine γ je na obr. 28). Vzdialenosť $d = |S\,p| = |S\,q|$ môžeme určiť z obr. 29 :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{d}{|AS|} = \frac{d}{\frac{1}{2}} = 2d, \qquad \text{teda} \qquad d = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi < \frac{1}{2}\operatorname{tg}45° = \frac{1}{2}\,.$$

Využili sme rastúcosť funkcie $\operatorname{tg} x$ na intervale $\langle 0°, 45°\rangle$. Potom body A_2, A_3 ležia na zjednotení kružnicových oblúkov vyznačených na obr. 28 (ďalej len oblúkov). Zrejme nemôžu ležať na tom istom oblúku, lebo potom by bolo $|A_2A_3| \leqq 2d < 1$, čo by bol spor. Teda ležia na rôznych oblúkoch a potom (tetiva je tým kratšia, čím menší uhol ju určuje):

$$|A_2A_3| \geqq 2\sqrt{r^2-d^2} = 2\sqrt{\frac{3}{4}-d^2} > 2\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}} = 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} > 1\,,$$

čo je spor. Tým sme ukázali, že najmenšia možná hodnota φ je $\varphi_{min} = 45°$.

5.6 *(Miroslav Dudík)* Tvrdenie budeme dokazovať sporom. Nech je postupnosť $\{a_n\}$ periodická s periódou p (na začiatok zvoľme p ako najmenšiu periódu).

Potom $a_n = a_{n+p}$, pre každé prirodzené číslo n, teda

$$\lfloor x^{n+1} \rfloor - x \cdot \lfloor x^n \rfloor = \lfloor x^{n+p+1} \rfloor - x \cdot \lfloor x^{n+p} \rfloor\,,$$

čo po jednoduchej úprave dáva

$$\lfloor x^{n+p+1} \rfloor - \lfloor x^{n+1} \rfloor = x \cdot \left(\lfloor x^{n+p} \rfloor - \lfloor x^n \rfloor\right). \tag{1}$$

Výraz $\lfloor x^{n+s} \rfloor - \lfloor x^n \rfloor$ je zrejme pre dostatočne veľké s kladný pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Keďže vzťah (1) platí aj pre každý násobok periódy p, môžme (prípadným prechodom k jej násobkom) bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $\lfloor x^{n+p} \rfloor - \lfloor x^n \rfloor > 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$x = \frac{\lfloor x^{n+p+1} \rfloor - \lfloor x^{n+1} \rfloor}{\lfloor x^{n+p} \rfloor - \lfloor x^n \rfloor} \in \mathbb{Q},$$

čiže x je racionálne číslo, ktoré možno zapísať v základnom tvare $x = \frac{r}{q}$, kde $r, q \in \mathbb{N}$, $(r,q) = 1$. Ak potom $\lfloor x^{n+p} \rfloor - \lfloor x^n \rfloor = A \cdot q^a$, $q \nmid A$, $a \in \mathbb{N}$, tak zrejme $q \neq 1$, pretože $x \notin \mathbb{Z}$.

Položme teraz vo vzťahu (1) $n = m+1$. Dostávame

$$\lfloor x^{m+p+2} \rfloor - \lfloor x^{m+2} \rfloor = x \cdot \left(\lfloor x^{m+p+1} \rfloor - \lfloor x^{m+1} \rfloor\right) = x^2 \cdot \left(\lfloor x^{m+p} \rfloor - \lfloor x^m \rfloor\right).$$

Poslednú rovnosť sme dostali z (1) položením $n = m$. Matematickou indukciou možno teraz jednoducho dokázať, že

$$\lfloor x^{m+p+k} \rfloor - \lfloor x^{m+k} \rfloor = x^k \cdot \left(\lfloor x^{m+p} \rfloor - \lfloor x^m \rfloor\right) = x^k \cdot A \cdot q^a,$$

kde k je ľubovoľné prirodzené číslo. Pre $k = a+1$ máme

$$\lfloor x^{m+p+a+1} \rfloor - \lfloor x^{m+a+1} \rfloor = x^{a+1} \cdot A \cdot q^a = \frac{p^{a+1}}{q^{a+1}} \cdot A \cdot q^a = \frac{A \cdot p^{a+1}}{q}.$$

Rozdiel celých čísel $\lfloor x^{m+p+a+1} \rfloor$ a $\lfloor x^{m+a+1} \rfloor$ musí však byť celý, teda $q | A \cdot p^{a+1}$, čo však nie je možné, a dostávame spor. Postupnosť $\{a_n\}$ teda nemôže byť periodická.

5.7 *(Viera Růžičková, Pavol Novotný, Keszegh Balázs)*

Zo zadaného vzťahu $|AX| \cdot |BN| = 2 \cdot |BX| \cdot |CN|$ dostávame

$$\frac{|AX|}{|BX|} = 2 \cdot \frac{|CN|}{|BN|}, \qquad \text{čiže} \qquad \frac{|AX| + |BX|}{|BX|} = \frac{2 \cdot |CN| + |BN|}{|BN|},$$

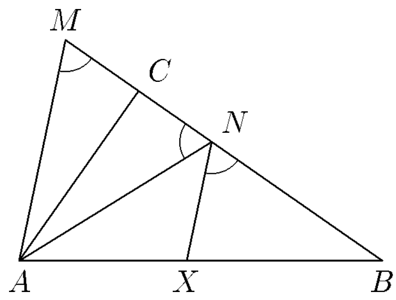
teda

$$\frac{|AB|}{|BX|} = \frac{2 \cdot |CN| + |BN|}{|BN|}.$$

Označme teraz M bod na polpriamke $\overrightarrow{BC}$, pre ktorý platí $|BM| = 2|CN| + |BN|$. Potom platí

$$\frac{|AB|}{|BX|} = \frac{|BM|}{|BN|}.$$

Preto sú úsečky AM a XN rovnoľahlé zo stredom rovnoľahlosti v B a teda aj rovnobežné. Pre uhly potom platí $|\sphericalangle AMB| = |\sphericalangle XNB|$. Zo zadania ďalej $|\sphericalangle BNX| = |\sphericalangle ANC|$, teda $|\sphericalangle AMB| = |\sphericalangle ANC|$. Trojuholník ANM je preto rovnoramenný a platí $|AM| = |AN|$. Keďže $|BM| = 2|CN| + |BN|$, zrejme aj $|CM| = |CN|$. Potom je ale AC výškou a zároveň ťažnicou v rovnoramennom trojuholníku ANM, teda $|\sphericalangle ACB| = 90°$.



Obr. 30

Obsah

DRUHÝ DIEL

RNDr. Karel Horák, CSc. – Richard Kollár
Jana Višňovská – Tomáš Vinař
Bronislava Brejová – Úlohová komisia MO

**Štyridsiatyšiesty ročník
matematickej olympiády
na stredných školách
2. diel**

Vydala IUVENTA v roku 1998
Sadzbu programom $\mathcal{AMS}$-TEX pripravili RNDr. Karel Horák, CSc. a Richard Kollár
Grafická úprava obálky Karel Horák a Richard Kollár
Nepreślo jazykovou úpravou
1.vydanie

ISBN 80–88893–19–4